DOKTORI (Ph.D.) ÉRTEKEZÉS

ORTOGONÁLIS POLINOMOK ZÉRUSHELYEI ÉS CHRISTOFFEL-FÜGGVÉNYEK

V a r g a   T a m á s

Témavezető:

Dr. Totik Vilmos

az MTA rendes tagja

tanszékvezető egyetemi tanár

Matematika és Számítástudományok Doktori Iskola

Szegedi Tudományegyetem

Bolyai Intézet

Szeged, 2013

Köszönetnyílvánítás

Köszönöm témavezetőmnek, Dr. Totik Vilmosnak, a kutatás során nyújtott iránymutatását, gondos megjegyzéseit, türelmét, bátorítását. Hálával tartozom, hogy nem csak a tudomány területén mutatott követendő példát, hanem erkölcsi magatartásával is magas mércét állított.

Köszönettel tartozom a Bolyai Intézet oktatóinak és további munkatársainak is, akik támogató légkört biztosítottak a kutatásokhoz.

A szerző kutatásaihoz szükséges anyagi fedezetet az MTA-SZTE Analízis és Sztochasztika Kutatócsoport, valamint a 267055 számú ERC pályázat biztosította.

Tartalomjegyzék

Ábrák jegyzéke

1. Bevezetés

Az analízisen belül a XIX. századra tehető az ortogonális polinomok elméletének kialakulása. Az első felfedezett ortogonális polinomok Legendre nevéhez fűződnek, majd ezt Jacobi eredményei követték. Az általuk leírt ortogonális polinomokat az utókor róluk nevezte el. A későbbiek során még számos osztály (Csebisev-, Laguerre-, vagy a Hermite-polinomok) leírása megtörtént. Ezek az úgynevezett klasszikus ortogonális polinomok.

Ezzel szemben még épp a XIX. század végén, amikor Stieltjes bevezeti a tetszőleges mértékekhez tartozó ortogonális polinomok fogalmát, megindul egy általánosabb megközelítés. Ebben az esetben az ortogonális polinomok általános tulajdonságainak (aszimptotikus viselkedés, zérushelyek elhelyezkedése, eloszlása, ezeknek a mérték jellemzőivel való összefüggései, stb.) megismerése kerül előtérbe. Jelen értekezés is erre az ágra illeszkedik.

Az ortogonális polinomok zérushelyeinek eloszlása már egészen enyhe föltételek mellett is vizsgálható [25, Ch. 2], de finomabb kérdések, mint a szomszédos zérushelyek közötti távolság, esetében erősebb feltételek szükségesek. Erdős Pál és Turán Pál munkájukban olyan intervallum fölött értelmezett súllyal dolgoznak, amely pozitív korlátok között mozog és belátják, hogy ekkor (az intervallum végpontjaitól távol eső) szomszédos zérushelyek nagyságrendileg $1/n$ távolságban helyezkednek el egymástól ([26, (6.11.15)]). Később számos hasonló eredmény születik a mértékről különféle tulajdonságokat feltételezve. Példaként említjük Last és Simon [9] vagy Simon hasonló című korábbi (monumentális terjedelmű) cikkeit, melyekben többek között az ortogonális polinomokhoz kapcsolódó rekurziós formulában előforduló együtthatókról vannak feltevések. Levin és Lubinsky [10] exponenciális súlyokkal, illetve pozitív folytonos súlyokkal kapcsolatban létesít a miénkhez hasonló eredményeket. Giuseppe Mastroianni és Totik Vilmos 2010-es cikkében [12] $[-1,1]$ tartójú duplázó mértékekkel foglakozik. Főeredményként belátták, hogy, ilyen általános körülmények között is, igaz marad Erdős és Turán távolságbecslése az ortogonális polinomok szomszédos zérushelyeinek elhelyezkedéséről. Eredményük magában foglalja az intervallum végpontjaihoz közel eső zérushelyeket is.

A disszertáció első részében Mastroianni és Totik eredményét általánosítva belátjuk, hogy eredményük már a mérték lokális tulajdonságaiból is következik. Ez alatt azt értjük, hogy a szomszédos zérushelyek egyenletes elrendeződését egy intervallumon már az is implikálja, hogy a mérték ezen az intervallumon duplázó tulajdonságú. Rámutatunk azonban, hogy az intervallum végpontjainak közelében vigyáznunk kell, mert itt a gyökök elhelyezkedését a mérték intervallumon kívüli viselkedése is befolyásolhatja. Ha viszont feltesszük, hogy a mérték a végpont intervallumhoz nem tartozó oldalán egy kis környezetben eltűnik, akkor a végpontok közelében is megjelenik a szabályos viselkedés. A szomszédos zérushelyek kétoldali becslésében a felső bizonyul nehezebbnek. Ebben kulcsszerepet játszanak a már Erdős és Turán által is használt

Christoffel-függvények. Ha ezeket tudjuk becsülni, akkor követhetjük Mastroianni és Totik módszerét. A Christoffel-függvény alsó becsléséhez csak arra az egyszerű észrevételre van szükség, hogy a megszorított mértékhez tartozó Christoffel-függvény alatta marad az eredeti mértékhez tartozónak. A felső becslésben gyorsan csökkenő polinomok alkalmazására kerül sor (vö. [30]), ami intervallum belsejében már rendelkezésünkre állt [8], de a végpont esetében meg kellett konstruálnunk.

A második részben a Christoffel-függvények kerülnek a középpontba. A Christoffel-függvények szorosan kapcsolódnak az ortogonális polinomokhoz, az approximációelmélethez és a harmonikus analízishez, de alkalmazzák a véletlen mátrixok elméletében vagy a spektrálelméletben is [16, 23].

Az általunk vizsgált probléma a Christoffel-függvények aszimptotikus vizsgálatához kapcsolható, amely egészen Szegő Gáborig nyúlik vissza [7, K. V, Aufgabe 13]. Eredményei további részletekbe menő kutatásokat inspiráltak, melyek elsősorban intervallumra vagy az egységkörre vonatkoztak (lásd pl. [11, 14, 22, 24, 26, 27]), így a közel jelenig csak keveset tudtunk a tetszőleges görbe fölötti aszimptotikus viselkedésről. Ezt feloldandó, Totik Vilmos több cikkében is foglakozik a kérdéssel és ad éles aszimptotikus eredményeket sima görbék fölött [29, 31]. Eljárásában komoly eszköztárat mozgat meg. Az ív esetben újabb nehézségek merülnek föl, a görbén alkalmazottak nem működnek, így új eljárást kellett kidolgoznia, amely az egyensúlyi mérték körültekintő diszkretizációján nyugszik [28].

Mi is síkbeli görbéken és íveken vizsgáljuk a Christoffel-függvényeket. Eredményeink aszimptotikusan ugyan nem élesek, viszont simaság tekintetében csak kvázi-simaságot feltételezünk, ami sarkok létezését is megengedi, így például egy négyzet sarkainál is lesz becslésünk, amire korábban nem volt példa. Azt is látni fogjuk, hogy a Christoffel-függvények értéke hogyan függ a sarokban található szög nagyságától. Eljárásunk egyaránt lehetővé teszi a görbék, az ívek, ill. a több görbéből és ívből álló rendszerek fölötti vizsgálatot. E tekintetben sokat merítünk Andrijevszkij nemrég megjelent munkáiból [1, 2, 3], melyekben Mastroianni és Totik [13] cikkében publikált eredményeit viszi át kvázi-sima görbékre és ívekre.

Totik esetéhez hasonlóan ismét technikai nehézséget okoz, hogy tetszőleges görbével/ívvel van dolgunk. A kapcsolatot az egységkörrel most a konform leképezések segítségével valósítjuk meg. A felülről történő becslésében ismét fontos szerep jut a gyorsan csökkenő polinomoknak, amit a konform leképezéshez tartozó Dzadyk-magfüggvényekből kiindulva konstruálunk meg. Az alsó becslésben Andrijevszkij imént idézett cikkeiben közölt Bernstein-típusú egyenlőtlenségeit használjuk föl. A Christoffel-függvényekre nyert kétoldali becslés alkalmazásaként ortogonális polinomokra adunk pontbeli becsléseket, ill. Nikolszkij-típusú egyenlőtlenségeket létesítünk.

Látni fogjuk, hogy a második rész eredményei magában foglalják az első részben igazolt

Christoffel-függvényekre vonatkozó becsléseket is, így azokat az első részből el is hagyhatnánk. Ezt mégsem tesszük meg; egyrészt mutatva, hogy az első rész a második nélkül csak az egyenesen használt egyszerűbb eszközök segítségével is kidolgozható, másrészt így azt is érzékeltetjük, hogy milyen technikai nehézséget jelent az egyenesről tetszőleges görbére/ívre való áttérés.

Az értekezés a jelölt alábbi munkáira épül:

- Totik Vilmos és Varga Tamás, Non-symmetric fast decreasing polynomials and applications, *J. Math. Anal. Appl.*, **394** (2012), 378–390. [33]
- Varga Tamás, Uniform spacing of zeros of orthogonal polynomials for locally doubling measures, *Analysis (Munich)*, **33** (2013), 1-12. [35]
- Varga Tamás, Christoffel functions for doubling measures on quasismooth curves and arcs, *Acta Math. Hungar.*, **141** (2013), 161-184. [36]

2. Előzmények

Legyen μ kompakt és végtelen számosságú tartóval rendelkező mérték a komplex síkon. Ekkor belátható (pl. [34, 1.1]), hogy egyértelműen létezik olyan $\{\pi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ polinom-sorozat, amelyre igaz hogy

(i) π_n foka pontosan n,

(ii) π_n főegyütthatója pozitív, és

(iii)
$$\int \pi_m \pi_n \, \mathrm{d}\mu = \begin{cases} 1 & \text{ha } m = n \\ 0 & \text{ha } m \neq n. \end{cases}$$

E polinom-sorozat tagjait a μ mértékhez tartozó *ortogonális*, pontosabban *ortonormált polinomoknak* (vö. (iii) tulajdonság) nevezzük. Ha nem világos, hogy π_n a μ mértékhez kapcsolódik, akkor a $\pi_n(\mu, .)$ jelöléshez folyamodunk.

Az ortogonális polinomok kiterjedt témája több könyvben is feldolgozásra került [7, 17, 22, 26]. Itt csak néhány számunkra érdekes eredményt idézünk. A következő tétel az ortogonális polinomok egy fontos és érdekes minimalizáló tulajdonságáról szól. Jelölje γ_n a π_n polinom főegyütthatóját.

2.1. Tétel ([34, Theorem 1.3]). *A legföljebb n-ed fokú főpolinomok (vagyis az* 1 *főegyütthatós polinomok) halmazán az*
$$\int |q|^2 \, \mathrm{d}\mu \tag{2.1}$$
kifejezés a $q = \frac{\pi_n}{\gamma_n}$ *helyen veszi fel minimumát.*

A tétel abban az esetben, ha μ tartója a számegyenes részhalmaza, azt sugalmazza, hogy π_n gyökeinek, minimalizálandó az (2.1) integrált, úgy kell elhelyezkedniük, hogy azok környezetének μ mértéke lehetőleg nagy legyen. Ezért, ha a μ mérték viszonylag egyenletesen oszlik el tartóján (pl. duplázó tulajdonságú), akkor azt várnánk, hogy π_n gyökei is így tesznek, hogy az előbbi integrál semelyik részintervallumon se lehessen túl nagy.

Az intuíció első felét alátámasztja a következő állítás.

2.2. Tétel ([7, §I.2.]). *Legyen* μ *kompakt és végtelen számosságú tartóval rendelkező mérték a számegyenesen. Ha a* μ*-höz tartozó n-ed fokú ortogonális polinom* π_n*, melynek gyökei növekvő sorrendben* $x_{n,1} < x_{n,2} < \cdots < x_{n,n}$*, akkor teljesülnek az alábbi állítások:*

(i) π_n *gyökei egyszeresek és ha* μ *tartója az* $[a, b]$ *intervallumba esik, akkor a gyökök is ebben az intervallumban helyezkednek el;*

(ii) π_n *és* π_{n+1} *gyökei közre fogják egymást, azaz*

$$x_{n+1,1} < x_{n,1} < x_{n+1,2} < x_{n,2} < \cdots < x_{n+1,n} < x_{n,n} < x_{n+1,n+1};$$

(iii) ha a $[c,d]$ *intervallumon* μ *eltűnik* ($\mu([c,d]) = 0$)*, akkor a* π_n *polinomnak legföljebb egyetlen gyöke eshet ebbe az intervallumba.*

Erdős Pál és Turán Pál [26, (6.11.15)] bevezetőben is említett eredménye alátámasztja a sejtés második felét. Ennek általánosítását adja a már ugyancsak idézett Mastroianni-Totik cikk. Ez utóbbi eredményeit most már pontosan idézzük.

2.3. Definíció. *A* $[-1,1]$ *tartójú* μ *mérték duplázó, ha létezik olyan* L *(duplázó) konstans, hogy bármely* $x \in [-1,1]$ *pontra és* $\delta > 0$ *számra*

$$L\mu\Big([x-\delta, x+\delta]\Big) \geq \mu\Big([x-2\delta, x+2\delta]\Big). \tag{2.2}$$

Tehát a középpontjából kétszeresére nagyított intervallum mértéke egyenletesen becsülhető az eredeti intervallum mértékével. A legegyszerűbb példa duplázó mértékre a Lebesgue-mérték, de duplázó tulajdonságú a ($(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, $\alpha, \beta > -1$, súlyhoz tartozó) Jacobi-mérték vagy minden olyan súly, amely két pozitív szám között veszi fel értékeit.

A [12] dolgozatban és a miénkben is fontos szerepet kap a Christoffel-függvény, melyet a következő módon definiálunk. Jelölje $\mathcal{P}_n$ a legföljebb n-ed fokú, komplex együtthatós polinomok halmazát. (Számegyenes esetén a következő definícióban elegendő valós együtthatós polinomokat vennünk.)

2.4. Definíció. *Legyen* μ *kompakt tartójú mérték a számegyenesen. A*

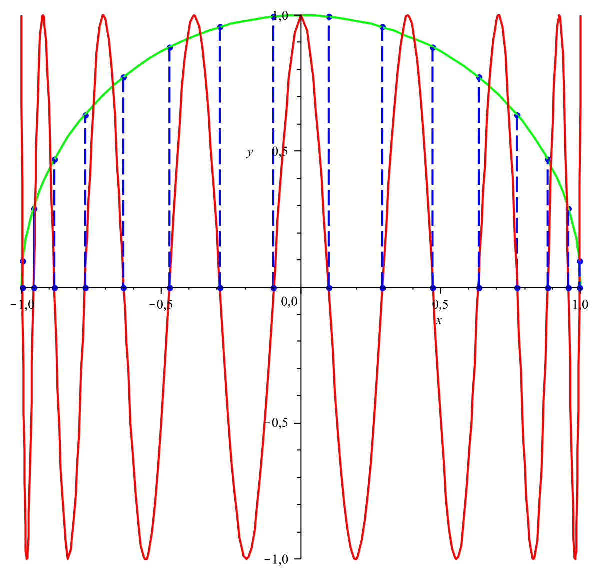
$$\lambda_n(\mu, p, x) := \inf_{\substack{q(x)=1 \\ q \in \mathcal{P}_n}} \int |q|^p \, \mathrm{d}\mu \tag{2.3}$$

függvényt a μ *mértékhez tartozó* p *paraméterű* n*-edik Christoffel-függvénynek nevezzük.*

Bevezetve a következő jelölést:

$$\Delta_n(x) := \frac{\sqrt{1-x^2}}{n} + \frac{1}{n^2},$$

kimondhatjuk a gyöktávolságokra vonatkozó tételt:



1. ábra. A 16. CSEBISEV-POLINOM. A $\frac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ (duplázó) mértékhez tartozó ortogonális polinomok, amiket a szakirodalom Csebisev-polinomokként tart számon, közül a 16-ikat mutatja az ábra. Az n-edik Csebisev-polinom képlete: $\cos(n \arccos(x)) = \sum_{k=1}^{[n/2]} \binom{n}{2k} x^{n-2k}(1-x^2)^k$. A szaggatott vonalak mentén függőlegesen felvetítettük a $[-1,1]$ intervallumban elhelyezkedő gyököket. Figyeljük meg, milyen szabályosan osztják fel az egységkört.

2.5. Tétel ([12, Theorem 1]). *Legyen μ duplázó mérték a $[-1,1]$ intervallumon, melyhez a $\{\pi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ortogonális polinom rendszer tartozik. Ha $x_{n,0} := -1 < x_{n,1} < \cdots < x_{n,n} < x_{n,n+1} := 1$ jelöli π_n gyökeit, akkor létezik olyan A konstans, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ és $0 \le k \le n$ egészre teljesül a következő egyenlőtlenség:*

$$\frac{1}{A}\Delta_n(x_{n,k}) \le x_{n,k+1} - x_{n,k} \le A\Delta_n(x_{n,k}). \tag{2.4}$$

Hangsúlyozzuk, hogy A független n-től és k-tól is. Ha megvizsgáljuk a $\Delta_n(x)$ függvényt, akkor azt láthatjuk, hogy a tétel szerint $[-1,1]$ belsejében a szomszédos gyökök távolságának nagyságrendje $1/n$, és ahogy közelítünk a végpontokhoz ez a nagyságrend fokozatosan $1/n^2$-be megy át. A zérushelyek szabályos elhelyezkedése akkor látszik igazán, ha a zérushelyeket függőlegesen felvetítjük az egységkörvonal pozitív ordinátájú részére (1.ábra). Ekkor a felvetített szomszédos pontok távolsága ívhosszban, vagy másként e felvetített pontokhoz tartozó középponti szögek különbsége $1/n$ nagyságrendű.

A Christoffel-függvények zérushelyeknél felvett értékeit, tehát a $\lambda_n(x_{n,k})$ értékeket, *Cotes-számoknak* vagy *Christoffel-számoknak* nevezzük. Az előző tétel felhasználásával kiderül, hogy a szomszédos Cotes-számok nagyságrendileg azonosak.

2.6. Következmény ([12, Theorem 2]). *Ha μ duplázó a $[-1,1]$ intervallumon, akkor létezik* *olyan csak a duplázó konstanstól függő B konstans, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ és $0 \le k \le n$ egészre*

$$\frac{1}{B} \le \frac{\lambda_n(x_{n,k+1})}{\lambda_n(x_{n,k})} \le B. \tag{2.5}$$

A két tétel eredményét teljessé teszi, hogy a bennük foglalt egyenlőtlenségek fennállása implikálja a duplázó tulajdonságot, vagyis a két tétel együttesen megfordítható.

2.7. Tétel ([12, Theorem 3]). *Ha μ mérték a $[-1, 1]$ intervallumon, és valamilyen A, illetve B konstansokkal teljesülnek a (2.4) és (2.5) egyenlőtlenségek minden $n \in \mathbb{N}$ és $1 \le k < n$ egészre, akkor μ duplázó mérték a $[-1, 1]$ intervallumon.*

Értekezésünk első részében azt igazoljuk, hogy ha a mérték tartójának csak egy részén rendelkezik duplázó tulajdonsággal, akkor e részen a fenti zérustávolságokra és Cotes-számokra vonatkozó kétoldali becslés továbbra is fennáll a megfordítással együtt. Bizonyításunk követi Mastroianni és Totik gondolatmenetét, amelyben a felső becslés kiszámolásánál fontos szerep jut a már bevezetett Christoffel-függvényeknek. Ennek kapcsán a következő korábbi eredményüket használták fel:

2.8. Tétel ([13, (7.14)]). *Ha μ duplázó a $[-1, 1]$ intervallumon, akkor van olyan c konstans, hogy bármely $x \in [-1, 1]$ pontra*

$$\frac{1}{c}\mu\Big([x - \Delta_n(x), x + \Delta_n(x)]\Big) \le \lambda_n(\mu, p, x) \le c\mu\Big([x - \Delta_n(x), x + \Delta_n(x)]\Big). \tag{2.6}$$

A tétel azt mondja, hogy egy duplázó mértékhez tartozó Christoffel-függvény egyfajta eloszlásfüggvényként viselkedik, azaz megadja –bár nem pontosan– egy speciális intervallum-rendszer tagjainak μ-mértékét.

Az értekezés második részében ezt a tételt általánosítjuk oly módon, hogy a $[-1, 1]$ intervallumot lecseréljük egy síkbeli kvázi-sima görbére vagy ívre. A módszer speciális eseteként sarkoknál is kapunk becslést, amire még olyan egyszerű esetben sem volt példa a szakirodalomban, amikor a mérték az ívhossz szerinti mérték.

3. Lokálisan duplázó mértékhez tartozó ortogonális polinomok gyöktávolsága

Ebben a részben feltesszük, hogy a vizsgált mérték tartója a számegyenes kompakt részhalmaza. Ha I egy intervallum a számegyenesen, akkor $2I$ jelölje a középpontjából megkétszerezett intervallumot, tehát a középpontja ugyanaz, mint az I intervallumé és hossza (Lebesgue-mértéke) annak kétszerese. Az I intervallum hosszát $|I|$-vel jelöljük.

3.1. A gyökök elrendeződése duplázó intervallumokon

3.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a μ mérték az $[a, b]$ intervallumon duplázó (tulajdonságú) az $L = L(\mu, [a, b])$ duplázó konstanssal, ha $\mu([a, b]) > 0$ és*

$$\mu(2I) \leq L\mu(I)$$

valahányszor $2I \subset [a, b]$.

(Néha a rövidség kedvéért azt is mondjuk, hogy *duplázó (tulajdonságú) intervallum*, ami alatt azt értjük, hogy egy mérték duplázó ezen az intervallumon.)

Már is megfogalmazhatjuk a 3.1. Tétel lokális változatát:

3.2. Tétel. *Ha a μ mérték duplázó az $[a, b]$ intervallumon, akkor bármely $\delta > 0$ számhoz létezik olyan n-től független $A = A\Big(\delta, L(\mu, [a, b])\Big)$ konstans, hogy*

$$\frac{1}{An} \leq x_{n,k+1} - x_{n,k} \leq \frac{A}{n}, \qquad k = j, j + 1, \ldots, l - 1, \tag{3.1}$$

ahol $x_{n,j} < x_{n,j+1} < \cdots < x_{n,l}$ jelöli az n-edik ortogonális polinom $[a + \delta, b - \delta]$ intervallumba eső gyökeit.

3.3. Megjegyzés: Felmerülhet a kérdés, hogy egyáltalán léteznek-e gyökök az $[a, b]$ intervallumon. A válasz elég nagy n-ekre mindig pozitív a tétel feltételei mellett. Valóban, ha $x \in \mathrm{supp}(\mu)$ (ahol $\mathrm{supp}(\mu)$ a μ mérték tartóját jelöli) és $\hat{\varepsilon} > 0$, akkor elég nagy n-ekre a π_n polinomnak létezik gyöke az $(x - \hat{\varepsilon}, x + \hat{\varepsilon})$ intervallumon [22, 1.2 11. Fact 1]. Ez egyben azt is mutatja, hogy ha $n \to \infty$, akkor a π_n polinom $[a, b]$-be eső gyökeinek száma is végtelenbe tart, sőt a gyökök halmaza sűrű az $[a, b]$ intervallumban ($[a, b]$ minden pontja előáll zérushelyek torlódási pontjaként).

A tétel nem feltétlenül igaz, ha az $[a + \delta, b - \delta]$ intervallumot lecseréljük az (a, b) nyílt intervallumra, például gondoljunk valamilyen Jacobi-súlyra a $[-1, 1] =: [a, b]$ intervallumon (a Jacobi-súly (által generált) mérték duplázó és ± 1 körül $1/n^2$ nagyságrendű a távolság).

A tétel állítása „aszimptotikus nyelvezeten” is megfogalmazható. Válasszunk ki egy $x_{n,k(n)}$ gyökökből álló sorozatot az $[a+\delta, b-\delta]$ intervallumon. Ekkor

$$0 < \frac{1}{A} \le \liminf_{n\to\infty} n(x_{n,k(n)+1} - x_{n,k(n)}) \le \limsup_{n\to\infty} n(x_{n,k(n)+1} - x_{n,k(n)}) \le A < \infty.$$

Ebből az alakból azonnal leolvasható, hogy eredményünk magában foglalja Y. Last és B. Simon alábbi két tételét:

3.4. Következmény ([9, Theorem 8.5]). *Tegyük fel, hogy* $d\mu = w(x)d(x)$ *abszolút folytonos az* E_0 *pont egy környezetében, és valamilyen* $q > 0$ *számmal teljesül, hogy*

$$0 < \liminf_{x\to E_0} \frac{w(x)}{|x-E_0|^q} \le \limsup_{x\to E_0} \frac{w(x)}{|x-E_0|^q} < \infty. \tag{3.2}$$

Ekkor

$$\limsup_{n\to\infty} n|x_n^{(1)}(E_0) - x_n^{(-1)}(E_0)| < \infty,$$

ahol $x_n^{(1)}(E_0)$ *az* n*-edik ortogonális polinom* E_0 *pontot követő legkisebb, míg* $x_n^{(-1)}(E_0)$ *az* E_0 *előtti (vagy azzal épp egybeeső) legnagyobb zérushelyét jelöli.*

3.5. Következmény ([9, Theorem 9.3]). *Tegyük fel, hogy* $d\mu = w(x)\,dx + d\mu_s$*, ahol a* μ *mérték* μ_s *szinguláris része eltűnik az* $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ *intervallumon, míg a* $w(x)\,dx$ *abszolút folytonos részre teljesül, hogy*

$$0 < \inf_{|y-x_0|\le\delta} w(x) \le \sup_{|y-x_0|\le\delta} w(x) < \infty. \tag{3.3}$$

Ekkor bármely $\epsilon < \delta$ *számra,*

$$\inf_{|y-x_0|<\epsilon} \liminf_{n\to\infty} n|x_n^{(1)}(y) - x_n^{(-1)}(y)| > 0.$$

Csak azt kell meggondolnunk, hogy mind a (3.2), mind a (3.3) feltétel maga után vonja a duplázó tulajdonságot, így alkalmazhatjuk a 3.2. Tételt.

Igaz marad a Cotes-számokra vonatkozó becslés és a megfordítás is.

3.6. Következmény. *Ha a* μ *mérték kompakt tartójú a számegyenesen és duplázó az* $[a,b]$ *intervallumon, akkor bármely* $\delta > 0$ *számhoz van olyan* $B = B\big(\delta, L(\mu,[a,b])\big)$ *konstans, hogy*

$$\frac{1}{B} \le \frac{\lambda_n(x_{n,k})}{\lambda_n(x_{n,k+1})} \le B, \tag{3.4}$$

valahányszor $x_{n,k}$ *és* $x_{n,k+1}$ *az* n*-edik ortogonális polinom egymást követő két gyöke az* $[a+\delta, b-\delta]$ *intervallumon.*

3.7. Tétel. *Ha μ kompakt tartójú mérték a számegyenesen és a hozzája tartozó ortogonális polinomok zérushelyeire minden $[a+\delta, b-\delta]$ ($\delta > 0$) alakú intervallumon teljesül (3.1) és (3.4) valamilyen (δ-tól függő) A és B konstansokkal, akkor μ duplázó ezeken az intervallumokon.*

3.8. Megjegyzés: Amikor az előbb megfordításról beszéltünk, nem voltunk elég pontosak, ugyanis akkor lenne valóban megfordítás, ha azt állíthatnánk, hogy az $[a, b]$ intervallumon is duplázó lesz a mértékünk. Valójában a 3.2. Tétel bizonyítása során csak azt használjuk fel, hogy a mérték minden $\delta > 0$ számra duplázó tulajdonságú az $[a+\delta, b-\delta]$ alakú intervallumokon valamilyen δ-tól függő duplázó konstanssal, tehát már ez is elégséges feltétele a zérushelyek egyenletes elhelyezkedésének. Példaként említjük az $e^{\frac{1}{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ mértéket a $[-1, 1]$ intervallumon, ami minden $[-1+\delta, 1-\delta]$ alakú intervallumon duplázó, de a duplázó konstans végtelenbe tart, ha $\delta \to 0$.

Az eddigi három tételben a kérdéses intervallum végpontjaitól távol vizsgálódtunk. Általában a végpontok körül nem is adhatunk egységes becslést: láttuk, hogy a $[-1, 1]$ intervallumon duplázó mérték esetén a végpontok közelében $1/n^2$ a távolság; ha viszont egy mérték duplázó az $[a, b]$ intervallumon, de még az $[a-\varepsilon, b+\varepsilon]$ intervallumon is, akkor marad az $1/n$ nagyságrendű távolság. Már ez is mutatja, hogy a végpontoknál a zérushelyek távolságának viselkedését befolyásolja az is, hogy az intervallumon kívül milyen a mérték. Kutatásunk során azt az esetet vizsgáltuk, amikor a mérték a végpontok egy féloldali környezetében eltűnik. Azt igazoltuk –ahogy vártuk is –, hogy a szomszédos gyökök távolsága itt is követi a tisztán duplázó esetben látottakat, vagyis a távolság $1/n$ nagyságrendből $1/n^2$ nagyságrendbe megy át a végpontokhoz közeledve. Egyetlen eltérés csak a végpont és a végponthoz legközelebb eső gyök távolságában lehetséges. Egy példával rámutatunk, hogy egy belső bal-végpontnál (lásd alább) ez a távolság $1/n^2$-nél sokkal kisebb (pl. e^{-n}) lehet.

Jelölje $\mathrm{supp}(\mu)$ a μ mérték tartóját.

3.9. Definíció. *Legyen μ kompakt tartójú mérték és $\mathbf{b} \in \mathrm{supp}(\mu)$. Azt mondjuk, hogy $\mathbf{b}$ egy bal-végpontja μ tartójának, ha $\mu([\mathbf{b}-\alpha, \mathbf{b}]) = 0$ valamilyen $\alpha > 0$ számra és $\mu([\mathbf{b}, \mathbf{b}+\beta]) > 0$ minden $\beta > 0$ számra.*

Most már kimondhatjuk az előző három tétel végpontokhoz kapcsolódó változatát.

3.10. Tétel. *Ha $\mathbf{b}$ bal-végpontja μ tartójának és μ duplázó a $[\mathbf{b}, \mathbf{b}+\beta]$ intervallumon valamilyen $\beta > 0$-ra, akkor bármely $0 < \gamma < \beta$-hoz van olyan A_γ, hogy*

$$\frac{1}{A_\gamma}\left(\frac{\sqrt{x_{n,k}-\mathbf{b}}}{n}+\frac{1}{n^2}\right) \le x_{n,k+1}-x_{n,k} \le A_\gamma\left(\frac{\sqrt{x_{n,k}-\mathbf{b}}}{n}+\frac{1}{n^2}\right) \tag{3.5}$$

teljesül valahányszor $x_{n,k}$ és $x_{n,k+1}$ az n-edik ortogonális polinom két egymást követő gyöke a $[\mathbf{b}, \mathbf{b}+\gamma]$ intervallumon; továbbá ha x_{n,k_0} jelöli a legkisebb $[\mathbf{b}, \mathbf{b}+\gamma]$ intervallumba eső zérushelyet, akkor az

$$x_{n,k_0} - \mathbf{b} \leq \frac{A_\gamma}{n^2} \tag{3.6}$$

egyenlőtlenség is fennáll.

3.11. Megjegyzés: Ha az előző tételben $\mathbf{b}$ egyben μ tartójának a legkisebb eleme is, akkor $x_{n,k_0} - \mathbf{b}$, alulról is becsülhető, nevezetesen érvényes, hogy

$$\frac{1}{A_\gamma}\frac{1}{n^2} \leq x_{n,1} - \mathbf{b} \leq \frac{A_\gamma}{n^2}.$$

Ahogy korábban is említettük belső végpontok mellett ez már nem feltétlenül igaz, amit egy példával illusztrálunk a 3.3. részben.

3.12. Következmény. *Ha $\mathbf{b}$ bal-végpontja μ tartójának és μ duplázó a $[\mathbf{b}, \mathbf{b}+\beta]$ intervallumon valamilyen $\beta > 0$-ra, akkor bármely $0 < \gamma < \beta$-hoz van olyan B_γ konstans, hogy*

$$\frac{1}{B_\gamma} \leq \frac{\lambda_n(x_{n,k})}{\lambda_n(x_{n,k+1})} \leq B_\gamma \tag{3.7}$$

teljesül valahányszor $x_{n,k}$ és $x_{n,k+1}$ az n-edik ortogonális polinom két egymást követő gyöke a $[\mathbf{b}, \mathbf{b}+\gamma]$ intervallumon.

(3.5) és (3.7) együttesen implikálja a duplázó tulajdonságot.

3.13. Tétel. *Tegyük fel, hogy a μ kompakt tartójú mérték eltűnik a $[\mathbf{b}-\alpha, \mathbf{b}]$ intervallumon és a (3.5), (3.7) egyenlőtlenségek fennállnak minden $[\mathbf{b}, \mathbf{b}+\gamma]$ $(0 < \gamma < \beta)$ alakú intervallumon valamilyen megfelelő A_γ és B_γ konstansokkal. Ekkor μ duplázó ezeken az intervallumokon.*

3.14. Megjegyzés: Természetesen a „jobb-végpont” fogalmát is bevezethetnénk a bal mintájára, és akkor az előbbi tételek jobb-végpontos változatát is kimondhatjuk.

3.2. Bizonyítások

3.2.1. A végpontoktól távol eső zérushelyek közötti távolságra vonatkozó tételek bizonyítása

A 3.2. Tételben a gyökök távolságát szeretnénk becsülni mindkét irányból. A felső becslésben szükségünk lesz egy Christoffel-függvényekre (lásd 2.4. Definíció) vonatkozó becslésre a 2.8. Tétel mintájára. Ezt a becslést külön lemmában is megfogalmazzuk.

3.15. Lemma. *Ha μ kompakt tartójú mérték a számegyenesen és duplázó tulajdonságú az $[a, b]$ intervallumon, akkor bármely $\delta > 0$ számhoz van olyan $D = D(L, p, a, b)$, hogy $n > \frac{2}{\delta}$ esetén*

$$\frac{1}{D}\mu\Big(\big[\xi - \tfrac{1}{n}, \xi + \tfrac{1}{n}\big]\Big) \leq \lambda_n(\mu, p, \xi) \leq D\mu\Big(\big[\xi - \tfrac{1}{n}, \xi + \tfrac{1}{n}\big]\Big),$$

valahányszor $\xi \in [a + \delta, b - \delta]$.

Az n-edik Christoffel-függvény x-beli értékét szeretnénk becsülni egy x körüli kicsi intervallum mértékével. Ha lenne olyan polinom, amely ezen az intervallumon körülbelül 1, ezen kívül pedig elhanyagolható, akkor a Christoffel-függvény definíciója szerint egy ilyen polinom abszolútértékének integrálja felhasználható lenne a lemmabeli felső becslés igazolásához. Az alábbi lemma azt állítja, hogy ilyen polinom létezik.

3.16. Lemma ([18, Theorem 1] vagy [8, Example 2]). *Ha ψ nem negatív jobbról folytonos, monoton növő függvény, melyre $\psi(0+) = 0$, $\psi(x) \leq M\psi(x/2)$ valamilyen x-től független M konstanssal, és teljesíti az*

$$\int_1^\infty \frac{\psi(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x < \infty$$

integrálhatósági feltételt, akkor léteznek olyan C_0, c_0 konstansok és minden n pozitív egészre olyan legföljebb n-ed fokú Q_n polinom, melyre $Q_n(0) = 1$, $0 \leq Q_n(x) \leq 1$ és

$$Q_n(x) \leq C_0 e^{-c_0\psi(n|x|)} \tag{3.8}$$

valahányszor $x \in [-1, 1]$.

Ebben a részben a $\psi(x) = \sqrt{x}$ függvénnyel alkalmazzuk a lemmát.

Szükségünk lesz még a duplázó tulajdonság néhány ekvivalens megfogalmazására.

3.17. Lemma ([13, Lemma 2.1]). *A következő, μ mértékre vonatkozó tulajdonságok ekvivalensek:*

(i) *μ duplázó az $[a, b]$ intervallumon (3.1. definíció).*

(ii) *Létezik olyan s és K pozitív konstans, hogy $\mu(I) \leq K\left(\frac{|I|}{|J|}\right)^s \mu(J)$ minden olyan J és I intervallumra, amelyre $J \subset I \subset [a, b]$.*

(iii) *Létezik olyan r és K pozitív konstans, hogy $\mu(J) \leq K\left(\frac{|J|}{|I|}\right)^r \mu(I)$ minden olyan J és I intervallumra, amelyre $J \subset I \subset [a, b]$.*

(iv) *Létezik olyan s és K pozitív konstans, hogy*

$$\mu(I) \leq K\left(\frac{|I| + |J| + \mathrm{d}(I, J)}{|J|}\right)^s \mu(J)$$

teljesül $[a,b]$ *tetszőleges két* I *és* J *részintervallumára, ahol* $\mathrm{d}(I,J)$ *a két intervallum közötti távolságot jelöli.*

3.15. Lemma bizonyítása. Feltehető, hogy a μ mérték tartója a $[-1,1]$ intervallumba esik (átskálázással elérhető). A 3.16. Lemma szerint van olyan n-ed fokú Q_n polinom, amely rendelkezik a (3.8) tulajdonsággal.

Ezt felhasználva a Christoffel-függvényt az alábbi módon becsülhetjük egy $\xi \in [a+\delta, b-\delta]$ pontban:

$$\begin{aligned}\lambda_n(\mu,p,\xi) &= \inf_{\substack{q(\xi)=1\\ \deg q\le n}} \int |q(x)|^p \,\mathrm{d}\mu(x) \le \int Q_n^p(x-\xi)\,\mathrm{d}\mu(x) \le \int C_0^p e^{-pc_0\sqrt{n|x-\xi|}}\,\mathrm{d}\mu(x)\\ &= \int_{\xi-\frac{1}{n}}^{\xi+\frac{1}{n}} C_0^p e^{-pc_0\sqrt{n|x-\xi|}}\,\mathrm{d}\mu(x)\\ &+ \int_{a+\frac{\delta}{2}}^{\xi-\frac{1}{n}} C_0^p e^{-pc_0\sqrt{n|x-\xi|}}\,\mathrm{d}\mu(x) + \int_{\xi+\frac{1}{n}}^{b-\frac{\delta}{2}} C_0^p e^{-pc_0\sqrt{n|x-\xi|}}\,\mathrm{d}\mu(x)\\ &+ \int_{-1}^{a+\frac{\delta}{2}} C_0^p e^{-pc_0\sqrt{n|x-\xi|}}\,\mathrm{d}\mu(x) + \int_{b-\frac{\delta}{2}}^{1} C_0^p e^{-pc_0\sqrt{n|x-\xi|}}\,\mathrm{d}\mu(x),\end{aligned}\tag{3.9}$$

feltéve, hogy $n \ge \frac{2}{\delta}$. Először a jobboldal negyedik és ötödik („kívül eső” integrálok) foglalkozunk:

$$\begin{aligned}&\int_{b-\frac{\delta}{2}}^{1} C_0^p e^{-pc_0\sqrt{n|x-\xi|}}\,\mathrm{d}\mu(x) \le \int_{b-\frac{\delta}{2}}^{1} C_0^p e^{-pc_0\sqrt{n\left|\left(b-\frac{\delta}{2}\right)-\xi\right|}}\,\mathrm{d}\mu(x)\\ &= C_0^p e^{-pc_0\sqrt{n\left|\left(b-\frac{\delta}{2}\right)-\xi\right|}} \int_{b-\frac{\delta}{2}}^{1} \mathrm{d}\mu(x) \le C_0^p e^{-pc_0\sqrt{n\left|\left(b-\frac{\delta}{2}\right)-(b-\delta)\right|}}\,\mu\big([-1,1]\big)\\ &= C_0^p e^{-pc_0\sqrt{n\frac{\delta}{2}}}\,\mu\big([-1,1]\big).\end{aligned}\tag{3.10}$$

A duplázó tulajdonság (3.17. Lemma (ii)) alapján azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}&\mu\left(\left[\xi-\tfrac{1}{n},\xi+\tfrac{1}{n}\right]\right) \ge K\left(\frac{\left|\left[\xi-\frac{1}{n},\xi+\frac{1}{n}\right]\right|}{|[a,b]|}\right)^s \mu\big([a,b]\big)\\ &= K\left(\frac{2}{b-a}\right)^s \mu\big([a,b]\big)\frac{1}{n^s}.\end{aligned}\tag{3.11}$$

Ha n elég nagy, akkor fennáll a

$$C_0^p e^{-pc_0\sqrt{n\frac{\delta}{2}}}\,\mu\big([-1,1]\big) \le K\left(\frac{2}{b-a}\right)^s \mu\big([a,b]\big)\frac{1}{n^s}$$

egyenlőtlenség, ezért (3.10) és (3.11) miatt az

$$\int_{b-\frac{\delta}{2}}^{1} C_0^p e^{-pc_0\sqrt{n|x-\xi|}}\,\mathrm{d}\mu(x) \le \mu\Big(\Big[\xi-\tfrac{1}{n},\xi+\tfrac{1}{n}\Big]\Big) \tag{3.12}$$

egyenlőtlenség is érvényes. A negyedik integrálra vonatkozó becslés hasonlóan történik.

Rátérünk (3.9) jobboldala második és harmadik integráljának („belül eső” integrálok) becslésére. Jelölje H azt az egész számot, amelyre $\xi+\frac{H}{n} < b-\frac{\delta}{2} \le \xi+\frac{H+1}{n}$. Ekkor

$$\begin{aligned}\int_{\xi+\frac{1}{n}}^{b-\frac{\delta}{2}} C_0^p e^{-pc_0\sqrt{n|x-\xi|}}\,\mathrm{d}\mu(x) &\le \int_{\xi+\frac{1}{n}}^{\xi+\frac{H+1}{n}} C_0^p e^{-pc_0\sqrt{n|x-\xi|}}\,\mathrm{d}\mu(x)\\ \le \sum_{i=1}^{H}\int_{\xi+\frac{i}{n}}^{\xi+\frac{i+1}{n}} C_0^p e^{-pc_0\sqrt{n\left(\xi+\frac{i}{n}-\xi\right)}}\,\mathrm{d}\mu &= \sum_{i=1}^{H}\int_{\xi+\frac{i}{n}}^{\xi+\frac{i+1}{n}} C_0^p e^{-pc_0\sqrt{i}}\,\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

Megint használva a duplázó tulajdonságot (3.17. Lemma (iv)) azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mu\Big(\Big[\xi+\tfrac{i}{n},\xi+\tfrac{i+1}{n}\Big]\Big) &\le K\left(\frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{i-1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)^{s}\mu\Big(\Big[\xi,\xi+\tfrac{1}{n}\Big]\Big)\\ &\le K(i+1)^s\mu\Big(\Big[\xi-\tfrac{1}{n},\xi+\tfrac{1}{n}\Big]\Big).\end{aligned}$$

Ebből következik, hogy

$$\sum_{i=1}^{H}\int_{\xi+\frac{i}{n}}^{\xi+\frac{i+1}{n}} C_0^p e^{-pc_0\sqrt{i}}\,\mathrm{d}\mu \le \underbrace{K2^s\left(\sum_{i=1}^{\infty} i^s C_0^p e^{-pc_0\sqrt{i}}\right)}_{\text{konstans}<\infty}\mu\Big(\Big[\xi-\tfrac{1}{n},\xi+\tfrac{1}{n}\Big]\Big), \tag{3.13}$$

hiszen $2i \ge i+1$.

A második integrál ugyanígy becsülhető, ezért azt nem részletezzük.

Hogy megkapjuk a kívánt felső becslést, nincs más dolgunk, mint folytatni (3.9)-et a (3.12), (3.13) és az első integrál esetében azonnal látható

$$\int_{\xi-\frac{1}{n}}^{\xi+\frac{1}{n}} C_0^p e^{-pc_0\sqrt{n|x-\xi|}}\,\mathrm{d}\mu(x) \le C_0^p\mu\Big(\Big[\xi-\tfrac{1}{n},\xi+\tfrac{1}{n}\Big]\Big)$$

egyenlőtlenségeket figyelembe véve.

Az alsó becslés visszavezethető a tisztán duplázó esetre (2.8. Tétel), azaz ha ν duplázó mérték a $[-1,1]$ intervallumon, akkor létezik olyan n-től és x-től független c konstans, hogy az

$$\frac{1}{c}\nu\left(\left[x-\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}+\frac{1}{n^2}\right), x+\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\right]\right) \leq \lambda_n(\nu, p, x)$$

alsó becslés érvényes az n-edik Christoffel-függvényre. Könnyen meggondolható, hogy ez egy $[-1+\rho, 1-\rho]$ alakú részintervallumon ekvivalens a következő alakkal

$$\frac{1}{c}\nu\left(\left[x-\tfrac{\eta}{n}, x+\tfrac{\eta}{n}\right]\right) \leq \lambda_n(\nu, p, x), \tag{3.14}$$

ahol $\eta, \rho > 0$ és C függhet η-tól és ρ-tól. Lineáris transzformációt alkalmazva ez a becslés tetszőleges $[a, b]$ tartójú duplázó mértékekre is alkalmazható. Végül annyit kell még megjegyeznünk, hogy ha $[a, b]$ valódi részhalmaza a μ mérték tartójának és μ duplázó tulajdonságú ezen az intervallumon, akkor a lemma alsó becslését megkapjuk a Christoffel-függvény definíciójából azonnal következő $\lambda_n(\mu, p, x) \geq \lambda_n(\mu|_{[a,b]}, p, x)$ egyenlőtlenségből, ha (3.14)-et alkalmazzuk a $\nu = \mu|_{[a,b]}$ mértékre, azaz a μ mérték $[a, b]$ intervallumra történő megszorítására.

■

3.18. Megjegyzés: Az alsó becslést visszavezettük a tisztán duplázó estre (2.8. Tétel). Csak azt kellett felhasználni, hogy a megszorított mértékhez tartozó n-edik Christoffel-függvény nem nagyobb az eredeti mértékhez tartozónál. Vajon a felső becslés esetében nem folymodhattunk volna visszavezetéshez? A válasz igenlő, sőt, tulajdonképpen, a felső becslést is a tisztán duplázó esetre vezettük vissza. Explicit módon ugyanis úgy kellett volna eljárnunk, hogy veszünk egy olyan $q = q_{n,x}$ polinomot, amelyre a Christoffel függvény definíciójában szereplő $\int |q|^p \, d\mu|_{[a,b]}$ alakú integrál nagyságrendileg $\lambda(\mu|_{[a,b]}, p, x)$. Utána ezeket a polinomokat használjuk fel az eredeti mérték esetében. Azt kell „csak" belátnunk, hogy a $\mu|_{[a,b]}$-hez és a μ-höz tartozó Christoffel-függvény $[a, b]$ belsejében azonos nagyságrendű. Ez igaz lesz, ha a választott q polinom elég kicsi μ tartójának $[a, b]$-n kívül eső részén. Ezt azonban nem tudhatjuk biztosan, viszont egy megfelelő polinommal rászorozva elérhetjük. De ahhoz, hogy egyenletes becslést adjunk a Christoffel függvényre, a különböző x pontokhoz választott q polinomok rászorzó polinomjának fokszáma egyenletesen korlátos kéne legyen x-ben, másrészt n-ben legföljebb lineárisan növekedhetne, amit valamilyen úton be kéne látnunk, pl. ahogy itt is tettük: eleve úgy választjuk a q polinomokat, hogy azok egyenletesen korlátosak és $[a, b]$-n kívül kicsik legyenek. A később sorra kerülő bal-végponthoz kapcsolódó 3.20. Lemma esetében is így járunk el. Az előkészületek után rátérünk a tételek bizonyítására, amelyek gondolatmenete követi a [12] cikkben alkalmazott megközelítést.

3.2. Tétel bizonyítása. Először a (3.1) egyenlőtlenségben szereplő felső becsléssel foglalkozunk. Feltehető, hogy $\text{supp}(\mu) \subset [-1, 1]$. Legyen $n \geq \frac{2}{\delta}$ a továbbiakban rögzített, valamint

$x_k := x_{n,k}$, $x_{k+1} := x_{n,k+1} \in [a+\delta, b-\delta]$ és $\lambda_{n,k} := \lambda_n(\mu, 2, x_{n,k})$, $\lambda_{n,k+1} := \lambda_n(\mu, 2, x_{n,k+1})$. A Markov-egyenlőtlenség [7, I.5. (5.4)] szerint

$$\sum_{x_k<x} \lambda_{n,k} \leq \mu\Big((-\infty, x)\Big) \leq \mu\Big((-\infty, x]\Big) \leq \sum_{x_k \leq x} \lambda_{n,k}, \tag{3.15}$$

ami a 3.15. Lemmával együtt implikálja, hogy

$$\begin{aligned} \mu\Big([x_k, x_{k+1}]\Big) &\leq \lambda_{n,k} + \lambda_{n,k+1} \\ &\leq D\bigg(\mu\Big(\Big[x_k - \tfrac{1}{n}, x_k + \tfrac{1}{n}\Big]\Big) + \mu\Big(\Big[x_{k+1} - \tfrac{1}{n}, x_{k+1} + \tfrac{1}{n}\Big]\Big)\bigg). \end{aligned} \tag{3.16}$$

Ha $x_{k+1} - x_k \leq \frac{2}{n}$, akkor nincs mit bizonyítani, ezért feltehető, hogy $x_{k+1} - x_k > \frac{2}{n}$. Ebben az esetben

$$x_k + \tfrac{1}{n} < x_{k+1} - \tfrac{1}{n}.$$

Ha

$$\begin{aligned} I &= \Big[x_k - \tfrac{1}{n}, x_{k+1} + \tfrac{1}{n}\Big], \\ E_1 &= \Big[x_k - \tfrac{1}{n}, x_k + \tfrac{1}{n}\Big] \end{aligned}$$

és

$$E_2 = \Big[x_{k+1} - \tfrac{1}{n}, x_{k+1} + \tfrac{1}{n}\Big],$$

akkor a duplázó tulajdonságból (3.17. Lemma (i)), majd (3.16) alkalmazásából következik, hogy

$$\mu(I) \leq L\mu([x_k, x_{k+1}]) \leq DL\Big(\mu(E_1) + \mu(E_2)\Big). \tag{3.17}$$

Ismét a duplázó tulajdonság (Lemma 3.17 (iii)) mutatja, hogy

$$\begin{aligned} \mu(E_1) &\leq K\left(\frac{|E_1|}{|I|}\right)^r \mu(I), \\ \mu(E_2) &\leq K\left(\frac{|E_2|}{|I|}\right)^r \mu(I). \end{aligned}$$

Visszahelyettesítve a (3.17) egyenletbe, majd egyszerűsítve $\mu(I)$-vel kapjuk, hogy

$$1 \leq DL\frac{K}{|I|^r}\Big(|E_1|^r + |E_2|^r\Big) \leq 2DL\frac{K}{|I|^r}\Big(|E_1| + |E_2|\Big)^r.$$

Átrendezve megkapjuk a bizonyítandó felső becslést:

$$x_{k+1} - x_k < |I| \leq (2DLK)^{\frac{1}{r}} \Big(|E_1| + |E_2|\Big) \leq \frac{4(2DLK)^{\frac{1}{r}}}{n}.$$

Most tekintsük (3.1) baloldalát. A bizonyítás alapja a *Remez-egyenlőtlenség* [13, (7.16)]: Ha μ duplázó mérték a $[-1, 1]$ intervallumon, akkor bármely $\Lambda > 0$-hoz van olyan $C = C_\Lambda$ konstans, hogy valahányszor q_n egy legföljebb n-ed fokú polinom és E a $[-1, 1]$ intervallum véges sok részintervallumából álló olyan részhalmaza, amire $|\arccos(E)| \leq \frac{\Lambda}{n}$, mindannyiszor

$$\int_{-1}^{1} q_n^2 \,\mathrm{d}\mu \leq C \int_{[-1,1]\setminus E} q_n^2 \,\mathrm{d}\mu. \tag{3.18}$$

Ebből lineáris transzformációt alkalmazva levonható az a következtetés, hogy ha μ duplázó $[a, b]$-n, $\delta > 0$, I az $[a + \delta, b - \delta]$ intervallum legfeljebb $\frac{2}{n}$ hosszúságú részintervalluma és q_n egy legfeljebb n-ed fokú polinom, akkor

$$\int_{[a,b]} q_n^2 \,\mathrm{d}\mu \leq C \int_{[a,b]\setminus I} q_n^2 \,\mathrm{d}\mu,$$

ahol C csak δ-tól és a μ mérték $[a, b]$ intervallumra vonatkozó duplázó konstansától függ.

Innentől a bizonyítás egy az egyben követi [12, Theorem 1] bizonyítását. Valóban, feltehető, hogy $x_{k+1} - x_k = \frac{\delta}{n}$, ahol $0 < \delta < 1/2$, egyébként készen vagyunk. Legyen

$$q_{n-2} = \frac{\pi_n}{(x - x_{k+1})(x - x_k)}.$$

Emlékeztetünk arra, hogy az ortonormált rendszer n-edik tagja ortogonális a nála kisebb fokú polinomokra [7, I.2.§ (2.3)], azaz tetszőleges legföljebb $(n - 1)$-ed fokú q polinomra

$$\int \pi_n(\mu, x) q(x) \,\mathrm{d}\mu(x) = 0.$$

Ezért figyelembe véve, hogy $\deg(q_{n-2}) \leq n-2$, majd hogy $(x-x_{k+1})(x-x_k)$ nem negatív az $[x_k, x_{k+1}]$ intervallumon kívül, így kezdjük a számolást:

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\mathbb{R}} \pi_n q_{n-2}\,\mathrm{d}\mu = \int_{-1}^{1} q_{n-2}^2(x)(x-x_{k+1})(x-x_k)\,\mathrm{d}\mu(x) \\
&= \int_{x_k}^{x_{k+1}} q_{n-2}^2(x)(x-x_{k+1})(x-x_k)\,\mathrm{d}\mu(x) \\
&+ \int_{[-1,1]\setminus[x_k,x_{k+1}]} q_{n-2}^2(x)(x-x_{k+1})(x-x_k)\,\mathrm{d}\mu(x) \\
&\geq \int_{x_k}^{x_{k+1}} q_{n-2}^2(x)(x-x_{k+1})(x-x_k)\,\mathrm{d}\mu(x) \\
&+ \int_{[a,b]\setminus[x_k,x_{k+1}]} q_{n-2}^2(x)(x-x_{k+1})(x-x_k)\,\mathrm{d}\mu(x).
\end{aligned} \tag{3.19}$$

A két utolsó integrált külön-külön becsüljük. Figyelembe véve, hogy $x_{k+1} - x_k \leq \frac{\delta}{n}$, az első a következő módon becsülhető:

$$\begin{aligned}
&\int_{x_k}^{x_{k+1}} q_{n-2}^2(x)(x-x_{k+1})(x-x_k)\,\mathrm{d}\mu(x) \\
&= -\int_{x_k}^{x_{k+1}} q_{n-2}^2(x)|x-x_{k+1}||x-x_k|\,\mathrm{d}\mu(x) \geq -\frac{\delta^2}{n^2}\int_{x_k}^{x_{k+1}} q_{n-2}^2\,\mathrm{d}\mu.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Ami pedig a második integrált illeti, felhasználjuk, hogy $x_{k+1} - x_k \leq \frac{\delta}{n} < \frac{1}{2n}$, valamint a Remez-egyenlőtlenséget:

$$\begin{aligned}
&\int_{[a,b]\setminus[x_k,x_{k+1}]} q_{n-2}^2(x)(x-x_{k+1})(x-x_k)\,\mathrm{d}\mu(x) \\
&\geq \int_{[a,b]\setminus\left[x_k-\frac{1}{n},x_k+\frac{1}{n}\right]} q_{n-2}^2(x)(x-x_{k+1})(x-x_k)\,\mathrm{d}\mu(x) \\
&\geq \frac{1}{(2n)^2}\int_{[a,b]\setminus\left[x_k-\frac{1}{n},x_k+\frac{1}{n}\right]} q_{n-2}^2\,\mathrm{d}\mu \geq \frac{1}{4Cn^2}\int_a^b q_{n-2}^2\,\mathrm{d}\mu \\
&\geq \frac{1}{4Cn^2}\int_{x_k}^{x_{k+1}} q_{n-2}^2\,\mathrm{d}\mu.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

A két integrálra kapott becslés felhasználásával folytatjuk a (3.19) egyenlőtlenséget:

$$\begin{aligned}
0 &\geq -\frac{\delta^2}{n^2}\int_{x_k}^{x_{k+1}} q_{n-2}^2\,\mathrm{d}\mu + \frac{1}{4Cn^2}\int_{x_k}^{x_{k+1}} q_{n-2}^2\,\mathrm{d}\mu \\
&= \left(\frac{1}{4C} - \delta^2\right)\left(\frac{1}{n^2}\right)\int_{x_k}^{x_{k+1}} q_{n-2}^2\,\mathrm{d}\mu.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Ez pedig csak akkor lehetséges, ha $\frac{1}{4C} - \delta^2 \leq 0$, azaz ha $\delta \geq \frac{1}{2\sqrt{C}}$. Ez szükségképpen azt jelenti, hogy $x_{k+1} - x_k \geq \frac{1}{2\sqrt{C}} \frac{1}{n}$, ami igazolja az alsó becslést.

■

3.6. Következmény bizonyítása. A tétel egyszerű következménye a 3.2. Tételnek, a 3.15. Lemmának és a duplázó tulajdonságnak (3.17. Lemma (i)).

A 3.2. Tétel szerint $\hat{A} := A + 1$ választással fönnáll az

$$\left[x_{k+1} - \tfrac{\hat{A}}{n}, x_{k+1} + \tfrac{\hat{A}}{n}\right] \supset \left[x_k - \tfrac{1}{n}, x_k + \tfrac{1}{n}\right]$$

tartalmazás. A 3.15. Lemma és a duplázó tulajdonság felhasználásával pedig megkapjuk a fölső becslést:

$$\frac{\lambda_{n,k}}{\lambda_{n,k+1}} \leq \frac{D\mu\left(\left[x_{k+1} - \frac{\hat{A}}{n}, x_{k+1} + \frac{\hat{A}}{n}\right]\right)}{\frac{1}{D}\mu\left(\left[x_{k+1} - \frac{1}{n}, x_{k+1} + \frac{1}{n}\right]\right)} \leq D^2 L^{\lceil \log_2 \hat{A} \rceil}.^{1}$$

A $\frac{\lambda_{n,k}}{\lambda_{n,k+1}}$ hányadosra vonatkozó alsó becslés hasonlóan adódik.

■

3.7. Tétel bizonyítása. Mint említettük a bizonyítás követi a [12, Theorem 3] bizonyítását, mindazonáltal technikailag egyszerűbb a dolgunk, mert $[a, b]$ végpontjaitól pozitív távol vizsgálódunk.

Rögzítsünk egy $\delta > 0$ számot. A 3.3. Megjegyzésből következik, hogy van olyan n_1 küszöbszám, hogy bármely $n \geq n_1$-re az n-edik ortogonális polinomnak van gyöke mind az $\left[a + \frac{\delta}{2}, a + \delta\right]$ intervallumon, mind a $\left[b - \delta, b - \frac{\delta}{2}\right]$ intervallumon.

Be kell látnunk egy olyan L konstans létezését, hogy minden olyan I intervallumra, amelyre $2I \subset [a + \delta, b - \delta]$ teljesül, fennálljon a

$$\mu(2I) \leq L\mu(I)$$

egyenlőtlenség. Könnyen meggondolható, hogy ezt elég igazolnunk legfeljebb $\frac{8A}{n_1}$ hosszú intervallumokra, ahol A ugyanaz a konstans, mint (3.1)-ben.

Válasszuk úgy m-et, hogy fennálljon a

$$\frac{4A}{m} < |I| \leq \frac{8A}{m} \tag{3.23}$$

[1] $\lceil x \rceil$ x felső egészrészét, azaz a legkisebb x-nél nagyobb vagy egyenlő egész számot jelöli.

egyenlőtlenség. Így, ha τ jelöli I középpontját, akkor (3.1) és a 3.3. Megjegyzés szerint, létezik olyan k konstans, hogy $x_{m,k} < \tau \le x_{m,k+1}$, sőt

$$[x_{m,k-1}, x_{m,k+1}] \subset I. \tag{3.24}$$

Másrészt, mivel $2I \subset [a+\delta, b-\delta]$ és alkalmazható a 3.3. Megjegyzés, van egy legnagyobb (legkisebb) zérushely balra (jobbra) a $2I$ intervallumtól , vagyis létezik olyan $x_{m,k-r}$ és $x_{m,k+s} \in \left[a+\frac{\delta}{2}, b-\frac{\delta}{2}\right]$, amelyekre

$$[x_{m,k-r+1}, x_{m,k+s-1}] \subset 2I \subset [x_{m,k-r}, x_{m,k+s}]. \tag{3.25}$$

Vegyük észre, hogy a (3.24) és a (3.25) tartalmazásokból következik egy alsó és egy felső becslés I, illetve $2I$ mértékére. Így, ha a

$$\frac{\mu\Big([x_{m,k-r}, x_{m,k+s}]\Big)}{\mu\Big([x_{m,k-1}, x_{m,k+1}]\Big)}$$

hányados felülről becsülhető egy n-től és k-tól független konstanssal, akkor készen vagyunk.

(3.24)-ből és a Markov-egyenlőtlenségből (lásd (3.15)) azonnal következik, hogy

$$\mu(I) \ge \mu\Big([x_{m,k-1}, x_{m,k+1}]\Big) \ge \lambda_{m,k}. \tag{3.26}$$

Próbáljuk meg $[x_{m,k-r}, x_{m,k+s}]$ mértékét is $\lambda_{m,k}$ segítségével becsülni. Ehhez vegyük észre, hogy (3.4) miatt bármely $1 \le j \le s$-re

$$\frac{\lambda_{m,k+j}}{\lambda_{m,k}} = \frac{\lambda_{m,k+j}}{\lambda_{m,k+j-1}} \frac{\lambda_{m,k+j-1}}{\lambda_{m,k+j-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{\lambda_{m,k+1}}{\lambda_{m,k}} \le B^j,$$

ahol $B = B(\delta/2)$ a (3.4)-ben szereplő $\left[a+\frac{\delta}{2}, b-\frac{\delta}{2}\right]$ intervallumra vonatkozó konstans. (Azért használjuk $B(\delta/2)$-t és nem $B(\delta)$-t, mert előfordulhat, hogy $x_{m,k-r}$ vagy $x_{m,k+s}$ az $(a+\delta/2, a+\delta)$ ill. a $(b-\delta, b+\delta/2)$ intervallumon van.) Ugyanígy okoskodhatunk, ha $-r \le j \le -1$. Ezért ismét használva a Markov-egyenlőtlenséget (lásd (3.15)) azt kapjuk, hogy

$$\mu\Big([x_{m,k-r}, x_{m,k+s}]\Big) \le \sum_{j=-r}^{s} \lambda_{m,k+j} \le \lambda_{m,k} \sum_{j=-r}^{s} B^{|j|}. \tag{3.27}$$

(3.1), (3.23) baloldala és (3.25) szerint

$$2|I| \ge x_{m,k+s-1} - x_{m,k} \ge (s-1)\tfrac{1}{Am} \ge (s-1)\tfrac{|I|}{8A^2},$$

amiből kapunk egy s-re, illetve hasonló úton egy r-re vonatkozó felső becslést, nevezetesen $\max(s, r) \leq 16A^2 + 1$. Hozzávéve ezt a (3.27) egyenlőtlenséghez adódik, hogy

$$\mu(2I) \leq \mu\Big([x_{m,k-r}, x_{m,k+s}]\Big) \leq 2B^{16A^2+2}\lambda_{m,k}. \tag{3.28}$$

Összevetve a (3.26) és a (3.28) egyenlőtlenségeket, láthatjuk, hogy a duplázó tulajdonság fennáll a már I-től független $L = 2B^{16A^2+2}$ duplázó konstanssal.

■

3.2.2. A végpontok közelébe eső zérushelyek közötti távolságra vonatkozó tételek bizonyítása

Ebben a részben foglalkozunk a 3.10., 3.12. és 3.13. tételek bizonyításával. A bizonyítások gondolatmenete az előző részben látott utat követi. Technikai nehézséget ismét a Christoffel-függvényekre vonatkozó felső becslés okoz, amit megint egy jól választott gyorsan csökkenő polinom segítségével lépünk át.

Aszimmetrikusan gyorsan csökkenő polinomok konstrukciója. A keresett gyorsan csökkenő polinom létezését a következő tétel biztosítja. Legyen ψ nem negatív jobbról folytonos és monoton növő függvény a pozitív félegyenesen, amely rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

- $\psi(0+) = 0$, és
- $\psi(x) \leq M\psi(x/2)$ valamilyen alkalmas, x-től független M konstanssal.

3.19. Tétel ([33, Theorem 2.1]). *Ha*

$$\int_1^\infty \frac{\psi(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x < \infty, \tag{3.29}$$

akkor megadhatóak olyan C és c konstansok, hogy minden $a \in [0, 1/2]$ számhoz és n pozitív egészhez létezik olyan legföljebb n-ed fokú $P_n = P_{n,a}$ polinom, melyre $P_n(0) = 1$, $0 \leq P_n(x) \leq 2$ és

$$P_n(x) \leq C\exp\left(-c\psi\left(\frac{n|x|}{\sqrt{|x|} + \sqrt{a}}\right)\right), \qquad x \in [-a, 1]. \tag{3.30}$$

Érdekességképpen megjegyezzük, hogy a tétel megfordítható [33, Proposition 2.2]: ha valamilyen $a_n \in [0, 1/4]$ sorozathoz létezik olyan $(P_n = P_{n,a_n})$ polinom-sorozat, melynek tagjaira igaz, hogy $P_n(0) = 1$ és (3.30), akkor ez maga után vonja, hogy ψ rendelkezik a (3.29) integrálhatósági tulajdonsággal.

Azt is megemlítjük, hogy a fenti tétel bizonyos szempontból éles: nevezetesen, ha a (3.30) egyenlőtlenség jobb oldalán n-t beszorozzuk még n egy végtelenbe tartó függvényével, akkor van olyan ψ, amelyhez nem létezik a tételben felsorolt tulajdonságokkal rendelkező gyorsan csökkenő polinomokból álló sorozat.

Bizonyítás. A tételt a 3.16. lemmában idézett szimmetrikus esetre vezetjük vissza, amely a következőt állítja: Ha ψ olyan mint fentebb, akkor léteznek olyan C_0, c_0 konstansok és minden n pozitív egészre egy legföljebb n-ed fokú Q_n polinom, amelyre $Q_n(0) = 1$, $0 \le Q_n(x) \le 1$ és

$$Q_n(x) \le C_0 e^{-c_0\psi(n|x|)}$$

valahányszor $x \in [-1, 1]$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy Q_n páros különben vegyük helyette a $(Q_n(x) + Q_n(-x))/2$ polinomot. A transzformációt három lépésben hajtjuk végre.

I. Rögzítsünk egy τ számot, amelyre $C_0 e^{-c_0\psi(\tau)} < 1/2$ (ha ilyen τ nem lenne, akkor ψ korlátos és nincs mit bizonyítani). Minden n pozitív egészhez és minden $(8\tau/n)^2 \le a \le 1/4$ valós számhoz van olyan legföljebb n-ed fokú $R_n = R_{n,a}$ polinom, amely rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

- $R_n(0) = 1$,
- $R_n\left(2\sqrt{a}\sqrt{1-a}\right) = 0$,
- $0 \le R_n(x) \le 1$, $x \in [-1, 1]$, és
- $R_n(x) \le C_0 e^{-c_0\psi(n|x|/4)}$, $x \in [-1, 1]$.

Legyen ugyanis

$$R_n(x) = Q_{[n/2]}(x)\left(\frac{Q_{[n/4]}(x) - Q_{[n/4]}\left(2\sqrt{a}\sqrt{1-a}\right)}{1 - Q_{[n/4]}\left(2\sqrt{a}\sqrt{1-a}\right)}\right)^2. \tag{3.31}$$

Ekkor a választása miatt

$$\begin{aligned} Q_{[n/4]}\left(2\sqrt{a}\sqrt{1-a}\right) &\le C_0 \exp\left(-c_0\psi\left(\left[\frac{n}{4}\right]2\sqrt{a}\sqrt{1-a}\right)\right) \\ &\le C_0 \exp\left(-c_0\psi(\tau)\right) < \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

ezért (3.31) jobb oldalának második tényezője legföljebb 1 valahányszor $x \in [-1, 1]$.

II. Minden n pozitív egészre és minden $(8\tau/n)^2 \leq a \leq 1/4$ valós számra létezik olyan legföljebb n-ed fokú $S_n = S_{n,a}$ polinom, hogy $S_n(a) = 1$, $0 \leq S_n(x) \leq 2$ és

$$0 \leq S_n(x) \leq 2C_0 \exp\left(-c_0\psi\left(\frac{n|x-a|}{32\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}\right)\right) \tag{3.32}$$

ahol $x \in [0, 1]$.

Legyen

$$S_n(x) = R_n\left(\sqrt{x}\sqrt{1-a} - \sqrt{1-x}\sqrt{a}\right) + R_n\left(\sqrt{x}\sqrt{1-a} + \sqrt{1-x}\sqrt{a}\right).$$

Mivel az R_n polinom x^{2k}, $k = 0, 1, \ldots$, alakú hatványok lineáris kombinációja, S_n legföljebb $n/2$ fokú, továbbá R_n már ismert tulajdonságai miatt világos, hogy $S_n(a) = 1$, illetve $0 \leq S_n(x) \leq 2$.

A (3.32) egyenlőtlenség belátásához (pl.) alkalmazzuk a következő becsléseket: Ha $0 \leq x \leq 2a$, akkor

$$\left|\sqrt{x}\sqrt{1-a} - \sqrt{1-x}\sqrt{a}\right| = \left|\frac{x-a}{\sqrt{x}\sqrt{1-a} + \sqrt{1-x}\sqrt{a}}\right| \geq \left|\frac{x-a}{2\sqrt{2a}}\right|,$$

illetve

$$\left|\sqrt{x}\sqrt{1-a} + \sqrt{1-x}\sqrt{a}\right| \geq \frac{\sqrt{a}}{2}.$$

Ezért

$$\begin{aligned} S_n(x) &\leq C_0 \exp\left(-c_0\psi\left(\frac{n|x-a|}{8\sqrt{2a}}\right)\right) + C_0 \exp\left(-c_0\psi\left(\frac{n\sqrt{a}}{8}\right)\right) \\ &\leq 2C_0 \exp\left(-c_0\psi\left(\frac{n|x-a|}{8\sqrt{2a}}\right)\right). \end{aligned} \tag{3.33}$$

Ha pedig $2a \leq x \leq 1$, akkor

$$\left|\sqrt{x}\sqrt{1-a} - \sqrt{1-x}\sqrt{a}\right| \geq \sqrt{x}\sqrt{1-a} - \sqrt{x/2} \geq \sqrt{x}\left(\sqrt{3/4} - \sqrt{1/2}\right) \geq \frac{\sqrt{x}}{8},$$

illetve

$$\left|\sqrt{x}\sqrt{1-a} + \sqrt{1-x}\sqrt{a}\right| \geq \frac{\sqrt{x}}{2},$$

így

$$\begin{aligned} S_n(x) &\leq C_0 \exp\left(-c_0\psi\left(\frac{n\sqrt{x}}{32}\right)\right) + C_0 \exp\left(-c_0\psi\left(\frac{n\sqrt{x}}{8}\right)\right) \\ &\leq 2C_0 \exp\left(-c_0\psi\left(\frac{n\sqrt{x}}{32}\right)\right). \end{aligned} \tag{3.34}$$

A (3.33) és (3.34) becslésekből már egyszerűen adódik a (3.32) egyenlőtlenség.

III. Minden n egészre és minden $2(8\tau/n)^2 \le a \le 1/2$ valós számra van olyan legföljebb n-ed fokú $V_n = V_{n,a}^{\psi}$ polinom, amelyre teljesül, hogy $V_n(0) = 1$, és ha $x \in [-a, 1]$, akkor $0 \le V_n(x) \le 2$, illetve

$$0 \le V_n(x) \le 2C_0 \exp\left(-c_0\psi\left(\frac{n|x|}{128\left(\sqrt{|x|} + \sqrt{a}\right)}\right)\right). \tag{3.35}$$

Valóban, figyelembe véve a (3.32) becslést, a $V_n(x) := S_{n,a/2}((x + a)/2)$ polinom rendelkezik az előbb említett három tulajdonsággal megjegyezve, hogy tetszőleges $x \in [-a, 1]$ pontra érvényes az alábbi egyenlőtlenség:

$$\sqrt{(x + a)/2} + \sqrt{a/2} \le 2\left(\sqrt{|x|} + \sqrt{a}\right).$$

A bizonyítás befejezése. Alkalmazzuk az előző pontot a $\psi(u)$ függvény helyett a $\psi^*(u) = \psi(256u)$ függvénnyel (a C_0, c_0, τ konstansok ennek megfelelően változhatnak, és alább a ψ^* függvényre vonatkozva használjuk őket). Ekkor a $P_{n,a}(x) = V_{n,a}^{\psi^*}(x)$ polinom a $2(8\tau/n)^2 \le a \le 1/2$ pontokban kielégíti a követelményeket. Ha pedig $0 \le a \le 2(8\tau/n)^2$, akkor $P_{n,a}(x)$ legyen $V_{n,a^*}^{\psi^*}(x)$, ahol $a^* = (16\tau/n)^2$. Ebben az esetben

$$0 \le P_{n,a}(x) \le 2C_0 \exp\left(-c_0\psi\left(\frac{2n|x|}{\sqrt{|x|} + 16\tau/n}\right)\right), \qquad x \in [-a, 1],$$

ha megjegyezzük, hogy

$$\psi\left(\frac{2n|x|}{\sqrt{|x|} + 16\tau/n}\right) \ge \psi\left(\frac{n|x|}{\sqrt{|x|} + \sqrt{a}}\right) - \psi(16\tau),$$

amit egyszerűen ellenőrizhetünk külön-külön az $|x| \le (16\tau/n)^2$, ill. az $|x| > (16\tau/n)^2$ pontokra.

■

Christoffel-függvények becslése a tartó bal-végpontjainál. Rátérünk a Christoffel-függvények becslésére, amely ismét kulcsfontosságú lesz a szomszédos zérushelyek távolságának felülről való becslésében. Az átláthatóság kedvéért a (3.10) egyenlőtlenség zárójelben feltüntetett kifejezésére Mastroianni és Totik jelölése nyomán a $\Delta_n(x)$ jelölést használjuk a 3.2.2. részben, azaz

$$\Delta_n(x) := \frac{\sqrt{x - \mathbf{b}}}{n} + \frac{1}{n^2}. \tag{3.36}$$

Az olvasót ne zavarja meg, hogy $\Delta_n(x)$ nem pont ugyanazt a függvényt jelöli itt, mint a szerzőpáros cikkében; számunkra ugyanis az a lényeg, hogy a két függvény egymás analógja és a végpontok környezetében nagyságrendileg megegyeznek. A segédfüggvény alakjára a „Duplázó mértékek Christoffel-függvénye görbéken és íveken” című részben mélyebb magyarázatot kapunk. Ezek után a 2.8. Tétel, illetve a 3.15. Lemma itteni változata a következőképpen szól:

3.20. Lemma. *Legyen* $\mathbf{b}$ *bal-végpontja a* μ *mérték tartójának. Tegyük fel, hogy* μ *duplázó tulajdonságú a* $[\mathbf{b}, \mathbf{b}+\beta]$ *intervallumon, és legyen* $\gamma < \beta$. *Ekkor van olyan* C_γ *konstans, hogy bármely* $a \in [A, A+\gamma]$ *pontra*

$$\frac{1}{C_\gamma}\mu([a-\Delta_n(a), a+\Delta_n(a)]) \le \lambda_n(\mu, p, a) \le C_\gamma \mu([a-\Delta_n(a), x+\Delta_n(a)]). \tag{3.37}$$

Bizonyítás. Feltehető, hogy $\mathbf{b} = 0$, $\alpha = \beta = 1$. A 3.15. Lemma miatt a (3.37) egyenlőtlenség minden $[A+\gamma', A+\gamma]$ alakú intervallumon érvényes, ahol $0 < \gamma' < \gamma < \beta$. Ezért a továbbiakban feltehetjük, hogy $a \in [0, 1/4]$.

μ tehát eltűnik a $[-1, 0]$ intervallumon, míg (nem 0 és) duplázó a $[0, 1]$ intervallumon, továbbá segédfüggvényünk az alábbi alakot ölti:

$$\Delta_n(a) = \frac{\sqrt{a}}{n} + \frac{1}{n^2}.$$

Először felülről becsüljük az n-edik Christoffel-függvényt. Alkalmazzuk a 3.19. Tételt a $\psi(x) = \sqrt{x}$ függvénnyel. A tétel szerint bármely $0 \le a \le 1/2$ számhoz létezik olyan legföljebb m-ed fokú $P_{m,a}$ polinom, amelyre igaz, hogy $P_{m,a}(0) = 1$, $|P_{m,a}(x-a)| \le 2$ a $[0, 1]$ intervallumon, továbbá

$$0 \le P_{m,a}(x-a) \le C \exp\left(-c\sqrt{\frac{m|x-a|}{\sqrt{a}}}\right), \text{ ha } 0 \le x \le 2a, \tag{3.38}$$

illetve

$$0 \le P_{m,a}(x-a) \le C \exp\left(-c\sqrt{m\sqrt{|x-a|}}\right), \text{ ha } 2a \le x \le 1 \tag{3.39}$$

valamilyen alkalmas a-tól és x-től független $c, C > 0$ konstansokkal. Mivel μ kompakt tartójú, van olyan $B \ge 2$, hogy $\mathrm{supp}(\mu) \subset [-B, B]$.

Most idézzük föl Csebisev egyik polinomokra vonatkozó becslésének [15, 6. Tétel] a következményét [15, Következmény, 62.o.]:

$$|q_n(x)| \le \|q_n\|_{[-1,1]}\left(|x| + \sqrt{x^2-1}\right)^n, \qquad \deg(q_n) \le n,\ x \in \mathbb{R}.$$

Ebből egyszerű lineáris transzformáció alkalmazásával kapjuk, hogy tetszőleges $[\tau-\delta, \tau+\delta]$ intervallum választása esetén teljesül az alábbi egyenlőtlenség

$$|q_n(x)| \le \|q_n\|_{[\tau-\delta,\tau+\delta]}\left(2\frac{|x-\tau|}{\delta}\right)^n, \qquad \deg(q_n) \le n,\ x \in \mathbb{R} \setminus [\tau-\delta, \tau+\delta].$$

Ebből, emlékezve, hogy $0 \le P_{m,a}(x-a) \le 2$ a $[0,1]$ intervallumon, adódik, hogy

$$P_{m,a}(x-a) \le 2(8B)^m \qquad x \in [-B, B].$$

Adott n természetes számra legyen

$$r_n(x) := P_{m,a}(x-a)\left(1 - \frac{(x-a)^2}{(B+1)^2}\right)^{Mm},$$

ahol M egy később választandó alkalmas konstans, míg $m = m(n) = \left[\frac{n}{2M+1}\right]$. Világos, hogy r_n legföljebb n-ed fokú, $r_n(a) = 1$, és mivel

$$\left(1 - \frac{(x-a)^2}{(B+1)^2}\right) \le 1 \qquad x \in [-B, B],$$

(3.38) és (3.39) alapján érvényes, hogy

$$r_n(x) \le C \exp\left(-c\sqrt{\frac{m|x-a|}{\sqrt{a}}}\right), \qquad x \in [0, 2a], \tag{3.40}$$

illetve

$$r_n(x) \le C \exp\left(-c\sqrt{m\sqrt{|x-a|}}\right), \qquad x \in [2a, 1], \tag{3.41}$$

továbbá a $[-B, B] \backslash [-1, 1/2]$ halmazon (nem feledve, hogy $0 \le a \le 1/4$)

$$|r_n(x)| \le 2(8B)^m \left(1 - \frac{1}{16(B+1)^2}\right)^{Mm}.$$

Ha most M-et olyan nagyra választjuk, hogy

$$(8B)\left(1 - \frac{1}{16(B+1)^2}\right)^M < \frac{1}{e}$$

teljesül, akkor

$$|r_n(x)| \le 2e^{-m} \le 2e^{-n/4M}, \qquad x \in [-B, B] \backslash [-1, 1/2]. \tag{3.42}$$

Az előkészületek után rátérünk az n-edik Christoffel-függvény becslésére. Először legyen $a \in [4/n^2, 1/4]$. Mivel az imént bevezetett r_n polinom legföljebb n-ed fokú, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\lambda_n(\mu, p, a) &= \inf_{\substack{q(a)=1\\ \deg q \le n}} \int |q|^p \,\mathrm{d}\mu \le \int |r_n|^p \,\mathrm{d}\mu \\ &= \int_{a-\Delta_n(a)}^{a+\Delta_n(a)} + \int_0^{a-\Delta_n(a)} + \int_{a+\Delta_n(a)}^{2a} + \int_{2a}^{1/2} + \int_{\mathbb{R}\setminus[-1,1/2]},\end{aligned} \tag{3.43}$$

felhasználva, hogy $\mu([-1, 0]) = 0$. Ezek után a jobb oldal tagjait külön-külön becsüljük.

Az első integrál esetében elég azt kihasználnunk, hogy a $[0, 1]$ intervallumon $0 \le r_n(x) \le 2$, így

$$\int_{a-\Delta_n(a)}^{a+\Delta_n(a)} |r_n|^p \mathrm{d}\mu \le \int_{a-\Delta_n(a)}^{a+\Delta_n(a)} 2^p \,\mathrm{d}\mu = 2^p \mu([a - \Delta_n(a), a + \Delta_n(a)]). \tag{3.44}$$

A második és a harmadik integrált együtt kezeljük, mivel ezek integrálási tartománya fölött hasonló becslésekkel rendelkezünk r_n -re vonatkozólag (lásd (3.40)):

$$\begin{aligned}\int_0^{a-\Delta_n(a)} + \int_{a+\Delta_n(a)}^{2a} &\le 2 \int_{a+\Delta_n(a)}^{2a} C^p \exp\left(-pc \sqrt{\frac{m|x-a|}{\sqrt{a}}}\right) \mathrm{d}\mu(x) \le \\ &\le 2C^p \sum_{i=1}^{H} \int_{a+i\Delta_n(a)}^{a+(i+1)\Delta_n(a)} \exp\left(-pc \sqrt{\frac{m|x-a|}{\sqrt{a}}}\right) \mathrm{d}\mu(x),\end{aligned} \tag{3.45}$$

ahol H az a pozitív egész, amelyre $a + H\Delta_n(a) < 2a \le a + (H + 1)\Delta_n(a)$. Az integrandusz egy $[a + i\Delta_n(a), a + (i + 1)\Delta_n(a)]$ alakú intervallumon legföljebb

$$\begin{aligned}\exp\left(-pc \sqrt{\frac{m|x-a|}{\sqrt{a}}}\right) &\le \exp\left(-pc \sqrt{\frac{mi\Delta_n(a)}{\sqrt{a}}}\right) \\ &\le \exp\left(-\frac{pc}{2\sqrt{M}} \sqrt{\frac{ni\Delta_n(a)}{\sqrt{a}}}\right) \le \exp\left(-\frac{pc}{2\sqrt{M}} \sqrt{i}\right),\end{aligned}$$

hiszen $\frac{n}{4M} \le m$, illetve $n\Delta_n(a) \ge \sqrt{a}$. Ezt és a duplázó tulajdonságot (3.17. Lemma (iv)) használva folytatjuk a (3.45) egyenlőtlenséget:

$$\begin{aligned}&\le 2C^p \sum_{i=1}^{H} \exp\left(-\frac{pc}{2\sqrt{M}} \sqrt{i}\right) \mu([a + i\Delta_n(a), a + (i + 1)\Delta_n(a)]) \\ &\le 2C^p \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{\infty} K(i+1)^s e^{-\frac{pc}{2\sqrt{M}}\sqrt{i}}\right)}_{\text{konstans}<\infty} \mu([a - \Delta_n(a), a+\Delta_n(a)]).\end{aligned} \tag{3.46}$$

Itt K és s csak μ duplázó konstansától függnek.

A negyedik integrált is az előbbi módon becsüljük, csak (3.40) helyett a (3.41) becslést használjuk:

$$\int_{2a}^{1/2} \leq C^p \sum_{i=H}^{\hat{H}} \int_{a+i\Delta_n(a)}^{a+(i+1)\Delta_n(a)} \exp\left(-pc\sqrt{m\sqrt{|x-a|}}\right) \mathrm{d}\mu(x),$$

ahol $\hat{H}$ az a természetes szám, amelyre $a + \hat{H}\Delta_n(a) < 1/2 \leq a + (\hat{H}+1)\Delta_n(a)$. Az $[a + i\Delta_n(a), a + (i+1)\Delta_n(a)]$ intervallumon egyszerűen látható, hogy

$$m\sqrt{|x-a|} \geq m\sqrt{i\Delta_n(a)} \geq \frac{n}{4M}\sqrt{\frac{i}{n^2}} \geq \frac{\sqrt{i}}{4M}.$$

Ez és a duplázó tulajdonság (3.17. Lemma (iv)) együtt implikálja, hogy

$$\int_{2a}^{1/2} \leq C^p \underbrace{\left(\sum_{i=H}^{\infty} K(i+1)^s e^{-\frac{pc}{2\sqrt{M}}\sqrt[4]{i}}\right)}_{\text{konstans}<\infty} \mu([a-\Delta_n(a), a+\Delta_n(a)]). \tag{3.47}$$

Végül az ötödik integrállal foglalkozunk. A duplázó tulajdonság (3.17. Lemma,(ii)) mutatja, hogy ha n elég nagy, akkor valamilyen n-től független $\hat{c}$ konstanssal

$$\begin{aligned}\mu([a-\Delta_n(a), a+\Delta_n(a)]) &\geq \frac{1}{K}\left(\frac{|[a-\Delta_n(a), a+\Delta_n(a)]|}{|[0,1]|}\right)^s \mu([0,1])\\ &\geq \hat{c}|\Delta_n(a)|^s \geq \hat{c}\left(\frac{1}{n^2}\right)^s \geq \hat{c}e^{-pn/4M}.\end{aligned}$$

Ezt összevetve a (3.42) becsléssel láthatjuk, hogy

$$\int_{\mathrm{R}\setminus[-1,1/2]} |r_n|^p \,\mathrm{d}\mu \leq \mu(\mathrm{R}\setminus[-1,1/2])2^p e^{-pn/4M} \leq \frac{1}{\hat{c}}\mu([a-\Delta_n(a), a+\Delta_n(a)]). \tag{3.48}$$

A (3.44), a (3.46), a (3.47) és a (3.48) egyenlőtlenségek megfelelő oldalait összeadva és figyelembe véve a (3.43) egyenlőtlenséget kapjuk, hogy van olyan C_γ konstans, amellyel teljesül a

$$\lambda_n(\mu, p, a) \leq C_\gamma \mu([a-\Delta_n(a), a+\Delta_n(a)]),$$

egyenlőtlenség, igazolva az n-edik Christoffel-függvényre vonatkozó (3.37)-ben szereplő felső becslést, ha $a \in [4/n^2, 1/4]$.

Ha pedig $0 \leq a \leq 4/n^2$, akkor ugyanígy kell eljárnunk, csak a (3.43) jobb oldalán álló felbontás helyett az alábbiból kell kiindulnunk:

$$\int r_n^2 \, d\mu = \int_0^{a+\Delta_n(a)} + \int_{a+\Delta_n(a)}^{1/2} + \int_{\mathbb{R}\setminus[0,1/2]} .$$

Ami a $\lambda_n(\mu, p, a)$ függvényre vonatkozó (3.37)-ben szereplő alsó becslést illeti, azt a $[-1, 1]$ tartójú duplázó mértékekre vonatkozó (2.6) becslésből vezetjük le akárcsak a 3.15. Lemma bizonyításában. Feltevéseink szerint μ duplázó tulajdonságú a $[0, 1]$ intervallumon, így véve μ erre vonatkozó megszorítását, azaz a $\nu = \mu|_{[0,1]}$ mértéket, egy egyszerű lineáris transzformációt követően alkalmazhatjuk rá az említett (2.6) becslést. Ekkor segédfüggvényünk a

$$\tilde{\Delta}_n(x) = \frac{\sqrt{x - x^2}}{n} + \frac{1}{n^2}$$

alakot ölti. Így minden $a \leq \frac{1}{2}$ pontra adódik, hogy

$$\begin{aligned} \lambda_n(\mu, p, a) &= \inf_{\substack{q(a)=1 \\ \deg q \leq n}} \int |q(x)|^p \, d\mu(x) \geq \inf_{\substack{q(a)=1 \\ \deg q \leq n}} \int_0^1 |q(x)|^p \, d\mu|_{[0,1]}(x) = \lambda_n(\nu, p, a) \\ &\geq \frac{1}{c} \int_{a-\tilde{\Delta}_n(a)}^{a+\tilde{\Delta}_n(a)} d\nu(x) \geq \frac{1}{c} \int_{a-\Delta_n(a)}^{a+\Delta_n(a)} d\nu(x) \\ &= \tfrac{1}{c}\mu([a - \Delta_n(a), a + \Delta_n(a)]), \end{aligned}$$

ami bizonyítja a (3.37)-ben szereplő alsó becslést. Ezzel a bizonyítás teljes.

∎

3.21. Megjegyzés: Figyeljük meg, hogy a felső becslés igazolásában azt használtuk ki, hogy a duplázó tulajdonság ekvivalens a 3.17. Lemma (ii), illetve (iv) pontjaival. Ha kicsit általánosabb halmazokra fogalmazzuk meg a duplázó tulajdonságot, akkor is fennállnak az előző pontok megfelelői, így a 3.20. Lemmában szereplő felső becslés ebben az esetben is érvényes lesz. Ezt pontosabban is megfogalmazzuk.

3.22. Definíció. *Legyen $\mathbb{K}$ a μ mérték tartójának egy részhalmaza. μ (szűkebb értelemben) duplázó $\mathbb{K}$-n, ha van olyan L konstans, hogy valahányszor egy I intervallum középpontja $\mathbb{K}$-ba esik, akkor*

$$\mu(2I) \leq L\mu(I)$$

Könnyen látható, hogy ez ekvivalens azzal a tulajdonsággal, hogy van olyan C konstans, hogy minden $\lambda > 0$ esetén $\mu(\lambda I) \leq C\lambda^{\log_2 L}\mu(I)$. Ebből a formából könnyen adódik az alábbi két tulajdonsággal való ekvivalencia:

(ii') van olyan K és s konstans, hogy ha I középpontja $\mathbb{K}$-ba esik és $I \subset J$, ahol J is egy intervallum, akkor $\mu(J) \leq K(|J|/|I|)^s \mu(I)$;

(iv') van olyan K és s konstans, hogy ha I középpontja $\mathbb{K}$-ba esik és J tetszőleges intervallum, akkor
$$\mu(J) \leq K\left(\frac{|I| + |J| + \mathrm{d}(I, J)}{|I|}\right)^s \mu(I).$$

Emiatt az alábbi lemma is érvényes:

3.23. Lemma. *Legyen* $\mathbf{b}$ *bal-végpontja a* μ *mérték tartójának. Tegyük fel hogy* μ *(szűkebb értelemben) duplázó tulajdonságú a* $[\mathbf{b}, \mathbf{b}+\beta]$ *intervallum egy* $\mathbb{K}$ *részhalmazán, és legyen* $\gamma < \beta$*. Ekkor van olyan* C_γ *konstans, hogy bármely* $a \in \mathbb{K}$ *pontra*
$$\lambda_n(\mu, p, a) \leq C_\gamma \mu([a - \Delta_n(a), x + \Delta_n(a)]). \tag{3.49}$$

A „szűkebb értelemben” jelzőt azért használjuk, mert ha μ szűkebb értelemben duplázó egy $[a, b]$ intervallumon, akkor ott duplázó is (a 3.1. definíció értelmében). Fordítva nem igaz: vegyük pl. azt a μ mértéket, amelyre $\mathrm{d}\mu(x) = |1 - x|\,\mathrm{d}x$, ha $x \in [0, 1]$, és $\mathrm{d}\mu(x) = \mathrm{d}x$, ha $x \in (1, 2]$. Ez a mérték duplázó tulajdonságú a $[0, 1]$ intervallumon, de szűkebb értelemben már nem az (csak vizsgáljuk meg az $[1 - 2/n, 1]$ alakú intervallumokat és kétszereseiket).

Lássunk egy példát is a most kimondott 3.23. Lemma alkalmazására. A Cantor-mértéket a következő módon definiáljuk. Végezzük el a sztenderd Cantor-halmaz konstrukciót. Az l-edik lépést követően 2^l darab $1/3^l$ hosszúságú intervallumból álló halmazt nyerünk, amit C_l-lel jelölünk. Ezen a halmazon vezessük be a
$$\rho_l = (3/2)^l \cdot m\big|_{C_l}$$
mértéket, ahol m a szokásos $\mathbb{R}$ fölötti Lebesgue-mértéket jelöli. Ha $l \to \infty$, akkor ρ_l tart egy ρ gyenge* limeszhez, amit Cantor-mértéknek nevezünk. A konstrukcióból könnyen látható, hogy ρ tartója éppen a $C = \cap_l C_l$ Cantor-halmaz és azon szűkebb értelemben duplázó (lásd Függelék).

Jelölje $[p, q]$ a C_l halmaz egy $1/3^n$ hosszúságú részintervallumát. Alkalmazva a 3.23. Lemmát (és annak jobb-végpontokra vonatkozó értelemszerű párját) az alábbi felső becslést kapjuk:
$$\lambda_n(\rho, a) \leq C_{p,q}\rho([a - \overline{\Delta}_n(a), a + \overline{\Delta}_n(a)]), \qquad a \in [p, q],$$

ahol

$$\overline{\Delta}_n(a) = \frac{\sqrt{(a-p)(q-a)}}{n} + \frac{1}{n^2}.$$

Mivel $\rho(I) \leq C_0 |I|^{\log 2/\log 3}$ bármely I intervallumra valamilyen I-től független C_0 konstanssal, következik, hogy

$$\lambda_n(\rho, a) \leq C'_{p,q} \left(\frac{\sqrt{(a-p)(q-a)}}{n} + \frac{1}{n^2} \right)^{\log 2/\log 3}, \qquad a \in [p, q].$$

Speciálisan a C_l halmaz maximális részintervallumainak végpontjaira érvényes, hogy ott $\lambda_n \leq C_l n^{-2\log 2/\log 3}$.

A 3.10. Tétel bizonyítása. Szükségünk lesz a következő lemmára, ami $\Delta_n(x)$ (lásd 3.36) különböző helyeken felvett értékeit hasonlítja össze.

3.24. Lemma (vö. [12, Lemma 4]). *Legyen* $\mathbf{b} \leq y \leq x$. *Ha valamilyen alkalmas* $S \geq 1$ *konstanssal fennáll az*

$$x - y \leq S\,\Delta_n(x) \tag{3.50}$$

egyenlőtlenség, akkor

$$\Delta_n(x) \leq 8S\,\Delta_n(y). \tag{3.51}$$

Bizonyítás. Ha $x \leq 1/n^2$, akkor $\Delta_n(x) \leq 2/n^2 \leq 2\Delta_n(y)$, ezért a továbbiakban feltesszük, hogy $x > 1/n^2$. Ha $y \geq x/2$, akkor

$$\Delta_n(x) = \frac{\sqrt{2}\,\sqrt{x/2}}{n} + \frac{1}{n^2} \leq \sqrt{2}\Delta_n(y).$$

Végül, ha $y < x/2$, akkor a (3.50) feltétel miatt

$$\frac{x}{2} \leq S\,\Delta_n(x) \leq \frac{2S\,\sqrt{x}}{n},$$

amiből átrendezéssel adódik, hogy $\sqrt{x}/n \leq 4S/n^2$. Ebből kapjuk, hogy

$$\Delta_n(x) \leq \frac{2\,\sqrt{x}}{n} \leq \frac{8S}{n^2} \leq 8S\,\Delta_n(y).$$

∎

3.10. Tétel bizonyítása. A 3.20. és az előző lemmák figyelembe vételével a 3.2. Tételhez hasonlóan folyik a bizonyítás. A legfontosabb eltérés, hogy az $x_{n,k}$ zérushely körüli $2/n$ hosszúságú intervallumot lecseréljük a zérushely körüli $2\Delta_n(x_{n,k})$ hosszúságú intervallummal és a Christoffel-függvényekre a 3.20. Lemmában megadott becslést használjuk.

Megint feltehető, hogy $\mathbf{b} = 0$, $\alpha = \beta = 1$. Mivel a már bizonyított 3.2.Ṫétel miatt az $[\varepsilon_1, \varepsilon_2]$ $(0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < 1)$ alakú intervallumokon fennáll a (3.5) egyenlőtlenség, azt is feltehetjük, hogy $\gamma \leq 1/4$. Rögzítsünk egy n természetes számot és a bizonyítás hátralévő részében használjuk az $x_k := x_{n,k}$, $\lambda_{n,k} := \lambda_n(\mu, 2, x_{n,k})$ és $\Delta_{n,k} := \Delta_n(x_{n,k})$ rövidítéseket.

Először a k-adik és a $k+1$-edik gyökök közötti távolságra vonatkozó felső becsléssel foglalkozunk. A zérushelyek, a mérték eloszlása és a Cotes-számok között kapcsolatot teremtő Markov-egyenlőtlenség [7, I.5. (5.4)] miatt a (3.15) és a (3.16) egyenlőtlenséghez hasonlóan írhatjuk, hogy

$$\mu([x_k, x_{k+1}]) \leq \lambda_{n,k} + \lambda_{n,k+1}. \tag{3.52}$$

Most $x_k, x_{k+1} \in [0, 1/4]$, hiszen megállapodtunk abban, hogy elegendő a $\gamma \leq 1/4$ esettel foglalkoznunk. Feltehetjük, hogy $x_{k+1} - x_k \geq 2\Delta_{n,k}$, különben nincs mit bizonyítani. Ekkor

$$x_k + \Delta_{n,k} \leq x_{k+1} - \Delta_{n,k}.$$

Legyen

$$E_1 = [x_k - \Delta_{n,k}, x_k + \Delta_{n,k}], \qquad E_2 = [x_{k+1} - \Delta_{n,k}, x_{k+1} + \Delta_{n,k}]$$

és

$$I = [x_k - \Delta_{n,k}, x_{k+1} + \Delta_{n,k}].$$

Ha belátjuk, hogy $|I|$ becsülhető fölülről $\Delta_{n,k}$ egy alkalmas konstansszorosával, akkor készen vagyunk. A duplázó tulajdonság és (3.52) maga után vonja, hogy

$$\mu(I) \leq L\mu([x_{k+1}, x_k]) \leq L(\lambda_{n,k+1} + \lambda_{n,k}),$$

amit a 3.20. Lemma alapján, majd a duplázó tulajdonság (3.17. Lemma (iii)) figyelembe vételével folytatunk:

$$\leq LC(\mu(E_1) + \mu(E_2)) \leq 2LCK \left(\frac{|E_1|}{|I|} + \frac{|E_2|}{|I|} \right)^r \mu(I).$$

Ezért

$$x_{k+1} - x_k \leq |I| \leq \sqrt[r]{2LCK}(|E_1| + |E_2|),$$

és (3.51) az $S = 2\sqrt[r]{2LCK}$ választással adja a bizonyítandó felső becslést:

$$x_{n,k+1} - x_{n,k} \le A_\gamma \Delta_{n,k}.$$

x_{n,k_0} esetében is hasonlóan okoskodunk. Feltehető, hogy $x_{n,k_0} \ge 2/n^2$, egyébként készen vagyunk. A 0 pont körül is felírható a Markov-egyenlőtlenség:

$$\sum_{x_{n,j}<0} \lambda_{n,j} \le \mu((-\infty,0)) \le \mu((-\infty,0]) \le \sum_{x_{n,j}\le 0} \lambda_{n,j}.$$

Ezért (3.52) ebben az esetben így alakul:

$$\mu([0,x_{k_0}]) \le \lambda_{n,k_0}. \tag{3.53}$$

Most $E_2 = [x_{k_0} - 1/n^2, x_{k_0} + 1/n^2]$, $I = [0, x_{k_0} + 1/n^2]$; E_1-re nincs szükség. Ugyanazon érvelés mentén, mint az előbb, kapjuk, hogy

$$\mu(I) \le L\mu([0,x_{k_0}]) \le L\lambda_{n,k_0} \le LC\mu(E_2) \le 2LCK\left(\frac{|E_2|}{|I|}\right)^r \mu(I),$$

ezért (3.51) segítségével adódik, hogy

$$x_{k_0} \le |I| \le \sqrt[r]{2LCK}|E_2| \le \frac{A_\gamma}{n^2}.$$

Ezzel a felső becslést beláttuk.

Az alsó becslés is követi az 3.2. Tétel bizonyítását. Ismét az ott idézett Remez-egyenlőtlenséget használjuk azt a $t \mapsto (t+1)/2$ leképezéssel a $[0,1]$ intervallumra transzformálva. Eszerint (3.18) érvényes az $[\eta,\vartheta] \subset [0,1]$ intervallummal, amennyiben az $|\arccos([2\eta-1, 2\vartheta-1])| \le \Lambda/n$ feltétel teljesül. Ha $x_k \in [0,1/4]$, ahogy ezt feltettük, akkor az $[x_{n,k} - 2\Delta_{n,k}, x_{n,k} + 2\Delta_{n,k}] \cap [0,1]$ intervallum teljesíti ezt a feltételt, ezért alkalmazható a (3.18) Remez-egyenlőtlenség.

Feltehető, hogy $x_{k+1} - x_k = \delta\Delta_{n,k}$ valamilyen $\delta \le \frac{1}{2}$ számmal, különben készen vagyunk.

(3.19) változatlanul igaz, ha a jobb oldal második integráljának integrálási tartományát a $[0,1] \setminus [x_k, x_{k+1}]$ halmazra cseréljük.

(3.20) jobb oldalára a $-\delta^2\Delta_{n,k}^2 \int_{x_{n,k}}^{x_{n,k+1}} q_{n-2}^2 \,\mathrm{d}\mu$, míg (3.21) jobb oldalára a $\frac{\Delta_{n,k}^2}{C_\Lambda} \int_{[x_{n,k},x_{n,k+1}]} q_{n-2}^2 \,\mathrm{d}\mu$ kifejezés kerül, ezért (3.22) így változik:

$$0 \ge \left(\tfrac{1}{C_\Lambda} - \delta^2\right)\Delta_{n,k}^2 \int_{x_{n,k}}^{x_{n,k+1}} q_{n-2}^2 \,\mathrm{d}\mu,$$

ami csak akkor lehetséges, ha $\delta \geq \frac{1}{\sqrt{C_\Lambda}}$, maga után vonva, hogy

$$x_{n,k+1} - x_{n,k} \geq \frac{1}{\sqrt{C_\Lambda}} \Delta_{n,k},$$

amit bizonyítani kellett. A 3.11. Megjegyzésben azt állítottuk, hogy ha $k_0 = 1$, akkor az $1/n^2$ nagyságrendű alsó becslés az $x_{n,1}$ pont és a 0 közötti távolságra is érvényes. A bizonyítás hasonlóan megy, mint az előbb, csak a q_{n-2} segédpolinom helyett a $q_{n-1} = \pi_n/(x - x_{n,1})$ polinomot kell használnunk (most nem fontos, hogy milyen a 0 előtti előjele, mert ebben az esetben a mérték ott úgy is eltűnik), $\Delta_{n,k}$ ebben az esetben pedig egyszerűen $\Delta_n(0) = 1/n^2$.

■

A 3.12. Következmény bizonyítása ugyanúgy történik, mint a 3.6. Következmény vagy a [12, Theorem 2] bizonyítása, amennyiben rendelkezésünkre áll a 3.20. Lemma és a 3.10. Tétel. A 3.13. Tétel bizonyítását a függelékben közöljük a teljesség kedvéért. Ennek oka, hogy az tulajdonképpen megegyezik a [12, Theorem 3] bizonyításával, ezért azt a [33] cikkben sem részleteztük.

3.3. Megjegyzés a 3.10. Tételhez

Mint említettük a 3.10. Tétel szerint egy bal-végpontnál a szomszédos gyökök távolsága ugyanazt a mintázatot mutatja, mint a tisztán duplázó esetben (2.5. Tétel) a végpontoknál. Ha azonban megnézzük az utóbbi kimondását, akkor láthatjuk, hogy az a gyökökhöz még a ± 1 pontokat is hozzáveszi, hisz távolságuk a legnagyobb, illetve a legkisebb gyöktől követi a szomszédos gyökök közötti távolságok mintázatát (azaz $\Delta_n(x_{n,1}) \sim \Delta_n(1) = 1/n^2$ nagyságrendű). A 3.10. Tételben a bal-végpont és a tőle jobbra lévő legkisebb gyök közötti távolságra csak felső becslést adtunk, kivéve azt a speciális esetet, amikor a bal-végpont egyben a tartó legkisebb pontja is, mert ekkor –mint arra rá is mutattunk– megmarad az $1/n^2$ nagyságrendű alsó becslés is. Most rámutatunk, hogy belső végpont estén 0-nál jobb alsó becslés nem adható meg.

3.25. Állítás. *Van olyan $0 < d < 1$, hogy ha μ jelöli a Lebesgue-mérték $[-2,-1] \cup [0,d]$ halmazra történő megszorítását és x_{n,j_0} az n-edik ortogonális polinom legkisebb nem negatív gyökét, akkor a természetes számoknak létezik olyan $\{n_k\}$ részsorozata, hogy*

$$\frac{1}{2} e^{-n_k} \leq x_{n_k,j_0} \leq 2e^{-n_k}. \tag{3.54}$$

Sőt, az alábbi bizonyítás kis módosításával ennél erősebb állítás is belátható: ha veszünk egy $\delta_n = o(n^{-2})$ sorozatot, akkor van olyan d, hogy a $\mu = m|_{[-2,-1]\cup[0,d]}$ mértékre (m a Lebesgue-mértéket jelöli) és a természetes számok valamely $\{n_k\}$ részsorozatára

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_{n_k,j_0}}{\delta_{n_k}} = 1.$$

Bizonyítás. A konstrukcióhoz szükségünk lesz néhány eredményre, amit itt idézünk is.

Jelölje ν_n azt a mértéket, amely $1/n$ tömeget helyez az n-edik ortogonális polinom minden egyes zérushelyére (ez az úgynevezett zérushelyekre vonatkozó normalizált számláló mérték).

Jelölje ω_S a számegyenes egy pozitív kapacitású, kompakt S részhalmazának egyensúlyi mértékét (az egyensúlyi mérték pontos definíciójához lásd pl. [21, Ch. 3.]).

3.26. Lemma. *Ha μ a Lebesgue-mérték megszorítása egy véges sok intervallumból álló S halmazra, akkor $\nu_n \to \omega_S$ a komplex sík mértékeinek gyenge* topológiájában.*

Ez azonnal következik [25, Theorem 3.1.4]-ből és valamely [25, Ch. 4.]-ben megadott regularitási kritériumból.

3.27. Lemma ([32, Section 3]). *Legyenek $[a_1, b_1], \dots, [a_l, b_l]$ páronként diszjunkt intervallumok és $\eta \le b_l - a_l$. Ha ω_η jelöli az $[a_1, b_1] \cup \dots \cup [a_{l-1}, b_{l-1}] \cup [a_l, b_l - \eta]$ halmazra vonatkozó egyensúlyi mértéket, akkor*

(i) $\omega_\eta([a_l, b_l - \eta])$ *szigorúan monoton nő η-ban,*

(ii) minden $1 \le i \le l-1$*-re* $\omega_\eta([a_i, b_i])$ *η-ban szigorúan monoton csökkenő.*

3.28. Lemma. *Ha m_η jelöli az előző intervallum-rendszeren a normalizált Lebesgue-mértéket, akkor az m_η-hoz tartozó ortogonális polinomok egymásnak megfelelő zérushelyeinek helyzete η folytonos függvényeként változik.*

Ez nyilvánvaló következménye annak, hogy, figyelembe véve a Gram-Schmidt eljárást, az n-edik ortogonális polinomok együtthatói η folytonos függvényei.

Ezek után visszatérünk a konstrukcióhoz. Alkalmazzuk a 3.27. Lemmát az $l = 2$, $[a_1, b_1] = [-2, -1]$ és $[a_2, b_2] = [0, 1]$ esetben. Legyen $E = [-2, -1]$, $I = [0, 1]$, m_η pedig a normalizált Lebesgue-mérték az $E \cup I_\eta$ halmazon, ahol $I_\eta := [0, 1 - \eta]$, $0 < \eta < 1/2$. Jelölje $x^\eta_{n,k}$, $k = 1, 2, \dots, n$ az m_η-hoz tartozó n-edik ortogonális polinom gyökeit növekvő sorrendben, és legyen x^η_{n,j^η_0} e polinom legkisebb pozitív gyöke (2.ábra). Ha n elég nagy, x^η_{n,j^η_0} létezik, és a 3.10. Tétel alapján tudjuk, hogy $x^\eta_{n,j^\eta_0+1} \ge c/n^2$ valamilyen η-tól és n-től független $c > 0$ konstanssal.

Ha $\eta' > \eta$, akkor a 3.26. és a 3.27. lemmák szerint nagy n-ekre, mondjuk $n \ge N_{\eta,\eta'}$-re, az $m_{\eta'}$ mértékre vonatkozó n-edik ortogonális polinomnak, $\pi_n(m_{\eta'}, .)$-nek legalább hárommal több gyöke van az E intervallumon, mint az m_η mértékre vonatkozó n-edik ortogonális polinomnak,

2. ábra. Az m_η mértékhez tartozó n-edik ortogonális polinom legkisebb nem negatív gyöke: x^η_{n,j_0^η}. Részletes magyarázat a szövegben.

$\pi_n(m_\eta, .)$-nak. Ez azt jelenti, hogy $x^{\eta'}_{n,j_0^\eta+1} \in E$, míg $x^\eta_{n,j_0^\eta+1} \in I_\eta$. Innen, függetlenül attól, hogy $n \geq N_{\eta,\eta'}$-t hogyan rögzítjük, amint ε η-tól η' felé halad, úgy az $x^\varepsilon_{n,j_0^\eta+1}$ zérushely a $[c/n^2, \infty)$ intervallumból folytonos módon a $(-\infty, -1]$ intervallumba kerül. Tehát van olyan $\eta < \varepsilon < \eta'$, hogy $x^\varepsilon_{n,j_0^\eta+1} = e^{-n}$. Vegyük észre, hogy ebben az esetben $j_0^\varepsilon = j_0^\eta + 1$ szükségképpen, ugyanis a $\pi_n(m_\varepsilon, .)$ polinomnak nem lehet $e^{-n} = x^\varepsilon_{n,j_0^\eta+1}$-nál kisebb nem negatív gyöke, hisz akkor a 3.10. Tétel szerint $x^\varepsilon_{n,j_0^\eta+1}$-nak c/n^2-nél nagyobbnak kéne lennie. Így $x^\varepsilon_{n,j_0^\varepsilon} = e^{-n}$.

Ezen az alapon könnyen megadhatunk egy olyan $0 = \varepsilon_0 < \varepsilon_1 < \cdots < 1/2$ és egy olyan egészekből álló $n_0 < n_1 < \ldots$ sorozatot, hogy

$$x^{\varepsilon_m}_{n_k,j_0^{\varepsilon_m}} = e^{-n_k}\Big(1 + O(k^{-1})\Big) \tag{3.55}$$

valahányszor $m \geq k$, és itt O használata m-től és k-tól független. Valóban, ha ε_m, n_m már adott, akkor válasszunk úgy egy $\varepsilon'_m > \varepsilon_m$ számot, hogy minden $\varepsilon \in [\varepsilon_m, \varepsilon'_m]$ számra és $k \leq m$ egészre fönnálljon az

$$|x^\varepsilon_{n_k,j_0^\varepsilon} - x^{\varepsilon_m}_{n_k,j_0^{\varepsilon_m}}| < \frac{e^{-n_k}}{m^2} \tag{3.56}$$

egyenlőtlenség. Ezek után, az előbbi eljárást az $\eta = \varepsilon_m$ és $\eta' = \varepsilon'_m$ helyettesítéssel alkalmazva, n_{m+1}, ε_{m+1} legyenek olyan számok, amelyekre

$$x^{\varepsilon_{m+1}}_{n_{m+1},j_0^{\varepsilon_{m+1}}} = e^{-n_{m+1}}$$

(valójában, az eljárásban minden elég nagy szám megfelelő n_{m+1} szerepére – valamelyiket válasszuk ki). Ezzel az $\{\varepsilon_m\}$ és az $\{n_m\}$ sorozatot teljesen megadtuk.

Vegyük észre, hogy (3.55) teljesül, ugyanis a (3.56) becslésben ε helyébe ε_{m+1}-et írva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} |x^{\varepsilon_{m+1}}_{n_k,j_0^{\varepsilon_{m+1}}} - e^{-n_k}| &= |x^{\varepsilon_{m+1}}_{n_k,j_0^{\varepsilon_{m+1}}} - x^{\varepsilon_k}_{n_k,j_0^{\varepsilon_k}}| \\ &\leq \sum_{l=k}^{m} |x^{\varepsilon_{l+1}}_{n_k,j_0^{\varepsilon_{l+1}}} - x^{\varepsilon_l}_{n_k,j_0^{\varepsilon_l}}| \leq \sum_{l=k}^{m} \frac{e^{-n_k}}{l^2} \leq 2\frac{e^{-n_k}}{k}. \end{aligned} \tag{3.57}$$

Ha most ε az $\{\varepsilon_m\}$ sorozat határértéke, akkor minden k-ra

$$x^{\varepsilon}_{n_k, j_0^{\varepsilon}} - e^{-n_k} = e^{-n_k} O(k^{-1}),$$

ami bizonyítja (3.54)-et.

∎

4. Duplázó mértékek Christoffel-függvényei görbéken és íveken

4.1. Kétoldali becslés a Christoffel-függvényekre

Ebben a részben a 2.8. Tételt szeretnénk általánosítani oly módon, hogy az eddigi számegyenesen lévő intervallumot egy komplex síkon futó kvázi-sima göbére vagy ívre cseréljük. Külön kitérünk a Dini-sima esetre és alkalmazásként becslést adunk az ortogonális polinomok abszolút értékére, valamint Nikolszkij-típusú egyenlőtlenségeket igazolunk görbék és ívek felett.

Megközelítésünk szorosan kapcsolódik Andrijevszkij munkáihoz [1, 2, 3], amelyekben [13] eredményeit kiterjeszti kvázi-sima görbékre és ívekre.

Mindenekelőtt tisztáznunk kell a felhasznált fogalmakat és jelöléseket. A továbbiakban az általunk vizsgált Jordan-görbékről (az egységkörvonal homeomorf képei) és ívekről (a $[-1, 1]$ intervallum homeomorf képei) feltesszük, hogy rektifikálhatóak. Ha z_1 és z_2 két pontja az általunk vizsgált L görbének vagy ívnek, akkor $L(z_1, z_2)$ jelöli L-nek azt a (görbe esetén rövidebb) részívét, ami összeköti ezeket a pontokat. Az $L(z_1, z_2)$ részív ívhosszára pedig az $|L(z_1, z_2)|$ jelölést alkalmazzuk.

Már használtuk a „kvázi-sima" jelzőt, itt pontosan definiáljuk:

4.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az L Jordan-görbe vagy ív (Lavrentyijev értelemben) kvázi-sima, ha létezik olyan Λ_L (Lavrentyijev) konstans, hogy az*

$$|L(z_1, z_2)| \le \Lambda_L |z_1 - z_2|$$

egyenlőtlenség fennáll minden $z_1, z_2 \in L$ pontra.

A becslés megadásában fontos segédeszközünk lesz a Riemann-leképezés. Legyen $\mathbb{C}_\infty$ a kiterjesztett komplex sík és jelölje Ω az L görbe vagy ív külsejét, azaz $\mathbb{C}_\infty \setminus L$ azon komponensét, amely tartalmazza ∞-t. Ekkor egyértelműen létezik olyan Φ leképezés, amely az Ω halmazt konform módon ráképezi a $\mathbb{D}^* := \{z \in \mathbb{C}_\infty : |z| > 1\}$ halmazra, azaz a zárt egységkörlap külsejére, és rendelkezik a következő normalizáltsági tulajdonságokkal: $\Phi(\infty) = \infty$, illetve $\Phi'(\infty) := \lim_{z\to\infty} \frac{\Phi(z)}{z} > 0$ (pl. [21, Chapter 4.4]) (4.ábra).

Ha $\tilde{\Omega}$ jelöli Ω úgynevezett Charathéodory-féle kompaktifikáltját [19, Ch. 2.4], azaz Ω és az Ω-hoz tartozó transzverzális szelőláncolatok[2] prímvégeinek[3] egyesítését, akkor Φ kiterjed egy $\tilde{\Omega}$ és a nyílt egységkörlap külseje, azaz $\overline{\mathbb{D}^*}$ közötti homeomorfizmussá [19, Theorem 2.15]. Ez görbe esetén annyit jelent, hogy Φ kiterjed egy $\Omega \cup L \to \overline{\mathbb{D}^*}$ homeomorfizmussá, mivel ebben a speciális esetben $\tilde{\Omega}$ azonosítható az $\Omega \cup L$ halmazzal, vagyis Ω lezártjával. Ív esetén ugyanilyen

[2]angolul *null-chain*
[3]angolul *prime end*

azonosítás nem adható, de szemléletesen úgy képzelhető el, hogy L-nek megkülönböztetjük a két oldalát, tehát a végpontok kivételével minden pontot megkétszerezünk attól függően, hogy az ívet melyik oldaláról közelítjük a síkban, majd a megkétszerezett pontokkal és a végpontokkal egyesítjük L külsejét.

A Φ leképezéshez tartozó $\delta(>0)$ szintvonal alatt az origó középpontú $1+\delta$ sugarú körvonal Φ melletti

$$L_\delta := \{z \in \Omega : |\Phi(z)| = 1+\delta\},$$

inverz képét értjük, és bevezetjük a

$$\rho_\delta(z) := \mathrm{d}(L_\delta, z) = \inf_{\zeta \in L_\delta} |z-\zeta|$$

jelölést a $z \in \mathbb{C}$ pont L_δ-tól való távolságára. A duplázó tulajdonságot eddig számegyeneshez kapcsolódóan értelmeztük, de természetes módon kiterjeszthető görbékre (ívekre) is.

Jelölje

$$B(z,\delta) = \{\zeta : |\zeta - z| \le \delta\}$$

a z középpontú δ sugarú körlapot.

4.2. Definíció. *Legyen μ mérték a komplex síkon, melynek tartója egy L kvázi-sima görbe vagy ív. μ duplázó mérték L-en, ha van olyan c_μ (duplázó) konstans, hogy*

$$\mu\Big(B(z,2\delta)\Big) \le c_\mu\, \mu\Big(B(z,\delta)\Big)$$

minden $z \in L$ pontra és $\delta > 0$ számra.

Az előző definícióval ekvivalens (esetleg más duplázó konstanssal), ha $B(z,\delta)$ és $B(z,2\delta)$ helyett $B(z,\delta)\cap L$, illetve $B(z,2\delta)\cap L$ azon összefüggő komponensét írjuk μ argumentumába, amelyik tartalmazza z-t. Valóban, ha $\eta > 0$-ra $K_\eta(z)$-vel jelöljük a $B(z,\eta)\cap L$ halmaz z-t tartalmazó összefüggő komponensét, akkor a kvázi-simaság miatt $B(z,\eta/2\Lambda_L)\cap L \subset K_\eta(z)$, hiszen ha s a $B(z,\eta/2\Lambda_L)\cap L$ halmaz tetszőleges pontja, akkor $|L(z,s)| \le \Lambda_L|z-s| < \frac{\eta}{2}$, ezért $L(z,s)$ nem metszheti $B(z,\eta)$ határát, vagyis $L(z,s) \subset K_\eta(z)$. Ezt az észrevételt felhasználva kapjuk, hogy

$$\mu\Big(K_{2\delta}(z)\Big) \le \mu\Big(B(z,2\delta)\Big) \le c_\mu\, \mu\Big(B(z,\delta)\Big) \le c_\mu^{1+\lceil \log_2 \Lambda_L\rceil} \mu\left(B\left(z, \frac{\delta}{2\Lambda_L}\right)\right) \le c_\mu^{1+\lceil \log_2 \Lambda_L\rceil}\mu\Big(K_\delta(z)\Big).$$

Fordítva (tehát, ha azt tudjuk, hogy $\mu(K_{2\delta}(z)) \le c_\mu \mu(K_\delta(z))$), akkor

$$\mu\Big(B(z,2\delta)\Big) \le \mu\Big(K_{4\Lambda_L\delta}(z)\Big) \le c_\mu \mu\Big(K_{2\Lambda_L\delta}(z)\Big) \le c_\mu^{1+\lceil \log_2 \Lambda_L\rceil}\mu\Big(K_\delta(z)\Big) \le c_\mu^{1+\lceil \log_2 \Lambda_L\rceil}\mu\Big(B(z,\delta)\Big).$$

Ez alapján –a kvázi-simaság figyelembe vételével– az is könnyen belátható, hogy az ívhossz mérték duplázó.

Tekintsünk egy irányítást L-en (pl. ha az ív-esetben ζ_1 és ζ_2 jelöli a végpontokat, akkor ζ_1-től ζ_2-ig, míg a görbe-esetben az óramutató járásával megegyező irányban); legyen $z \in L$ és $\delta > 0$, amire $\sup_{z\in L} \rho_\delta(z) < |L|/2$. Jelölje $z_{-\delta}$ azt a z-t megelőző és z_δ azt a z-t követő pontot, amelyre $|L(z_{-\delta}, z)| = \rho_\delta(z)/2$, illetve $|L(z, z_\delta)| = \rho_\delta(z)/2$. Előfordulhat az ív-esetben, hogy e pontok valamelyike nem létezik, ekkor $z_{-\delta} := \zeta_1$, illetve $z_\delta := \zeta_2$. E jelölésekkel élve legyen

$$l_\delta(z) := L(z_{-\delta}, z_\delta),$$

míg ennek mértékét

$$\upsilon_\delta(z) := \mu\Big(l_\delta(z)\Big) \tag{4.1}$$

jelölje.

Andrijevszkij eredményei lehetővé tették, hogy egy további paramétert vezessünk be a Christoffel-függvénybe. Emlékeztetünk, hogy $\mathcal{P}_n$ a legfeljebb n-ed fokú, komplex együtthatós polinomok halmazát jelöli.

4.3. Definíció. *Legyen L kvázi-sima görbe vagy ív, μ duplázó mérték L-en, $p \in [1, \infty)$ és $t \in \mathbb{R}$. A*

$$\lambda_n(\mu, p, t, z) := \inf_{\substack{p_n\in\mathcal{P}_n \\ p_n(z)=1}} \int \rho_{\frac{1}{n}}(\zeta)^t |p_n(\zeta)|^p \, \mathrm{d}\mu(\zeta) \tag{4.2}$$

függvényt a μ mértékhez tartozó (p, t) paraméterű n-edik Christoffel-függvénynek nevezzük.

A $t = 0$ esetben a klasszikus L^p Christoffel-függvényeket kapjuk vissza (2.4. Definíció).

Most már készen állunk arra, hogy kimondjuk a 2.6. Tétel általánosítását.

4.4. Tétel. *Legyen L kvázi-sima görbe vagy ív és μ duplázó mérték L-en. Ha $p \in [1, \infty)$ és $t \in \mathbb{R}$, akkor van olyan $c = c(L, c_\mu, p, t)$ konstans, hogy minden $z \in L$ pontra és $n \in \mathbb{N}$ egész számra*

$$\frac{1}{c}\, \rho_{\frac{1}{n}}(z)^t \upsilon_{\frac{1}{n}}(z) \le \lambda_n(\mu, p, t, z) \le c\, \rho_{\frac{1}{n}}(z)^t \upsilon_{\frac{1}{n}}(z). \tag{4.3}$$

4.5. Következmény. *Ugyanez az eredmény érvényes L-re, ha véges sok olyan kvázi-sima görbe vagy ív egyesítése, melyek egymás külsejében fekszenek, megjegyezve hogy ekkor $\rho_{\frac{1}{n}}$ értéke a z pontban legyen a z-t tartalmazó komponensre vonatkozó $\rho_{\frac{1}{n}}$ függvény z-beli értéke.*

Talán a $t = 0$ eset a legérdekesebb; azt mutatja, hogy az n-edik Christoffel-függvény értékének nagyságrendje a $z \in L$ pontban megegyezik $l_{\frac{1}{n}}(z)$ μ-mértékével (vö. 3.15. és 3.20. Lemma).

4.2. Következmények

4.2.1. Becslés ortogonális polinomokra

A Christoffel-függvények ortogonális polinomokkal való szoros kapcsolatát mutatja a következő összefüggés (pl. [34, Theorem 1.4]):

$$\lambda_n(\mu, 2, 0, z) = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} |\pi_k(z)|^2}, \tag{4.4}$$

amiben π_k továbbra is a μ mértékhez tartozó k-adik ortonormált polinomot jelöli. Ennek felhasználásával adódnak az alábbi következmények.

4.6. Következmény. *Ha μ duplázó mérték az L kvázi-sima görbén vagy íven, akkor*

$$|\pi_n(z)| \le \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{\upsilon_{\frac{1}{n}}(z)}} \tag{4.5}$$

minden $z \in L$ pontra, ahol c a 4.4. Tételben szereplő konstans.

4.7. Következmény. *Ha μ duplázó mérték az L kvázi-sima görbén vagy íven, akkor*

$$\max_{0\le k\le n} |\pi_k(z)| \ge \frac{1}{\sqrt{c}\,\sqrt{n}\,\sqrt{\upsilon_{\frac{1}{n}}(z)}}, \tag{4.6}$$

ahol c a 4.4. Tételben szereplő konstans.

Sőt, ha tudjuk, hogy $n \cdot \upsilon_{\frac{1}{n}}(z) \to 0$, akkor „részlegesen” elhagyhatjuk a „max” operátort, pontosabban:

4.8. Következmény. *Ha μ duplázó mérték az L kvázi-sima görbén vagy íven, akkor minden olyan $z \in L$ pontra, amelyre $n \cdot \upsilon_{\frac{1}{n}}(z) \to 0$, megadható a természetes számok egy olyan végtelen $\mathbb{M} = \mathbb{M}(z)$ részhalmaza, hogy valahányszor $n \in \mathbb{M}$, mindannyiszor*

$$|\pi_n(z)| \ge \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{\upsilon_{\frac{1}{n}}(z)}}. \tag{4.7}$$

4.9. Megjegyzés: Mint látható, $\sqrt{n}$ rendű különbség van a (4.5) felső és a (4.6) alsó becslés között, ez azonban természetes. Vegyük például a klasszikus Jacobi-polinomokat $(-1, 1)$ valamely z pontjában. Ekkor $|\pi_k(z)| \le C$, míg $n\upsilon_{\frac{1}{n}}(z) \sim 1$, így (4.6) a pontos nagyságrendet adja meg [26, 6.11.§] (ez a példa egyben azt is megmagyarázza, miért szükséges a „max” operátor (4.6)-ban, ugyanis, általános esetben, $\pi_k(z)$ 0-hoz tarthat valamilyen részsorozat mentén). Másrészt van olyan $w \geq q > 0$ súly a $[-1, 1]$ intervallumon, hogy ha $\mathrm{d}\mu(x) = w(x)\,\mathrm{d}x$, akkor $\pi_n(0)/n^{1/2-\varepsilon} \to \infty$ minden $\varepsilon > 0$-ra valamilyen részsorozat mentén (lásd [20]). Bár nem világos, hogy μ duplázó-e, Rakhmanovnak ez a példája mutatja, hogy, általános esetben, (4.5)-nél sokkal jobb becslés nem várható (megjegyezzük, hogy ebben az esetben $\upsilon_{\frac{1}{n}}(z) \geq q/n$).

Ha az $n \cdot \upsilon_{\frac{1}{n}}(z) \to 0$ feltételt nem tesszük föl, akkor csak a következő gyengébb állítást sikerült belátnunk.

4.10. Következmény. *Ha μ duplázó mérték az L kvázi-sima görbén vagy íven, akkor bármely $z \in L$ ponthoz és $\varepsilon > 0$ számhoz van a természetes számoknak olyan végtelen $\mathbb{M} = \mathbb{M}(z, \varepsilon)$ részhalmaza, hogy minden $n \in \mathbb{M}$-re*

$$|\pi_n(z)| \geq \frac{1}{n^{1/2+\varepsilon}} \frac{1}{\sqrt{\upsilon_{\frac{1}{n}}(z)}}.$$

4.2.2. Christoffel-függvények Dini-sima görbéken és íveken

Az alábbi két következményben további megszorításokat teszünk L simaságára vonatkozóan. Feltesszük, hogy a kérdéses görbe vagy ív Dini-sima vagy valamelyik pontjában rendelkezik egy Dini-sima sarokkal. Ezekben az esetekben explicit módon ki tudjuk fejezni $\rho_{\frac{1}{n}}(z)$ nagyságrendjét.

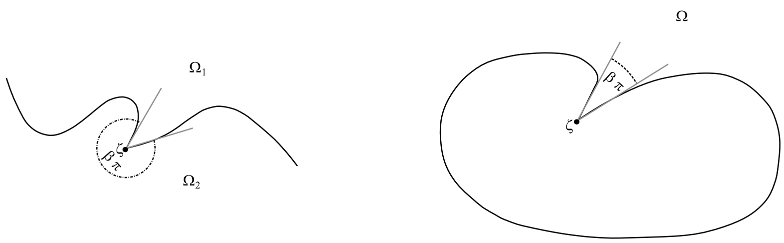
4.11. Definíció. *Egy L Jordan-görbe vagy ív Dini-sima, ha van olyan differenciálható $\gamma(t)$ paraméterezése, amelynek deriváltja sehol sem nulla és Dini-folytonos, azaz, ha*

$$\omega(\delta) := \sup_{\substack{t_1, t_2 \in [0, 2\pi] \\ |t_1 - t_2| < \delta}} |\gamma'(t_1) - \gamma'(t_2)|$$

jelöli a derivált folytonossági modulusát, akkor

$$\int_0^\pi \frac{\omega(t)}{t}\,\mathrm{d}t < \infty.$$

Már a bevezetőben említettük, hogy ha a kérdéses mérték tartója sarokkal rendelkező görbe vagy ív, akkor a sarok környezetében nincs ismert becslés a Christoffel-függvényre. Mielőtt a problémára választ adnánk, tisztázzuk a Dini-sima sarok fogalmát. Azt mondjuk, hogy az L görbének *ζ-ban sarka van*, ha ζ-ban mindkét irányban léteznek a félérintők. Amikor $\beta\pi$ szögű sarokról beszélünk, akkor a félérintők által meghatározott szögtartományok közül a görbe-esetben azt vesszük figyelembe, amelyik a görbe külsejébe esik, míg az ív-esetben azt, amelyikhez a nagyobb szög tartozik (3. ábra). Tehát görbe esetén a szög nagysága 0 és 2π közé esik, míg ív esetén π-től 2π-ig terjed. Egy sarok Dini-sima, ha van L-nek két olyan Dini-sima ζ-ban végződő részíve, amelyek ζ ($\gamma(t)$ paraméterezés szerinti) ellenkező oldalain fekszenek. Vegyük



3. ábra. SAROK GÖRBÉN ÉS ÍVEN, ILLETVE A HOZZÁ TARTOZÓ SZÖG. Magyarázat a szövegben.

észre, ha L Dini-sima, akkor (a végpontok kivételével) L minden pontjában egy Dini-sima egyenes szög van, így a következő állítások magukban foglalják azt az esetet is, amikor L nem rendelkezik szemléletes sarokkal (minden pontjában létezik érintő).

Bevezetünk egy függvényt, ami explicit kifejezi $\rho_{\frac{1}{n}}(z)$ nagyságrendjét.

$$\Delta_n(z) := \begin{cases} \frac{1}{n^\beta} & \text{ha } z \in l_{\frac{1}{n}}(\zeta) \\ \frac{|z-\zeta|^{1-\frac{1}{\beta}}}{n} & \text{ha } z \in L \setminus l_{\frac{1}{n}}(\zeta). \end{cases}$$

4.12. Tétel. *Ha μ duplázó mérték az L kvázi-sima görbén vagy íven, melynek ζ-ban $\beta\pi$ szögű Dini-sima sarka van ($0 < \beta < 2$ a görbe-esetben, $1 \le \beta < 2$ az ív-esetben), akkor van olyan $\varepsilon = \varepsilon(L, \zeta) > 0$ és $c = c(L, \zeta, \varepsilon, \beta)$, hogy minden $z \in L$ pontra, amelyre $|z - \zeta| \le \varepsilon$, teljesül az*

$$\frac{1}{c}\Delta_n(z) \le \rho_{\frac{1}{n}}(z) \le c\Delta_n(z) \tag{4.8}$$

egyenlőtlenség.

4.13. Megjegyzés: Az előző lemma a végpontoknál is kimondható: ekkor azt követeljük meg, hogy a végpont az L ív egy Dini-sima részívének is végpontja, míg β helyébe 2 kerül, mintha a végpontnál 2π nagyságú szög lenne.

Ezt a lemmát az előbbi megjegyzéssel együtt a 4.4. Tétellel kombinálva azonnal megkapjuk az alábbi következményt:

4.14. Következmény. *Ha μ duplázó mérték az L kvázi-sima görbén vagy íven, melynek ζ-ban $\beta\pi$ szögű Dini-sima sarka van ($0 < \beta < 2$ a görbe-esetben, $1 \le \beta < 2$ az ív-esetben), akkor van olyan $\varepsilon = \varepsilon(L, \zeta) > 0$ és $c = c(L, c_\mu, p, t, \zeta, \varepsilon, \beta)$, hogy minden $z \in L$ pontra, amelyre $|z - \zeta| \le \varepsilon$, teljesül az*

$$\frac{1}{c}\,\Delta_n(z)^t \upsilon_{\frac{1}{n}}(z) \le \lambda_n(\mu, p, t, z) \le c\,\Delta_n(z)^t \upsilon_{\frac{1}{n}}(z)$$

egyenlőtlenség.

Speciálisan, ha a görbe vagy ív szakaszonként Dini-sima, akkor az előbbi következmény globálisan is érvényes. Ehhez előbb megadjuk $\Delta_n(z)$ alkalmas alakját. Tegyük föl, hogy L-nek $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n$ (ahol ζ_1 és ζ_n továbbra is a két végpontot jelöli az ív-esetben) pontjaiban vannak a π-től különböző szögű sarkai rendre $\beta_1\pi, \ldots, \beta_n\pi$ szögekkel ($0 < \beta_i < 2$ a görbe-esetben; $\beta_i := 2$, ha $i = 1$ vagy n és $1 < \beta_i < 2$, ha $1 < i < n$ az ív-esetben). Legyen

$$\Delta_n(z) := \begin{cases} \frac{1}{n^{\beta_i}} & \text{ha } z \in l_{\frac{1}{n}}(\zeta_i) \;\; (i = 1, 2, \ldots, n) \\ \frac{\prod_{i=1}^{n} |z-\zeta_i|^{1-\frac{1}{\beta_i}}}{n} & \text{ha } z \in L \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} l_{\frac{1}{n}}(\zeta_i)\right). \end{cases}$$

4.15. Tétel. *Ha L szakaszonként Dini-sima görbe vagy ív, akkor van olyan $c = c(L)$ konstans, hogy minden $z \in L$ pontra*

$$\frac{1}{c}\Delta_n(z) \leq \rho_{\frac{1}{n}}(z) \leq c\Delta_n(z).$$

4.16. Következmény. *Ha L szakaszonként Dini-sima görbe vagy ív, akkor van olyan $c = c(L, c_\mu, p, t)$ konstans, hogy az*

$$\frac{1}{c}\Delta_n(z)^t \upsilon_{\frac{1}{n}}(z) \leq \lambda_n(\mu, p, t, z) \leq c\,\Delta_n(z)^t \upsilon_{\frac{1}{n}}(z)$$

egyenlőtlenség teljesül L bármely z pontjában.

Vegyük észre, hogy (2.6) megfelel az $L = [-1, 1]$ és a $t = 0$ választásnak.

4.2.3. Nikolszkij-típusú egyenlőtlenségek

Ha $1 \leq p < q$, akkor a Hölder-egyenlőtlenségből következik, hogy egy függvény L_p-normája felülről becsülhető L_q-normájával. Polinomok esetében a fordított irányú becslésekhez a Nikolszkij-típusú egyenlőtlenségek használhatók. A 4.4. Tétel segítségével duplázó mértékre látunk be ilyen Nikolszkij-típusú egyenlőtlenségeket, ha a mérték tartója kvázi-sima görbe vagy ív. Eredményünk így részben átfed Andrijevszkij egyik tételével [2, Theorem 6], amelyben –tőlünk eltérő úton– Nikolszkij-típusú egyenlőtlenségeket igazolt ívhossz-mértékre pusztán csak az ív rektifikálhatóságát feltételezve. Bevezetünk néhány jelölést:

$$M_n := \sup_{\zeta \in L} \frac{1}{\upsilon_{\frac{1}{n}}(\zeta)},$$

és egy L-en értelmezett f függvényre

$$\|f\|_\infty := \sup_{\zeta \in L} |f(\zeta)|, \qquad \|f\|_{\mu,p} = \left(\int_L |f(\zeta)|^p \, d\mu(\zeta)\right)^{\frac{1}{p}},$$

E jelölések fölhasználásával az alábbi Nikolszkij-típusú egyenlőtlenségeket állítjuk:

4.17. Következmény. *Ha az L kvázi-sima görbén vagy íven μ duplázó mérték és $1 \le p < q$, akkor van olyan n-től független c konstans, hogy*

$$\|p_n\|_\infty \le c M_n^{\frac{1}{p}} \|p_n\|_{\mu,p}, \tag{4.9}$$

továbbá

$$M_n^{\frac{1}{q}} \|p_n\|_{\mu,q} \le c M_n^{\frac{1}{p}} \|p_n\|_{\mu,p} \tag{4.10}$$

minden legfeljebb n-ed fokú p_n polinomra.

4.18. Megjegyzés: A később idézett 4.28. Lemma és (4.16') felhasználásával látható, hogy M_n nagyságrendje $n^{2\alpha_4}$ (α_4 a (4.16') egyenlőtlenségben szereplő konstans), ami súlyozatlan (ívhossz-mérték) estben éppen n^2 (ha L ív). Sőt, ha L szakaszonként Dini-sima és $\beta_1\pi, \dots, \beta_N\pi$ szögű sarkakkal rendelkezik, akkor ez a nagyságrend $n^{\beta\alpha_4}$, ahol $\beta := \max(\beta_1, \dots, \beta_N, 1)$. Ezért eredményünk –konstans szorzó erejéig– magában foglalja a klasszikus egységkörre, illetve a $[-1, 1]$ intervallumra vonatkozó becsléseket.

4.3. Bizonyítások

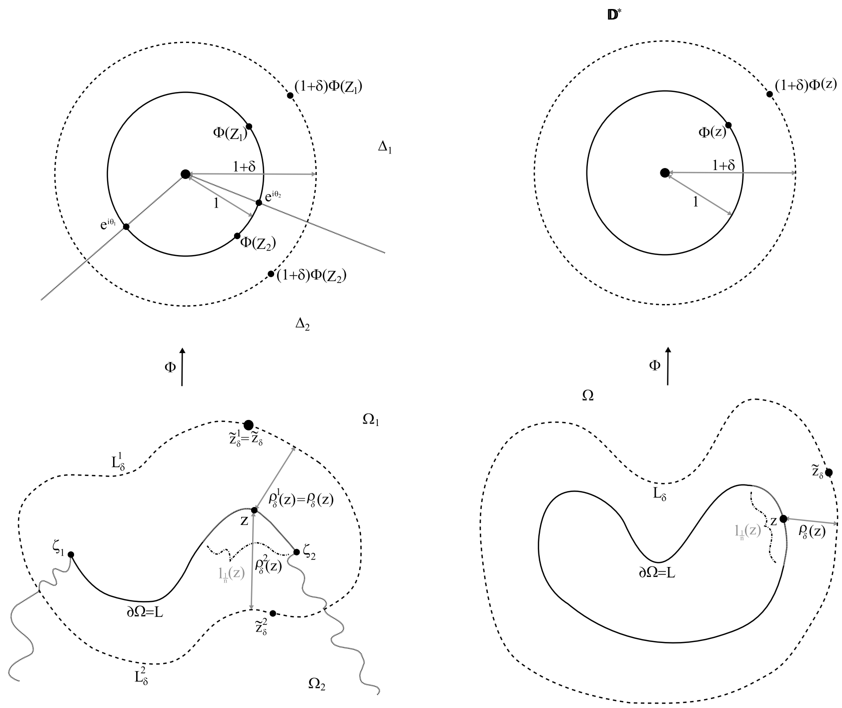
Mielőtt nekilátnánk a bizonyításoknak, számba vesszük ρ_δ néhány tulajdonságát, melyek [4, Theorem 4.1 (97.o.) és Lemma 5.3 (147.o.)] egyszerű következményei, majd megemlítjük a duplázó tulajdonság két egyenes következményét, végül idézzük Andrijevszkij bizonyításainkhoz szükséges eredményeit [1, 2].

Emlékeztetőül Φ jelöli azt a leképezést, ami $\mathbb{C} \setminus L$ nem korlátos komponensét, Ω-t a zárt egység körlap külsejére, $\mathbb{D}^*$-ra képezi, illetve ennek az $\tilde{\Omega}$ Charathéodory-féle kompaktifikáltra történő kiterjesztését. Ha $z \in L$, akkor a görbe-esetben $\tilde{z}_\delta$-val jelöljük a $\Phi^{-1}\Big((1+\delta)\Phi(z)\Big)$ pontot. Az ív-eset kissé körülményesebb: legyen ζ_1 és ζ_2 L két végpontja; ezek Φ melletti képe $e^{i\theta_1}$, illetve $e^{i\theta_2}$ valamilyen alkalmas $0 \le \theta_1 < \theta_2 < \theta_1 + 2\pi$ értékekkel. L minden más z pontja pontosan két Ω-hoz tartozó prímvég (Z_1 és Z_2) lenyomata[4](vö. [19, Ch. 2.4]). Legyen

$$\Delta_1 := \{z \in \mathbb{D}^* : \tau_1 < \arg(z) < \tau_2\} \qquad \Delta_2 := \mathbb{D}^* \setminus \bar{\Delta}_1$$

$$\tilde{\Omega}_j := \Phi^{-1}(\bar{\Delta}_j), \qquad L_\delta^j := L_\delta \cap \tilde{\Omega}_j, \qquad \rho_\delta^j(z) := d(z, L_\delta^j).$$

[4]angolul *impression*



4. ábra. A Φ Riemann-leképezés és a kapcsolódó jelölések. Az ív-esetben a végpontok kivételével L minden pontja két prímvég lenyomata, pl. z mind Z_1-nek, mind Z_2-nek a lenyomata. L végpontjainak képei ($e^{i\theta_1}$, $e^{i\theta_2}$) az egység körvonalat két részívre bontják, és a z pontot lenyomatként adó két prímvég képei az egység körvonal ellenkező részívein helyezkednek el. Az $e^{i\theta_1}$, az origó és $e^{i\theta_2}$ által meghatározott két szögtartomány egységkörlapon kívüli részét Δ_1 ill. Δ_2 jelöli. Továbbá $\Omega_1 := \Phi^{-1}(\Delta_1)$ és $\Omega_2 := \Phi^{-1}(\Delta_2)$. A görbe-eset jelölésrendszere hasonló, de egyszerűbb, ugyanis L minden pontja egyetlen prímvég lenyomata.

Ekkor $\tilde{z}_\delta^j := \Phi^{-1}\Big((1+\delta)\Phi(Z_j)\Big)$ és

$$\tilde{z}_\delta := \begin{cases} \tilde{z}_\delta^1 & \text{ha } \rho_\delta^1(z) \le \rho_\delta^2(z) \\ \tilde{z}_\delta^2 & \text{ha } \rho_\delta^2(z) < \rho_\delta^1(z) \end{cases}$$

(lásd 4.ábra).

4.19. Lemma ([1, (3.1), (3.2), (3.4), (3.5)],[2, (3.1),(3.3),(3.4),(3.5)]). *Tegyük fel, hogy L kvázisima görbe vagy ív és $z, z_1, z_2 \in L$. Ekkor léteznek olyan $c_1 = c_1(L)$, $c_2 = c_2(L)$, $c_3 = c_3(L)$, $c_4 = c_4(L)$, $\alpha_1 = \alpha_1(L)$ és $\alpha_2 = \alpha_2(L)$ konstansok, hogy bármely $\delta > 0$ számra érvényesek a következő becslések:*

$$\frac{1}{c_1}|z - \tilde{z}_\delta| \le \rho_\delta(z) \le c_1|z - \tilde{z}_\delta|; \tag{4.11}$$

ha $|z_1 - z_2| \le \rho_\delta(z_1)$, akkor

$$\frac{1}{c_2}\rho_\delta(z_1) \le \rho_\delta(z_2) \le c_2\rho_\delta(z_1); \tag{4.12}$$

ha $|z_1 - z_2| > \rho_\delta(z_1)$*, akkor*

$$\frac{\rho_\delta(z_2)}{|z_1 - z_2|} \le c_3 \left(\frac{\rho_\delta(z_1)}{|z_1 - z_2|}\right)^{\alpha_1}; \tag{4.13}$$

ha $0 < \delta_1 < \delta_2 \le 1$*, akkor*

$$\frac{1}{c_4}\left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)^{\frac{1}{\alpha_2}} \le \frac{\rho_{\delta_2}(z)}{\rho_{\delta_1}(z)} \le c_4 \left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)^{\alpha_2}. \tag{4.14}$$

Hangsúlyozzuk, hogy az előbbi lemma konstansai függetlenek δ-tól, z-től és z_j-től.

Az alábbi lemma a (4.1) pontban definiált υ_δ függvényhez kapcsolódó becsléseket foglalja össze.

4.20. Lemma ([1, Lemma 4], [2, (4.2)]). *Ha μ az L kvázi-sima görbe vagy ív fölötti duplázó mérték, akkor vannak olyan $c_5 = c_5(L, c_\mu)$ és $\alpha_3 = \alpha_3(L, c_\mu)$ konstansok, hogy bármely z_1, $z_2 \in L$ pontra*

$$\upsilon_\delta(z_1) \le c_5 \left(1 + \frac{|z_1 - z_2|}{\rho_\delta(z_2)}\right)^{\alpha_3} \upsilon_\delta(z_2), \tag{4.15}$$

továbbá alkalmas $c_6 = c_6(L, c_\mu)$ és $\alpha_4 = \alpha_4(L, c_\mu)$ konstansokkal minden $z \in L$ pontra és $0 < \delta_1 < \delta_2 < 1$ számokra

$$\frac{1}{c_6}\left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)^{\frac{1}{\alpha_4}} \le \frac{\upsilon_{\delta_2}(z)}{\upsilon_{\delta_1}(z)} \le c_6 \left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)^{\alpha_4}; \tag{4.16}$$

ha pedig J L részíve és E J részíve, akkor

$$\frac{1}{c_6}\left(\frac{|J|}{|E|}\right)^{\frac{1}{\alpha_4}} \le \frac{\mu(J)}{\mu(E)} \le c_6 \left(\frac{|J|}{|E|}\right)^{\alpha_4}. \tag{4.16'}$$

A lemmát érdemes összevetni az intervallumokra vonatkozó analóg állításokkal: 3.17. Lemma (iv) vagy [13, Lemma 2.1 (vi), (vii), (viii)].

Figyelembe véve, hogy z_1 és z_2 szerepe szimmetrikus, (4.15) és (4.12) együttes alkalmazásából adódik, hogy

- ha $|z_1 - z_2| \le \rho_{\frac{1}{n}}(z_1)$, akkor

$$\frac{1}{c_5 2^{\alpha_3}} \upsilon_{\frac{1}{n}}(z_2) \le \upsilon_{\frac{1}{n}}(z_1) \le c_5 (1 + c_2)^{\alpha_3} \upsilon_{\frac{1}{n}}(z_2); \tag{4.15a}$$

- ha $|z_1 - z_2| > \rho_{\frac{1}{n}}(z_1)$, még ha $|z_1 - z_2| \le \rho_{\frac{1}{n}}(z_2)$ fenn is áll, akkor

$$\frac{|z_1 - z_2|}{\rho_{\frac{1}{n}}(z_2)} \ge \frac{1}{c_2},$$

így

$$\upsilon_{\frac{1}{n}}(z_1) \leq c_5(2c_2)^{\alpha_3}\left(\frac{|z_1-z_2|}{\rho_{\frac{1}{n}}(z_2)}\right)^{\alpha_3}\upsilon_{\frac{1}{n}}(z_2). \tag{4.15b}$$

A következő tétel biztosítja számunkra, hogy a bizonyítások során $d\mu(\zeta)$ lecserélhető $\frac{\upsilon_{\frac{1}{n}}(\zeta)}{\rho_{\frac{1}{n}}(\zeta)}|d\zeta|$-ra.

4.21. Tétel ([1, Lemma 2], [2, (4.21)]). *Ha L kvázi-sima görbe vagy ív és μ duplázó mérték L-en c_μ duplázó konstanssal, akkor bármely $p \in [1,\infty)$ értékre és $t \in \mathbb{R}$ számra van olyan $c_a = c_a(L, c_\mu, p, t)$ konstans, hogy minden legföljebb n-ed fokú p_n polinomra*

$$\frac{1}{c_a}\int_L |p_n(\zeta)|^p \rho_{\frac{1}{n}}(\zeta)^t \frac{\upsilon_{\frac{1}{n}}(\zeta)}{\rho_{\frac{1}{n}}(\zeta)}|d\zeta| \leq \int_L |p_n(\zeta)|^p \rho_{\frac{1}{n}}(\zeta)^t \, d\mu(\zeta) \leq c_a \int_L |p_n(\zeta)|^p \rho_{\frac{1}{n}}(\zeta)^t \frac{\upsilon_{\frac{1}{n}}(\zeta)}{\rho_{\frac{1}{n}}(\zeta)}|d\zeta|. \tag{4.17}$$

4.22. Tétel (Bernstein-egyenlőtlenség, [1, Theorem 1], [2, Theorem 1]). *Ha μ duplázó mérték az L kvázi-sima görbén vagy íven c_μ duplázó konstanssal, akkor bármely $p \in [1,\infty)$ értékre és $t \in \mathbb{R}$ számra van olyan $c_B = c_B(L, c_\mu, p, t)$, hogy minden legfeljebb n-ed fokú p_n polinomra érvényes az alábbi egyenlőtlenség:*

$$\int |p_n'|^p \rho_{\frac{1}{n}}^{p+t} \, d\mu \leq c_B \int |p_n|^p \rho_{\frac{1}{n}}^t \, d\mu. \tag{4.18}$$

Ahogy a 3.15. és a 3.20. Lemma bizonyításában a Christoffel-függvényre vonatkozó felső becslés megalkotásakor, most is egy alkalmas, kis normával rendelkező polinomot keresünk. Ez a polinom is –bár csak polinomiálisan– egy gyorsan csökkenő (a kérdéses pont egy környezetén kívül 0 körüli értékeket felvevő) polinom lesz, melynek konstrukciójához a $K_{1,1,2,n}(\xi,\zeta)$ Dzjadyk-magfüggvényt fogjuk felhasználni. (Itt mellőzük a körülményes definíciót (lásd pl. [5, C.2]), csak a számunkra fontos tulajdonságait idézzük föl.) Ez ζ-ban egy $(10n-1)$-ed fokú polinom, amelynek együtthatói függnek ξ-től. Maga ξ megválasztása pedig attól függ, hogy a Christoffel-függvény értékét L mely pontjában vizsgáljuk. Itt egy lemmában összefoglaljuk Andrijevszkij egy ilyen megfelelő ξ választására vonatkozó számolásait.

4.23. Lemma ([1, (3.9)], [2, (4.6)]). *Ha L kvázi-sima görbe vagy ív, akkor van olyan $c_J = c_J(L)$, hogy bármely $z \in L$ ponthoz választható olyan $\xi = \xi(z)$, hogy*

$$\frac{1}{c_J}\frac{1}{|z-\zeta| + \rho_{\frac{1}{n}}(z)} \leq |K_{1,1,2,n}(\xi,\zeta)| \leq c_J \frac{1}{|z-\zeta| + \rho_{\frac{1}{n}}(z)} \tag{4.19}$$

minden $\zeta \in L$ pontra.

$|K_{1,1,2,n}(\xi,\zeta)|$-t megfelelő kitevőre emelve elérhető, hogy egy $B(z,\delta)$ alakú környezeten kívül elég kicsi legyen. A $K_{1,1,2,n}(\xi,\zeta)$-ra vonatkozó számolást megkönnyíti az alábbi becslés:

4.24. Lemma ([1, (3.18)], [2, (3.6)]). *Legyen L kvázi-sima görbe vagy ív, $b > 1$ és $d > 0$. Ekkor bármely $z \in L$-re*

$$\int_{L\setminus B(z,d)} \frac{1}{|\zeta - z|^b} |\mathrm{d}\zeta| \le |L|^{1-b} + \frac{2\Lambda_L b}{(b-1)d^{b-1}}, \tag{4.20}$$

ahol Λ_L az L görbe Lavrentyijev-konstansa (lásd 4.1. definíció).

4.4. Tétel bizonyítása. Mivel a görbe-eset bizonyítása hasonló módon történik, sőt végpontok híján egyszerűbb is, csak az ív-eset bizonyítását részletezzük. (4.17) alapján $\mathrm{d}\mu(\zeta)$ lecserélhető $\frac{\upsilon_{\frac{1}{n}}(\zeta)}{\rho_{\frac{1}{n}}(\zeta)}|\mathrm{d}\zeta|$-val és a továbbiakban így is teszünk. Külön-külön kezeljük a felső és az alsó becslést.

A felső becsléssel indítunk. Legfőbb eszközünk a már említett Dzjadyk-magfüggvény lesz. Rögzítsünk egy később definiált m pozitív egész számot és jelölje $\hat{n}$ az $\frac{n}{10m}$ hányados egészrészét, illetve $K_n(\zeta)$ a

$$\frac{K_{1,1,2,\hat{n}}(\xi,\zeta)}{K_{1,1,2,\hat{n}}(\xi,z)}$$

polinomot. Ekkor $(K_n)^m$ ζ legfeljebb n-ed fokú polinomja és $K_n(z)^m = 1$.

Bevezetjük a következő jelölést, ami nemcsak megkönnyíti, hanem átláthatóbbá is teszi számolásunkat: Legyen $g, h : M \to \mathbb{R}$ két valós értékű függvény egy M halmazon, ami az adott számolásnál nyilvánvaló. Ekkor a

$$g(u) \preccurlyeq h(u)$$

jelöléssel élünk, ha van olyan u-tól független κ, hogy $g(u) \le \kappa h(u)$ minden $u \in M$-re, míg a $g(u) \asymp h(u)$ jelölés azt jelenti, hogy mind $g(u) \preccurlyeq h(u)$, mind $h(u) \preccurlyeq g(u)$ teljesül. (4.19), (4.14) alapján, továbbá, hogy $|l_{\frac{1}{n}}(z)| = \rho_{\frac{1}{n}}(z)$ adódik, hogy

$$\begin{aligned} |K_n(\zeta)| \le c_J^2 \frac{\rho_{\frac{1}{\hat{n}}}(z)}{|z-\zeta| + \rho_{\frac{1}{\hat{n}}}(z)} &\asymp \frac{\rho_{\frac{1}{n}}(z)}{|z-\zeta| + \rho_{\frac{1}{n}}(z)} \\ &\preccurlyeq \begin{cases} 1 & \text{ha } \zeta \in l_{\frac{1}{n}}(z) \\ \rho_{\frac{1}{n}}(z)\frac{1}{|z-\zeta|} & \text{ha } \zeta \in L \setminus l_{\frac{1}{n}}(z). \end{cases} \end{aligned} \tag{4.21}$$

(Tehát itt $M = \mathbb{N} \times L \times L$, $u = (n, z, \zeta)$ és „$\preccurlyeq$" egyenletes mind n-ben, mind z-ben, mind ζ-ban.)

A Christoffel-függvény (4.2) definíciója a 4.17. Lemma figyelembe vételével mutatja, hogy

$$\lambda_n(\mu, p, t, z) \preccurlyeq \int |K_n(\zeta)^m|^p \rho_{\frac{1}{n}}(\zeta)^{t-1} \upsilon_{\frac{1}{n}}(\zeta) |\mathrm{d}\zeta|. \tag{4.22}$$

Hogy alkalmas becslést kapjunk λ_n-re, a továbbiakban (4.22) jobboldalával foglalkozunk. Az integrált két részre bontjuk:

$$\int |K_n(\zeta)^m|^p \rho_{\frac{1}{n}}(\zeta)^{t-1} \upsilon_{\frac{1}{n}}(\zeta)|\mathrm{d}\zeta| = \int_{l_{\frac{1}{n}}(z)} + \int_{L\setminus l_{\frac{1}{n}}(z)} .$$

A (4.21) becslés figyelembe vételével, majd (4.12) és (4.15a) alkalmazásával az első integrál könnyen kezelhető:

$$\int_{l_{\frac{1}{n}}(z)} |K_n(\zeta)^m|^p \rho_{\frac{1}{n}}(\zeta)^{t-1} \upsilon_{\frac{1}{n}}(\zeta)|\mathrm{d}\zeta| \preccurlyeq \int_{l_{\frac{1}{n}}(z)} \rho_{\frac{1}{n}}(\zeta)^{t-1} \upsilon_{\frac{1}{n}}(\zeta)|\mathrm{d}\zeta|$$
$$\preccurlyeq \rho_{\frac{1}{n}}(z)^t \upsilon_{\frac{1}{n}}(z).$$

Ami a második integrált illeti, a (4.21), a (4.13) és a (4.15b) egyenlőtlenségeket használjuk:

$$\int_{L\setminus l_{\frac{1}{n}}(z)} |K_n(\zeta)^m|^p \rho_{\frac{1}{n}}(\zeta)^{t-1} \upsilon_{\frac{1}{n}}(\zeta)|\mathrm{d}\zeta|$$
$$\preccurlyeq \int_{L\setminus l_{\frac{1}{n}}(z)} \left(\rho_{\frac{1}{n}}(z)\frac{1}{|z-\zeta|}\right)^{mp} \rho_{\frac{1}{n}}(z)^{\alpha_1(t-1)}|z-\zeta|^{(1-\alpha_1)(t-1)} \left(\frac{|z-\zeta|}{\rho_{\frac{1}{n}}(z)}\right)^{\alpha_3} \upsilon_{\frac{1}{n}}(z)|\mathrm{d}\zeta|$$
$$\asymp \rho_{\frac{1}{n}}(z)^t \upsilon_{\frac{1}{n}}(z)\rho_{\frac{1}{n}}(z)^{mp+\alpha_1(t-1)-\alpha_3-t} \int_{L\setminus l_{\frac{1}{n}}(z)} \left(\frac{1}{|z-\zeta|}\right)^{mp-(1-\alpha_1)(t-1)-\alpha_3} |\mathrm{d}\zeta|.$$

Vezessük be az $mp - \alpha_1 - \alpha_3 + t(\alpha_1 - 1) + 1$ kifejezésre a b jelölést. Ha m-et nagyobbnak választjuk, mint $\frac{\alpha_1+\alpha_3-t(\alpha_1-1)}{p}$, pl. m legyen $\frac{\alpha_1+\alpha_3-t(\alpha_1-1)}{p} + 1$ felső egészrésze, akkor elérjük, hogy $b > 1$. Emlékezve, hogy $|l_{1/n}(z)| = \rho_{1/n}(z)$ és alkalmazva a (4.20) becslést az utolsó kifejezésben szereplő integrálra, folytatjuk az előbbi egyenlőtlenséget:

$$\preccurlyeq \rho_{\frac{1}{n}}(z)^t \upsilon_{\frac{1}{n}}(z)\rho_{\frac{1}{n}}(z)^{b-1} \int_{L\setminus l_{\frac{1}{n}}(z)} \left(\frac{1}{|z-\zeta|}\right)^{b} |d\zeta|$$
$$\preccurlyeq \rho_{\frac{1}{n}}(z)^t \upsilon_{\frac{1}{n}}(z)\rho_{\frac{1}{n}}(z)^{b-1} \left(|L|^{1-b} + \frac{2\Lambda_L b}{(b-1)\rho_{\frac{1}{n}}(z)^{b-1}}\right).$$

Mivel $b > 1$,

$$\rho_{\frac{1}{n}}(z)^{b-1} \left(|L|^{1-b} + \frac{2\Lambda_L b}{(b-1)\rho_{\frac{1}{n}}(z)^{b-1}}\right)$$

felülről korlátos n-ben és z-ben, vagyis van olyan n-től független $c = c(L, c_\mu, p, t)$, hogy

$$\int |K_n(\zeta)^m|^p \rho_{\frac{1}{n}}(\zeta)^{t-1} \upsilon_{\frac{1}{n}}(\zeta)|\mathrm{d}\zeta| \le c\rho_{\frac{1}{n}}(z)^t \upsilon_{\frac{1}{n}}(z).$$

Ezzel beláttuk a felső becslés igazságát.

Most áttérünk az alsó becslés igazolására. Rögzítsük L egy z pontját és tekintsünk egy olyan legföljebb n-ed fokú p_n polinomot, amelynek z-beli értéke 1. Belátjuk, hogy van olyan n-től, z-től, és a p_n polinomtól független $c = c(L, c_\mu, p, t)$, hogy

$$\int |p_n(\zeta)|^p \rho_{\frac{1}{n}}(\zeta)^t \frac{\upsilon_{\frac{1}{n}}(\zeta)}{\rho_{\frac{1}{n}}(\zeta)} |d\zeta| \geq \frac{1}{c} \rho_{\frac{1}{n}}(z)^t \upsilon_{\frac{1}{n}}(z).$$

Legyen $\hat{c} := 2^p c_2^{p+t-1} c_5 (1+c_2)^{\alpha_3} c_B$ (c_2 a 4.19. Lemmából, c_5 és α_3 (4.15)-ből, c_B a 4.22. Tételből). Ha

$$\int |p_n(\zeta)|^p \rho_{\frac{1}{n}}(\zeta)^{t-1} \upsilon_{\frac{1}{n}}(\zeta) |d\zeta| < \frac{1}{\hat{c}} \rho_{\frac{1}{n}}(z)^t \upsilon_{\frac{1}{n}}(z) \tag{4.23}$$

nem igaz, akkor készen vagyunk c-t $\hat{c}$-nak választva, ezért (4.23) a továbbiakban feltehető. Világos, hogy

$$\int |p_n(\zeta)|^p \rho_{\frac{1}{n}}(\zeta)^{t-1} \upsilon_{\frac{1}{n}}(\zeta) |d\zeta| \geq \int_{l_{\frac{1}{n}}(z)} |p_n(\zeta)|^p \rho_{\frac{1}{n}}(\zeta)^{t-1} \upsilon_{\frac{1}{n}}(\zeta) |d\zeta|. \tag{4.24}$$

Ha $\zeta \in l_{\frac{1}{n}}(z)$, akkor a Hölder-egyenlőtlenség alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
|p_n(\zeta) - p_n(z)| &= \left| \int_{L(z,\zeta)} p_n'(s) \, ds \right| \\
&\leq \int_{l_{\frac{1}{n}}(z)} |p_n'(s)| |ds| \leq \left(\int_{l_{\frac{1}{n}}(z)} |p_n'(s)|^p |ds| \right)^{\frac{1}{p}} \rho_{\frac{1}{n}}(z)^{\frac{p-1}{p}} \\
&= \left(\frac{1}{\rho_{\frac{1}{n}}(z)^{p+t-1} \upsilon_{\frac{1}{n}}(z)} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{l_{\frac{1}{n}}(z)} |p_n'(s)|^p \rho_{\frac{1}{n}}(z)^{p+t-1} \upsilon_{\frac{1}{n}}(z) |ds| \right)^{\frac{1}{p}} \rho_{\frac{1}{n}}(z)^{\frac{p-1}{p}}.
\end{aligned}$$

(4.12) és (4.15a) mutatja, hogy az $l_{\frac{1}{n}}(z)$ fölötti integrálban $\rho_{\frac{1}{n}}(z)$ lecserélhető $\rho_{\frac{1}{n}}(s)$-sel, míg $\upsilon_{\frac{1}{n}}(z)$ $\upsilon_{\frac{1}{n}}(s)$-sel, így az egyenlőtlenséget a következőképpen folytatjuk:

$$\leq c_2^{1+\frac{t-1}{p}} c_5^{\frac{1}{p}} (1+c_2)^{\frac{\alpha_3}{p}} \left(\frac{1}{\rho_{\frac{1}{n}}(z)^{p+t-1} \upsilon_{\frac{1}{n}}(z)} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{l_{\frac{1}{n}}(z)} |p_n'(s)|^p \rho_{\frac{1}{n}}(s)^{p+t-1} \upsilon_{\frac{1}{n}}(s) |ds| \right)^{\frac{1}{p}} \rho_{\frac{1}{n}}(z)^{\frac{p-1}{p}}$$

és csak tovább növeljük a jobboldalt, ha az utóbbi integrálban az integrálási tartományt L-re cseréljük. A Bernstein-egyenlőtlenséget (4.22. Tétel), majd a (4.23) egyenlőtlenséget alkalmazva folytatjuk a becslést:

$$
\begin{aligned}
&\le \frac{\hat{c}^{\frac{1}{p}}}{2}\left(\frac{1}{\rho_{\frac{1}{n}}(z)^{p+t-1}\upsilon_{\frac{1}{n}}(z)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_L |p_n(s)|^p \rho_{\frac{1}{n}}(s)^{t-1}\upsilon_{\frac{1}{n}}(s)|\mathrm{d}s|\right)^{\frac{1}{p}} \rho_{\frac{1}{n}}(z)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_{\frac{1}{n}}(z)^{p+t-1}\upsilon_{\frac{1}{n}}(z)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\rho_{\frac{1}{n}}(z)^t\upsilon_{\frac{1}{n}}(z)\right)^{\frac{1}{p}} \rho_{\frac{1}{n}}(z)^{\frac{p-1}{p}} \le \frac{1}{2}.
\end{aligned}
\tag{4.25}
$$

Visszatérve a (4.24) egyenlőtlenséghez, előbb a (4.25) becslés és hogy $p_n(z) = 1$, majd (4.12) és (4.15a) felhasználásával tovább vezetjük azt

$$
\begin{aligned}
\dots &\ge \int_{l_{\frac{1}{n}}(z)} \left(\frac{1}{2}\right)^p \rho_{\frac{1}{n}}(\zeta)^{t-1}\upsilon_{\frac{1}{n}}(\zeta)|\mathrm{d}\zeta| \\
&\ge \frac{1}{c_2^{t-1}}\frac{1}{c_5(1+c_2)^{\alpha_3}}\int_{l_{\frac{1}{n}}(z)} \left(\frac{1}{2}\right)^p \rho_{\frac{1}{n}}(z)^{t-1}\upsilon_{\frac{1}{n}}(z)|\mathrm{d}\zeta| \\
&= \frac{1}{c_2^{t-1}}\frac{1}{c_5(1+c_2)^{\alpha_3}}\left(\frac{1}{2}\right)^p \rho_{\frac{1}{n}}(z)^{t}\upsilon_{\frac{1}{n}}(z),
\end{aligned}
\tag{4.26}
$$

és ez igazolja a 4.4. Tételben szereplő alsó becslést.

■

4.5. Következmény bizonyítása. Ha $L_1, \dots, L_N$ jelöli L összefüggő komponenseit (vagyis $L_1, \dots, L_N$ mindegyike görbe vagy ív), akkor ezekre külön-külön alkalmazható a 4.4. Tétel alkalmas $c_{L_1}, \dots, c_{L_N}$ konstansokkal. Ha ezek után $c := \max(c_{L_1}, \dots, c_{L_N})$, akkor

$$
\inf_{\substack{p_n\in\mathcal{P}_n\\ p_n(z)=1}} \int_L \rho_{\frac{1}{n}}(\zeta)^t|p_n(\zeta)|^p\,\mathrm{d}\mu(\zeta) \ge \inf_{\substack{p_n\in\mathcal{P}_n\\ p_n(z)=1}} \int_{L_z} \ge \frac{1}{c_{L_z}}\rho_{\frac{1}{n}}(z)^t\upsilon_{\frac{1}{n}}(z) \ge \frac{1}{c}\rho_{\frac{1}{n}}(z)^t\upsilon_{\frac{1}{n}}(z),
$$

ahol L_z az L halmaz z-t tartalmazó komponense, és $\rho_{\frac{1}{n}}(z)$-t úgy értelmeztük a z pontban, hogy az legyen az L_z-re, mint önmagában nézett görbére/ívre vonatkozó $\rho_{\frac{1}{n}}$ függvény z-beli értéke. Ezzel az alsó becslést be is láttuk.

A felső becslés követi (7) jobboldalának bizonyítását a $z \in L_z$ pontra. Ahogy (4.21)-ben, L_z-re is megkonstruáljuk K_n-t. Ha L egyetlen komponensből áll (vagyis $L = L_z$), akkor készen vagyunk. Ha vannak L_z-n kívüli komponensek is, akkor még meg kell győződnünk arról, hogy K_n abszolút értékének integrálja elég kicsi ezeken. Ezt általában nem tudjuk eldönteni, de K_n megfelelő módosításával ez elérhető, miközben L_z fölötti, számunkra fontos tulajdonságai változatlanok maradnak. E célból K_n-t megszorozzuk egy alkalmasan választott segédpolinommal. A segédpolinom megtalálásához felidézzük az alábbi két tételt:

4.25. Tétel ([21, Bernstein Lemma, Theorem 5.5.7, 156.o.]). *Legyen K pozitív kapacitású kompakt halmaz a komplex síkon, D pedig kompakt részhalmaza K komplementerének, azaz a $\mathbb{C} \setminus K$ halmaznak. Ekkor van olyan $\eta = \eta(K, D)$ konstans, hogy bármely q polinomra*

$$|q(z)| \leq \eta^{\deg q} \sup_{\zeta \in K} |q(\zeta)|$$

valahányszor $z \in D$.

4.26. Tétel ([21, Bernstein-Walsh Tétel, Theorem 6.3.1, 170.o.]). *Legyen K olyan kompakt halmaz a komplex síkon, aminek a komplementere összefüggő. Ha f holomorf K valamely U nyílt környezetén, akkor létezik olyan $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ($\deg q_n \leq n$) polinom-sorozat, $\mathcal{M} > 0$ és $\theta \in (0, 1)$, hogy minden n-re*

$$\sup_{z \in K} |f(z) - q_n(z)| \leq \mathcal{M}\theta^n.$$

Emlékeztetünk a polinomiális konvex burok fogalmára.

4.27. Definíció. *Ha K kompakt részhalmaza a komplex síknak és Ω jelöli $\mathbb{C} \setminus K$ nem korlátos komponensét, akkor a $\mathbb{C} \setminus \Omega$ halmazt K polinomiális konvex burkának nevezzük.*

(4.21) figyelembe vételével a 4.25. Tétel implikálja, hogy

$$\sup_{L \setminus L_z} |K_n(z)| \leq C_{L_z} \eta_{L_z}^n, \tag{4.27}$$

valamilyen n-től független C_{L_z} és η_{L_z} konstansokkal. Másrészt rendre jelölje $U_1, \ldots, U_N$ az $L_1, \ldots, L_N$ komponensek polinomiális konvex burkainak valamilyen páronként diszjunkt környezeteit és

$$f(\zeta) := \begin{cases} 1 & \text{ha } \zeta \in U_z \\ 0 & \text{ha } \zeta \in \bigcup_{i=1}^{N} U_i \setminus U_z, \end{cases}$$

ahol U_z az L_z komponens polinomiális konvex burkának az imént bevezetett környezete. Mivel f holomorf L egy nyílt környezetén (nevezetesen $U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_N$-en), alkalmazhatjuk a 4.26. Tételt és azt kapjuk, hogy létezik olyan $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ($\deg q_n \leq n$) polinom-sorozat, $\mathcal{M} > 0$ és $\theta \in (0, 1)$, hogy minden elég nagy n-re

$$\left|\frac{q_n(\zeta)}{q_n(z)}\right| \leq \begin{cases} \frac{1+\mathcal{M}\theta^n}{|1-\mathcal{M}\theta^n|} \asymp 1 & \text{ha } \zeta \in L_z \\ \frac{\mathcal{M}\theta^n}{|1-\mathcal{M}\theta^n|} \asymp \theta^n & \text{ha } \zeta \in L \setminus L_z. \end{cases} \tag{4.28}$$

Legyen

$$\mathcal{K}_n(\zeta) = K_{\left[\frac{n}{\tau+1}\right]}(\zeta) \frac{q_{\left[\frac{\tau n}{\tau+1}\right]}(\zeta)}{q_{\left[\frac{\tau n}{\tau+1}\right]}(z)},$$

ahol τ egy alább megválasztott pozitív valós szám. Előbb idézünk egy lemmát, amely egy durva, de egyenletes becslést ad $\rho_{\frac{1}{n}}$-re.

4.28. Lemma ([4, Corollary 2.7, 61.o.]). *Legyen K tetszőleges olyan kontinuum (azaz egy végtelen számosságú összefüggő kompakt halmaz), aminek ($\mathbb{C}$-re vonatkozó) komplementere összefüggő. Ha L jelöli K határát, akkor*

$$\delta^2 \preccurlyeq \mathrm{d}(L, L_\delta) \preccurlyeq 1.$$

Ebből leolvasható, hogy ζ-tól függetlenül $1/n^2 \preccurlyeq \rho_{\frac{1}{n}}(\zeta) \preccurlyeq 1$. Használva még a 4.26. Tételt, (4.27), (4.28) becsléseket és hogy $\upsilon_{\frac{1}{n}}(\zeta) \le |L| \preccurlyeq 1$, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}&\int_{L\setminus L_z} |\mathcal{K}_n(\zeta)|\rho_{\frac{1}{n}}(\zeta)^{t-1}\upsilon_{\frac{1}{n}}(\zeta)\,|\mathrm{d}\zeta| \preccurlyeq \int_{L\setminus L_z} \eta_{L_z}^{\frac{n}{\tau+1}}\theta^{\frac{n\tau}{\tau+1}}\rho_{\frac{1}{n}}(\zeta)^{t-1}\upsilon_{\frac{1}{n}}(\zeta)\,|\mathrm{d}\zeta| \\ &\preccurlyeq \max\left(n^{2(1-t)}, 1\right)\left(\eta_{L_z}\theta^\tau\right)^{\frac{n}{\tau+1}} \preccurlyeq \left(\eta_{L_z}\theta^\tau\right)^{\frac{n}{\tau+1}}.\end{aligned} \tag{4.29}$$

Ehhez csak úgy kell választanunk τ-t, hogy $\eta_{L_z}\theta^\tau$ szigorúan kisebb legyen 1-nél, mondjuk $\tau := \frac{\log 1/\eta}{\log\theta} + 1$; így az előbbi integrál n-ben exponenciálisan kicsi.

(4.21), (4.27) és (4.28) felhasználásával adódik, hogy

$$\mathcal{K}_n(\zeta) = \begin{cases} 1 & \text{ha } \zeta = z \\ \preccurlyeq 1 & \text{ha } \zeta \in l_{\frac{1}{n}}(z) \\ \preccurlyeq \rho_{\frac{1}{n}}(z)\frac{1}{|z-\zeta|} & \text{ha } \zeta \in L_z \setminus l_{\frac{1}{n}}(z) \\ \preccurlyeq \left(\eta_{L_z}\theta^\tau\right)^{\frac{n}{\tau+1}} & \text{ha } \zeta \in L \setminus L_z. \end{cases}$$

Meggondolva, hogy $\deg \mathcal{K}_n \le n$, az n-edik Christoffel-függvényt a következőképpen becsülhetjük:

$$\begin{aligned}\lambda_n(\mu, p, t, z) &\preccurlyeq \int_L |\mathcal{K}_n(\zeta)|^p \rho_{\frac{1}{n}}(\zeta)^t \frac{\upsilon_{\frac{1}{n}}(\zeta)}{\rho_{\frac{1}{n}}(\zeta)}\,|\mathrm{d}\zeta| \\ &= \int_{l_{\frac{1}{n}}(z)} + \int_{L_z\setminus l_{\frac{1}{n}}(z)} + \int_{L\setminus L_z} \preccurlyeq \rho_{\frac{1}{n}}(z)^t \upsilon_{\frac{1}{n}}(z),\end{aligned} \tag{4.30}$$

ahol az utolsó egyenlőtlenség belátásához egyrészt (első két integrál) követnünk kell a 4.4. Tétel bizonyítását figyelembe véve a (4.28) becslést, másrészt a harmadik integrál becslését (4.29) mutatja. Annyit kell még megjegyeznünk, hogy

$$\rho_{\frac{1}{n}}(z)^t \upsilon_{\frac{1}{n}}(z) \succcurlyeq \min\left(1, \frac{1}{n^{2t}}\frac{1}{n^{2\alpha_4}}\right) \succcurlyeq \left(\eta_{L_z}\theta^\tau\right)^{\frac{n}{\tau+1}},$$

ami (4.16') $l_{\frac{1}{n}}(\zeta)$-ra és L-re történő alkalmazásából, valamint a 4.28. Lemmából következik.

■

A 4.6. és a 4.7. Következmény (4.4) triviális folyománya, míg a 4.8. Következményhez csak azt az egyszerű észrevételt kell megjegyeznünk, hogy ha egy $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatra

$$\max_{1\le k\le n} a_k \to \infty,$$

akkor van olyan $\mathbb{M} \subset \mathbb{N}$, hogy valahányszor $n \in \mathbb{M}$, mindannyiszor

$$a_n = \max_{1\le k\le n} a_k.$$

4.10. Következmény bizonyítása. Rögzítsünk L-en egy z pontot és egy $\varepsilon > 0$ számot. Tegyük fel, hogy a

$$|\pi_n(z)| < \frac{1}{n^{1/2+\varepsilon}} \frac{1}{\sqrt{\upsilon_{\frac{1}{n}}(z)}} \tag{4.31}$$

egyenlőtlenség véges sok kivételtől eltekintve minden n-re érvényes. Belátjuk, hogy ez a feltevés ellentmondásra vezet. Jelölje $m = m(z,\varepsilon)$ a kivételes indexek maximumát. A 4.4. Tétel ($t = 0$, $p = 2$ eset) alsó becslése és (4.4) szerint

$$\sum_{k=0}^{Sm} |\pi_k(z)|^2 \le \frac{c}{\upsilon_{\frac{1}{Sm}}(z)}, \tag{4.32}$$

ahol S egy később választandó pozitív egész szám. Legyen T egy ugyancsak később definiált pozitív egész. (4.16) szerint

$$\frac{1}{\upsilon_{\frac{1}{Sm}}(z)} \le \frac{c_6}{T^{\frac{1}{\alpha_4}}} \frac{1}{\upsilon_{\frac{1}{TSm}}(z)}.$$

Ha ezt behelyettesítjük (4.32)-be és most a 4.4. Tétel felső becslését alkalmazzuk $\upsilon_{\frac{1}{TSm}}$-re , akkor adódik, hogy

$$\left(\frac{1}{c} - \frac{cc_6}{T^{\frac{1}{\alpha_4}}}\right) \frac{1}{\upsilon_{\frac{1}{TSm}}(z)} \le \sum_{k=Sm+1}^{TSm} |\pi_k(z)|^2.$$

Ez pedig (4.31) és a mérték monotonitásának felhasználásával így folytatható:

$$< \sum_{k=Sm+1}^{TSm} \frac{1}{k^{2\varepsilon+1}} \frac{1}{\upsilon_{\frac{1}{k}}(z)} \le \sum_{k=Sm+1}^{TSm} \frac{1}{k^{2\varepsilon+1}} \frac{1}{\upsilon_{\frac{1}{TSm}}(z)} \le \frac{1}{\upsilon_{\frac{1}{TSm}}(z)} \sum_{k=Sm+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2\varepsilon+1}}.$$

Ha most T-t úgy választjuk, hogy $\left(\frac{1}{c} - \frac{cc_6}{T^{\frac{1}{\alpha_4}}}\right) > \frac{1}{2c}$, S-t pedig úgy, hogy $\sum_{k=Sm+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2\varepsilon+1}} < \frac{1}{2c}$, akkor a kívánt ellentmondásra jutunk.

■

A 4.12. Tétel, a 4.13. Megjegyzés és a 4.15. Tétel egyszerűen következnek [5, Lemma 2.10, Lemma 2.11 és a Lemma 2.12]-ből. A hasonlóság miatt a hivatkozott lemmák közül csak az elsőt idézzük és csak a 4.12. Tételt bizonyítjuk. A 4.15. Tétel esetében ennek mintájára már könnyen eljárhatunk.

4.29. Lemma ([5, Lemma 2.10]). *Tegyük fel, hogy az L kvázi-sima görbének $\zeta \in L$ pontjában $\beta\pi$ szögű Dini-sima sarka van ($0 < \beta < 2$). Ekkor létezik olyan $\varepsilon = \varepsilon(L, \zeta)$, hogy minden olyan $z \in L$ pontra és $z' \in (L \cup \Omega)$ pontra, amelyre $|z - z'| \leq |z - \zeta| \leq \varepsilon$,*

$$\frac{1}{r_1}\left|\frac{\Phi(z) - \Phi(\zeta)}{\Phi(z) - \Phi(z')}\right| \leq \left|\frac{z - \zeta}{z - z'}\right| \leq r_1\left|\frac{\Phi(z) - \Phi(\zeta)}{\Phi(z) - \Phi(z')}\right|, \tag{4.33}$$

$$\frac{1}{r_2}|\Phi(z) - \Phi(\zeta)|^\beta \leq |z - \zeta| \leq r_2|\Phi(z) - \Phi(\zeta)|^\beta \tag{4.34}$$

valamilyen $r_i = r_i(L, \zeta, \varepsilon, \beta) > 0$ ($i \in \{1; 2\}$) konstansokkal.

4.30. Megjegyzés: [5, Lemma 2.10] bizonyításából látható, hogy ha L szakaszonként Dini-sima, véges sok (π-től különböző szögű) sarokkal rendelkező görbe, akkor ε, r_1, r_2 mind ζ-tól, mind a szögektől függetlenül választható, így –ebben az esetben– az előző egyenlőtlenség ugyanazokkal az ε, r_1 és r_2 konstansokkal igaz minden $\zeta \in L$-re.
E lemmát alkalmazva a következő módon (vö. [3, Lemma 3] bizonyítása) okoskodhatunk:

4.12. Tétel bizonyítása. Legyen $z \in l_\varepsilon(\zeta)$. Feltehető, hogy $\rho_{\frac{1}{n}}(z) < \varepsilon$ bármely $z \in L$ pontra (ez minden elég nagy n-re igaz). Jegyezzük meg, ha $z \in L$, akkor $|\Phi(z)| = 1$, és $|\Phi(\tilde{z}_\delta)| = |(1 + \delta)\Phi(z)| = (1 + \delta)$.

- Ha $|z - \zeta| \leq \rho_{\frac{1}{n}}(z)$, akkor (4.12) szerint

$$\frac{1}{c_2}\rho_{\frac{1}{n}}(\zeta) \leq \rho_{\frac{1}{n}}(z) \leq c_2\rho_{\frac{1}{n}}(\zeta), \tag{4.35}$$

- ha $|z - \zeta| > \rho_{\frac{1}{n}}(z)$, akkor, a $K := (c_1 c_4)^{\alpha_2}$ (c_1 (4.11)-ből, c_3 és α_2 (4.14)-ből) és a $z' = \tilde{z}_{\frac{1}{Kn}}$ választással, (4.14) és (4.11) mutatja, hogy

$$|z - \zeta| \geq \frac{1}{c_4}\left(\frac{Kn}{n}\right)^{1/\alpha_2}\rho_{\frac{1}{Kn}}(z) \geq |z - \tilde{z}_{\frac{1}{Kn}}|,$$

így (4.33) alkalmazható $z' = \tilde{z}_{\frac{1}{Kn}}$-re. Ezért a (4.14), a (4.11), a (4.33) és a (4.34) kétoldali becslések ugyanilyen sorrendben való alkalmazásából adódik, hogy

$$\begin{aligned}\rho_{\frac{1}{n}}(z) &\le c_4 K^{\alpha_2} \rho_{\frac{1}{Kn}}(z) \le c_1 c_4 K^{\alpha_2} |z - \tilde{z}_{\frac{1}{Kn}}| \\ &\le r_1 c_1 c_4 K^{\alpha_2} \frac{|z-\zeta||\Phi(z) - (1+\frac{1}{Kn})\Phi(z)|}{|\Phi(z) - \Phi(\zeta)|} \\ &\le r_1 r_2^{1/\beta} c_1 c_4 K^{\alpha_2} \frac{|z-\zeta|^{1-\frac{1}{\beta}}}{Kn},\end{aligned} \tag{4.36}$$

illetve hasonló módon

$$\rho_{\frac{1}{n}}(z) \succcurlyeq \frac{|z-\zeta|^{1-\frac{1}{\beta}}}{n}.$$

A bizonyítás befejezéséhez annyit kell még belátnunk, hogy (4.35)-ben $\rho_{1/n}(\zeta) \asymp 1/n^{\beta}$; ez viszont (4.33) és (4.34) egyenes folyománya. Legyen, ugyanis, $z \in L$ egy olyan pont, amire $|z - \zeta| = \rho_{1/n}(\zeta)$. Ha c_1 a (4.11)-ben, c_2 (4.12)-ban és c_4 a (4.14)-ben szereplő konstans és $H \ge (c_1 c_2 c_4)^{\alpha_2}$, akkor (4.11), (4.12) és (4.14) szerint

$$\frac{1}{c_1 c_2 c_4 H^{\alpha_2}} \rho_{\frac{1}{n}}(\zeta) \le |z - \tilde{z}_{\frac{1}{Hn}}| \le \rho_{\frac{1}{n}}(\zeta), \tag{4.37}$$

ennélfogva (4.33) $z' = \tilde{z}_{\frac{1}{Hn}}$ választással alkalmazható. Figyelembe véve még a (4.37) egyenlőtlenséget, azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{r_1 H} \frac{1}{n} \le |\Phi(z) - \Phi(\zeta)| \le \frac{r_1 c_1 c_2 c_4 H^{\alpha_2}}{H} \frac{1}{n}.$$

Ezt (4.34)-be helyettesítve adódik, hogy

$$\frac{1}{r_2} \frac{1}{(r_1 H)^{\beta}} \frac{1}{n^{\beta}} \le |z - \zeta| = \rho_{\frac{1}{n}}(\zeta) \le r_2 \left(\frac{r_1 c_1 c_2 c_4 H^{\alpha_2}}{H} \right)^{\beta} \frac{1}{n^{\beta}}.$$

Most már (4.35) és (4.36) mutatja, hogy van olyan c_7, melyre

$$\frac{1}{c_7} \Delta_n(z) \le \rho_{\frac{1}{n}}(z) \le c_7 \Delta_n(z).$$

■

4.17. Következmény bizonyítása. (7) szerint ($t = 0$ eset)

$$\upsilon_{\frac{1}{n}}(z) \preccurlyeq \int_L \left| \frac{p_n(\zeta)}{p_n(z)} \right|^p \mathrm{d}\mu(\zeta).$$

Egyszerű átrendezés mutatja, hogy

$$|p_n(z)|^p \preccurlyeq \frac{1}{\upsilon_{\frac{1}{n}}(z)} \|p_n\|_{\mu,p}^p.$$

Előbb L fölötti szuprémumot véve, majd p-edik gyököt vonva megkapjuk a (7) becslést, és most már felhasználhatjuk (7) igazolásához:

$$\begin{aligned}\|p_n\|_{\mu,q} &\leq \left(\int_L \|p_n\|_\infty^{q-p} |p_n(\zeta)|^p \, \mathrm{d}\mu(\zeta)\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\preccurlyeq M_n^{\frac{q-p}{pq}} \|p_n\|_{\mu,p}^{\frac{q-p}{q}} \|p_n\|_{\mu,p}^{\frac{p}{q}} = M_n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|p_n\|_{\mu,p}.\end{aligned}$$

■

5. Függelék

A Cantor-mérték duplázó

A 2.8. Megjegyzésben került elő a Cantor-mérték és azt állítottuk, hogy duplázó tulajdonságú a C Cantor-halmazon. Itt adunk rá egy bizonyítást (lásd pl. [37]). Az ott bevezetett jelölést használva vegyük észre, hogy ha $[p,q]$ C_l-nek egy maximális részintervalluma, akkor

$$\rho(C \cap [p,q]) = \rho_l([p,q]) = \frac{1}{2^l}.$$

Ebből már egyszerűen következik ρ duplázó tulajdonsága C-n. Valóban, ha I középpontja a Cantor-halmazba esik, akkor vegyük azt a legkisebb l pozitív egészet, amelyre C_l egy maximális részintervalluma I-be esik, de C_{l-1}-nek már nincs ilyen maximális részintervalluma. Csak egyetlen ilyen maximális részintervallum lehet, különben C_{l-1}-nek is lenne I-ben fekvő maximális részintervalluma. Ebből következik, hogy $\rho(I) \geq 1/2^l$, illetve hogy $|I| < 2/3^{l-1}$. Ennél fogva $|2I| \leq 4/3^{l-1}$ és a $2I \cap C$ metszetet biztos lefedi 16 darab C_l-ben fekvő maximális részintervallum. Ezért

$$\rho(2I) \leq 16\frac{1}{2^l} \leq 16\rho(I),$$

bizonyítva, hogy a ρ Cantor-mérték duplázó.

A 3.13. Tétel bizonyítása

A bizonyítás szinte szó szerint a $[12, Theorem\,3]$ bizonyítása, csak $[-1,1]$ helyett egy $[0,\gamma]$ alakú intervallumon dolgozunk.

A 3.24. Lemma birtokában először megjegyezzük, hogy ha $x \in [x_{n,k}, x_{n,k+1}]$, akkor a 3.10. Tételben (3.5) helyett az

$$\frac{1}{A_\gamma}\Delta_n(x) \leq x_{n,k+1} - x_{n,k} \leq \frac{1}{A_\gamma}\Delta_n(x) \tag{5.1}$$

egyenlőtlenséget is írhatjuk.

Lineáris transzformációt alkalmazva, feltehető, hogy $\mathbf{b} = 0$, $\mu([-1,0]) = 0$ és $\beta = 1$. Rögzítsünk egy $0 < \gamma < 1$ számot. Be kell látnunk, hogy μ duplázó $[0,\gamma]$-n, vagyis, hogy van olyan L konstans, hogy ha $2I = [a,b] \subset [0,\gamma]$, akkor

$$\mu(2I) \leq L\mu(I). \tag{5.2}$$

Legyen $\hat{\gamma} := (\gamma+\beta)/2$. Meggondolható, hogy a duplázó tulajdonságot már az is maga után vonja, ha az előbbi egyenlőtlenséget a legföljebb $16(\hat{\gamma}-\gamma)$ hosszúságú intervallumokra igazoljuk, ezért a továbbiakban az $|I| \leq 16(\hat{\gamma}-\gamma)$ föltevéssel élünk. Jelölje τ I középpontját és legyen m az a legkisebb pozitív egész, amelyre fennáll, hogy

$$8A_{\hat{\gamma}}\Delta_m(\tau) \le |I| \le 32A_{\hat{\gamma}}\Delta_m(\tau). \tag{5.3}$$

(Ilyen m létezik, mert $\Delta_1(\tau) \ge 1$, $|I| \le 1$ és $\Delta_n \to 0$.) (Azért kényszerülünk $A_{\hat{\gamma}}$ használatára A_γ helyett, mert bizonyos esetekben (pl. ha $b = \gamma$) a $[\gamma, \hat{\gamma}]$ intervallumban lévő zérushelyekre is szükségünk lehet.)

A $[0, \tau]$ intervallumon biztos van gyök, ugyanis (5.3) szerint

$$x_{m,k_0} \le \frac{A_{\hat{\gamma}}}{m^2} \le A_{\hat{\gamma}}\Delta_m(\tau) \le \frac{|I|}{8} < \tau.$$

Így van olyan $x_{m,k}$ zérushely is, amelyre $x_{m,k} \le \tau < x_{m,k+1}$. Ekkor $x_{m,k-1}, x_{m,k}, x_{m,k+1} \in \frac{3}{4}I$, hiszen (5.1) miatt

$$|x_{m,k\pm1} - x_{m,k}| \le A_{\hat{\gamma}}\Delta_m(x_{m,k}) \le A_{\hat{\gamma}}\Delta_m(\tau) \le \frac{|I|}{8}.$$

Ezért a (3.15) Markov-egyenlőtlenség következtében azt kapjuk, hogy

$$\mu(I) \ge \mu([x_{m,k-1}, x_{m,k}]) \ge \lambda_{m,k} \tag{5.4}$$

Két esetet különböztetünk meg: ha $a \ge 2|I|$, illetve ha $a < 2|I|$.

Először azt vizsgáljuk, ha $a \ge 2|I|$. Emiatt (hasonló meggondolással, mint τ estében) létezik zérushely a $[0, a)$ intervallumon, melyek közül a legnagyobbat jelölje $x_{n,k-r}$.

Ha most $x \in 2I$, akkor egyrészt

$$\Delta_m(x) = \frac{\sqrt{x}}{m} + \frac{1}{m^2} \le \Delta_m(2\tau) \le \sqrt{2}\Delta_m(\tau),$$

másrészt

$$\Delta_m(x) \ge \Delta_m(a) \ge \Delta_m\left(\frac{\tau}{2}\right) \ge \frac{\sqrt{2}}{2}\Delta_m(\tau),$$

amelyekből világos, hogy

$$\frac{1}{2} \le \frac{\Delta_m(x)}{\Delta_m(\tau)} \le 2. \tag{5.5}$$

Ezért, (5.1) alkalmazásával, ha $0 < j < r$, akkor

$$x_{m,k-j+1} - x_{m,k-j} \ge \frac{\Delta_m(x_{m,k-j})}{A_{\hat{\gamma}}} \ge \frac{\Delta_m(\tau)}{2A_{\hat{\gamma}}} \ge \frac{|I|}{64A_{\hat{\gamma}}^2},$$

amiből

$$r \le \frac{2|I|}{|I|/64A_{\hat{\gamma}}^2} + 1 = 128A_{\hat{\gamma}}^2 + 1.$$

Hasonlóképpen, ha $x_{m,k+s}$ a legkisebb b-től jobbra eső zérushely, akkor $s \le 128A_{\hat\gamma}^2 + 1$. (Az $|I| \le 16(\hat\gamma - \gamma)$ föltevést is használva meggondolható, hogy az m-edik ortogonális polinomnak van gyöke a $[\gamma, \hat\gamma]$ intervallumon, ezért létezik $x_{m,k+s}$.)

A (3.7) becslést használva láthatjuk, hogy

$$\frac{\lambda_{m,k+j}}{\lambda_{m,k}} = \frac{\lambda_{m,k+j}}{\lambda_{m,k+j-1}} \frac{\lambda_{m,k+j-1}}{\lambda_{m,k+j-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{\lambda_{m,k+1}}{\lambda_{m,k}} \le B_{\hat\gamma}^j.$$

Ezt, a (3.15) Markov-egyenlőtlenséget és az r-re, s-re vonatkozó korlátokat használva adódik, hogy:

$$\begin{aligned} \mu(2I) &\le \mu([x_{m,k-r}, x_{m,k+s}]) \le \sum_{j=-r}^{s} \lambda_{m,k+j} \\ &\le \lambda_{m,k} 2 \sum_{j=0}^{128A^2+1} B_{\hat\gamma}^j \le 2B_{\hat\gamma}^{128A^2+2} \lambda_{m,k}, \end{aligned} \tag{5.6}$$

amit összevetve a (5.4) egyenlőtlenséggel a bizonyítandó (5.2) adódik, ha $a \ge 2|I|$.

Most legyen $a < 2|I|$. Ekkor $\mu(2I) = \mu([a, \tau]) + \mu([\tau, b])$. $\mu([\tau, b])$ ugyanúgy kezelhető, mint az $a \ge 2|I|$ esetben $2I$, ezért részletezés nélkül felírjuk, hogy

$$\mu([\tau, b]) \le \mu([x_{m,k}, x_{m,k+s}]) \le \sum_{j=0}^{s} \lambda_{m,k+j} \le B_{\hat\gamma}^{128A^2+2} \lambda_{m,k}. \tag{5.7}$$

$\mu([a, \tau])$ becslése estén módosítanunk kell az eddigi eljárást, hiszen a $[0, a]$ intervallumra nem biztos, hogy illeszkedik zérushely és (5.5) alsó becslése sem biztos, hogy fennáll. Viszont most $\tau \le 3|I|$, ezért $\tau - 0 \le 3|I| \le 96A_{\hat\gamma}\Delta_m(\tau)$, ami a 3.24. Lemma ismeretében maga után vonja, hogy $\Delta_m(\tau) \le 8 \cdot 96A_{\hat\gamma}/m^2$, tehát (5.3) figyelembe vételével $|[0, \tau]| \le 3|I| \le 3 \cdot 2^{13} A_{\hat\gamma}^2/m^2$.

A (3.5) egyenlőtlenség szerint, ha $x_{m,k-j}, x_{m,k-j+1} \in [0, \tau]$, akkor

$$x_{m,k-j+1} - x_{m,k-j} \ge \frac{\Delta_{m,k-j}}{A_{\hat\gamma}} \ge \frac{1}{A_{\hat\gamma}} \frac{1}{m^2},$$

ezért $[0, \tau]$-n legföljebb

$$\frac{3|I|}{1/A_{\hat\gamma}m^2} \le 3 \cdot 2^{13} A_{\hat\gamma}^3$$

darab zérushely van. Innen már ugyanúgy járhatunk el, mint $[\tau, b]$ esetében, és kapjuk:

$$\mu([a, \tau]) \le \mu([0, \tau]) \le \lambda_{m,k} B_{\hat\gamma}^{3 \cdot 2^{13} A_{\hat\gamma}^3 + 1}$$

Ez az (5.7) és (5.4) becslésekkel együtt igazolja (5.2) fennállását az $a < 2|I|$ esetben is, ezért a tétel bizonyítását befejeztük.

6. Összefoglalás

Jelen értekezés a jelölt doktori képzése során elért, a [33, 35, 36] cikkekben publikált eredményeit adja közre.

A disszertáció két nagyobb részre oszlik. Első részében a számegyenesen vizsgálódtunk, központi kérdésünk az ortogonális polinomok szomszédos gyökei közötti távolság becslése egy olyan intervallumon, amelyen a kapcsolódó mérték rendelkezik az úgynevezett duplázó tulajdonsággal.

A második részben a számegyenesről síkbeli görbékre léptünk át és enyhe simasági feltételek mellett, továbbra is feltételezve a mérték duplázó tulajdonságát, a kapcsolódó Christoffel-függvényeket becsültük kiegészítve néhány alkalmazással.

Legyen μ kompakt és végtelen számosságú tartóval rendelkező mérték a komplex síkon. Ekkor egyértelműen létezik olyan $\{\pi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ polinom-sorozat (pl. [34, 1.1]), amelyre igaz hogy π_n foka pontosan n, π_n főegyütthatója pozitív, és

$$\int \pi_m \pi_n \,\mathrm{d}\mu = \begin{cases} 1 & \text{ha } m = n \\ 0 & \text{ha } m \neq n. \end{cases}$$

E polinom-sorozat tagjait a μ mértékhez tartozó *ortogonális*, pontosabban *ortonormált polinomoknak* (vö. (iii) tulajdonság) nevezzük.

A μ mértékhez tartozó n-edik Christoffel-függvény alatt a

$$\lambda_n(\mu, p, x) = \inf_{\substack{q(x)=1 \\ \deg(q)\leq n}} \int |q|^p \,\mathrm{d}\mu$$

függvényt értjük, ahol az infimumot mindazon polinomok halmazán vesszük, melyek x pontbeli értéke 1 és fokszámuk legföljebb n.

Ortogonális polinomok zérushelyeinek távolsága

Ebben a részben feltettük, hogy a vizsgált mérték tartója a számegyenes kompakt részhalmaza. Ha I egy intervallum a számegyenesen, akkor $2I$ jelöli az I középpontjából (Lebesgue-mértéke, vagyis hossza szerint) megkétszerezett intervallumot.

Megmutattuk, hogy a zérushelyek egyenletes elrendeződéséhez már az is elegendő, ha a mérték egy intervallumon duplázó tulajdonságú, ezzel belátva, hogy Mastroianni és Totik [12] cikkében megjelent eredmények elsősorban a mérték lokális tulajdonságaitól függenek.

Definíció. *Azt mondjuk, hogy a μ mérték az $[a, b]$ intervallumon duplázó (tulajdonságú) az*

$L = L(\mu, [a, b])$ *duplázó konstanssal, ha* $\mu([a, b]) > 0$ *és*

$$\mu(2I) \leq L\mu(I)$$

valahányszor $2I \subset [a, b]$.

A következő három tételben a duplázó tulajdonságú intervallum végpontjaitól távol, az intervallum belsejébe eső zérushelyek elhelyezkedését írtuk le. Ezek rendre megfelelnek a [12] cikk 1., 2. és 3. tételeinek.

3.2. Tétel. *Ha a* μ *mérték duplázó az* $[a, b]$ *intervallumon, akkor bármely* $\delta > 0$ *számhoz létezik olyan n-től független* $A = A\big(\delta, L(\mu, [a, b])\big)$ *konstans, hogy*

$$\frac{1}{An} \leq x_{n,k+1} - x_{n,k} \leq \frac{A}{n}, \qquad k = j, j+1, \dots, l-1, \tag{3.1}$$

ahol $x_{n,j} < x_{n,j+1} < \cdots < x_{n,l}$ *jelöli a* π_n *polinom* $[a+\delta, b-\delta]$ *intervallumba eső gyökeit.*

3.6. Következmény. *Ha a* μ *mérték kompakt tartójú a számegyenesen és duplázó az* $[a, b]$ *intervallumon, akkor bármely* $\delta > 0$ *számhoz van olyan* $B = B\big(\delta, L(\mu, [a, b])\big)$ *konstans, hogy*

$$\frac{1}{B} \leq \frac{\lambda_n(x_{n,k})}{\lambda_n(x_{n,k+1})} \leq B \tag{3.4}$$

valahányszor $x_{n,k}$ *és* $x_{n,k+1}$ *a* π_n *polinom egymást követő két gyöke az* $[a+\delta, b-\delta]$ *intervallumon.*

A két előbbi tétel mintegy megfordítása az alábbi

3.7. Tétel. *Ha* μ *kompakt tartójú mérték a számegyenesen és a hozzája tartozó ortogonális polinomok zérushelyeire minden* $[a+\delta, b-\delta]$ *alakú intervallumon teljesül (3.1) és (3.4) valamilyen* (δ*-tól függő) A és B konstanssal, akkor* μ *duplázó ezeken az intervallumokon.*

Ha a mérték egy intervallumon duplázó tulajdonságú, de az intervallumon kívül nincs róla információnk, akkor az intervallum végpontjainak a közelében nem tudunk mit mondani a szomszédos zérushelyek közötti távolságról. Ha azonban tudjuk, hogy az intervallum valamelyik bal-végpontja mellett eltűnik a mérték, akkor e végpont közelében lehetőségünk van a távolság becslésére, és láthatjuk, hogy ugyanazt a mintázatot követi, amit a [12] cikk 1. Tételéből a végpontok közelében kiolvashatunk.

Definíció. *Legyen* μ *kompakt tartójú mérték és* $\mathbf{b} \in \mathrm{supp}(\mu)$. *Azt mondjuk, hogy* $\mathbf{b}$ *egy bal-végpontja* μ *tartójának, ha* $\mu([\mathbf{b} - \alpha, \mathbf{b}]) = 0$ *valamilyen* $\alpha > 0$ *számra és* $\mu([\mathbf{b}, \mathbf{b} + \beta]) > 0$

minden $\beta > 0$ *számra.*

3.10. Tétel. *Ha* $\mathbf{b}$ *bal-végpontja* μ *tartójának és* μ *duplázó a* $[\mathbf{b}, \mathbf{b}+\beta]$ *intervallumon valamilyen* $\beta > 0$*-ra, akkor bármely* $0 < \gamma < \beta$*-hoz van olyan* A_γ*, hogy*

$$\frac{1}{A_\gamma}\left(\frac{\sqrt{x_{n,k} - \mathbf{b}}}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \leq x_{n,k+1} - x_{n,k} \leq A_\gamma\left(\frac{\sqrt{x_{n,k} - \mathbf{b}}}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \tag{3.5}$$

teljesül valahányszor $x_{n,k}$ *és* $x_{n,k+1}$ *az* n*-edik ortogonális polinom két egymást követő gyöke a* $[\mathbf{b}, \mathbf{b} + \gamma]$ *intervallumon.*

3.12. Következmény. *Ha* $\mathbf{b}$ *bal-végpontja* μ *tartójának és* μ *duplázó a* $[\mathbf{b}, \mathbf{b} + \beta]$ *intervallumon valamilyen* $\beta > 0$*-ra, akkor bármely* $0 < \gamma < \beta$*-hoz van olyan* B_γ *konstans, hogy*

$$\frac{1}{B_\gamma} \leq \frac{\lambda_n(x_{n,k})}{\lambda_n(x_{n,k+1})} \leq B_\gamma \tag{3.7}$$

teljesül valahányszor $x_{n,k}$ *és* $x_{n,k+1}$ *az* n*-edik ortogonális polinom két egymást követő gyöke a* $[\mathbf{b}, \mathbf{b} + \gamma]$ *intervallumon.*

A (3.5) és (3.7) tulajdonságok együttesen implikálják a duplázó tulajdonságot.

3.13. Tétel. *Tegyük fel, hogy a* μ *kompakt tartójú mérték eltűnik a* $[\mathbf{b} - \alpha, \mathbf{b}]$ *intervallumon és a (3.5), (3.7) egyenlőtlenségek fennállnak minden* $[\mathbf{b}, \mathbf{b} + \gamma]$ *(*$0 < \gamma < \beta$*) alakú intervallumon valamilyen megfelelő* A_γ *és* B_γ *konstansokkal. Ekkor* μ *duplázó ezeken az intervallumokon.*

A tételek bizonyításának vezérfonala megegyezik a [12] cikkben találhatóakkal. Legsarkalatosabb pont a 3.2. és a 3.10. tételek felső becslésének bizonyítása, ami azon múlt, hogy tudtuk-e a kapcsolódó Christoffel-függvényeket becsülni. Ez utóbbiakhoz pedig gyorsan csökkenő polinomokat használtunk.

Az első rész végén egy példával rávilágítottunk egy apró jelenségre, amit a [12] cikkben nem láthatunk. Ott a végpont és a hozzá legközelebbi gyök távolsága $1/n^2$. A mi általánosabb feltevéseink mellett ez csak akkor igaz biztosan, ha a vizsgált bal (jobb) végpont egyben a mérték tartójának minimális (maximális) eleme is. Ha azonban egy bal-végpontnál a mérték tartójába még esnek kisebb elemek, akkor e végpont és a tőle jobbra elhelyezkedő legközelebbi zérushely közötti távolság $1/n^2$-nél sokkal kisebb is lehet.

Christoffel-függvények görbéken és íveken

Az értekezés második részében görbék és ívek fölött adtunk kétoldali becslést a Christoffel-függvényekre. A mértéktől továbbra is csak a duplázó tulajdonságot követelve meg a számegyenesen megismert alakú egyenlőtlenségeket igazultunk. A becslés néhány alkalmazását is bemutattuk. A bizonyításban a konform leképezések eszköztárához nyúltunk, amire az [1, 2] és [3] cikkek hívták fel figyelmünket. Eljárásunk lehetővé tette, hogy a Christoffel-függvényeket sarkok fölött is becsülhessük. (Andrijevszkij eredményei következtében a Christoffel-függvények definíciójába egy újabb paramétert is bevezethettünk, amire alább, a 4.4. Tételben t utal.)

Definíció. *Azt mondjuk, hogy az L Jordan görbe vagy ív (Lavrentyijev értelemben) kvázisima, ha létezik olyan Λ_L (Lavrentyijev) konstans, hogy az*

$$|L(z_1, z_2)| \leq \Lambda_L |z_1 - z_2|$$

egyenlőtlenség fennáll minden $z_1, z_2 \in L$ pontra, ahol $L(z_1, z_2)$ jelöli L z_1 és z_2 pontjait összekötő (rövidebb) részívét, $|L(z_1, z_2)|$ pedig ennek ívhosszát.

Φ-vel jelöltük azt a konform leképezést, ami L külsejét az egység körlap külsejére képezi oly módon, hogy $\Phi(\infty) = \infty$ és $\Phi'(\infty) > 0$.

A Φ leképezéshez tartozó $\delta(> 0)$ szintvonal alatt az origó középpontú $1 + \delta$ sugarú körvonal Φ melletti

$$L_\delta := \{z \in \Omega : |\Phi(z)| = 1 + \delta\},$$

inverz képét értjük és bevezettük a

$$\rho_\delta(z) := \mathrm{d}(L_\delta, z) = \inf_{\zeta \in L_\delta} |z - \zeta|$$

jelölést a $z \in \mathbb{C}$ pont L_δ-tól való távolságára.

4.4. Tétel. *Legyen L kvázisima görbe vagy ív és μ duplázó mérték L-en. Ha $p \in [1, \infty)$ és $t \in \mathbb{R}$, akkor van olyan $c = c(L, c_\mu, p, t)$ konstans, hogy minden $z \in L$ pontra és $n \in \mathbb{N}$ egész számra*

$$\frac{1}{c} \rho_{\frac{1}{n}}(z)^t \upsilon_{\frac{1}{n}}(z) \leq \lambda_n(\mu, p, t, z) \leq c \rho_{\frac{1}{n}}(z)^t \upsilon_{\frac{1}{n}}(z),$$

ahol $\upsilon_{1/n}(z)$ annak a $\rho_{1/n}(z)$ hosszú ívdarabnak a μ szerinti mértékét jelöli, amelynek ívhosszban z a közepén helyezkedik el.

A tétel alkalmazásaként bemutatott példákat három alrészben írtuk le. Az elsőben a kapcsolódó ortogonális polinomokra adtunk pontbeli alsó és felső becsléseket. Ezek szinte azonnal adódtak az előbbi tétel és az n-edik Christoffel-függvény definíciójából.

A másodikban többet tettünk fel L simaságáról, nevezetesen, hogy L részívei Dini-simák. Ekkor $\rho_{1/n}(z)$ explicit módon kifejezhető, speciálisan sarkok fölött adtunk explicit becsléseket.

Végül a következmények harmadik csoportjában Nikolszkij-típusú egyenlőtlenségeket mutattunk be. Az

$$M_n := \sup_{\zeta \in L} \frac{1}{\upsilon_{\frac{1}{n}}(\zeta)},$$

jelölést használva, az alábbi következményt igazoltuk:

4.17. Következmény. *Ha az L kvázisima görbén vagy íven μ duplázó mérték és $1 \leq p < q$, akkor van olyan n-től független c konstans, hogy*

$$\|p_n\|_\infty \leq c M_n^{\frac{1}{p}} \|p_n\|_{\mu,p},$$

továbbá

$$M_n^{\frac{1}{q}} \|p_n\|_{\mu,q} \leq c M_n^{\frac{1}{p}} \|p_n\|_{\mu,p}$$

minden legfeljebb n-ed fokú p_n polinomra.

7. Summary

In this dissertation we have summarized our results achieved during our doctoral studies and published in [33, 35, 36].

The paper is divided into two parts. In the first one we have worked on the real line, the central question is the zero spacing of orthogonal polynomials on an interval where the associated measure possesses the so called doubling property.

In the second part we have investigated the Christoffel functions of a doubling measure supported on a quasismooth curve or arc and we have shown some applications.

Let μ be a measure on the complex plane which has a compact an infinite support. Then there exists a unique polynomial sequences $\{\pi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ such that $\deg(\pi_n) = n$, the leading coefficient of π_n is positive and

$$\int \pi_m \pi_n \, \mathrm{d}\mu = \begin{cases} 1 & \text{ha } m = n \\ 0 & \text{ha } m \neq n \end{cases}$$

(e.g. [34, 1.1]). The members of this sequence are called orthogonal (orthonormal) polynomials associated to the measure μ.

The n-th Christoffel function associated to the measure μ is defined as

$$\lambda_n(\mu, p, x) = \inf_{\substack{q(x)=1 \\ \deg(q)\leq n}} \int |q|^p \, \mathrm{d}\mu,$$

where the infimum is taken for all polynomials of degree at most n with the property $P_n(x) = 1$.

Zero spacing of orthogonal polynomials

In this part we have assumed that the support of the measure is a compact subset of the real line. Let I be an interval. Then $2I$ denotes the interval twice the length of I and with the midpoint at the midpoint of I.

We have verified that regular zero spacing appears on each interval where the measure is doubling. This shows that the results of Mastroianni and Totik in [12] mostly depend on the local properties of the measure.

Definition. *The measure μ is called doubling on an interval $[a, b]$ if for some constant L we have*

$$\mu(2I) \leq L\mu(I)$$

for all intervals $2I \subseteq [a, b]$.

The following three theorems describe the spacing of consecutive zeros of orthogonal polynomials far from the endpoints of the interval on which the measure is doubling.

Theorem 3.2. *Let μ be a measure with compact support on the real line and with the doubling property on $[a, b]$. Then for every $\delta > 0$ there exists a constant A independent of n such that*

$$\frac{1}{An} \leq x_{n,k+1} - x_{n,k} \leq \frac{A}{n}, \qquad k = j, j+1, \ldots, l-1, \tag{3.1}$$

where $x_{n,j} < x_{n,j+1} < \ldots < x_{n,l}$ are the zeros of p_n in $[a + \delta, b - \delta]$.

Corollary 3.6. *If μ is a measure with compact support on the real line and with the doubling property on $[a, b]$, then for every $\delta > 0$ there exists a constant $B = B_\delta$ such that*

$$\frac{1}{B} \leq \frac{\lambda_{n,k}}{\lambda_{n,k+1}} \leq B, \tag{3.4}$$

whenever $x_{n,k}$ and $x_{n,k+1} \in [a + \delta, b - \delta]$.

The two previous theorems together have a converse.

Theorem 3.7. *Let μ be a measure with compact support. If (3.1) and (3.4) hold on every interval $[a + \delta, b - \delta] \subset \operatorname{supp}(\mu)$, $\delta > 0$ (with some A and B in (3.1) and (3.4) that may depend on δ), then μ has the doubling property on every such interval.*

If the measure is doubling on an interval, but we have no information about its properties outside the interval, then one can not tell much about the zero spacing close to the endpoints of the doubling interval. We have therefore assumed that the measure vanishes on a left-neighbourhood of the left-endpoint. Then we have proved, that the spacing follows the same pattern that can be seen at the endpoints in [12].

Definition. *The point $\mathbf{b}$ is called a left-endpoint of the support of μ, if for some $\alpha > 0$ we have $\mu([\mathbf{b} - \alpha, \mathbf{b})) = 0$ but $\mu([\mathbf{b}, \mathbf{b} + \beta)) > 0$ for all $\beta > 0$.*

Theorem 3.10. *If $\mathbf{b}$ is a left-endpoint of the support of μ and μ is doubling on the interval $[\mathbf{b}, \mathbf{b} + \beta]$ for some $\beta > 0$ then for every $0 < \gamma < \beta$ there is a constant A_γ such that*

$$\frac{1}{A_\gamma}\left(\frac{\sqrt{x_{n,k} - \mathbf{b}}}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \leq x_{n,k+1} - x_{n,k} \leq A_\gamma \left(\frac{\sqrt{x_{n,k} - \mathbf{b}}}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \tag{3.5}$$

holds, whenever $x_{n,k}$ and $x_{n,k+1}$ denote two consecutive zeros of the n-th orthogonal polynomials on $[\mathbf{b}, \mathbf{b} + \gamma]$.

Corollary 3.12. *If* $\mathbf{b}$ *is a left-endpoint of the support of* μ *and* μ *is doubling on the interval* $[\mathbf{b}, \mathbf{b} + \beta]$ *for some* $\beta > 0$ *then for every* $\gamma < \beta$*, there is a constant* B_γ *such that*

$$\frac{1}{B_\gamma} \leq \frac{\lambda_{n,k}}{\lambda_{n,k+1}} \leq B_\gamma, \tag{3.7}$$

whenever $x_{n,k}, x_{n,k+1} \in [\mathbf{b}, \mathbf{b} + \gamma]$.

Properties (3.5) and (3.7) again implicate the doubling property.

Theorem 3.13. *Assume that* μ *vanishes on* $[\mathbf{b} - \alpha, \mathbf{b}]$*, and that (3.5) and (3.7) hold on every interval* $[\mathbf{b}, \mathbf{b} + \gamma]$*,* $\gamma < \beta$*. Then* μ *has the doubling property on every such interval.*

The proofs proceed along the same lines as in [12]. The most cardinal points are the verification of the upper estimates of Theorems 3.2 and 3.10, respectively. These are based on how we can estimate the associated Christoffel functions for which we have made use of fast decreasing polynomials.

We have remarked that if $\mathbf{b}$ is the smallest element of the support and μ is doubling on some interval $[\mathbf{b}, \mathbf{b} + \beta]$, then, for large n,

$$x_{n,1} - \mathbf{b} \sim \Delta_n(x_{n,1}) \sim 1/n^2.$$

In other words, in this case the distance from the smallest zero to the left-endpoint $\mathbf{b}$ is again about $1/n^2$, just as it was in the global case in [12]. At the end of the first part, however, we have shown that this is not necessarily true for local endpoints. We have exhibited an example when the support of the measure consists of two disjoint intervals $[-2, -1]$ and $[0, d]$, but for infinitely many n the smallest positive zero of the corresponding orthogonal polynomials is very close to 0, much closer than $1/n^2$.

Christoffel functions on curves and arcs

In the second part of the dissertation matching estimates have been given for Christoffel functions over curves and arcs. Again, assuming only the doubling property of the associated measure, we have verified similar estimates as on the real line. Some applications have also been presented. In the proof we have used the tools of conformal mappings inspired mostly by Andrievskii's recent articles [1, 2, 3]. (Andrievskii's results have also allowed to introduce a further parameter in the definition of Christoffel functions which is denoted by t below.)

Definition. *The Jordan curve or arc L is quasismooth (in the sense of Lavrentiev), if there is a*

(Lavrentiev) constant Λ_L *such that*

$$|L(z_1, z_2)| \leq \Lambda_L |z_1 - z_2|$$

holds for arbitrary $z_1, z_2 \in L$*, where* $L(z_1, z_2)$ *is the (shorter) subarc of* L *joining* z_1 *and* z_2 *and* $|L(z_1, z_2)|$ *denotes its arc-length.*

Let Φ be the conformal mapping which maps the exterior Ω of L onto the exterior of the unit disk with the normalization $\Phi(\infty) = \infty$ and $\Phi'(\infty) := \lim_{z\to\infty} \frac{\Phi(z)}{z} > 0$.

For $\delta > 0$ let

$$L_\delta := \{\zeta \in \Omega : |\Phi(\zeta)| = 1 + \delta\} \tag{7.1}$$

be the $(1 + \delta)$-level line of Φ and

$$\rho_\delta(z) := \mathrm{d}(L_\delta, z) = \inf_{\zeta \in L_\delta} |z - \zeta| \tag{7.2}$$

the distance from z to this level line.

Then the main result of this part is the following theorem.

Theorem 4.4. *Let* L *be a quasismooth curve or arc and* μ *a doubling measure on* L*. If* $p \in [1, \infty)$*,* $t \in \mathbb{R}$ *then there is a constant* $c = c(L, c_\mu, p, t)$ *such that*

$$\frac{1}{c}\,\rho_{\frac{1}{n}}(z)^t \upsilon_{\frac{1}{n}}(z) \leq \lambda_n(\mu, p, t, z) \leq c\,\rho_{\frac{1}{n}}(z)^t \upsilon_{\frac{1}{n}}(z)$$

is true for any $z \in L$ *and* $n \in \mathbb{N}$*. Here* $\upsilon_{\frac{1}{n}}(z)$ *denotes the measure of the* $\rho_{\frac{1}{n}}(z)$*-long subarc the midpoint of which is* z *in the sense of arc-length.*

The applications of this theorem have written in three subsections. In the first one we have given matching estimates for the associated orthogonal polynomials.

In the second one it has been assumed that L is not only quasismooth but also Dini-smooth. Then we have been able to express ρ_δ explicitly, in particular, we have obtained explicit estimates at corners.

Finally, in the third group of applications Nikolskii-type inequalities have been shown. Using the notation M_n for $\sup_{\zeta\in L} \upsilon_{1/n}(\zeta)^{-1}$ we have proved the following corollary.

Corollary 4.17 *Let* L *be a quasismooth curve or arc and* μ *a doubling measure on* L*. If* $1 \leq p < q$*, then there is a constant* $c = c(p, q)$ *independent of* n *such that*

$$\|p_n\|_\infty \leq c M_n^{\frac{1}{p}} \|p_n\|_{\mu,p},$$

as well as

$$\|p_n\|_{\mu,q} \leq M_n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|p_n\|_{\mu,p}$$

for every polynomial p_n of degree at most n.

Hivatkozások

[1] V. V. Andrievskii, Weighted L_p Bernstein-type inequalities on a quasismooth curve in the complex plane, *Acta Math. Hungar.*, **135 (1–2)** (2011), 8–23.

[2] V. V. Andrievskii, Weighted Polynomial Inequalities in the Complex Plane, *J. Approx. Theory*, **164** (2012), 1165–1183.

[3] V. V. Andrievskii, Weighted Polynomial Inequalities with Doubling Weights on a Quasismooth Arc, *Constr. Approx.*, **36** (2011), 117–143.

[4] V. V. Andrievskii, V. I. Belyi és V. K. Dzjadyk, *Conformal Invariants in Constructive Theory of Functions of Complex Variable*, World Federation Publisher, Atlanta, Georgia 1995.

[5] V. V. Andrievskii és H. P. Blatt, *Discrepancy of Signed Measures and Polynomial Approximation*, Springer Monographs of Mathematics,Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 2002.

[6] T. S. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Mathematics and its Applications, Vol. 13. Gordon and Breach Science Publishers, New York-London-Paris, 1978.

[7] Freud G., *Orthogonale Polynome*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1969; (angolul) *Orthogonal Polynomials*, Akadémiai Kiadó, Budapest 1971.

[8] K. G. Ivanov és Totik V., Fast decreasing polynomials, *Constr. Approx.* **6** (1990), no. 1, 1–20.

[9] Y. Last és B. Simon, Fine structure of the zeros of orthogonal polynomials IV. A priori bounds and clock behavior, *Comm. Pure Appl. Math.* **61** (2008), no. 4, 486–538.

[10] A. L. Levin és D. S. Lubinsky, Applications of universality limits to zeros and reproducing kernels of orthogonal polynomials, *J. Approx. Theory* **150** (2008), 69-95.

[11] Lubinsky, D. S., A new approach to universality limits involving orthogonal polynomials, *Annals of Math.*, **179** (2009), 915-939.

[12] G. Mastroianni és Totik V., Uniform spacing of zeros of orthogonal polynomials, *Constr. Approx.* **32** (2010), no. 2, 181–192.

[13] G. Mastroianni és Totik V., Weighted polynomial inequalities with doubling and A_∞ weights, *Constr. Approx.* **16** (2000), no. 1, 37–71.

[14] Máté A., Nevai P. és Totik V. Szegő's extremum problem on the unit circle, *Annals of Math.*, **134** (1991), 433-453.

[15] I. D. Natanszon, *Konstruktív függvénytan*, Akadémiai kiadó, Budapest 1952.

[16] Nevai P., Géza Freud, orthogonal polynomials and Christoffel functions. A case study, *J. Approx. Theory*, **48** (1986), 1-167.

[17] Nevai P., *Orthogonal polynomials*, Mem. Amer. Math. Soc. **18**, 1979.

[18] Nevai P. és Totik V., Weighted polynomial inequalities, *Constr. Approx.*, **2** (1986), 113-127.

[19] Ch. Pommerenke, *Boundary Behaviour of Conformal Maps*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1992.

[20] E. A. Rakhmanov, On estimates of the growth of orthogonal polynomials whose weight bounded away from zero, *Mat. Sb.*, **114(156)** (1981), 269-298; English transl. in *Math. USSR Sb.*, **42** (1982).

[21] T. Ransford, *Potential Theory in the Complex Plane*, Cambridge University Press, 1995.

[22] B. Simon, *Orthogonal polynomials on the unit circle, Part 1. Classical theory*, American Mathematical Society Colloquium Publications, **54**, Part 1., American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.

[23] B. Simon, The Christoffel-Darboux kernel, *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, **79** (2008), 295-335.

[24] B. Simon, Two extensions of Lubinsky's universality theorem, *J. D'Analyse Math.*, **105** (2008), 345-362.

[25] H. Stahl és Totik V., *General orthogonal polynomials*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, **43**, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[26] Szegő G., *Orthogonal polynomials*, Fourth edition, American Mathematical Society, Colloquium Publications, Vol. XXIII. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1975.

[27] Totik V., Asymptotics for Christoffel functions for general measures on the real line, *J. D'Analyse Math.*, **81** (2000), 283-303.

[28] Totik V., Asymptotics of Christoffel functions on arcs and curves (kézirat, http://www.math.u-szeged.hu/pot/M5chonarc.pdf?)

[29] Totik V., Christoffel functions on curves and domains, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **362** (2010), 2053-2087.

[30] Totik V., Fast decreasing and orthogonal polynomials, *Contemp. Math.*, **578** (2012), 241-254.

[31] Totik V., Szegő's problem on curves (megjelenik: *Amer. J. Math.*, **135** (2013))

[32] Totik V., The inheritance problem and monotone systems, *Austral. Math. Soc. Gaz.* **33**(2006), 122-130.

[33] Totik V.; Varga T., Non-symmetric fast decreasing polynomials and applications, *J. Math. Anal. Appl.*, **394** (2012), 378-390.

[34] W. Van Assche, Orthogonal Polynomials in the Complex Plane and on the Real Line, *Fields Inst. Commun.Amer. Math. Soc* (1997), 211-245.

[35] Varga T., Uniform spacing of zeros of orthogonal polynomials for locally doubling measures, *Analysis (Munich)*, **33** (2013), 1-12.

[36] Varga T., Christoffel functions for doubling measures on quasismooth curves and arcs, *Acta Math. Hungar.*, **141** (2013), 161-184.

[37] X. Wang, S. Wen, Doubling measures on Cantor sets and their extensions,*Acta Math. Hungar.*, (134), 431–438.