Kísérőhálók tulajdonságai

Takách Géza

DOKTORI (PH. D.) ÉRTEKEZÉS TÉZISEI

SZEGED, 1998

1. Bevezetés

A matematika egyes területeit gyakran aszerint ítélik meg, hogy milyen szoros kapcsolatban állnak más tudományokkal, ill. a matematika egyéb területeivel. A hálóelmélet ilyen szempontból kétféleképpen értékelhető. Egyfelől meglehetősen elvont, hiszen nem a természettudományokhoz, hanem inkább a matematika más, egyébként is absztrakt területeihez kapcsolódik. Másfelől ez a kapcsolat igen széles körű, mert a legtöbb matematikai struktúra mellett kísérőstruktúrák lépnek fel, melyek jelentős része háló. A kísérőhálók bizonyos, a kísért struktúrával kapcsolatos objektumokból állnak, általában részhalmazokból vagy relációkból. Az értekezésben szereplő kísérőhálók elemei részhálók, kongruenciák, részmodulusok, kvázirendezések és alterek. Egy példa erejéig megjelenik egy kísérőcsoport, a hálók automorfizmuscsoportja is.

2. Részhálóhálók

Ha L egy háló, akkor jelölje $\mathrm{Sub}(L)$ L részhálóhálóját. A hálók részhálóhálóinak vizsgálatában először Filippov [Fil66] ért el jelentős eredményeket. Az általa vizsgált kérdés a következő: Milyen kapcsolat áll fenn az L és K hálók között, ha $\mathrm{Sub}(L) \cong \mathrm{Sub}(K)$? Filippov eredményeinek felhasználásával ebben a fejezetben a következő három problémára adunk részleges választ, melyeket Grätzer [Gra78] vetett fel:

I. Milyen feltételeket kell kiróni az L hálóra ahhoz, hogy L-et meghatározza a részhálóhálója, azaz $\mathrm{Sub}(L) \cong \mathrm{Sub}(K)$ esetén $L \cong K$ vagy $L \cong K^d$ teljesüljön? ([Gra78], I.4. Probléma)

II. Milyen hálótulajdonságok öröklődnek a részhálóhálók izomorfiája esetén, tehát mely Φ tulajdonságokra igaz, hogy $\Phi(L)$ és $\mathrm{Sub}(L) \cong \mathrm{Sub}(K)$ esetén $\Phi(K)$? ([Gra78], I.8. Probléma)

III. Mely varietások zártak a részhálóhálók izomorfiájára nézve, azaz mely $\mathcal{V}$ hálóvarietásokra teljesül, hogy $L \in \mathcal{V}$ és $\mathrm{Sub}(L) \cong \mathrm{Sub}(K)$ esetén $K \in \mathcal{V}$? ([Gra78], I.5. Probléma)

Legyen H az L háló egy részhálója. H-t *prímnek* nevezzük, ha $L \setminus H$ is részháló. Ha bármely $x \in L \setminus H$ elemre $x \sigma H$ vagy $x \parallel H$ teljesül, akkor H-t *homogénnek* nevezzük. L egy részhálóját *nemtriviálisnak* mondjuk, ha különbözik L-től és legalább kételemű. Ha H nemtriviális homogén prím részháló L-ben, akkor $L \setminus H = L_<(H) \cup L_>(H) \cup L_\parallel(H) \cup M(H)$, ahol a jobb oldal első három tagja rendre a H elemeinél kisebb, nagyobb, ill. azokkal összehasonlíthatatlan elemek halmaza, továbbá $M(H) = \{x \in L_\sigma(H)\colon h_1 < x < h_2$ valamely $h_1, h_2 \in H$ elemekre$\}$. $M(H)$ pontosan akkor üres, ha H konvex.

A következő tétel az első problémára ad részleges választ a homogén prím részhálók nyelvén. A későbbiekben igen hasznosnak bizonyul majd további feltételek elegendőségének bizonyításakor.

2.1. TÉTEL. ([Fil66]) *Ha az L háló nem tartalmaz nemtriviális homogén prím részhálót, akkor* $\mathrm{Sub}(L)$ *meghatározza L-et.*

Legyen $(I, \leq_I)$ egy lánc és legyenek $(A_i, \leq_i)\,(i \in I)$ tetszőleges hálók. Jelölje A az A_i halmazok diszjunk egyesítését, és értelmezzünk A-n egy $\leq$ részbenrendezést a következőképpen: $x \leq y$ pontosan akkor, ha $x, y \in A_i$ és $x \leq_i y$, vagy $x \in A_i, y \in A_j$ és $i <_I j$. Az így nyert $(A, \leq)$ hálót az A_i hálók *lineáris összegének* nevezzük és $\bigoplus_{i \in I} A_i$-vel jelöljük.
Vegyük észre, hogy ha az L háló lineárisan felbontható, mondjuk $L = \bigoplus_{i \in I} L_i$, akkor minden egyes L_i tag homogén prím részháló L-ben, így a fenti tétel nem alkalmazható. Éppen ezért az első problémákra adott válaszok mindig tartalmazzák azt a feltételt, hogy a háló lineárisanm felbonthatatlan. Az $L = \bigoplus_{i \in I} L_i$ háló L_i lineáris tagjára teljesül, hogy $L_\parallel(L_i) = \emptyset$. Ezzel szemben igaz a következő:

2.2. LEMMA. ([Tak97]) *Ha H egy nemtriviális homogén prím részháló a lineárisan felbonthatatlan L hálóban, akkor $L_\parallel(H) \neq \emptyset$.*

Legyen L egy alulról korlátos háló, $m, n \in M$. Azt mondjuk, hogy n az m *félkomplementuma*, ha $m \wedge n = 0$. L-et *gyengén komplementumosnak* nevezzük, ha tetszőleges $m < k$ elemekre m-nek van olyan félkomplementuma, amely nem félkomplementuma k-nak. Megjegyezzük, hogy a komplementumosságból nem következik a gyenge kompenlementumosság (vö. N_5). Viszont minden szakaszkomplementumos, minden egyértelműen komplementumos és minden alulról korlátos, relatív komplementumos háló gyengén komplementumos.

L-et *pszeudokomplementumosnak* hívjuk, ha minden elemnek van legnagyobb félkomplementuma; L-et *félkomplementumosnak* hívjuk, ha az esetleg létező legnagyobb elemet kivéve minden elemnek van nem 0 félkomplementuma. Egy hálót *erősen atomosnak* nevezünk, ha minden intervallum tartalmaz atomot.

A 2.2 Lemma, valamint a 2.1. Tétel felhasználásával a következő válaszok adhatók az első problémára:

2.3. TÉTEL. ([Tak97], [Fil66]) *Ha az L háló teljesíti az alábbi feltételek valamelyikét, akkor L-et meghatározza a részhálóhálója.*

(1) L lineárisan felbonthatalan moduláris háló;

(2) L relatív komplementumos háló;

(3) L lineárisan felbonthatatlan, gyengén komplementumos háló;

(4) L lineárisan felbonthatatlan, féligmoduláris, erősen atomos háló;

(5) L direkt felbontható.

Az (1) és (2) feltételek Filippov nevéhez fűződnek, (3) és (4) pedig az alábbi feltételek gyengítései:

2.4. KÖVETKEZMÉNY. ([CKT84], [Fil66]) *Ha az L háló teljesíti az alábbi feltételek valamelyikét, akkor L-et meghatározza a részhálóhálója.*

(A) L szakaszkomplementumos háló;

(B) L egyértelműen komplementumos háló;

(C) L komplemenetumos moduláris háló;

(D) L lineárisan felbonthatatlan féligmoduláris, véges magasságú háló.

A következő lemma a konvex homogén prím részhálók által generált kongruenciákat írja le.

2.5. LEMMA. ([Tak98]) *Ha H egy nemtriviális konvex homogén prím részháló az L hálóban, akkor a H által generált $\theta(H)$ kongruencia egyetlen nemtriviális osztálya H.*

A 2.5. Lemmából és a 2.1 Tételből egy újabb feltétel adódik:

2.6. TÉTEL. ([Tak98]) *Az egyszerű hálókat meghatározza a részhálóhálójuk.*

A továbbiakban szükségünk lesz a részhálóhálók izomorfiájának leírására. Ehhez bizonyos transzformációkat értelmezünk homogén prím részhálókal rendelkező hálókon.

Igazolható, hogy ha H egy konvex homogén prim részháló az L hálóban, akkor H és $L/\theta(H)$ meghatározza H-t. Ez módot ad arra, hogy értelmezzük H-nak egy másik, H' hálóra való kicserélését, s ezzel egy konvex homogén prím részháló dualizálását ill. lineáris tagjainak permutálását is. Filippov igazolta, hogy ha L véges és $\mathrm{Sub}(L) \cong \mathrm{Sub}(K)$, akkor K megkapható L-ből konvex homogén prím részhálók dualizálásával és lineáris tagjaik permutálásával. A végtelen eset leírására itt helyszűke miatt nem térünk ki.

Az egyszerű hálók természetes általánosításaként szubdirekt felbonhatatlan hálókat tekintünk. Itt már előfordulhat, hogy egy hálót nem határoz meg a részhálóhálója. Teljesül viszont a következő tétel, melyet a harmadik problémával kapcsolatban is felhasználunk majd.

2.7. TÉTEL. ([Taka]) *Az önduális, szubdirekt felbonthatatlan, lokálisan véges magasságú hálókat meghatározza a részhálóhálójuk.*

Lampe [Lam72] nevezetes tétele szerint az algebrák három kísérőstruktúrája, a részhálóháló, a kongruenciaháló és az automorfizmuscsoport független egymástól. Hálók esetében a kongruenciaháló és az automorfizmuscsoport függetlenségére vonatkozó eredmények ismertek: Baranskiĭ [Bar79] és Urquhart [Urq78] igazolták, hogy tetszőleges L_c legalább kételemű, véges disztributív hálóra és tetszőleges G véges csoportra létezik egy olyan L véges háló, melyre $\mathrm{Con}(L) \cong L_c$ és $\mathrm{Aut}(L) \cong G$. További általánosításokat ad Grätzer és Schmidt [GS,GS95].

Ezzel szemben a részhálóháló nem független a másik két kísérőstruktúrától, hisz $\mathrm{Sub}(L)$ számos esetben meghatározza L-et, és így $\mathrm{Con}(L)$-et és $\mathrm{Aut}(L)$-et is. A következő tétel szerint a részhálóháló és a kongruenciaháló nagyon is szoros kapcsolatban áll.

2.8. TÉTEL. ([Takb]) *Ha L véges magasságú háló, akkor* $\mathrm{Sub}(L)$ *meghatározza* $\mathrm{Con}(L)$*-et.*

Ez tekinthető a második problémára adott válasznak is. Definiáljunk ugyanis minden egyes A hálóra egy Φ_A tulajdonságot a következőképpen:

$$\Phi_A(X) \iff \mathrm{Con}(X) \cong \mathrm{Con}(A).$$

A fenti eredmény ekkor úgy is fogalmazható, hogy a Φ_A tulajdonságok öröklődnek a részhálóhálók izomorfiája esetén.

A bizonyítás kulcsa az, hogy ha H korlátos, konvex homogén prím részháló az L hálóban, akkor H és L^* kongruenciahálói meghatározzák L kongruenciahálóját, ahol $L^* = (L \setminus H) \cup \{0_H, 1_H\}$, L egy részhálója.

A tétel nem élesíthető: $\mathrm{Sub}(\mathbf{Z})$ nem határozza meg $\mathrm{Con}(\mathbf{Z})$-t, ahol $\mathbf{Z}$ az egész számok láncát jelöli. Szintén ellenpéldával igazolható, hogy a részhálóháló nem határozza meg az automorfizmuscsoportot a véges esetben sem.

A 2.8. Tétel alapján nyilvánvaló, hogy a véges magasságú hálók körében a szubdirekt felbonthatatlanság öröklődik a részhálóhálók izomorfiája esetén. Másrészt a 2.7. Tétel alapján az önduális, szubdirekt irreducibilis, lokálisan véges magasságú hálókat meghatározza a részhálóhálójuk, így a szubdirekt irreducibilitás ebben az osztályban is öröklődik. Az összes hálók körében ez már nem teljesül.

A harmadik problémával kapcsolatban korábban csak a triviális varietások, továbbá a moduláris és a disztributív hálók varietásainak zártsága volt ismert [Fil66]. A következőkben jellemezzük a moduláris varietások közül a zártakat. A vizsgálatokat általánosabban, kvázivarietásokra végezzük, tehát olyan osztályokra, amelyek Horn-formulákkal definiálhatóak. Horn-formulán egy

$$\psi: \quad \bigwedge_{i=1}^{n} p_i = q_i \implies p = q$$

alakú formulát értünk, ahol p_i, q_i, p, q hálókifejezések.

A moduláris hálók részhálóhálói izomorfiájának leírásából azonnal adódik a következő lemma.

2.9. LEMMA. ([Tak98]) *Tegyük fel, hogy Φ egy önduális hálótulajdonság, mely implikálja a modularitást. Ha*

$$(\forall i \in I\colon \Phi(A_i)) \iff \Phi\left(\bigoplus_{i\in I} A_i\right),$$

akkor Φ öröklődik a részhálóhálók izomorfiája esetén.

Mivel a nemtriviális Horn-formulák ilyen tulajdonságokat definiálnak, ezért nyerjük az alábbit:

2.10. TÉTEL. ([Tak98]) *Legyen L és K két moduláris háló, melyekre* $\mathrm{Sub}(L) \cong \mathrm{Sub}(K)$, *és legyen ψ egy önduális Horn-formula. Ha ψ teljesül L-ben, akkor teljesül K-ban is.*

Megjegyzés. Ha ψ nem-önduális Horn-formula, akkor ψ nem őrződik meg az általánosabb értelemben sem. Valóban, legyen A egy háló, amelyben ψ teljesül, de A^d-ban nem teljesül. Ekkor $\mathrm{Sub}(A\oplus A) \cong \mathrm{Sub}(A\oplus A^d)$, ψ teljesül $A\oplus A$-ban, de nem teljesül $A \oplus A^d$-ban, s ez utóbbi önduális háló.

2.11. KÖVETKEZMÉNY. ([Tak98]) *Egy kvázivarietás, mely része a moduláris hálók varietásának, pontosan akkor zárt a részhálóhálók izomorfiájára nézve, ha önduális.*

A nemmoduláris varietások esetén már bonyolultabb a helyzet: példát adunk zárt és nem zárt önduális varietásra is.

A fejezet hátralévő részében azt vizsgáljuk, hogy hogyan olvashatók le L-ről $\mathrm{Sub}(L)$ egyes tulajdonságai. A részhálóhálók általában igen kevés "szép" tulajdonsággal rendelkeznek: $\mathrm{Sub}(L)$ modularitása, disztributivitása, komplementumossága mind azzal ekvivalens, hogy L lánc (ld. Koh [Koh73]).

A következő állítás három további tulajdonság leírását adja.

2.12. ÁLLÍTÁS. *Tetszőleges L hálóra* Sub(L) *félkomplementumos és gyengén komplementumos. Egy L háló részhálóhálója pontosan akkor pszeudokomplementumos, ha L lánc.*

A duális pszeudokomplementumosság leírása nem ismert, a másik két tulajdonság duálisait a véges magasságú hálók részhálóhálóira vonatkozóan jellemezük.

2.13. TÉTEL. *Legyen L egy véges magasságú háló.* Sub(L) *ponosan akkor duálisan félkomplementumos ill. duálisan gyengén komplementumos, ha L lánc.*

A következő állítás azt mutatja, hogy nincs a részhálóhálók duális félkomplementumosságát bizonyos részhálók kizárásával, ill. azonosságokkal vagy Horn-formulákkal leíró szükséges feltétel sem.

2.14. ÁLLÍTÁS. *Legyen K egy tetszőleges háló, C pedig egy felső és alsó korlát nélküli lánc. Ekkor az $L = C \times K$ háló duálisan félkomplementumos.*

3. Részmodulushálók dualitása

[CT] alapján elemi bizonyítást adunk Hutchinson dualitástételére, amely szerint egy rögzített R gyűrű feletti modulusok részmodulushálóinak osztálya önduális varietást generál.

Ebben a fejezetben R mindvégig egységelemes gyűrűt jelöl, az egységelem $1 = 1_R$. R–**Mod** jelöli az R feletti baloldali modulusok osztályát, $T(R)$ pedig azon hálóazonosságok halmazát, amelyek teljesülnek minden R-modulus részmodulushálójában, azaz a $\{\mathrm{Sub}(M)\colon M \in R\text{–}\mathbf{Mod}\}$ osztályban. Az Abel-féle kategóriák elméletének és [HC78] 4. Tételének felhasználásával Hutchinson [Hut73,HC78] igazolta a következő tételt.

3.1. TÉTEL. (Hutchinson [Hut73,HC78]) *Tetszőleges R egységelemes gyűrűre $T(R)$ hálóazonosságok egy önduális halmaza. Másképpen fogalmazva: egy λ hálóazonosság pontosan akkor teljesül a $\{\mathrm{Sub}(M)\colon M \in R\text{–}\mathbf{Mod}\}$ osztályban, ha λ duálisa is teljesül.*

A tételre adott új, elemi bizonyítás nem él a kategóriaelmélet eszközeivel, és sokkal kevésbé támaszkodik [HC78]-ra, mint az eredeti bizonyítás. A [HC78]-ból átvett részeket – akár csak [CT]-ben – bizonyítással együtt közöljük. (Mivel az eredetinél gyengébb állítás is elég a jelen célokra, a bizonyítások egyszerűsödnek.) Többször is felhasználjuk majd Frobenius [Fro79] (ld. még [HC78]) klasszikus mátrixdiagonalizációs módszerét, melynek segítségével tetszőleges $\mathbf{Z}$ feletti A mátrixhoz találhatóak olyan $\mathbf{Z}$ feletti invertálható B és C mátrixok, hogy B^{-1} és C^{-1} elemei is egészek, valamint BAC diagonális.

Ha $m \geq 0$ és $n \geq 1$ egészek, akkor jelölje $D(m,n)$ a következő "*oszthatósági feltételt*": $(\exists x)(mx = n \cdot 1)$, ahol $mx = x + \ldots + x$ (m tagú összeg) és 1 a gyűrű egységeleme. Az $\{(m,n)\colon m \geq 0,\ n \geq 1,$ és $D(m,n)$ teljesül R-ben$\}$ halmazt $D(R)$-rel jelöljük. A következő lemma szerint az oszthatósági feltételek igen szoros kapcsolatban állnak a részmodulushálók azonosságelméletével.

3.2. LEMMA. (Hutchinson és Czédli [HC78]) *Tetszőleges R gyűrűre $D(R)$ meghatározza $T(R)$-et, azaz $D(R_1) = D(R_2)$ esetén $T(R_1) = T(R_2)$.*

Ha $k > 0$, akkor jelölje $\mathbf{Z}_k$ az egész számok $\mathbf{Z}$ gyűrűjének modulo k vett faktorgyűrűjét, és legyen $\mathbf{Z}_0 = \mathbf{Q}$, a racionális számok teste. Az alábbi lemma azt mutatja, hogy a $\mathbf{Z}_k$, $k \geq 0$ gyűrűknek kiemelt szerep jut az oszthatósági feltételek vizsgálatakor, s így a részmodulushálók azonosságelméletében is.

3.3. LEMMA. ([CT]) *Tetszőleges R gyűrűre*

$$D(R) = \bigcap_{D(R)\subseteq D(\mathbf{Z}_k)} D(\mathbf{Z}_k).$$

Ha $k \geq 0$ és $t > 0$, akkor $\mathbf{Z}_k^t$-t természetes módon $\mathbf{Z}_k$-modulusnak tekinthetjük. (Valójában $\mathbf{Z}_k^t$ a t elem által szabadon generált $\mathbf{Z}_k$-modulus.) A következő lemma szerint ezen modulusok részmodulushálói önduálisak.

3.4. LEMMA. ([CT]) *Ha $k \geq 0$, akkor* $\mathrm{Sub}(\mathbf{Z}_k^t)$ *önduális háló.*

A 3.3. Lemmából adódik, hogy $T(R)$ néhány $T(\mathbf{Z}_k)$ metszete, így a tétel bizonyításához elegendő belátni, hogy $T(\mathbf{Z}_k)$ minden $k \geq 0$ esetén önduális azonossághalmaz, ez pedig következik a 3.4. Lemmából.

4. Kvázirendezéshálók generálása

[Tak96a] alapján bebizonyítjuk, hogy egy legalább háromelemű halmaz összes kvázirendezésének teljes involúcióhálója három elemmel generálható, ha nincs a halmaz számosságánál kisebb vagy azzal egyenlő elérhetetlen számosság.

Legyen adva egy A halmaz, és jelölje $\mathrm{Quord}(A)$ az A halmaz kvázirendezéseinek, azaz reflexív és tranzitív relációinak halmazát, $\mathrm{Equ}(A)$ pedig az A halmaz ekvivalenciarelációinak halmazát. Mind $\mathrm{Quord}(A)$, mind $\mathrm{Equ}(A)$ algebrai hálót alkot a halmazelméleti tartalmazásra nézve.

(Teljes) involúcióhálón egy * egyváltozós művelettel ellátott (teljes) hálót értünk, ahol * a háló redukt involutív automorfizmusa. Tehát $(L; \vee, \wedge, ^*)$ (teljes) involúcióháló, ha $(L; \vee, \wedge)$ (teljes) háló, továbbá $(x \vee y)^* = x^* \vee y^*$, $(x \wedge y)^* = x^* \wedge y^*$ és $x^{**} = x$ teljesül minden $x, y \in L$ elemre. A legtipikisabb példa $\mathrm{Quord}(A)$, ahol egy $\alpha \in \mathrm{Quord}(A)$ kvázirendezésre $\alpha^* = \{(x, y) \in A^2 \colon (y, x) \in \alpha\}$. Ebben a fejezetben $\mathrm{Quord}(A)$-t mindig teljes involúcióhálóként tekintjük.

Strietz [Str75,Str77] és Zádori [Zad86] bebizonyították, hogy $4 < |A| < \infty$ esetén $\mathrm{Equ}(A)$ négy elemmel generálható. Zádori módszerének továbbfejlesztésével Chajda és Czédli [CC96] igazolták, hogy véges és bizonyos végtelen A halmazokra $\mathrm{Quord}(A)$-nak van háromelemű generátorrendszere. Ez megnyitotta az utat a végtelen alaphalmazú ekvivalenciahálók vizsgálatához: Czédli [Cze96] megmutatta, hogy

Equ(A) 4-generálható, ha nem létezik $|A|$-nál kisebb vagy azzal egyenlő elérhetetlen számosság. Természetesen végtelen halmazok esetén Equ(A)-t (és Quord(A)-t is) teljes (involúció)hálóként, vagyis végtelen változós műveletetekkel tekintjük. [CC96] és [Cze96] módszereinek ötvözésével igazoljuk, a következő tételt:

4.1. TÉTEL. *Legyen A egy olyan halmaz, hogy $3 \leq |A|$, és nincs olyan m elérhetetlen számosság, hogy $m \leq |A|$. Ekkor Quord(A), mint teljes involúcióháló, három elemmel generálható. Ez a három elem választható részbenrendezésnek is.*

Megjegyzések. 1. Kuratowski [Kur25] (lásd még Levy [Lev79]) megadta a ZFC axiómarendszer egy olyan modelljét, amelyben nincsenek elérhetetlen számosságok. Ebben a modellben a tétel állítása minden halmazra teljesül.

2. [CC96] szerint Quord(A) nem generálható két elemmel, ha $|A| = 3, 4$, és az sejtjük, hogy ez minden legalább háromelemű A halmazra igaz.

A bizonyítás transzfinit indukcióval történik, de a tétel állítása ebben a formában nem alkalmas indukciós hipotézisnek. Ezért egy ún. doboz struktúrát építünk fel az A halmazon, és ennek a struktúrának a tulajdonságaival tesszük kellően erőssé az indukciós feltételt. A tömörebb tárgyalási mód kedvéért [Tak96a]-ban bevezettük a féldoboz fogalmát is. Ezt később Czédli [Cze]-ban ekvivalenciahálókra is alkalmazta.

5. Projektív geometriák és hálóazonosságok

Ebben a fejezetben a projektív geometria záródási tételeihez keresünk olyan hálóazonosságokat, amelyek pontosan akkor teljesülnek egy projektív geometria altérhálójában, ha a geometriában teljesül a megfelelő záródási tétel. A legismertebb ilyen azonosságok Jónsson [Jon53] Desargues-azonossága és Day [Day81] Papposz-azonossága. Azon túl, hogy ezek az azonosságok geometriai tételek algebrai megfelelői, számos más algebrai alkalmazással is bírnak. A Desargues-azonosság pl. alkalmas a normálosztóhálók és a moduláris hálók osztályának megkülönböztetésére.

A Desargues-, Papposz-, Fano- és Moufang-tétel mellett két továbbit tekintünk: a harmónikus pontnégyesek tételét, ill. a Papposz-tétel perspektív változatát.

Ismert, hogy a valós projektív síkon egy harmónikus pontnégyes három pontja egyértelműen meghatározza a negyediket, sőt, az egyszerűen szerkeszthető (ld. pl. [Pic75]). Ezen szerkesztés egyértelműségét állítja harmónikus pontnégyesek tétele, másképpen a teljes négyoldal tétel.

HARMÓNIKUS PONTNÉGYESEK TÉTELE. Tetszőleges l egyenesre és a, b, c, p, q, p', q' pontokra, valahányszor $a, b, c \leq l$, $a \neq c$, $p, q, p', q' \not\leq l$, $p \neq q$, $p' \neq q'$ és $b \leq p + q, p' + q'$, mindannyiszor $(r + s)(r' + s') \leq l$, ahol $s = (a + p)(c + q), r = (a + q)(c + p), s' = (a + p')(c + q'), r' = (a + q')(c + p')$.

Azon geometriákat, ahol ez a tétel teljesül, harmonikus geometriáknak nevezzük.

5.1. TÉTEL. ([Tak96b]) *Egy* Π *projektív geometria pontosan akkor harmónikus, ha altérhálójában teljesül az*

$$(a+c)(p+q)(p'+q') \leq a+(r+s)(r'+s')$$

azonosság.

Jól ismert, hogy a Papposz-tétel nem következik a Desargues-tételből. Az alábbi gyengébb változata azonban már igen.

PERSPEKTÍV PAPPOSZ-TÉTEL (Kerékjártó [Ker63]). Legyen a és b két különböző egyenes, és legyenek a_0, a_1, a_2, ill. b_0, b_1, b_2 az ab ponttól és egymástól páronként különböző pontok az a ill. b egyenesen. Ha az a_0+b_0, az a_1+b_1 és az a_2+b_2 egyenesek egy közös ponton haladnak át, akkor az $(a_0+b_1)(a_1+b_0)$, az $(a_0+b_2)(a_2+b_0)$ és az $(a_1+b_2)(a_2+b_1)$ pontok kollineárisak.

5.2. LEMMA. ([Tak96b]) *Egy* Π *projektív sík pontosan akkor perspektív Papposzi, ha tetszőleges* $a, b, c, x, y \in L^{\Pi}$ *egyenesekre* $ac \leq b$ *esetén teljesül a* $B \leq J$ *egyenlőtlenség, ahol*

$$B = (ax+cy)(ay+cx)(bx+ay+cy)(by+ax+cx), \tag{1}$$

$$J = (ax+by)(ay+bx)+(cx+by)(cy+bx). \tag{2}$$

Ahhoz, hogy az "a, b, c, x, y egyenesek" feltételt elhagyhassuk, szükségünk van egy projektív konfigurációra, amelynek segítségével a "négy általános helyzetű egyenes" feltétel fogalmazható meg.

5.3. DEFINÍCIÓ. Legyen L egy moduláris háló. Egy $(a_0, a_1, b_0, b_1) \in L^4$ négyest duális egyenespárnak nevezzük, ha

$$a_0 + b_0b_1 = a_1 + b_0b_1 = b_0 + a_0a_1 = b_1 + a_0a_1.$$

Mivel ez a definíció az egyenespár konfiguráció [Day81]-beli definíciójának duálisa, ezért az ottani lemmák duálisait használhatjuk az alábbi tétel bizonyításában.

5.4. TÉTEL. ([Tak96b]) *Egy* Π *projektív síkon pontosan akkor teljesül a perspektív Papposz-tétel, ha a sík* L^{Π} *altérhálója kielégíti az*

$$(LP^d(x,y,a,c) \;\&\; ac \leq b) \Longrightarrow B \leq J \tag{3}$$

azonosságot, ahol B *ill.* J *az (1) ill. (2) formulában definiált kifejezések.*

Megjegyzés. A (3) Horn-formula a duális egyenespár konfiguráció projektív volta miatt ekvivalens egy valódi azonossággal.

Mivel a záródási tételek számos feltételt tartalmaznak arra vonatkozóan, hogy a fellépő pontok és egyenesek nem egyeznek meg, ill. bizonyos illeszkedési viszonyok nem állnak fenn, ezért a geometriai implikációk vizsgálata szövevényes esetszétválasztáshoz vezethet. Seidenberg [Sei76] rámutat, hogy ennek következtében a Hessenberg-tétel (Papposz $\Longrightarrow$ Desargues) több hiányos bizonyítása is napvilágot látott. Ezért is lehet igen hasznos a geometriai tulajdonságok átfogalmazása az algebra nyelvére. Illusztrációként igazoljuk a következő implikációkat.

5.5. ÁLLÍTÁS. *A harmónikus azonosság következik a Fano-azonosságból a moduláris hálók osztályában. A harmónikus azonosság következik a Desargues-azonosságból a komplementumos moduláris hálók körében.*

Day [Day80] (ld. még Herrmann [Her95], 7. szakasz problémái) felveti a kérdést, hogy vajon minden Papposzi, ill. minden gyémánt Papposzi moduláris háló Desargues-féle. A kérdés második felére a válasz negatív.

5.6. ÁLLÍTÁS. *A Desargues-azonosság nem következik a gyémánt Papposz-azonosságból a moduláris hálók körében.*

Az ellenpéldát két Papposz-féle sík altérhálójának "rossz" ragasztásával nyerjük.

6. A vizsgálatok módszerei és az eredmények hasznosítása

A vizsgálatok során általában az algebrában megszokott módszereket alkalmaztuk. Czédli számítógépen megvalósított algoritmusainak[1] segítségével vizsgáltuk az ötödik fejezet hálóazonosságait. Az 5.5. Állítás bizonyítását Czédli [Cze91] algoritmusának megfelelő módosításával sikerült megtalálni.

A 4. fejezetben definiált féldoboz struktúra és a féldobozok kiterjesztéseire vonatkozó lemmákat Czédli [Cze] felhasználta, s várhatóak további alkalmazások is. A 2.3. és 2.6. Tételek bizonyítási módszerei, azaz a 2.1. Tétel és a 2.2. Lemma kombinálása elvileg még számos további feltétel elegendőségének igazolását teszi lehetővé a 2. fejezet első problémájával kapcsolatban.

Irodalom

[Bar79] V.I. Baranskiĭ. On the independence of the automorphism group and the congruence lattice. *Abstracts of lectures of the 15th All-Soviet Algebraic Conference, Krasnojarsk*, 11. o., 1979.

[CC96] I. Chajda and G. Czédli. How to generate the involution lattice of quasiorders? *Studia Sci. Math. (Budapest)*, 32: 415–427, 1996.

[CKT84] C.C. Chen, K.M. Koh, and K.L. Teo. On the sublattice-lattice of a lattice. *Algebra Universalis*, 19: 61–73, 1984.

[CT] G. Czédli and G. Takách. On duality of submodule lattices. *Discussiones Mathematicae, ASM*, közlésre benyújtva.

[Cze] G. Czédli. (1+1+2)-generated equivalence lattices. *J. of Algebra*, közlésre benyújtva.

[1] A programok megtalálhatóak a `http://www.math.u-szeged.hu/tagok/czedli` web-oldalon.

[Cze91] G. Czédli. On word problem of lattices with the help of graphs. *Period. Math. Hung.*, 23: 49–58, 1991.

[Cze96] G. Czédli. Four generated large equivalence lattices. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 62: 47–69, 1996.

[Day80] A. Day. Equational theories of projective geometries. *Contributions to Lattice Theory, Coll. Math. Soc. J. Bolyai, Szeged, vol. 33*, 277–316 o., 1980.

[Day81] A. Day. In search of a Pappian lattice identity. *Canad. Math. Bull.*, 24: 187–198, 1981.

[Fil66] N.D. Filippov. Projection of lattices. *Math. Sb.*, 70 (112): 36–54, 1966. (Orosz nyelven) Angol fordítás: *Amer. Math. Soc. Transl.* (2) 96: 37–58, 1970.

[Fro79] G. Frobenius. Theorie der linearen Formen mit ganzen Coefficienten. *J. reine und angewandte Math.*, 86: 146–208, 1879.

[Gra78] G. Grätzer. *General lattice theory.* Birkhäuser Verlag, Basel, 1978.

[GS] G. Grätzer and E.T. Schmidt. On the independence theorem of related structures of modular (arguesian) lattices. *Studia Sci. Math. (Hungary)*, közlésre benyújtva.

[GS95] G. Grätzer and E.T. Schmidt. The strong independence theorem for automorphism groups and congruence lattices of finite lattices. *Beiträge Algebra Geom.*, 36: 97–108, 1995.

[HC78] G. Hutchinson and G. Czédli. A test for identities satisfied in submodule lattices. *Algebra Universalis*, 8: 269–309, 1978.

[Her95] C. Herrmann. Alan Day's work on modular and Arguesian lattices. *Algebra Universalis*, 34: 35–60, 1995.

[Hut73] G. Hutchinson. On classes of lattices representable by modules. *Proc. University of Houston Lattice Theory Conference, Houston*, 69–94 o., 1973.

[Jon53] B. Jónsson. On the representation of lattices. *Math. Scand.*, 1: 193–206, 1953.

[Ker63] B. Kerékjártó. *Les fondements de la géométrie, Géométrie projective.* Maison d'edition del'Académie des Sciences de Hongrie, 1963.

[Koh73] K. M. Koh. On sublattices of a lattice. *Nanta Math.*, 6: 68–79, 1973.

[Kur25] K. Kuratowski. Sur l'état actuel de l'axiomatique de la theorie des ensembles. *Ann. Soc. Polon. Math.*, 3: 146–147, 1925.

[Lam72] W.A. Lampe. The independence of certain related structures of a universal algebra. IV. The triple is independent. *Algebra Universalis*, 2: 296–302, 1972.

[Lev79] A. Levy. *Basic set theory*. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1979.

[Pic75] G. Pickert. *Projektive Ebenen*. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1975.

[Sei76] A. Seidenberg. Pappus implies Desargues. *Amer. Math. Monthly*, 83: 190–192, 1976.

[Str75] H. Strietz. Finite partition lattices are four-generated. *Proc. Lattice Th. Conf. Ulm*, 257–259 o., 1975.

[Str77] H. Strietz. Über Erzeugendenmengen endlicher Partitionverbände. *Studia Sci. Math. Hungarica*, 12: 1–17, 1977.

[Taka] G. Takách. Notes on sublattice-lattices. *Period. Math. Hungar.*, közlésre elfogadva.

[Takb] G. Takách. On the dependence of related structures of lattices. *Algebra Universalis*, közlésre benyújtva.

[Tak96a] G. Takách. Three-generated quasiorder lattices. *Discussiones Mathematicae, ASM*, 16: 81–98, 1996.

[Tak96b] G. Takách. Two lattice identities for projective geometries. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 62: 71–79, 1996.

[Tak97] G. Takách. Lattices characterized by their sublattice-lattices. *Algebra Universalis*, 37: 422–425, 1997.

[Tak98] G. Takách. On the sublattice-lattices of lattices. *Publ. Math. (Debrecen)*, 52: 121–126, 1998.

[Urq78] A. Urquhart. A topological representation theory for lattices. *Algebra Universalis*, 8: 45–58, 1978.

[Zad86] L. Zádori. Generation of finite partition lattices. *Lectures in Universal Algebra, (Proc. Conf. Szeged, 1983)*, 573–586 o., North Holland, Amsterdam - New York, 1986.