

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM  
TERMÉSZETTUDOMÁNYI ÉS INFORMATIKAI KAR  
KÍSÉRLETI FIZIKAI TANSZÉK  
Fizika Doktori Iskola

# Az $1/f$ -zaj időbeli szerkezete és a zajanalízis alkalmazásai

Doktori értekezés

Készítette:  
**Mingesz Róbert**

Témavezető:  
**Dr Gingl Zoltán**  
egyetemi docens

SZEGED  
2008

# Tartalomjegyzék

<b>1. Bevezetés</b>	<b>3</b>
<b>2. Irodalmi áttekintés</b>	<b>7</b>
2.1. Véletlen folyamatok kezelése és leírása . . . . .	7
2.1.1. A valószínűségszámítás alapfogalmai . . . . .	7
2.1.2. Nevezetes valószínűségeloszlások . . . . .	10
2.1.3. Véletlen folyamatok időbeli tulajdonságainak leírása . . . . .	11
2.1.4. Véletlen folyamatok frekvenciatartománybeli leírása . . . . .	12
2.2. Jelek mérése . . . . .	14
2.2.1. A mintavételezéssel kapcsolatos jelenségek . . . . .	15
2.2.2. A mintavételezett jelek spektrális analízise . . . . .	16
2.2.3. Elsőfokú digitális szűrők . . . . .	19
2.3. Véletlen jelek előállítása számítógépeken . . . . .	20
2.4. Zajok típusai . . . . .	23
<b>3. Zajgenerátorok készítése</b>	<b>27</b>
3.1. Analóg elvű zajgenerátorok . . . . .	27
3.2. Digitális zajgenerátorok . . . . .	29
3.3. $1/f^\alpha$ -zajok előállítása digitális szűrőkkel . . . . .	31
3.4. Digitális szűrésen alapuló zajgenerátor hardveres megvalósítása . . . . .	38
<b>4. Az <math>1/f</math>-zajok szintmetszési tulajdonságainak vizsgálata</b>	<b>42</b>
4.1. A szintmetszetek hosszának eloszlása . . . . .	43
4.2. Az $1/f$ -zajok szintmetszeteinek mérése . . . . .	48
4.3. Az $1/f$ -zajok szintmetszetei közötti korreláció . . . . .	50

---

4.4. Elméletek a szintmetszetek statisztikájára . . . . .	52
4.5. Az eredmények rövid összefoglalása . . . . .	57
<b>5. A zajanalízis alkalmazásai</b>	<b>59</b>
5.1. Sztochasztikus rezonancia aperiodikus gerjesztőjelek esetén . . . . .	59
5.1.1. A jel-zaj viszony mérése . . . . .	60
5.1.2. Jel-zaj viszony javulása kettős potenciálvölgy esetén . . . . .	63
5.1.3. Schmitt-trigger és szintmetszészdetektor vizsgálata . . . . .	69
5.1.4. Az eredmények rövid összefoglalása . . . . .	74
5.2. Lézerimpulzusok precíz szinkronizálása jitterzaj segítségével . . . . .	75
5.2.1. A szabályozás megvalósítása . . . . .	76
5.2.2. A szabályozás teljesítménye a rendszerben lévő zaj függvényében . . .	80
5.2.3. Az eredmények rövid összefoglalása . . . . .	83
<b>6. Összefoglalás</b>	<b>84</b>
<b>7. Summary</b>	<b>87</b>
<b>Köszönetnyilvánítás</b>	<b>90</b>
<b>Irodalomjegyzék</b>	<b>91</b>
Az értekezés alapjául szolgáló közlemények . . . . .	91
További közlemények . . . . .	92
Felhasznált irodalom . . . . .	93

# 1. fejezet

## Bevezetés

A természetben előforduló folyamatok nagy részének alapvető tulajdonsága a véletlenszerűség. Ezen folyamatok jövőbeli viselkedését nem tudjuk egyértelműen megjósolni, legfeljebb valószínűségeket fogalmazhatunk meg. Az egyik ok, amiért nem tudjuk előrejelezni a folyamatok egy részének viselkedését az, hogy azok túlságosan is bonyolultak ahhoz, hogy egzaktul leírassuk őket. De még ha fel is írhatnánk a rájuk vonatkozó egyenleteket, a kezdeti paraméterek nem elegendően pontos ismerete lehetetlenné teszi az események követését. A káoszelméletben számos példát találhatunk arra, hogy egy teljesen determinisztikus, akár egyszerű rendszer is, milyen változatos viselkedést mutathat megfelelő körülmények között [15]. A kvantummechanika rámutatott egy másik okra is, ami a fizikai folyamatokba behozza a véletlenszerűséget: a természetben vannak olyan törvények is, melyek kimenetelei nem konkrét értékek, hanem valószínűségeket jelölnek meg. Ez a véletlen pedig nem ismereteink korlátozott voltából ered, hanem a természet egyik alaptulajdonsága [16].

Az előforduló véletlen jelenségek miatt egy fizikai rendszer vizsgálata során mért mennyiségek is folyamatosan ingadoznak. Ezt sokszor a mérést korlátozó tényezőként tartják számon, hiszen a minket érdeklő mennyiségeket e miatt csak becsülni tudjuk. Így számos erőfeszítés irányul arra, hogy hogyan tudnánk kiküszöbölni, vagy legalább csökkenteni a fluktuációk (zajok) hatását. Az utóbbi időben viszont egyre gyakrabban merül fel a zajok esetleges konstruktív szerepe, vagyis az, hogy valamiképp hasznosíthatnánk is a mindenhol előforduló zajokat.

A rendszerből származó zajok magáról a rendszerről szolgáltatnak információkat. Jól tudják ezt az autószerelők is, amikor a motor hangját vizsgálják, és az orvosok is, amikor a sztetoszkóppal hallgatóznak. Míg a „hagyományos” mérés technikában a rendszereket gerjeszteni szoktuk, és vizsgáljuk a rendszer választát, sok esetben a rendszer viselkedésébe nem tudunk beavatkozni, vagy a beavatkozás túl veszélyes lenne. Ilyenkor hasznosak az olyan módszerek, melyek vagy magából a rendszerből jövő véletlenszerű jeleket regisztrálják, vagy az vizsgálják, hogyan válaszol a rendszer az őt érő, tőlünk független gerjesztésekre [17]. Ilyen módszerekkel mérhetjük a reaktorok működését (pl. mérjük a neutronfluxust), előrejelezhetjük az áramkörök meghibásodását [18] vagy különböző gépek állapotát [19].

---

Magát a zajt nem csak információforrásként használhatjuk fel, hanem különböző folyamatokban konstruktív formában is megjelenhetnek. Ilyen technikai alkalmazás például a dithering, mely csökkenti a mintavételezés során keletkező nemlinearitásokat [20]. A ditheringet e mellett számos más területen is alkalmazzák, például a képfeldolgozásban is. Hasonlóan, a sztochasztikus rezonancia esetén is felmerül a zaj konstruktív szerepe.

Ahhoz, hogy kihasználhassuk a zajok analízisében rejlő lehetőségeket, szükségünk van a zajok mélyreható ismeretére. Nem árt, ha megfelelő fizikai és matematikai modellek állnak rendelkezésünkre. Ismernünk kell a zajok alapvető tulajdonságait, és viselkedésüket nemlineáris rendszerekben. E mellett megfelelő módszereket kell kifejlesztenünk a zajok mérésére és feldolgozására, és arra, hogy a véletlenszerű jelekből kinyerjük a szükséges információkat.

A természetben az egyik leggyakrabban előforduló zajtípus az  $1/f$ -zaj. Ennek a zajnak a teljesítménysűrűség-spektruma fordítottan arányos a frekvenciával. Ezt a zajt számos helyen megtalálhatjuk, félvezetők fluktuációjában [21, 22], szupravezetőkben [23], biológia rendszerekben [24], folyók vízszintjének ingadozásában, a közlekedésben [25], gazdasági adatok változásában [26] és számos egyéb helyen is. Az  $1/f$ -zajnak számos olyan tulajdonsága van, amely kiemeli az egyéb zajok közül. Mindezek ellenére még mindig nem rendelkezünk egy olyan univerzális modellel, mely leírná keletkezését, vagy előre megjósolná tulajdonságait.

Munkámnak az egyik célja, hogy az  $1/f$ -zajok időbeli tulajdonságait jobban megismerjem. Dolgozatomban az  $1/f$ , ill. az általánosabb  $1/f^\alpha$ -zajok szintmetszési tulajdonságait vizsgálom.

A zajok szintmetszéseit már korábban is vizsgálták, de csak speciális esetekre: vagy csak a szintmetszetek sűrűségét számolták [27], vagy nem  $1/f$ -zajokat vizsgáltak [28]. Az eredményeket számos területen lehetne alkalmazni, mind a sztochasztikus rezonancia vizsgálatában, mind rendszerek elemzésekor [29]. Munkám során vizsgáltam a különböző  $1/f^\alpha$ -zajok ( $0 \leq \alpha \leq 2$ ) szintmetszeteinek eloszlását és a szintmetszetek közötti korrelációt. Célul tűztem ki azt is, hogy kiegészítsem a korábbi elméleti eredményeket.

Kutatásaim során számos numerikus szimulációt végeztem, mind LabVIEW programozási környezetben [30], mind JAVA-ban írt programok segítségével [31]. Mivel szimulációk során felmerülhetnek számolási pontatlanságok (például differenciálegyenletek megoldásakor), valódi méréseket is végeztem ahol szükségesnek éreztem. Így a modellek helyességét is ellenőrizni tudtam.

Mind a szimulációk, mind a valódi mérések esetén különböző zajgenerátorokat használtam fel, így ezek fejlesztésével és vizsgálatával is foglalkoztam. Meghatározott tulajdonságú véletlen jeleket (zajokat) különböző módokon hozhatunk létre. Ha analóg jelekre van szükségünk, akkor felhasználhatjuk pl. a félvezetőkben keletkező zajokat, a megfelelő spektrális menet eléréséhez pedig szűrőket is alkalmazhatunk. Ezen módszerek hátránya, hogy tulajdonságaikat nehéz az igényeinknek megfelelően hangolni. Digitális jelgenerálással sokkal

---

rugalmasabb jelgenerátorokat hozhatunk létre, természetesen ilyenkor számolnunk kell a numerikus jelgenerálás esetleg felmerülő problémáival. Ilyenek például a megfelelő véletlen számok előállítási nehézségei, a mintavételi tétel okozta korlátok, a szükséges memória és számítási igény valamint a digitális jelek analóg jellé való átalakítása. Dolgozatomban egy digitális jelprocesszoron alapuló analóg zajgenerátor elvét részletezem, elemzem az előforduló problémákat, és azok megoldásait.

A sztochasztikus rezonancia egy olyan jelenségkör, amelyben közvetlenül megfigyelhetjük és pontosan mérhetjük is a zajok konstruktív szerepét. Ezekben az esetekben a rendszerben lévő, vagy a rendszerhez hozzáadott zaj megfelelő mennyisége valamilyen formában optimalizálhatja a rendszer viselkedését. Például lehetővé teszi, hogy egy, a rendszer által egyébként nem érzékelhető jelet a zaj segítségével mégis felfogjunk. Sztochasztikus rezonanciát számos rendszerben figyeltek meg, biológiai [32, 33] és technikai rendszerekben [34] valamint a jégkorszakok váltakozásának magyarázatára is szolgálhat [35, 36].

Korábban a sztochasztikus rezonancia vizsgálata legtöbb esetben periodikus jelekkel történt, viszonylag kevés cikkben tárgyalnak aperiodikus eseteket. Munkám során az utóbbi vizsgálatokat folytattam: aperiodikus jeleket használtam fel olyan nemlineáris rendszerek vizsgálatára, melyben korábban már figyeltek meg sztochasztikus rezonanciát.

A sztochasztikus rezonancia kvantitatív jellemzésére elsősorban a jel-zaj viszonyt, illetve ennek a zaj hatására történő javulását alkalmazzák. A korábbi jel-zaj viszony definíciók sajnos csak periodikus jelekre alkalmazhatók, ezért keresztjeljesítményszűrűség-spektrumot és keresztkorrelációs módszereket használtam. Először megvizsgáltam, hogy ezek a módszerek mennyire feleltethetőek meg a korábbiaknak, majd alkalmaztam azokat az aperiodikus mérésekre.

A zajok konstruktív szerepe egy előzetesen nem várt helyen is felbukkant. Munkatársaim segítségével elkészítettünk egy eszközt, mely egy excimer lézer impulzusainak precíz szinkronizálását vezérli. A feladat az volt, hogy a lézer teljes késleltetését állandó szinten tartsuk, kompenzálva a lézer késleltetésének lassú időbeli driftjét. A feladatot úgy oldottuk meg, hogy egy programozható késleltetést iktattunk a trigger jel és a lézert indító áramkör közé. A megoldást két elem nehezítette: a késleltetés detektálásának viszonylag nagy ablakszélessége, továbbá a lézer véletlenszerű jittere. Azonban, mint utólag kiderült, utóbbi, a szabályozás szempontjából, nem egyértelműen káros. Én a rendszer szabályozó algoritmusát dolgoztam ki és elemeztem a működését, továbbá azt, hogy a kompenzálhatatlan jitter hogyan befolyásolja a szabályozás teljesítményét.

---

Doktori ösztöndíjam alatt számos, a zajokhoz valamilyen formában kapcsolódó területtel foglalkozhattam. Ennek megfelelően a disszertációm is több, egymáshoz kapcsolódó részből áll. Elsőként a dolgozathoz szükséges elméleti háttérrel, az irodalomban elérhető ismereteket részletezem. Ezt követően a zajok létrehozásának módszereivel foglalkozom. A negyedik fejezetben fejtem ki a zajok szintmetszési tulajdonságainak vizsgálatában elért eredményeimet. Az ötödik fejezetben pedig bemutatom, hogy az alap kutatás során szerzett tapasztalatokat milyen formában lehet más területeken is hasznosítani. Elsőként a sztochasztikus rezonancia vizsgálatáról beszélek, majd pedig egy technikai jellegű alkalmazás következik, a lézer szabályozó egységének vizsgálata.

## 2. fejezet

# Irodalmi áttekintés

### 2.1. Véletlen folyamatok kezelése és leírása

A természetben előforduló jelenségeket két fő részre oszthatjuk, determinisztikus és sztochasztikus jelenségekre. Míg determinisztikus jelenségek esetén a rendszer korábbi állapotát ismerve elvileg megadhatjuk egy tetszőleges későbbi állapotát, sztochasztikus jelenségekre ez nem igaz. Sztochasztikus jelenségek esetén csak egy-egy lehetséges végállapot valószínűségét adhatjuk meg, így a folyamatokat a valószínűségelmélet módszereivel [37, 38, 39] tárgyalhatjuk a legmegfelelőbbben. A következőkben röviden összefoglalom a felhasznált ismereteket.

#### 2.1.1. A valószínűségi számítás alapfogalmai

##### Kolmogorov-féle valószínűségi mező

Elemi eseménynek nevezzük egy kísérlet egy lehetséges kimenetelét (jele:  $\omega$ ). Az összes lehetséges elemi eseményből álló halmaz az eseménytér (ennek jele:  $\Omega = \{\omega\}$ ). Eseménynek az eseménytér egy részhalmazát nevezzük ( $A \subseteq \Omega$ ). Az  $A$  esemény a kísérlet lefolytatása után akkor következik be, ha olyan elemi esemény következik be, amely eleme  $A$ -nak. A vizsgált események részhalmazát  $\mathcal{A}$ -val jelöljük ( $\Omega$  részhalmazaiából áll).

Minden egyes eseményhez hozzárendelhetünk egy  $P(A)$  valószínűséget: egy  $A$  esemény tapasztalati valószínűsége azt adja meg, hogy a kísérletek milyen hányadában következik be az  $A$  esemény. Kolmogorov-féle valószínűségi mezőnek nevezzük az  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  hármast.

##### Valószínűségi változó

Valószínűségi változónak a  $\xi : \omega \rightarrow \mathfrak{R}$  leképezést nevezzük (vagyis egy olyan leképezést, amely egy-egy elemi eseményhez egy-egy valós számot rendel). Egy valószínűségi változóról a legtöbb információt az eloszlásfüggvény szolgáltatja, ennek definíciója:

$$F(x) = P([\omega : \xi(\omega) < x]) \tag{2.1}$$



Az eloszlásfüggvény megmondja, hogy a valószínűségi változó milyen valószínűséggel lesz kisebb a megadott korlátnál. Segítségével azt is kiszámolhatjuk, hogy  $\xi$  értéke milyen valószínűséggel esik bele egy tetszőleges  $[a, b)$  intervallumba:

$$P(\{\omega : a \leq \xi(\omega) < b\}) = F(b) - F(a) \quad (2.2)$$

Kétféle valószínűségi változót különböztetünk meg: diszkrét és folytonos (eloszlású) valószínűségi változót. A diszkrét valószínűségi változó legfeljebb megszámlálhatóan végtelen értéket vehet fel, értékei véges vagy végtelen sorozatba rendezhetők. A diszkrét valószínűségi változó jellemzéseként megadhatjuk, hogy lehetséges értékeit milyen valószínűséggel veszi fel, vagyis megadhatjuk az  $x_k$  értékeket és a hozzájuk tartozó  $p_k = P(\{\omega : \xi(\omega) = x_k\})$  valószínűségeket. A  $p_k$  valószínűségekre igaz, hogy összegük eggyel egyenlő:

$$\sum_k p_k = 1 \quad (2.3)$$

A folytonos valószínűségi változó fogalmát úgy fogalmazhatjuk meg egyszerűen, hogy értékei folytonosan kitöltene egy adott intervallumot. Ha egy  $\xi$  valószínűségi változó folytonos, akkor az eloszlásfüggvény a következő alakban írható:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(x') dx' \quad (2.4)$$

A  $p(x)$  függvény a  $\xi$  valószínűségi változó sűrűségfüggvénye, és teljesül a következő:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1, \quad p(x) \geq 0 \quad (2.5)$$

Annak a valószínűsége, hogy egy  $\xi$  folytonos valószínűségi változó egy  $[a, b)$  intervallumba esik, a következő integrállal számolható ki:

$$P(\{\omega : a \leq \xi(\omega) < b\}) = \int_a^b p(x) dx \quad (2.6)$$

### Valószínűségi változók függetlensége

Hétköznapi definíció szerint az A és B események függetlenek, ha az egyik bekövetkezte illetve be nem következte nem befolyásolja a másik bekövetkeztét vagy be nem következettét. A valószínűségszámítás definíciója alapján A és B események teljesen függetlenek, ha:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \quad (2.7)$$

Ehhez hasonlóan két,  $\xi_1$  és  $\xi_2$ , valószínűségi változó teljesen független, ha  $\forall x_1, x_2 \in \mathfrak{R}$  esetén:

$$P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2) = P(\xi_1 < x_1) \cdot P(\xi_2 < x_2) \quad (2.8)$$

Az eloszlásfüggvényt felhasználva a definíció a következő alakú:

$$F(x_1, x_2) = F(x_1) \cdot F(x_2) \quad (2.9)$$

**Valószínűségi változók várható értéke és szórása**

Egy valószínűségi változó sokszor használt tulajdonsága annak várható értéke. Diszkrét valószínűségi változó esetén a következő értéket tekintjük a változó várható értékének:

$$E(\xi) = \sum_i x_i \cdot p_i, \quad (2.10)$$

feltéve, hogy a sor abszolút konvergens, vagyis:  $\sum_i |x_i| \cdot p_i < \infty$ .

Folytonos,  $p(x)$  sűrűségfüggvényű valószínűségi változó esetén a következő integrál adja meg a várható értéket:

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x) dx, \quad (2.11)$$

ha  $E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot p(x) dx$

A várható érték megadja, hogy a valószínűségi változó értékei milyen szint körül ingadoznak, az ingadozás nagyságáról a szórás ad fontos információkat. A szórás definíciója:

$$D(\xi) = \sqrt{E((\xi - E(\xi))^2)} \quad (2.12)$$

Ha több valószínűségi változónk van, összegük várható értékére mindig igaz:

$$E(\xi_1 + \dots + \xi_n) = E(\xi_1) + \dots + E(\xi_n) \quad (2.13)$$

Ha a valószínűségi változók függetlenek, akkor szorzatuk várható értékét a következőképp kaphatjuk meg:

$$E(\xi_1 \cdot \dots \cdot \xi_n) = E(\xi_1) \cdot \dots \cdot E(\xi_n) \quad (2.14)$$

Ha több valószínűségi változónk van, melyek páronként függetlenek, akkor az összegük szórására igaz a következő összefüggés:

$$D^2(\xi_1 + \dots + \xi_n) = D^2(\xi_1) + \dots + D^2(\xi_n) \quad (2.15)$$

Két valószínűségi változó  $(\xi, \eta)$  esetén a következőképp definiálhatjuk kovarianciájukat:

$$\text{cov}(\xi, \eta) = E((\xi - E(\xi)) \cdot (\eta - E(\eta))) \quad (2.16)$$

A kovariancia felhasználásával definiálhatjuk a változók közötti korrelációt  $(r(\xi, \eta))$ , független valószínűségi változók esetén mindkét mennyiség nulla (ugyanakkor a korreláció nulla volta nem jelenti azt, hogy a változók függetlenek egymástól).

$$r(\xi, \eta) = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{D(\xi) \cdot D(\eta)} \quad (2.17)$$

## 2.1.2. Nevezetes valószínűségeloszlások

### Egyenletes eloszlás

$\xi$  folytonos valószínűségi változó egyenletes eloszlású az  $(a, b)$  intervallumon, ha sűrűségfüggvénye:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{ha } a < x < b \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \quad (2.18)$$

A valószínűségi változó várható értéke és szórása:

$$E(\xi) = \frac{a+b}{2}, \quad D^2(\xi) = \frac{(b-a)^2}{12} \quad (2.19)$$

### Geometriai eloszlás

$\xi$  diszkrét valószínűségi változó geometriai eloszlású  $p$  paraméterrel, ha:

$$P(\xi = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p \quad (2.20)$$

Kísérleti előállítása a következő: egy kísérletet addig ismételgetünk, amíg a  $p$  valószínűségű esemény bekövetkezik. A  $\xi$  a szükséges kísérletek száma. A valószínűségi változó várható értéke és szórása:

$$E(\xi) = \frac{1}{p}, \quad D^2 = \frac{\sqrt{1-p}}{p} \quad (2.21)$$

### Centrális határeloszlás tétel

Egy makroszkopikus jelenség fluktuációja általában sok elemi folyamat fluktuációjának összegeként keletkezik. Az így létrejövő véletlenszerű folyamatról árul el egy fontos információt a centrális határeloszlás tétel:

Tegyük fel hogy  $\xi_1, \xi_2 \dots \xi_n$  teljesen független, egyforma eloszlású valószínűségi változók, melyeknek létezik szórása. Ekkor, ha  $n \rightarrow \infty$ , összegük normális eloszlású lesz, függetlenül a korábbi eloszlásfüggvénytől.

### Normális (Gauss) eloszlás

A centrális határeloszlás tétel következtében az egyik leggyakrabban előforduló eloszlás, melynek sűrűségfüggvénye:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} \quad (2.22)$$

A valószínűségi változó várható értéke és szórása:

$$E(\xi) = \mu, \quad D^2(\xi) = \sigma^2 \quad (2.23)$$

### 2.1.3. Véletlen folyamatok időbeli tulajdonságainak leírása

A fizikai folyamatok és mennyiségek többsége időben változik, változnak felvett értékeik, illetve változnak statisztikai tulajdonságaik is. A folyamatokat két csoportra osztjuk, attól függően, hogy statisztikai jellemzőik függenek-e az időtől, mint paramétertől [40]. Egy folyamatot nemstacionáriusnak nevezünk, hogy ha a fellépő valószínűségi változó statisztikai tulajdonságai (pl. eloszlásfüggvénye) függenek az időtől. Ellenkező esetben a folyamatot stacionáriusnak nevezzük. Gyengén stacionáriusnak akkor nevezzük, hogy ha első és másodrendű sűrűségfüggvényei függetlenek az időtől. Ez a tulajdonság hasznos a gyakorlatban, mert könnyebb ellenőrizni, és sokszor elegendő is a szükséges vizsgálatokhoz.

Időfüggő jelek esetén két átlagot különböztetünk meg: az időátlagot és a sokaságátlagot. Sokaságátlag esetén nagyszámú független kísérletet végzünk el, majd egy adott pillanatban megvizsgáljuk a folyamatot jellemző mennyiségeket. Időátlag esetén egyetlen kísérletet vizsgálunk miközben az idő telik. Az időátlag definíciója:

$$\langle U(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T U(t) dt \quad (2.24)$$

Ergodikus folyamatok esetén az időátlag és a sokaságátlag megegyezik:

$$E(U(t)) = \langle U(t) \rangle \quad (2.25)$$

Az ilyen tulajdonságokkal rendelkező folyamatok igen fontosak, hiszen sokszor nem tudunk elegendő számú független kísérletet végezni a sokaságátlagok megfelelő meghatározásához. Az ergodicitás szükséges de nem elegendő feltétele a stacionaritás.

Egy folyamat időbeli tulajdonságairól fontos adatokat árul el annak autokorreláció-függvénye. Ennek definíciója:

$$R_{xx}(t_1, t_2) = E(x(t_1) \cdot x(t_2)) \quad (2.26)$$

Ez a függvény lényegében azt adja meg, hogy a jel  $t_1$ -beli állapotának mennyi köze van a  $t_2$  belső állapotához. Ergodikus jelek esetén gyakrabban alkalmazzák az autokorrelációnak a következő meghatározását:

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) \cdot x(t + \tau) dt \quad (2.27)$$

Szemléletesen ez a függvény azt mutatja meg, hogy egy  $\tau$  idejű eltolás esetén a jel mennyire hasonlít önmagára. Ha egy jel esetén a  $t + \tau$  időpillanatban felvett értéke független attól, hogy milyen értéket vett fel a  $t$  pillanatban, akkor a folyamat korrelálatlan. Korrelálatlan jelek esetén az autokorreláció függvény mindenhol nulla, kivéve a  $\tau = 0$  helyet, ahol megegyezik

a jel négyzetének várható értékével. Periodikus jelek esetén az autokorreláció függvény is periodikus, periódusideje megegyezik a jel periódusidejével.

Két folyamat közötti kölcsönhatást a keresztkorrelációs függvénnyel vizsgálhatjuk. A keresztkorreláció megadja hogy milyen erős kapcsolat van a két folyamat között, ill. azt is, hogy ez a kapcsolat milyen időeltolódással jelentkezik. Definíciója:

$$R_{xy}(t_1, t_2) = E(x(t_1) \cdot y(t_2)), \quad (2.28)$$

ergodikus jelekre pedig:

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) \cdot y(t + \tau) dt \quad (2.29)$$

A korrelációs függvények mellett, a gyakorlatban gyakran használják az auto- és keresztkovariancia függvényeket, továbbá a normalizált korrelációs függvényeket is:

$$C_{xx}(t_1, t_2) = E[x(t_1) - E(x(t_1))] \cdot [x(t_2) - E(x(t_2))] \quad (2.30)$$

$$C_{xy}(t_1, t_2) = E[x(t_1) - E(x(t_1))] \cdot [y(t_2) - E(y(t_2))] \quad (2.31)$$

$$r_{xx}(\tau) = \frac{C_{xx}(\tau)}{C_{xx}(0)} \quad (2.32)$$

$$r_{xy}(\tau) = \frac{C_{xy}(\tau)}{\sqrt{C_{xx}(0)C_{yy}(0)}} \quad (2.33)$$

#### 2.1.4. Véletlen folyamatok frekvenciatartománybeli leírása

Igen sok folyamat vizsgálatánál hasznos, ha nem csak idő, hanem frekvenciatartományban is jellemezni tudjuk. Ez sztochasztikus folyamatok esetén is igaz, még akkor is, ha sokszor futunk nemlineáris, vagy akár nemstacionárius rendszerekbe. Utóbbiak esetén különös figyelmet kell fordítani az eredmények helyes értelmezésére.

Frekvenciatartománybeli jellemzésre igen gyakran használjuk a teljesítménysűrűség-függvényt, mely közvetlenül megadja, hogy egy  $(f, f + df)$  frekvenciasávba mekkora teljesítmény jut. Segítségével az egy frekvenciatartományba jutó teljesítményt a következő integrállal tudjuk kiszámítani:

$$P_{[f_1, f_2]} = \int_{f_1}^{f_2} S(f) df \quad (2.34)$$

A fenti  $S(f)$  mennyiséget egyoldalas teljesítménysűrűség-spektrumnak is nevezik, amely csak nem negatív frekvenciákra van értelmezve. E mellett használatos még a kétoldalas teljesítménysűrűség-spektrum is ( $S_{xx}(f)$ ), mely mind a pozitív, mind a negatív frekvenciatartományban értelmezve van (utóbbi tartomány redundáns). A két függvény között a következő összefüggés áll fenn:

$$S(f) = \begin{cases} 2 \cdot S_{xx}(f) & \text{ha } f \in (0, \infty) \\ S_{xx}(f) & \text{ha } f = 0 \end{cases} \quad (2.35)$$

$$S_{xx}(-f) = S_{xx}(f) \quad (2.36)$$

Ergodikus folyamatok esetén a Wiener-Hincsin-összefüggések adják meg a kapcsolatot a teljesítménysűrűség-spektrum és a autokorreláció között:

$$S_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) \cdot e^{-i \cdot 2\pi \cdot f \cdot \tau} d\tau \quad (2.37)$$

A teljesítménysűrűség-spektrum kiszámolására gyakran az  $F_x(f)$  amplitúdóspektrumot használjuk:

$$S_{xx}(f) = \frac{\overline{F_x(f)} \cdot F_x(f)}{T} = \frac{|F_x(f)|^2}{T}, \quad (2.38)$$

ahol

$$F_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) \cdot e^{-i \cdot 2\pi \cdot f \cdot t} dt \quad (2.39)$$

Két jel közötti kapcsolat frekvenciatartománybeli jellemzésére a keresztjel teljesítménysűrűség-spektrum használható, ennek meghatározása a következő összefüggéssel végezhető:

$$S_{xy}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) \cdot e^{-i \cdot 2\pi \cdot f \cdot \tau} d\tau, \quad (2.40)$$

normálással pedig megkaphatjuk a koherenciafüggvényt is:

$$\Gamma_{xy} = \frac{S_{xy}(f)}{\sqrt{S_{xx}(f)S_{yy}(f)}} \quad (2.41)$$

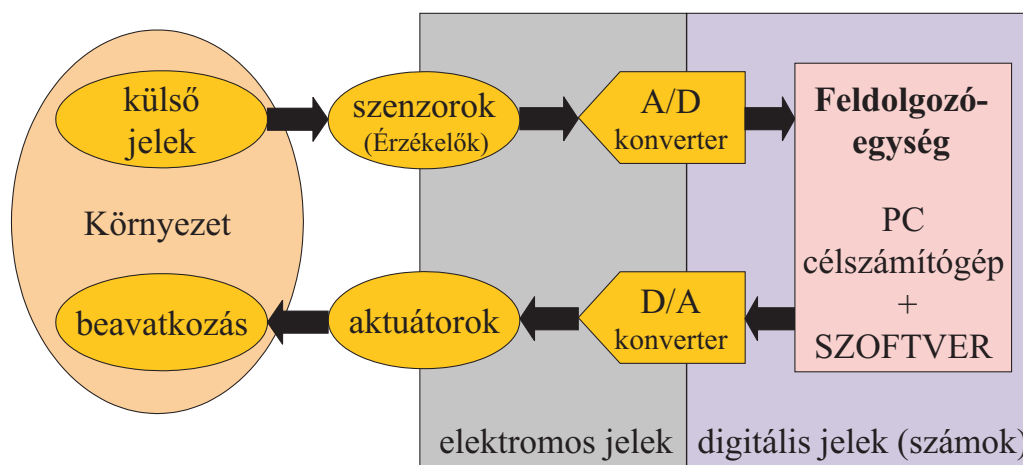
Véletlenszerű jelek vizsgálatakor megfelelő spektrumokat általában csak elegendő számú átglagolás után kaphatunk, ez különösen fontos a koherencia-függvény esetében, különben az eredmény hamis lesz.

## 2.2. Jelek mérése

Az analóg jelek mérésére ma már egyre inkább digitális mérés technikát alkalmaznak, az adatok feldolgozása pedig sokszor számítógéppel (vagy mikroszámítógéppel) történik [40, 41, 42]. Ennek a módszernek számos előnye van. Az egyik legfontosabb, hogy miután digitalizáltuk a jelet, annak minősége a továbbiakban már nem változik, a feldolgozás pontossága és hatékonysága messze felülmúlja az analóg módszerekkel elérhető értéket. További előny, hogy az adatok feldolgozása elsősorban az alkalmazott szoftvertől függ, nem kell mindig új eszközt készíteni az új feladatok elvégzéséhez. Természetesen igen fontos kérdéseket vet fel, hogy milyen hibák léphetnek fel, amikor az eredeti analóg jeleket számokká alakítjuk, és akkor, amikor a digitális jeleket ismét analóg jelekké alakítjuk vissza.

Fizikai mennyiségek mérésénél először a fizikai mennyiséget egy szenzor segítségével elektromos jellé (feszültség, áramerősség, ellenállás) alakítjuk, ezt a jelet a megfelelő kondicionálás után pedig egy analóg-digitál konverter (ADC vagy A/D) segítségével számokká alakítjuk. A konverzió során egy amplitúdóbeli és egy időbeli kvantálás is bekövetkezik, magát a folyamatot pedig mintavételezésnek hívjuk. A mintavételezett, már digitális, jelet ezek után pedig szoftveresen dolgozzuk fel számítógép (vagy célszámítógép) segítségével (lásd a 2.1. ábrát [43]).

A digitális jeleket is vissza tudjuk alakítani fizikai mennyiségekké: először egy digitál-analóg (DAC vagy D/A) konverter segítségével elektromos jelekké alakítjuk, a végeredményt pedig aktuátorok segítségével érzük el.



2.1. ábra. Egy modern műszer működésének blokkvázlata

## 2.2.1. A mintavételezéssel kapcsolatos jelenségek

### Amplitúdóbeli kvantálás

A mintavételezés során a folytonosnak tekintett analóg jelből egy diszkrét értékeket tartalmazó digitális jelet állítunk elő. Ezt hívjuk amplitúdóbeli kvantálásnak, melynek során természetesen információveszteség lép fel. Ez azonban az esetek többségében nem jelent nagy gondot, hiszen a ma alkalmazott 8-24 bites felbontás általában elegendő (problémát legfeljebb a kis változások mérése okozhat). A kvantálás hatását leginkább a kvantálási zajban lehet tetten érni, ennek nagysága csökken a felbontás növelésével. A kvantálás ugyanakkor egy nemlinearitást is bevisz a rendszerbe, mely bizonyos esetekben (pl. ha különböző jelek vannak egymásra keverve, mint a mobil távközlésben) káros lehet. Ilyenkor egy kevés zaj hozzákeverésével lehet az átvitelt linearizálni [20].

### Időbeli kvantálás hatásai és a mintavételi tétel

Az időfüggő analóg jel digitális mérése során bizonyos időközönként mintavételezzük a jelet. Szerencsés, ha biztosítani tudjuk, hogy az egyes mintavételek között eltelt idő azonos legyen. Ha ezt a feltételt nem tudjuk teljesíteni (pl. csillagászatban), akkor a jelek kiértékelése sokkal nehezkesebb, illetve a most bemutatott eszközöknél komolyabb apparátust igényel.

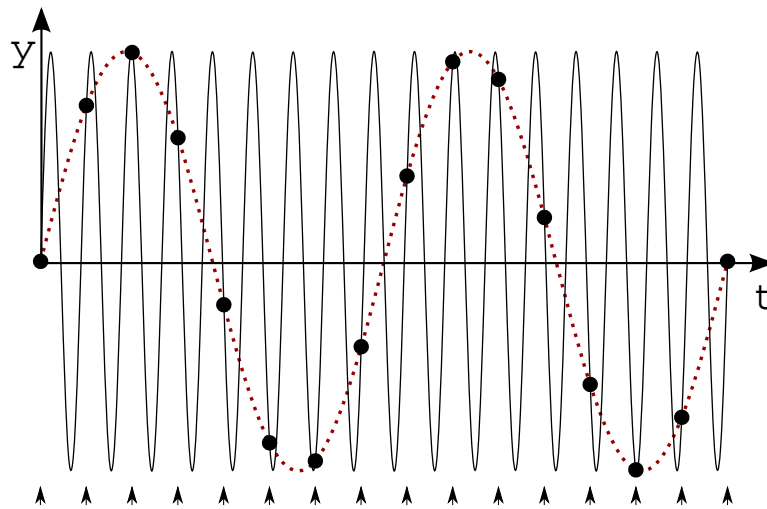
Az egyszerűség kedvéért tekintsük azt az esetet, amikor állandó frekvenciával mintavételezzük. Ezt a frekvenciát hívjuk mintavételi frekvenciának ( $f_s$ ). Felmerülhet a kérdés: milyen információveszteséget okoz az, hogy csak bizonyos időpillanatokban ismerjük a mintavételezett jel értékét. Erről ad információt a mintavételi tétel.

**Mintavételi tétel:** ha a mintavételezett jelben az  $f_s/2$ -nél nem kisebb frekvenciájú komponensek amplitúdója 0, akkor a jelet egyértelműen meghatározzák a  $\Delta t = 1/f_s$  időközönként mintavételezett értékei [40]. Az eredeti jelet a következő képlet alapján lehet rekonstruálni (bármelyik időpillanatban):

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \frac{\sin[\pi f_s(t - k\Delta t)]}{\pi f_s(t - k\Delta t)} \quad (2.42)$$

Ha ezt a tételt nem tudjuk teljesíteni, a következmények meghamisíthatják mérési eredményeinket, a mintavételi frekvencia felénél nagyobb (vagy egyenlő) frekvenciájú komponensek ugyanis leképeződnek a  $[0, f_s/2)$  frekvenciatartományba. Az így megjelenő zavaró jeleket aliasing zajnak hívjuk. A jelenséget 2.2. ábrán szemléltetem, az ábrán látható, hogy a mintavételi frekvenciánál nagyobb frekvenciájú szinuszt ugyancsak egy szinusznak mérjük, amelynek a frekvenciája azonban nem egyezik meg az eredetiével. Néhány speciális esetet leszámítva, az amplitúdója azonban megegyezik az eredeti jel amplitúdójával.





2.2. ábra. A mintavételi tétel megsértésének szemléltetése. A fekete vonal jelöli a mért szinuszos jelet, a kicsi nyilak pedig a mintavétel időpillanatait. Mivel a mintavételi frekvencia nem elég nagy, ezért a mintavételezés során kapott jel nem az eredeti jelnek felel meg, hanem egy jóval kisebb frekvenciájú szinusznak.

Mivel ez a frekvenciatranszformáció determinisztikus, néhány speciális esetben akár a mintavételi frekvencia feletti jelek mérésére is felhasználhatjuk [44], az esetek többségében viszont mintavételi szűrőkkel biztosítjuk a mintavételi tétel betartását. A mintavételi szűrő egy olyan aluláteresztő szűrő, melynek az a feladata, hogy minél inkább elnyomja a mintavételi frekvencia felét elérő, vagy azt meghaladó, frekvenciakomponenseket, miközben a mérendő jelet minél kisebb mértékben torzítja.

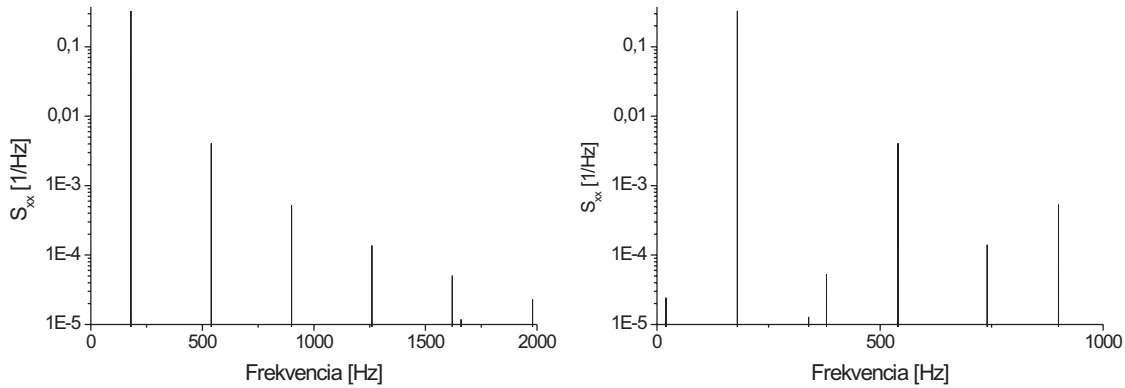
Fontos tudni, hogy a mintavételi tétel megsértése akkor is megtörténhet, ha látszólag nem is mintavételezünk, pl. numerikus szimulációk esetén (2.3. ábra). Egy a számítógép memóriájában előállított négyzöggel egyáltalán nem különbözik attól, amit a mintavételi tétel megsértésével mérünk. További komoly hátrány, hogy amennyiben a jelet már digitalizáltuk, utólag már általában nincs lehetőség az aliasing zaj kiküszöbölésére.

### Analóg jelek előállítása

Sajnos akkor is fel kell készülnünk néhány kellemetlen hatásra, ha digitális jelekből hozunk létre analóg jeleket. Az amplitúdóbeli és időbeli kvantálás hatására a létrehozott jel egy lépcsős jel lesz, mely csak bizonyos értékeket vehet fel. Ha „szép”, folytonos jelet akarunk látni, akkor analóg szűréssel kell próbálkozzunk. További problémát jelenthet, hogy mivel a D/A konverter nem Dirac-impulzusokat állít elő, az eredeti frekvenciamenet egy  $\sin(x)/x$  függvénnyel szorzódik be (3.9. ábra). Ezt a torzítást figyelembe kell venni amikor az előállított jel frekvenciamenete kritikus.

### 2.2.2. A mintavételezett jelek spektrális analízise

A mintavételezés során csak diszkrét időpillanatokban veszünk mintát a jelből, így a mintavételi tételnek megfelelően csak a  $[0, f_s/2)$  frekvenciatartományban kaphatunk valós spekt-



2.3. ábra. A mintavételi tétel megsértésének szemléltetése numerikus szimuláció esetén. Mindkét ábrán egy 180 Hz-nek megfelelő háromszögjel spektruma látható, a baloldalon 4 kHz-es, a jobb oldalon pedig 2 kHz-nek megfelelő „mintavételi” frekvenciával. Látható, hogy kisebb mintavételi frekvencia esetén az 1 kHz feletti csúcsok nem tűnnek el, hanem megjelennek a  $[0, 1 \text{ kHz})$  tartományban.

rumot. Magát a spektrumot tetszőleges frekvencián kiszámolhatjuk ((2.43) egyenlet), ekkor egy periodikus függvényt kaphatunk, melynek a  $[0, f_s/2)$  tartományon kívüli része redundáns.

$$X(f) = \Delta t \sum_{-\infty}^{\infty} x_n \cdot e^{-in2\pi f \Delta t} \quad (2.43)$$

$$x_n = \int_0^{f_s} X(f) \cdot e^{in2\pi f \Delta t} df \quad (2.44)$$

A gyakorlatban a mintavételezés során csak véges adatsort tudunk mérni, vagyis az  $x(t)$  jelből  $N$  darab  $x_i$  adatpontunk lesz. A véges időnek köszönhetően a mért jel spektruma is csak diszkrét pontokban lesz értelmezhető. A folyamat lényegében megfelel annak, mintha a mintánkat periodikusan kiterjesztenénk, így a Fourier-integrálnak egy Fourier-sor fog megfelelni. A véges adathossznak és a mintavételezésnek köszönhetően a spektrum mind diszkrét, mind periodikus lesz. A spektrum kiszámolására a diszkrét Fourier-transzformációt használhatjuk (DFT). Ennek definíciója:

$$X_k = \sum_{j=0}^{N-1} x_j \cdot e^{-i \cdot 2\pi \cdot j \cdot \frac{k}{N}}, \quad (2.45)$$

ahol  $x_j = x(j \cdot \Delta t)$  és  $0 \leq k \leq N - 1$ . Hasonlóan definiálhatjuk az inverz transzformációt is:

$$x_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \cdot e^{i \cdot 2\pi \cdot j \cdot \frac{k}{N}}, \quad (0 \leq j \leq N - 1) \quad (2.46)$$

A DFT eredményeként kapott  $X_k$  komplex vektor tartalmazza a megfelelő frekvenciakomponenseket, ill. a mátrix második felében azok komplex konjugáltját. A frekvencia lépésköze, és ezzel a legkisebb nem DC frekvenciakomponens frekvenciája:

$$\Delta f = \frac{1}{N \cdot \Delta t} \quad (2.47)$$

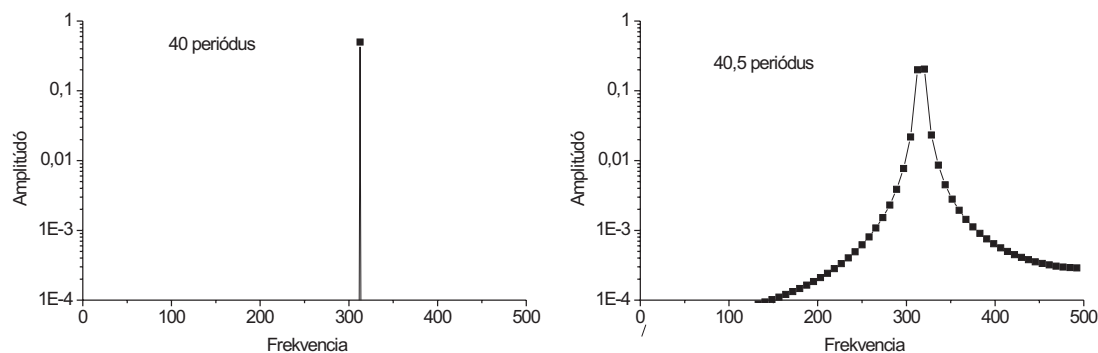
Pontosan ugyanezeket a számolásokat végzi el a gyors Fourier-transzformáció (FFT) is, de a számolási igénye jóval kisebb mint a DFT esetén. Egy fontos megkötés van csak: a minta hossza kettő egész számú hatványa kell legyen. Míg DFT esetén egy számolás  $N^2$  műveleti igényű, addig az FFT esetén  $N \cdot \log_2 N$  nagyságrendű. Ez hosszabb adathalmazok esetén már jelentős különbséget okoz. Az eltérés olyan nagy is lehet, hogy egy nem  $2^n$  nagyságú adatsor esetén még az is kifizetődő, ha újramintavételezzük az egész jelet (interpolálással), hogy teljesítse az FFT kritériumát.

A (2.38) egyenletnek megfelelően a teljesítménysűrűség-spektrumot a következő képlet alapján tudjuk meghatározni:

$$S_{xx}(f) = \frac{\overline{X(f)} \cdot X(f)}{\Delta f} \quad (2.48)$$

A véges adathossznak és a periodikus kiterjesztésnek van sajnos egy kellemetlen következménye is: ha a jelből nem egész számú periódust mérünk, akkor az adatsor szélén egy törés következik be. Ez okozza a spektrális szétfolyás nevű jelenséget (2.4. ábra). Vagyis tiszta szinuszos jel esetén nem csak egy éles csúcsot kapunk, hanem egy kiszélesedett spektrumot. A hatást úgy tudjuk kiküszöbölni, ha biztosítjuk, hogy a vizsgált jel a mérés elején és végén 0 nagyságú legyen. Ez a valóságban nem mindig megoldható, ilyenkor egy ablakfüggvénynek nevezett, a széleken eltűnő, függvénnyel szorozzuk meg az adatsort. Különböző ablakfüggvényeket használhatunk (háromszög-, Hann-, Hamming-, Bartlett-ablak), melyek más és más hatással vannak a spektrumra (a mért értékre, a felbontásra és a teljesítménymérés bizonytalanságára). Fontos tudni, hogy ha nem használunk külön ablakot, az egy négyszögablaknak felel meg.

Zajok mérése esetén, valamint akkor, amikor a jel energiája nem keskeny spektrumvonalakra korlátozódik, el szoktunk tekinteni az ablakfüggvény használatától. Periodikus jelek esetén, ha mi választhatjuk meg a mérés körülményeit, mindenképp érdemes egész számú periódust mérni.



2.4. ábra. A spektrális szétfolyás szemléltetése (négyzög ablak esetén)

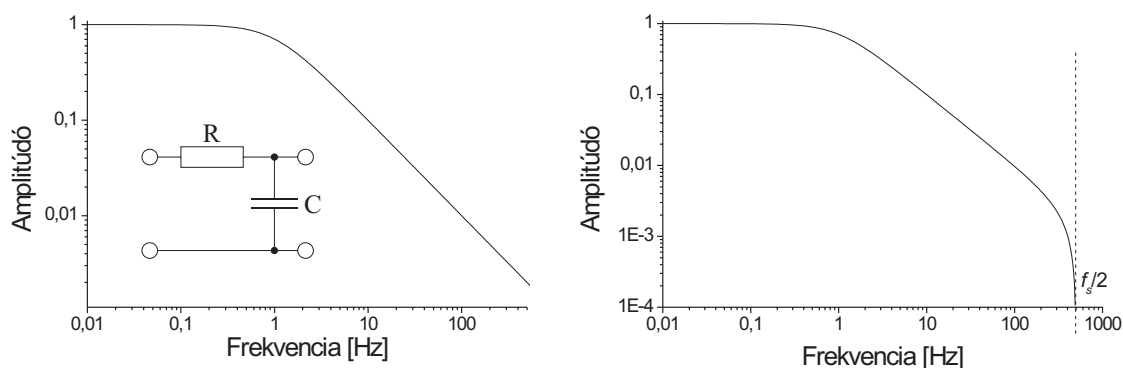
### 2.2.3. Elsőfokú digitális szűrők

Digitális jelek spektrális transzformációjára gyakran használnak digitális szűrőket [42]. Ezek előnye a FFT alapú transzformációkkal szemben, hogy folyamatos adatsorokat tudnak kezelni.

A digitális szűrők az analóg szűrőkhöz hasonló tulajdonságúak, hasonló a karakterisztikájuk. A fő különbség az, hogy a digitális szűrők időben diszkrét jelsorokat alakítanak át. Egy  $x_i$  diszkrét adatsorra egy (elsőfokú, IIR típusú) digitális szűrőt a következő képlet adja meg:

$$y_i = D_1 \cdot x_i + D_0 \cdot x_{i-1} - C_0 \cdot y_{i-1} \quad (2.49)$$

Ez egy rekurzív összefüggés, amely az épp aktuális  $x_i$  adat mellett mind a bemenet korábbi állapotát ( $x_{i-1}$ ), mind a kimenet egy korábbi állapotát ( $y_{i-1}$ ) felhasználja. Utóbbi miatt az egyes tranziensek hatása csak bizonyos idő után fog lecsengeni.



2.5. ábra. Az analóg (balra) és a digitális (jobbra) szűrő karakterisztikájának összehasonlítása. Az ábrán látható eredmények elméleti számolások eredménye, a mintavételi frekvencia 1000 Hz)

Az analóg és a digitális szűrők közötti kapcsolatot a bilineáris Z transzformáció adja meg. A digitális szűrő működési tartományát a mintavételi tétel 0 és  $f_s/2$  frekvenciák közé limitálja. A digitális szűrő frekvenciamenetét megkapjuk a neki megfelelő analóg alakból, ha a

teljes frekvenciatartományt levetítjük a  $(0, f_s/2)$  tartományba, majd a transzformált frekvenciát behelyettesítjük a megfelelő analóg átviteli függvénybe.

A frekvenciatranszformációt a következő egyenlet adja meg:

$$f' = \frac{f_s}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi \cdot f}{f_s}, \quad (2.50)$$

ahol  $f_s$  a mintavételi frekvencia. Ha  $f \rightarrow f_s$  akkor  $f' \rightarrow \infty$ . Ily módon a digitális szűrő átviteli függvénye:

$$a(f) = \frac{A_0}{1 + i \cdot \frac{f'}{f_0}}, \quad f_0 = \frac{f_s}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi \cdot f_0}{f_s}, \quad (2.51)$$

ahol  $f_0$  a digitális szűrő pólus-frekvenciája. Az  $f_0$  pólusfrekvenciájú és  $A_0$  amplitúdójú elsőfokú digitális szűrő (2.49) képletben szereplő paramétereit a következő összefüggésekkel kaphatjuk meg:

$$C_0 = \frac{1-l}{1+l}, \quad D_0 = D_1 = \frac{A_0}{1+l}, \quad (2.52)$$

$$l = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\Omega_s}, \quad \Omega_s = \frac{f_s}{f_0}, \quad (2.53)$$

ahol  $\Omega_s$  a normalizált mintavételi frekvencia. Itt megjegyezném, hogy amíg csak digitális jelekkel foglalkozunk, a mintavételi frekvenciának nincs különösebb szerepe, csak a frekvenciák aránya fontos. A mintavételi frekvencia és a pólusfrekvencia konkrét értékei csak akkor kerülnek előtérbe, ha mintavételezett jelekkel foglalkozunk, vagy más módon kötjük a jelenségeket konkrét fizikai fogalmakhoz.

## 2.3. Véletlen jelek előállítása számítógépeken

A számítógépek alapvetően determinisztikusak, az általuk elvégzett műveletek mindig határozott, megjósolható eredményt adnak. Mégis hogyan tudnánk velük véletlenszerű folyamatokat modellezni, véletlenszerű jeleket (számokat) létrehozni?

Az egyik megoldás az, hogy nem digitális úton, hanem valamilyen fizikai folyamat segítségével állítunk elő véletlen jeleket. Például zajforrásokat kapcsolhatunk a számítógépre és ezeket alakítjuk digitális jelekké, vagy esetleg a felhasználók jeleiből próbálhatunk meg véletlenszerű adatokat kinyerni. Ezeket a módszereket csak kivételes esetekben használják (pl. kriptográfiában), ugyanis általában lassúak (így szimulációk számára nem felhasználhatók), esetleg drágák (külön áramkört kell a számítógépbe beépíteni), tulajdonságaik pedig jelentősen függenek a fizikai folyamattól (ha az nem teljesen korrekt, a véletlenszám-folyamunk sem lesz az).

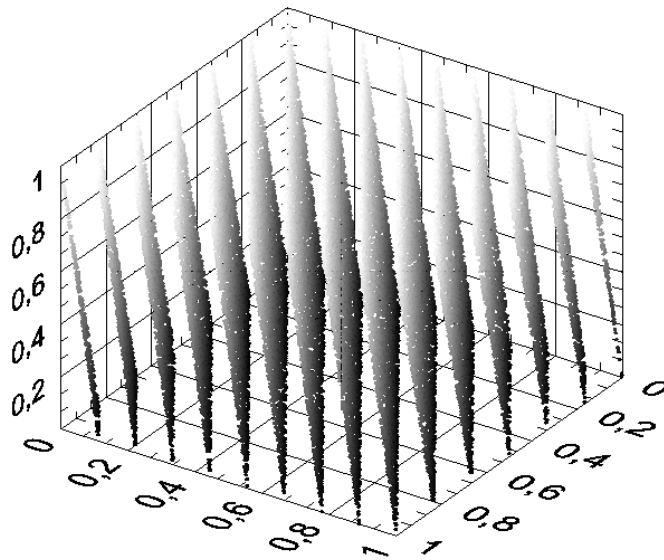
Egy másik, általánosan használt eljárás az, hogy egy algoritmus segítségével állítunk elő véletlennek tűnő számsorokat (pseudovéletlen számsorok). Ezeknek az algoritmusoknak megvannak az előnyei és hátrányai is. Az egyik legfontosabb előnyük, hogy determinisztikusak és megismételhetők, így az egyes kísérletek bármikor újra lejátszhatóak. A számsorozatoknak persze megvannak a determinisztikusságból származó hátrányai is, amelyek korlátozhatják alkalmazhatóságukat. Az egyik legnagyobb hátrányuk, hogy az általuk legenerált számoknak van egy bizonyos ismétlődési ideje, ennek lejárta után a generátor pontosan ugyanazt a számsorozatot adja vissza. Ennek oka, hogy a véletlenszám-generátorok meghatározott bitszámon tárolják el belső állapotukat, működésük során pedig előbb utóbb eljutnak egy olyan állapotba amiben már tartózkodtak valamikor. Ezek után pedig elkezdik ismételni a legenerált számsorozatot. Így egy olyan véletlenszám-generátor, ami 32 bit-en tárolja adatait, legfeljebb  $2^{32}$  hosszúságú számsorozatot tud legyártani ismétlődés nélkül.

A véletlenszám-generátor által létrehozott számsorban az algoritmustól függően különböző rövid és hosszú-távú kapcsolatok, összefüggések lehetnek. Ezek az összefüggések, egyes szimulációk, során akár hibás eredményekhez is vezethetnek. Ezért fontos, hogy alkalmazás előtt megismerjük a véletlen-szám generátorunk tulajdonságait, ez alapján következtethetünk arra, hogy az épp kiszemelt algoritmus alkalmas-e a kívánt feladatra. Különböző elméleti és empirikus tesztek állnak rendelkezésre, amelyekkel vizsgálhatjuk a generátorunk tulajdonságait [45].

A legalapvetőbb tesztek a véletlenszám-generátor eloszlását, az egymás utáni elemek közötti korrelációt ill. a periódushosszt vizsgálják. Ugyancsak hasznos teszt a spektrálpróba, amely a legenerált számsorozatból egy térbeli ábrát készít, az egymás után legenerált számokból egy-egy (hiper)térbeli pontot alkot, majd vizsgálja, hogy mennyire egyenletesen helyezkednek el ezek a pontok. Sajnos a generátorok többsége egy bizonyos dimenziószám felett már elég jellegzetes, sokszor párhuzamos hipersíkokból álló alakzatot vesz fel. A 2.6. ábrán a Fortran programozási nyelvben használt RANDU [46] véletlenszám-generátor térbeli ábrája látható. Azt láthatjuk, hogy ezen generátor már három dimenzióban is egy erős térbeli szerkezettel rendelkezik, amely sok alkalmazásban vezethet hibás eredményre (pl. ha egy Monte-Carlo szimulációban 3 paramétert változtatunk, akkor ezen a 3 paraméter lehetséges értékei eléggé függeni fognak egymástól).

Sok kísérleti jellegű teszt is létezik, ezekben tipikusan valamely elméleti úton jól kezelhető Monte-Carlo jellegű probléma megoldására használják a véletlenszám-generátort, és azt vizsgálják, mennyire feleltethetőek meg egymásnak az eredmények. Jól megválasztott tesztekkel könnyen le lehet buktatni a nem megfelelő véletlenszám-generátorokat (Megjegyzés: olyan véletlenszám-generátor nincs, amely minden lehetséges teszten átmenne, ugyanakkor attól még jól viselkedhet az általunk kívánt szituációban.)

A pseudo véletlenszámgenerátoroknak van még egy tulajdonsága, amely bizonyos esetekben hátrányt jelenthet: elegendő számú legenerált adat ismeretében rekonstruálni lehet



2.6. ábra. A RANDU véletlenszámgenerátor által generált pszeudovéletlen számok párhuzamos síkokban helyezkednek el

annak belső állapotát, és így a korábbi vagy későbbi adatokat is meg lehet jósolni. Ez főleg a kriptográfiában jelent súlyos problémát. Ilyen alkalmazásokban vagy egy nehezen visszafejthető kódolási algoritmussal növelik meg a legenerált véletlenszámok biztonságát, vagy külön az erre a célra kifejlesztett algoritmusokat használnak.

### Lineáris kongruencia véletlenszám-generátorok

A lineáris kongruencia véletlenszám-generátorok (LCG) a következő rekurziós képlettel állítják elő az egymás utáni  $\xi_n$  véletlenszámokat:

$$\xi_n = (m \cdot \xi_{n-1} + a) \bmod M \quad (2.54)$$

A legenerált számfolyam tulajdonságai erősen függenek az  $m$ ,  $a$  és  $M$  paraméterek értékétől, az irodalomban sok rossz példát találhatunk [46, 47]. Amennyiben jól választjuk meg a paramétereket, akkor viszont egy elég megbízható algoritmust kaphatunk (bizonyos korlátokkal). 5-6 dimenzió felett általában már hipertérbeli rácsszerkezettel rendelkeznek (lásd a RANDU generátort). Amennyiben  $M$  kettő hatványa (ami egyszerűbb generálást tesz lehetővé), akkor az alsóbb helyi értékű bitek periódushossza jóval kisebb mint a teljes periódushossz: a legkisebb helyértékű bit-é mindössze 2. Így a kisebb helyértékű bit-ek megbízhatósága elég rossz (általában nincsenek is felhasználva).

Méréseim és szimulációim során két véletlenszám-generátort használtam: a JAVA és a LabVIEW beépített generátorát. A JAVA véletlenszám-generátora egy 48-bites szóhosszal rendelkező LCG ( $M = 2^{48}$ ,  $m = 25214903917$ ,  $a = 11$ ) [31], és bár vannak hiányosságai [48], megfelelt a szimulációk által követelt feltételeknek. Mivel a véletlen számok felhasználásánál nem mind a 48 bit kerül felhasználásra, hanem csak a felső 32, így a felhasznált bitek véletlenszerűsége kielégítő (még a legkisebb helyértékű bit periódushossza is 65536).

A LabVIEW véletlenszám-generátoráról sajnos nem sok információt árul el a dokumentáció. 3 LCG kombinációjával éri el a  $2^{90}$  körüli periodushosszt, ez a paraméter valószínűsíti, hogy tulajdonságai meghaladják egy átlagos LCG minőségét.

### További pszeudo véletlenszám-generátorok

Az általam alkalmazott véletlenszám-generátorokon kívül számos más, kipróbált típus is elérhető. Ezek egy része jobb tulajdonságokkal is rendelkezik, olyan áron, hogy az algoritmus bonyolultabb és/vagy nagyobb a memóriaigénye. [49]

Az egyik generátorcsalád a késleltetett Fibonacci generátorok családja (*Lagged Fibonacci Generators*), ezek megvalósítása:

$$x_i = x_{i-j} * x_{i-k} \bmod M, \quad 0 < j < k \quad (2.55)$$

A képletben a  $*$  több műveletet is fedhet, összeadást, kivonást, szorzást és bitműveleteket is. Egyik megvalósítása következő:

$$x_i = (x_{i-24} + x_{i-55}) \bmod 2^m \quad (2.56)$$

Ennek a periódusa  $(2^{55} - 1) * 2^{m-1}$ .

Számos véletlenszám-generátor (*Multiple-Recursive Generator*) képezhető a következő rekurziós képlet segítségével is:

$$x_n = (a_1 x_{n-1} + \dots + a_k x_{n-k}) \bmod M \quad (2.57)$$

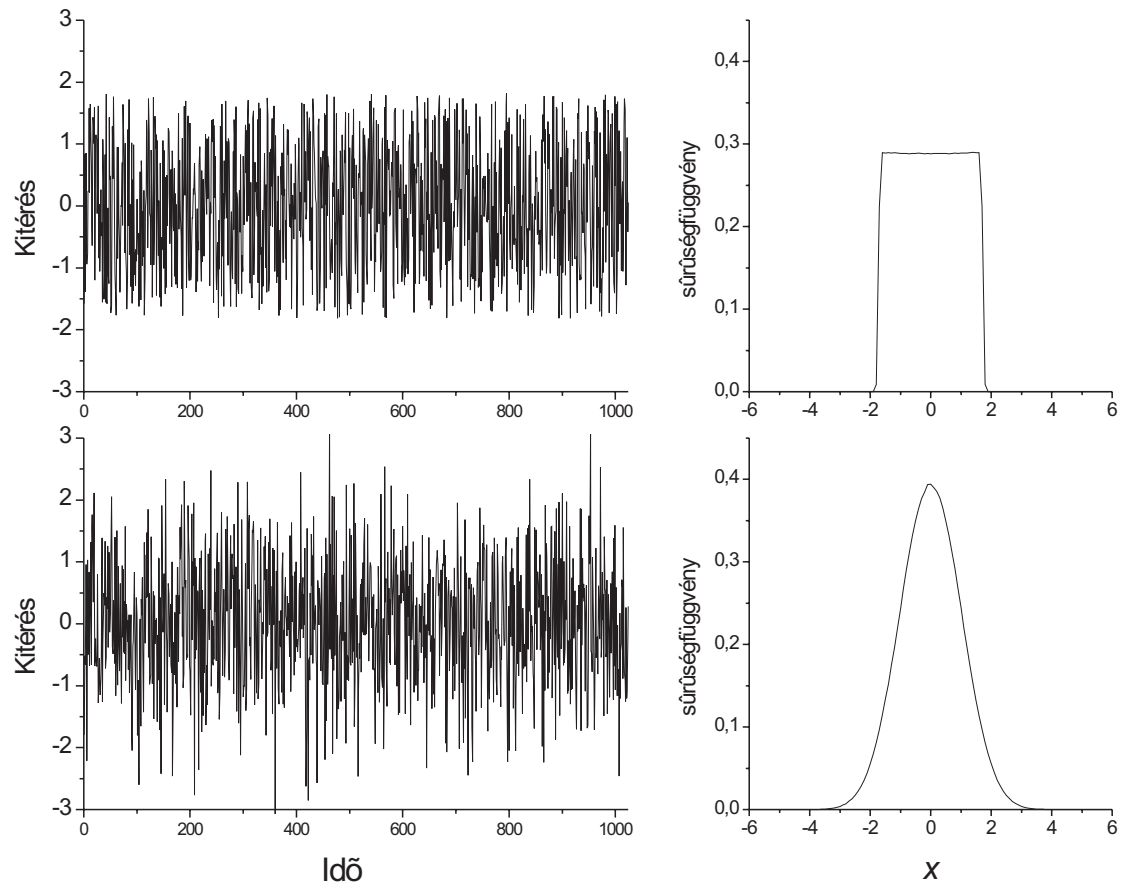
Ezek a generátorok megfelelő paraméterek mellett elég megbízhatóak, és igen sok dimenzióig (akár 20 dimenzióig) egyenletes eloszlást produkálnak.

A számítási teljesítmény és a memória növekedésével egyre több, korábban túl bonyolultnak tartott véletlenszámgenerálási módszer kezd gazdaságossá válni, ilyen például az 1997-ben kifejlesztett Mersenne twister [50], melynek periodushossza  $2^{19937} - 1$ , és úgy tervezték, hogy 623 dimenzióig rendelkezzen egyenletes eloszlással.

## 2.4. Zajok típusai

A zajokat több szempont alapján osztályozhatjuk. Az egyik fontos szempont a zaj eloszlása, vagyis a sűrűségfüggvénye. Az legegyszerűbb eloszlás az egyenletes eloszlás, amikor is a zaj értékei egyenletesen kitöltenek egy intervallumot. A természetben viszont sokkal inkább normál eloszlású véletlen jelenségek fordulnak elő. Ez a jelenség annak köszönhető, hogy egy makroszkopikus jelenség fluktuációja általában sok, egymástól részben független elemi





2.7. ábra. Egyenletes és normális eloszlású, korrelálatlan jelek összehasonlítása

fluktuáció szuperpozíciójaként áll elő. A centrális határeloszlás tétel alapján ilyenkor, függetlenül az elemi fluktuációk eredeti eloszlásától, az összeg eloszlása a normális eloszláshoz fog közelíteni.

Egy sztochasztikus jelenségnél vizsgálhatjuk, hogy az vajon markovi folyamat-e vagy nem. Ezt a tulajdonságot úgy a legkönnyebb megfogni, hogy ahhoz, hogy egy  $t_n$  pillanatban megadhassuk a jel statisztikai tulajdonságait elég egy korábbi  $t_{n-1}$  időpillanatbeli értékének ismerete, a korábbi adatok nem szükségesek.

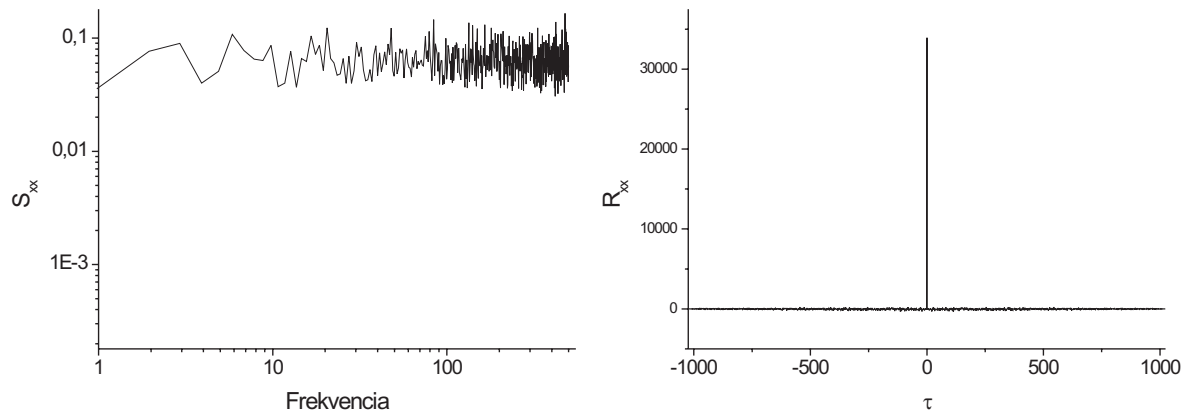
Munkám során a zajok osztályozására leginkább azok teljesítménysűrűség-spektrumát használtam. A fluktuációk spektrumának alakja rengeteget elárul azok eredetéről, keletkezéséről és következtetni enged azok tulajdonságaira.

### Fehérzaj

Fehérzajnak nevezzük azt a zajt, melynek teljesítménysűrűsége független a frekvenciájától, vagyis teljesítménysűrűség-spektruma a teljes frekvenciatartományban konstans. Ekkor az egymást követő zajértékek között semmilyen korreláció nincs. A valóságban végtelen sáv szélességű fehér zaj nincs, hiszen ennek végtelen lenne a teljesítménye, az egyenletes teljesítmény csak bizonyos frekvenciatartományban lehet igaz. Numerikus szimulációk esetén a mintavételezés következtében a felső határfrekvencia a mintavételi frekvencia fele lesz.

A fehérzajok egyik legfontosabb forrása az ellenállások termikus zaja. A termikus zaj teljesítménysűrűségét a következő egyenlet adja meg [51]:

$$S(f) = 4kTR \quad (2.58)$$



2.8. ábra. A fehérzaj teljesítménysűrűség-spektruma és autókorrreláció-függvénye (10 átlag esetén)

### Színes zajok

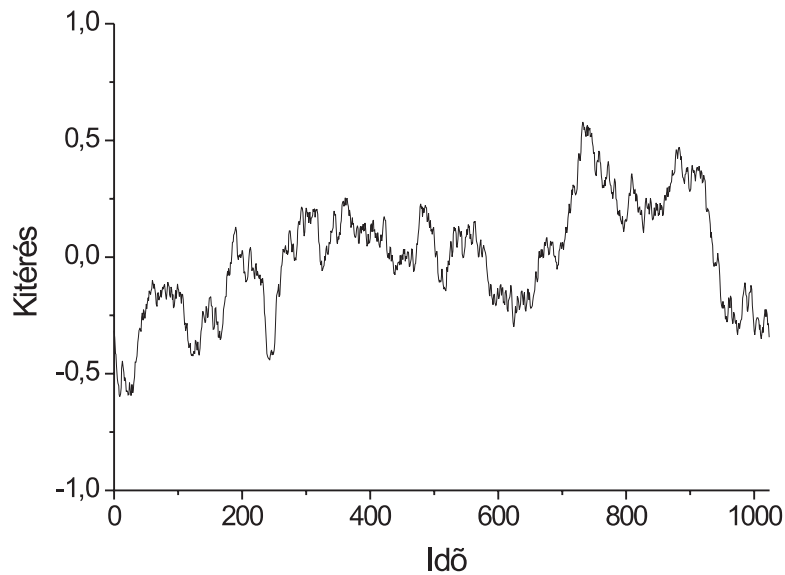
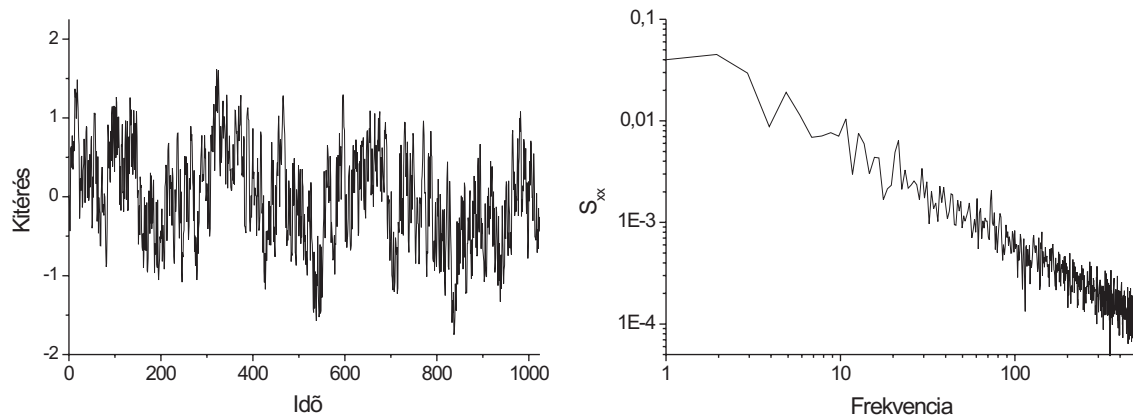
Ha a teljesítménysűrűség-spektrum nem egyenletes, akkor színes zajokról beszélünk. A színes zajok egy igen fontos részhalmaza azoké, melyek teljesítménysűrűség-spektruma a következő mintát követi:

$$S(f) \propto \frac{1}{f^\alpha} \quad (2.59)$$

$\alpha$  általában 0 és 2 közötti értékeket vehet fel. Az  $\alpha = 0$  eset a fehérzajnak felel meg, az  $\alpha = 2$  eset pedig többek között a Brown mozgást írja le. Az  $1/f^2$ -zaj akkor fordul leginkább elő, ha egy mennyiség egy másik mennyiség integrálja, erősen korrelált zajtípus, nem stacionárius, divergens (így nem is ergodikus).

#### Az $1/f$ -zaj

Az  $\alpha = 1$  eset az  $1/f$ -nek nevezett zajnak felel meg (általában  $1/f$ -zajnak tekintik még a  $0,8 < \alpha < 1,2$  eseteket is). Az  $1/f$ -zaj igen gyakran fordul elő a természetben vagy a technikai életben (többek között a félvezetőkben, biológiai rendszerekben, a gazdaságban vagy akár a zenében is) [52]. Az  $1/f$ -zaj fraktálszerű tulajdonságokkal is rendelkezik. Ahhoz, hogy a jel teljesítménye véges legyen, mind alsó, mind felső határfrekvenciára szükség van. Az  $1/f$ -zaj nem markovi tulajdonságú; ahhoz, hogy egy pillanatban meghatározhassuk a jel statisztikai tulajdonságait nem elég véges számú korábbi értékének ismerete.

2.9. ábra. Példa  $1/f^2$ -zajra2.10. ábra. Az  $1/f$ -zaj és teljesítménysűrűség-spektruma (10 átlag esetén)

### Lorentzi zajok

A lorentzi zajok teljesítménysűrűség-spektruma a következő alakú:

$$S(f) \propto \frac{1}{1 + \left(\frac{f}{f_0}\right)^2} \quad (2.60)$$

A lorentzi zajok autokorreláció-függvénye exponenciális lecsengésű. Tipikus előfordulásai a Poisson folyamatok; ugyanakkor egy elsőfokú aluláteresztő szűrő is ilyen frekvenciamenetel rendelkezik.

## 3. fejezet

# Zajgenerátorok készítése

A megbízható, jó paraméterekkel rendelkező zajgenerátorok hasznos segédeszközei a különféle rendszerek vizsgálatának, valódi fizikai rendszerekben és numerikus szimulációkban egyaránt. A zajgenerátorok hasznosak a különböző zajok frekvenciabeli és időbeli struktúrájának felderítésében, továbbá a sztochasztikus rezonancia vizsgálatában és számos más esetben is.

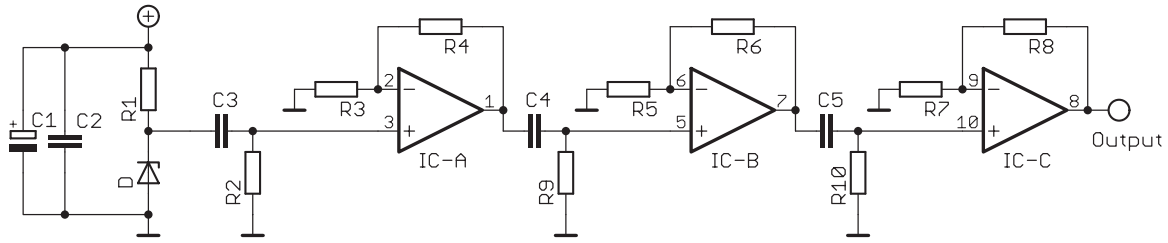
Sok módszer áll rendelkezésre egy zajgenerátor elkészítésére [52, 53, 54, 55], mindegyiknek megvannak a maga előnyei és hátrányai. A zajgenerátorokat két csoportra oszthatjuk, olyanokra, amelyek analóg jelet állítanak elő, melyeket a különböző valódi mérések során használhatjuk, ill. olyanokra amelyek digitális jeleket, számokat állítanak elő, ezeket numerikus szimulációk során használhatjuk. Kutatásaim során számos esetben használtam zajgenerátorokat, ezért külön figyelmet fektettem a már létező zajgenerálási elvek elemzésére és továbbfejlesztésére.

### 3.1. Analóg elvű zajgenerátorok

Analóg zajgenerátorok esetén egy olyan természeti jelenséget használunk fel, amely a kívánt tulajdonságú véletlen jelet állítja elő. Természetesen ez csak bizonyos határon belül érvényes, erősen korlátozva lehet az elérhető sáv szélesség, továbbá a kívánt spektrális jelalak is sokszor csak közelítően valósítható meg. Az analóg áramköröknél jelen lévő hőmérsékletfüggés és időbeli drift is hatással lehet a zajgenerátor teljesítményére.

#### Fehérzaj előállítása félvezetőkkel

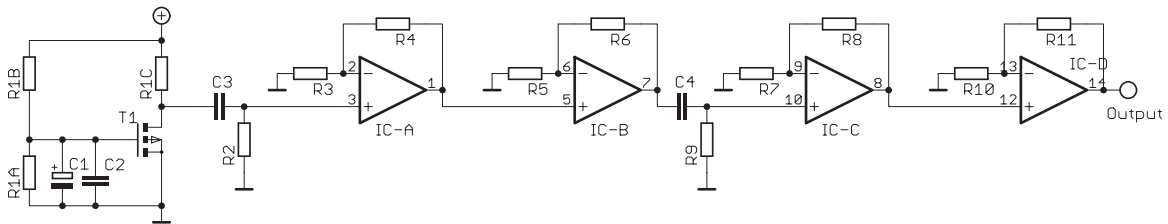
Fehérzajt egy ellenállás termikus zajának segítségével is előállíthatunk, leginkább azonban Zener-diódákat és tranzisztorokat szoktunk használni, mivel ezek sokkal nagyobb amplitúdójú jelet szolgáltatnak. A megfelelő kimenő teljesítményszintet jól kivitelezett erősítőláncal érhetjük el. A megvalósítás során figyelni kell arra, hogy a külső zavarjelek (pl. a hálózati 50 Hz) minél kevésbé szűrődhessenek be az áramkörbe. Ilyen módszerrel viszonylag széles frekvenciatartományban hozhatunk létre fehérzajt.



3.1. ábra. Fehérzaj létrehozása zéner dióda segítségével [56]

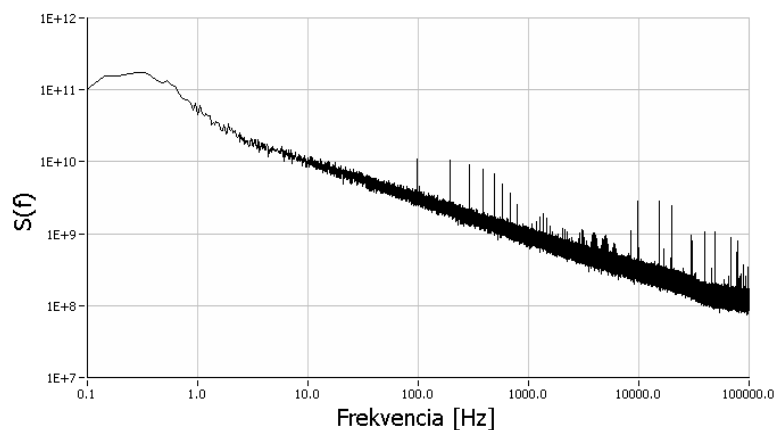
### 1/f-zaj előállítás MOS-FET segítségével

1/f-zajt egy MOS-FET segítségével állíthatunk elő. Az 3.2. ábrán az általunk megvalósított zajgenerátor elvi kapcsolási rajza látható. A tranzisztor munkapontját egy feszültségosztóval állítjuk be. Ennek a megoldásnak megvan az a hátránya, hogy a pontos feszültséget nehéz beállítani, ráadásul az eredmény hőmérsékletfüggő is lehet. Ugyanakkor a visszacsatolás nem rontja a zaj frekvenciamenetét. Erősítőként egy tízezerszeres erősítést megvalósító műveleti erősítőkből álló láncot használtunk. A nagy erősítés persze komolyabb követelményeket támasztott a tápegység zavarmentességével kapcsolatban is.



3.2. ábra. 1/f-zaj létrehozása MOS-FET segítségével [57]

Zajgenerátorunk igen kedvező tulajdonságokkal rendelkezik, amint azt a 3.3. ábrán a spektrumot láthatjuk. A zaj 1/f jellegű kb. 0,5 Hz-től egészen 20 kHz-ig, ami elég jó eredménynek tekinthető. A spektrumban megfigyelhető zavaró csúcsok összteljesítménye elhanyagolható.



3.3. ábra. A MOS-FET alapú 1/f-zajgenerátor spektruma

### Színes zajok előállítása analóg szűrőkkel

Amennyiben az előállított zaj spektruma nem felel meg a kívánalmaknak, akkor különböző analóg szűrőkkel (pl. proporcionális integráló körökkel) alakíthatunk a spektrum alakján. Így akár fehér zajból is megbízható  $1/f$  zajgenerátort állíthatunk elő. Komoly hátránya a megoldásnak a szükséges áramkörök nagy száma. Ezen elv megvalósításáról bővebben a [58] munkában olvashatunk.

## 3.2. Digitális zajgenerátorok

Az analóg áramkörökből felépített zajgenerátoroknak a hátrányai közé tartozik, hogy általában rögzített spektrális jelalakkal rendelkeznek, ha más jelalakot akarunk, általában újra kell tervezni az egész áramkört. Viszonylag szűk tartományban rendelkeznek a kívánt paraméterekkel, és zavarérzékenyek is. Ezen hátrányok egy részét numerikus jelgenerálással könnyedén kiküszöbölhetjük. Az így generált adatsorokat pedig numerikus szimulációkban, ill. feszültséggé alakítva valódi mérésekben is felhasználhatjuk.

### Fehérzaj előállítása

Egyenletes eloszlású fehér zajt igen könnyű előállítani, mindössze a pszeudovéletlenszám-generátor által szolgáltatott véletlenszerű egész számokat kell átskálázzuk, hogy az általunk kívánt tartományba jussanak az egymás utáni adatpontok. A szolgáltatott zaj felső határfrekvenciája a mintavételi frekvencia felének felel meg. Sokszor nem elégszünk meg egyenletes eloszlású fehér zajjal, hanem Gauss-eloszlású zajra van szükségünk. Számos módszer van a transzformáció elvégzésére, a legtöbb programozási nyelv megfelelő függvényeket biztosít számunkra [59].

### Brown és a Lorentzi típusú zajok előállítása.

$1/f^2$  zajt legegyszerűbben fehér zaj integrálásával érhetünk el, a következő rekurzív összefüggés alapján:

$$x_i = x_{i-1} + \xi_i, \quad (3.1)$$

ahol  $\xi$  tipikusan egy Gauss-eloszlású véletlenszám. A centrális határeloszlás következtében bármilyen, szimmetrikus eloszlású véletlenszám megfelel céljainkra, elegendő számú lépés után a végeredmény Gauss-eloszlású lesz. Egyik speciális eset, amikor a véletlen szám csak a  $-1$  és a  $+1$  értékeket veheti fel (véletlen bolyongás), erre az esetre végezhető el legkönnyebben az elméleti számítások.

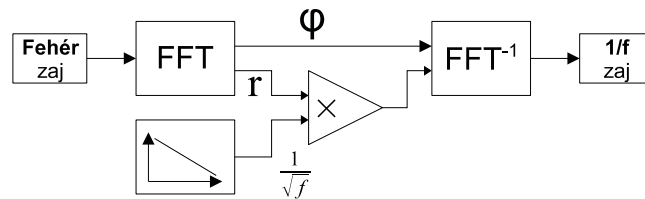
Lorentzi típusú zajt a következő összefüggéssel állíthatunk elő:

$$x_i = c \cdot x_{i-1} + \xi_i, \quad (3.2)$$

ahol a  $c$  paraméter határozza meg a zaj letörési frekvenciáját. Ez a rekurziós formula jelentős hasonlóságot mutat az elsőfokú digitális szűrőt leíró képlettel (2.49), a frekvenciamenetük is csak  $f_s/2$  környékén különbözik. Az az  $1/f$ -zaj nem markovi tulajdonságú, ezért sajnos hasonló rekurziós formulával nem állítható elő, létrehozására más módszereket kell alkalmaznunk.

### Színes zajok előállítása Fourier-transzformáció segítségével

Spektrális transzformáció segítségével bármilyen kívánt frekvenciamenetű zajt elő tudunk állítani. Ennek egyik legegyszerűbb módszerét a 3.4. ábrán szemléltetem.



3.4. ábra.  $1/f$ -zajok generálása Fourier-transzformációk segítségével

A Gauss-eloszlású fehérzaj amplitúdóspektrumát igényeink szerinti átviteli függvénnyel beszorozzuk, majd a kapott spektrumot visszaalakítjuk időbeli jellé. Az átvitelt meghatározó tömb a következő alakú  $1/f^\alpha$ -zaj esetén

$$a_i = \begin{cases} 0 & \text{ha } i = 0 \text{ vagy } i = \frac{N}{2} \\ A \cdot i^{-\frac{\alpha}{2}} & \text{ha } i = 1.. \frac{N}{2} - 1 \\ A \cdot (N - i)^{-\frac{\alpha}{2}} & \text{ha } i = \frac{N}{2} + 1..N - 1 \end{cases} \quad (3.3)$$

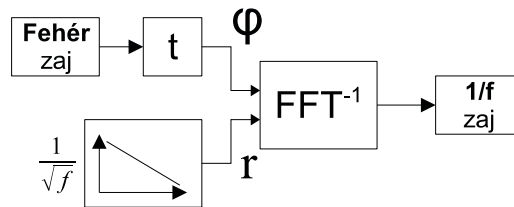
A módszer előnye, hogy tetszőleges frekvenciamenetet nagy pontossággal elő lehet állítani, hátrány a számolásigénye, illetve az, hogy csak véges hosszúságú (a számítógép memóriája által korlátozott) folyamatos adatsorokat lehet létrehozni. Ez korlátozhatja azon eseteket, ahol fel lehet használni ezt a zajgenerálási módszert.

A módszer egyszerűsítése, ha csupán egy FFT-t használunk, ennek blokkvázlatát az 3.5. ábrán látható. Ez annak felel meg, mintha véletlenszerű fázisokkal rendelkező különböző frekvenciájú szinuszokat összegeznénk a következő képlet szerint:

$$y = \sum_i (a_i \cdot \sin(i \cdot \Delta\omega + \xi_i)), \quad (3.4)$$

ahol  $\xi$  egyenletes eloszlású fehérzaj 0 és  $2\pi$  között. FFT alkalmazása esetén a fázistömböt transzformálni kell, hogy a megfelelő kimenetet megkaphassuk, a transzformáció a következő alakú:

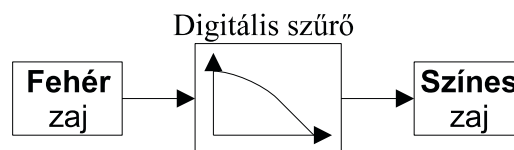
$$\varphi_i = \begin{cases} 0 & \text{ha } i = 0 \\ \pi & \text{ha } i = 0 \text{ vagy } i = \frac{N}{2} \\ \xi_i & \text{ha } i = 1.. \frac{N}{2} - 1 \\ -\xi_{N-i} & \text{ha } i = \frac{N}{2} + 1..N - 1 \end{cases} \quad (3.5)$$

3.5. ábra. Fáziszajon alapuló  $1/f$ -zaj-generálás

Bár ez a módszer csak feleannyi időt vesz igénybe, mint a korábbi, de bizonyos tulajdonságaiban erősen eltér tőle. Az egyik legszembetűnőbb, hogy a spektrum átlagolás nélkül sem „zajos”, vagyis pontosan olyan, mint a szorzómátrix, ezáltal kevésbé realiztikus. Ez általában nem okoz gondot (néha még előny is), ugyanakkor előfordulhat, hogy egyes esetekben hamis eredményt szolgáltat. Az egyes minták szórása pontosan azonos, és a középérték is pontosan nulla. Előnye, hogy nem kell Gauss-eloszlású véletlenszám-generátor. Fehérzaj esetén az eredmény eloszlását a centrális határeloszlás-tétel határozza meg, így az normális eloszlású lesz.

### 3.3. $1/f^\alpha$ -zajok előállítása digitális szűrőkkel

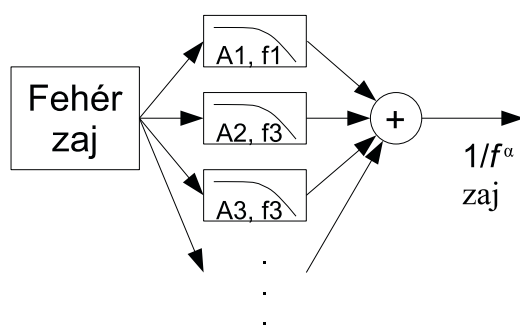
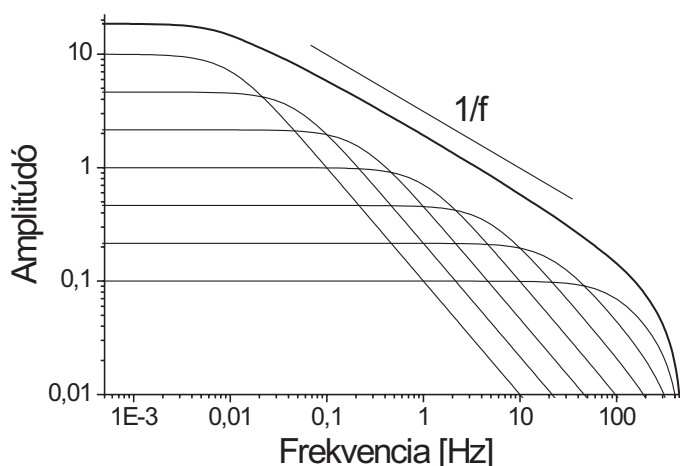
Ahogy a korábban leírt analóg zajgenerátorok esetén a zaj spektrális összetételének megváltoztatásához analóg szűrőáramköröket használhatunk, ugyanúgy az előállított digitális jeleket is átalakíthatjuk digitális szűrőkkel. Bár ez a módszer kötöttebb spektrális alakokat tud csak létrehozni, mint a Fourier-transzformáción alapuló, ugyanakkor sokkal gyorsabb algoritmust lehet implementálni. További előny, hogy az így létrehozott színes zaj folyamatos, tetszőleges hosszúságú lehet. A létrehozott adatsorok elején azonban tranziensek lehetnek jelen, ezekre figyelni kell az alkalmazásokban.



3.6. ábra. A zajgenerátor működési elve: az előállított fehérzajt bevezetjük a megfelelően elkészített digitális szűrőbe, amely kimenetén megjelenik a kívánt színes zaj

Amennyiben fehérzajt vezetünk át egy elsőfokú szűrőn Lorentz zajt kapunk. Ha olyan szűrőket kapcsolunk párhuzamosan, melyek pólusfrekvenciái logaritmikusan egyenletesen helyezkednek el, amplitúdói pedig arányosak a frekvencia gyökével, akkor  $1/f$ -zajt kapunk [60]. Hasonlóan,  $1/f^\alpha$ -zajt tudunk előállítani, ha a szűrők amplitúdója  $1/f^{\alpha/2}$ -vel arányos (3.7. és 3.8. ábrák).



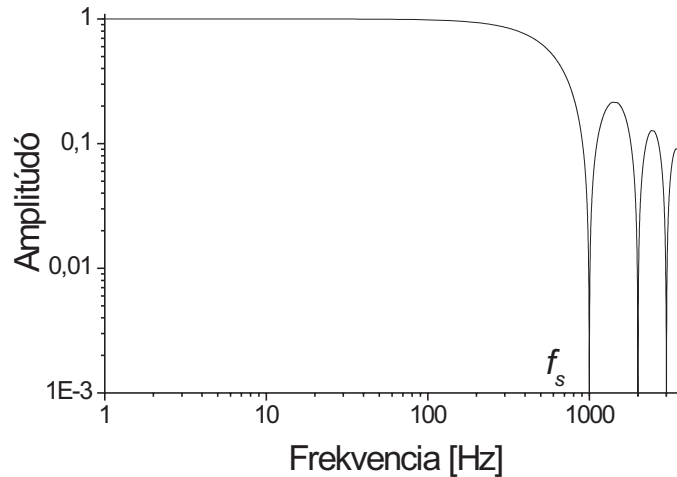
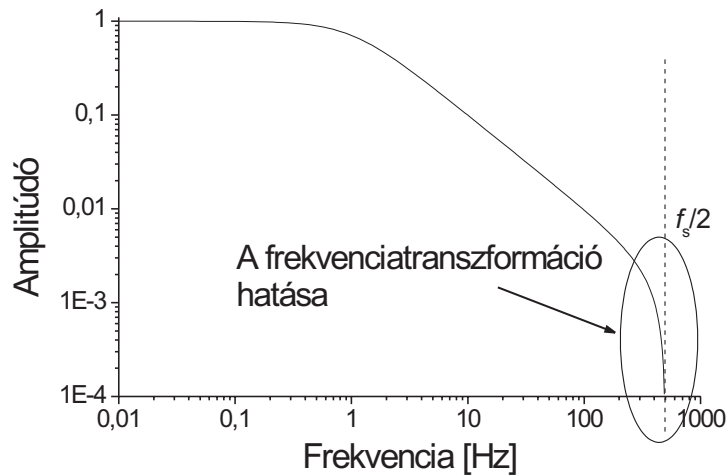
3.7. ábra.  $1/f^\alpha$  zajgenerátor megvalósítása elsőfokú szűrőkkel3.8. ábra.  $1/f$  alakú átvittel rendelkező összetett szűrő

### A szűrőelrendezés optimalizálása

Az egyes szűrők között bizonyos távolság van, e miatt egy kissé hullámos lesz az átviteli függvény. Ezt a hullámosságot lehet csökkenteni a szűrők számának növelésével, ugyanakkor ez növeli a jelgenerálás erőforrásigényét is. Dekádonként 1-2 szűrő alkalmazásával a hullámosság 1 % alatt van.

Amennyiben nem csak szimulációk számára használjuk fel a generált zajt, akkor azt egy A/D-konverter segítségével alakíthatjuk át valódi feszültségjelekké. Ahogy a 2.2.1 részben már említettem, ez az átalakítás torzítja a jel spektrumát, mégpedig egy  $\sin(x)/x$  jellegű függvénnyel súlyozza (3.9. ábra). Alacsony frekvencián a hatás elhanyagolható, de ha ki akarjuk használni a lehetséges legnagyobb frekvenciákat is, akkor már figyelembe kell vegyük és hatását kompenzálnunk kell. A mintavételi frekvencia tizedénél a hatás 1,5% körüli.

A frekvencia-transzformációnak köszönhetően van egy éles letörés a mintavételi frekvencia felénél (3.10. ábra). Amennyiben ki akarjuk használni a maximális sávszélességet, akkor ezt is figyelembe kell venni a szűrők tervezésénél. Nehezíti dolgunkat az is, hogy ez egy asszimmetriát visz be a szűrők paraméterezésébe.

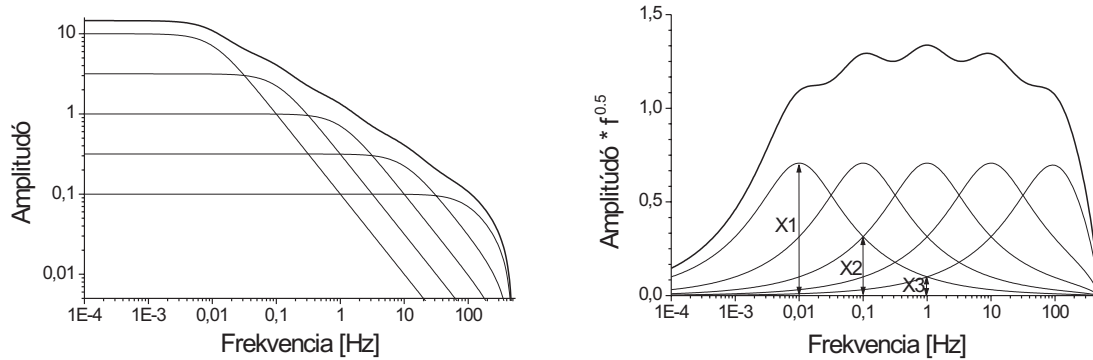

 3.9. ábra. A  $\frac{\sin(\pi f/f_s)}{\pi f/f_s}$  súlyfüggvény hatása a frekvenciamenetre


3.10. ábra. A frekvenciatranszformáció következtében a szűrő menetében egy erős levágást figyelhetünk meg mintavételi frekvencia felét megközelítve

Az általunk elvárt  $1/f$  frekvenciamenettől való eltérést jobban vizualizálhatjuk, ha az amplitúdó átviteli függvényt megszorozzuk a frekvencia gyökével (ill. általános esetben  $1/f^{\alpha/2}$ -vel). Ideális esetben egy vízszintes vonalat kapnánk az általunk kiválasztott frekvenciatartományban.

Az 3.11. ábrán látható, hogy az eltérés az ideális esettől igen nagy a frekvenciasáv szélén. Az eltérés oka az, hogy a tartomány szélén a szűrők aszimmetrikusan helyezkednek el. Az ábra alapján könnyen megérthető ennek az oka. Az átviteli függvény az egyes szűrők átvitelének komplex összege. Így, az első szűrő pólusfrekvenciáján az átviteli függvényt a következőképp kaphatjuk meg:

$$A(f_1) \approx X_1 + X_2 + X_3 + \dots, \quad (3.6)$$



3.11. ábra. Az amplitúdó-spektrumot a frekvencia gyökével megszorozva, jobban látható az eltérés az ideális esettől, főként az első és az utolsó szűrők esetén. A görbék elméleti számítások eredményei, a mintavételi frekvencia 1 kHz, egy szűrő van dekádonként elhelyezve

ahol  $X_1 = a_1(f_1)$ ,  $X_2 = a_1(f_2)$ ,  $X_3 = a_1(f_3)$  (lásd az 3.11. ábra jobb oldalát),  $a_1(f)$  pedig az első szűrő átviteli függvénye.

Hasonlóan második szűrő pólusfrekvenciáján az átviteli függvény:

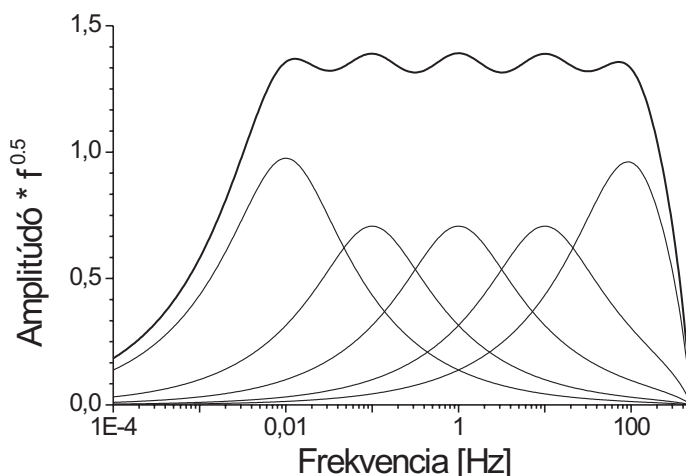
$$A(f_2) \approx X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 + \dots, \quad (3.7)$$

a harmadik (középső) szűrő pólusfrekvenciáján pedig:

$$A(f_3) \approx X_1 + 2 \cdot X_2 + 2 \cdot X_3 \quad (3.8)$$

Ebből látszik, hogy az átviteli függvény értéke a középső szűrő esetén a legnagyobb, a tartomány szélén pedig jelentősen csökken az amplitúdó. Hogy ezt az effektust csökkentsük, növelnünk kell a tartomány szélén lévő szűrők amplitúdóját. A szűrők amplitúdójának módosításával kompenzálhatjuk a már korábban leírt effektusokat is. Sajnos bármelyik szűrő amplitúdójának módosítása az egész átviteli karakterisztikát megváltoztatja, ez nehezíti a megfelelő paraméterek megtalálását.

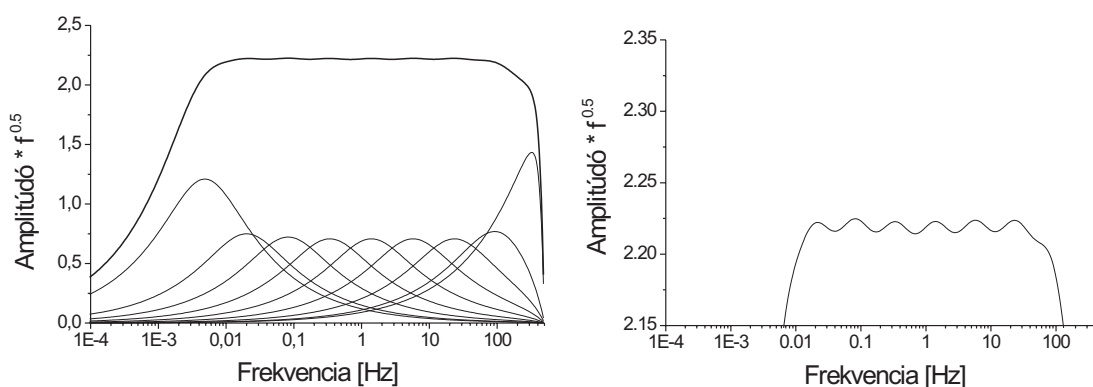
A sok lehetséges paraméter miatt a manuális illesztésen kívül Monte-Carlo módszereket használtam. Az első nehézségek azzal adódtak, hogy hogyan adjuk meg azt a jóságfüggvényt, amely a számunkra leginkább megfelelő átviteli függvényt eredményezi. A megalkotott függvény végül tartalmazta a kívánt frekvenciatartományban való eltérés négyzetösszegét, azon tartomány szélességét, ahol a hiba egy megadott küszöb alatt van, a túllövések nagyságát, ill. a tartományra illesztett egyenes meredekségének eltérését az ideálistól. Bár ez a függvény jól jellemezte, hogy mennyire közelíti meg a frekvenciamenet az általunk kívántat, túl sok és túl mély lokális minimummal rendelkezett ahhoz, numerikus módszerek segítségével az összes szűrő ideális paraméterét meg lehessen állapítani. Ugyanakkor elég jól és megbízhatóan működött, ha csak a két szélső szűrő paramétereit kellett meghatározni. Az esetek többségében



3.12. ábra. Az első és az utolsó szűrő amplitúdójának módosítása javítja az átviteli függvény menetét

csak ezen két szűrő módosításával is el lehet érni néhány százalékos pontosságot. Jelentősebb eltérés az  $\alpha \rightarrow 0$  és  $\alpha \rightarrow 2$  esetekben van. Ha javítani akarunk az illesztésen, vagy jobban ki akarjuk használni a lehetséges frekvenciatartományt, akkor a többi néhány szélső szűrő kismértékű változtatásával javíthatunk az eredményen.

Az 3.12. ábrán láthatjuk, hogy változik az átviteli függvény, ha két szélső szűrőt változtatjuk (a szorzófaktor 1,42).  $1/f$ -zaj esetén a szűrők módosítása közel szimmetrikus. (Természetesen amennyiben a  $\sin(x)/x$  hatását kompenzálni akarjuk, vagy nagyon közel megyünk a mintavételi frekvencia feléhez, akkor az ideális eset már nem lesz szimmetrikus.) A függvény hullámosságát az okozza, hogy dekádonként mindössze 1 szűrő van.

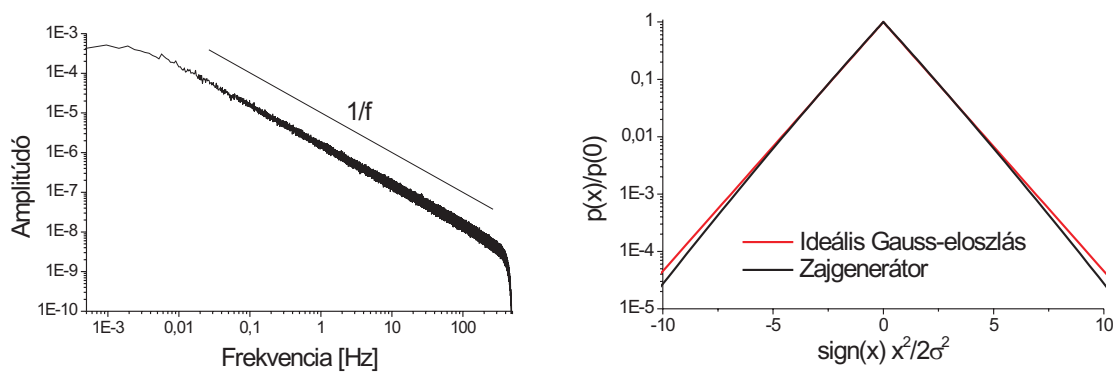


3.13. ábra. A kilenc tagból felépített szűrő átviteli karakterisztikája. A jobb oldalon láthatjuk, hogy a kívánt frekvenciatartományban az eltérés és a hullámosság is kisebb mint 1%. A szűrők a következő szorzókkal lettek módosítva: 1,71; 1,06; 1,021; 1; 1; 1; 1; 1,086 és 1,8

A szűrők számának növelésével lehet csökkenteni a hullámosságon, ugyanakkor ennek mellékhatásaként egyre jobban kell módosítani a szélső szűrőket (ha közelebb kerülnek a szűrők egymáshoz, sokkal nagyobb hatással vannak egymás tartományára is). A Bara Péter

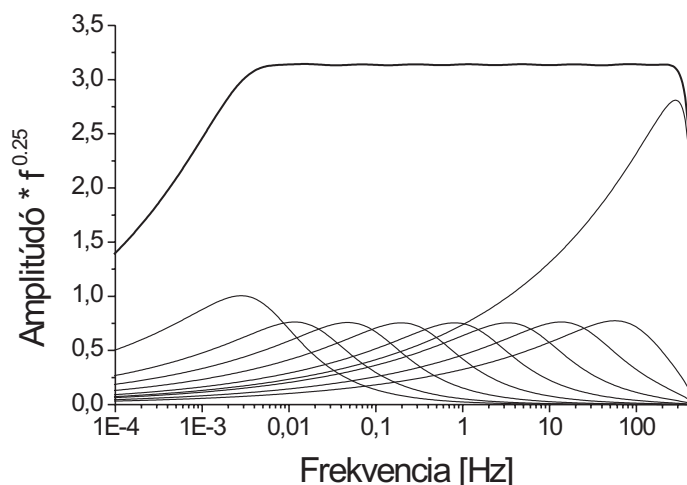
által végzett vizsgálatok azt mutatták, hogy 1,5-2 szűrő/dekád esetén köthetjük a legjobb kompromisszumot.

Az eredeti célkitűzés az volt, hogy egy olyan hardveres zajgenerátort készítsük, mely  $1/f^\alpha$ -zajt tud létrehozni négy dekádon keresztül. A következőkben az erre optimalizált szűrőelrendezést ismertetem. Az 1 kHz-es mintavételi frekvenciát figyelembe véve 9 szűrőt helyeztünk el, az alsó szűrő pólusfrekvenciája  $4.86 \cdot 10^{-3}$  Hz, a felső pólusfrekvenciája pedig 400 Hz volt. A szűrő számolt frekvenciamenete a 3.13. ábrán látható. A szűrő működését szimulációval is ellenőriztem, a létrehozott zaj 4 dekádon keresztül igen jól megközelítette az  $1/f$  alakot, és normális eloszlású volt (3.14. ábra). A szimuláció paraméterei: minták hossza  $2^{11}$ , a teljesítménysűrűség spektrum pedig 100 átlagból lett számolva.



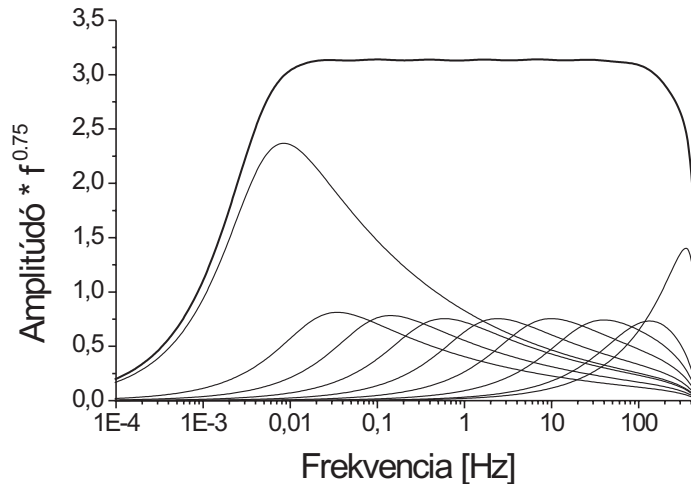
3.14. ábra. Az  $1/f$  zajgenerátor által létrehozott zaj spektruma és normált amplitúdóeloszlása

Ha kívánt zaj nem  $1/f$  alakú, akkor a szűrőket már nem szimmetrikusan kell módosítani.  $1/f^{0,5}$  és  $1/f^{1,5}$  esetén a legjobb illesztéseket a 3.15. és 3.16. ábrákon láthatjuk:



3.15. ábra. A  $1/f^{0,5}$ -zajt megvalósító elrendezés. A szűrők módosítószorzói rendre: 1,331; 1,01; 1,04; 1; 1; 1; 1,01; 1,02 és 3,3

Numerikus szimulációval megállapítottam, hogyan kell módosítani az első és az utolsó szűrő értékét  $\alpha$  függvényében, ahhoz, hogy kielégítő eredményt kapjunk. Az eredmény a

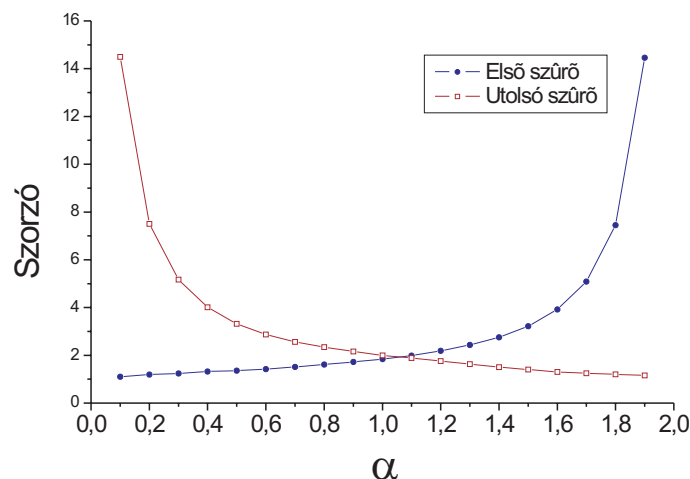


3.16. ábra. A  $1/f^{1,5}$ -zajt megvalósító elrendezés. A szűrők módosítósorzói rendre: 3,137; 1,076; 1,037; 1; 1; 1; 0,986; 1 és 1,839

3.17. ábrán látható. Van egy kis asszimetria a két oldal között, ez a közeli mintavételi frekvencia következménye. Amennyiben a mintavételi frekvencia elég távol van, akkor a pontokra a következő függvényt illeszthetjük:

$$m_1 = c \cdot a^y, \quad m_9 = c \cdot (2 - a)^y, \quad (3.9)$$

ahol  $c = 1,78$  és  $y = -0,874$ . Ezeket a paramétereket felhasználva tetszőleges  $1/f^\alpha$ -zajt előállíthatunk.

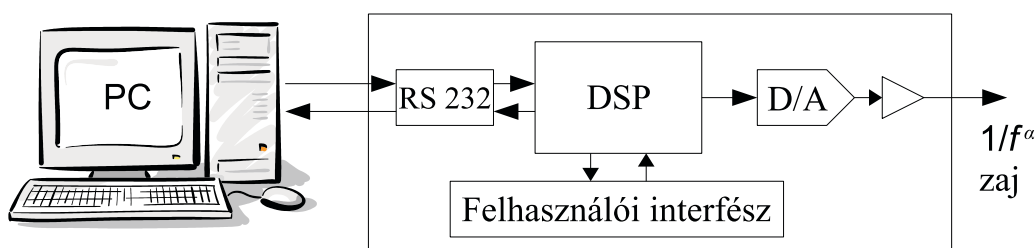


3.17. ábra. A szűrők amplitúdósorzói ha csak az első és utolsó szűrőket módosítjuk

### 3.4. Digitális szűrésen alapuló zajgenerátor hardveres megvalósítása

A zajgenerátor megvalósításához az Analog Devices által gyártott ADSP-2181 típusú DSP-t (digitális jelfeldolgozó egységet) használtuk [61]. Azért esett rá a választás, mert egyrészt könnyen kezelhető assembly nyelvvel rendelkezik, másrészt olyan hatékony utasításkészlettel, amely lehetővé teszi a nagy hatékonyságú (gyorsan végrehajtható) programok létrehozását. 16 bit-es egész aritmetikával rendelkezik, utasításainak döntő többségét egy órajelciklus alatt tudja végrehajtani, továbbá vannak olyan multifunkciós utasításai is, melyek gyorsítják a digitális szűrők műveleteit. Az eszköz a számítógéppel egy RS232 interfészen tartja a kapcsolatot, de lehetőség van USB-s kapcsolatra is. A számítógépen futó szoftver LabVIEW programozási környezetben van megírva [30]. Lehetőség van opcionális kezelőszervek hozzákapcsolására is (LCD + nyomógombok), így akár egy önálló eszközt is kaphatunk.

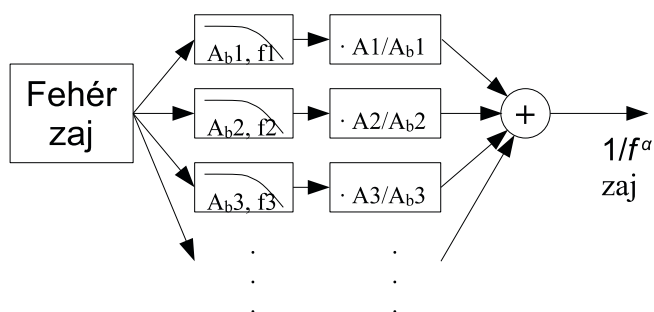
A DSP egy tesztelt LCG generátor segítségével állítja elő a véletlenszámokat, ez a sorozat megy át a megfelelő szűrőláncon, hogy a kívánt  $1/f^\alpha$ -zajt kapjunk. A számsorozatból a megfelelő skálázás után egy 14 bit-es D/A-konverter segítségével kapjuk az analóg kimenő jelet. A D/A-konverter lehetséges legnagyobb mintavételi frekvencia 300 kHz. A megvalósítás blokkdiagramja a 3.18. ábrán látható. Ha komolyabb számolási teljesítményre van szükség, lehetőségünk van lebegőpontos DSP használatára is, olyan áron, hogy sokkal költségesebb és nagyobb fogyasztású eszköz jönne létre. Mikrovezérlő esetén egy olcsó és egyszerű eszközt kaphatunk, cserében annak számolási teljesítménye erősen korlátozná az elérhető maximális mintavételi frekvenciát.



3.18. ábra. A megvalósított zajgenerátor blokkvázlata

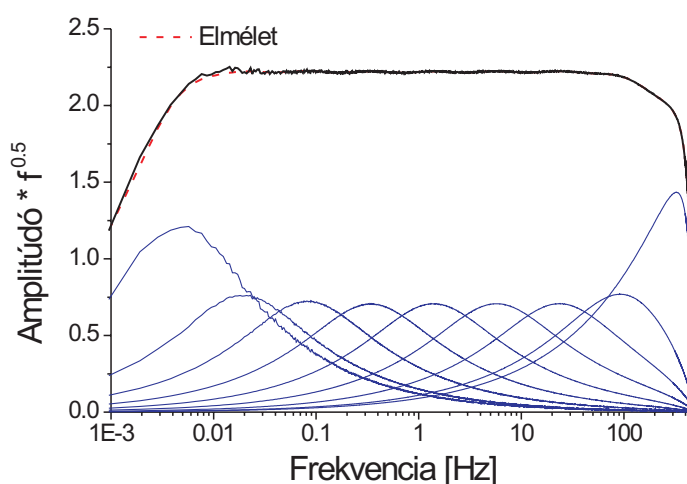
A fixpontos aritmetikának egyik legnagyobb hátránya az általa elérhető pontosság korlátozott volta. Ha a számolások eredményei túl kicsinyek, akkor a relatív hiba túl nagy lesz. Ha viszont az eredmények túl nagyok (vagyis jobban használnák ki a numerikus tartományt), akkor nagy a veszélye a túlcsofordulásnak (vagy a szaturációnak). Ennek megfelelően körültekintően kell kiválasztani a paramétereket, hogy a lehető legjobban használjuk ki a rendelkezésre álló numerikus tartományt. További problémát jelenthet az is, hogy a szűrők együtthatóit is csak véges pontossággal tudjuk tárolni. Ha nem elégszünk meg a pontossággal, fix-pontos DSP-n is lehet lebegőpontos számolást implementálni, azonban ennek súlyos teljesítmény ára van, jóval (kb 1-2 nagyságrend) kisebb lesz az elérhető legnagyobb frekvencia.

Tekintsünk először egy szűrőtagot: ahhoz, hogy a rendelkezésre álló numerikus tartományt teljesen kihasználjuk, a digitális szűrők  $y$  kimenetét (lásd a (2.49) egyenletet) a legmegfelelőbb értéken kell tartasuk: ne legyen se túl kicsi, de túl nagy se, hogy elkerüljük a szaturációt. Az  $y$  legmegfelelőbb értéke függ a szűrő határfrekvenciájától. Numerikus szimulációink szerint ez a legmegfelelőbb amplitúdó az  $A_o = C/f^{0,5}$  összefüggést követi. Ez ideális amennyiben  $1/f$  zajt akarunk, ha azonban más jellegű zajt szeretnénk, akkor vagy eltérünk ettől az ideális amplitúdótól, vagy utólag skálázzuk át a szűrőket, hogy a kívánt frekvenciamenetet kapjuk. Utóbbi megoldást a megoldást választva, a következő elrendezést kapjuk:



3.19. ábra. A számábrázolás pontosságát optimálisabban kihasználó szűrőelrendezés

Numerikus szimulációkkal megvizsgáltam a fixpontos számolás pontosságát. Azt kaptam, hogy bár az első, alacsony frekvenciás szűrők átviteli függvénye kicsit zajosabb, az eltérés az ideális frekvenciaprofiltól nem olyan jelentős.



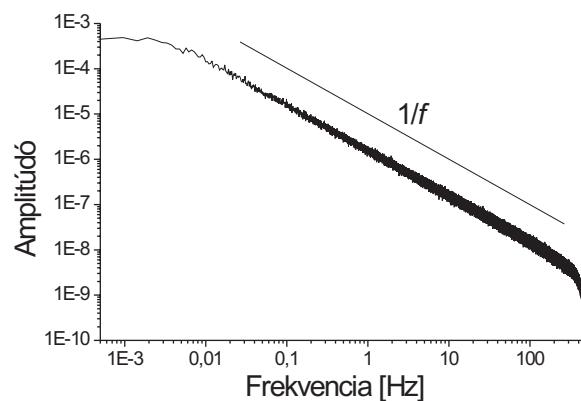
3.20. ábra. A megvalósított fixpontos szűrők igen jól megközelítik az elméletileg várt átviteli függvényt

Fontos kérdés lehet, hogy milyen tartományban tudjuk előállítani a kívánt frekvenciamenetet. Az egyik legfontosabb korlátozó tényező a mintavételi frekvencia. Nem tehetjük

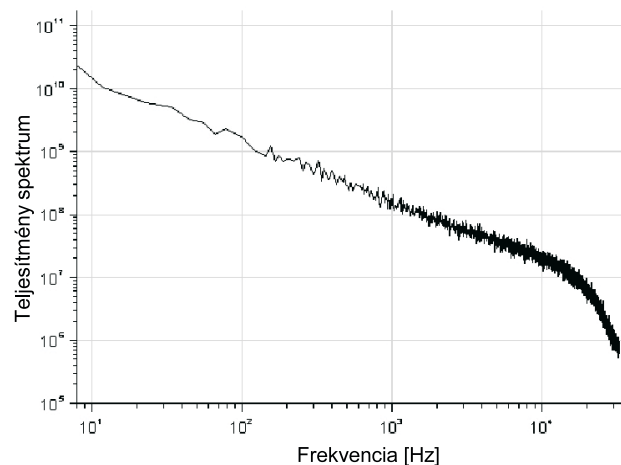


akármilyen közel a szűrőket hozzá, mert akkor a frekvencia-transzformációból adódó torzítás túl nagy lenne, és lehetetlen lenne mellékhatások nélkül kompenzálni. 1 kHz-es mintavételi frekvenciát választva a 400 Hz-es határfrekvencia megfelelőnek tűnik az utolsó szűrő számára. Ekkor, ahogy az a 3.20. ábrán látható, a mintavételi frekvencia tizede alatt már egész jól megközelítjük a kívánt frekvenciamenetet. A másik korlátozó tényező a fixpontos számolás korlátozott pontossága. E miatt a legkisebb frekvencia, amit a  $C_0$  értéke lehetővé tesz az  $4,86 \cdot 10^6 \cdot f_s$ , ez alatt már csak a 0 Hz frekvenciát tudjuk reprezentálni (lásd a (2.52) egyenletet). Ezeket a határokat már figyelembe vettük, amikor elrendeztük a szűrőket.

A DSP-n futó fixpontos algoritmust számítógépen futtatva tesztelhetjük, hogy mennyire megbízható a megvalósítás, milyen pontossági kérdések merülnek fel. Szerencsére az eredmények azt mutatják, hogy a fixpontos megvalósítás nem csökkenti a zajgenerátor teljesítményét (3.21. ábra. A 3.22. ábrán pedig a létrehozott zajgenerátor spektrumát figyelhetjük meg.



3.21. ábra. A zajgenerátor által létrehozott  $1/f$ -zaj spektruma (szimuláció)



3.22. ábra. A megvalósított  $1/f$ -zajgenerátor spektruma (a mintavételi frekvencia 100 kHz)

Röviden részletezném a DSP-n futó algoritmust: a zajgenerálási rutin egy megszakításrutinba van beillesztve, amely vagy a mintavételi órajel vezérel, vagy egy külső jel hatására

hívódik meg. A rutin elején egy 32 bit-es LCG generálja le a véletlen egész számot. A véletlenszám-generátor ciklushosszát is ez a 32 bit határozza meg 300 kHz-es mintavételi frekvenciát feltételezve közel 4 óras nem ismétlődő zajsort tudunk létrehozni. Amennyiben ez nem elég, használhatunk nagyobb ciklushosszal rendelkező véletlenszám-generátorokat is. A véletlenszámgenerátor után vannak implementálva az egyes szűrők, majd előállítjuk ezek lineáris kombinációját. A végeredményt átskálázva adjuk át a D/A-konverternek, így kapjuk meg a kívánt analóg jelet. A DSP által végrehajtandó ciklusok száma 120 körül van. Az általunk alkalmazott DSP 40 MHz-es: másodpercenként 40 millió műveletet tud végrehajtani, köztük multifunkciós, szorzást és összeadást tartalmazó utasításokat is, így ezzel a DSP-vel el tudjuk érni a 300 KHz-es mintavételi frekvenciát. A jövőben egy 160 MHz DSP használatát tervezzük (ADSP-2191), ezzel 1,3 MHz-es mintavételi frekvenciát is el tudunk érni, az így generált zaj felső határfrekvenciája meghaladhatja a 100 kHz-et.

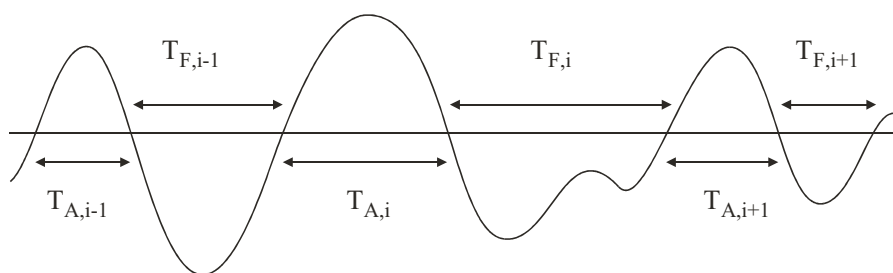
Mivel a DSP-n futó szoftver határozza meg leginkább az eszköz működését ezért egy igen rugalmas eszközt kaptunk, melyet igény szerint bármikor átprogramozhatunk, új funkciókat adva a rendszerhez. Például egy A/D-konverter hozzáépítésével, nem csak zajgenerálásra használhatjuk, hanem akár elemezhetjük is a vizsgált rendszerből jövő válaszokat, a vizsgálatok eredményét pedig közvetlenül meg is jeleníthetjük a műszer kijelzőjén.

## 4. fejezet

# Az $1/f$ -zajok szintmetszési tulajdonságainak vizsgálata

Egy véletlenszerű folyamat szintmetszeti statisztikájának általános meghatározása egy komoly probléma [62, 63]. Bár a kutatások egészen az 1940-es évekig nyúlnak vissza [27, 28, 29], az  $1/f^\alpha$  zajok szintmetszeteinek eloszlására még nem születtek kielégítő eredmények. Mivel ezek a statisztikák számos helyen hasznosak lehetnek (a sztochasztikus rezonancia vizsgálatokor [64], rendszerek azonosításakor [29], és egyéb helyeken), ezért célul tűztem ki ezen ismeretek bővítését.

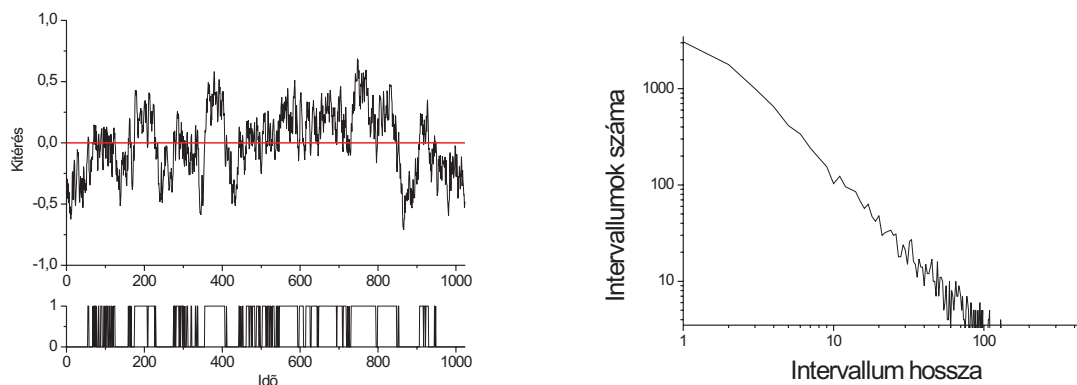
A szintmetszetek közötti intervallumokat a 4.1. ábrán szemléltetem. Megvizsgálhatjuk, hogy a véletlenszerű jel mennyi ideig tartózkodik egy kiválasztott szint alatt, illetve ugyan-ezen szint felett, mielőtt ismét áthaladna rajta.



4.1. ábra. Az egymás utáni szintmetszetek hossza. A  $T_{F,i}$  az  $i$ . szint feletti intervallum hossza, hasonlóan a  $T_{A,i}$  az  $i$ . szint alatti intervallum hossza

Magát a mérést többféleképpen véghezvihetjük; én azt választottam, hogy először kétértékűvé alakítottam a jelet a (4.1) egyenletnek megfelelően, majd ezek után meghatároztam a folytonosan egyes ill. folytonosan 0 értékű intervallumok hosszát. Magukat a szintmetszeteket, és azok irányát a csonkolt jel deriválásával is megkaphatjuk. A szintmetszeteken számos vizsgálatot hajthatunk végre, én először a szintmetszetek eloszlását vizsgáltam meg. A mérés folyamatotát a 4.2. ábrán szemléltetem.

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{ha } x_i \geq h \\ 0 & \text{ha } x_i < h \end{cases} \quad (4.1)$$



4.2. ábra. A szintmetszések és a szintmetszések közötti intervallumok eloszlásának szemléltetése. A zaj kitevője:  $\alpha = 1,5$

A mérések többségét numerikus szimulációk segítségével végeztem, e mellett felhasználtam valódi zajokat is, a numerikus szimulációk esetleges hibáinak ellenőrzésére. Ha nincsenek külön megemlítve, a szimuláció adatai a következők:

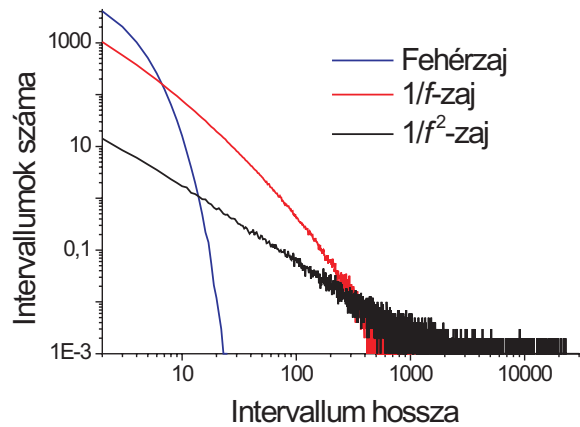
- adatsorok hossza:  $2^{16}$  pont
- átlagok száma: 1000
- zajgenerátor: fáziszajon alapuló (lásd a 3.5. ábrát)

A szimuláció diszkrét jellege ill. a véges méretű adatsor magával hordoz egy alsó és egy felső határfrekvenciát is. 1 Hz-es mintavételi frekvenciát feltételezve, a felső határfrekvencia 0,5 Hz-nek adódik, míg az alsó  $1,53 \cdot 10^{-5}$  Hz-nek felel meg. Ezeket a határfrekvenciákat figyelembe kell venni az adatok elemzésekor.

## 4.1. A szintmetszések hosszának eloszlása

A 4.3. ábrán azt mutatom be, hogyan függ a szintmetszések eloszlása a zaj típusától. Három zajtípust vizsgáltam, a fehérzajt, az  $1/f$ -zajt és a  $1/f^2$ -zajt. A metszett szint mindhárom esetben a zaj középértéke volt. A zaj kitevőjének növekedése csökkenti a rövid intervallumok számát, ugyanakkor növeli a hosszú intervallumok előfordulását. Ha megnézzük a zajok képét (2.7., 2.9. és 2.10. ábrák), akkor az eredmény könnyen érthetővé válik. A fehérzaj korrelálatlan, kicsi az esélye, hogy hosszabb egybefüggő intervallumokat kapjunk.  $1/f$  és  $1/f^2$ -zajok esetén a kitérés szépen „mászkal”, néha távolabb kerül a szinttől, néha pedig közelebb. Az  $1/f^2$ -zaj alsó határfrekvencia nélkül divergens, tehát messze elmehet a 0 értéktől, így igen hosszú intervallumok is létrejöhetnek.

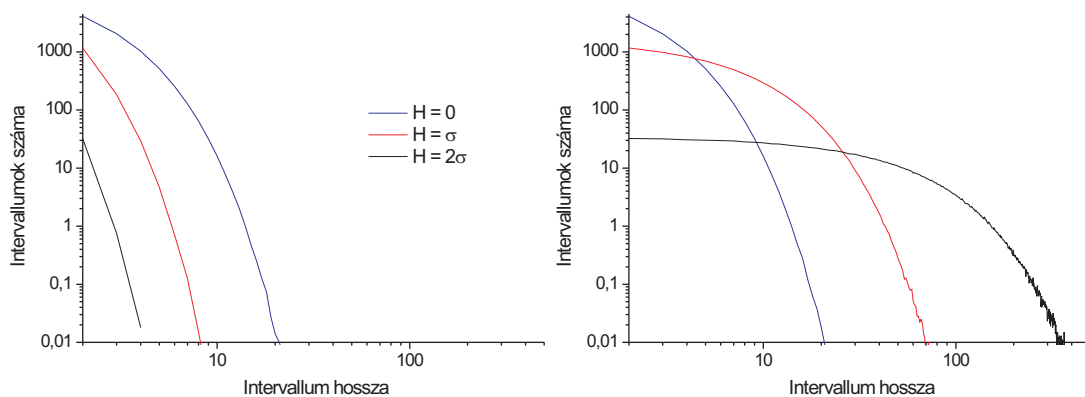
Mivel a metszett szint 0 volt, ezért a szint alatti és a szint feletti tartományok statisztikája a mérési hibán belül megegyezik. Ha a szintet eltoljuk a középértékhez képest, akkor külön-külön kell vizsgálnunk a szint alatti és a szint feletti intervallumok eloszlását, ezek ugyanis



4.3. ábra. A szintmetszetek eloszlásának függése a zaj típusától. Az ábrán az egy mérés alatt kapott intervallumok számát láthatjuk, az eredmény 1000 mérés átlaga.

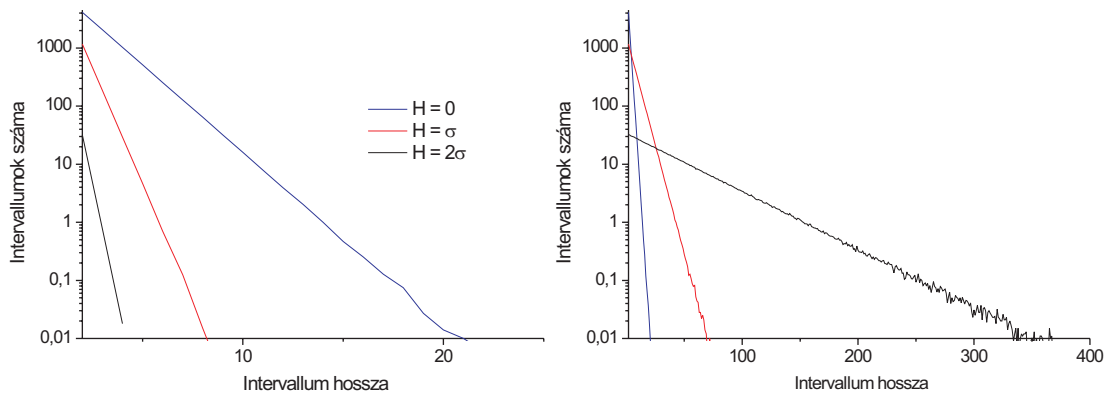
nem egyformán fognak változni. A továbbiakban a metszett szint nagyságát mindig a zaj szórásához képest adom meg (ez a szórás  $1/f^2$ -zajok esetén ez a szórás igen nagy is lehet).

Fehérezaj esetén jelentős az eltérés az alsó és a felső intervallumok eloszlása között (4.4. ábra). Ha növeljük a metszett szint nagyságát, akkor a jel egyre kevesebbet tartózkodik a szint felett (ez a Gauss eloszlásból is következik), és az intervallumok is rövidülnek. A szint alatti intervallumok hossza ugyanakkor megnő. Ha az  $x$  tengely nem logaritmusos, hanem lineáris, könnyen felismerhetjük, hogy az eloszlás exponenciális menetet követ (4.5. ábra).



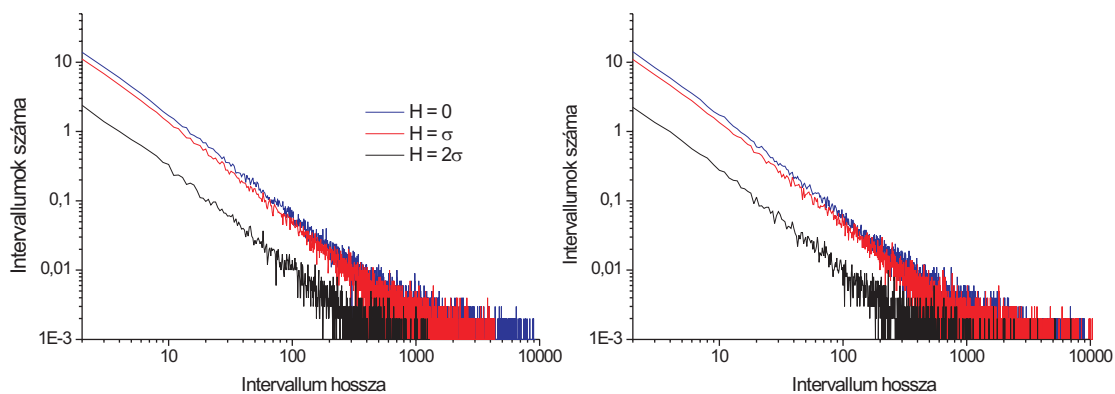
4.4. ábra. A szintmetszetek eloszlásának függése a metszett szinttől ( $H$ ) fehérezaj esetén. A bal oldalon a szint feletti tartományok eloszlása látható, a jobb oldalon pedig a szint alattiaké

$1/f^2$ -zaj esetén a szint alatti és a szint feletti tartományok eloszlása nem különbözik lényegesen egyik metszett szint esetén sem (4.6. ábra). Ugyancsak megfigyelhetjük, hogy a görbék menete nem függ a metszett szinttől, mindhárom esetben egy hatványfüggvényt illeszthetünk rájuk, és ezek meredeksége sem változik. Ezek alapján arra következtethetünk, hogy nincs igazán kitüntetett szerepe a 0 szintnek. Ha nem nulla a kiválasztott szint, akkor az



4.5. ábra. A 4.4. ábrán látható grafikonok, ha a vízszintes tengely nem logaritmusos, hanem lineáris. Felismerhető, hogy az eloszlás exponenciális lecsengésű

alsó határfrekvencia megléte az, ami befolyásolja az intervallumok számát. Ezt egy egyszerű modellel könnyű megérteni: ha a nulla pontból indulunk, akkor kell egy idő, amíg elérjük a vizsgált szintet (ez a szintmetszés szempontjából „elvesztegetett idő”), ezek után a folytatás viszont olyan, mintha az adott pontból indítottuk volna a rendszert.

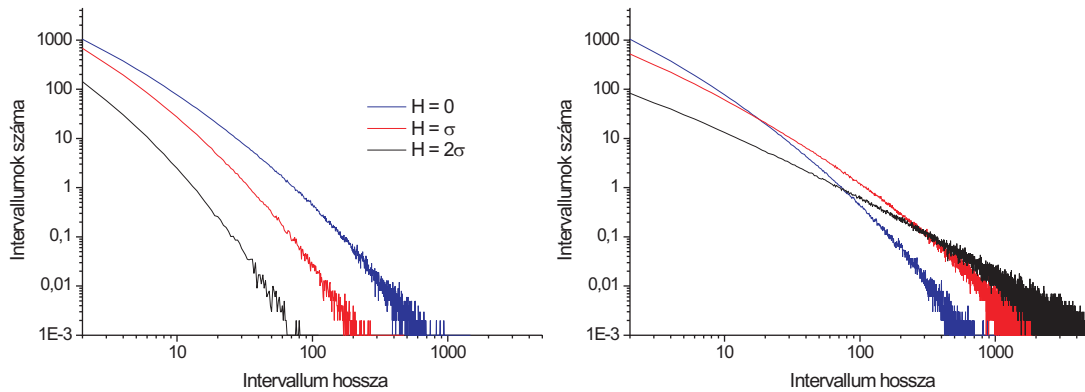


4.6. ábra. A szintmetszetek eloszlásának függése a metszett szinttől ( $H$ )  $1/f^2$ -zaj esetén. A bal oldalon a szint feletti, a jobb oldalon a szint alatti tartományok eloszlása látható

$1/f$ -zaj esetén nehéz konkrét következtetéseket levonni a grafikonok menetéből (4.7. ábra). A szint feletti tartományok száma és hossza is lecsökken, a szint alatti a rövid intervallumokból jóval kevesebb lesz, a hosszú intervallumokból valamelyest több.

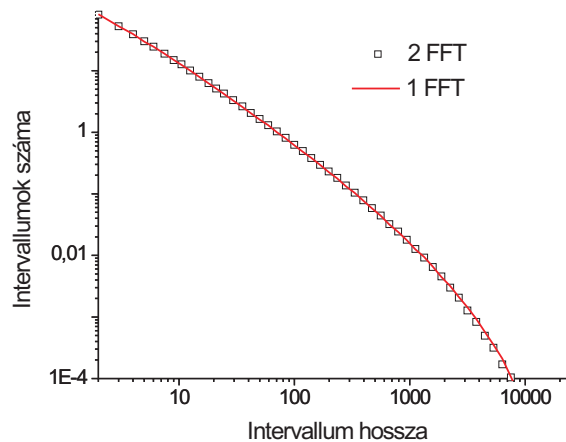
#### A szintmetszetek eloszlásának függése a zajgenerátor típusától

Fontosnak tartottam, hogy megvizsgáljam, függ-e a statisztika a zajgenerátorok típusától. Ha nem függ tőle, akkor bátran alkalmazhatunk különböző elven működő zajgenerátorokat a vizsgálatok során, azok végeredménye összehasonlítható lesz. Ha viszont a végeredmény nem csak az eloszlástól és a zaj kitevőjétől függ, akkor új paramétereket kellene bevezetnünk, melyek megkülönböztetik a zajgenerátorokat. A 4.8. ábrán hasonlítom össze az 1 FFT-t és a



4.7. ábra. A szintmetszetek eloszlásának függése a metszett szinttől ( $H$ )  $1/f$ -zaj esetén. A bal oldalon a szint feletti, a jobb oldalon a szint alatti tartományok eloszlása látható

2 FFT-t felhasználó zajgenerálási eljárást (lásd a 3.2. fejezetet). A fáziszajon alapuló, 1 FFT-s zajgenerátor kétszer olyan gyors, mint a 2 FFT-t felhasználó, így lényeges számolási időt lehet megtakarítani alkalmazásával. A két zaj által létrehozott szintmetszetek eloszlása között nincs lényeges eltérés.

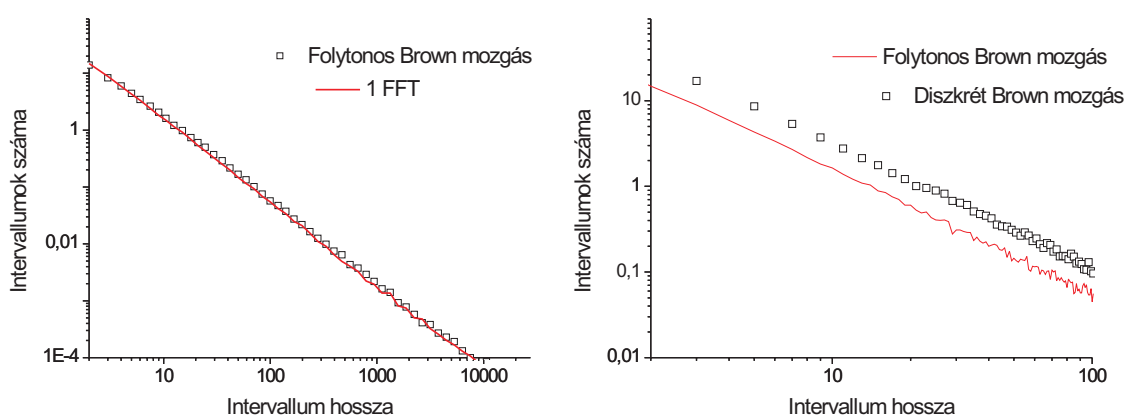


4.8. ábra. Az 1 FFT-t és a 2 FFT-t felhasználó zajgenerátorok összehasonlítása. A vizsgált zaj  $1/f$ , a metszett szint a 0

Mivel hosszú intervallumokból igen kevés van, a korábbi ábrákon igen nagy volt ebben a tartományban az eredmények szórása. A probléma több ezer átlag esetén is megmarad, ez pedig nehezíti a megbízható függvényillesztést is. Ezért a hosszabb intervallumok esetén már nem egyenként gyűjtöttem az egyes eseteket, hanem felbontottam azokat tartományokra, és az egy tartományon belül bekövetkező intervallumokat együtt számoltam, az eredményt pedig leosztottam a tartomány méretével. Ez annak felel meg, mintha bekövetkező intervallumokat egymás között átlagolnám. Az tartományok hossza egy logaritmikuskálának felel meg, vagyis rövid hosszak esetén kicsi a tartomány mérete (akár egyenként számolva),

hosszabb szintmetszetek esetén pedig egyre nagyobb. A tartományok hosszát úgy választottam ki, hogy az átlagolás okozta torzítás ne befolyásolhassa az illesztések pontosságát. Ezt a fajta átlagolást alkalmaztam a 4.8. ábra esetén is.

$1/f^2$  típusú zajok esetén van egy egyszerű modellünk a jel létrehozására: a Brown mozgás. Két változatát is használhatjuk a modellnek: az egyikben folytonos, normál eloszlású véletlen jelet használunk fel, a másikban pedig egy diszkrét,  $\pm 1$  értéket felvevő véletlen változót. A folytonos modell esetén a szintmetszetek eloszlása pontosan megegyezik a spektrális transzformációt alkalmazó esetével (4.9. ábra bal oldala). A diszkrét modell esetén csak páratlan hosszúságú intervallumok fordulhatnak elő (lásd később), az eloszlás menete viszont megegyezik a folytonos Brown-modelljével (4.9. ábra jobb oldala).



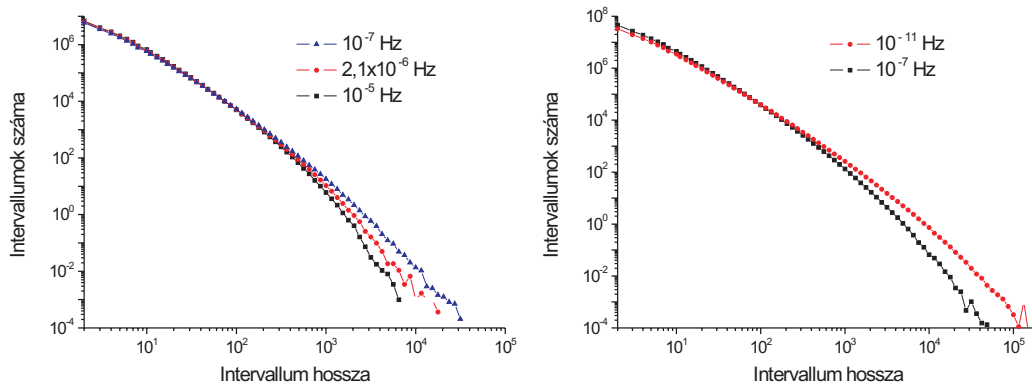
4.9. ábra. A különböző módon előállított  $1/f^2$  zajok nullmetszeteinek eloszlása

### A szintmetszetek eloszlásának függése a zaj határfrekvenciájától

Hogy megvizsgálhassam a zaj határfrekvenciájának hatását a szintmetszetek eloszlására, a 3.3. fejezetben leírt, digitális szűrésen alapuló zajgenerálási elvet alkalmaztam. A módszer hátránya a spektrális alak kötöttebb volta, előnye viszont, hogy a létrehozott adatsor hosszát mindössze a rendelkezésre álló idő korlátozza. A szimulációhoz különböző határfrekvenciájú  $1/f$  szűrőket használtam fel, ezek menetét előzetesen optimalizáltam. A szimulációt két egyforma hosszúságú részre osztottam. Az első felet arra használtam fel, hogy a szűrésből adódó tranziensek ne befolyásolhassák a végeredményt, és csak a második félben kapott intervallumokat tartottam meg. A végeredményhez 10 mérés átlagát használtam fel. A 4.10. ábra bal oldalán látható eredmények esetén a vizsgált adatsor hossza  $2^{26}$ , ez 7,8 dekádnak felel meg (a korábbi mérések hossza 4,8 dekádnak felel meg). Ugyanezen ábra jobb oldalán a minták száma  $2^{29}$  (8,7 dekád), így még alacsonyabb alsó határfrekvenciát érhetünk el. Megfigyelhetjük, hogy a határfrekvencia csökkentése jelentősen növeli a hosszú intervallumok valószínűségét, a görbe menete pedig egyre egyenesebb lesz.

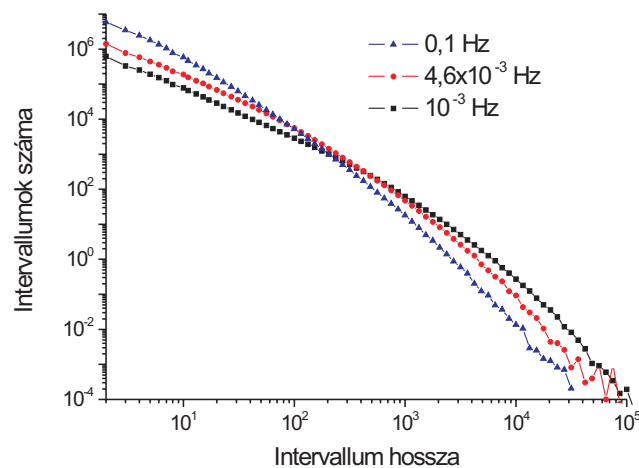
Hasonlóan megvizsgálhatjuk a felső határfrekvencia hatását a statisztika menetére. Ahogy a 4.11. ábrán láthatjuk, a felső határfrekvencia csökkenése jelentősen csökkenti a rövid intervallumok számát, miközben a hosszabb intervallumokból több lesz. A függvény alakját





4.10. ábra. A szintmetszetek eloszlásának függése az alsó határfrekvenciától. A bal oldalon a mérés hossza  $2^{26}$ , a jobb oldalon pedig  $2^{29}$  pont. A mérések során a felső határfrekvencia 0,1 Hz

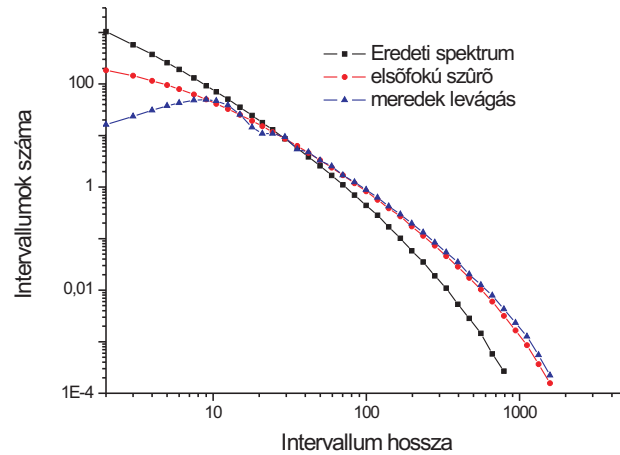
is befolyásolja, egyre nagyobb görbületet találhatunk benne. A frekvencialevágás jellege is befolyásolja a függvény menetét. A szűrésen alapuló zajgenerátor az alsó határfrekvencia alatt fehérzajnak megfelelő spektrális alakkal rendelkezik, a felső határfrekvencia felett pedig  $1/f^2$ -nek megfelelővel. Spektrális transzformációt alkalmazva tetszőleges levágást alkalmazhatunk, akár nullázhatjuk is egy bizonyos frekvencia feletti komponenseket. Ennek hatására oszcillációk jelennek meg a szintmetszetek eloszlásában (4.12. ábra).



4.11. ábra. A szintmetszetek eloszlásának függése a felső határfrekvenciától. A mérések során az alsó határfrekvencia  $10^{-7}$  Hz.

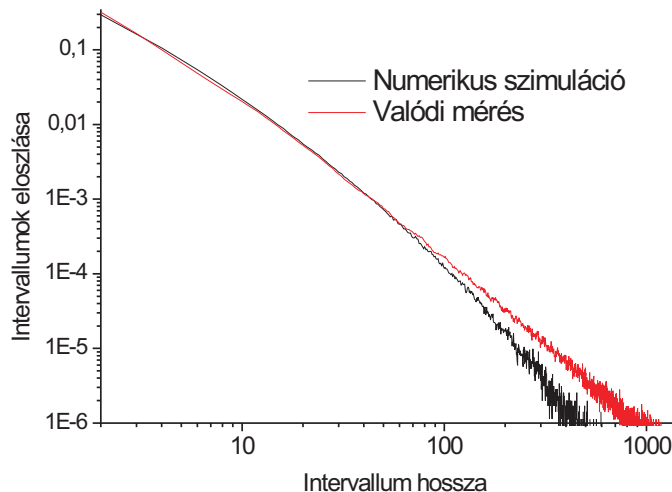
## 4.2. Az $1/f$ -zajok szintmetszeteinek mérése

A szintmetszetek méréséhez nem csak numerikusan generált zajokat használtam, hanem a 3.1.-es fejezetben ismertetett MOS-FET alapú zajgenerátort is felhasználtam. Ahhoz, hogy elegendően hosszú folytonos adatsort vizsgálhassak, merevlemezre illesztettem a méréshez



4.12. ábra. A frekvencialevágás módjának hatása a szintmetszetre

használt DAS-1414 eszközhöz [57, 65]. A zajgenerátor által előállított zajt először a merevlemezre rögzítettem, így egy folytonos, 256 megabyte-os adatsort kaptam, később ebből állapítottam meg a szintmetszések eloszlását. Az eredmény a 4.13. ábrán látható. A görbék menete hasonló, a hosszú intervallumok számának növekedése egyrészt a nagyobb alsó határfrekvencia következménye, másrészt pedig a zajgenerátor spektrumában is van egy kis kiemelés 1 Hz környékén (3.3. ábra), ez is módosíthatja az eloszlást.

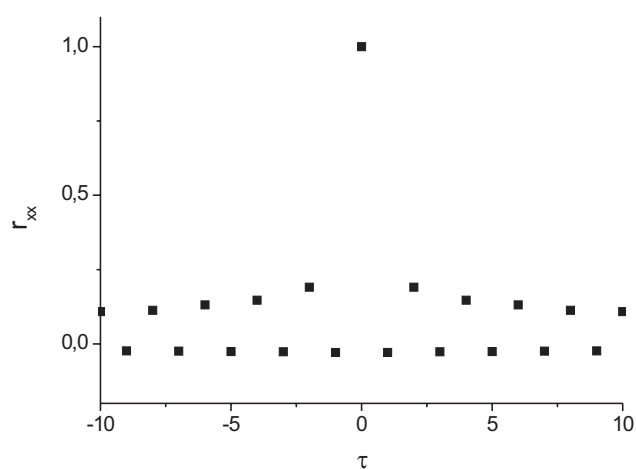


4.13. ábra. A numerikus szimuláció eredményének összehasonlítása az analóg méréssel. Az analóg mérés mintavételi frekvenciája 200 kHz

Megoldhatnánk azt is, hogy a szintmetszések detektálása is még az analóg tartományban történjen meg, ez viszont nem jelentene komoly előnyt a zaj mérésével szemben, magát a mintavételezést ebben az esetben sem spórolhatnánk meg.

### 4.3. Az $1/f$ -zajok szintmetszetei közötti korreláció

Felmerülhet a kérdés, hogy vajon az egymás utáni szintmetszetek hogyan viszonyulnak egymáshoz, van-e összefüggés közöttük, és ha igen, az hogyan függ a zaj típusától, vagy a metszett szint értékétől. A kérdés megválaszolásának egyik módja, hogy ha vesszük az egymás utáni szintmetszeteket, és kiszámoljuk az adatsor autokorrelációs függvényét. Az eredményt  $1/f$ -zaj esetén a 4.14. ábrán láthatjuk. A mérés azt mutatja, hogy jelentős korreláció van a szintmetszetek között. Ha például egy hosszú intervallumot kapunk az egyik oldalon, valószínű, hogy utána egy rövid következik a túloldalon, majd visszatérve ismét egy hosszabb intervallumot várhatunk.

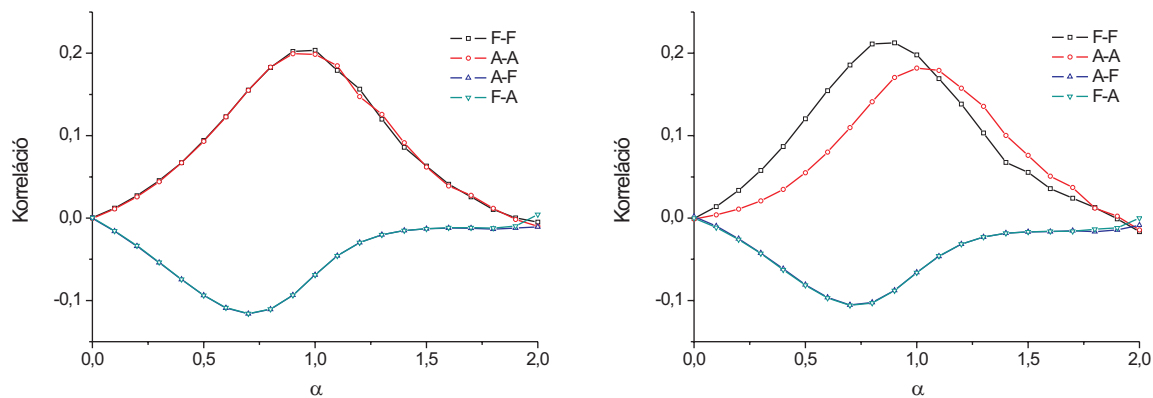


4.14. ábra.  $1/f$  zaj esetén az egymást követő szintmetszetek közötti korreláció. A minta hossza  $2^{22}$  pont, a felső határfrekvencia 0,1 Hz, az alsó pedig  $10^{-7}$  Hz

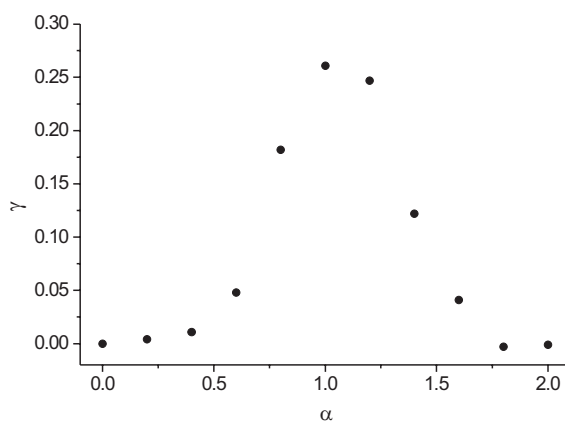
Mivel a szint alatti és a szint feletti tartományok másképp viselkednek, érdemes őket külön vizsgálni. Ezért külön-külön számoltam ki a korrelációt az egymás után következő két szint feletti intervallumra (F-F), a szint feletti és az azt követő, a szint alatti intervallumra (F-A), az egymást követő szint alatti intervallumokra (A-A), majd a szint alatti és az azt követő intervallumra (A-F). Az eredmény a 4.15. ábrán látható, a bal oldalon akkor, ha a metszett szint nulla, a jobb oldalon pedig akkor, ha a metszett szint szórása egységnyi.

Ugyancsak információt kaphatunk a szintmetszetek közötti korrelációra, ha az egymás utáni szintmetszetek adatsorát Fourier transzformáljuk. A spektrumra illesztett egyenes meredeksége arányos az egymást követő szintmetszetek közötti korrelációval. Ahogy a 4.16. ábrán láthatjuk,  $1/f$ -hez hasonló zajokra a legerősebb a korreláció, ez megfelel a 4.15. ábra eredményének.

Fehérzaj esetén könnyen megérthetjük, hogy miért nincs az egymást követő szintmetszetek között korreláció: a zaj teljesen korrelálatlan, semmilyen paraméter nem függ a zaj



4.15. ábra. Az egymást követő szintmetszetek közötti korreláció a zaj kitevőjének függvényében. A bal oldalon 0 metszett szint esetén, a jobb oldalon pedig egységnyi nagyságú szint esetén



4.16. ábra. A szintmetszetek spektrumára illesztett egyenes meredeksége ( $\gamma$ ). A legerősebb autokorrelációt  $\alpha = 1$  környékén tapasztaljuk

korábbi adataitól.  $1/f^2$ -zaj esetén erős korreláció van a zaj egymást követő pontjai között, ennek ellenére a szintmetszetek függetlenek egymástól. A zaj aktuális értéke kizárólag csak a korábbi adatponttól függ (lásd a Brown-modellt), tehát a szintmetszet utáni menete független a szintmetszetet megelőző állapottól.

Az  $1/f$ -zaj nem markovi tulajdonságú, a zaj aktuális értéke nem határozható meg csupán véges számú korábbi érték segítségével. Ez okozhatja a jelentős korrelációt a szintmetszetek között. Ha megpróbálunk a szintmetszetek statisztikáját, és a szomszédos szintek közötti korrelációt felhasználva létrehozni egy kétértékű (dichotóm) zajt, akkor annak spektruma lorentzi alakú lesz. Az  $1/f$ -zaj viszont invariáns a dichotómikus transzformációra. Tehát mindössze a szintmetszetek közötti korrelációt felhasználva nem tudjuk „visszagenerálni” az őt létrehozó  $1/f$ -zajt.

## 4.4. Elméletek a szintmetszetek statisztikájára

A fehérzaj és  $1/f^2$ -zaj keletkezésére egyszerű modelljeink vannak, így könnyen le tudjuk vezetni, hogy milyen eredményt várhatunk a szintmetszetek eloszlására.

### Modell a fehérzaj szintmetszeteire

Fehérzaj esetén az egymás utáni pillanatokban (mintavételi helyeken) a zaj független bármilyen korábbi értékétől (a zaj korrelációs ideje kisebb mint a mintavételek közötti idő). Annak a valószínűségét, hogy egy adott időpillanatban a zaj kitérése ( $x_i$ ) a vizsgált szint felett van  $p$ -vel jelölöm. Így  $1-p$  annak a valószínűsége, hogy a jel a szint alatt legyen. Induljunk ki egy olyan pillanattól, amikor a jel a szint felett van. Annak a valószínűsége, hogy pontosan  $l$  lépés után tér át a másik oldalra (de előtte nem):

$$p_l = p^{l-1} \cdot (1-p) \quad (4.2)$$

Ez az egyenlet a geometriai eloszlásnak felel meg (lásd a (2.20) egyenletet), mindössze a  $p$  paraméter szerepe más. Ennek megfelelően az átlagos mintahossz (2.21):

$$\langle l \rangle = \frac{1}{1-p} \quad (4.3)$$

Az összes szintmetszet számát úgy határozhatjuk meg, hogy ha a szint feletti tartózkodás idejét ( $T$ ) leosztjuk az átlagos intervallumhosszal.

$$T = p \cdot L, \quad (4.4)$$

$$N = L \cdot p \cdot (1-p), \quad (4.5)$$

ahol  $L$  a minta hossza. Ebből az  $l$  hosszúságú intervallumok száma:

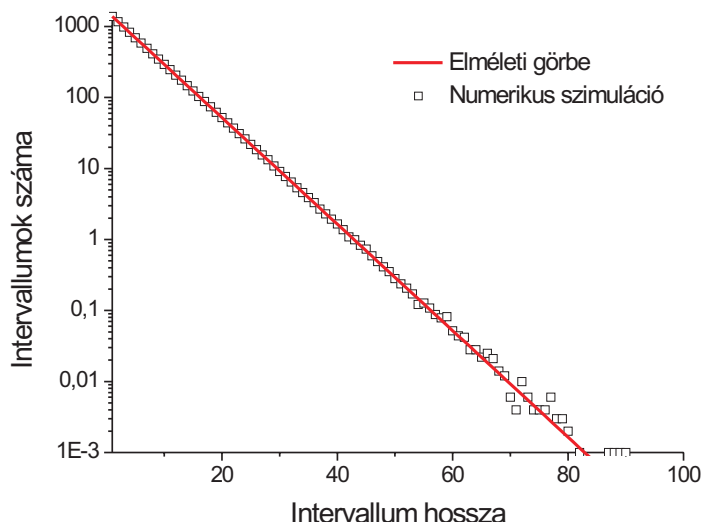
$$N_l = L \cdot p^l \cdot (1-p)^2 \quad (4.6)$$

$(1-p)$ -t behelyettesítve ugyanezt az eredményt kapjuk a szint alatti tartományokra. Az intervallumok összes száma megegyezik a szint felett lévőkkel, ez a (4.5) egyenletből is jól látható.

A képletben szereplő  $p$  valószínűség értéke csupán a metszett szint értékétől és a zaj szórástól függ:

$$p = \int_h^\infty p(x) dx = 1 - \int_{-\infty}^h p(x) dx, \quad (4.7)$$

ahol  $h$  a metszett szint értéke,  $p(x)$  pedig a zaj eloszlásfüggvénye, munkámban normál eloszlású zajokat használtam. A 4.17. ábrán a szimuláció során kapott eredményeket hasonlítom össze az elmélet által jóslottal, az egyezés kielégítő.



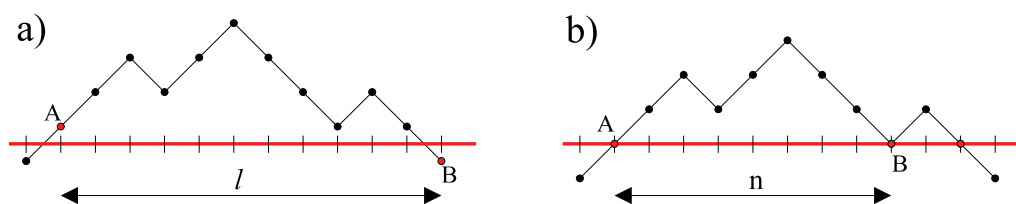
4.17. ábra. A numerikus szimuláció eredményeinek összehasonlítása az elméleti jóslattal fehérzaj esetén. A metszett szint,  $h = -\sigma$ ,  $p = 0,8413$

### Modell az $1/f^2$ -zaj szintmetszeteire

Az  $1/f^2$ -zaj modelljeként a diszkrét Brown mozgást alkalmaztam. Itt az egyes zajértékeket a következő rekurzív formulával határozhatjuk meg:

$$x_i = x_{i-1} \pm 1 \quad (4.8)$$

Ekkor két értelmezést is alkalmazhatunk a szintmetszetre: egyrészt, az eddig használt módszerhez hasonlóan először csonkoljuk a zajt, majd utána állapítjuk meg a szintmetszeteiket, másrészt tekinthetjük szintmetszetnek azt az időpontot, amikor pont egy adott szinten tartózkodik a „részeskén” (utóbbit a [66] műben alkalmazták). A két értelmezés közötti különbséget a 4.18. ábrán szemléltetem.



4.18. ábra. A szintmetszetelek értelmezésének két lehetséges változata

A csonkolás definíciójában „ $\geq$ ” szerepel (4.1), ez annak felel meg, mintha az a) esetben a metszett szint épp két lehetséges érték között lenne. Az ábra alapján érthetjük, hogy ebben az esetben csak páratlan hosszúságú intervallumaink lesznek. A b) értelmezésben az egymást követő szintek nem feltétlenül vannak ellentétes oldalon, és csak páros intervallumhosszakot kapunk. Én az a) modellt alkalmaztam (ez felelt meg leginkább a szimuláció feltételeinek), a számoláshoz viszont felhasználtam a b) értelmezéshez tartozó eredményeket [66]. Az intervallum hossza helyett, technikai okokból, a számolás során az  $n = l + 1$  változót használom.

A jel sokféleképp juthat az  $A$  pontból a  $B$  pontba, ennek során  $n/2$  lépést fog lefelé lépni,  $n/2 - 1$  lépést felfelé. A lehetséges utak száma:

$$P_n = \binom{n-1}{n/2} = \frac{1}{2} \cdot \binom{n}{n/2} \quad (4.9)$$

Az útvonal valószínűségét megkaphatjuk, hogy ha az útvonalak számát leosztjuk az összes lehetséges útvonal számával:

$$p_n = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot P_n = \frac{1}{2^n} \cdot \binom{n}{n/2} \quad (4.10)$$

A b) esetben hasonlóan kapjuk meg az  $A$  pontból a  $B$  pontba való jutás útvonalainak számát:

$$P'_n = \binom{n}{n/2} \quad (4.11)$$

Az eddig vizsgált pályák között vannak olyanok is, amikor a részecske már hamarabb áttért a túloldalra, ezek számát ki kell vonnunk a kapott eredményből. Jelölje  $Q_n$  azon pályák számát, melyek pontosan  $l$  lépés után térnek át a túloldalra, hamarabb nem. Azon pályák száma, melyek pont az  $(i - 1)$ -edik időpillanatban térnek át a túloldalra, és utána eljutnak a  $B$  pontba:

$$R_i = Q_i \cdot P'_{n-i} \quad (4.12)$$

Ha az összes, már korábban is áttért útvonalak számát ( $R_i$ ) kivonjuk a  $P_n$  számból, akkor megkapjuk a keresett  $Q_n$  számot:

$$Q_n = P_n - \sum_{i < n} Q_i \cdot P'_{n-i} \quad (4.13)$$

Hasonló eredményt kaphatunk a b) értelmezésre is:

$$Q'_n = P_n - \sum_{i < n} Q'_i \cdot P'_{n-i} \quad (4.14)$$

A  $p_n$  valószínűséghez hasonlóan meghatározhatjuk annak valószínűségét is, hogy pont az  $(n - 1)$ -edik időpillanatban jut át a részecske a túloldalra. Ehhez felhasználtam a [66] munkában kapott eredményeket, így:

$$q_n = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot Q_n = \frac{1}{2^n \cdot (n - 1)} \cdot \binom{n}{n/2} \quad (4.15)$$

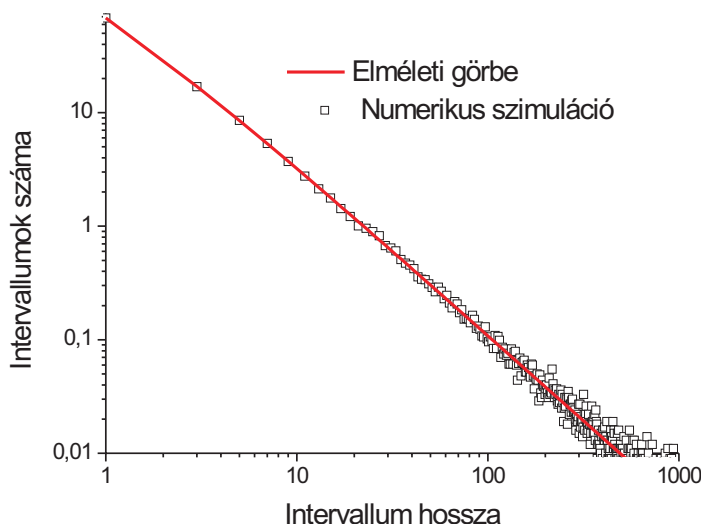
Nagy  $n$  értékekre a Stirling-formula segítségével egyszerűsíthetjük a végeredményt:

$$n! \approx \sqrt{2\pi} \cdot e^{-n} \cdot n^{n-1/2} \Rightarrow q_n \propto \frac{1}{n^{1.5}} \quad (4.16)$$

Hogy az intervallumok pontos számát meghatározhatjuk, ismernünk kell az átlagos intervallumhosszat. Ezt a következőképp határozhatjuk meg:

$$\langle n \rangle = \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot q_n \propto \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (4.17)$$

Sajnos ez az összeg végtelen. A Brown-mozgást ismerve, ez nem meglepő, az ugyanis divergens. A szimuláció során az alsó határfrekvencia bevezetése korlátozza az intervallumok maximális számát. Az eredmények összehasonlításánál a numerikus szimulációban kapott intervallumok számát használtam fel. Az (4.15) egyenletnek megfelelő eredményt a 4.19. ábrán láthatjuk. Ha a Stirling-formulának megfelelő közelítést alkalmazzuk, az a rövid intervallumok tartományában addig egy kis eltérést, a szimuláció kicsivel az illesztett egyenes alatt halad.

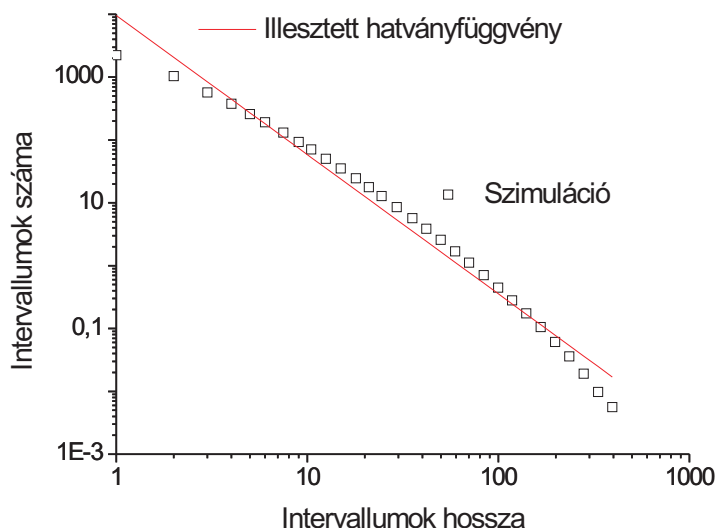


4.19. ábra. A numerikus szimuláció eredményeinek összehasonlítása az elmélet által jóslattal Brown mozgás esetén. A metszett szint a zaj középértéke

#### Függvény illesztése az $1/f^\alpha$ -zaj szintmetszeteinek eloszlására

$1/f$ -zajra sajnos nincs egyszerű modellünk a szintmetszetek statisztikájának levezetésére. A zaj fraktáltulajdonságai alapján bizonyos források arra utalnak, hogy ekkor is hatványfüggvényt kell kapjunk [15]. Ha azonban a kísérleti eredményekre egy egyenest illesztünk (log-log skálán), láthatjuk az eltérést (4.20. ábra). Mind a rövid, mind a hosszú intervallumok esetén kevesebb intervallumot kapunk, mint ami a helyes illeszkedéshez szükséges volna. Figyelembe véve a zaj sávszélességére vonatkozó szimulációkat, úgy vélem, hogy az eltérés jelentős részét a zaj sávszélességének korlátos volta okozza. Úgy tűnik, hogy  $1/f$ -zajok esetén ezek hatása sokkal jelentősebb, mint a többi zaj esetén, ahol a kísérletek eredménye megegyezett az elméletek által jóslottal.



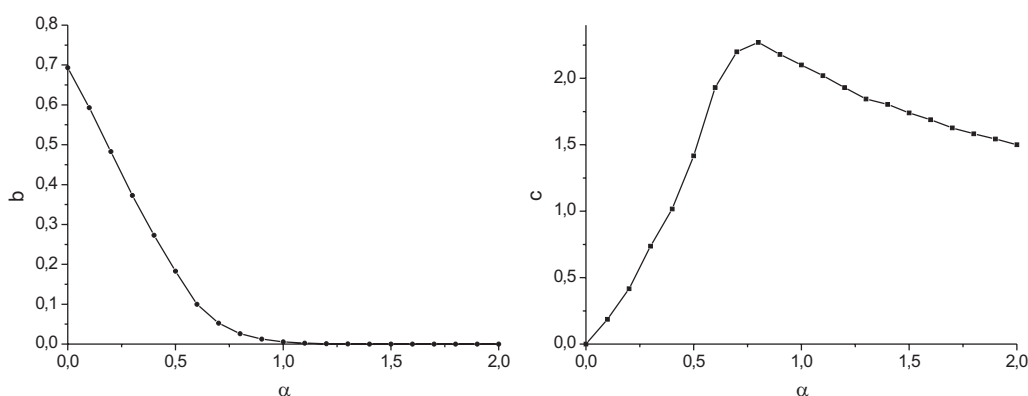


4.20. ábra.  $1/f$ -zaj esetén az eloszlásra illesztett hatványfüggvény jelentősen eltér a szimuláció eredményétől

Megpróbáltuk néhány paraméterrel leírni a szintmetszetek eloszlásának változását a zaj kitevőjének függvényében. Úgy gondoltuk, az a leghelyesebb, hogy ha illesztett függvényként kombináljuk a fehérzajra ill. az  $1/f^2$ -zajra kapott eredményeket, így az illesztett függvény alakja:

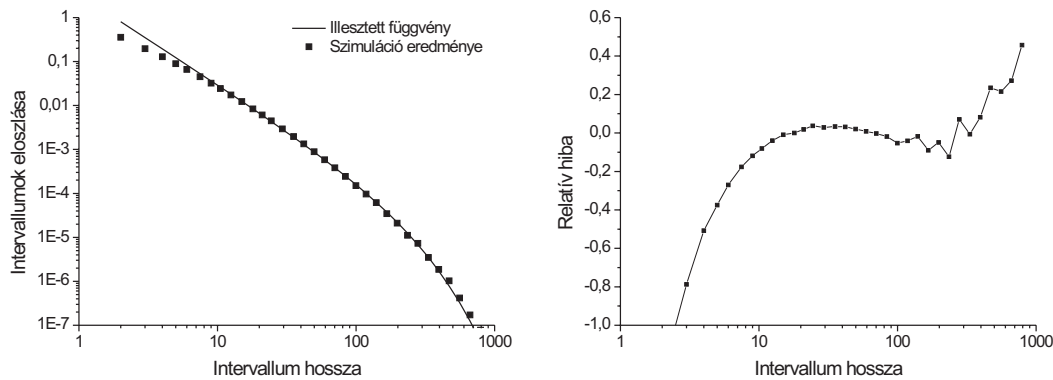
$$p(t) \propto \frac{e^{-bt}}{t^c}, \quad (4.18)$$

ahol a  $b$  és a  $c$  paraméter függését vizsgáltam a zaj kitevőjének ( $\alpha$ ) függvényében. Az illesztések eredményét a 4.21. ábrán láthatjuk.



4.21. ábra. A  $b$  és  $c$  paraméterek függése az  $1/f^\alpha$ -zaj kitevőjétől. Az ábra nemlineáris illesztések eredménye. Megfigyelhetjük, hogy a görbék menete jelentősen megváltozik az  $1/f$ -zaj környékén

Ez a függvény elég jól illeszkedik az eloszlás alakjára az egész tartományban, a legjelentősebb eltérés sajnos pont az  $1/f$  zaj környékén van, itt is elsősorban a rövid és a hosszú



4.22. ábra. Az illesztés hibája  $1/f$ -zaj esetén, közepes hosszúságú intervallumok esetén jó, a tartomány szélén már jelentősebb az eltérés

intervallumok esetén (4.22. ábra). Fehérzajra exponenciális menetet kapunk ( $c = 0$ ), ha növeljük  $\alpha$ -t, elkezd csökkenni az exponenciális tag (amely az  $1/f$ -zaj környékén kezd eltűnni), a görbe menete pedig egyre inkább hatványfüggvény jellegű lesz,  $1/f^2$ -zajra pedig visszakapjuk az elmélet által jósló eredményt.

A kísérleti eredmények alapján Fuchikami és társai dolgoztak ki egy elméletet a szintmetszetek eloszlására [69]. Az elmélet nem vette figyelembe a szintmetszetek közötti korrelációt, és a zaj esetleges határfrekvenciáit sem. Eredményként azt kapták, hogy a szintmetszetek eloszlása  $1/t^c$  alakú kell legyen, továbbá meghatározták a  $c$  paraméter függését a zaj kitevőjétől:  $c = 3 - \alpha$ , ha  $0 < \alpha < 1$  és  $c = (5 - \alpha)/2$ , ha  $1 < \alpha < 2$ . Ha a 4.21. ábrával összehasonlítjuk az eredményt, jó egyezést kaphatunk ha  $\alpha > 0,7$ , ezen érték alatt ez az elmélet már nem tűnik megfelelőnek. Kiegészítve az elméletet azzal, hogy a mérések során az intervallumok hossza kizárólag diszkrét értékeket vehet fel (a mintavételezés miatt), az elmélet már a teljes tartományban megfelelt a kísérleti eredményeknek [70].

## 4.5. Az eredmények rövid összefoglalása

Számos numerikus szimulációt végeztem annak érdekében, hogy megvizsgáljam az  $1/f^\alpha$ -zajok szintmetszeteinek eloszlását és a közöttük lévő korrelációt. Eredményül azt kaptam, hogy a szintmetszetek statisztikája nem függ a zajgenerálás módjától, hanem kizárólag a zaj spektrális alakjától és annak eloszlásától. Bizonyos tulajdonságok arra utalnak, hogy az  $1/f$ -zaj valahol a fehérzaj és az  $1/f^2$ -zaj között helyezkedik el, ám számos esetben az  $1/f$ -zaj tulajdonságai kitűnnek a hozzá hasonló zajok közül. Egyrészt, ha a szintmetszetek közötti kapcsolatot vizsgáljuk, akkor az  $1/f$  jellegű zajok esetén kapjuk a legerősebb korrelációt az egymás utáni szintmetszetek között. Hasonlóan a szintmetszetre illesztett függvény paraméterei is  $1/f$ -zajok esetén változnak a leginkább.

Az elméletek  $1/f$ -zaj esetén hatványfüggvényt jósolnak a szintmetszetek eloszlására, itt van némi eltérés az elmélet és a gyakorlat között. A kísérleti eredmények ugyanakkor arra utalnak, hogy az eltérés egyik fő oka a korlátozott sáv szélesség lehet, úgy tűnik, hogy az  $1/f$ -zaj erősen érzékeny ezekre a paraméterekre.

Az elért eredmények segíthetnek megérteni olyan folyamatokat ill. rendszereket, ahol a zaj valamiféle küszöbszinten halad át (mint a sztochasztikus rezonancia esetén), vagy ahol a zaj által indukált állapotváltás jön létre a rendszer állapotában. Ilyen rendszerek lehetnek a jelenleg még vizsgálat alatt álló ioncsatorna-áramokkal kapcsolatos jelenségek, ahol szintén  $1/f$  jellegű zajokat figyeltek meg [67, 68].

## 5. fejezet

# A zajanalízis alkalmazásai

A kutatócsoport, amelynek tagja vagyok számos területen alkalmazza a zajok vizsgálata során felhalmozott tapasztalatokat, mérőeszközöket és adatfeldolgozási módszereket.

A zaj néha több információval szolgálhat, mint maga a determinisztikus jel. Ha egy gázszenzor esetén nem csak a kimenő jel átlagos értékét vizsgáljuk, hanem a váltakozó feszültségű, zaj jellegű komponenst is, növelhetjük a szenzor érzékenységét, és akár a szelektivitását is [71]. Az emberi szervezetben is fellépnek véletlenszerű jelek, amelyek diagnosztikai jelentőséggel bírnak. Ilyen például a szívritmus véletlenszerű fluktuációja is. Ha ez a fluktuáció túl kicsi, az komoly problémákat jelezhet előre [72]. Hasonlóan, gyógyszerek tesztelésekor is a szívritmus változása hasznos információforrás [73]. A zajokat felhasználhatjuk a kriptográfiában is, például két vezetéken, a kvantumteleportáció biztonságát elérő, lehallgathatatlan adatátvitelt valósíthatunk meg [11, 13].

Nem csak a zajból származó információk érdekesek, hanem az is, hogy a zaj hogyan befolyásolja a rendszerek viselkedését. Dolgozatomban, a következőkben két olyan munkát részletezek, melyekben a zaj konstrukív szerepet tölt be.

### 5.1. Sztochasztikus rezonancia aperiodikus gerjesztőjelek esetén

A sztochasztikus rezonancia gondolata először a jégkorszakok vizsgálatakor merült fel: a jégkorszakok változását leíró egyenletek azt mutatták, hogy a Föld pályájának változásai önmagukban nem magyarázzák a jégkorszakok bekövetkeztét. Ha viszont a Föld albedójának véletlenszerű változását is bevezetjük, akkor az egyenletek már jobban leírják a Föld klímájának változását [35, 36].

Ha meg akarjuk fogni a sztochasztikus rezonancia lényegét, akkor arra gondolhatunk, hogy a zaj valamilyen formában segíti azt, hogy egy jel elérje a rendszer küszöbszintjét. Általánosabb értelemben a sztochasztikus rezonancia egy olyan mechanizmus, amely során a

rendszerben lévő, vagy a rendszerhez hozzáadott zaj a nemlineáris rendszert érő gerjesztés hatását felerősíti. A sztochasztikus rezonancia kvantitatív elemzésére a jel-zaj viszonyt (SNR, *Signal to Noise Ratio*), ill. a jel-zaj viszony erősítést (SNR-gain) használhatjuk. A sztochasztikus rezonancia jelenségét azért hívjuk rezonanciának, mert csak megfelelő zajmennyiség esetén kapunk a kimeneten jelentős jel-zaj viszony javulást: ha túl kevés zaj van a rendszerben, akkor előfordulhat, hogy egyáltalán nem kapunk a kimeneten jelet, ha pedig túl sok a zaj, akkor az már elnyomja a hasznos jelet. A jel-zaj viszony erősítés grafikonja így nagy hasonlóságot mutat az egyéb tudományterületeken megfigyelhető rezonancia jelenségéhez.

A sztochasztikus rezonanciát számos, elsősorban nemlineáris rendszerben figyelték meg: statikus rendszerekben [74], mint a szintmetszédetektor (LCD, *Level Crossing Detector*) [75, 76], vagy a Schmitt trigger (ST) [77], valamint számos dinamikus rendszerben, mint a dupla potenciálvölgy (DW, *Double Well*) [78], neuronmodellekben [32], halak érzékelésében [33], és technikai alkalmazásokban is, többek között lézerekben [34].

Bár a sztochasztikus rezonancia segítheti a jelek érzékelését, a technikai hasznosításán nem sok megoldás alapul: a jel-zaj viszony növelésére sokkal alkalmasabbak a hagyományos, analóg vagy digitális szűrők, esetleg mintafelismerő algoritmusok. A sztochasztikus rezonancia ugyanakkor számos helyen előfordul a természetben, általában ott, ahol egy gerjesztés nem éri el a rendszer küszöbszintjét. A sztochasztikus rezonancia ezen jelenségek vizsgálatkor nyújthat segítséget. E rendszerekben a gerjesztő jelek ritkán periodikusak, így számos kutatás irányult arra, hogy a sztochasztikus rezonancia jelenségét összehozza az aperiodikus jelek vizsgálatával [79, 80, 81, 82, 83, 84].

A sztochasztikus rezonancia kvantitatív vizsgálatának egyik fő eleme a jel és a zaj mennyiségének szétválasztása. Ez főleg aperiodikus esetekben okoz gondot, ugyanis a legtöbb elterjedt jel-zaj viszony meghatározás csak harmonikus, de legalábbis periodikus jelekre használható. Számos próbálkozás volt a probléma megoldására, egyrészt próbálkozhatunk kereszt-korrelációval (vagy hozzá hasonló mennyiségekkel) [80, 81], kereszt-spektrális analízissel [75], és információelméleti megfontolásokkal [82, 83, 84].

Mi a munkánk során a kereszt-korrelációs és a kereszt-spektrális elemzéseket követtük. Három rendszert elemeztünk, a dupla potenciálvölgyet kevert jelű szimulációval, a Schmitt trigger és a szintmetszédetektort pedig numerikus szimulációval vizsgáltuk. Gerjesztőjelként használtunk periodikus jelet (szinusz, periodikus négyszögimpulzusok), és aperiodikus jelet (impulzussorozat és keskenysávú zaj).

### 5.1.1. A jel-zaj viszony mérése

Ahhoz, hogy a sztochasztikus rezonancia jelenségét kvantitatívan jellemezni tudjuk, szükségünk van arra, hogy a vizsgált jelek zaj és jeltartalmát megbízhatóan külön tudjuk választani.

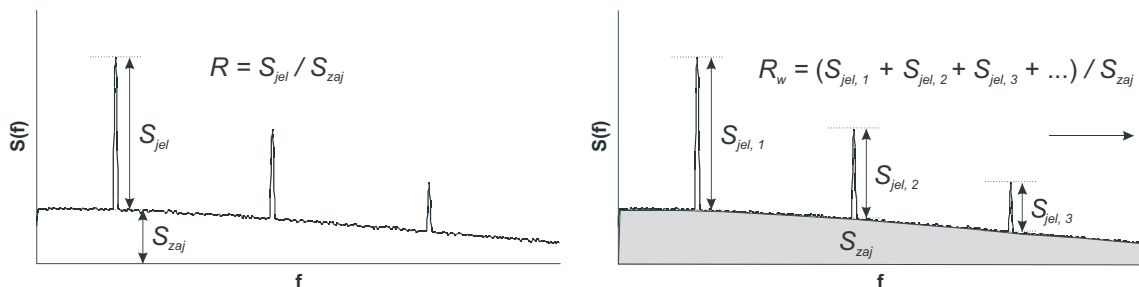
Az irodalomban leginkább elterjedt módszert a jel-zaj arány (SNR) jellemzésére a következő egyenlet írja le [85]:

$$R = \frac{\lim_{\Delta f \rightarrow 0} \int_{f_0 - \Delta f}^{f_0 + \Delta f} S(f) df}{S_N(f_0)}, \quad (5.1)$$

ahol  $f_0$  a jel frekvenciája,  $S(f)$  a jel teljesítménysűrűség-spektrumát jelöli, a  $S_N(f)$  pedig a háttérzaj mennyiségét jelenti. Ez az egyenlet kizárólag az első harmonikust és annak környezetét vizsgálja, így elsősorban szinuszos jelek esetén alkalmas a zajtartalom leírására. Ezt a definíciót keskenysávú definíciónak fogom nevezni. Munkánk során egy ettől eltérő, sokkal praktikusabb definíciót alkalmaztunk a jel-zaj viszony leírására:

$$R_w = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \int_{k f_0 - \Delta f}^{k f_0 + \Delta f} S(f) df}{\int_0^{\infty} S_N(f) df} \quad (5.2)$$

Ez a definíció figyelembe veszi a jel összes felharmonikusát és a teljes zajteljesítményt, ezért szélessávú jel-zaj viszonyként fogok rá hivatkozni. Ez az egyenlet már nem csak szinuszos gerjesztéseket jellemez megfelelően, hanem tetszőleges periodikus gerjesztést, ráadásul sokkal realiztikusabban írja le a jel-zaj viszony javulását a rendszerben [78]. A két módszer összehasonlítását az 5.1. ábrán láthatjuk.



5.1. ábra. A jel és a zaj szétválasztása keskeny- és szélessávú jel-zaj viszony esetén [72]

Mindkét módszernél a fő nehézség a jel és a zaj szétválasztása. Egyik lehetőségként megpróbálhatjuk, hogy jel nélkül vizsgáljuk a rendszer bemenetén és kimenetén mérhető zaj mennyiségét, és a továbbiakban ezt tekintjük a zaj mennyiségének. Sajnos ez a megoldás a vizsgált nemlineáris rendszerekben nem használható, ugyanis nem veszi figyelembe a jel és a zaj közötti keresztmodulációt, vagyis azt, hogy a jel jelenléte befolyásolja a zaj átvitelét is.

Periodikus jelek esetén, ha egész számú periódust mérünk, biztosíthatjuk, hogy ne legyen spektrális szétfolyás, így a jel teljesítménye kizárólag diszkrét spektrumvonalakban fog összpontosulni, ami ezen vonalakon kívül helyezkedik el az bizonyosan a zajtartalomhoz tartozik. A felharmonikusok helyén a zaj mennyiségét a felharmonikusok körüli zajspektrum átlagolásával közelíthetjük, maga a jel pedig a teljes teljesítmény és az így becsült zajteljesítmény

különbsége. Ez a módszer sokkal megbízhatóbb, ha a zaj spektruma viszonylag lassan változik.

Aperiodikus jelek esetén a jelteljesítmény nem korlátozódik diszkrét frekvenciákra, így sem a keskenysávú, sem a korábban bevezetett szélessávú jel-zaj viszony nem használható a jelek jellemzésére. A jelek szeparációja így komolyabb analízist követel meg. *Kish László* munkája nyomán [75], egyik megközelítésként, mi a kereszt-spektrális analízisen alapuló módszert választottuk. A módszer alapján a kimeneten azt tekintjük jelnek, aminek „köze van” a bemenetre vezetett hasznos jelhez, ezt pedig a kereszt-spektrummal tudjuk meghatározni. A kimeneten lévő jel teljesítménysűrűség-spektrumát ( $S_{out}^{sig}(f)$ ) a következő egyenlettel határozhatjuk meg:

$$S_{out}^{sig}(f) = \frac{|S_{in, out}(f)|^2}{S_{in}^{sig}(f)}, \quad (5.3)$$

ahol  $S_{in, out}(f)$  a gerjesztőjel és a teljes kimenet közötti kereszt-teljesítménysűrűség-spektrum,  $S_{in}^{sig}(f)$  pedig a gerjesztőjel teljesítménysűrűség-spektruma. A helyes eredményhez mindkét mennyiséget külön-külön átlagolnunk kell. Mivel a bemenőjel és a zaj között nincs korreláció, ezért a zaj teljesítményét megkaphatjuk, ha a teljes teljesítményből kivonjuk a jel teljesítményét:

$$S_{out}^{noi}(f) = S_{out}^{tot}(f) - S_{out}^{sig}(f), \quad (5.4)$$

ahol  $S_{out}^{noi}(f)$  a zaj teljesítménysűrűség-spektruma, a  $S_{out}^{tot}(f)$  pedig a teljes kimenet teljesítménysűrűség-spektruma. Így a kereszt-teljesítménysűrűségen alapuló, szélessávú jel-zaj viszony definíciója a kimeneten ( $R_{cs, out}$ ) és a bemeneten ( $R_{cs, in}$ ):

$$R_{cs, out} = \frac{\int_0^\infty S_{out}^{sig}(f) df}{\int_0^\infty S_{out}^{noi}(f) df}, \quad (5.5)$$

$$R_{cs, in} = \frac{\int_0^\infty S_{in}^{sig}(f) df}{\int_0^\infty S_{in}^{noi}(f) df}, \quad (5.6)$$

ahol

$$S_{in}^{noi}(f) = S_{in}^{tot}(f) - S_{in}^{sig}(f). \quad (5.7)$$

A gerjesztés és a kimenet közötti összefüggés időtartománybeli vizsgálatára a kereszt-korreláció használható ((2.33) egyenlet). A kereszt-korreláció jól használható a rendszer késleltetésének vizsgálatára, hátránya viszont, hogy amennyiben a gerjesztő jel nem hasonlít a kimeneten megfigyelhető „hasznos” jelre, jóval egy alatti értékeket is kaphatunk a korreláció maximális értékére. További zavaró tényező lehet a mérés során, hogy ha a kicsiny bemenőjelek miatt a rendszerben nem történik billenés (állapotváltás), akkor a kimenet átlaga sem

fog megfelelni a várható értéknek, így hibás értéket kaphatunk normáláskor. Természetesen ezt a hibát könnyen kiküszöbölhetjük, ha az átlag helyett a várt (nulla) értéket helyettesítjük be.

A sztochasztikus rezonancia jellemzésére ezek alapján mi a következő mennyiségeket használtuk: a jel-zaj viszony javulását jellemezzük egyrészt a jel-zaj viszony erősítéssel ( $G_w$  a hagyományos szélessávú,  $G_{cs}$  a kereszt spektrumon alapuló), másrészt pedig a keresztkorrelációs hányadossal ( $Q$ ), ezek meghatározása a következő alakú:

$$G_w = \frac{R_{w,out}}{R_{w,in}}, \quad (5.8)$$

$$G_{cs} := \frac{R_{cs,out}}{R_{cs,in}}, \quad (5.9)$$

$$Q = \frac{C_{out,max}}{C_{in,max}}, \quad (5.10)$$

ahol  $C_{out,max}$  és  $C_{in,max}$  a kimenet és a gerjesztés ill. a bemenet és a gerjesztés közötti kereszt-korreláció maximuma.

### 5.1.2. Jel-zaj viszony javulása kettős potenciálvölgy esetén

A sztochasztikus rezonancia alapmechanizmusára a kettős potenciálvölgyet szokták használni [72]. A modell egy részecske mozgását írja le egy negyedfokú, két minimummal rendelkező potenciáltérben. A részecskékre egyrészt hat egy erős közegellenállás, egy gerjesztés (ami lehet periodikus és aperiodikus), és valamennyi zaj. A potenciál alakját az 5.3. ábrán láthatjuk, és a következő egyenlet írja le:

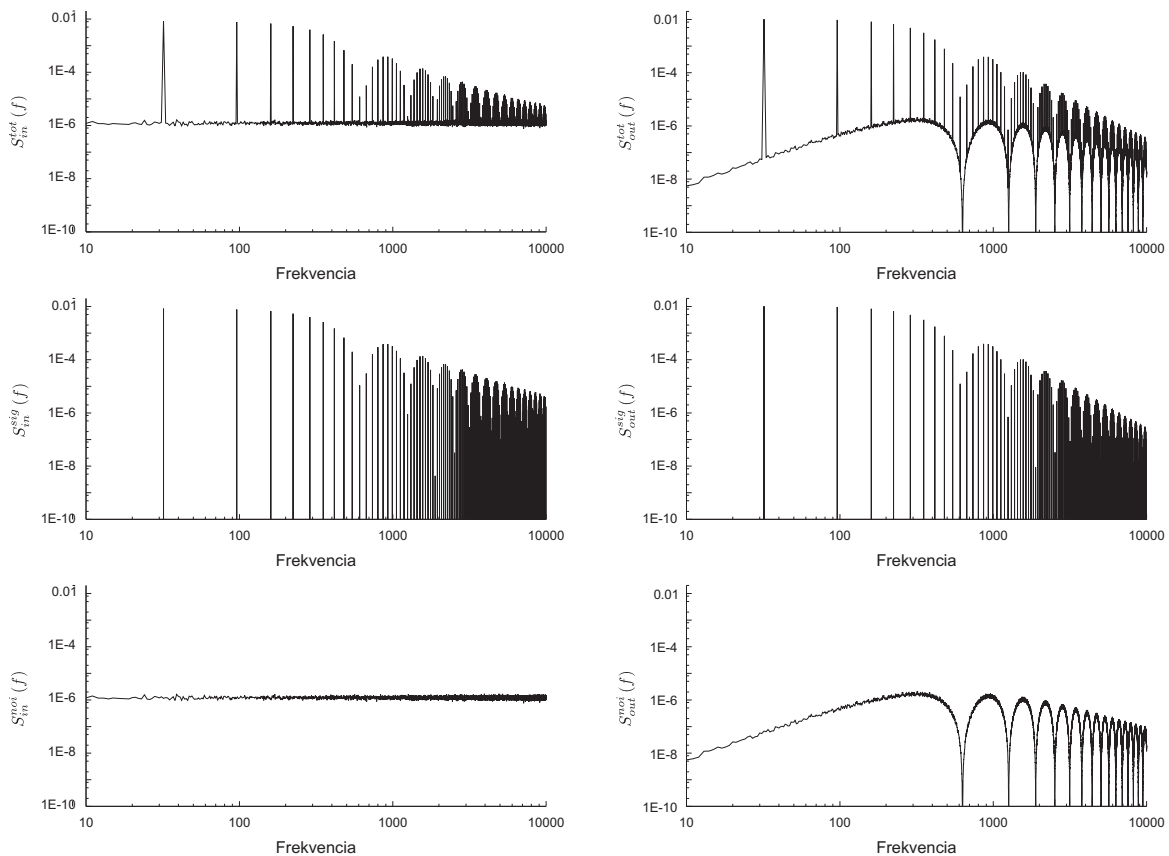
$$V(x) = -\frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{4}x^4 \quad (5.11)$$

A részecske mozgását a következő egyenlet megoldásával tudjuk meghatározni:

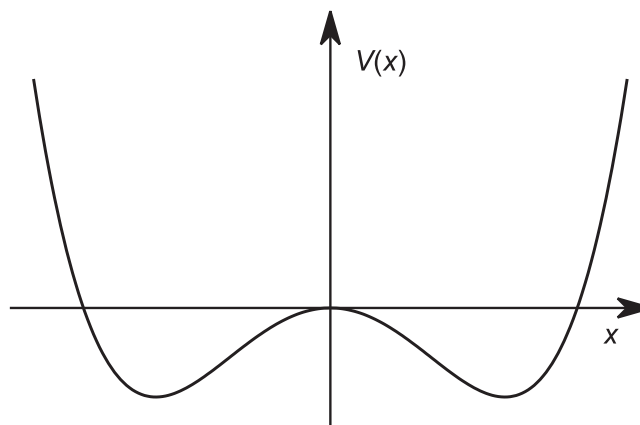
$$\frac{dx}{dt} = x(t) - x^3(t) + p(t) + w(t) \quad (5.12)$$

ahol  $p(t)$  a gerjesztőjel,  $w(t)$  pedig a rendszerhez hozzáadott zaj. A rendszer kimeneteként a részecske helyének időfüggvényét tekintjük  $x(t)$ . Vizsgálataink során a rendszer bemenetét is kimenetét hasonlítjuk össze ahhoz, hogy a sztochasztikus rezonancia által okozott jeljavulást kimutassuk. A jel javulása erősen függ a jel alakjától is, míg szinuszos jelek esetén azt várhatjuk, hogy jel-zaj viszony javulást csak erősen a küszöbszint feletti jelekre kaphatunk [86], addig impulzus jellegű gerjesztés esetén már a küszöbszint alatti jelekre is kaphatunk





5.2. ábra. A keresztspetrális analízisen alapuló jel-zaj szétválasztás szemléltetése. A vizsgált rendszer a szintmetszédetektor, gerjesztőjelként periodikus impulzussorozatot használtam, a zaj szórása pedig 0,2 V. Az eredmény 100 mérés átlaga. A bal oldalon a bemeneten, a jobb oldalon pedig a kimeneten jelen lévő mennyiségek teljesítménysűrűség-spektruma látható. A felső sor a jel és a zaj együtt, alatta a vizsgált jel, legalul pedig a zaj spektruma van ábrázolva. Utóbbi kettő keresztspetrális módszerekkel lett megállapítva



5.3. ábra. A kettős potenciálvölgy alakja

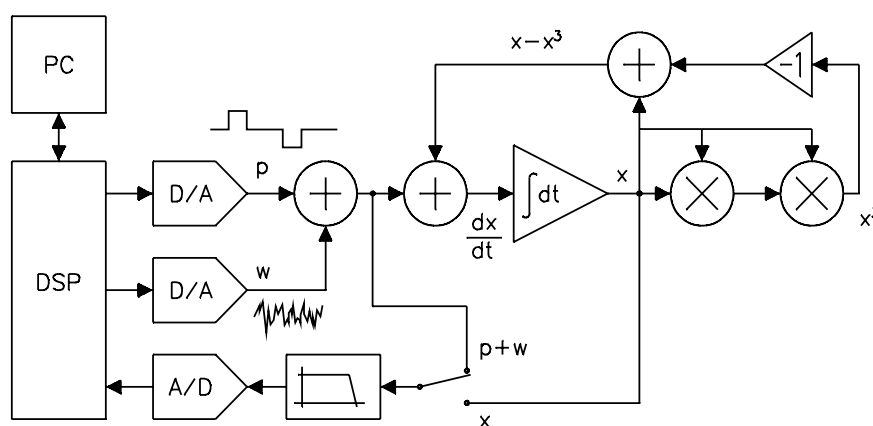
szignifikáns erősítést [78], az erősítés pedig annál nagyobb, minél keskenyebbek az impulzusok, minél kisebb azok kitöltési tényezője. Munkánk során ezeket a korábbi vizsgálatokat egészítettük ki keresztspetrális analízissel és aperiodikus jelek vizsgálatával.

Mind a gerjesztőjelet, mind a rendszerhez hozzáadott zajt numerikusan hoztuk létre, majd D/A konverterrel alakítottuk analóg jellé. A differenciálegyenlet megoldására analóg számí-

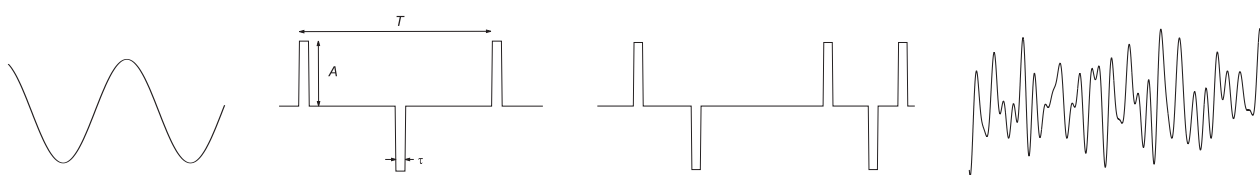
tógépet alkalmaztunk, amely a (5.12) egyenletnek megfelelő, következő integrálegyenletet oldotta meg:

$$x(t) = \int_0^t \{x(\tau) - x^3(\tau) + p(\tau) + w(\tau)\} d\tau. \quad (5.13)$$

A megoldásként jelentkező analóg jelet A/D konverterrel alakítottuk át ismét digitális jellé. A teljes számolást egy digitális jelprocesszor vezérelte (DSP), amely a számítógépen futó regisztráló programmal áll kapcsolatban. A program az összes mért adatot elmentette, így utólag bármilyen analízist el lehetett végezni. A rendszer blokkvázlata az 5.4. ábrán látható. A rendszerben használt analóg komponensek értéke miatt az analóg szimuláció időskálája különbözik az elméleti időskálától, a kettő hányadosa  $1,2 \cdot 10^{-4}$  volt.



5.4. ábra. A kettős pontenciálvölgy vizsgálatára használt kevert jelű szimulációs rendszer [72]



5.5. ábra. A gerjesztőjele alakja: szinuszos gerjesztőjel, periodikus és aperiodikus impulzussorozat és sávhatárolt zaj

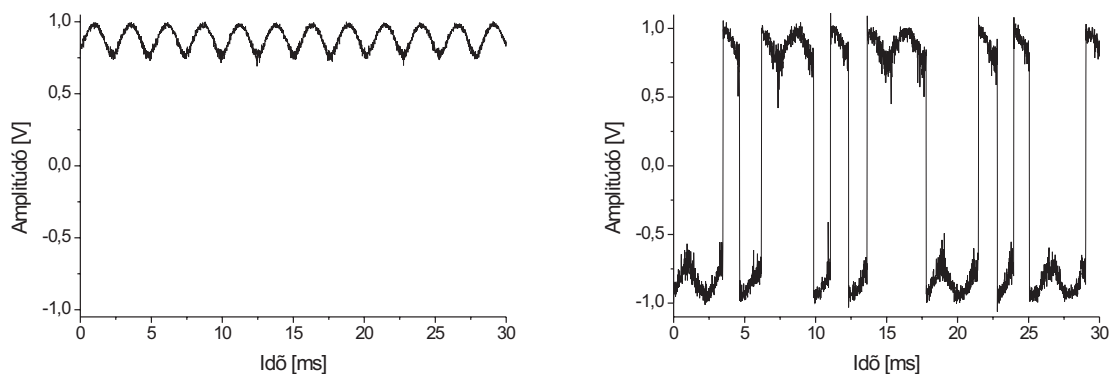
A rendszer vizsgálatára különböző gerjesztéseket alkalmaztunk. Hogy összehasonlíthassuk a keresztspektrális és a keresztkorrelációs módszereket a korábban elterjedt definíciókkal, először periodikus jelekkel vizsgáltuk a jel-zaj viszony javulását, majd szinuszos gerjesztés használatával és periodikus impulzussorozat segítségével. Utóbbi esetén a korábbi kutatások megmutatták, hogy kaphatunk jelentős erősítést [78]. A rendszer viselkedését aperiodikus jelek segítségével is vizsgáltuk, egyrészt olyan impulzussorozattal, melyben az impulzusok véletlenszerűen helyezkednek el, másrészt alacsony határfrekvenciájú, Gauss-elszólású véletlen jellel. Impulzussorozat esetén fontos paraméter a kitöltési tényező, periodikus jelre ez

$2\tau/T$ , ahol  $\tau$  az impulzus hossza és  $T$  a periódusidő. Aperiodikus jelek esetén átlagos kitöltési tényezőről beszélhetünk.

A mérések előtt kísérletileg meghatároztuk a küszöbamplitúdót ( $A_T$ ), vagy is azt a szintet, ahol a billenések kialakulnak zaj nélkül is. A továbbiakban ehhez viszonyítom a jelek amplitúdóit. A szimuláció paraméterei:

- minták száma: 8192
- periódusok száma (szinusz és periodikus négyszögjel esetén): 32; (aperiodikus tüske-sorozat esetén ennyi az impulzusok átlagos száma)
- küszöb amplitúdó ( $A_T$ ): 3,5 V
- mintavételi frekvencia: 10 kHz
- kitöltési tényező (impulzus gerjesztés esetén): 10 %
- keskenysávú zaj határfrekvenciája 39 Hz (ez a modellben  $4,68 \cdot 10^{-3}$  Hz-nek felel meg)
- hozzáadott fehérzaj felső határfrekvenciája: 5 kHz (ez 0,6 Hz-nek felel meg)
- átlagok száma: 10 és 50 közötti, az eredmény szórásától függően

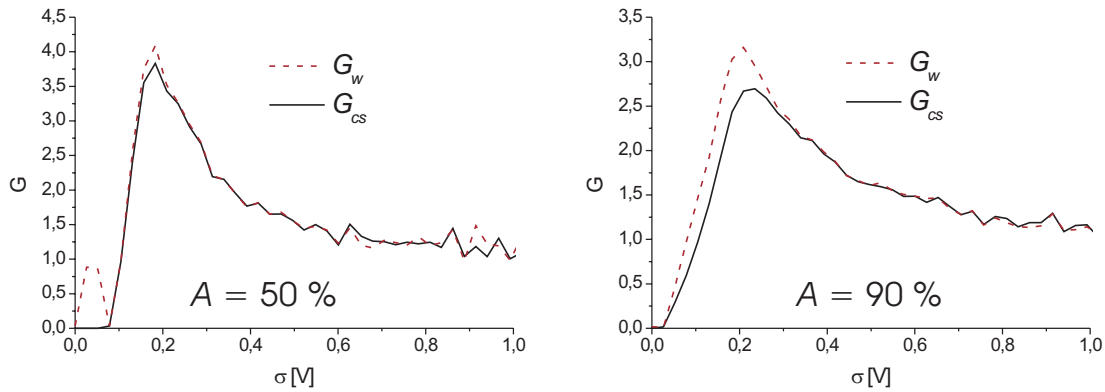
### A kettős potenciálvölgy viselkedése szinuszos gerjesztés esetén



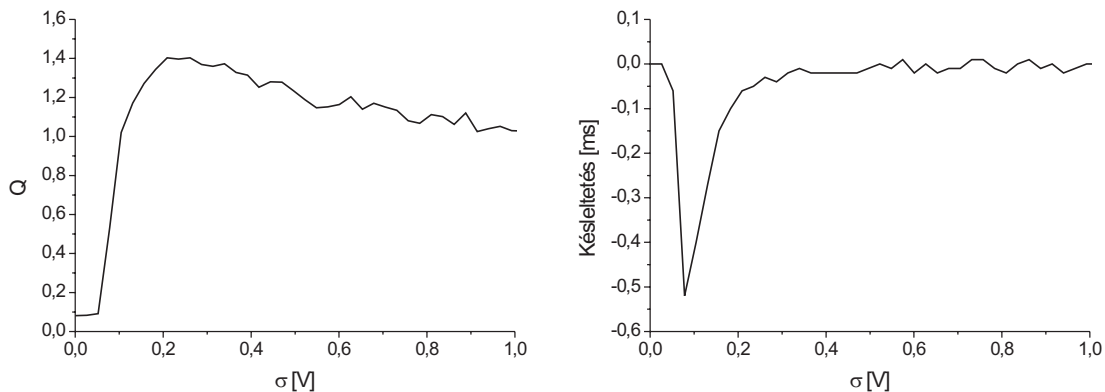
5.6. ábra. A dupla potenciálvölgy viselkedése szinuszos gerjesztés esetén, a bal oldalon azt láthatjuk, amikor nincs billenés, a jobb oldalon pedig azt, amikor a zaj hatására már bekövetkezik a billenés

A korábbi várakozásoknak megfelelően [86] szinuszos gerjesztés esetén egyik keskenysávú definíció sem mutat jel-zaj viszony javulást a rendszerben. A szélessávú definíciók ezzel szemben mind a hagyományos, mind a keresztspéktrumon alapuló esetben jelentős jel-zaj viszony erősítést mutatnak (5.7. ábra). Ez megfelel annak amit a mért jeleken láthatunk, túl kicsiny zaj esetén nem láthatunk billenést, míg egy idő után a kimenet kezdi követni a

gerjesztő szinuszjel hatását (5.6. ábra). A hatást a keresztkorreláció is igazolja, a keresztkorreláció maximuma ( $C_{out,max}$ ) a kimeneten tud jobb lenni mint a bemeneten ( $C_{in,max}$ ), így a keresztkorrelációs hányados is egy feletti értékeket vehet fel (5.8. ábra). A keresztkorreláció segítségével a rendszer késleltetését is vizsgálhatjuk. Azt figyelhetjük meg, hogy amikor a rendszer elkezd billegni ( $G_{cs}$  elkezd hirtelen nőni), akkor a késleltetés elég jelentős, ahogy azonban egyre nagyobb a zaj, a késleltetés csökken. Vagyis elegendő zaj esetén a potenciálvölgy sokkal gyorsabban tudja követni a gerjesztés állapotát.



5.7. ábra. A jel-zaj viszony javulása a zajszórás függvényében, mind a hagyományos széles-sávú mind a kereszt spektrumon alapuló definíció alapján. A bal oldalon az  $A = 0,5 \cdot A_T$  esetet láthatjuk, a jobb oldalon pedig az  $A = 0,9 \cdot A_T$  esetet

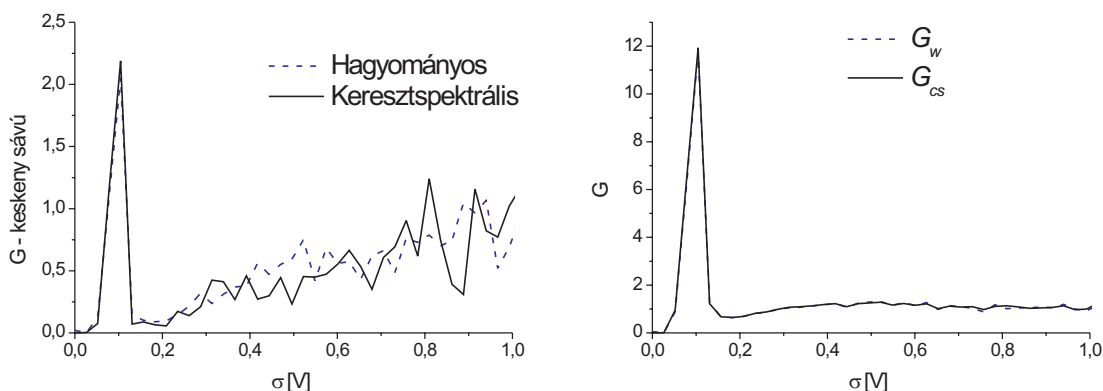


5.8. ábra. A zaj hatásának vizsgálata keresztkorreláció segítségével. A bal oldalon a korrelációs hányadost láthatjuk, a jobb oldalon pedig a rendszer késleltetésének változását a zaj függvényében

### A jel-zaj viszony javulása periodikus impulzussorozattal való gerjesztés esetén

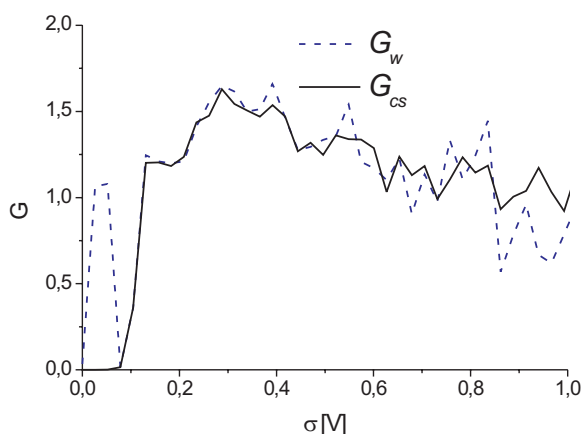
A sztochasztikus rezonancia esetén legkönnyebben keskeny, küszöbhez közeli amplitúdójú impulzussorozattal tudunk jelentős jel-zaj viszony javulást kimutatni. Az 5.9. ábrán ennek az eredményét láthatjuk. Jelentős erősítést figyelhetünk meg mind a keskenysávú, mind a szélessávú definíciók esetén. A hagyományos és a kereszt spektrális analízisen alapuló módszerek

ugyanazokat az eredményeket adják, így az újonnan bevezetett mérési módszerek megfeleltethetők a korábbiaknak. Ez már csak azért is fontos, mert aperiodikus gerjesztések esetén a korábbi módszerek nem használhatók.



5.9. ábra. A jel-zaj viszony javulása periodikus impulzussorozattal való gerjesztés esetén, keskenysávú (balra), és szélessávú definíciók esetén (jobbra)

Bár a jel-zaj viszony erősítést leginkább küszöbhez közeli jelek esetén várunk, még jóval gyengébb jelek esetén is kaphatunk egy feletti erősítést. Az 5.10. ábrán a jel amplitúdója 50%-a a küszöbszintnek. Ebben a tartományban a rendszer viselkedését a lineáris válasz elmélettel szokták leírni [87], vagyis elegendően nagy zaj esetén a rendszert úgy tekinthetjük, hogy az többé-kevésbé lineárisan viszi át mind a jeleket, mind a zajokat. A keskenysávú definíció esetén ez alapján nem kaphatunk jel-zaj viszony erősítést, sokan ezért zárják ki kis jelekre az egység feletti jel-zaj viszony erősítést. Szélessávú definíciókra viszont ez a megállapítás nem alkalmazható.

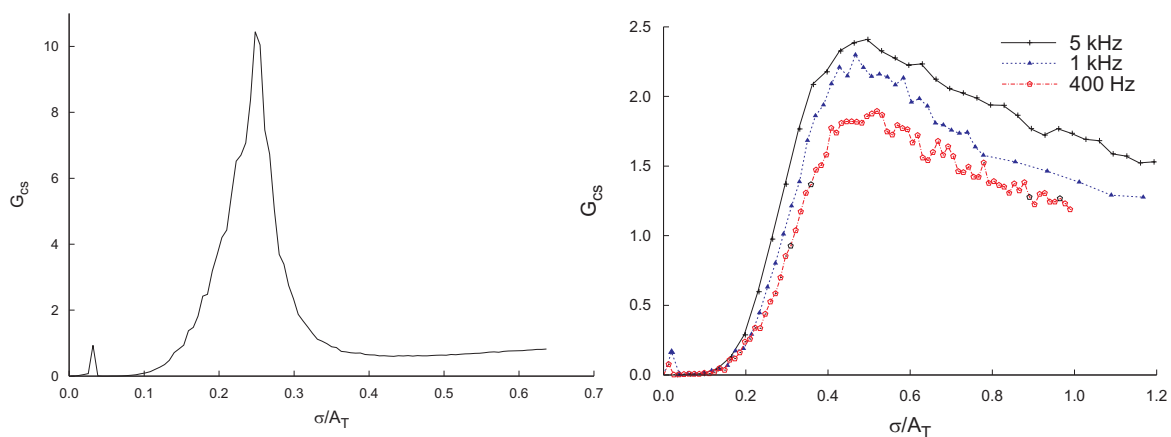


5.10. ábra. A jel-zaj viszony javulása kis amplitúdójú (50%) periodikus impulzussorozattal való gerjesztés esetén

### A kettős potenciálvölgy aperiodikus jelekkel való gerjesztése

Aperiodikus gerjesztőjelek esetén az eredményt az 5.11. ábrán láthatjuk. A bal oldalon láthatjuk, hogy aperiodikus impulzussorozat esetén is közel hasonló jel-zaj viszony javulást érhetünk el, mint periodikus jelek esetén. Felbátorodva az eredményeken megvizsgáltuk a rendszert úgy is, hogy a gerjesztés is egy zaj: egy normál eloszlású, alacsony határfrekvenciájú zaj. A mérés során azt vizsgáltuk, hogy ez a gerjesztőzaj milyen hatásosan jut át a rendszeren a hozzáadott zaj függvényében. Ahogy azt az 5.11. ábra jobb oldalán láthatjuk, még teljesen véletlenszerű jelek esetén is kaphatunk jel-zaj viszony javulást.

Felmerülhet a kérdés, hogy a jel-zaj viszony javulás nem csak valamilyen szűrési hatás eredménye lehet-e, amely esetleg a kettős potenciálvölgy nagyobb frekvencián való csillapításának tudható be. Ha ez a hatás fellépne, akkor a hozzáadott zaj nagyfrekvenciás részét kiszűrné a kimenetből, míg a kis határfrekvenciájú zajt változatlanul hagyná, és ez vezetne a jelentős jel-zaj viszony erősítéshez. E hatás kiszűrésére két megoldást választottunk. Az egyik, megnéztük, hogy hogyan változik a jel-zaj viszony erősítés, hogy ha csökkentjük az additív zaj határfrekvenciáját. A másik lehetőség, hogy olyan rendszereken is megvizsgálhatjuk a jelenséget, melyek nem rendelkeznek dinamikus tulajdonságokkal, így a szűrőhatás is teljesen más jellegű lesz; erről a következő részben fogok beszélni. Az 5.11. jobb oldalán láthatjuk az első vizsgálat eredményét: a jel-zaj viszony erősítés jóval kevésbé függ az additív zaj határfrekvenciájától, mintha az valamiféle szűrésnek lenne köszönhető.



5.11. ábra. A bal oldalon a jel-zaj viszony erősítést láthatjuk aperiodikus impulzussorozat esetén. A jobb oldalon keskenysávú zaj a gerjesztőjel, az erősítést különböző hozzáadott zaj-sáv szélesség esetén láthatjuk. A hozzáadott zaj szórása mindkét grafikonon a küszöbszinthez lett normálva

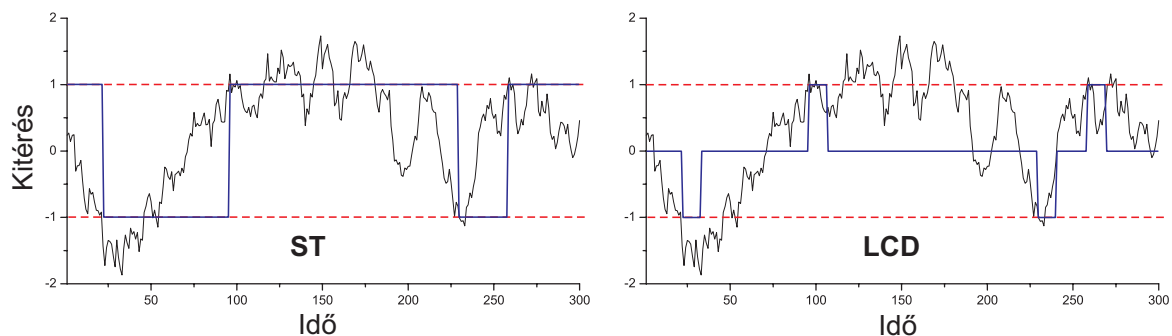
### 5.1.3. Schmitt-trigger és szintmetszésdetektor vizsgálata

A sztochasztikus rezonancia vizsgálatát további kétállapotú rendszerekben folytattuk, a következőkben egyszerű, nem dinamikai rendszereket mutatok be. A Schmitt-trigger az első

rendszerek között volt, melyekben megfigyelték a sztochasztikus rezonanciát [88], majd később kiderült, hogy jel-zaj viszony erősítést is el lehet érni [77]. A rendszer két küszöbszinttel rendelkezik ( $+A_T$  és  $-A_T$ ), amikor a bemenet ( $x(t) + w(t)$ ) a felső küszöbszint felé kerül, akkor a felső állapotba billen, és egész addig megtartja ezt az állapotát, amíg a rendszer az alsó küszöbszint alá nem kerül. Ekkor az alsó állapotát veszi fel. A kimenet ( $x(t)$ ) a rendszer állapotának felel meg. A kimenet viselkedését a következő egyenlet írja le:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & \text{ha } p(t) + w(t) > A_T; \\ -1, & \text{ha } p(t) + w(t) < -A_T; \\ \text{előző érték,} & \text{különben.} \end{cases} \quad (5.14)$$

A másik vizsgált rendszer a szintmetszésdetektor. Ennek belső állapota ugyanúgy viselkedik mint a Schmitt-trigger belső állapota, a kimenete viszont nem egyezik meg ezzel, hanem minden egyes állapotváltozáskor egy meghatározott hosszúságú impulzust állít elő: ha az alsó állapotból a felső állapotba jutunk, akkor egy pozitív impulzust, ha pedig a felső állapotból az alsóba, akkor egy negatív impulzust. A két rendszer működését az 5.12. ábrán mutatom be. A szintmetszésdetektor előnye a Schmitt-triggerrel szemben, hogy impulzusos gerjesztés esetén a kimenet nagyobb hasonlóságot mutat a bemenettel, így a keresztkorrelációs vizsgálatok sokkal adekvátabb eredményt adnak.

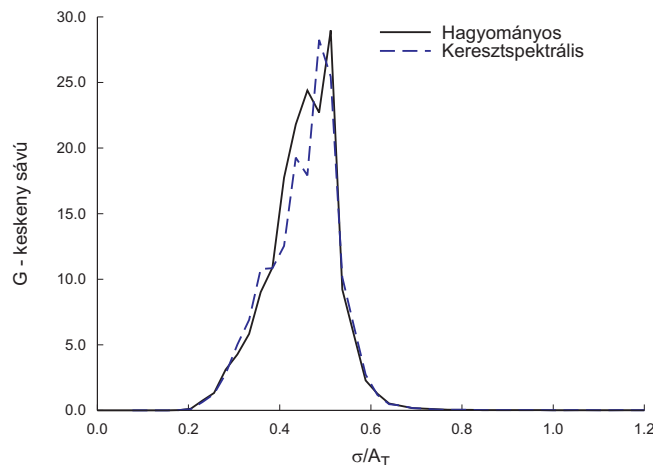


5.12. ábra. A Schmitt-trigger és a szintmetszésdetektor működésének összehasonlítása

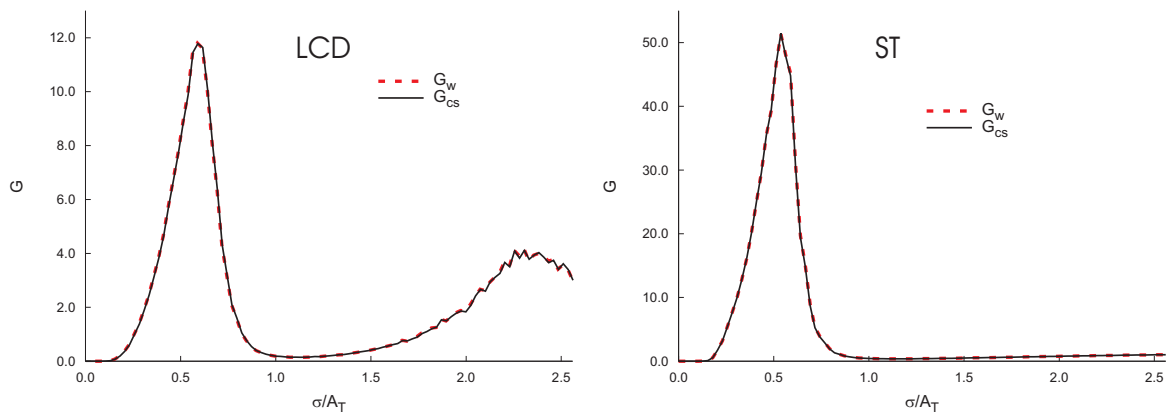
A sztochasztikus rezonancia jelenségét e két rendszerben numerikus szimulációk segítségével vizsgáltam, a szimulációk paraméterei:

- minták hossza: 32768
- impulzusok száma: 32
- átlagok száma: 10 és 100 közötti
- kitöltési tényező: 10 %
- küszöbszint:  $\pm 1$  V

A szimuláció eredményei az 5.13.–5.20. ábrákon láthatók. Mind a Schmitt-trigger, mind a szintmetszésdetektor esetén, a keskeny sávú jel-zaj viszony definíciók is jelentős jel-zaj viszony javulást mutatnak. Ennek megfelelő eredményt kaptunk (5.13. ábra). Megfigyelhetjük azt is, hogy a kereszt-spektrális analízist alkalmazva a jel és a zajmennyiség szétválasztására akkor közel hasonló eredményt kaphatunk. Ha szélessávú jel-zaj definíciókat használunk fel, akkor a sokkal több adatpont alapján kapjuk meg a jel-zaj viszonyt jellemző adatokat, így azok jóval kevésbé szórnak. Az 5.14. ábrán láthatjuk az eredményt, mind szintmetszésdetektorra, mind Schmitt-triggerre. A hagyományos és a kereszt-spektrális analízis pontosan ugyanazt az eredményt adja.



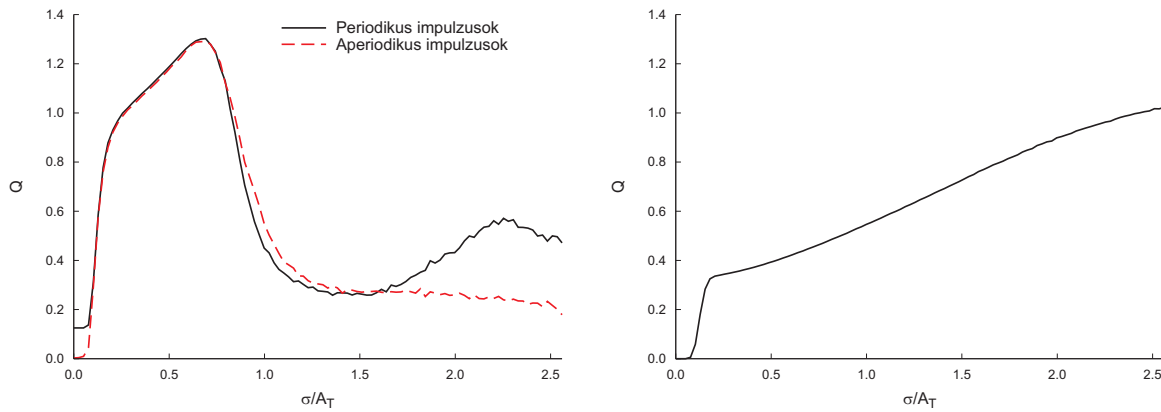
5.13. ábra. A jel-zaj viszony javulása szintmetszésdetektort alkalmazva, periodikus impulzus-sorozat esetén, ha keskenysávú definíciókat alkalmazunk



5.14. ábra. A jel-zaj viszony javulása periodikus impulzussorozat esetén. A bal oldalon a szintmetszésdetektor, a jobb oldalon pedig a Schmitt-trigger viselkedése látható

A spektrális analízisen kívül mindkét rendszert vizsgálhatjuk kereszt-korreláció segítségével is. Az 5.15. ábra bal oldalán láthatjuk az eredményt a szintmetszésdetektorra mind periodikus, mind aperiodikus impulzussorozat esetén. A kereszt-korreláció aránya mindkét esetben felvesz egynél nagyobb értéket (a  $G_{cs}$ -nek megfelelő helyen). Schmitt-trigger esetén viszont ebből a hányadosból nem sokra tudunk következtetni, ezt az okozza, hogy a Schmitt-trigger kimenete kevésbé hasonlít a bemenetre, mint a szintmetszésdetektor esetén.



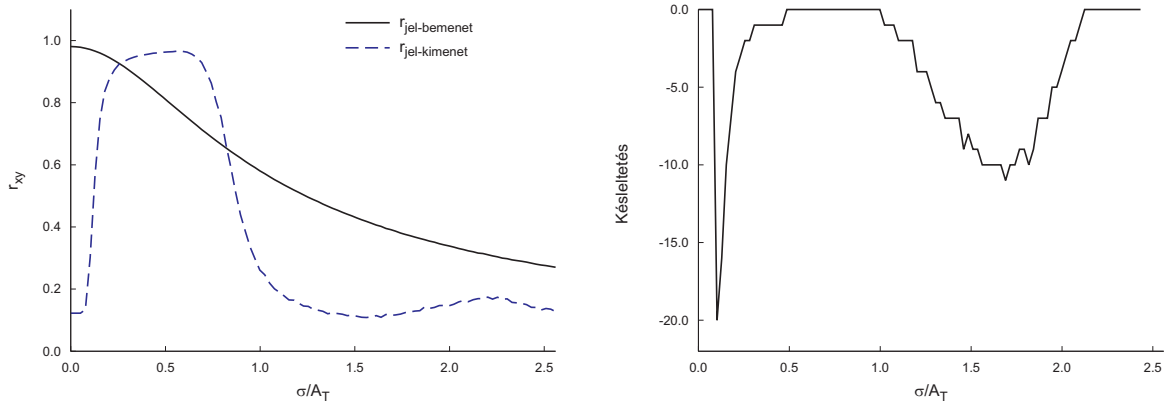


5.15. ábra. A rendszerek vizsgálata keresztkorreláció segítségével. Mindkét ábrán a korrelációs hányados látható (5.10), bal oldalon a szintmetszésdetektor, jobb oldalon a Schmitt-trigger

A keresztkorrelációt figyelve sokkal többet is megtudhatunk a rendszer viselkedéséről. Az 5.16. ábra bal oldalán követhetjük láthatjuk a gerjesztőjel és a bemenet, ill. a gerjesztőjel és a kimenet között mérhető keresztkorreláció változását, ahogy növeljük hozzáadott zaj mértékét. Jól látható, hogy ahogy nő a zaj mértéke, hirtelen elkezd nőni a jel és a kimenet közötti korreláció. Ekkor kezd el billegni a rendszer, a rendszer követi a gerjesztést. Tovább növelve a zajt, a bemeneten egyre romlik a keresztkorreláció értéke, míg a kimeneten egy ideig gyakorlatilag változatlan marad. Ebben a tartományban lesz jobb a kimenet mint a bemenet. Ha tovább növeljük a zajt, akkor a kimenet már nem fogja követni a gerjesztést. Van még egy kiemelkedés nagyobb zajintenzitásoknál, ezt a korábbi grafikonok esetén is észrevehetjük (pl. 5.14. ábra bal oldalán), ez a kiemelkedés valószínű nem annyira a sztochasztikus rezonanciának köszönhető, hanem inkább a diszkrét időbeli felbontásnak és a szimuláció paramétereinek. A két csúcs közötti különbség jól látható a mért jeleken is, míg az első csúcs esetén a rendszer elkezd billegni, és jól láthatóan követi a gerjesztést, addig a második csúcs környékén a hozzáadott zaj már olyan nagy, hogy a szinkronizáció már el van temetve az állandó véletlenszerű billegések között.

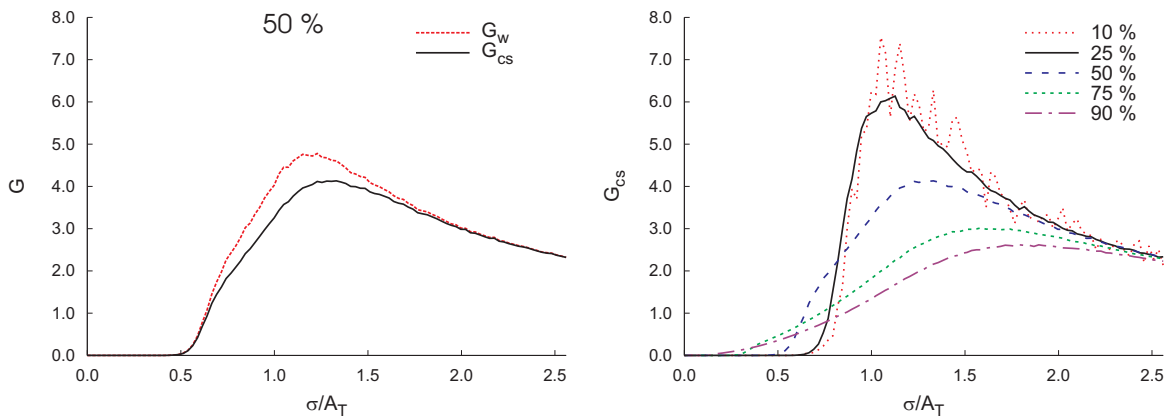
A rendszer késleltetését is meg tudjuk határozni a keresztkorreláció maximumának keresésével, az eredményt az 5.16. ábra jobb oldalán láthatjuk. Megfigyelhetjük, hogy kis zajszórás esetén, amikor a rendszer már jól követi a gerjesztést, a hozzáadott nagyobb zaj a késleltetést csökkenti.

Színuszos gerjesztés esetén a keresztspektrális analízis nem veszi figyelembe a kimeneten megjelenő hasznos felharmonikusokat, így a keresztspektrális jel-zaj viszony erősítés ( $G_{cs}$ ) egy kissé alacsonyabban halad, mint a hagyományos szélessávú jel-zaj viszony erősítés ( $G_w$ ) (5.17. ábra bal oldala). Ezt a hiányosságát legfeljebb magasabb rendű spektrális analízissel tudnánk kiküszöbölni. Ennek ellenére jól kimutatható a jel-zaj viszony javulás ha szinusszal gerjesztjük a Schmitt-triggert. Ha megvizsgáljuk a jel-zaj viszony erősítést a szinusz amplitúdójának függvényében, azt tapasztalhatjuk, hogy minél kisebb az amplitúdó, annál nagyobb



5.16. ábra. A keresztkorreláció maximumának értéke és helye a zaj szórásának függvényében. A vizsgált rendszer a szintmetszédetektor, gerjesztőjelként periodikus négyszögjelet használtam

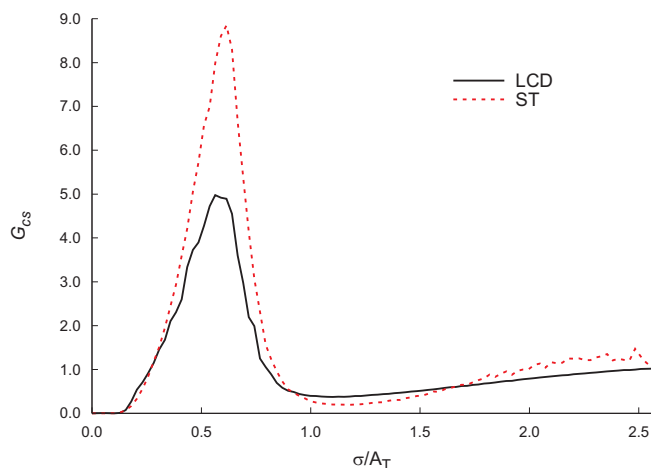
az erősítés mértéke (5.17. ábra jobb oldala). Ez két dolog miatt is meglepő, egyrészt szinuszos jelekre általában nem várnak egyél nagyobb jel-zaj viszony erősítést, másrészt azt gondolhatnánk, hogy a küszöbnél jóval kisebb jelekre nem is kaphatunk jelentős javulást [75].



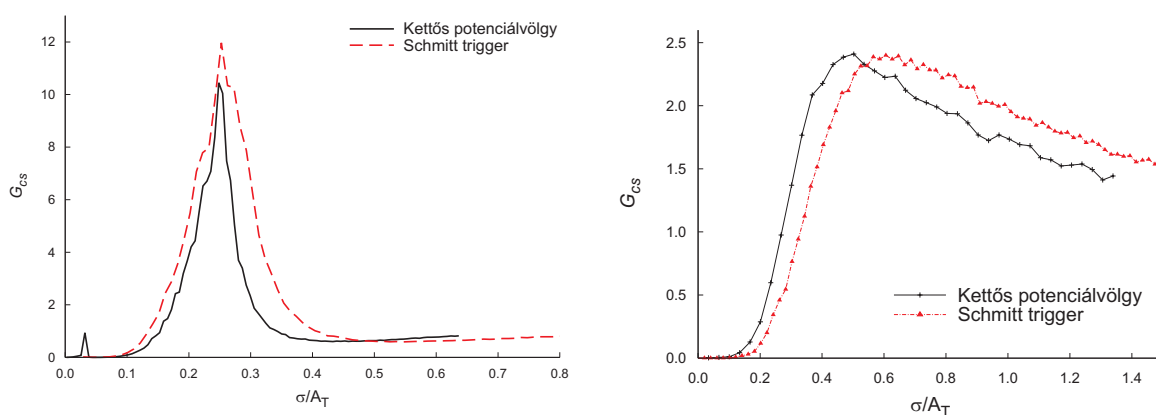
5.17. ábra. A Schmitt-triggerben a jel-zaj viszony javulás szinuszos gerjesztés hatására. A jobb oldalon láthatjuk a rezonanciagörbék alakulását különböző szinusz amplitúdók esetén (az amplitúdó a küszöbszint arányában van megadva)

A periodikus gerjesztéshez hasonlóan aperiodikus gerjesztés esetén is kapunk javulást a rendszerek kimenetén a bemenethez képest, impulzussorozat esetén ezt az 5.15. és az 5.18. ábrákon láthatjuk. Mind a Schmitt-trigger mind a szintmetszédetektor esetén ugyanolyan zajszórásnál kapunk maximumot, a fő különbség az erősítés nagyságában van. Ez érthető is, Schmitt-trigger esetén a kimenő jel sokkal nagyobb teljesítményt képvisel, mint a szintmetszédetektor rövid impulzusai.

Az 5.19. ábrán figyelhetjük meg a hasonlóságot a kettős potenciálvölgy és a Schmitt-trigger eredményei között. Ez arra utal, hogy a kettős potenciálvölgy dinamikai viselkedése azon frekvenciatartományban, ahol vizsgáldtunk, nem játszik túl nagy szerepet a sztochasztikus rezonancia kialakulásában.



5.18. ábra. A szintmetszésdetektor és a Schmitt-trigger viselkedése aperiodikus impulzussorozat esetén

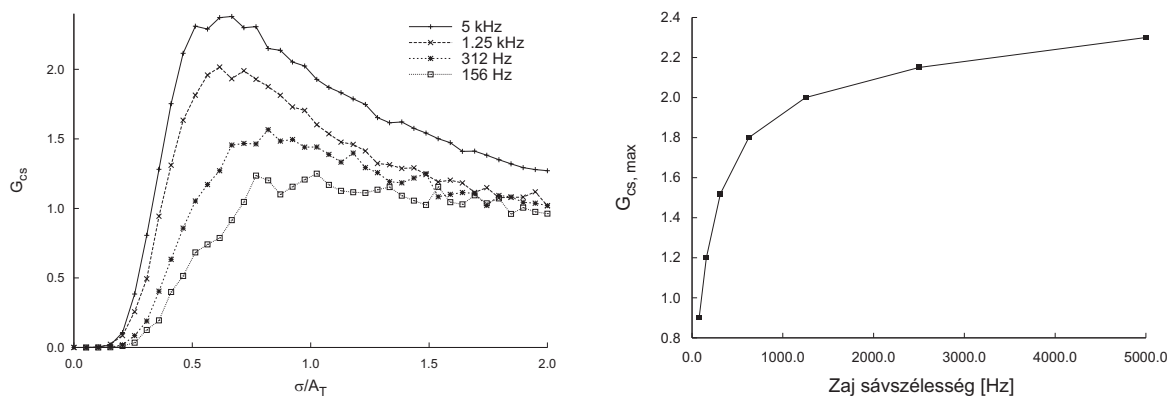


5.19. ábra. A kettős potenciálvölgy és a Schmitt-trigger eredményeinek összehasonlítása. A bal oldalon gerjesztésként aperiodikus impulzussorozatot alkalmaztunk, a jobb oldalon pedig kis sáv szélességű zajt

Az 5.11. ábrán már megfigyelhettük, hogy bár az additív zaj határfrekvenciájának csökkenése csökkenti az erősítés értékét, az továbbra is egy feletti maradt. Az 5.20. ábra jobb oldalával összehasonlítva, megfigyelhetjük, hogy az erősítés függése a zaj határfrekvenciájától. Schmitt-trigger esetén is hasonlóan viselkedik, így ez nem lehet a dinamikai viselkedés eredménye, így az erősítés degradálása sem lehet szűrés eredménye. Megvizsgáltuk, hogy hogyan függ az erősítés maximuma az additív zaj határfrekvenciájától, az eredmény az 5.11. ábra jobb oldalán látható. A jel-zaj viszony erősítés igen nagy tartományban van jelen, csak akkor csökken egy alá, amikor az additív zaj felső határfrekvenciája a jel felső frekvenciájának tízszerese alá csökken (megjegyezném, hogy a sztochasztikus rezonancia vizsgálatakor a zaj határfrekvenciája mindig sokkal nagyobb, mint a vizsgált jelek határfrekvenciája).

#### 5.1.4. Az eredmények rövid összefoglalása

Munkánk során három olyan rendszert vizsgáltunk meg, melyekre korábban már tapasztaltak a sztochasztikus rezonancia által magyarázható jel-zaj viszony erősítést. A korábbi vizsgálatokat kiegészítettük keresztспектрális és keresztkorrelációs módszerekkel. Összehasonlítottuk



5.20. ábra. A jel-zaj viszony erősítésének függése az additív zaj határfrekvenciájától

az újonnan bevezetett módszereket a korábban az irodalomban már elfogadott módszerekkel, ez alapján azt mondhatjuk, hogy a kereszt-spektrális analízis korlátozások nélkül jól használható, a kereszt-korreláción alapuló pedig hasznos adalékinformációkkal szolgálhat a rendszer viselkedéséről. A két új módszert arra használtuk, hogy a rendszerek viselkedését aperiodikus gerjesztések esetén is leírassuk, erre ugyanis a korábbi jel-zaj viszony definíciók alkalmatlank voltak.

A korábban elterjedt nézetek szerint jelentős sztochasztikus rezonanciát leginkább a küszöbhez közeli, túszerű jelek esetén várhatunk. Kevert jelű és numerikus szimulációk segítségével kimutattuk, hogy a gerjesztések jóval szélesebb tartományában kaphatunk jel-zaj viszony erősítést. Egyrészt nem csak impulzusszerű jelekre kaptunk erősítést, hanem szinuszos jelek és keskenysávú zajok esetén is. Másrészt nem csak küszöbhez közeli jelekre kaptunk jel-zaj viszony erősítést, hanem annál jóval kisebb jelek esetén is. Az eredmények arra utalnak, hogy a korábbi szigorú feltételek elsősorban a korábban elterjedt keskenysávú jel-zaj viszony definíciójából adódnak, és nem a sztochasztikus rezonancia természetéből.

Összehasonlítottuk a kettős potenciálvölgy viselkedését a Schmitt-triggerrel, a két rendszer közel azonos eredményeket ad a gerjesztés hatására. Ebből arra következtethetünk, hogy a jel-zaj viszony javulása nem valamiféle, a dinamikus rendszerből adódó szűrőhatás következménye. Ugyancsak a szűrőhatás ellen szól az, hogy az erősítés mértéke kevésbé függ az additív zaj határfrekvenciájától, mint hogy ha azt egy szűrés eredményezné.

## 5.2. Lézerimpulzusok precíz szinkronizálása jitterzaj segítségével

A lézeres alkalmazások egy részénél fontos, hogy a lézer által létrehozott impulzusokat megfelelően szinkronizálhassuk valamilyen külső eseményhez. A megengedett bizonytalanság sokszor mindössze 1–2 ns. A lézer késleltetését leginkább befolyásoló elem a benne lévő nagyfeszültségű kapcsoló, a tirátron. A tirátron jellemző adata annak kapcsolási ideje, az

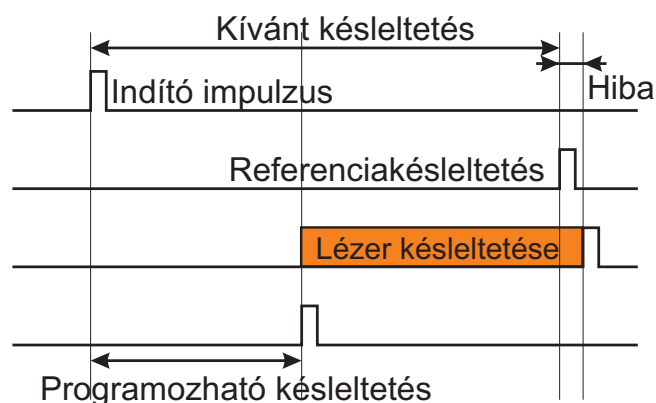
anódkésleltetés. Az anódkésleltetés az az idő, amely ahhoz szükséges, hogy a tirátron rácsa és anódja közötti tér vezetővé váljon. Ez az idő tipikusan 0,1 és  $1\mu\text{s}$  között van, azonban nem állandó. Egyrészt a külső paraméterek, elsősorban a hőmérséklet változása egy lassú driftet ad a késleltetéshez, ez tipikusan néhány száz ns. Másrészt, lövésről-lövésre is megfigyelhető egy bizonytalanság, ez a kapcsolás jittere. Ez elsősorban a tirátronban a kapcsolás során lezajló gázkisülésből ered, és ns-os nagyságrendű.

Az ehhez a részhez kapcsolódó munkámban azt a célt tűztük ki, hogy az anódkésleltetés lassú idejű változását egy megfelelő algoritmussal kompenzáljuk. Sajnos a lézer lövésről lövésre változó véletlenszerűségét (a lézer jitterét) annak megjósolhatatlansága miatt nem tudjuk követni. Ugyanakkor felmerülhet annak a kérdése, hogy nem-e tudnánk ezt a zajt valamiképp felhasználni saját céljainkra, vagyis a lézer lassú driftjének kompenzálására.

Ebben a fejezetben leírom az általunk használt szabályozás felépítését és működését, valamint azt, hogy a rendszerben óhatatlanul jelen lévő sztochasztikus folyamatok milyen hatással vannak a szabályozás teljesítményére.

### 5.2.1. A szabályozás megvalósítása

A szabályozás elve az 5.21. ábrán látható. A szabályozás célja, hogy az indítójelhez képest mindig azonos késleltetés után jöjjön létre a lézerimpulzus. Mivel a lézer késleltetése a drift (és a jitter) miatt nem állandó, ezt úgy tudjuk megoldani, hogy az indítójel után egy, a szabályozás által megválasztott késleltetés után indítjuk el a lézert. A lézer bizonyos idő után kibocsátja a fényimpulzust. A szabályozás ennek idejét hasonlítja össze a (felhasználó által megadott) referenciakésleltetéssel, és ez alapján dönt a szabályozott késleltetés hosszáról.

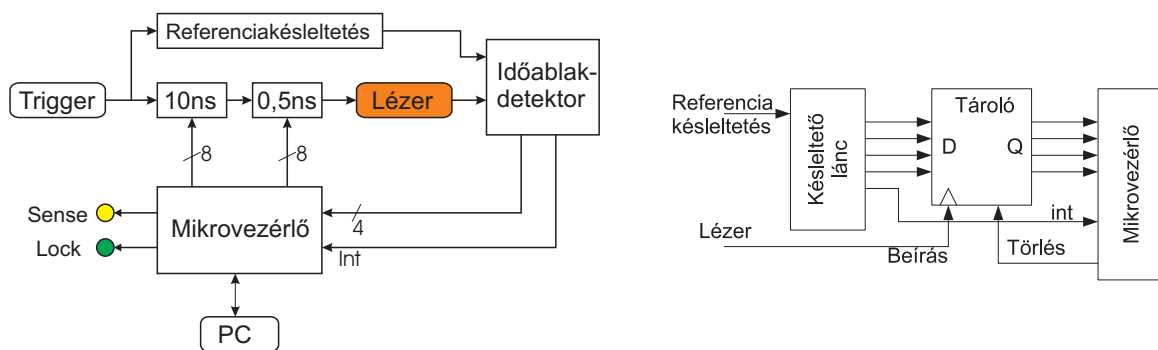


5.21. ábra. A szabályozás elve

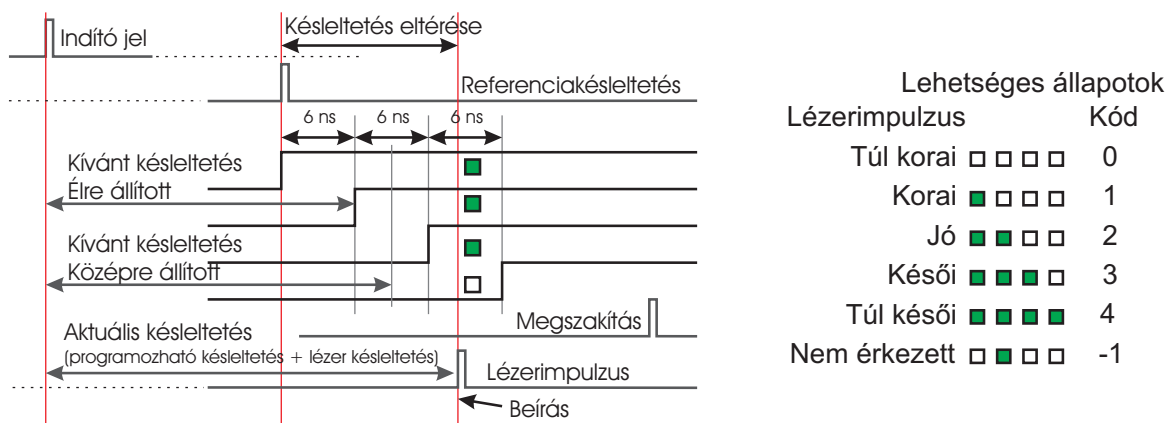
#### A hardver felépítése

A szabályozás hardvere *Almási Gábor* vezetésével lett létrehozva, blokkvázlata az 5.22. ábrán látható. Az áramkör két késleltető ágat tartalmaz, egy referencia ágat, amely a kívánt késleltetést adja meg, ill. a beavatkozó ágat, ez kompenzálja a lézer változó késleltetését.

Mindkét ágba programozható késleltetők vannak: a Maxim DS1023-500, amely akár néhány  $\mu s$  eltolást is lehetővé tesz, és a Maxim DS1020-15 mely szubnanoszekundumos lépéseket tesz lehetővé. A lézerimpulzus aktuális helyzetének megállapítására egy késleltető lánc (Maxim DS1100) hozza létre a referencia impulzus időben eltolt jeleit. A késleltetőlánc kimenetét a lézerimpulzus jele írja be egy tárolóba. A tároló állapota attól fog függeni, hogy mikor érkezett meg a lézerimpulzus (lásd 5.23. ábrát). Ugyancsak a késleltetőlánc aktiválja a mikrovezérlő megszakításrutinját, amely a tároló állapotát beolvassa végrehajtja a szabályozást végző algoritmust, és beállítja a programozható késleltetés új értékeit. Ha nem érkezik lézerimpulzus a megszakítás bekövetkeztéig, akkor a tároló állapota nem íródik felül. Ezt felhasználhatjuk arra, hogy detektáljuk a lézerimpulzus hiányát: ha a megszakítás végeztével egy, a normál üzem során nem lehetséges állapotot írunk be a tárolóba, és ezt olvassuk vissza, akkor tudni fogjuk, hogy nem érkezett (időben) a lézerimpulzus.



5.22. ábra. A szabályozó hardver blokkvázlata. A jobb oldali ábrán az időablak detektor megvalósítása látható



5.23. ábra. A késleltetés detektálásának módja, és az impulzus megérkezésekor felvehető állapotok

A megszakítás bekövetkeztekor a tároló az 5.23. ábrán látható állapotokat veheti fel. Ennek megfelelően egy egyszerű vezérlést a 5.1. táblázatban látható módon valósíthatunk meg.

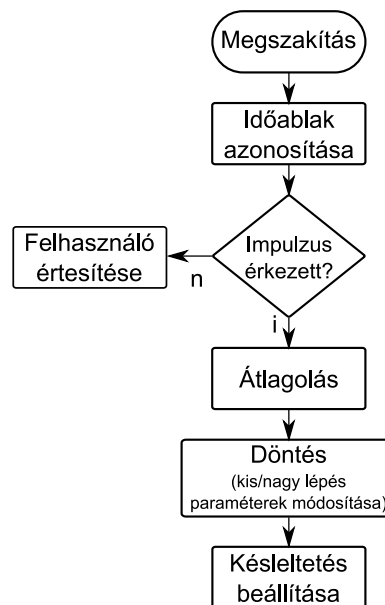
Az egyszerű vezérlés fő problémája a zavarérzékenysége: már kis jitter esetén is állandóan lépegethet, egyéni kirívó impulzusok esetén pedig egyből nagy lépést tesz, amivel jelentősen ront a rendszer tulajdonságain. A teljesítmény javítására korábban median filter volt alkalmazva. Sajnos ez sokszor oszcillált az egyensúlyi helyzet körül. Hasonlóan, az egyszerű átlagolás sem nyújtott megfelelő stabilitást.

Kód	Lézerimpulzus detektálása	Egyszerű vezérlés művelete
0	Az első időablak előtt	Növeljük a késleltetést egy nagy lépéssel
1	Az első időablakban	Növeljük a késleltetést egy kis lépéssel
2	A második (megfelelő) időablakban	Nem kell tenni semmit
3	A harmadik időablakban	Csökkentsük a késleltetést egy kis lépéssel
4	Az utolsó időablak után (de még a megszakítás előtt)	Csökkentsük a késleltetést egy nagy lépéssel
-1	Nincs impulzus a megszakítás bekövetkeztéig	Felhasználó informálása (pl. nem világít az észlelést jelző LED)

5.1. táblázat. Egy egyszerű vezérlés megvalósítása

### A szabályozás elve

Mivel az egyszerű átlagolás segíthet a zavarcsökkentésen, bár nem nyújt megbízható megoldást, adódik a lehetőség, hogy használjunk átlagolást, ugyanakkor az átlagolás hosszát a szabályozás aktuális állapotához igazítsuk (adaptív átlagolás). Az átlagolás előtt a tároló által adott kódot átalakítjuk a megfelelő időablak sorszámára jellemző kóddá, érvényes impulzus esetén az így kapott értéket már közvetlenül átlagolhatjuk. A szabályozó szoftver blokkvázlata az 5.24. ábrán látható.



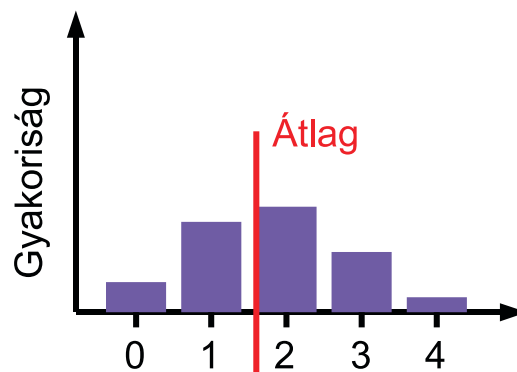
5.24. ábra. A szabályozó szoftver blokkvázlata

Az átlagolás egyik fontos előnye a zavarok kiszűrése, ugyanakkor van egy hátránya is: a gyors időbeli változásokat nehezebb követni. Így szoftveremben az aktuális körülményekhez igazítottam az átlagolás számát.

Az átlagok hosszának megválasztása:

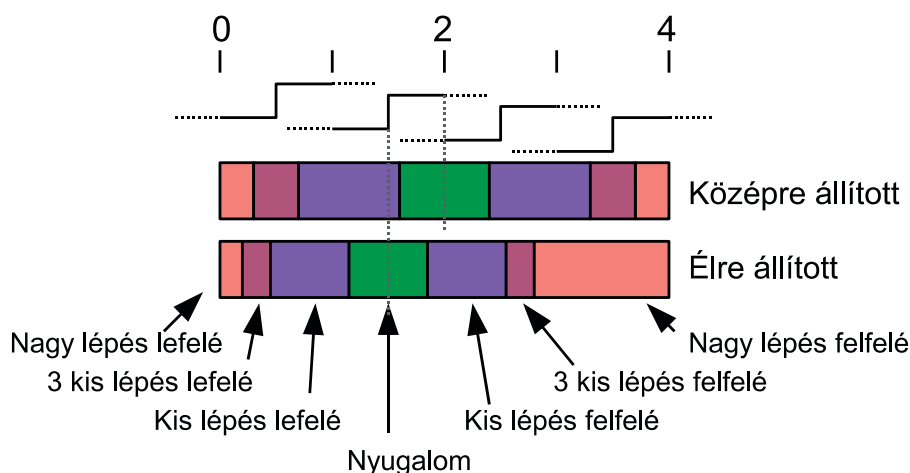
- Amíg keressük a kívánt késleltetést, távol vagyunk tőle, addig nagy lépésekkel haladunk. Ekkor nem szabad hosszasan átlagolni, különben átlendülhetünk a kívánt hely felett, oszcilláció jöhet létre. Ebben a helyzetben 1–2 elem átlagát használhatjuk.

- Ha már közel vagyunk a kívánt késleltetéshez, kis lépésekkel érdemes minél jobban megközelíteni az ideális késleltetést. Ekkor rövid átlagolással elérhető a megfelelő zavarvédelem, de megtartható a gyors reagálás. A szimulációk alapján ebben a helyzetben kb. 4 elem átlagolása tűnik a megfelelőnek.
- Ha nem volt szükség egyik késleltetés léptetésére sem, akkor lehet növelni az átlagolás hosszát, ezzel növelhető a pontosság (és a zavarvédelem is).



5.25. ábra. Átlagolva a zaj által modulált detektálást, növelhetjük a detektálás felbontását

A zavarcsökkentésén kívül az átlagolás segíthet a felbontás növelésében is. Amennyiben a jitter következtében nem csak egy ablakban kapunk értékeket, ezen értékek átlaga sokkal közelebb fog állni a valódi késleltetéshez, mint bármelyik diszkrét érték (lásd az 5.25. ábrát). Ez nagyon hasonló ahhoz az módszerhez, amikor ditheringet alkalmaznak az analóg-digitál konverzió során [20]. Mivel nagyobb felbontással áll rendelkezésre a késleltetés hibája, a beavatkozás megválasztására sokkal jobb döntéseket tudunk hozni (lásd az 5.26. ábrát).



5.26. ábra. Az átlagolás által biztosított nagyobb felbontás segítségével jobb döntési algoritmust alkalmazhatunk. Az egyes átlagértékekhez különböző döntéseket köthetünk. A tartományok meghatározása befojásolja a rendszer viselkedését

Ha a kívánt tartomány közepe felé van az átlag, akkor nem szükséges lépegetni. A tartomány szélesítésével csökkenthetjük a zavarérzékenységet, ha csökkentjük a tartomány szélességét, növelhetjük a beállítás pontosságát. Utóbbit akkor érdemes követni, ha már elegendően



hosszú átlag áll rendelkezésre, és így nem a kisebb-nagyobb zavarokat fogja követni a rendszer.

Elegendően nagy eltérés esetén korrigálhatjuk a késleltetést, hogy jobban megközelítsük a kívántat. Megjegyzés: a lépés miatt ez után lecsökken az átlag hossza; erre szükség is van, hisz az eltárolt ablakátlag a lépés után már nem a valós helyzetet fogja tükrözni. Amennyiben a lézer késleltetése időben elég gyorsan változik, kis lépegetéssel nem feltétlenül lehet követni, egy nagy lépés viszont túl nagy jittert vinne a rendszerbe. Finomításként bevezethetjük, hogy ha az eltérés elegendően nagy, akkor ne egy, hanem három kis lépést tegyen meg. Ezzel növelhető az a drifttartomány, ahol még nagy lépések bevezetése nélkül tudja követni a kívánt késleltetést.

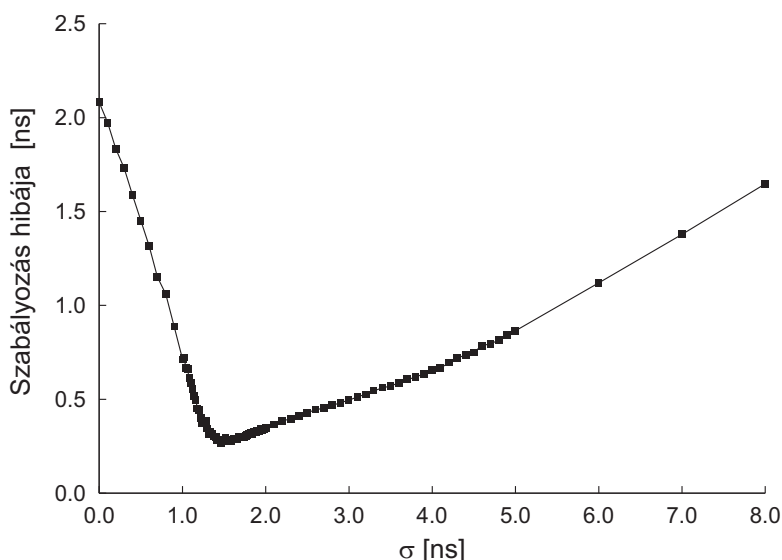
Ha nagyon a szélén vagyunk a lefedett tartománynak, az jelezheti, hogy távol vagyunk a kívánt késleltetéstől (vagy szabályozott rendszer hirtelen elkezdett „mászni”), ekkor nagy lépésekkel megpróbálhatjuk korrigálni a késleltetést.

### 5.2.2. A szabályozás teljesítménye a rendszerben lévő zaj függvényében

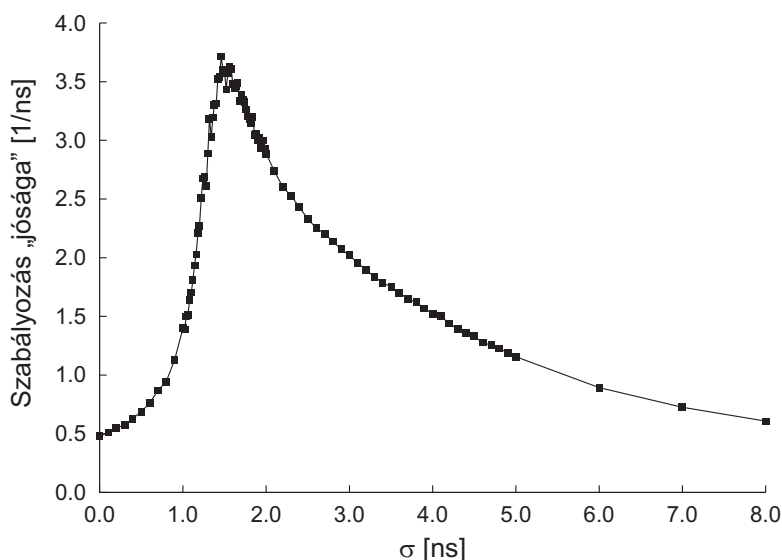
A rendszerünkben használt ablakok mérete 6 ns. Ha a mért jel egy ablakon belül marad, nem lehet pontosan megmondani, hogy hol is van. Így akár 3 ns-os eltérés is lehet a kívánt és a beállított érték között, miközben a késleltetőlánc 0,5 ns-os felbontást is lehetővé tette. Amennyiben azonban a mért jelen van egy kis fluktuáció (mint a lézer vagy a mérőrendszer jittere), akkor néha-néha a szomszédos ablakokban is kaphatunk jeleket. Ha átlagolást végzünk, megtudhatjuk, hogy a tartomány mely részéhez vagyunk közelebb. Így a rendszerben lévő zaj segíthet abban, hogy pontosabb szabályozást tegyünk lehetővé (lásd az 5.25. ábrát).

Numerikus szimulációkat végeztem, hogy megállapítsam, hogy hogyan függ a rendszer teljesítménye a jitter értékétől. A szimulációk során véletlenszerűen kiválasztottam egy kívánt késleltetést, majd miután elegendően közel került a szabályozás ehhez a késleltetéshez, 5000 ponton keresztül mértem a kívánt késleltetés és az aktuális késleltetés eltérését (megjegyzés: ez a hiba csak a determinisztikus hibát tartalmazza, a jitter által okozott többleteltérést már nem, azt ugyanis nem tudjuk kompenzálni). A szabályozás hibájaként az eltérés négyzetes közepét vettem (a hiba négyzetének átlagának a gyöke). Minden egyes zajszórásra 100-szor ismételt meg a számolást (minden egyes lépésben egy új célkésleltetést kiválasztva), majd átlagoltam a hibát.

Az 5.27. ábrán láthatjuk, hogy hogyan függ az ideális késleltetéstől való eltérés a zaj függvényében. Láthatjuk, hogy a szabályozás hibájának egyértelmű minimuma van 1,5 ns körüli zajszórás esetén. A hiba nagysága megközelíti a szabályozás lépésközéből adódó elméleti minimumot. Megjegyezném, hogy a zajszint pont abban a tartományban van, ami a célcsoport lézernél is előfordul. Ha a szabályozás „jóságát” (a hiba reciprokát) ábrázoljuk, a sztochasztikus rezonanciára erősen emlékeztető jelalakot kapunk (5.28. ábra).



5.27. ábra. A szabályozás hibája a zaj szórásának függvényében

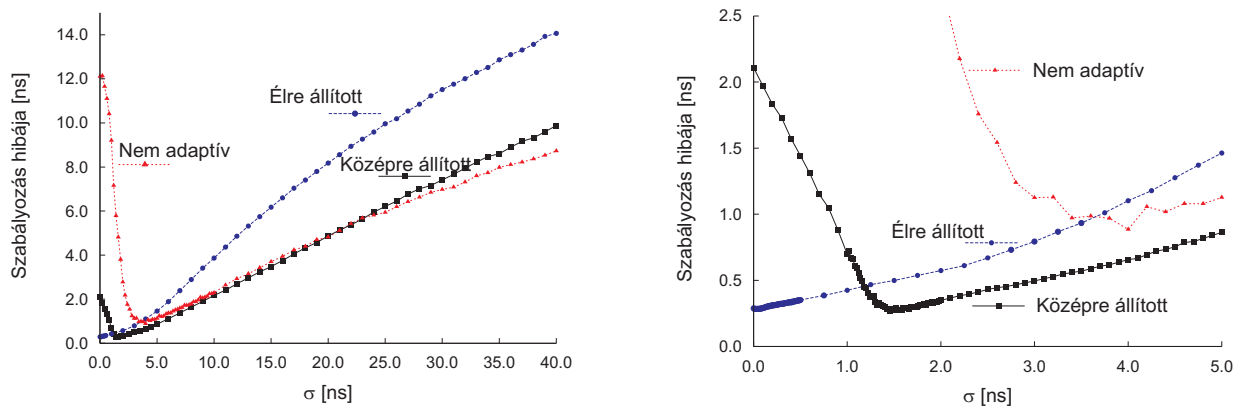


5.28. ábra. A szabályozás „jósa” (a hiba reciproka)

Felmerülhet az a kérdés is, hogy kis jitterű rendszerek esetén (amikor nem kapunk elegendő beütést a szomszédos ablakokban), hogyan tudunk javítani a szabályozás pontosságán. Az egyik lehetőség, hogy mi keverünk, szándékosan az optimum eléréséhez szükséges zajt a szabályozó elektronikába. A másik lehetőség, hogy nem az időablak közepére próbáljuk be-szabályozni a rendszerünket, hanem két ablak határára. Ekkor, ideális beállítás esetén a mért értékek fele az alsó ablakba, a másik fele a felső ablakba kell essen (bármilyen zajszint esetén).

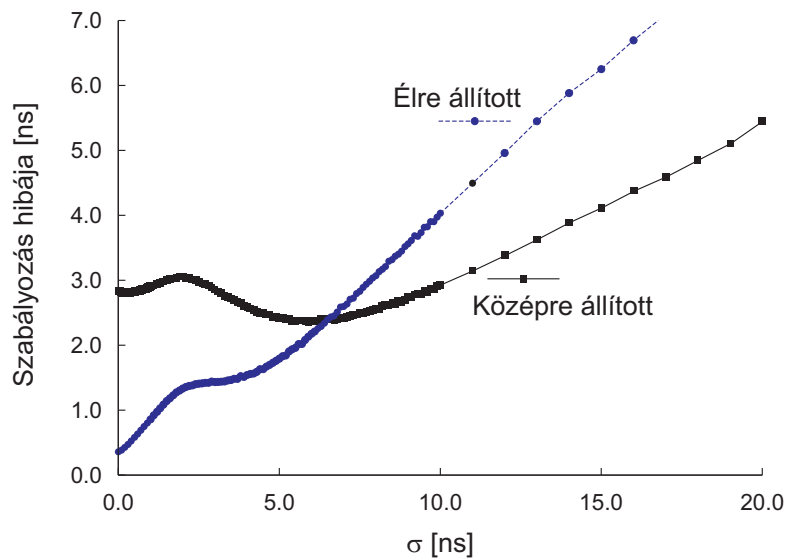
Az 5.29. ábrán látható, hogy e szabályozás esetén már kis zajok esetén is meg lehet közelíteni az ideális szabályozási távolságot. Ezen szabályozás esetén viszont nem állapítható meg a sztochasztikus rezonanciára jellemző javulás meghatározott zajszint esetén, a zaj növekedésével a teljesítmény romlik. Nagy zajszintek esetén pedig sokkal rosszabbul teljesít mint az eredeti beállítások esetén. Ugyancsak az 5.29. ábrán ábrázoljuk a nem adaptív átlagolás

teljesítményét. Már ezen egyszerű elv esetén is jól megfigyelhető a zaj konstruktív szerepe. Ugyan a nem adaptív átlagolás módszere elég jól működik nagy zajszórások esetén, kis zajszórásoknál igen nagy hibát okoz. Ez a módszer során fellépő oszcillációnak köszönhető.



5.29. ábra. A különböző módon működő szabályozások hibájának összehasonlítása. A jobb oldali ábrán az optimum körüli hibát láthatjuk kinagyítva

Amennyiben a lézer késleltetése időben változik, akkor ezt a szabályozásnak is követnie kell. A követés jóságában a zajnak ismét fontos szerepe lehet. A következő szimulációban a szabályozásnak egy 40 ns csúcstól csúcsig amplitúdójú, 1000 lövés periódusidejű szinuszt kell követnie. Az eredményt az 5.30. ábrán láthatjuk. Az élre beállított megoldás ismét jól teljesíthet kis jitterek esetén (sokkal jobban, mint a „normál” beállítás), nagy jitterek esetén viszont ismét rosszabbul teljesít. A „normál”, középre állított üzemmód néhány beállítását módosítva, javítva az érzékenységet, olyan szabályozást is kaphatunk, amely sokkal jobban teljesít, miközben nagyobb zajok esetén is jól viselkedik.



5.30. ábra. A hiba alakulása a zaj függvényében abban az esetben amikor a szabályozás egy szinuszos driftet követ

### 5.2.3. Az eredmények rövid összefoglalása

A előzőekben bemutatam egy a lézerimpulzusok precíz szinkronizálására alkalmas elektronikát és a hozzá tartozó, általam megvalósított szabályozási elvet. A szabályozás adaptív átlagolás elvén működik, és a rendszerben lévő zaj segítségével a hardver detektálási időfeloldásánál pontosabb szabályozást tesz lehetővé: míg a detektálási ablak szélessége 6 ns, addig megfelelő zajmennyiség jelenlétekor az átlagos hiba 0,25 ns körül van, közel a programozható késleltetés által meghatározott elméleti minimumhoz (a programozható késleltetés felbontása 0,5 ns).

A szabályozás viselkedése elég sok paraméteren keresztül szabályozható, ezzel az aktuális kívánalmakhoz igazíthatjuk a rendszer viselkedését. A paramétereiktől függően a rendszer másképp fog reagálni a lézer véletlenszerű fluktuációira; bizonyos beállítások mellett (amikor nem két ablak élére állítjuk a kívánt késleltetést), sztochasztikus rezonancia szerű viselkedést mutat, vagyis jól meghatározott, nem nulla zajmennyiség esetén van minimuma a szabályozás hibájának. A rendszer alkalmas viszonylag gyorsan változó jelek követésére is, a sztochasztikus rezonancia-szerű viselkedés itt is megfigyelhető. Mivel a vezérlő-elektronika számítógéphez csatlakoztatható, lehetőségünk van a lézer késleltetésének folyamatos követésére, kitérve a hosszútávú driftre, a lézer jitterére, és a hibás impulzusok arányára.

## 6. fejezet

# Összefoglalás

Dolgozatomban az  $1/f$ -zaj időbeli tulajdonságait vizsgáltam, valamint azt, hogy a zajanalízist milyen egyéb területeken lehet még hasznosítani. Ahhoz, hogy vizsgálataimat elvégezhessem, több, különböző tulajdonságokkal rendelkező analóg és digitális zajgenerátort fejlesztettem ki. Célom volt az  $1/f^\alpha$ -zajok szintmetszési tulajdonságainak vizsgálata, többek között az eloszlásukat és az egymás utáni szintmetszetek közötti korrelációt kutattam. A zajok számos esetben jelennek meg konstruktív szerepben. A zajok analízise közben szerzett tapasztalatomat ilyen jellegű vizsgálatokban is hasznosítottam. Tanulmányoztam a sztochasztikus rezonancia létrejöttét aperiodikus gerjesztések esetén, továbbá megvizsgáltam, hogy milyen szerepe lehet a lézer véletlenszerű jitterének a lézer késleltetésének pontosabb szabályozásában. Munkám eredményét az alábbi pontokban foglalom össze. A tézispontok végén feltüntetem a tézisponttal kapcsolatban megjelent publikációkat.

1. Kollégáimmal egy DSP (digitális jelprocesszor) alapú  $1/f^\alpha$  zajgenerátort fejlesztettünk ki. Az eszközben megfelelően paraméterezett digitális szűrőkkel állítottuk elő a kívánt zajnak megfelelő adatsort, majd ezt követően egy D/A-konverter segítségével kaptuk meg az analóg jelet.

Munkám során megmutattam, hogy milyen jelenségek torzíthatják a létrehozó zaj spektrális alakját, ezek közül a legfontosabb a szűrők aszimmetrikus elhelyezkedése a szűrőlánc szélein. Ezeket az eltéréseket az egyes szűrők amplitúdójának módosításával tudjuk kezelni. Bevezettem egy Monte-Carlo alapú optimalizálási eljárást, amely alkalmas az ideális szűrőparaméterek kiszámolására. Numerikus szimulációkkal optimalizáltam a digitális szűrők paraméterezését, hogy azok a lehető legjobban kihasználhassák a DSP 16 bites fixpontos számábrázolásának a lehetőségeit. Megvizsgáltam azt is, hogy a DSP fixpontos számolása mennyire befolyásolja a létrehozott zaj pontosságát, és azt találtam, hogy a generált zaj bőven megfelel az igényeinknek. A zajgenerátort megvalósítottuk,  $1/f$ -zaj esetén több mint négy dekádon keresztül a kívánt frekvenciamenetet adja, a maximális mintavételi frekvencia pedig eléri a 300 kHz-et. [1, 9].

- 
2. Numerikus szimulációk segítségével megvizsgáltam az  $1/f^\alpha$  -zajok szintmetszési tulajdonságait. Vizsgáltam a szintmetszetek statisztikájának a zaj kitevőjétől és a metszett szint értékétől való függését. Megvizsgáltam, hogy a szintmetszetek statisztikája függ-e a zajgenerálási elvtől, továbbá az eredményeket valódi mérésekkel is összevettem. Eredményeim azt mutatják, hogy a statisztika elsősorban a kitevőtől és a metszett szinttől függ, a zaj forrásától nem. Vizsgáltam a zaj sáv szélességének hatását a szintmetszetek eloszlására, az eredmények alapján arra a következtetésre jutottam, hogy mind az alsó, mind a felső határfrekvencia jelentős hatással van az  $1/f$ -zaj szintmetszési tulajdonságaira. [4, 7]
  3. Numerikus szimulációk segítségével megvizsgáltam az egymás utáni szintmetszetek közötti korrelációt. Eredményként azt kaptam, hogy  $1/f$ -zaj esetén a korreláció értéke kiemelkedően magas, ez is az  $1/f$ -zaj kitüntetett szerepére utal. Ha a szintmetszetek statisztikáját felhasználva, korreláció nélkül, vagy csupán a szomszédos intervallumok között korrelációt felhasználva próbáljuk rekonstruálni a zajt, nem  $1/f$ -zajt kapunk. Ebből arra következtetünk, hogy a szintmetszetek közötti korreláció egyértelműen az  $1/f$ -zaj tulajdonságaihoz köthető, és az nem a zajgenerátorok esetleges hiányossága. [4]
  4. Fehérzaj és  $1/f^2$  -zaj esetén a mérések eredményeit elméletekkel is alátámasztottam: a mérések során kapott statisztika pontosan megegyezik az elméletek által jóslottal. Fehérzaj esetén egy exponenciális lecsengésű statisztikát kapunk,  $1/f^2$  zaj esetén pedig egy hatványfüggvényt.  $1/f$ -zaj esetén irodalmi források hatványfüggvényt jósolnak, itt eltérés van a kísérleti eredményekhez képest. Figyelembe véve a mérések eredményeit, úgy vélem, hogy az eltérés egyik okozója a zaj alsó és felső határfrekvenciája.  
A kísérleti adatokra két paramétert tartalmazó függvényt illesztettem, és megállapítottam e két paraméternek a zaj kitevőjétől való függését. Az  $1/f$ -zaj kitüntetett szerepe e paraméterek menetéből is kitűnt. [7, 8]
  5. L. B. Kish munkája nyomán megvizsgáltam a sztochasztikus rezonancia lehetőségét nem periodikus gerjesztőjelek esetén. Három rendszert vizsgáltam: numerikus szimulációk segítségével a Schmitt-triggerrel és a szintmetszészdetektort, analóg számítógépes módszerrel pedig a kettős potenciálvölgyet. Periodikus jelekkel gerjesztve a rendszert összehasonlítottam a hagyományos jel-zaj definíciók működését az általam használt keresztjelzési sűrűség-spektrumon és keresztkorreláción alapuló módszerekkel. Mind a szimulációk, mind a mérések eredményei azt mutatják, hogy a kereszt-spektrális analízis korlátozások nélkül használható a jel-zaj viszony jellemzésére, a keresztkorreláció pedig hasznos adalékokkal szolgálhat a rendszer működéséről.  
Felhasználva az újonnan bevezetett módszereket a jel és a zaj szétválasztására, gerjesztőjelként keskenysávú zajt és (nem periodikus) impulzussorozatot is használtam.

---

Az eredmények azt mutatják, hogy sztochasztikus rezonancia mindhárom rendszerben fellép aperiodikus gerjesztés esetén is, ráadásul jel-zaj viszony erősítést is kaphatunk megfelelő zajintenzitások esetén.

Az irodalomban elterjedt nézetek szerint jelentős jel-zaj viszony erősítést elsősorban a küszöbhez közeli, impulzusszerű jelek esetén várhatunk. A vizsgálatok során azonban azt találtam, hogy számos jel esetén kaphatunk jel-zaj viszony erősítést, ráadásul az sem szükséges feltétel, hogy a küszöbszinthez közel legyünk. Ez alapján azt a következtetést vonhatjuk le, hogy a korábbi szigorú feltételek inkább a jel-zaj viszony korábbi definíciójához köthetők, mint magához a sztochasztikus rezonanciához. [2, 5, 6]

6. A lézerimpulzusok precíz szinkronizálását végző eszköz számára egy adaptív átlagolás alapján működő algoritmust dolgoztam ki. Az elkészített eszköz alkalmas volt arra, hogy az általa vezérelt lézer driftjét megbízhatóan és stabilan kompenzálja még az időnként előforduló kirívó impulzusok esetén is. Numerikus szimulációk segítségével megvizsgáltam a szabályozás teljesítményének függését a jitter nagyságának függvényében, és kimutattam, hogy az algoritmus a sztochasztikus rezonanciára jellemző viselkedést mutat. Megfelelő nagyságú jitter esetén a szabályozás hibája (mellyel a driftet kompenzáljuk) bőven a detektálási időablak mérete alá vihető (miközben az időablak mérete 6 ns, addig a hiba 0,25 ns-ra is csökkenhet). [3, 10]

# 7. fejezet

## Summary

In the present thesis I have studied the time structure of  $1/f$  noises, and the possibility of the application of noise analysis in various areas. In order to perform my investigations, I developed both analogue and digital noise generators with different properties. My aim was to investigate the level crossing properties of  $1/f^\alpha$  noises, including their probability density function, and the correlation between successive intervals. The constructive role of noises appeared in several areas. In my investigations in this area I used the experience I gained from analysing the properties of noises. Firstly, I studied the mechanism of stochastic resonance in the case of aperiodic excitation. Secondly, I examined the possibility of a positive role of jitter noise in the precise synchronisation of laser pulses. My results are summarised in the following thesis points. At the end of each point, I give the citation of the paper wherein the results are published.

1. With my colleagues we have developed a DSP (Digital Signal Processor) based  $1/f^\alpha$  noise generator. The time series corresponding to the desired noise was generated by means of properly configured digital filters; then we get the analogue signal by using D/A converters. In my work I pointed out what effects modify the spectral shape of the generated noise. One of the most important of these is the asymmetric placement of the filters at the beginning and the end of the filter chain. These deviations can be handled by modifying the amplitude of certain filters. I introduced a Monte-Carlo based optimisation procedure in order to obtain the ideal parameters for the filters. I optimised the parameters of the filters by means of numerical simulations in order to exploit the numerical range of the 16 bit fixed-point DSP to the maximum. I also examined in what ways the fixed-point calculation influenced the properties of the generated noise. I found that the generated noise met our requirements. We realised the noise generator: in the case of  $1/f$  noise it followed the desired spectral shape over 4 decades, and the maximal sampling frequency reached 300 kHz. [1, 9].



- 
2. I investigated the level crossing properties of  $1/f^\alpha$  noises by means of numerical simulations. I analysed how the noise power exponent and the value of the crossed level influence the distribution of level crossing intervals. Furthermore, I examined if the level crossing statistics depend on the method of noise generation. In addition, I compared the results with real measurements. The results show that the level crossing statistics depend primarily on the power exponent and the crossed level, and not on the source of the noise. I investigated the effect of the noise bandwidth on the distribution of level crossing times, and concluded that both the lower and the higher cut-off frequency have a significant impact on the level crossing properties of  $1/f$  noise. [4, 7]
  3. Using numerical simulations, I examined the correlation between the successive level crossing intervals. The results showed that, in the case of  $1/f$  noise, correlation is significantly high, and this points to the prominent role of  $1/f$  noise. If we try to reconstruct the noise by using the level crossing statistics, even considering the correlation between successive level crossings we do not get  $1/f$  noise. In conclusion, the correlation between level crossings is unambiguously connected to the properties of  $1/f$  noise and it is not a possible deficiency of the noise generators used. [4]
  4. As regards white noise and  $1/f^2$  noise, I supported the results of the measurements with a theoretical background, as the level crossing statistics of the measurements exactly matched the ones predicted. In the case of white noise, we find an exponentially decaying distribution, whereas for  $1/f^2$  noise we find a power function. Although earlier research predicts a power function for  $1/f$  noise, experimental results deviate significantly from this prediction. Considering the results of the measurements, I propose that one source of this difference is the low and high cut-off frequency of the noise.

I fitted a formula with two parameters on the experimental results, and determined the value of this parameter as a function of power exponent  $\alpha$ . The outstanding role of the  $1/f$  noise can be observed here as well. [7, 8]

5. Based on research carried out by L. B. Kish, I examined the possibility of stochastic resonance in the case of non-periodic excitations. I studied three systems: the Schmitt trigger and the level crossing detector with numerical simulations, and the double well system with mixed signal simulation. Exciting the system with periodical signals, I compared the behaviour of the traditional signal-to-noise ratio definitions with newly proposed cross-spectrum and cross-correlation based methods. Both the simulations and measurements showed that cross-spectral analysis can be used without limitations for the characterisation of stochastic resonance, while cross-correlation offers useful insights on the operation of the system.

---

Using these recently proposed methods for the separation of signals and noise content, I used an aperiodic pulse train and band-limited noise as excitation signals. The results show that stochastic resonance occurs in all three systems, even with aperiodical excitation. Moreover, with an adequate amount of noise, we can get SNR gain values above 1.

According to generally accepted views, significant SNR gain mainly occurs with spiky signals near the threshold level. However, during my research I found that significant SNR gain is possible for several types of signals. In addition, approaching threshold level is not a necessary requirement. According to these results, we can conclude that earlier strict conditions can be linked to the traditional definition of SNR, rather than stochastic resonance itself. [2, 5, 6]

6. I have devised an algorithm which was based on adaptive averaging for a device used for the precise synchronisation of laser impulses. The created device was able to compensate reliably the drift of the laser it controlled, even in the presence of erroneous impulses. Using numerical simulations, I determined the performance of the control algorithm as a function the amount of the laser jitter, and I pointed out that the algorithm displayed a stochastic resonance-like behaviour. In the presence of a proper amount of jitter noise the error of the control was far below the detection window length. While the window length was 6 ns the error could be as small as 0.25 ns. [3, 10]

# Köszönetnyilvánítás

Köszönetet mondok Dr. Gingl Zoltánnak a témaválasztásban, a kutatás kivitelezésében és a felmerült problémák megoldásában nyújtott segítségéért, valamint Dr. Makra Péternek, amiért segítséget nyújtott a munkámban, és amiért hasznos tanácsokkal látott el a dolgozat elkészítése közben, továbbá „Zaj labor” többi munkatársának amiért részt vettek a közös munkában.

Köszönöm Dr. Szatmári Sándornak, hogy lehetővé tette, hogy munkámat a tanszéken végezzem, és hasonlóan a Kísérleti Fizikai Tanszék minden dolgozójának, aki segítségükkel támogatták a munkámat.

Köszönöm a családomnak, amiért támogatták az egyetemi tanulmányaimat, továbbá Nagy Juditnak is, amiért segített a disszertáció megírásában, és amiért támogatta munkámat.

# Irodalomjegyzék

## Az értekezés alapjául szolgáló közlemények

- [1] MINGESZ R – BARA P – GINGL Z – MAKRA P: Digital Signal Processor (DSP) based  $1/f^\alpha$  noise generator. *Fluctuation and Noise Letters*, vol 4 (2004) L605–L616. p.
- [2] MINGESZ R – GINGL Z – MAKRA P: Marked signal improvement by stochastic resonance for aperiodic signals in the double-well system. *European Physical Journal B*, vol 50 (2006) 339–344. p.
- [3] MINGESZ R – GINGL Z – ALMÁSI G – CSENGERI A – MAKRA P: Utilising jitter noise in the precise synchronization of laser pulses. *Fluctuation and Noise Letters*, vol 8 (2008) L41–L49. p.
- [4] GINGL Z – MINGESZ R – MAKRA P: On the amplitude and time-structure properties of  $1/f^\alpha$  noises. *Third International Conference on Unsolved Problems of Noise and Fluctuation in Physics, Biology and High Technology (UPoN)*. Washington DC, USA, 2002. szeptember 2–6. In BEZRUKOV, S M (ED): *Proceedings of the Third International Conference on Unsolved Problems of Noise and Fluctuations in Physics, Biology and High Technology (AIP Conference Proceedings 665)*. Melville, 2003, American Institute of Physics, 578–583. p.
- [5] MINGESZ R – MAKRA P – GINGL Z: Cross-spectral analysis of signal improvement by stochastic resonance in bistable systems. *Fluctuations and Noise 2005*. Austin, Texas, USA, 2005. május 24–26. In KISH, L B – LINDENBERG, K – GINGL Z (EDS): *Noise in Complex Systems and Stochastic Dynamics III (Proceedings of SPIE Vol 5845)*. Bellingham, 2005, SPIE, 283–292. p.
- [6] MINGESZ R – GINGL Z – MAKRA P: Marked signal improvement by stochastic resonance for aperiodic signals in the double-well system. *News, Expectations and Trends in Statistical Physics, NEXT-SigmaPhi 3rd International Conference*. Kolymbari, Kréta, Görögország, 2005. augusztus 13–18.

- [7] MINGESZ R – GINGL Z – MAKRA P: Level-crossing time statistics of Gaussian  $1/f^\alpha$  noises. *Fluctuations and Noise*. Santa Fe, New Mexico, USA, 2003. június 1–4. In SIKULA, J (ED): *Proceedings of SPIE volume 5110: Fluctuations and Noise in Biological, Biophysical, and Biomedical Systems*, edited by Sergey M Bezrukov &al. Bellingham, 2003, SPIE, 312-319. p.
- [8] MINGESZ R – GINGL Z – MAKRA P: Level-crossing time statistics of Gaussian  $1/f^\alpha$  noises. *17th International Conference on Noise and Fluctuations*. Prága, Csehország, 2003. augusztus 18–22. In SIKULA, J (ED): *Proceedings of the 17th International Conference on Noise and Fluctuations*. Brno, 2003, CNRL, 505–508. p.
- [9] MINGESZ R – BARA P – GINGL Z – MAKRA P: Digital Signal Processor (DSP) based  $1/f^\alpha$  noise generator. *Fluctuations and Noise 2004*. Maspalomas, Kanári-szigetek, Spanyolország, 2004. május 26–28. In WHITE, L B (ED): *Noise in Communication (Proceedings of SPIE Vol 5473)*. Bellingham, 2004, SPIE, 213–221. p.
- [10] MINGESZ R – GINGL Z – ALMÁSI G – MAKRA P: Utilising jitter noise in the precise synchronization of laser pulses. *Fluctuations and Noise 2007*. Firenze, Olaszország, 2007. május 21–24. In MASSIMO MACUCCI &al(ED): *Noise and fluctuations in circuits, devices and materials (Proceedings of SPIE Vol 6600)*. Bellingham, 2007, SPIE, 6600 0Z. p.

## További közlemények

- [11] KISH L B – MINGESZ R: Totally secure classical networks with multipoint telecloning (teleportation) of classical bits through loops with Johnson-like noise. *Fluctuation and Noise Letters* , vol 6 (2006) C9–C21. p.
- [12] MAKRA P – GINGL Z – MINGESZ R: Signal-to-noise ratio gain by stochastic resonance and its possible applications. *International Workshop on Stochastic Resonance: New Horizons in Physics and Engineering*. Drezda, Németország, 2004. október 4–7.
- [13] KISH L B – MINGESZ R – GINGL Z: Thermal noise informatics: totally secure communication via a wire, zero-power communication and thermal noise driven computing. *Fluctuations and Noise 2007*. Firenze, Olaszország, 2007. május 21–24. In MASSIMO MACUCCI &al(ED): *Noise and fluctuations in circuits, devices and materials (Proceedings of SPIE Vol 6600)*. , 2007, SPIE, 6600 03. p.
- [14] GINGL Z – MAKRA P – FÜLEI T – VAJTAI R – MINGESZ R: Colored noise driven stochastic resonance in a double well and in a FitzHugh-Nagumo neuronal model. *16th International Conference on Noise in Physical Systems and 1/f fluctuations (ICNF)*. Gainesville, USA, 2001. október 22–25. In BOSMAN, G (ED): *Proceedings of the 16th International Conference on Noise in Physical Systems and 1/f fluctuations*. 2001, World Scientific, 420–423. p.

## Felhasznált irodalom

- [15] MANDELBROT, B B: *The Fractal Geometry of Nature*. San Francisco, 1982, Freeman.
- [16] BELL, J S: On the Einstein–Podolsky–Rosen paradox. *Physics*, vol 1 (1964) 195–200. p.
- [17] WEHRMANN, W: *Korrelációs technika*. Budapest, 1983, Műszaki könyvkiadó.
- [18] CHOBOLA, Z: Noise as a tool for non-destructive testing of single-crystal silicon solar cells. *Microelectronics Reliability*, vol 41 (2001) 1947–1952. p.
- [19] LIU, B – RIEMENSCHNEIDER, S – XU, Y: Gearbox fault diagnosis using empirical mode decomposition and Hilbert spectrum. *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol 20 (2006) 718–734. p.
- [20] KESTER, W: ADC input noise: the good, the bad, and the ugly. Is no noise good noise?. *Analog Dialogue*, vol 40 (2006) 13–17. p.
- [21] HOOGE, F N:  $1/f$  noise. *Physica*, vol 83V (1976) 14. p.
- [22] SNYDER, G – WEISSMAN, M B – HARDNER, H T: Nonequilibrium  $1/f$  noise in amorphous silicon. *Physical Review B*, vol 56 (1997) 9205–9208. p.
- [23] CLEM, J R: Theory of Flux-Flow Noise Voltage in Superconductors. *Physical Review B*, vol 1 (1970) 2140. p.
- [24] VERVEEN, A A – DERKSEN H E: Fluctuation phenomena in nerve membrane. *Proceedings of the IEEE*, vol 56 (1968) 906–916. p.
- [25] MUSHA, T – HIGUCHI, H: The  $1/f$  fluctuation of a traffic current on an expressway. *Japanese Journal of Applied Physics*, vol 15 (1976) 1271–1275. p.
- [26] MANDELBROT, B B – VAN NES, J W: Fractional Brownian motions, fractional noise and applications. *SIAM Review*, vol 10 (1968) 422–437. p.
- [27] RICE, S O: Mathematical analysis of random noise. *Bell System Technical Journal*, vol 24 (1945) 46-156. p.
- [28] MIMAKI, T: Zero-crossing Intervals of Gaussian Processes. *Journal of Applied Physics*, vol 44 (1973) 477–485. p.
- [29] SHENTON, H W – ZHANG, L: System Identification Based on the Distribution of Time Between Zero Crossings. *Journal of Sound and Vibration*, vol 243 (2001) 577–589. p.
- [30] NATIONAL INSTRUMENTS LABVIEW, <http://www.ni.com/labview/>.

- [31] DEVELOPERS RESOURCES FOR JAVA TECHNOLOGY, <http://java.sun.com/>.
- [32] LIU, F – YU, Y – WANG, W: Signal-to-noise ratio gain in neuronal systems. *Physical Review E*, vol 63 (2001) 051912-1–051912-4. p.
- [33] RUSSELL, D F – WILKENS, L A – MOSS, F: Use of behavioural stochastic resonance by paddle fish for feeding. *Nature*, vol 402 (1999) 291–294. p.
- [34] MCNAMARA, B – WIESENFELD, K – ROY, R: Observation of stochastic resonance in a ring laser. *Physical Review Letters*, vol 60 (1988) 2626–2629. p.
- [35] BENZI, R – SUTERA, A – VULPIANI, A: The mechanism of stochastic resonance. *Journal of Physics A*, vol 14 (1981) L453–L457. p.
- [36] BENZI, R – PARISI G – SUTERA A – VULPIANI A: Stochastic resonance in climatic change. *Tellus*, vol 34 (1982) 10–16. p.
- [37] *Valószínűségszámítás és matematikai statisztika*. Jegyzet, JATE, 1999
- [38] RÉNYI ALFRÉD: *Valószínűségszámítás*. Budapest, 1981, Tankönyvkiadó.
- [39] PRÉKOPA ANDRÁS: *Valószínűségelmélet*. Budapest, 1974, Műszaki Könyvkiadó.
- [40] SCHNELL LÁSZLÓ (FŐSZERK.): *Jelek és rendszerek mérés technikája*. Budapest, 1985, Műszaki Könyvkiadó.
- [41] HESSELMANN, NORBERT: *Digitális jelfeldolgozás*. Budapest, 1985, Műszaki Könyvkiadó.
- [42] TIETZE, U – SCHENK, C: *Analóg és digitális áramkörök*. Budapest, 1993, Műszaki Könyvkiadó.
- [43] GINGL Z: Real experiments using virtual measurement techniques. *11th Workshop on Multimedia in Physics Teaching and Learning*. Szeged, Magyarország, 2006. szeptember 20–22.
- [44] MINGESZ RÓBERT: *Digitális műszer fejlesztése az atomerő-mikroszkóp dinamikus üzemmódjai számára*. TDK dolgozat (SZTE TTK). Szeged, 2002.
- [45] L'ECUYER, P: Testing random number generators. *Proceedings of the 1992 Winter Simulation Conference*, (2002), 305–313. p.
- [46] DONALD ERVIN KNUTH: *A számítógép-programozás művészete 2. kötet (Szeminumerikus algoritmusok)*. Budapest, 1987, Műszaki Könyvkiadó.
- [47] L'ECUYER, P – SIMARD, R: TestU01: A C Library for empirical testing of random number generators. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 33, 4, (2007), Article 22.

- [48] L'ECUYER: Random Number Generation. *Chapter 4 of the Handbook on Simulation*, Jerry Banks Ed., Wiley, (1998), 93–137. p.
- [49] WIKIPEDIA. *List of random number generators*. 2008. [http://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_pseudorandom\\_number\\_generators](http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_pseudorandom_number_generators).
- [50] MATSUMOTO, M – MATSUMOTO, T: Mersenne twister: a 623-dimensionally equidistributed uniform pseudo-random number generator. *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation*, vol 8 (1998) 3–30. p.
- [51] AMBRÓZY A: *Elektronikus zajok*. Budapest, 1972, Műszaki Kiadó.
- [52] MILOTTI, E:  $1/f$  noise: a pedagogical review. *arXiv:physics/0204033*, (2002).
- [53] GINGL Z – KISS L B – VAJTAI R:  $1/f^k$  noise generated by scaled Brownian motion. *Solid State Comm.*, vol 71 (1981) 765–767. p.
- [54] MEADE, M L: Time- and frequency-domain models for fractional noises. *Proc. 10th International Conference on Noise in Physical Systems*, ed. A. Ambrózi., Akadémiai Kiadó, Budapest, (1989), 347–350. p.
- [55] WHITTLE, ROBIN. *DSP generation of pink ( $1/f$ ) noise*. 2004. <http://www.firstpr.com.au/dsp/pink-noise/>.
- [56] MÉRAI LÁSZLÓ: *Az  $1/f^\alpha$  amplitúdószerkezetének vizsgálata*. Diplomamunka (SZTE TTK). Szeged, 2002.
- [57] MINGESZ RÓBERT: *Az  $1/f$ -zaj szintmetszési tulajdonságainak vizsgálata*. Diplomamunka (SZTE TTK). Szeged, 2002.
- [58] CSÍK NORBERT: *Jel/zaj-viszony vizsgálata sztochasztikus rezonanciával*. Diplomamunka (SZTE TTK). Szeged, 2002.
- [59] NUMERICAL RECIPES. *The Art of Scientific Computing*. 2007. <http://www.nr.com/>.
- [60] NAGY SÁNDOR: *Digitális jelprocesszor-vezérelt zajgenerátor fejlesztése*. Diplomamunka (SZTE TTK). Szeged, 2002.
- [61] ANALOG DEVICES, <http://www.analog.com/>.
- [62] PAPOULIS, A: *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. London, 1965, McGraw-Hill.
- [63] MUNAKATA, T: Some unsolved problems on the level crossing of random processes. *Unsolved Problems of Noise*, ed Doering, C R &al, World Scientific, Singapore (1997), 213–222. p.



- [64] TAKÁCS OLIVÉR: *Sztochasztikus rezonanciával elérhető jel-zaj viszony erősítés elméleti vizsgálata*. Diplomamunka (SZTE TTK). Szeged, 2003.
- [65] GINGL Z – KÁNTOR Z – MINGESZ R: A DAS1414 általános célú intelligens adatgyűjtő és vezérlő egység és alkalmazásai. *UNGELEKTRO 2002 szimpózium*. Budapest, 2002. április 23-25..
- [66] GINGL ZOLTÁN: *1/f zaj generálása a Brown-mozgás skálázása alapján*. Doktori értekezés (József Attila Tudományegyetem). Szeged, 1992.
- [67] BEZRUKOV, S M – WINTERHALTER, M: Examining noise sources at the single-molecule level: 1/f noise of an open maltoporin channel. *Physical Review Letters*, vol 85 (2000) 202-205. p.
- [68] SIWY, Z – FULINSKI, A: Origin of  $1/f^\alpha$  noise in membrane channel currents. *Physical Review Letters*, vol 89 (2002) 158101. p.
- [69] FUCHIKAMI, N – ISHIOKA, S: Statistics of level crossing intervals. *Fluctuations and Noise 2004*. Maspalomas, Kanári-szigetek, Spanyolország, 2004. május 26–28. In GINGL, Z (ED): *Noise in Complex Systems and Stochastic Dynamics II (Proceedings of SPIE Vol 5471)*. Bellingham, 2004, SPIE, 29–37. p.
- [70] FUCHIKAMI, N – ISHIOKA, S: Statistics of level crossing intervals: discretized version and comparison with experimental studies. *Fluctuations and Noise 2007*. Firenze, Olaszország, 2007. május 21-24. In KERTÉSZ J & al(ED): *Noise and Stochastics in Complex Systems and Finance (Proceedings of SPIE Vol 6601)*. Bellingham, 2007, SPIE, 6601 12. p.
- [71] SOLIS, J L – SEETON, G – LI, Y – KISH, L B: Fluctuation-Enhanced Sensing with Commercial Gas Sensors. *Sensors and Transducers*, vol 38/12 (2003) 59-66. p.
- [72] MAKRA PÉTER: *Fluktuációk a sztochasztikus rezonanciában és az emberi keringésben*. Doktori értekezés (SZTE TTK). Szeged, 2006.
- [73] VINCZE D & al: Relevance of anaesthesia for dofetilide-induced torsades de pointes in  $\alpha_1$ -adrenoceptor-stimulated rabbits. *British Journal of Pharmacology*, vol 153 (2008) 75–89. p.
- [74] CHAPEAU-BLONDEAU, F: Input-output gains for signal in noise in stochastic resonance. *Physics Letters A*, vol 232 (1997) 41–48. p.
- [75] KISS L B: Possible breakthrough: significant improvement of signal-to-noise ratio by stochastic resonance. In Katz, R (ed): *Chaotic, Fractal and Nonlinear Signal Processing*, vol 375. Mystic (Connecticut, USA), 1996, American Institute of Physics Press, 382–396. p.

- [76] LÓRINCZ K – GINGL Z – KISS L B: A stochastic resonator is able to greatly improve signal-to-noise ratio. *Physics Letters A*, vol 224 (1996) 63–67. p.
- [77] GINGL Z – VAJTAI R – KISS L B: Signal-to-noise ratio gain by stochastic resonance in a bistable system. *Chaos, Solitons and Fractals*, vol 11 (2000) 1929–1932. p.
- [78] GINGL Z – MAKRA P – VAJTAI R: High signal-to-noise ratio gain by stochastic resonance in a double well. *Fluctuation and Noise Letters*, vol 1 (2001) L181–L188. p.
- [79] NEIMAN, A – SCHIMANSKY-GEIER, L: Stochastic resonance in bistable systems driven by harmonic noise. *Physical Review Letters*, vol 72 (1994) 2988–2991. p.
- [80] J J COLLINS, J J – CHOW, C C – IMHOFF, T T: Aperiodic stochastic resonance in excitable systems. *Physical Review E*, vol 52 (1995) R3321–R3324. p.
- [81] J J COLLINS, J J – CHOW, C C – CAPELA, A C – IMHOFF, T T: Aperiodic stochastic resonance. *Physical Review E*, vol 54 (1996) 5575–5584. p.
- [82] BULSARA, A R – ZADOR, A: Threshold detection of wideband signals: A noise-induced maximum in the mutual information. *Physical Review E*, vol 54 (1996) R2185–R2188. p.
- [83] GODIVIER, X – CHAPEAU-BLONDEAU, F: Stochastic resonance in the information capacity of a nonlinear dynamic system. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol 8 (1998) 581–589. p.
- [84] MISONO, M – KOHMOTO, T – FUKUDA, Y – KUNITOMO, M: Noise-enhanced transmission of information in a bistable system. *Physical Review E*, vol 58 (1998) 5602–5607. p.
- [85] MCNAMARA, B – WIESENFELD, K: Theory of stochastic resonance. *Physical Review A*, vol 39 (1989) 4854–4869. p.
- [86] HÄNGGI, P – INCHIOSA, M E – FOGLIATTI, D – BULSARA, A R: Nonlinear stochastic resonance: The saga of anomalous output-input gain. *Physical Review E*, vol 62 (2000) 6155–6163. p.
- [87] DYKMAN, M I – LUCHINSKY, D G – MANNELLA, R – MCCLINTOCK, P V E – STEIN, N D – STOCKS, N G: Stochastic resonance in perspective. *Il Nuovo Cimento*, vol 17D (1995) 661–683. p.
- [88] FAUVE, S – HESLOT, F: Stochastic resonance in a bistable system. *Physics Letters A*, vol 97 (1983) 5-7. p.