

**Dinamikai r -mátrixok és
megjelenésük Calogero-Moser
modellekben**

PhD tézisek

Pusztai Béla Gábor

Témavezető: Prof. Fehér László

Szegedi Tudományegyetem
Elméleti Fizikai Tanszék
2003.

1. Előzmények

Az integrálható rendszerek elmélete a matematikai fizika egyik igen gyorsan fejlődő területe. Fizikai szempontból a terület fontossága nyilvánvaló. A természetről szerzett ismereteink jelentős része speciális, egzaktul megoldható modelleken alapul. A harmonikus oszcillátor, vagy a Kepler probléma centrális szerepet játszik mind a klasszikus mechanikában, mind a kvantumelméletben. A KdV egyenlet, illetve a KP egyenlet a sekélyvíz modellek hullámmozgásainak megértéséhez, illetve a szolitonok tulajdonságainak tisztázásához ad segítséget. A nemlineáris Schrödinger egyenlet az optikai szálak elméletében talált alkalmazást. A sine-Gordon egyenlet a részecskefizikusok számára szolgál elméleti laboratóriumként. Ez a néhány válogatott példa is elegendő arra, hogy meggyőzzön minket az integrálható rendszerek fontosságáról. Az is jól ismert tény, hogy a numerikus szimulációk mellett a perturbációs módszerek teszik lehetővé, hogy bepillantást nyerjünk a fizikai jelenségek részleteibe. Érdemes emlékezni arra, hogy az összes perturbációs módszer alapjául egzaktul megoldott problémák szolgálnak. Matematikai szempontból még egyszerűbben és még nyilvánvalóbban megindokolható ezen modellek vizsgálata. Egyrészt matematikai kihívás a megoldásuk. Másrészt, a matematika szinte összes területe felhasználható a számításokhoz. A matematikának nemcsak a klasszikus fejezetei használhatók, hanem a legmodernebb területei is.

2. Célok és módszerek

A Calogero-Moser modellek [1, 2, 3] nagyon fontos integrálható hamiltoni rendszerek. A Calogero-Moser típusú sokrészecskés rendszereket az utóbbi időben igen intenzíven tanulmányozzák, köszönhetően az érdekes matematikájuknak, illetve alkalmazásaiknak [4], melyek kapcsolódnak például a szilárdtest fizikához és a Seiberg-Witten elmélethez. Ezen modellek definíciója egy gyökrendszeren, illetve egy potenciálfüggvényen alapul, ami a részecskék közötti 'távolságoktól' függ. A potenciál vagy a Weierstrass-féle P függvény, vagy ennek egyik (hiperbolikus, trigonometrikus, vagy racionális) degenerációja. A vizsgált modellek klasszikus mozgásegyenletének megadható Lax reprezentációja, ami megalapozza integrálhatóságukat. Babelon és Viallet [5] megmutatták, hogy tetszőleges modellben a Liouville integrálhatóság annak a következményeként tekinthető, hogy a Lax mátrix Poisson zárójele r -mátrix alakot ölt. Általában az r -mátrix függhet a dinamikai változóktól. Amikor az r -mátrix valóban függést mutat a fázistértől, azt mondjuk, hogy az r -mátrix dinamikai. A degenerált Calogero-Moser modellek standard Lax reprezentációjához tartozó r -mátrixot Avan és Talon [6] tanulmányozta. Azt találták, hogy ez szükségszerűen dinamikai, viszont választható úgy, hogy az impulzusoktól független legyen. Természetes kérdés, hogy ezen modelleknek megadható-e olyan Lax reprezentációja, melyek nem dinamika r -mátrixokkal jellemezhetők. A kézenfekvő módszer a Lax mátrixokon olyan mérték transzformáció végrehajtása, ami nem-dinamikai r -mátrixot eredményez. Ilyen módon a

degenerált potenciálfüggvényekhez társított standard Calogero-Moser modellek nem-dinamikai, konstans r -mátrixainak teljes leírását tudtuk adni.

Jól ismert, hogy az integrálható rendszerek modern elméletében az r -mátrixok centrális szerepet játszanak. Ahogy már említettük, Avan és Talon megmutatták, hogy a Calogero-Moser modellekben természetes módon jelennek meg dinamikai r -mátrixok. Nemrégén Li és Xu [7] talált szoros kapcsolatot dinamikai r -mátrixok és bizonyos általánosított spin Calogero-Moser modellek között. Ez az észrevétel adta az egyik fő motivációnkat a dinamikai r -mátrixok tanulmányozásához. Az ebben a kontextusban fellépő dinamikai r -mátrixoknak ki kell elégíteni az ún. klasszikus modifikált dinamikai Yang-Baxter egyenletet [8]. A Yang-Baxter egyenlet dinamikai általánosításai és az ezekhez társított algebrai struktúrák az érdeklődés középpontjában vannak, köszönhetően annak, hogy alkalmazást találtak az integrálható rendszerek elméletében, a matematikai fizika egyéb területein, és a tiszta matematikában is [9]. Egyik célunk az volt, hogy új bizonyítását adjuk annak a ténynek, hogy a [10, 11] munkákban már korábban bevezetett 'kanonikus' r -mátrix megoldja a klasszikus modifikált Yang-Baxter egyenletet. A lokális érvényű hatványsor módszerrel szemben a lineáris operátorok jól ismert holomorf függvénykalkulusát [12] használtuk a kanonikus r -mátrix definiálása során. Ennek köszönhetően a bizonyításunk globális érvényű a dinamikai változók egy maximális tartományán. Bizonyításunk erősségének tekinthető az a tény, hogy az r -mátrix definíciójában szereplő függvényre egyértelműségi eredmény is adódik. Nevezetesen, a

klasszikus modifikált dinamikai Yang-Baxter egyenlet egy függvényegyenletbe megy át, ami további természetes feltevések mellett egyértelmű megoldással rendelkezik.

További célunk az volt, hogy Etingof és Varchenko nagyhatású dolgozata [8] alapján továbbfejlesszük a dinamikai r -mátrixok konstrukciójára vonatkozó ismereteket. A munkájukban szereplő kiértékelő homomorfizmus technikája által motiválva, sikerült minden véges rendű automorfizmussal ellátott önduális, véges dimenziós Lie algebrához elliptikus dinamikai r -mátrixot társítani. Az eredményül kapott r -mátrixok a Felder-féle [13] híres elliptikus dinamikai r -mátrixok általánosításainak tekinthetők.

3. Eredmények

A degenerált Calogero-Moser modellel kapcsolatos eredményeink [17, 18] a következőképpen foglalhatók össze:

- Ezen modellek standard Lax reprezentációjához meghatároztuk a legáltalánosabb impulzus független r -mátrixokat.
- Kiválasztottuk azokat az r -mátrixokat, melyekből mérték transzformációval eltüntethető a dinamikai függés.
- Meghatároztuk a mérték transzformáció eredményeként kapható konstans r -mátrixokat. Ezek az r -mátrixok jól ismert r -mátrixokkal vannak kapcsolatban. A hiperbolikus/trigonometrikus esetben megadható olyan nem-dinamikai r -mátrix, ami a Cremmer-Gervais-féle [14] klasszikus r -mátrix

többszörösével ekvivalens. Racionális esetben a konstans r -mátrix megfelel a klasszikus Yang-Baxter egyenlet egy antiszimmetrikus megoldásának, amely a $gl(n)$ Lie algebra egy alkalmas Frobenius részalgebráján alapszik.

Ezek az eredmények összhangban vannak Hasegawa [15] és mások korábbi munkájával, ami azt mutatja, hogy a Belavin-féle [16] elliptikus r -mátrix, illetve degenerációi megjelennek a Calogero-Moser modellekben. Analízisünk előnyének tekinthető az elemi volta. Ezen túlmenően, a degenerált modellek konstans r -mátrixának egyértelműségi kérdéseiről is számot ad.

A dinamikai r -mátrixokkal kapcsolatos eredményeink a következőképpen foglalhatók össze:

- Egy új, közvetlen bizonyítást adtuk [19] annak az állításnak, hogy a 'kanonikus' r -mátrix kielégíti a klasszikus modifikált dinamikai Yang-Baxter egyenletet, tetszőleges véges dimenziós, önduális Lie algebra felett.
- Dinamikai r -mátrixot társítottunk tetszőleges gradált, önduális, meglehetősen enyhe feltételeknek eleget tevő Lie algebrához [20, 21].
- Konstrukciónkat alkalmaztuk az affín Lie algebrák azon általános osztályára, melyek a véges dimenziós, önduális Lie algebrák skaláris szorzatot megőrző véges rendű automorfizmusaihoz tartoznak [20, 21].
- Etingof és Varchenko [8] munkája által motiválva, elliptikus dinamikai r -mátrixot társítottunk tetszőleges véges rendű automorfizmussal ellátott véges dimenziós, önduális Lie algebrához [20, 21]. A Felder-féle [13] híres dinamikai r -mátrixot is sikerült visszanyernünk, speciális esetként.

Érdekes problémának tűnik az, hogy az általunk bevezetett r -mátrixoknak alkalmazást találjunk spin Calogero-Moser típusú modellekben. Ezt a kérdést szeretnénk a jövőben részletesen megvizsgálni.

Irodalomjegyzék

- [1] F. Calogero, *Lett. Nuovo Cim.* **13** (1975) 411.
- [2] J. Moser, *Adv. Math.* **16** (1975) 197.
- [3] A.M. Perelomov, *Integrable Systems of Classical Mechanics and Lie Algebras*, Vol. 1., Birkhauser Verlag, 1990.
- [4] J.F. van Diejen, L. Vinet (eds.), *Calogero-Moser-Sutherland Models*, CRM Series in Mathematical Physics (Springer-Verlag, New York 2000).
- [5] O. Babelon and C.-M. Viallet, *Phys. Lett. B* **237** (1990) 411.
- [6] J. Avan and M. Talon, *Phys. Lett. B* **303** (1993) 33.
- [7] L.C. Li and P. Xu, *Commun. Math. Phys.* **231** (2002) 257.
- [8] P. Etingof and A. Varchenko, *Commun. Math. Phys.* **192** (1998) 77.
- [9] P. Etingof and O. Schiffman, *Lectures on the dynamical Yang-Baxter equations*, preprint math.QA/9908064.
- [10] A. Alekseev and E. Meinrenken, *Invent. Math.* **139** (2000) 135.

[11] J. Balog, L. Fehér and L. Palla, Phys. Lett. B **463** (1999) 83; Nucl. Phys. B **568** (2000) 503.

[12] N. Dunford and J.T. Schwartz, Linear operators, I. General theory, Interscience Publ. Inc., New York-London, 1958.

[13] G. Felder, pp. 1247-1255 in: Proc. Int. Congr. Math. Zürich, 1994;
G. Felder and C. Wieczerkowski, Commun. Math. Phys. **176** (1996) 133.

[14] E. Cremmer and J.-L. Gervais, Commun. Math. Phys. **134** (1990) 619.

[15] K. Hasegawa, Commun. Math. Phys. **187** (1997) 289.

[16] A.A. Belavin, Nucl. Phys. B **180** (1981) 189.

A dolgozat elkészítéséhez használt publikációk:

[17] L. Fehér, **B.G. Pusztai**, *On the classical r -matrix of the degenerate Calogero-Moser models*, Czech. J. Phys. **50** (2000) 59-64. (Proc. of the 8th International Colloquium on Quantum Groups and Integrable Systems)

[18] L. Fehér, **B.G. Pusztai**, *The non-dynamical r -matrices of the degenerate Calogero-Moser models*, J. Phys. A: Math. Gen. **33** (2000) 7739-7759.

[19] **B.G. Pusztai**, L. Fehér, *A note on a canonical*

dynamical r-matrix, J. Phys. A: Math. Gen. **34** (2001) 10949-10962.

[20] L. Fehér, **B.G. Puztai**, *Dynamical r-matrices on the affinizations of arbitrary self-dual Lie algebras*, Czech. J. Phys. **51** (2001) 1318-1324. (Proc. of the 10th International Colloquium on Quantum Groups and Integrable Systems)

[21] L. Fehér, **B.G. Puztai**, *Generalizations of Felder's elliptic dynamical r-matrices associated with twisted loop algebras of self-dual Lie algebras*, Nucl. Phys. B **621** (2002) 622-642.

Egyéb publikáció:

[22] L. Fehér, A. Gábor, **B.G. Puztai**, *On dynamical r-matrices obtained from Dirac reduction and their generalizations to affine Lie algebras*, J. Phys. A: Math. Gen. **34** (2001) 7235-7248.

Társszerzői nyilatkozat

Pusztai Béla Gábor téziseit ismerem, azokat a jelölt önálló kutatási munkával elért tudományos eredményeinek tekintem. Ezért nem használtam és nem fogom használni tudományos minősítés szerzése céljából.

Szeged, 2002. február 23.

Dr. Fehér László
egyetemi tanár
Szegedi Tudományegyetem