

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
NEVELÉSTUDOMÁNYI DOKTORI ISKOLA
OKTATÁSELMÉLETI DOKTORI PROGRAM

ÖKÖRDI RÉKA

A HÁTRÁNYKOMPENZÁCIÓ LEHETŐSÉGEI DIGITÁLIS MATEMATIKAI
FEJLESZTŐPROGRAMMAL 3-4. ÉVFOLYAMOS TANULÓK KÖRÉBEN

PhD értekezés

Témavezető:
Prof. Dr. Molnár Gyöngyvér
egyetemi tanár



Szeged, 2025

Tartalomjegyzék

Bevezetés.....	4
1 A matematikai alulteljesítés: kognitív, affektív és szocioökonómiai okok, valamint a COVID távolléti oktatás hatása	7
1.1 A szocioökonómiai háttér meghatározó szerepe	10
1.1.1 Magyarországi helyzet	16
1.1.2 A szocioökonómiai státusz és a matematikai teljesítmény összefüggései	19
1.2 Az alulteljesítés oktatásból eredeztethető okai	22
1.3 Az alulteljesítés kognitív okai	24
1.3.1 Az alulteljesítés nyelvi okai	25
1.3.2 Az alulteljesítés matematikai készségekben rejlő okai	26
1.4 Az alulteljesítés affektív okai	28
1.4.1 A matematikai szorongás	29
1.5 A COVID-járvány okozta iskolabezárások következményei	31
1.5.1 Nemzetközi kontextus	31
1.5.2 A magyarországi helyzet.....	33
1.6 Összefoglalás	41
2 Számítógép-alapú fejlesztőprogramok.....	43
2.1 AZ IKT eszközök oktatási célú felhasználásának elméleti keretei	43
2.2 A hátránykompenzációra alkalmas számítógép-alapú fejlesztőprogramok létrehozásának kritériumai	44
2.3 Matematikai fejlesztőprogramok az alsó tagozatos diákok számára	46
3 Az empirikus vizsgálatok céljai, kérdései és hipotézisei	52
3.1 A kutatás céljai és szerkezete	52
3.2 Kutatási kérdések.....	52
3.3 Hipotézisek	55
4 Egy szorzás és osztás koncepciójának megértését támogató matematikai fejlesztőprogram bemutatása	60
4.1 A kutatás során alkalmazott matematikai fejlesztőprogram tartalmi és módszertani keretei	60
4.1.1 A matematika fejlesztőprogram tartalmi keretei	60
4.1.2 A fejlesztőprogram tartalma	62

4.2	A fejlesztőprogram didaktikai megfontolásokon nyugvó szerkezete	64
4.2.1	A fejlesztőprogram fő ágának feladatai mögött álló didaktikai megfontolások	65
4.2.2	A segítő ágak feladatai mögött álló didaktikai megfontolások	66
4.3	Az ismeretszerzés síkjai az online térben	68
4.4	A fejlesztőprogram egységeinek tartalma és felépítése	70
5	A matematikai fejlesztőprogram hatékonyságvizsgálatához készült mérőeszköz	71
5.1	A minta bemutatása	71
5.2	A mérőeszköz bemutatása	71
5.3	Eljárások, adatelemzés	75
5.3.1	Eljárások, az adatfelvétel körülményei	75
5.3.2	Adatelemzés	76
5.4	Eredmények: a mérőeszköz megbízhatósága és alkalmassága a vizsgált jelenség és populáció monitorozására	77
5.5	A mérőeszköz alkalmazhatóságára irányuló vizsgálatok megvitatása	82
6	A fejlesztő program hatékonyságvizsgálatának pilot kutatása	85
6.1	Minta	85
6.2	Az elő- és utótesztelés mérőeszközének bemutatása	87
6.3	Pilot kutatás: kutatási dizájn és módszerek	88
6.3.1	Kutatási dizájn, az adatfelvétel körülményei	88
6.3.2	Adatelemzés	89
6.4	Eredmények a végleges mérőeszközre vonatkozó vizsgálatban a pilot kutatás során	90
6.5	A mérőeszköz alkalmazhatóságára irányuló vizsgálatok megvitatása	97
6.6	A fejlesztőprogram pilot hatásvizsgálatának eredményei	99
6.7	A fejlesztőprogram pilot hatásvizsgálata eredményeinek megvitatása	106
7	A fejlesztő program nagymintás hatásvizsgálatának bemutatása	110
7.1	Minta	110
7.2	A nagymintás kutatás során alkalmazott matematikai fejlesztőprogram bemutatása	116
7.3	Nagymintás kutatás: kutatási dizájn és módszerek	124
7.3.1	Kutatási dizájn, az adatfelvétel körülményei	124
7.3.2	Adatelemzés	125
7.4	Eredmények a mérőeszközre vonatkozó vizsgálatban	125
7.5	A mérőeszköz alkalmazhatóságára irányuló vizsgálatok megvitatása	129

7.6	A nagymintás fejlesztőprogram hatásvizsgálatának eredményei	130
7.7	Az eredmények megvitatása	138
7.8	A fejlesztőprogram hatásvizsgálata a hátrányos és halmozottan hátrányos helyzetű tanulók esetében	142
7.8.1	Minta	143
7.8.2	mérőeszközre vonatkozó vizsgálatok eredménye azon diákok körében, akiknek szocioökonómiai státuszáról adatokkal rendelkezünk	144
7.8.3	A mérőeszközre vonatkozó vizsgálatok megvitatása	147
7.8.4	A fejlesztőprogram hatásvizsgálata a szocioökonómiai státusz alapján képzett csoportok esetén	147
7.8.5	Az eredmények megvitatása	150
7.9	Limitáció	152
8	Összegzés	154
	Köszönetnyilvánítás	158
	Irodalomjegyzék	160
	Ábrajegyzék	188
	Táblázatok jegyzéke	190
	Mellékletek jegyzéke	192

Bevezetés

A matematika megfelelő színvonalú, gondolkodásfejlesztésen alapuló oktatása az alsó tagozaton elengedhetetlen feltétele a további matematikatanulás sikerességének (pl. Bachman et al., 2022). Amennyiben a matematikában már a tanulmányaik kezdetén lemaradást mutató, vagy a hátrányt a kezdeti időszakban felhalmozó tanulók nem kapnak időben megfelelő támogatást, a hátrányuk behozhatatlanná válik, az olló köztük és társaik között folyamatosan egyre szélesebbre nyílik (pl. Elliott & Bachman, 2018). Azok a diákok, akik sikertelenek az alapfogalmak megértésében és megértésen alapuló alkalmazásában, később nehezen, vagy nem tudják elsajátítani az ezekre épülő tananyagot, például a törtek vagy az algebra témakörét. A gyengén teljesítő diákok önértékelése is sérülhet, továbbá kudarcaik mentén matematikai szorongás is kialakulhat, ezek a jelenségek pedig visszahatnak a teljesítményre és a motivációra, és még inkább ellehetetlenítik a felzárkózást. Az ebből fakadó hátrányok az egyének felnőtt életére is hatással vannak (Geary, 2011).

A matematikai alulteljesítés hátterében kognitív, affektív és szocioökonómiai okok, és ezek együttjárása, egymásra hatása is állhat. A szocioökonómiai háttér meghatározó szerepe már az óvodai évek, és az iskolakezdés idején, majd a későbbi iskolai években – egyre markánsabban – is megmutatkozik (pl. Duncan & Murnane, 2016). Ezen hátrány mértéke évtizedek óta folyamatosan nő (pl. Chmielewski, 2019).

A tanulók közötti különbséget egy hatékony iskolai hátránykompenzáció pedagógiai hozzáadott értéke csökkenteni képes (Tóth et al., 2010). A szociokulturális, vagy más okokból az iskolába hátránnyal érkező diákoknak heterogén tanulócsoportokban nagyobb esélyük van a fejlődésre, mint az őket homogén csoportba soroló oktatási rendszerekben (Alexander et al., 1993). Magyarországon az alacsony szocioökonómiai státuszú gyermekek az iskolai szegregáció áldozataként homogén csoportokban alacsonyabb minőségű oktatást kapnak, mint jobb körülmények közül érkező társaik (Radó, 2018).

Doktori tanulmányaim elkezdésében az a szándékom játszott döntő szerepet, hogy gyakorló pedagógusként tudományos eredményeken nyugvó hatékony beavatkozási lehetőségeket dolgozzak ki matematikában alulteljesítő diákok számára. Ennek első lépéseként feltérképeztük a matematikában gyenge gyerekek számára biztosított fejlesztő órák gyakorlatának hátterét, aminek eredményeképpen arra a következtetésre jutottunk, hogy a matematikai tartalom tekintetében a fejlesztési javaslatok szinte kizárólag a procedurális tudásra, a rutin eljárások gyakorlására irányulnak, a konceptuális tudás pedig nem jelenik meg ezekben a szakértői iránymutatásokban (Ökördi & Molnár, 2020). Abban az időszakban, amikor a kutatásomhoz a megfelelő korosztályt és számukra a megfelelő matematikai tartalmat kerestem, kitört a COVID-járvány, és ez a váratlan, új helyzet hirtelen nem várt irányt mutatott az útkeresésemben. A távolléti oktatás az alsó tagozatos tanítókat és diákokat állította a legnagyobb kihívások elé. A Szegedi Tudományegyetem

Oktatásméleti Kutatócsoportjának munkatársai azt feltételezték, hogy ezen az iskolafokon lesz tapasztalható a legnagyobb fejlődésbeli lemaradás. Ez a feltételezés később – az MTA-SZTE Digitális Tanulási Technológiák Kutatócsoport elemzéseiben – igazolást nyert (Molnár et al., 2021; Molnár & Hermann, 2023). Az előzetes sejtés hatására a tanulás szempontjából nélkülözhetetlen területeken online elérhető fejlesztő programok kidolgozását indítottuk el. A fejlesztő programok fókuszában az olvasás-szövegértési képesség, valamint a matematikai képességek és tudás fejlesztése állt. E vállalkás keretein belül hoztuk létre azt a 3-4. osztályos diákok számára kidolgozott matematikai fejlesztőprogramot, amely a szorzás és osztás újratanítására, a műveletek megértéséhez szükséges konceptuális tudás elsajátításának elősegítésére vállalkozott. Célunk egy olyan digitális fejlesztőprogram létrehozása, és működésének monitorozása volt, amely a szakirodalomra alapozva, a tantervi követelményekhez igazodva, az iskolai élet mindennapjaiba integrálva, a pedagógusok munkáját megkönnyítve a fejlesztésre, felzárkóztatásra leginkább rászoruló diákok matematikai készségeit és tudását fejleszti hatékonyan. A fejlesztőprogram kidolgozása során arra törekedtünk, hogy az ne csak a COVID-járvány mentén történt iskolabezárások miatt elszenvedett tanulási veszteség csökkentésére legyen alkalmas, hanem hosszabb távon is az oktatásba integrálható, felzárkóztatásra szolgáló eszköz legyen. A szakirodalom feltárása során arra a következtetésre jutottunk, hogy egy ilyen fejlesztőprogram hiánypótló lehet a magyar oktatási rendszerben. Egyézt azért, mivel számos ország, köztük hazánk oktatási rendszerére is jellemző az egyenlőtlen hozzáférési lehetőség az azonosan magas színvonalú oktatáshoz (Quaye & Pomeroy, 2021; Radó, 2018), így egy mindenki számára azonosan magas minőséget képviselő fejlesztőprogram hozzájárulhat a hátrányok csökkentéséhez azáltal, hogy fejleszti az alapképességeket, és segíti a tanulókat a felzárkózásban. Másrészt kevés, és sok esetben bizonytalan, a késleltetett utóhatást nem monitorozó kutatási eredménnyel rendelkezünk az alsó tagozatos korosztály számára iskolai oktatási környezetben alkalmazható digitális felzárkóztató programokról matematikából (Cheung & Slavin, 2013; Dietrichson et al., 2017; Outhwaite et al., 2017).

A disszertáció szerkezetét tekintve nyolc fejezetre tagolódik. A bevezetést követően az első fejezetben a matematikai alulteljesítés kognitív, affektív és szocioökonómiai okairól értekezünk. Byrnes és Miller (2007) nyomán az okok rendszerezésének újragondolására teszünk kísérletet, feltárva az egyes faktorokon belül és a különböző faktorok között fennálló kölcsönhatásokat. Ezt követően a COVID-járvány okozta iskolabezárások tanulmányi teljesítményre gyakorolt következményeit tekintjük át, részletesen feltárva a magyarországi helyzetet. A második fejezet az alsó tagozatos diákok számára készült számítógép-alapú matematikai fejlesztőprogramokra fókuszál. Részletesen áttekintjük az IKT eszközök oktatási célú felhasználásának elméleti kereteit, majd dolgozatunk témájának megfelelően tovább szűkítve a szakirodalmat e programok közül is a hátránykompenzációra alkalmas számítógép-alapú fejlesztőprogramok létrehozásának kritériumait

foglaljuk össze. A fejezet zárásaként a kutatásunk célcsoportját jelentő alsó tagozatos korosztály számára készült matematikai fejlesztőprogramok nemzetközi szakirodalmát szintetizáljuk.

A harmadik fejezetben tárgyaljuk empirikus kutatásunk céljait, szerkezetét, a kutatási kérdéseket és az ezek mentén megfogalmazott hipotéziseket. A negyedik fejezet az általunk létrehozott, a szorzás és osztás koncepciójának megértését célzó matematikai fejlesztőprogram tartalmi kereteit, didaktikai megfontolásait és szerkezetét, míg az ötödik fejezet a digitális matematikai fejlesztőprogram hatékonyságának monitorozására összeállított mérőeszközt és az annak alkalmazhatóságára vonatkozó vizsgálat eredményeit mutatja be. A hatodik fejezet a fejlesztőprogram hatékonyságát monitorozó pilot kutatás, míg a hetedik fejezet a pilot kutatás eredményeinek mentén módosított fejlesztőprogram hatékonyságát monitorozó nagymintás kutatás módszereiről és eredményeiről számol be. Ez utóbbi fejezetben részletesen értekezünk a fejlesztőprogram hátrányos és halmozottan hátrányos helyzetű tanulók körében mérhető hatékonyságáról. A hetedik fejezet egy részének alapját egy korábban már megjelent tanulmányunk adja (Ökördi & Molnár, 2022), ugyanakkor a tanulmány a disszertáció ívébe való illesztés során jelentős átalakításon esett át. A nyolcadik fejezet a kutatás eredményeit együttesen értelmező összegzéssel zárja a disszertációt.

1 A matematikai alulteljesítés: kognitív, affektív és szocioökonómiai okok, valamint a COVID távolléti oktatás hatása

A matematikai alulteljesítés rövid és hosszú távú következményei – többek között a tanulmányokban való behozhatatlan lemaradás, a továbbtanulási esélyek csökkenése, a munkaerőpiaci lehetőségek beszűkülése – jelentős hatással lehetnek az egyén életminőségére és jövőbeli kilátásaira. Jelen fejezetben a matematikai alulteljesítés jelenségének és jellemzőinek bemutatása után Byrnes és Miller (2007) keretrendszerét megújítva mutatjuk be az alulteljesítéshez vezető okokat, majd pedig részletesen is tárgyaljuk azokat, amelyek kezelésére a kutatásunkban bemutatott fejlesztőprogram hatással lehet.

Világszerte az iskoláskorú gyerekek több, mint a fele nem sajátítja el az alapvető számolási készségeket (Räsänen, Haase & Fritz, 2019; UNESCO, 2017). A felnőttek körében az OECD magas jövedelmű országaiban 10 és 40% közé tehető azok aránya, akik matematikai készségei alacsony, vagy nagyon alacsony szintűek (UNESCO, 2020). Gyerekek millióinak lenne szüksége személyre szabott segítségre ahhoz, hogy sikeres legyen az alapvető matematikai készségek elsajátításában. A gyerekek mintegy 4-7%-a pedig diagnosztizálható matematikatanulási nehézséggel küzd (Fritz et al., 2019; Shalev & Gross-Tsur, 2001). Magyarországon a legfrissebb PISA eredmények szerint a 15 éves tanulók 29,6%-a sorolható a matematika területén analfabéták közé.

A gyenge tanulmányi teljesítmény egyike azoknak a rizikófaktoroknak, amelyek korai iskolaelhagyáshoz vezethetnek. A matematikai alulteljesítés mind a férfiak, mind a nők esetében gyakran szerepet játszik az alacsonyabb arányú teljes munkaidős foglalkoztatásban, a hosszabb munkanélküli időszakokban, illetve az alacsonyabb hozzáadott értékű munkakörökben való foglalkoztatottságban. Az alulteljesítők felnőtt életük során nem, vagy kevéssé rendelkeznek továbbképzéshez elegendő képességekkel, így azokban kisebb arányban vesznek részt. Ezáltal mind a fizetésük alacsonyabb, mind az előléptetések terén hátrányt szenvednek munkatársaikkal szemben (Geary, 2011).

Az alulteljesítő diákokat a magyar szakirodalom a tanulási elmaradást, tanulási gyengeséget mutató tanulóként jelöli, elkülönítve a tanulási zavar és a tanulási akadályozottság kategóriáitól, és viszonylag egységesen alulteljesítő tanulókként, alkalmanként gyengén teljesítő diákokként hivatkozik rájuk (Szenczi, 2023). Az angolszász rendszerben ezek a gyerekek szintén az alulteljesítő (low achievers), vagy lassan tanulók (slow/ struggling learners) csoportját alkotják, elnevezésükre még ennél is több, egymással rokon értelmű kifejezést használnak (pl. low-performing students, at-risk students).

A matematikában alulteljesítő diákok csoportjának nincsen egységes definíciója. A legáltalánosabb megközelítés szerint a matematikából alulteljesítő diákok heterogén csoportot alkotnak. Ide soroljuk azokat a tanulókat, akiknek diagnosztikus úton nem meghatározható

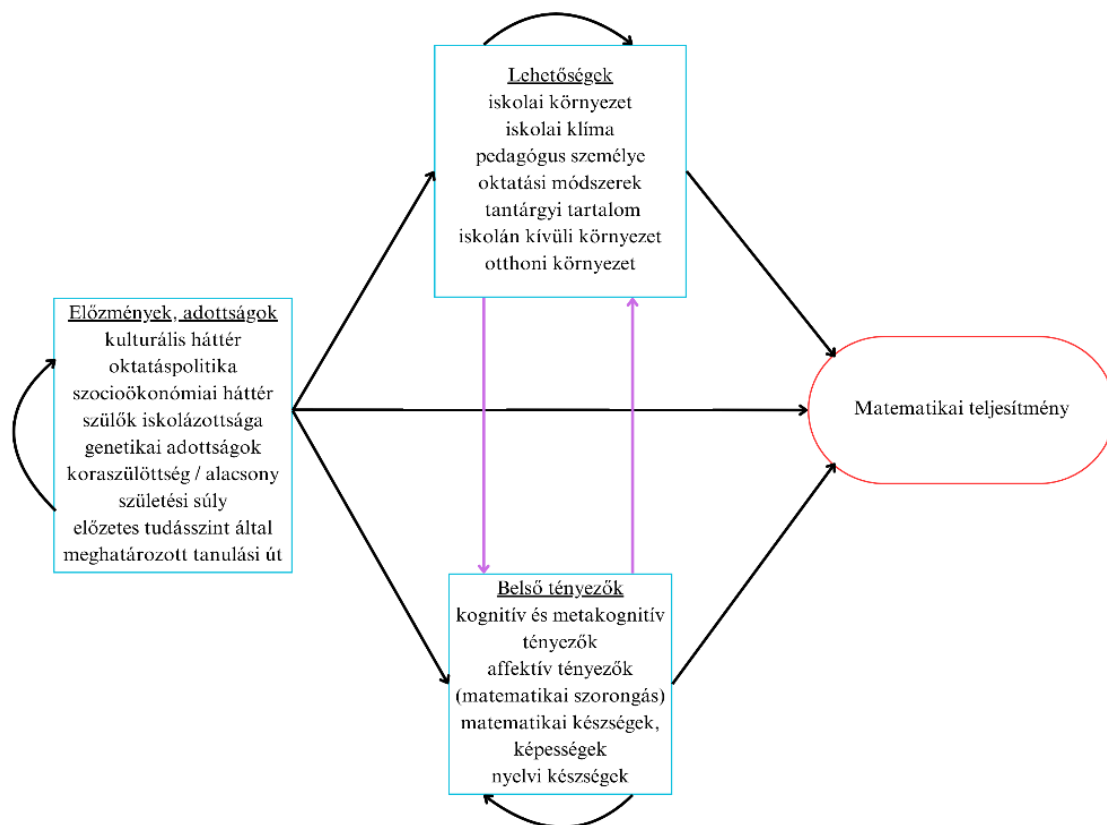
nehézségei vannak matematikából, ugyanakkor a korosztályuktól, vagy osztályfokuktól elvárt követelményekben teljesítményük jelentősen elmarad a társaikétól (pl. Barnes, 2005; Haylock, 2007). Egyes kutatók ennél egzaktabb megközelítést alkalmazva az adott korosztály teljesítményét tekintve az alsó 20%-ot sorolják az alulteljesítők közé (pl. Denvir et al., 1982; Geary, 2013; Mazzocco et al., 2008). Ez a megközelítés összecseng azzal, hogy a PISA méréseken minimumszintként jelölik meg a 2. képességszintet, mint olyat, ami szükséges a legegyszerűbb hétköznapi problémák közvetlen instrukciók nélkül történő lefordítására a matematika nyelvére, és ezáltal a probléma megoldására.

Az alulteljesítő tanulók jellemzői közé tartozik a társaiknál lassabban, vagy éppen kapkodva végzett munka; figyelmük megtartásának nehezítettsége; gyors fáradás; a tanultak gyors ütemű elfelejtése; önértékelési zavarok. Viselkedésüket tekintve széles a spektrum, a magatartási nehézség éppúgy jellemezheti őket, mint a csendes, láthatatlan jelenlét. Ezeknek a gyerekeknek otthoni támogatás, személyre szabott iskolai intervenció és fejlesztés hatására javul az iskolai teljesítményük. Ugyanakkor amennyiben a már az iskolakezdés előtt, vagy az iskola kezdő szakaszában az elemi alapképességekben megfigyelhető fejlődési hátrányt nem fejlesztjük, az később akár években mérhető lemaradást eredményez (Carstensen et al., 2025; Csapó, 2012; Nagy, 2003).

A matematikai alulteljesítés nem vezethető vissza egyetlen okra. Sokféle befolyásoló tényező van, melyek egymással is interakcióba lépnek (Fritz et al., 2019). Ebben a fejezetben azokat a főbb tényezőket foglaljuk össze, amelyek diagnosztizálható tanulási zavarral nem rendelkező gyerekek esetében az alapvető számolási készségek nem megfelelő elsajátításhoz vezetnek. Nem foglalkozunk a diagnosztizálható matematikatanulási nehézségekkel (pl. fejlődési diszkalkulia, szerzett diszkalkulia), mivel ezek egyrészt túl tágra nyitnák azt a keretet, amelyben a kutatásunkat elhelyezni kívánjuk, másrészt a kutatásunk részeként kidolgozott matematikai fejlesztőprogram nem diszkalkulia-terápiás céllal készült, hanem a lemaradással küzdő diákok hátránykompenzációjának elősegítése érdekében. Így azokat az okokat foglaljuk össze, amelyek kizárják az értelmi fogyatékosságból és az érzékszervi hiányosságból eredeztethető nehézségeket (melyeket a diszkalkulia definíciói is kizárnak), ugyanakkor nem zárják ki a környezeti és kulturális hátrányt és az oktatási tényezők szerepét (melyet a diszkalkulia definíciói kizárnak). Az alulteljesítés okai még e megszorításokkal is szerteágazóak, illetve egymással is oksági viszonyban állnak, sok esetben összeadódnak, egymást is erősítik. Csoportosításukra annak tudatában teszünk kísérletet, hogy egyes okok, illetve csoportok között szoros kapcsolat állhat fenn. Például intraperszonális ok a figyelmi funkciók nem megfelelő fejlettsége, de a figyelmi funkciók fejlettsége függhet a kedvezőtlen családi körülményektől.

Az alulteljesítés okainak rendszerezéséhez Byrnes és Miller (2007) keretrendszeréből indultunk ki annyiban, hogy megtartottuk azokat a szempontokat, amelyek mentén az alulteljesítés okait három csoportra osztották. Létrehozták az előzmények csoportját (melyet ők a distal névvel

illetnek, ám Baten, Pixér és Desoete (2019) már az antecedent elnevezést használják), a lehetőségek (opportunity) csoportját és a diszpozíció (propensity) csoportot. A szakirodalom szintézise során azonban az egyes csoportok tényezőinek körét kibővítettük, továbbá a csoportok egymáshoz való viszonyát is megváltoztattuk, miszerint a lehetőségek és a diszpozíció csoportba tartozó tényezők nemcsak közvetlenül a matematikai teljesítményre, hanem egymásra is hatnak (1. ábra). Jeleztük azt is, hogy az egyes csoportokon belül is összeadódhat a tényezők hatása, illetve azok is hathatnak egymásra.



1. ábra. Az alulteljesítés okai (Byrnes & Miller, 2007 alapján)

Az előzmények – általunk előzmények, adottságok – körébe sorolható tényezők egyrészt nem a gyermekből fakadnak, másrészt a matematikaoktatás során nincsen lehetőség azok megváltoztatására. Ide tartozik a szocioökonómiai státusz (pl. Dowker, 2019; Toh & Kaur, 2019); a szülők iskolázottsága; a szülők gyermekkel szemben támasztott elvárásai (Fang et al., 2018; Pitsia et al., 2017); a koraszülöttség és a nagyon alacsony születési súly (Desoete & Baten, 2017; Hannula-Sormunen et al., 2019). Byrnes és Miller (2007) a gyermek előzetes matematikai tudása alapján korábban történt teljesítmény szerinti csoportba sorolást, illetőleg ez alapján a gyerek által magának választott tanulási útvonalat is ide sorolja.

A lehetőségek azokat a kulturálisan meghatározott kereteket jelentik, amelyek a fejlődéshez és a tudásbővítéshez a gyermek rendelkezésére állnak. Ezek közé sorolhatjuk az iskolai és az iskolán kívüli környezetet, utóbbiba beleértve az otthoni környezetet és a társak befolyását is. Az iskolai környezethez soroljuk az iskolai klímán kívül a pedagógus személyét, az oktatási módszereket (pl. Gaidoschik, 2019; Svraka & Ádám, 2018) és a közvetített tantárgyi tartalmat, illetve a kompetenciafejlesztésre kínált tevékenységeket is (pl. Fábián et al., 2008; Radnainé et al., 1994).

A *propensity* – általunk belső tényezőknek nevezett – csoportba tartoznak a kognitív és metakognitív, a motivációs, az attitűddel kapcsolatos, valamint az affektív tényezők (pl. Dowker, 2019; Pitsia et al., 2017; Toh & Kaur, 2019), a matematikai készségek és képességek (pl. Csapó, 2012; Nagy, 2003), és a nyelvi készségek is.

Amíg az előzmények, adottságok, a lehetőségek és a belső tényezők mindegyike közvetlen hatással van a matematikai teljesítményre, az előzmények, adottságok csoportba tartozó tényezők közvetlen hatással vannak a másik két csoport bizonyos tényezőire is, továbbá a lehetőségek és az intraperszonális csoportok tényezői nemcsak közvetlenül a matematikai teljesítményre, hanem egymásra is hathatnak. Többek között a pedagógus személye vagy a tananyag tartalma hatással lehet az affektív tényezőkre, például a matematikai szorongásra. Ugyanakkor a matematikai készségek és képességek befolyásolják, hogy a gyermek a rendelkezésére álló lehetőséggel, például a tanórán közvetített tananyag elsajátításnak lehetőségével mennyire tud élni. Fontos rögzíteni, hogy nemcsak különböző csoportok tényezői hathatnak egymásra, hanem egy-egy csoporton belül egyes tényezők is kölcsönhatásban vannak. Ennek szakirodalma végtelenül nagy és összetett, így azt nem részletezzük, mivel az szétfeszítené az értekezés kereteit. Az egyes csoportok tényezői közül azokat mutatjuk be önálló alfejezetekben, amelyek vagy kutatásunk szempontjából kiemelt fontossággal bírnak, vagy nem érintettük őket más tényezők bemutatása során.

A matematikai alulteljesítés okai tehát nemcsak önmagukban, hanem más okokkal együtt, azokkal kölcsönhatásban is képesek befolyásolni a matematikai teljesítményt. A továbbiakban ezeket a befolyásoló tényezőket mutatjuk be abból az aspektusból, hogy miként tudnak negatívan hatni a matematikai teljesítményre.

1.1 A szocioökonómiai háttér meghatározó szerepe

A szocioökonómiai háttér több aspektusból is befolyásolja az iskolai beválást, és ennek következményeként az egyén életét. Az alulteljesítés alacsony szocioökonómiai háttérből eredeztethető okai bemutatásának a többinél nagyobb figyelmet szentelünk, mivel kutatásunk célcsoportjában egy jelentős részmintát a hátrányos és halmozottan hátrányos helyzetű gyerekek alkotnak, akikkel a kutatás bemutatása során részletesen foglalkozunk. Így jelen fejezetben először a szocioökonómiai státusznak a már az iskolakezdéshez szükséges készségekre, képességekre

gyakorolt hatását mutatjuk be, majd rátérünk az alacsony szocioökonómiai státuszú tanulók oktatásának, iskolai ellátásának sajátosságaira. Ezeket egy önálló alfejezetben magyarországi vonatkozásban is vizsgáljuk. Mindezek együttesen befolyásolják a matematikai teljesítményt, illetve jellemzik e diákok matematikaoktatását is. A specifikusan az alacsony szocioökonómiai státuszú diákok matematikai teljesítményére és matematikaoktatására vonatkozó megállapításokat ezt követően az 1.1.2. alfejezetben szintetizáljuk.

A legelterjedtebb felfogás szerint a szocioökonómiai státusz meghatározásához az anyagi helyzetet, az iskolai végzettséget – gyerekek esetén a szülők iskolai végzettségét – és a foglalkoztatottságot veszik figyelembe (Bradley et al., 2002; Hanushek et al., 2022; Bachman et al., 2022). Elsősorban az oktatás területén folytatott kutatások a szocioökonómiai státusz megközelítő becslésére olyan indikátorokat is használnak, mint a könyvek száma az adott háztartásban, vagy a gyermek-szülő interakciók mennyisége és minősége (pl. Su et al., 2021; Zhang et al., 2019). Mivel a gyermek fejlődését nem közvetlenül a társadalmi-gazdasági státusz határozza meg – hiszen gondoljunk azokra az alacsony szocioökonómiai státusszal rendelkező ázsiai bevándorló családokra, ahol a szülők minden tankönyvből kettőt vettek, hogy az anya, maga is haladva a tananyaggal, együtt tudjon tanulni a gyermekkel (Coleman, 1988) –, érdemes úgy tekinteni a szocioökonómiai státuszra, mint egy olyan gyűjtőfogalomra (Balácsi, Rábainé Szabó, Szabó & Szepesi, 2006), amelynek egyes elemei – és azok kölcsönhatása – döntő hatást gyakorolnak az egyén életére. Ezek az elemek lehetnek többek között a szülők iskolai végzettsége, a család anyagi helyzete, a tanuláshoz szükséges eszközök jelenléte vagy hiánya, az otthoni írásbeliség, a kulturális és anyagi tőke, de ide tartozik a társadalmi tőke is (Coleman, 1988), ez alatt értve azt is, hogy például a rossz társadalmi-gazdasági státusszal rendelkező családok közvetlen környezete sok esetben szintén egy hasonló adottságokkal rendelkező közösség. A szocioökonómiai háttér, mely hatással van már a magzati létre, majd a felnőttkorig érezteti hatását, befolyással van a gyermek egészségére, fizikai, pszichés és kognitív fejlődésére, ideértve a szocioemocionális készségeket is, mint például kitartás, motiváció, önkontroll, önértékelés (Bradley & Corwyn, 2002).

A rossz társadalmi-gazdasági státuszú családokban nevelkedő gyerekek nem ugyanolyan esélyekkel indulnak az iskoláztatás során, mint jobb helyzetben lévő társaik, hiszen előbbiek sem a családban, és nem ritkán az iskolát megelőző intézményes nevelés során sem találkoznak azonos feltételekkel (Atlay et al., 2019; Ginsburg & Pappas, 2004). Családjukban sok esetben nincsenek könyvek, számítógép, megfelelő fejlesztő játékok, interperszonális kapcsolataik kevésbé fejleszthetnek kognitív és emocionális fejlődésükre. E gyerekek nemcsak olyan környezetben élnek, amely kevésbé motiváló és fejlesztő hatású azon készségterületeken, melyek az iskolai előmenetelhez szükségesek (Dietrichson et al., 2017), hanem jóval kevesebb időt töltenek az iskolán és az otthonon kívül olyan helyeken, amelyek tanulási sikerességüket támogató új élményekkel, ezáltal új tudással, készségekkel gazdagítanák őket (Duncan & Magnuson, 2015). Sok esetben már az óvodában is

kevésbé képzett, a gyermekek fejlődését támogatni kevésbé tudó pedagógusok gondozzák őket (Ginsburg & Pappas, 2004). A jobb szocioökonómiai státuszú szülők tudatosan fejlesztik gyermekeik azon készségeit és képességeit, amelyek tanulmányaik során javukra válhatnak (Elliott & Bachman, 2018; Atlay et al., 2019). Ehhez motiváló – megfelelő könyvekkel és eszközökkel felszerelt – környezetet biztosítanak, különböző foglalkozásokra járatják őket, de saját maguk is időt szentelnek a gyerekekkel való tudatos kommunikációnak, játéknak (Magnuson, 2007; Bradley, 2022; Hanushek et al., 2022; Elliott & Bachman, 2018; Cosso et al., 2023).

Ezeknek az eltérő tapasztalatoknak, melyeket az eltérő háttérű gyerekek életük első éveiben tapasztalnak, komoly hatása van a gyermekek kognitív és mentális fejlődésére. Mindezek következményeként az iskolaérettségben is különbség mutatkozik a két csoport között. Az alacsony szocioökonómiai háttérű gyerekeknél az iskolaérettség testi, pszichológiai, szocioemocionális és kognitív feltételeiben is nagyobb eséllyel mutatkozik elmaradás. Egyrészt az agy, illetve az agyi funkciók gyermekkorban zajló megfelelő fejlődését a rossz társadalmi-gazdasági helyzet negatívan befolyásolja, többek között az alultápláltság által. További következményként a testi fejlődésben a nagymozgások és a finommotorika nem megfelelő fejlődése jelentkezik (Aiman et al., 2016; Schott et al., 2023). Ez is összefüggést mutat a család anyagi helyzetével, a szülők gyermekkel szemben támasztott elvárásaival, sőt, a háztartásban található könyvek számával is. Ezek a szülők kevésbé tudatosan figyelik gyermekük fejlődését, de amennyiben felmerül a fejlesztés szükségessége, úgy anyagi források hiánya miatt nem tudnak megfelelő fejlesztési lehetőséget biztosítani gyermeküknek. A gyermekek kevesebb finommotorikát fejlesztő tevékenységben vesznek részt, például az otthoni foglalkoztató könyvek, kézügyességet fejlesztő játékok hiánya miatt is. Ugyanakkor a finommotorika fejlődésének elmaradása az agyi pályák aktiválásának elmaradását vonja maga után, és így a kognitív fejlődést is hátrányosan befolyásolja.

Az iskolaérettséghez szükséges pszichológiai és szocioemocionális feltételeknek is sok esetben nem felel meg a hátrányos helyzetű gyermekek fejlettségi szintje. Szociális kompetenciáik nem megfelelő fejlettsége, a monotónia- és kudarctűrés képességének hiánya is megnyilvánul a gyakori magatartási zavarokban. A gyerekek egy részénél serdülőkorra kialakuló mentális betegségek következményei annak, hogy a rossz szocioökonómiai státusz közvetlen hatással van a mentális egészségre (Reiss, 2013).

Az alacsony társadalmi-gazdasági helyzetben lévő gyermekek végrehajtó funkciói, memóriája, szociális készségei mellett a nyelvi kompetenciái is elmaradnak a magasabb társadalmi-gazdasági státuszú gyerekekétől (Beacco et al., 2016; Dietrichson et al., 2017; Hackman & Farah, 2009; Duncan & Murnane, 2016). A rossz szocioökonómiai státusz nagyobb mértékben a receptív (feldolgozási), ám kisebb mértékben az expresszív (kifejezési) nyelvi fejlettséget is befolyásolja a nyelvi képességek különböző –hangkészlet, szókincs, nyelvtan, nyelvhasználat – szintjein. Az alacsony szocioökonómiai státuszú családok nyelvhasználatára a korlátozott nyelvi kód (Bernstein,

1964), azaz többek között a szűk szókincs, az egyszerű mondatok túlsúlya, a deiktikus névmások gyakori használata jellemző. Az elvont és konkrét közül az utóbbi dominál szókincsükben. Kommunikációs stratégiájukban kiemelkedő az imperatívusz használata és a rövidre záró megnyilatkozások. Emellett a rossz anyagi háttér okozta stressz olyan érzelmi légkört alakít ki, amely a nyelvi fejlődésre is kedvezőtlen hatással van (Mészáros & Kas, 2008; Raviv et al., 2004). Mindez kihat az olvasástanulásra, a szöveges problémák megértésére, és arra is, hogy a gondolataikat meg tudják fogalmazni (Pappas et al., 2003; Duncan & Murnane, 2016; Elliott & Bachman, 2018).

A szocioökonómiai státusz okozta hátrányok nemcsak az óvodáztatás és az iskolakezdés idején, hanem a további iskolai előmenetelben megmutatkozó nagy eltérésekben is tetten érhetők (Duncan & Magnuson, 2015; Nunes et al., 1993; Dowker, 2005; OECD, 2020). A nem hátrányos helyzetű, de alulteljesítő gyermekek iskolai teljesítménye sok esetben jobb, mint hátrányos helyzetű tanulórsaiké. Sőt, a kora gyermekkori alacsony szocioökonómiai státusz biztosabban vezet alacsony teljesítményhez, mintha a nehéz élethelyzet csak későbbi életkorban alakul ki (Dietrichson et al., 2017). A rossz szocioökonómiai státuszú tanulók gyakrabban lesznek évismétlők, nagyobb eséllyel hagyják abba iskolai tanulmányukat az iskolakötelezettségi felső korhatár betöltésekor. Azok, akik középfokú tanulmányokba kezdenek, javarészt szakképzésbe kerülnek. Így végül elenyésző azok száma, akik felsőfokú tanulmányokat tudnak kezdeni, és diplomát szerezni (Fejes & Szűcs, 2018; Radó, 2018).

Komoly esélyegyenlőtlenséghez vezet az is, hogy ezek a gyerekek sokkal nagyobb eséllyel kapják meg a sajátos nevelési igényű státuszt, és ennek megfelelően gyakrabban javasolják gyógypedagógiai intézményben való oktatásukat, mely egyes esetekben indokolatlannak tűnik, mivel alacsony szocioökonómiai státusz hiányában a hasonló problémával küzdő gyerekek e típusú elhelyezése jóval ritkább (Blair & Scott, 2002). A kevésbé súlyos tanulási zavarok mögött sokszor nem organikus eltérés, vagy perinatális zavarok állnak, hanem a rossz szocioökonómiai háttér (Resnick et al., 1999). E tanulási zavarok megléte esetén pedig már megnő az esélye annak, hogy a gyermek idővel átkerüljön gyógypedagógiai ellátásba (Resnick et al., 1999; Blair & Scott, 2002). Azaz a rossz teljesítményt, amennyiben az alacsony szocioökonómiai státusszal párosul, gyakran félrediagnosztizálják, és tanulási nehézséget, tanulási zavart állapítanak meg (Blair & Scott, 2002).

A teljesítménykülönbség az eltérő szocioökonómiai státuszú csoportba tartozó gyerekek között folyamatosan, évtizedek óta nő (Reardon, 2012; Chmielewski, 2019; Duncan & Sojourner, 2013). Ahogyan pedig a szegényebb gyermekek teljesítménye egyre távolodik a gazdagabb társaikétól, úgy nő közöttük azoknak a száma, akik nem fejezik be az iskolai tanulmányaikat (Duncan & Murnane, 2011).

Eltérő álláspontok fogalmazódnak meg azzal kapcsolatban, hogy a tanítás minősége meghatározó tényező-e az eltérő iskolai teljesítmények magyarázatában. Az egyik nézőpont szerint

ez a faktor meghatározó szerepet játszik a különbségek fenntartásában, illetve növelésében (pl. Hattie, 2009; Atlay et al., 2019). Más nézőpont szerint az iskola önmagában kevésbé magyarázza a szocioökonómiai státusz mentén kirajzolódó növekvő különbségeket (pl. Baker et al., 2002; Chmielewski, 2019; Dietrichson et al., 2017). Érvelésük szerint számos országban, ahol a szocioökonómiai státusz mentén egyre növekvő teljesítménykülönbség tendenciája tapasztalható, a közel azonos szintű alapfokú oktatás mindenki számára kötelező és hozzáférhető, így a különbségek okát inkább a családok szocioökonómiai státusza között növekvő szakadékban kell keresni. Ezt azzal a példával lehet képletesen bemutatni, hogy kisebb a különbség egy pályakezdő és egy több évtizede pályán lévő pedagógus között, mint egy gyermeke születésekor már diplomával és biztos munkahellyel rendelkező és egy kiskorú édesanya között (von Hippel et al., 2018).

Heyneman és Loxley (1983) IEA adatok újraelemzése során arra a következtetésre jutottak, hogy rosszabb gazdasági helyzetben lévő országokban az iskolai környezet és tanterv erősebb kapcsolatot mutat a tanulói teljesítménnyel, mint a diákok szocioökonómiai háttere, míg gazdagabb országokban éppen ennek a fordítottja igaz. Ezt az eredményt Heyneman-Loxley hatásnak nevezte el a szakirodalom, habár általános érvényességét egyértelműen igazolni nem tudták (pl. Bouhlila, 2015), vagy éppen ellenkező irányú tendenciáról számoltak be a kutatások (pl. Zumbach, 2011). Baker, Goesling és LeTendre (2002) szerint a Heyneman-Loxley hatás szegényebb országokban vagy válság esetén akkor következhet be, amikor például polgárháború dől, és nem jut erőforrás oktatási befektetésekre, vagy akkor, amikor a fejlettebb országok mintájára ezekben az országokban is megjelenik a gazdagabb gyerekek számára a magánoktatás. Ez utóbbi tulajdonképpen a szegregáció jelenségét veti fel, amikor a szocioökonómiai státusz játszik abban szerepet, hogy a tehetősebb gyerekek a jobban felszerelt, magasabb színvonalú oktatást nyújtó intézményekbe járnak, ahol viszont az oktatás eltérő színvonala is szerephez jut. Leginkább azonban éppen az az állítás igazolódott, hogy mind a szocioökonómiai státusz, mind az iskolák, az oktatás minősége, a tanárok képzettsége is hozzájárul az iskolai teljesítmények közötti különbségekhez (pl. Allier-Gagneur & Gruijters, 2021; Lannert, 2025). Az egyéni különbségeket a pedagógiai hozzáadott érték képes csökkenteni, de növelni is. A hatékony iskolák hátránykompenzáló hatással bírnak, míg a nem hatékony iskolákban az induláskor jelen lévő különbség megmarad, vagy akár növekszik, mivel az iskolai oktatás-nevelés folyamatából hiányzik a hozzáadott érték (Tóth et al., 2010). Holott éppen a rossz szocioökonómiai háttérrel rendelkező diákoknak lenne nagy szüksége a legnagyobb pedagógiai hozzáadott értékre (Francis et al., 2019; Boliver & Capsada-Munsech, 2021), ez a helyzet ezekben az iskolákban nem áll fenn. A szegregált iskolákba éppen a jól képzett, pedagógiaiailag jól felkészült tanárokat nehéz szerződtetni (Duncan & Murnane, 2016; Dietrichson et al., 2017). A nem szegregált iskolákban pedig az alacsonyabb szocioökonómiai státuszú, és emiatt hátránnyal induló gyerekek csoportjához általában a kevésbé képzett, kevésbé felkészült tanárt osztják be, szemben a jól képzett tanárral, aki a jobb adottságokkal rendelkező csoportot taníthatja

(Francis et al., 2019). Továbbá a tanár szerepe és felelőssége mutatkozik meg abban a már említett jelenségben is, hogy hátrányos helyzetű óvodásokat, vagy alsó tagozatos gyerekeket tévesen ítélnék meg, és így ezek a gyerekek tévesen kerülnek akár gyógypedagógiai ellátásba is (Samson & Lesaux, 2009).

Ezekhez hozzáadódik, hogy az alacsony társadalmi-gazdasági státuszú gyermekek vagy azért, mert szegregátumokban élnek, vagy más okokból, de sok esetben szegregált iskolába járnak, vagy egy nem homogén iskolában az alacsonyabb képességű csoportokba kerülnek (Duncan & Murnane, 2016; Feischmidt, 2010; Francis et al., 2019). A világ számos országában eltérő a minőségi oktatáshoz való hozzáférés attól függően, hogy a család lehetőségei milyen iskolákba való napi szintű eljutást tesznek lehetővé (pl. Kína: Xiang & Stillwell, 2023; Egyesült Államok: Johnson et al., 2021; Kelet-Európa: Kryst et al., 2015; Afrika: Shikalepo, 2020). A negatív iskolai hatást erősíti az is, hogy elsősorban a városi hátrányos helyzetű gyerekek gyakran váltanak iskolát – mivel városi környezetben több iskola érhető el –, és ez a dinamika hátrányosan befolyásolja nemcsak az ő, hanem az osztálytársaik iskolai teljesítményét is (Duncan & Murnane, 2016).

Ha megvizsgáljuk, mi történik a szegregált iskolákban, vagy a gyengébb képességű csoportokban, arra a következtetésre jutunk, hogy sok esetben ott is kedvezőtlen tendenciák valósulnak meg (pl. Radó, 2018; Gustaffson et al., 2018). Annak ellenére, hogy a szegregáció irányába mutató csoportbontás legalább arra lehetőséget biztosítana, hogy a hátrányos helyzetű csoportok a nekik szükséges és hatékony oktatásban és fejlesztésben részesüljenek (Boliver & Capsada-Munsech, 2021), az őket tanító tanárok ezt a lehetőséget ritkán használják ki. Kevesebb energiát fektetnek abba, hogy ezekben a csoportokban is jó színvonalú oktatást nyújtsanak (Atlay et al., 2019). Valójában nem differenciáltan, hanem csak lassabban haladnak ezekkel a csoportokkal, aminek következtében kevesebb tananyagot és azt is kevésbé alaposan néznek át, tanulnak meg (Francis et al., 2019; Gustaffson et al., 2018). Ebből következően kevesebb elvárást támasztanak ezekkel a csoportokkal szemben (Gustaffson et al., 2018; Francis et al., 2019). Egy heterogén tanulócsoportban a pedagógusok jobban rá vannak kényszerítve, és maguk is nagyobb késztetést éreznek, hogy a frontális tanítás helyett változatos oktatási módszerekkel próbálkozzanak a sokféle tanulói igény kielégítésének érdekében. Egy homogén tanulócsoportban ilyen késztetés kevésbé áll fenn, azaz a csoportbontás éppen a felzárkóztatás ellen hat. Továbbá azok a pedagógusok, akik huzamosabb ideig csak – akár jobb, akár rosszabb teljesítményt nyújtó – homogén csoportokat tanítanak, elveszítik a tanulók közötti különbségekre való rálátás lehetőségét, ami kihat a mindennapi gyakorlatukra, sőt megnehezíti a pedagógusok közötti oktatásról való kommunikációt. Nem homogén csoportokban is befolyásolják a sztereotípiák a hátrányos helyzetű gyerekekhez való viszonyulást mind a pedagógusok, mind az osztálytársak részéről. Ezekben az osztályokban a magatartás jelentős hatással van a teljesítmény értékelésére, mivel a jobban viselkedő gyerekek teljesítményét a tanárok rendszerint jobb érdemjeggyel jutalmazták az adott tantárgyból (Alexander

et al., 1993). A tanárok a diákok értékelésének folyamatában is növelhetik az egyes csoportok közötti teljesítménykülönbséget, ugyanis eltérés látszik abban, hogyha a tanulót a fejlődés elősegítése érdekében értékelik, vagy pedig szelekciós szempontok alapján – például meg kell jelöljék, ki nyújtotta a legjobb teljesítményt. Ez utóbbi esetben a rossz szocioökonómiai háttérű gyerekek munkájában több hibát találnak, vagy a talált hibát szigorúbban bírálják el, mint egy jobb feltételek közül érkező diák azonos munkájában (Autin et al., 2019). A tanár és a tanítás minősége pedig az egész életre kihatással van, az oktatásban eltöltött idő, és később a kereset is függhet tőle (Chetty et al., 2014; Lannert, 2025).

1.1.1 Magyarországi helyzet

Kutatási adatok támasztják alá, hogy Magyarországon a rossz szocioökonómiai és/vagy szociokulturális háttérű gyerekek jelentős része az iskolarendszerben markánsan jelen levő szegregáció áldozata (pl. Fejes & Szűcs, 2018; Radó, 2018). Továbbá Magyarországon a szociális-gazdasági és az etnikai alapú szegregáció szorosan együtt jár. Ez a jelenség kiemelten sújtja a roma származású tanulókat, mivel ők az etnikai háttérük miatt is hátrányos megkülönböztetésben részesülnek. A szegregáció következményeként a rossz szocioökonómiai státuszú gyerekek teljesítménye jóval elmarad a gyengén teljesítő többségi tanulók teljesítményétől is (Hermann & Kisfalusi, 2023; Fejes & Szűcs, 2017; Csíkos et al., 2019). Annak ellenére, hogy a magyar oktatási rendszer – más közép-európai oktatási rendszerekhez hasonlóan – sokáig a közoktatásban tartja a hátrányos helyzetű tanulókat, a gyenge minőségű oktatással nem képes tanulási sikerekhez juttatni őket. Ennek oka, hogy csak úgy tudjuk az iskolarendszeren belül tartani őket, ha elkülönítve, silány színvonalú oktatást kapnak (Radó, 2018). A körzeti és nem körzeti iskolák tanulmányozása (Hricsovinyi & Józsa, 2018) rávilágított arra, hogy a saját, az elemi alapkészségek terén leggyengébben teljesítő beiskolázási körzetükből elvándorló gyerekek jobb elemi képességekkel rendelkeznek, mint akik maradnak saját körzetes iskolájukban. Az elvándorló gyerekek jobb családi háttérrel és fejlettebb elsajátítási motívummal is rendelkeznek. Ez a korai beiskolázási szelekció már az iskola kezdeti szakaszán biztosítja azt, hogy a későbbiekben az eltérő háttérű gyerekek közötti kognitív és motivációbeli különbség tovább növekedjen. Ez a jelenség az iskolák fenntartói oldaláról úgy mutatkozik meg, hogy a tehetősebb vidéki családok a jobban finanszírozott egyházi iskolákba járatják a gyerekeiket, a vidéki állami iskolákba elsősorban a hátrányos helyzetű gyerekek járnak, amely többek között a finanszírozottsága miatt is gyengébb minőséget biztosít (Rónay & Matyasovszky-Németh, 2022). A szelekció a leghátrányosabb sorsú gyerekeket sújtja leginkább. Ezek a gyerekek – éppen háttérükből adódóan – olyan gyenge kognitív működést mutatnak, hogy számukra többek között a minőségi oktatás nyújthatna segítséget a sikeres iskolai beváláshoz (Zsoldos & Sarkadi, 2001). Már az általános iskolában több évnek megfelelő különbség van egy-egy osztály intellektuális fejlettségi szintje között, amely az iskola kezdeti szakaszában még kisebb,

viszont az évek előrehaladtával növekszik, aminek okai között szerepel a magyar iskolarendszer szelektív volta a maga négy- és hatosztályos középiskolaival, és a nyolcadik évfolyam után elérhető egymástól jelentősen eltérő típusú középiskola-típusaival (Csapó et al., 2009).

Az eddig vázolt helyzet következménye, hogy az OECD országok között Magyarországon a legnagyobb a különbség a városi és falusi iskolák tanulói teljesítménye között – a városi iskolák javára – (European Commission, 2022). Ezt a különbséget azonban nem az iskola elhelyezkedése, hanem egy beiskolázási körzetből az adott iskolában maradó, vagy oda vándorló gyerekek szocioökonómiai státusza, ennek is következményeként az iskola vonzereje, továbbá az iskola fejlesztő hatása magyarázza. Ezt úgy is általánosíthatjuk, hogy ezen összefüggő okok hatására létrejövő iskolai összetétel és az iskolában mért tanulmányi teljesítmény között van szoros kapcsolat. Azok, akik magasabb szocioökonómiai státusszal rendelkező diákok által látogatott iskolába járnak, a PISA méréseken is jobban teljesítenek. Így adódik, hogy az alacsony szocioökonómiai státuszú gyerekeket tömörítő iskolák diákjai kétszeresen járnak rosszul (Harsányi et al., 2019). Magyarország pedig azon országok között van, amelyeknek a szocioökonómiai összetétele meghatározóan befolyásolja a tanulói teljesítményt.

A pedagógiai szakszolgálatok munkáját vizsgálva és az adatokat elemezve alátámasztható, hogy a fentnevezett tevékenységek sok esetben éppen a hátrányos helyzetű – roma és szegénységben élő – gyermekek rossz iskolai, ezáltal színvonalas oktatáshoz való hozzáférési pozícióit termelik újra, legtöbbször éppen a pozitív diszkriminációtól indítva (Szügyi, 2009). A 2000-es évek elejétől kezdve több hullámban próbáltak szakértői csoportok változtatni azon a gyakorlaton, hogy roma gyerekeket „tévedésből” fogyatékosnak nyilvánítsanak, hátrányos helyzetű fiatalokat különböztessenek meg tanulmányi teljesítményükre hivatkozó szakvéleménnyel. Így idővel az SNI tanulóvá nyilvánítás gyakorlata csökkent, de ennek a több évig tartó mechanizmusnak és a gyógypedagógiai gyakorlatnak a hatására a megkülönböztetést más megoldási módok váltották fel – pl. az egy iskolában meglévő nyelvi és rajztagozatos, nyelvi és tánctagozatos osztályok, ahova az iskola már ismét szelektálva csoportosítja az oda még hivatalosan integrált oktatásba érkező elsősöket (Erőss & Kende, 2010).

Egy iskola előnyben részesít bizonyos értékeket – a magyar iskola a középosztálybeli értékrendet –, illetve bizonyos magatartásokat, készségeket – ahogyan a magyar iskola kommunikációja alapvetően verbális kommunikáció (Pintér & Pintér, 2010). A magyar iskola a cigány gyermekek hozott tapasztalatait nem tudja integrálni, kamatoztatni. A cigány gyermekek iskolai kudarcainak számos okát feltárta a szakirodalom (Lukács, 2009; Nahalka, 2009). Ezek közül kiemelkedően fontos a nyelvi hátrány, az ingerszegény környezet (pl. társasjátékok, mesék, könyvek hiánya), a család és az iskola kapcsolatának hiánya, a tanulási motiváció hiánya, az iskolai kudarcok halmozódása, a cigány többségű iskolák rossz felszereltsége és a tanárhiány.

Nemzetközi kontextusba helyezve a magyarországi helyzetet azt látjuk, hogy abban a tekintetben, hogy mennyire határozza meg a tanulók szocioökonómiai státusza a magyar diákok által mutatott átlagos teljesítményt, Romániával és Szlovákiával együtt az utolsó három helyen állunk. A matematikát tekintve az OECD országokban a 15 éves diákok matematikai teljesítményének varianciáját átlagosan 15%-ban magyarázza a szocioökonómiai státusz. Magyarországon ez az arány a legmagasabb értékek között van, 25%-ot tesz ki. Ugyanígy olvasásból is az egyik legmagasabb eredmény Magyarországé (22%). Ráadásul az alacsony szocioökonómiai státuszú diákok matematikai teljesítménye a 2018-as PISA méréshez képest szignifikánsan, 12 ponttal csökkent (OECD, 2023). A 2022-es PISA vizsgálatban résztvevők szocioökonómiai háttere alapján alsó és felső negyedbe tartozó diákok matematikateljesítménye között 121 pont volt a különbség, ami 28 ponttal alacsonyabb az OECD átlagnál. Ezek az adatok arra engednek következtetni, hogy Magyarországon az iskolai teljesítményen belüli különbségek rendkívül szoros kapcsolatban állnak a szociális egyenlőtlenségekkel (Pintér & Pintér, 2010). A 2018-as PISA eredményekkel összevetve megállapítható, hogy 2022-ben a szocioökonómiai státusz alapján negyedekbe rendezett csoportok közül csak az alsó két negyedbe tartozó csoport teljesítménye romlott szignifikánsan, egységesen 12-12 ponttal. Továbbá, ha a mérésen elért és az OECD országok diákjainak eltérő családháttér-index hatásának kiküszöbölésével nyert eredményeket értelmezzük, megállapítható, hogy a 2018-as eredményekhez képest 2022-ben a természettudomány területén az eredmény lényegében változatlan volt, ellenben a szövegértés területén 9 pontos, a matematika területén 14 pontos romlás következett be. Romlás következett be a magyar iskolarendszer hátránykompenzációs képességében is. Az ennek mérésére szolgáló indikátor, az egy pontnyi családháttér-index különbség által okozott szövegértésben elért pontszám-különbség már 2015-ben és 2018-ban is kiemelkedően magas volt (47, illetve 46 pont), ám 2022-re ez az érték 50 pontra emelkedett, amivel az európai országok között a legutolsó helyen állunk. A 2022-es mérések alapján a magyar közoktatás szociális inklúziós indexe a legkisebb Európában.

Ennek okai között szerepelhet, hogy a COVID járvány miatti iskolabezárások idején ezek a diákok kevesebb támogatást kaptak a távolléti oktatásban való részvételhez. Ugyanakkor nem magyarázható kizárólag ezzel a teljesítmény csökkenése, mert ez a trend már az iskolabezárások előtt is – a 2018-as stagnálásig – jellemző volt. Továbbá – Radó Péter Kornai Jánostól, a gazdasági életből kölcsönzött megnevezése szerint – transzformációs visszaesés következett be a magyar oktatási rendszerben, amit nem tudott korrigálni, sőt tovább romlott 2022-re, amit Radó funkcionális leépülésnek nevez (2023). Az átalakítás az oktatási rendszer adaptivitását építette le, azaz a jelenlegi rendszer lassan elveszti a gyerekek tanulásának támogatásához szükséges képességeket, ami egyébként alapvető feladata lenne (OECD, 2023; Schleicher, 2023; Nahalka, 2023; Radó, 2023).

1.1.2 A szocioökonómiai státusz és a matematikai teljesítmény összefüggései

Az alacsony szocioökonómiai státusz, az ebből is eredeztethető korlátozott nyelvhasználati kód, a matematikai gondolkodás fejlesztéséhez szükséges nyelvhasználat hiánya kisgyermekkorban, és ennek következményeként a matematika iránti nem megfelelő attitűd, illetve a matematikai énkép együttesen gyenge matematikai teljesítményhez vezetnek már az alsó tagozaton is (Ginsburg & Pappas, 2004; Jordan & Levine, 2009; King & Purpura, 2021; Silver & Libertus, 2022). Olyannyira, hogy a rossz szocioökonómiai státusz és gyenge matematikai teljesítmény együttjárása már az óvodában (Duncan et al., 2007), sőt egészen korai életszakaszban (4 és fél évesen) is kimutatható (Burchinal et al., 2011). A jobb szocioökonómiai státuszban lévő gyerekek gazdagabb szókincssel, fejlettebb grammatikai és matematikai készségekkel kezdik meg az iskolai tanulmányokat (Elliott & Bachman, 2018; Hanushek et al., 2022). Ám az is igaz, hogy a nagyobb tapasztalati alapon nyugvó gazdagabb gondolatvilágot könnyebben, jobb nyelvi képességekkel megosztó alsó tagozatos diákokat a tanáraik matematikából jobb képességűnek is tartják a kevésbé gazdag gondolati tartalommal és rosszabb nyelvi képességgel iskolát kezdő társaiknál (Pappas et al., 2003). A későbbi iskolai éveket tekintve az iskoláztatás korai szakaszában tapasztalt gyenge matematikai teljesítmény előrejelzője a későbbi gyenge iskolai teljesítménynek (Dunne et al., 2007; Bachman et al., 2022).

A szocioökonómiai státusz által is előrejelezhető matematikai teljesítménybeli különbségek nemcsak homogén csoportok között, hanem egy vegyes tanulócsoporton belül is kimutathatók (Elliott & Bachman, 2018). Az óvodáztatás kezdetén már 0,3 szórás különbséget mérhetünk, és ez 0,5-0,6 szóráskülönbségre nőhet 9-10 éves korra (Bradley & Corwyn, 2002; Galindo & Sonnenschein, 2015; Elliott & Bachman, 2018). A rossz matematikai teljesítmény kihathat az egyén teljes életére, miután egyrészt a matematikai tudás építőelemei sok esetben csak egymásra épülve működnek hatékonyan (Elliott & Bachman, 2018), gondoljunk például az alapműveletek sikeres elvégzésére egyre bővülő számkörökben. Így a tanulmányok korai szakaszában – sokszor már az óvodában (Elliott & Bachman, 2018; Galindo & Sonnenschein, 2015) – megszerzett hátrány az iskoláztatás későbbi szakaszaiban is megmarad, sőt a lemaradás mértéke akár nőhet is (Campione et al., 1988; Crosnoe & Schneider, 2010; Duncan & Magnuson, 2011; Elliott & Bachman, 2018). Másrészt, a digitalizáció korszakában a STEM tantárgyak fontossága vitathatatlan, ám aki matematikából lemarad, az mind abból a középfokú oktatásból, mind a munkaerőpiac azon szegmenséből kizorul, ahol a STEM ismeretek nélkülözhetetlenek (National Mathematics Advisory Panel, 2008; Jordan & Levine, 2009; Bachman et al., 2022).

A matematikai teljesítményben mért különbség a szocioökonómiai szempontból eltérő csoportok között nem feltétlenül jár együtt képességbeli, vagy tudásbeli különbséggel (Resnick et al., 1999; Ginsburg & Pappas, 2004). Az általános iskola befejezésekor mérhető különbségek

sokszor az alulteljesítésre adott adekvát válasz elmaradásának következményei (Sylva et al., 2010; Outhwaite et al., 2017).

Feuerstein (1991) beszámol arról a jelenségről, hogy a gondolkodásfejlesztő programok többnyire szélesebb körben, általánosan használható célra készülnek, és általában a magasabb szocioökonómiai státuszú gyermekek számára válnak elérhetővé. 2000-től ugyanakkor Feuerstein egyik célcsoportja éppen a nehezebben megszólítható, rossz szociális háttérű gyerekek lettek. Úgy tapasztalta, hogy ezek a gyerekek – éppen a háttérük miatt – gyenge kognitív működést mutatnak, mely az ő esetükben nehezíti a gondolkodásfejlesztő programokban való sikeres részvételt.

Feuerstein gondolatmenetéhez közel áll az a megközelítés, amelyet a Meeting Street School Screening Test (MSSST) létrehozói képviselnek (Zsoldos & Sarkadi, 2001). Az Egyesült Államokban kidolgozott vizsgálati eljárás kézikönyvében felhívja a figyelmet arra, hogy eltérő terápiás beavatkozást igényel egy neurológiai kóreredit alapján létrejövő deficit, illetve az emocionális alapon, szociokulturális hátrány okán kialakuló iskolai lemaradás és hátrány.

Megfontolandó, hogy az ingerszegény környezetben élő és a fogyatékkal élő gyermekek korai tanulási tapasztalataiban is van terület, ahol lehet olyan hasonlóság, amely szintén a megfelelő fejlődés elmaradásához vezet. A nem mediált tanulási tapasztalat során a gyermek közvetlen kapcsolatba kerül a környezettel az önálló megfigyelései, próbálkozásai révén (Portes & Vadeboncoeur, 2003; Gindis, 2003). Ugyanakkor ez a típusú tanulás a fogyatékkal élők számára sok esetben korlátozottan áll rendelkezésre. Míg a magasabb szocioökonómiai státuszú gyerekek otthoni környezetében ennek a tanulási tapasztalatnak gazdag tárháza áll rendelkezésre, az ingerszegény környezetben élő gyermekek számára ugyancsak korlátozottan állnak rendelkezésre azok a tanulási formák, melyek a környezettel való intenzív interakciókból származnak. A fejlődés lehetősége azonban akkor sem biztosított, ha ebben a helyzetben nincsen a gyerekeknek lehetősége mediált, azaz közvetített tanulásra, melynek során egy erre alkalmas felnőtt válogatja, módosítja és biztosítja azokat a környezeti ingereket, amelyekkel való interakciótól fejlesztő hatást vár.

A hátrányos helyzetű diákok esetében is értelmezendő Vigotszkijnak Feuerstein (1991) és az MSSST (Zsoldos & Sarkadi, 2001) álláspontjával rokon megállapítása, amely arra mutat rá, hogy amennyiben az organikus deficit kizárható, vagy már nem fejleszthető, akkor a kulturális fejlődés a kompenzáció, a felzárkóztatás fő területe (Portes et al., 2003). Kulturális eszközök alatt itt egyaránt értendők a Vigotszkij továbbá Nunes és Csapó (2011) által is leírt kulturális jelrendszerek (pl. a számrendszerek), illetve azok a kulturális eszközök (pl. óra), melyek különböző matematikai viszonyok segítségével teszik számunkra megfoghatóvá, leírhatóvá a világ egyes jelenségeit (Nunes & Csapó, 2011).

A fejlődés természetes és kultúra által meghatározott útjait leírva már Vigotszkij (Portes & Vadeboncoeur, 2003; Gindis, 2003) is egyértelműen különbséget tesz a neurológiai vagy más érzékszervi fogyatékoság miatti eltérés és az ezen a téren nem érintett, ám komoly kulturális

hátránnyal küzdő, és a többség számára rendelkezésre álló kulturális javakból való kizárással sújtott egyének fejlődésbeli elmaradásai között. Korának terminológiája alapján Vigotszkij az előbbi csoportot defekteseknek, az utóbbit pedig primitíveknek nevezte. A második kategóriába tartozó személyeket Feuerstein már megkésett fejlődésű egyéneknek nevezi. Fábiánné (2015) pedagógiai szempontból hátrányos helyzetnek minősíti azt, mikor gazdasági, társadalmi és kulturális körülmények megnehezítik a többségi iskolában való bevéálást. E gyerekek esetében a tanulási nehézség az életkori sajátosságoknak megfelelő pszichológiai és kognitív eszközkészlethez való hozzáférés és a többségi, általános oktatásból való profitálás képtelenségét jelenti. Kozulin és munkatársai (2010) egy tanulmányukban szintén az MSSST-ben megfogalmazott (Zsoldos & Sarkadi, 2001) eltérő terápiát tartják szükségesnek arra hivatkozva, hogy e két csoportnak nem egyformák a fejlesztési igényeik. Vigotszkij kritikával illeti a standardizált intelligenciateszteket, mivel ezek segítségével nem lehet különbséget tenni az organikus eltérés, a kulturális hátrányok, vagy az e kettő ötvözte okán fennálló elégtelen működés között. Ugyanezt a problematikát veti fel az a jelenség, hogy 2011-től tanévről-tanévre nő a szakértői véleménnyel rendelkező tanulók száma (Gyarmathy, 2017), azaz azoké, akik fejlesztő ellátásra jogosultak. A gettósodó és gettó iskolákban az SNI és BTMN gyermekek száma olyan magas (Gyarmathy, 2017; KSH, 2018), hogy az ő tanulási megsegítésükre szükségesnek látszik az osztályszinten történő beavatkozás is. A szakirodalom gettóiskola esetében legalább 50%-ban, gettósodó, illetve szegregálódó intézmény esetében legalább 30%-ban jelöli meg az intézménybe járó roma, illetve hátrányos helyzetű gyermekek számát (Fejes & Szűcs, 2018).

Ebből is következik, hogy a minél korábbi életkorban történő beavatkozásnak hátránykompenzáló szerepe van (Outhwaite et al., 2017). A hatékony és sikeres beavatkozással csökkenthetők, vagy elkerülhetők azok a tanulási, gazdasági és mentális konzekvenciák, amelyek enélkül előrejelezhetők (Galindo & Sonnenschein, 2015).

A fenti megállapítások ugyanakkor elsősorban a matematikai verbális problémákra, illetve a matematikai problémák absztrakt – a matematika nyelvén lejegyzett, illetve lejegyzendő – példáira igaz (Pappas et al., 2003; Bachman et al., 2022). A nem verbális, illetve nem absztrakt matematikai problémák megoldásában nem különböznek egymástól az eltérő szocioökonómiai státuszú óvodás gyermekek (Jordan, 1992; Ginsburg & Pappas, 2004; Elliott & Bachman, 2018). A matematikai teljesítményben más területen megmutatkozó, az alacsony szocioökonómiai státuszból eredő különbségek az óvodáskorban, vagy már annak kezdetén összefüggést mutatnak azzal, hogy e gyerekek lemaradása az iskoláztatás előrehaladtával egyre nő (Jordan & Levine, 2009; Galindo & Sonnenschein, 2015).

1.2 Az alulteljesítés oktatásból eredeztethető okai

Az alulteljesítés okait vizsgálhatjuk a matematikaoktatás tartalma és módszertana felől közelítve. Az alsó tagozatos kerettantervben túlságosan nagy hangsúlyt kap a számolás megtanítása, háttérbe szorítva más fontos területeket, és az azokhoz szükséges gondolkodási műveletek fejlesztését (pl. a geometria témaköre, vagy a kombinatív gondolkodás). Ha a tanuló ezeken a területeken csak az iskolai oktatás során szerezhethet megfelelő jártasságot, ám az iskola erre nem fordít kellő figyelmet, úgy ezek hiánya is további forrása lesz a lemaradásnak (C. Neményi, 2002). A számolás megtanítására fordított nagy figyelem azonban abból is fakadhat, hogy az iskola kezdő szakaszában a számfogalom, a számérzék, a számrendszeres gondolkodás fejlettségében való elmaradás a későbbiekben alulteljesítéshez vezet (Fábián et al., 2008).

Az alsó tagozat egyik kiemelt feladata a négy alpművelet értő elsajátíttatása a tanulókkal. Amennyiben a műveletvégzés tanításának folyamatából hiányzik a számolási eljárások tudatos fejlesztése (pl. ismert esetek felhasználása – $7 + 8 = 7 + 7 + 1$ –, a szorzás kommutatív tulajdonságának felhasználása), és a műveletek közötti kapcsolatok feltárása, a gyerekek nehezebben alakítják ki a saját számolási stratégiáikat, és ez a tanulmányaik előrehaladásával nehezíti a boldogulásukat (pl. Gaidoschik, 2019). Geary (1993) adatai szerint az Egyesült Államokban a harmadik osztályos tanulók mindössze 56%-a rendelkezett számolási stratégiával, 4% mindössze a megjegyzett esetekre támaszkodott, és 39%-uk változatlanul a hozzászámlálást alkalmazta egyszerű matematikai műveletek végzése során. Az éretlen számolási stratégiák – pl. egyesével számlálás, hozzászámlálás – megterheli a munkamemóriát – amely az alulteljesítés kognitív tényezője –, jelentősen lassítva a munkatempót is. Ugyanakkor a legnagyobb probléma a gyermek matematikai képességeiben keresendő, mivel hátrányt szenved a számrendszeres gondolkodás fejlődése, továbbá a gyermek megmarad a szerialitás elvénél, azaz az elemek egymás utáni sorrendben történő előhívásánál, és nem alakul ki a kardinalitás elvének megértése, miszerint a számlálás utolsó tagja azonos a halmaz elemeinek számával (Fritz et al., 2019).

A számolási eljárások tanítása mellett a műveletek értelmezésének tanítása is elengedhetetlen az iskola alapozó szakaszában. A műveletek értelmezésének megértése segíti a tanulót abban, hogy az egyes matematikai problémákhoz a megfelelő művelet, vagy műveletek elvégzését válassza. Eszerint a gyerekeknek érteniük kell többek között az összeadás többféle értelmezését (pl. hozzáadás-elvétel, összetoldás, összeöntés), vagy az osztás kétféle értelmezését (egyenlő részekre osztás és bennfoglalás). A szorzás értelmezését illetően Magyarországon az alsó tagozatos matematika kerettanerv (Kerettanerv, 2012, 2020) és a hivatalos matematikakönyvek (C. Neményi et al., 2020; Fülöp et al., 2021; Esztergályos & Nagyné, 2021) a szorzás értelmezéseként az egyenlő tagú összeadást jelölik meg. Ugyanakkor számos kutatás felhívta a figyelmet az additív és a multiplikatív gondolkodás eltérő jellegére: a szorzás egy a többhöz rendelés (one-to-many

correspondence) értelmezésének tanítása hatékonyabban fejleszti a multiplikatív gondolkodást, és ezáltal a műveletvégzést (pl. Isoda & Olfos, 2011; Jacob & Willis, 2003; Park & Nunes, 2001).

Alsó tagozaton egy-egy új témakör bevezetésének fokozatai a materiális síktól a képi síkon át jutnak el az absztrakt síkig. A materiális síkon töltött idő első szakaszában még a tárgyak között is különbséget teszünk, eleinte valóságos tárgyakkal (pl. gesztenyével), később pedig az absztrakciót segítő taneszközökkel (pl. színes rúd, korongok) dolgozunk. Ugyanakkor a tartalom túl korai absztrahálása, a matematikai szimbólumok siettetett bevezetése a megértés folyamatát késlelteti vagy meg is akaszthatja. Holott a matematikai fogalmak kialakulásának alapvető része a folyamat, amelyen keresztül ez megtörténik, ugyanakkor önmagában az eszközhasználat, még ha hosszabb ideig biztosított is, célirányos és tudatos alkalmazás nélkül még nem elégséges feltétele a megfelelő fejlesztésnek (Radnainé et al., 1994).

A matematikatanításban rejlő okok közé sorolhatjuk a matematikaoktatás sok esetben válaszcentrikus és nem problémacentrikus jellegét. Az iskolai oktatás a helyes választ jutalmazza, így a gyerekek számára – tanórai tapasztalataik alapján – az jelent sikerélményt, ha ugyanazt az eredményt kapják, amit a tanár megoldásként közöl velük (Holt & Holt, 2005; Ökördi, 2024; Radnainé et al., 1994). Ebből következik az is, hogy a lemaradók megsegítése is hasonló kérdéseket vetnek fel. Csíkos (2007), valamint Campione és munkatársai (1988) a lemaradók fejlesztésének problémáit abban látják, hogy a fejlesztés során a stratégiai szintű gondolkodás fejlesztése vagy teljesen hiányzik, vagy csak implicit módon valósul meg. A lemaradók terápiája az alapkészségek még hangsúlyosabb gyakoroltatásában merül ki, és ez a gyakorlat a magasabb szintű gondolkodási folyamatokra szánt erőforrások kárára valósulhat csak meg. A tanulóknál ezáltal az a tanórán is közvetített meggyőződés erősödik meg, hogy a matematikatanulás célja mindössze az alapkészségek elsajátítása.

Verschaffel és munkatársai (2009) felvetik azt a dilemmát, hogy amennyiben a matematikaoktatás célja mindössze a rutin eljárások rögzítése, akkor elegendő egyes mentális stratégiákat megtanítani figyelmen kívül hagyva akár magát a problémafelvetést, akár a kontextust is. Ha viszont a cél a stratégiai rugalmasság, a matematikai megértés elősegítése, és a matematika iránti pozitív attitűd kialakítása, akkor a matematikaoktatás kérdése már etikai problémákat vet fel, amennyiben a kiemelkedően tehetséges gyerekeken kívül a többi – átlagos és gyengén teljesítő – diáknak mégis szellemileg kevés kihívást igénylő, rutinjellegű matematikatanítást nyújtunk. A matematikatanítás során a gondolkodásfejlesztésen keresztül kell elérni a megértésig, és ebben a folyamatban azoknak a gyerekeknek, akiknek több időre van szükségük a megértéshez, nem alapvetően különböző, hanem az osztály többi tagját is fejlesztő tevékenységekből van többre szükségük (Gaidoschik, 2019; Moser Opitz, 2013).

Az iskolai túlterhelés is lehet oka az alulteljesítésnek. A túlterhelést kiválthatják oktatáson kívüli okok – pl. egészségi állapot, napszak, alváshiány –, de oktatásból eredő okok is – pl. a

gyermek képességszintjét meghaladó elvárások; a teljesítéshez biztosított nem elegendő idő; a gyermek érdeklődését nem fenntartó, monoton feladatok végzése. A tanórai figyelmet, illetve ennek hiányát befolyásolja a tanár aktuális figyelmi állapota, kommunikációja, stílusa, a tanórán alkalmazott munkaformák, de befolyásolhatja akár az ülésrend is (Mesterházi, 2023).

A túlterhelés, kiváltképp a tartós iskolai túlterhelés a tanulás eredményességének csökkenéséhez, ezáltal teljesítményromláshoz és halmozódó lemaradáshoz vezethet. Túlterhelés jele lehet, ha a gyermeknek lassul a munkatempója, gyakrabban követ el figyelmetlenségből eredő hibákat, motoros nyugtalanság lép fel. Ezeknek a gyerekeknek csökken a tanulási motivációja is, ami nemcsak a tanulmányi eredmények romlásához és lemaradáshoz vezethet, de sokasodó iskolai hiányzás forrása is lehet. Az iskolai hiányzás pedig további lemaradásokhoz vezet.

1.3 Az alulteljesítés kognitív okai

A kognitív képességek olyan mentális funkciók, amelyek a tanulmányi sikeresség elengedhetetlen feltételei, hiszen ezek teszik lehetővé többek között a gondolkodást, a tanulást és az emlékezést is. Jelen fejezetben a kognitív tényezők közül kiemeljük a végrehajtó funkciókat, mivel az alacsony szocioökonómiai státuszú gyerekeket gyakran ezek gyenge működése jellemzi, holott irányító és szabályozó funkciót töltenek be a hatékony tanulásban, és előrejelzői a matematikai teljesítménynek. Ezt követően az alulteljesítés nyelvi okaira koncentrálunk, melyek alapvető fontosságúak a matematika területén is, végül pedig a 2008-as kompetenciaalapú matematikai oktatáscsomag (Fábián et al., 2008) szakmai koncepciója alapján a matematikai kompetenciát, mint a kognitív kompetencia részrendszerét mutatjuk be.

A kognitív műveletek és a figyelem kölcsönös viszonyban vannak egymással. A kognitív műveletek fejlettségi szintjétől függ a figyelem fejlődése, ám a kognitív műveletek fejlődéséhez szükség van az optimális figyelmi állapotra (Szenczi, 2023). Amennyiben egy diák esetében a kognitív műveletek vagy a figyelem területén fejlettségi szintbeli lemaradás tapasztalható, ez a lemaradás alulteljesítéshez vezethet.

A végrehajtó funkciónak nincsen széles körben elfogadott definíciója a nemzetközi szakirodalomban, leginkább kognitív folyamatok csoportja, amelyek irányítják és szabályozzák a tudatos, célorientált viselkedést. Komponenseit tekintve azonban egységes a kutatók álláspontja (pl. Miyake et al., 2000; Diamond, 2013; Tánczos et al., 2014). Ide tartozik a munkamemória, a gátlás és a kognitív flexibilitás (pl. Best & Miller, 2010). A munkamemória ideiglenesen tárolja és kezeli azokat az információkat, amelyekre a gondolkodási folyamatok során szükségünk van. A gátlásnak, mint végrehajtó funkciónak abban van szerepe, hogy képesek legyünk elnyomni vagy korlátozni az automatikus válaszokat vagy impulzusokat bizonyos helyzetekben, így segíti az önkontrollt, a szelektív figyelmet és a kognitív folyamatok feletti kontrollt (pl. Miyake et al., 2000). A kognitív flexibilitás vagy váltás a végrehajtó funkciók harmadik fontos aspektusa. Ez a képesség arra utal,

hogy rugalmasan tudunk váltani két vagy több feladat, gondolat vagy stratégia között. A kognitív flexibilitás lehetővé teszi számunkra, hogy alkalmazkodjunk, és hatékonyan reagáljunk a változó körülményekre és feladatokra. Magában foglalja az olyan készségeket, mint az alternatív stratégiák és megoldási módok keresése, a problémákra való adaptív válaszadás és a kreatív gondolkodás. A kognitív flexibilitáshoz szükséges a munkamemória és a gátlás megfelelő fejlettsége, ennek következtében ez alakul ki legkésőbb (Diamond, 2013; Tánczos et al., 2014). A matematikatanulásban a munkamemória és a kognitív flexibilitás fontos szerephez jut. A munkamemória nemcsak tárolja az információt, de olyan kognitív folyamatokban is részt vesz, mint a szövegértés, vagy a matematikai problémamegoldás (Józsa & Józsa, 2018; Raver et al., 2011).

Fejlettebb végrehajtó funkciók a sikerebb matematikai eredmények előrejelzői. A gyengébb végrehajtó funkciók hozzájárulnak a matematikai alulteljesítéshez. Az alacsony szocioökonómiai státuszú gyerekek mellett az idegen ajkú diákok esetében is nagy a veszélye annak, hogy a végrehajtó funkciók működésének tekintetében elmaradást mutatnak (Fritz et al., 2019).

A munkamemória gyengesége esetén a tanulóknak nehézségei vannak az egymást követő utasítások követésével, mentális számítások elvégzésével, megoldási terv készítésével, egy komplex matematikai probléma összetevőinek átlátásával (Józsa & Józsa, 2018). Nem képesek egy több lépéses feladatnak nemcsak egy korábbi lépés során kapott eredményét, hanem azt is fejben tartani, hogy ahhoz milyen művelettel jutottak el. A kognitív flexibilitásra nem képes gyerekek gondolkodása merev, nem képesek egy általuk végigjárt megoldási út mellett egy másik lehetséges utat is végigjárni, vagy egy alkalmatlan megoldási tervet újra gondolni, és módosítani (Kovács et al., 2016). Több egymást követő szöveges feladat megoldása során többnyire úgy járnak el, hogyha az első feladatok megoldása során egy összeadás elvégzése megfelelő művelet volt a válasz megtalálásához, akkor egy másik alpművelet végzését igénylő feladathoz érve már nem képesek váltani az adekvát műveletre. A gyenge gátló funkciók esetén a gyerekek nem képesek kitartóan dolgozni egy bonyolultabb, hosszabb gondolkodást igénylő feladaton, azt hamar feladják, vagy halogatják az elvégzését (Tánczos et al., 2014). Azonnal rávágják a választ egy kérdésre, és sokszor nem képesek egy újabb nekiindulás során sem végiggondolni a kérdés és a szükséges információk összefüggéseit. Arra a kérdésre például, hogy „Tíz gyerek játszott a játszótéren. Ketten már hazamentek. Hányan játszottak eredetileg a játszótéren?” a válaszuk nyolc lesz, mert a ’ketten játszottak’ információ alapján azonnal kivonást végeznek a kérdés megválaszolásához szükséges összeadás helyett (Clements & Sarama, 2019).

1.3.1 Az alulteljesítés nyelvi okai

Az értelmi képességek mellett a kellően fejlett nyelvi készségek is szükségesek a matematika tantárgyban való eligazodáshoz. A gyerekek csak akkor tudnak értelmesen részt venni az iskolai tanulásban és oktatási tevékenységekben, ha kellően fejlett szókincsük lehetővé teszi számukra a

kontextus, a helyzet és az utasítások megértését (Cawley et al., 2001; Powell et al., 2019). A nyelvi fejlettség egyrészt magában foglalja az alapvető kommunikációs készségeket, ezen belül a gazdag hétköznapi szókinccset is. Másrészt az iskolai szaknyelv mind a négy szintjén, a szókinccs, a mondat, szöveg és a megnyilvánulások szintjén is boldogulni kell.

A lexikai szintre a szakkifejezések, illetve egyes kifejezések hétköznapiól eltérő használata; a nominalizáció és a bonyolult szóalakok, a morfológiai struktúrák különbségének fontossága (pl. leszámol, vagy megszámlol), illetve a relációs szókinccs kiemelt szerepe jellemző. A matematikai szókinccs fejlesztése már kisgyermekkorban szükséges. A viszonyszavak közül például a jobb szociokulturális háttérű gyerekek szókinccsében inkább szerepel a *kevesebb* szó használata *több* párjaként, miközben a rosszabb szociokulturális háttérű gyerekek két mennyiség összehasonlításánál a *több* relációt részesítik előnyben. A nem megfelelő relációs szókinccsel rendelkező gyerekek nehezen, vagy nem értik meg a tanári instrukciókat, és a matematika tananyagban is nem, vagy csak nagy nehézségek árán boldogulnak (pl. Tedd a ceruzádat a füzet mellé!; Írd egymás alá a számokat!) (Jorgensen, 2011; Nagy, 2003; Prediger et al., 2019).

Mondat szinten az összetett szintaktikai struktúrák, az alárendelő mondatok túlsúlya, a passzív szerkezetek és a mondatok jelentése közötti különbségtétel (pl. holnap, vagy holnapután; vagy holnap, vagy holnapután) jelenik meg. A szövegszinten a tudományos szövegekre jellemző szövegtípusok, és a komplex szövegbeli összefüggések a dominánsak. Végül diskurzus szinten a tantárgyra jellemző megnyilvánulások – pl. érvelés, magyarázat – jelennek meg a tudományra jellemző pontosság igényével párosulva. Ugyanakkor a nem megfelelő nyelvi készségekkel rendelkező diákok éppen a matematika tantárgy tartalmáról szóló diskurzusokban nem tudnak részt venni, miáltal a fogalmi tudás elsajátítása nem történik meg (Prediger et al., 2019).

1.3.2 Az alulteljesítés matematikai készségekben rejlő okai

A kompetencia szűkebb értelemben készségek és képességek rendszere, tágabb értelemben pedig egy személy tudásra, tapasztalatokra és beállítódásokra épülő felkészültsége arra, hogy hatékonyan cselekedjen különböző helyzetekben (Fábián et al., 2008). Nagy József definíciója alapján a kompetencia „a személyiség motívum- és tudásrendszere, az aktivitás, a döntés és kivitelezés egységes pszichikus feltétele, eszköze; a motívum és a tudás átfogó komponensrendszere” (Nagy, 2007. p. 27.). Ezen a rendszeren belül négy kognitív kulcskompetenciát jelöl meg: a tudásszerzést, a tudásfeltárást, a gondolkodást és a tanulást. Ezek között egymást felhasználó és működtető kapcsolatok állnak fenn. Erre az értelmezésre épül az a szakmai koncepció, amelyet 2008-ban a kompetenciaalapú matematikai oktatócsomaghoz dolgoztak ki Fábián és munkatársai (Fábián et al., 2008). A matematikai kompetenciát a kognitív kompetencia részrendszereként értelmezik, mely maga is terület-specifikus és általános komponensek rendszere, és ezáltal mind a matematika, mind más tantárgyak keretén belül fejleszthető.

Ezek közül a számlálás és számolás kompetencia-komponensek különös figyelmet érdemelnek már az óvodáztatás éveiben is, mivel az óvodás korú gyermekek matematikai tudása megbízható előrejelzője nemcsak a későbbi matematikai teljesítménynek, hanem a későbbi olvasási teljesítménynek is (pl. Clements & Sarama, 2011). Az öt számlálási elv helyes alkalmazása, a kis mennyiségek felismerése számkép alapján (szubitizáció), halmaz elemei számosságának megadása számolással 20-as számkörben mind olyan készségek, melyekkel a gyerekek rendelkeznie kell az óvodáskor végére (pl. Passolunghi & Lanfranchi, 2012). Hiányosságok esetén e készségek további fejlesztésének elmaradása az iskoláskor kezdő szakaszában végleges leszakadást jelent. Az elemi számolási készség a százas számkörbeli számlálást, a húszas számkörbeli manipulatív, tárgyakkal végzett számolást, a tízes számkörbeli számképfelismerést és a százas számkörbeli számolvasást foglalja magában. Azok a gyerekek, akiknek ez a készség nem éri el a megfelelő fejlettségi szintet 8-9 éves koráig, behozhatatlan hátrányba kerülnek az iskolai matematikatanulmányaik során (Józsa, 2003; Nagy, 2007).

A Fábián és munkatársai (2008) által létrehozott szakmai koncepció modelljében iskolafokok szerint (1-4., 5-8. és 9-12. évfolyam) határozták meg a matematikai kompetencián belül fejlesztendő készségek és képességek rendszerét. A fejlesztési periódusokat három képességcsoportra (gyorsan, átlagosan és lassan haladók) lebontva adják meg. A lassan haladók számára az egyes iskolafokokon több kompetencia-komponens tekintetében is az átlagosan és a gyorsan haladóktól eltérő fejlesztési fókusz fogalmaztak meg (1. táblázat).

A fejlesztésre javasolt kompetenciák alapján az alulteljesítésre vonatkozóan több megállapítás is adódik. Az alulteljesítőknél az óvodáztatás szakaszában elsajátítandó számlálás területén olyan feltételezett hiányosságai vannak, amelyek fejlesztését esetükben az általános iskola első éveiben is folytatni szükséges. Szintén ez az a képességcsoport, ahol a számlálás kivételével – melynek nem megfelelő fejlettségi szintje már jóval korábban további beavakozást tesz szükségessé – egyes kompetencia-komponenseket folyamatosan, a 12. évfolyamig fejleszteni szükséges, míg mások fejlődésének ütemét is figyelemmel kell kísérni, és szükség esetén szintén a 12. évfolyam befejezéséig fejleszteni. Amennyiben ezek, az az 1. táblázatban is javasolt fejlesztések felsőbb évfolyamokon elmaradnak, a lemaradás behozhatatlan marad a lassan haladók számára.

1. táblázat. A matematikai kompetencia fejlesztésre javasolt komponensei az egyes iskolafokokon, képességcsoport szerinti bontásban

Kompetencia-komponens	1-4. évfolyam	5-8. évfolyam	9-12. évfolyam
Számlálás	(Á), L	(L)	-
Számolás	G, Á, L	(Á), L	(L)
Mennyiségi következtetés	G, Á	G, Á, L	(Á), L
Valószínűségi következtetés	G, Á	G, Á, L	G, Á, L
Becslés, mérés	G, Á, L	(Á), L	(L)
Mértékegység-váltás	G, Á, L	(G), Á, L	(Á), L
Szövegesfeladat-megoldás	G, Á, L	G, Á, L	(Á),
Problémamegoldás	G	G, Á	G, Á, L
Rendszerezés	G, Á, L	(Á), L	(L)
Kombinativitás	G, Á, L	(Á), L	(L)
Deduktív következtetés	G, Á, L	(G), Á, L	(Á), L
Induktív következtetés	G, Á, L	(G), Á, L	(Á), L

G = gyorsan haladók, Á = átlagosan haladók, L = lassan haladók

(Saját szerkesztés Fábián et al. (2008) alapján)

1.4 Az alulteljesítés affektív okai

A matematikai alulteljesítés affektív okai befolyásolhatják a tanulók tantárgyhoz való viszonyát, így a teljesítményüket is. Ezek tárgyalása során különös figyelmet fordítunk a matematikai szorongásra, mivel azt kiválthatja az alulteljesítés is, a matematikai tanulási nehézséggel küzdők veszélyeztetettebbek a kialakulása szempontjából, továbbá alsó tagozaton okozhatja a tanítók többségét jellemző matematikai szorongás, azaz ez a jelenség a kutatásunk célcsoportját kiemelten érintheti.

Az alulteljesítés affektív okai között elsősorban az egymással is kapcsolatban álló motivációt, érdeklődést, énhatékonyságot és matematikai szorongást kell megemlítenünk. Az énhatékonyság a matematika vonatkozásában – Bandura (1997) énhatékonyság definíciójából kiindulva – befolyásolja, hogy az egyén milyen mértékben, milyen kitartással és mekkora erőfeszítéssel vesz részt matematikai tartalmú tevékenységben. Ezeket a tényezőket az addigi sikerek, az érdeklődés és a motiváció befolyásolja. Minél magasabb az érdeklődés vagy a motiváció, és ezáltal az énhatékonyság szintje, az annál pozitívabban hat a matematikai teljesítményre, és annál kevésbé érinti az adott személyt a matematikai szorongás. Ellenben azok, akik kevésbé érdeklődnek a matematika iránt, jellemzően külső motiváció hatására foglalkoznak vele, kisebb énhatékonysággal jellemezhetők, kevésbé kitartóak a matematika tanulása során jelentkező

kihívásokkal kapcsolatban, ami az affektív tényezők további romlásához, továbbá romló matematikai teljesítményhez vezethet (Ashcraft & Rudig, 2012; Lee, 2009; Moore et al., 2015).

A sztereotípiák negatívan befolyásolják a matematikai teljesítményt olyan problémamegoldási helyzetekben, ahol a matematikai műveletvégzésbe a munkamemória is bekapcsolódik. A sztereotípiát Aronson (2008, p. 299.) megfogalmazásában „ellenséges, vagy negatív attitűd valamilyen csoporttal szemben – olyan attitűd, amely téves, vagy nem teljes információkból származó általánosításokra alapul”. A matematikatanulásban legismertebb sztereotípiája szerint a lányok rosszabbul teljesítenek matematikából, mint a fiúk (pl. Ben-Zeev et al., 2005). A sztereotípiák viszont a teljesítményhez köthető helyzetekben a munkamemória, és ezáltal a teljesítmény romlásához vezetnek.

1.4.1 A matematikai szorongás

A matematikai szorongás általánosságban úgy írható le, mint a matematikával összefüggő tartalmak és tevékenységek által kiváltott kellemetlen, diszkomfort érzések együttese, olyan negatív érzelmi reakció, amit a matematika vált ki (Ma & Xu, 2004; Carey et al., 2016). A szorongás tünetei nemcsak az iskolai órán, hanem egyéb, matematikával összefüggésbe hozható helyzetben is megjelenhetnek. Tünetei között érzelmi, fizikai és viselkedésbeli jellemzők is szerepelnek. Az egyén érezhet például frusztrációt, félelmet, nyomást, undort, felgyorsulhat a szívverése, izzadhat, a magatartásában pedig olyan negatív változások állhatnak be, mint például a rossz magaviselet, a házi feladat megírásának hátráltatása vagy megelégedés a minimum követelmények teljesítésével. Habár a matematikai szorongás és a matematikai teljesítmény között kimutatható az összefüggés, nincs egyetértés abban, hogy a szorongás hat negatívan a teljesítményre, a nem kielégítő teljesítmény idézi elő a szorongást, vagy két irányú folyamat zajlik (Carey et al., 2016). Egy 1700 brit iskolás körében végzett felmérésből az derül ki, hogy a gyerekek a matematikát nehezebbnek érzik, mint más tantárgyakat, szorongásuk okaként pedig a rossz osztályzatokat, és a csoporttársakhoz viszonyított gyengébb teljesítményüket jelölték meg (Carey et al., 2019).

A matematikai szorongás megfigyelhető a matematikai tanulási nehézséggel küzdő gyerekek, pl. fejlődési diszkalkuliások körében is (Rubinsten, 2010). Ám Ashcraft és Kirk (2001) a fejlődési diszkalkuliának nem az eredményeként, hanem egyik lehetséges okaként nevezik meg a matematikai szorongást, amely nemcsak a tanórán, hanem bármely matematikával kapcsolatba hozható alkalommal megjelenik. Carey és munkatársai (2019) megállapítják, hogy amíg a matematikai szorongás tüneteit produkáló gyerekek között kevesebben vannak, akiknek egyúttal matematikai tanulási nehézsége is van, ezek a gyerekek veszélyeztetettek abból a szempontból, hogy kialakulhat náluk a matematikai szorongás. Haase és munkatársai (2019) számolnak be arról, hogy a matematikai szorongás sikeres terápiája teljesítménynövekedéssel jár még a fejlődési diszkalkuliás diákoknál is. Ugyanakkor kutatásukban arra is rámutatnak, hogy az iskola kezdeti szakaszában

oktató tanítónők többsége maga is szorong a matematikától, és ezt a szorongást önkéntelenül is továbbadják a diákoknak. A tanítók szorongásának jelenségét és a diákokra gyakorolt negatív hatását írja le Beilock és Willingham (2014), és Yulibeth (2011) is, továbbá a magyar tanító- és óvodapedagógusjelölteket a képzésbe lépésükkor többségében jellemző matematikai szorongás jelenségét magunk is kutattuk (Ökördi et al., 2023). Yulibeth a latin-amerikai tanítók szorongását kutatva azt is megállapítja, hogy e szorongás okán a matematika a tanítók mindössze számokkal végzett műveletek sora, és éppen azt nem sajátították el, és így nem is tudják közvetíteni, hogy az iskolai matematika arra kínálhat lehetőséget, hogy szisztematikus módon fejlessze az érvelést, és ezáltal a gondolkodási képességeket. Azok az alsó tagozatos diákok, akiknek tanítója maga küzd matematikai szorongással kevesebbet tanulnak egy tanév alatt matematikából, mint azok a társaik, akiknek tanítója nem küzd matematikai szorongással. Ennek következtében ezek a diákok már matematikatanulmányaik elején lemaradhatnak, és ez a lemaradás negatív irányban befolyásolhatja későbbi matematikatanulmányaikat (Schaeffer et al., 2021). Végezetül, a szülők matematikával kapcsolatos attitűdje, a matematikával szembeni fenntartásai, a saját matematikai szorongásuk, rossz emlékeik is befolyásoló tényezők a gyermek matematikai szorongásának kialakulásában (Beilock & Willingham, 2014; Carey et al., 2019).

A matematikai szorongás nemcsak a gyengén teljesítőket érinti (Ashcraft, 2019). Példaként hozhatjuk a szorongás és a munkamemória kapcsolatát. A szorongás gátolja a munkamemória működését, amely szükséges a matematikai műveletvégzéshez, így az eredetileg nem alulteljesítő, ám szorongó diák teljesítménye is romolhat. Mivel a jó tanulók szorongása sok esetben rejtve marad, így arra sem derül fény, hogy éppen ez a szorongás az oka annak, ha elkerülik azokat a hivatásokat, amelyek matematikai kompetenciákat is megkívánnak, holott képességeik alapján ezekben sikeresek lehetnének (Ashcraft, 2019; Ma-Xu, 2004).

A matematikai szorongást el kell különíteni a kontextus – számonkérés, vagy téthelyzet – nyomása miatt fellépő teljesítményromlástól, habár a romlás biológiai és pszichológiai okaiban és tüneteiben mutatkoznak hasonlóságok (Beilock & Carr, 2001). A téthelyzetben szorongó személyek negatív reakciói nem a matematikataralomhoz, hanem a helyzethez kötődnek. A szorongás pedig, függetlenül annak forrásától, rontja a munkamemória teljesítményét. Kutatások rámutatnak, hogy az alacsony munkamemória kapacitással rendelkező egyének helyett inkább a jobb munkamemória kapacitással rendelkezőket gátolja egy téthelyzetben való teljesítési szituáció, és mivel ennek hatására a matematikai teljesítmény csökken, náluk nagyobb arányú teljesítménycsökkenésről számoltak be, mint kisebb munkamemóriával rendelkező társaiknál (Beilock & Carr, 2001; Caviola et al., 2021).

1.5 A COVID-járvány okozta iskolabezárások következményei

A COVID-járvány világszerte felkészületlenül érte az oktatási intézményeket, amelyek működésében drámai változásokat idézett elő. Mivel kutatásunk elsődleges célja a járvány miatt történt iskolabezárások során elszenvedett tanulási veszteség csökkentése volt, jelen fejezetet a járvány előidézte oktatási helyzet bemutatásának szenteljük. Először a nemzetközi kontextust tárgyaljuk, és ebben helyezzük el a magyarországi iskolabezárásokat jellemző tendenciákat és jellemzőket, ezt követően pedig a magyarországi helyzetet elemezzük részletesen, külön alfejezetekben kitérve a digitális kompetenciák meglétére, illetve hiányára, és a távolléti oktatás különböző résztvevőinek csoportjaira, a szülőkre, a pedagógusokra, a diákok közül a kutatásunk szempontjából releváns életkori csoportra, az alsó tagozatos diákokra, végezetül pedig az ezen belül is kiemelt célcsoportunkra, a hátrányos helyzetű tanulókra.

1.5.1 Nemzetközi kontextus

A 2019/2020-as és az azt követő tanév során a világ minden táján az iskolás korú gyermekek 91%-át érintette hosszú távú, rövid távú vagy akár ismétlődő átállás a digitális oktatásra (UNESCO, 2020). Nincsen egységesen mérhető, vagy megbecsülhető mértéke annak a tanulási veszteségnek, amit a diákok az első bezárás következtében, illetve hosszabb távon, az első és az azt követő több hosszabb-rövidebb bezárásnak következményeként elszenvedtek (Molnár & Hermann, 2023). Az általánosan megfogalmazható tanulási veszteség mértékének megállapítása függ az egyes kutatások módszertanától csakúgy, mint az egyes oktatási rendszerek sajátosságaitól, a diákok lezárás előtti online oktatással kapcsolatos tapasztalataitól, a lezárások alatti tanítási-tanulási gyakorlattól és a lezárások hosszúságától is. Az iskolabezárások negatív hatásai erősebben érvényesültek az első járványhullám idején, mint a későbbi bezárások során. Ennek oka lehet a bezárások eltérő hosszúsága, az érintettek nagyobb felkészültsége a rendkívüli oktatási helyzetre az első bezárás tapasztalatainak felhasználásával. A korai kutatások nagyobb arányban tanulási veszteségről számolnak be (pl. Donnelly & Patrinos, 2022; Engzell et al., 2021 – Hollandia; Maldonado & De Witte, 2022 – Belgium; Schult et al., 2022 – Németország), és csak elenyésző mértékben stagnálásról, vagy magasabb teljesítményekről (pl. Clark et al., 2021 – Kína; Spitzer & Musslick, 2021 – Németország). Az eredmények sokszínűségét jelzi, hogy a Covid járvánnyal összefüggő iskolabezárások hatása a diákok teljesítményére $-0,37$ és $+0,25$ SD között található Hammerstein és munkatársai szintézisében (2021). Molnár és Hermann (2023) több tanulmányra hivatkozva matematikából átlagosan $-0,1$ SD, szövegértésből $-0,09$ SD veszteséggel számol; König és Frey (2022), illetve Patrinos (2023) heti tanulási veszteséggel számol, melynek mértékét előbbiek $-0,022$ szórásegységben, utóbbi $-0,01$ szórásegységben állapítják meg.

Minél hosszabb ideig tartottak zárva az iskolák, annál nagyobb volt a diákok teljesítményének csökkenése. Európában azokban az országokban, ahol jelentős az oktatáshoz való hozzáférési egyenlőtlenség, hosszabb ideig tartottak zárva az iskolák (Blaskó et al., 2021). Ezek közé az országok közé tartozik Magyarország is, ahol a 2-8. osztályos diákok átlagos tudásszintje és teljesítménye is alacsonyabbnak bizonyult a 2020/21-es tanév kezdetén, mint az előző két tanév ugyanezen időszakában (Molnár et al., 2021). Hasonló tendenciákat publikáltak a flamand általános iskolások teljesítményére (Maldonado & De Witte, 2020), a holland diákokra (Engzell et al., 2021), valamint az amerikai diákokra vonatkozóan is a matematikában (Kuhfeld et al., 2020).

Azok a tanulási veszteségről szóló kutatások, amelyek több iskolafokot is vizsgálnak, szinte egybehangzóan azt állapítják meg, hogy az alsó tagozatos gyerekek körében nagyobb volt a tanulási veszteség, mint az ezt követő iskolafokokon (pl. Molnár & Hermann, 2023 – Magyarország; Tomasik et al., 2021 – Svájc). Kevés azon tanulmányok száma, amelyek nem találnak különbséget az alsóbb és magasabb iskolafokokon a tanulók tanulási veszteségének mértéke között (pl. Weidmann et al., 2022 – matematika). Az alsó tagozatos gyerekek nagyobb mértékű lemaradásának összetett okai vannak. Ez a korosztály még nem rendelkezik az önszabályozó tanulás képességével, tanulmányi fejlődése jelentős mértékben függ a tanítói segítségtől. A szocio-emocionális és motivációs okok között szerepel, hogy a tanulás elsődleges terepe számukra a társas helyzet, és teljesítményükkel kapcsolatban még igénylik a folyamatos külső megerősítést is. Az alsó tagozatos tanulók lassabban – Tomasik és munkatársai (2020) szerint kétszer olyan lassan – haladtak a tanulmányaikban, mint az idősebb diákok. Felvetődik az is, hogy ez a korosztály még nehezebben birkózott meg a járványhelyzet miatt kialakult, számukra kognitívan még fel nem dolgozható helyzettel, mint idősebb társaik.

Habár az iskolai tanulás alkalmas a társadalmi-gazdasági hátrányok csökkentésére (Blaskó et al., 2021), az első lezárások idején csökkent azon általános iskolások matematikai teljesítménye, akiknek társadalmi-gazdasági hátrányai, mentális vagy tanulási nehézségei vannak (pl. Engzell et al., 2021; Gore et al., 2021). Ezek a gyermekek már a járvány kitörése előtt is jóval lemaradtak kortársaiktól, ám ez a hátrány tovább súlyosbodott az iskolabezárások miatt (Blaskó et al., 2021). Céltudatos segítség és korrekciós órák nélkül a 2020/21-es tanév kezdetét követően sem csökkent a diákok lemaradásának mértéke még decemberre sem (Weidmann et al., 2021). Elmondható, hogy az iskolabezárások miatt bekövetkezett tanulási veszteség súlyosbította az oktatási egyenlőtlenségeket (Weidmann et al., 2021; Blaskó et al., 2021; Engzell et al., 2021; Gore et al., 2021; Tomasik et al., 2020). Az alacsony társadalmi-gazdasági státuszú gyermekek az addig tapasztaltaknál is nagyobb mértékű leszakadásának számos oka volt. Ezek a gyerekek nem feltétlenül rendelkeztek internet kapcsolattal, nehezebben jutottak hozzá a szükséges informatikai eszközökhöz, következképpen a tananyagokhoz és az online órákon való részvételhez. Ezáltal

kevesebbet, vagy egyáltalán nem tanultak. Többnyire alacsonyan iskolázott szüleik nem tudtak számukra megfelelő, vagy elegendő támogatást nyújtani a tanuláshoz (Spitzer & Musslick, 2021).

A tanulással töltött kevesebb idő nemcsak ezeket a gyerekeket érintette, hanem a szocioökonómiai háttértől függetlenül azokat is, akik már a lezárások előtt is gyenge tanulmányi eredményt értek el. Felmérések szerint ezek a gyerekek nemcsak a tanulással, hanem a hasznosnak ítélt tevékenységekkel (pl. olvasás, sport) is kevesebb időt töltöttek, mint a társaik. Megnőtt viszont az az időmennyiség, amit kevésbé kifizetődőként írhatunk le (pl. aktív jelenlét a közösségi médiában, számítógépes játékok, tévézés). Továbbá ezeknek a gyerekeknek már a lezárások előtt is rövidebb időtartamban nyújtottak segítséget a szülők a tanuláshoz, amin az iskolabezárások sem változtattak (Grewenig et al., 2021).

Az iskolabezárások következményeként egyes tanulmányok tanulási nyereségről számolnak be (pl. Spitzer & Musslick, 2021; Clark et al., 2021). Ennek okairól a tanulási veszteségek okainál jóval heterogénebb képet kapunk, és ezek az okok egyes esetekben nem általánosíthatók, hanem az adott tanulási környezethez, az adott helyzethez voltak köthetők. Általánosítható ok lehet az a felvetés, hogy az otthoni tanulási helyzetben csökken a matematikai szorongás szintje, és ez teljesítményjavuláshoz vezethet (Spitzer & Musslick, 2021). Jobban teljesítettek azok a kínai diákok is, akik válogatott, jól képzett tanárok által gondosan megtervezett és előre rögzített videókból tanultak, szemben azokkal, akik ugyanazon a platformon, de a saját tanáraik aktuális napi óráin vettek részt (Clark et al., 2021). Szintén kedvező tendenciát lehetett megfigyelni azon diákok körében, akik már a járványhelyzet előtt is rendszeresen használtak bizonyos online platformokat az iskolai tanulás során, és így számukra sem a felületek kezelése, sem a digitális térben való tanulás nem okozott sem újdonságot, sem nehézséget.

1.5.2 A magyarországi helyzet

Magyarországon 2020. március 16-án távolléti oktatásra állt át minden oktatási intézmény, az oktatási rendszer minden szintjén (1102/2020. (III.14.) Kormányhatározat). Az átállásra nem volt felkészülési idő, a kötelező iskolabezárás pénteki bejelentését követően az iskoláknak távolléti formában kellett folytatniuk az oktatást a következő hét hétfőjétől. Az iskolák ezt követően már a tanév végéig zárva maradtak, így a 2019/2020-as tanév utolsó három hónapjának oktatása ebben a formában zajlott. A 2020/2021-es tanévben az oktatás jelenléti formában kezdődött, ugyanakkor a középiskolák 9-12. évfolyamai novemberben ismételten távolléti oktatásra álltak át, és a diákok csak május 10-én térhettek vissza az iskolákba. Eleinte az óvodákban és a közoktatás 8. évfolyamáig a COVID járvány terjedésének függvényében egy-egy osztály vagy csoport időszakosan – akár több alkalommal is – távolléti oktatásra állt át számos intézményben. Ugyanebben a tanévben tavasszal ismételten kötelező iskolabezárásra került sor a közoktatás többi szintjén is. A kötelező bezárás ebben az időszakban iskolafokonként különbözött. Az óvodában és az alsó tagozaton hat hétig, míg

a felső tagozaton 9 hétig tartott. Mindezek következményeként a gyerekek e két tanév során több hónapnyi iskoláztatási időt otthon, eltérő formában és hatékonysággal megvalósult távoktatásban töltöttek. A távolléti oktatásban töltött időtartam az óvodások körében minimum 16 hetet, az alsó tagozatos diákok esetében legalább 19 hetet, a felső tagozatos diákok körében legalább 22 hetet ölelt fel, melyhez sok osztályban hozzáadódtak az eseti távoktatásra való átállás időszakai (Molnár & Hermann, 2023). A középiskolai osztályok majdnem egy teljes tanévnyi időtartamot töltöttek távoktatásban.

Habár a 1102/2020. (III.14.) kormányhatározat digitálisnak nevezte az új munkarendet, mégis úgy fogalmaz, hogy a “a tananyag kijelölése, a tanulási folyamat ellenőrzése és támogatása (...) a pedagógusok és a tanulók online vagy más, személyes találkozást nem igénylő kapcsolatában történik.” (1102/2020. (III.14.) Kormányhatározat). Valóban, az új munkarend egyrészt sok esetben nem digitális formában, hanem postai levelezés, vagy személyes feladatkiszállítás és feladatbeadás útján valósult meg, másrészt a digitális platformokon megvalósult oktatás sem minden esetben elégítette ki a digitális oktatás követelményeit. Az átállás idején jellemző útkeresés, a megvalósult, és sokszor folyamatosan változó, eklektikus gyakorlatok nem illeszkedtek egy egységes digitális keretrendszerbe. Ezek az útkeresések nem tartalmaztak a digitális pedagógiához szükséges újfajta szemléletmódot, így minőségi változás nem történt a pedagógiai gyakorlatban (Szűts, 2020). A távolléti oktatásra és az otthoni önálló tanulásra való felkészületlenségnek nemcsak a rövid – egy hétvégenyi – átállási idő volt az oka, az oktatási rendszer alapvetően nem volt felkészülve a digitális oktatásra (Fekete & Porkoláb, 2020; Kukucska, 2022; Németh et al., 2021). Habár a 2016-ban napvilágot látott Digitális Oktatási Stratégiában (2016) már fellelhető a digitális pedagógia szemléletmódja, az iskolai gyakorlatban ez még nem jelentett változást. Az Európai Bizottság 2016-os felmérése szerint Magyarország több területen is elmaradást mutatott a digitális oktatáshoz kapcsolódó kérdésekben (Deloitte et al., 2016). Az alsó tagozaton 55%, a felső tagozaton 52% volt azon iskolák aránya, amelyekben nem létezett iskolai stratégia a digitális eszközök alkalmazására az oktatásban, és a tanárok ezirányú fejlődését sem támogatták. Ugyanakkor mindössze 7, illetve 8% volt azon iskolák aránya, ahol mind a stratégia létezett, mind a tanárok fejlődését is támogatták. Az IKT eszközökhöz kapcsolódó továbbképzések közül az IKT eszközök oktatási célú felhasználásával kapcsolatos képzésen az alsó tagozatos tanítók 40%-a vett részt. Ám mind ezen a területen, mind tantárgyspecifikus, illetve eszközspecifikus képzéseken az összes iskolafokon a tanárok mindössze 23-33%-a vett részt. Ez alacsonyabb az uniós 43-50%-os átlagoknál.

1.5.2.1 A digitális kompetenciák hiánya a távolléti oktatásban

A digitális oktatásra való felkészületlenségben az internetelérés – a hátrányos helyzetű családok kivételével – nem játszott jelentős szerepet. A széles-sávú internet-hozzáférés és a kapcsolat sebessége terén is hazánk az uniós átlagot meghaladóan jól teljesített (Eurostat, 2020). Egy

reprezentatív kutatás kereteiben végzett felmérés (Hermann et al., 2020) alapján az iskoláskorú gyermekkel rendelkező háztartások 84%-a rendelkezett korlátlan internet-hozzáféréssel.

Ugyanakkor a digitális készségek tekintetében Magyarország az uniós átlag alatt teljesített. Legalább alapvető digitális készségekkel az egyének 49%-a, alapvetőnél magasabb szintű digitális készségekkel a 25%-a rendelkezett 2020-ban, szemben az uniós 58, illetve 33%-kal (Eurostat, 2020). Az Eurostat közlése alapján az alapszintű szoftver készségek is gyengének bizonyultak.

A pedagógusok digitális kompetenciája már a távolléti oktatásra való áttérés előtt is több aspektusból fejlesztendőnek bizonyult. Egy, az iskolabezárások előtt a NAT műveltségterületei szerint reprezentatív mintán végzett kutatás (Eszenyiné Borbély, 2013) arra a megállapításra jutott, hogy a DigComp (Ferrari, 2013) keretrendszerének összes kompetenciaterületén – információ, kommunikáció, tartalomelőállítás, biztonság és problémamegoldás – megfigyelhető, hogy a középiskolai tanárok jobb készségekkel rendelkeznek, mint az általános iskolai tanárok, vagy az óvodapedagógusok. Közel minden negyedik pedagógus a tartalommegosztás legalapvetőbb formáit, például emailhez csatolt fájlt voltak képesek kezelni, és a tartalomelőállítás kompetenciaterületen sem voltak képesek önállóan, szoftver segítségével, érdekes, izgalmas elemeket is integráló tanórai prezentációt készíteni. A fiatalabb korosztályok jobban teljesítettek az egyes digitális kompetenciaterületeken, ám a pedagógus társadalom előregedő korfáját tekintve a fiatalok jobb készségei nem tudtak jelentős mértékben hozzájárulni egy, a távolléti oktatás szempontjából is kedvező helyzet kialakításához. Annak ellenére, hogy a digitális kompetenciák területén a fiatalok teljesítettek legjobban, az általános iskolákban tanítók közül minél fiatalabb egy pedagógus, annál kevésbé felkészült módszertanilag (Lannert & Hartai, 2021).]

Ezek az eredmények összhangban vannak azokkal a kutatási adatokkal, amelyek szerint a pedagógusok a távolléti oktatási helyzetbe úgy kerültek bele, hogy többségük a digitális eszközöket leginkább adminisztrációra, a tanórán pedig szemléltetésre használták (Czirfusz et al., 2020; Lannert et al., 2022). Módszertani tudatosság, a tanulói tevékenységek és a tanulási célok felőli megközelítés többségében nem volt jelen a gyakorlatukban. A digitális táblára tananyagot a pedagógusok 18%-a készített, és mindössze 17% azon pedagógusok aránya is, aki már kész digitális keretrendszert, vagy szoftvert (pl. GeoGebra) használt a tanórán (Lannert & Hartai, 2021). Ezek az eredmények felvetik azokat a kérdéseket, hogy a digitális munkarend idején mennyire tudták a magyar közoktatásban oktatók a diákok számára élvezhetően, az igényeikhez igazítva tartani az órákat, és például kiaknázni a számos rendelkezésre álló oktatási szoftver nyújtotta lehetőségeket. Ezzel együtt Polónyi (2021) felveti, hogy a nehézségek okai nem feltétlenül a pedagógusok digitális kompetenciáiban keresendők. Érvelése szerint a piaci alapú távoktatási képzésekben a pedagógus a didaktikailag megfelelő, színvonalas tartalmat állítja elő, ám az ezt feldolgozó vonzó távoktatási anyagok elkészítését IKT-szakemberek végzik, a pedagógus mindössze az ő munkájuk instruálásáért felelős. Ilyen szakemberek pedig nem álltak a pedagógusok rendelkezésére.

1.5.2.2 Szülők a távolléti oktatásban

Háztartási rendezettség a fizikai környezet mellett a családi rutinokat és rítusokat is értjük (Szilveszter et al., 2021). A fizikai környezetet illetően Boza és Hermann (2023) arra a következtetésre jut, hogy a zsúfolt lakótér, a nem megfelelő saját tanulótér, a távolléti oktatáshoz szükséges eszközök hiánya 5-10 pontos teljesítménycsökkenést hozott a 2021-es kompetenciamérés eredményeiben a megelőző évek eredményeivel összevetve. A korai végrehajtó funkciók (pl. munkamemória, figyelmi funkciók), amelyek szerepet játszanak a gyermek iskolai beválása során, a kognitív fejlődés és a környezeti hatások kölcsönhatása által befolyásoltan fejlődnek (Vernon-Feagans et al., 2016). A távolléti oktatás bevezetése az addigi háztartási rendezettséget vagy rendezetlenséget nemcsak a fizikai környezet, hanem a napi rutinok területén is érintette. A tartósan fennálló háztartási rendezetlenség már önmagában negatív hatással volt a gyermekek iskolai teljesítményére. A távolléti oktatás, amelynek következtében a családtagok jelentős része tartós otthonlétre kellett berendezkedjen, továbbra is fenntartotta, vagy éppen rontotta ezt a rendezetlen állapotot. Az addig rendezett rutinok mentén élő családok esetében a kihívást az jelentette, hogy a felborult napi rutinokat és szokásrendet, szabályokat újra kellett alkotni, és ezáltal elkerülni a rendezetlenséget, ami negatív hatással bír a tanulmányi teljesítményre (Szilveszter et al., 2021).

A szülőknek arra is választ kellett találniuk, hogy szükséges-e bevonódniuk, és ha igen, milyen mértékig, a gyermek tanulásába. A döntést befolyásolta, hogy miként látják a saját szerepüket és felelősségüket a gyermekük tanulmányait illetően. Ugyanakkor a saját szerepükről alkotott képre hatással volt, hogy mennyire érzik magukat kompetensnek, felkészültnek, hogy az aktuális tananyaggal a gyermekkel együtt birkózzanak meg. Ezzel kapcsolatos érzéseiket befolyásolhatta többek között az önbizalmuk, nyelvi készségeik, saját iskolai tapasztalataik is (Koltói et al., 2019; Kukucska, 2022). Döntésükben emellett az is szerepet játszott, hogy a saját életüket, munkájukat hogyan alakították át a vírushelyzettel összefüggő rendelkezések. Továbbra is a munkahelyükre kellett bejárni, otthoni munkavégzésre álltak át, esetleg elvesztették a munkahelyüket. Mindezek az eszközök elérhetőségét, és a szülők mentális és pszichés állapotát is befolyásolhatták, amelyek szintén hatással voltak arra, hogy a szülők miként vonódtak be a gyermek iskolai kötelezettségeibe. Nem utolsó sorban a szülők digitális kompetenciái is meghatározó szerepet kaptak ebben a kérdésben. Minél gyengébbek a szülő kompetenciái, annál nehezebben tudott az alsóbb évfolyamokra járó gyermeknek segíteni a digitális platformokon megvalósuló tanulásban (Proháczik, 2020).

1.5.2.3 Pedagógusok a távolléti oktatásban

Horváth (2022) kutatásában 343 intézmény 4028 pedagógusának a digitális munkarenddel kapcsolatos tanári tapasztalatokra vonatkozó kérdőívre adott válaszait elemezte. A pedagógiai gyakorlatban bekövetkezett változások során arra az eredményre jutott, hogy a pedagógusok többsége a digitális munkarendben sem változtatott korábbi pedagógiai gyakorlatán. Azok között a pedagógusok között, akiknél elmozdulás volt megfigyelhető a korábbi gyakorlatához képest, a legnagyobb csoportot azok a pedagógusok alkották, akiknek a vizsgált mintában a legalacsonyabbak a digitális kompetenciái. Megítélésük szerint a digitális tanrendhez sem az iskolában, sem a diákok otthoni környezetében kevéssé voltak biztosítottak a megfelelő feltételek. Tanítási stratégiájukat a kompetenciákra és meglátásaikra alapozták, melynek részeként növelték az elsősorban formatív értékelések mennyiségét. Megítélésük szerint a diákokat a digitális munkarendben felszínesebb tanulás jellemezte.

Ezek az eredmények összhangban vannak Lannert és Hartai (2021) nagymintás, reprezentatív kutatásának eredményeivel. Ennek keretében pedagógusokat kértek arra, hogy tíz, fele arányban hagyományos, fele arányban digitális osztálytermi környezetet ábrázoló fotó közül válasszák ki, melyek a legkorszerűbbek, illetve melyek jellemzik leginkább az ő pedagógusi tevékenységüket. Mindkét kategóriában legtöbbször frontális osztálytermi fotót jelöltek meg, amelyet a legkorszerűbbnek ítélt fotón mindössze a digitális tábla használata különböztetett meg a hagyományos osztálytermi környezettől.

1.5.2.4 Alsó tagozatos diákok a távolléti oktatásban

Egyes kutatások (pl. Czirfusz et al., 2020) alapján a távolléti oktatásban legnagyobb arányban az alsó tagozatos diákokat sikerült elérni, hiszen az ő esetükben a kapcsolattartás a szülők segítségével valósulhatott meg. Továbbá egy nem reprezentatív, 1071 pedagógus bevonásával készült felmérés (Czirfusz et al., 2020) adatai szerint a legnagyobb arányban az alsó tagozatos és gimnáziumi tanulókat sikerült bevonni az online tanórákon való részvételbe (84, illetve 83%). Az alsó tagozatosok nagy arányát a szerzők azzal magyarázzák, hogy esetükben erős szülői bevonódásra volt szükség a kapcsolódáshoz. Horváth (2022) kutatásában rámutat, hogy az alsó tagozatos diákokat legnagyobb mértékben azok a pedagógusok tudták bevonni a távolléti oktatásba, akiknek a legerősebbek a digitális kompetenciái, és akik jelentősen megnövelték a szummatív értékelés mennyiségét. E tanárok arról számoltak be, hogy feltételként az átlagosnál jobb infrastruktúra állt rendelkezésükre mind az iskolában, mind a gyermekek családjában. Tapasztalataik alapján diákjaik tanulása mélyebb volt, mint osztálytermi környezetben. Horváth kutatása részben fejlesztőprogramban részt vevő iskolákban zajlott. Habár arról nincsen adat, hogy az alsó tagozatos pedagógusok ilyen, vagy fejlesztésben nem részesült iskolákban tanítottak-e, de a diákok mélyebb tanulására vonatkozó pedagógusi percepció ellentmondani látszik további kutatási eredményeknek,

amelyek a diákok távolléti oktatásban elszenvedett tanulási veszteségére mutatnak rá (pl. Molnár & Hermann, 2023; Molnár et al., 2021).

Molnár és Hermann (2023) 43613 alsó tagozatos diák online teszteredményeit elemezve megállapítja, hogy az oktatásban való személyes jelenlét hiánya éppen az alsó tagozatos diákokat érintette a leghátrányosabban. Ennek a diákokban rejlő lehetséges okaiként a korosztálynak a digitális oktatáshoz nem elegendő IKT készségeit, és az önszabályozó tanulási képesség hiányát jelölik meg. Az alsó tagozatos diákok önálló boldogulása az online térben még nem elvárható, így azok a gyermekek, akiknél a szülő digitális kompetenciái alacsonyak, éppen a szülők hiányosságai miatt nem, vagy csak nagyon nehezen tudtak részt venni a távolléti oktatásban (Proháczik, 2020). Ehhez hozzáadódik, hogy a hátrányos helyzetű tanulók körében a szülői bevonódás sokszor nehezebben valósul meg. Ennek okai között szerepelhet az is, hogy a szülő számára az írásbeli kommunikáció sokszor idegen, és így a kapcsolatfelvétel kevésbé hatékony. De az alacsonyabb iskolázottságú szülőket sok esetben a számukra szokatlan, vagy nehezebben értelmezhető iskolai nyelvhasználat is eltántoríthatja a kapcsolattartástól (Koltói et al., 2019).

Nemcsak a szemléltetésben és tevékenykedtetésben jelentkező nehézségek, hanem a korosztályi sajátosságokból adódó kiemelt, és a virtuális térben nem megvalósítható és így a társas együttlétben megvalósuló tanulásra, és a pedagógus személyes jelenlétére fennálló, ám nem kielégített igény (Farkas et al., 2021) is hozzájárult az elszenvedett tanulási veszteségekhez.

Mérhető tanulási veszteségeket lehet kimutatni az SZTE Oktatáselméleti Kutatócsoport eDia diagnosztikus rendszerébe 1-8. évfolyamos diákoktól érkezett válaszok alapján (Molnár & Hermann, 2023). A tavaszi óvodabezárásokat követően iskolát kezdő gyerekeknél és az alsó tagozatos diákok körében is jelentős elmaradás mutatkozik az iskolakészültségi szintben, illetve az osztályfoknak megfelelő fejlettségben, különös tekintettel a számolási előkészítésekre az óvodások esetében, illetve mind matematika, mind olvasás-szövegértés területén az alsó tagozatos gyerekeknél. Az óvodásoknál ez körülbelül a tavaszi bezárások alatt meg nem valósuló fejlesztések időtartamával megegyező veszteséget, az alsósoknál pedig a kumulatív hosszú távú hatást tekintve körülbelül 9 hétnyi elmaradást jelent matematikából, és 15-16 hétnyi veszteséget olvasás-szövegértésből. Kaffenberger (2021) egy általa felállított pedagógiai termelési függvény modelljét alkalmazva arra a következtetésre jut, hogy a tanulási veszteségek olyan nagyok, hogy amennyiben a jelenléti oktatáshoz való visszatérést nem követték a felzárkózásra, hiánypótlásra irányuló programok, akkor a 3. évfolyamos tanulók tanulási vesztesége a 10. évfolyamra már elérheti a másfél évet is. Márpedig az oktatási rendszer merevsége, az egységesen kötelező tanterv nem teszi lehetővé, hogy a nagy lemaradással rendelkező tanulók igényeire érdemben reagálni tudjon az iskola, még egy rendkívüli helyzet utáni állapotban sem. Kaffenberger modellje különösen megfontolandó azon iskolák esetében, amelyekben nagy a halmozottan hátrányos helyzetű tanulók aránya. Ezekben az iskolákban az alsó tagozatos tanítóknak csak 10-15%-a nyilatkozott úgy, hogy

az előírt tananyagot végig tudták venni a diákjaikkal. Minden ötödik pedagógus azonban úgy nyilatkozott, hogy egyáltalán nem tudták követni azt (Holb et al., 2022).

1.5.2.5 Hátrányos helyzetű tanulók a távolléti oktatásban

A koronavírus járvány idején 90-100 ezer hátrányos helyzetű gyermek volt általános iskolai tanuló (Polónyi, 2021). Ugyanakkor a távolléti oktatásban való részvétel azokban az osztályokban, ahol magas volt a halmozottan hátrányos helyzetű és/vagy roma tanulók aránya, mindössze 67% körüli értéket ért el. A becslések szerint ebből a csoportból a diákok mintegy 16%-a esett ki az oktatásból az átállás első heteiben. E diákok további 24%-a pedig nem online vett részt az oktatásban. Ez az arány az utolsó lezárás idejére mindössze 15, illetve 19%-ra mérséklődött (Holb et al., 2022; Kende et al., 2021). Azokban az osztályokban, ahol alacsony a HHH gyerekek aránya, a pedagógusok bevallása szerint a gyerekek 6%-a, míg a magas HHH arányú osztályokban a gyerekek 28%-a veszett el az oktatás számára az átállás kezdeti időszakában. Hermann és munkatársainak közlése (2022) alapján, aki a 2017-es országos kompetenciamérés háttérkérdőíveit vizsgálta, a 6. évfolyamon a tanulók 12%-a, 8. évfolyamon a 10%-a, 10. évfolyamon a 7%-a nem volt elérhető a távoktatás számára, mivel otthonukban nem volt számítógép vagy internet. További 20, 17, illetve 12% csak korlátozottan fért hozzá, mert a család egyetlen gépét kellett megosztania a testvéreivel. Hermann azt is megállapítja, hogy a nem, vagy csak korlátozottan elérhető diákok esetében kiemelkedően magas azoknak a száma, akiknél a szülők vagy iskolázatlanok, vagy szakmunkás végzettséggel rendelkeznek. Adatai alapján felső tagozaton az előbbi csoportba tartozik minden második, az utóbbiba minden ötödik tanuló.

A megtartott online órák szemszögéből monitorozva a távolléti oktatást megállapíthatjuk, hogy azokban az iskolákban építettek leginkább a tananyag önálló feldolgozására, ahol magas a HHH státusszal rendelkező gyerekek aránya. A pedagógusok beszámolója alapján az újabb hullámok idején a többi iskolához hasonlóan ezekben az iskolákban is nőtt a megtartott online órák száma. Ám ezekben az intézményekben az első lezárás idején vagy nem tartottak online tanórát, vagy csak a tanórák elenyésző részét tartották meg, és a megtartott órák aránya még az utolsó hullám idején is csak a 40%-ot érte el. Ráadásul éppen ezekben az iskolákban éltek legnagyobb arányban a teljes lezárással, mint a védekezés lehetséges módjával a későbbi hullámok idején. Mindezek következményeként éppen azok a diákok estek el a legnagyobb mértékben a tanári segítséggel zajló tanulási folyamattól, akiknek erre a legnagyobb szüksége lett volna. Ráadásul az online nem elért diákok esetében tízből négy egyes vagy kettes osztályzatot, a korlátozottan elért diákok esetében tízből három szerzett elégtelen vagy elégséges osztályzatot matematikából a 2019/2020-as tanév első félévében (Hermann, 2020 idézi Polónyi, 2021).

Ami a rendelkezésre álló számítástechnikai eszközöket illeti, minden iskolafokon megfigyelhető, hogy a legalacsonyabb iskolai végzettségű édesanyák gyermekeinek jelentős része,

46-60%-a – az asztali számítógép, laptop vagy tablet helyett – mobiltelefonon vett részt a távolléti oktatás digitális formájában (Hermann et al., 2020), holott ez az eszköz volt erre a legkevésbé alkalmas. Ez a megállapítás ellentmondani látszik Sung és munkatársai 2016-os metaanalízisének (Sung et al., 2016) eredményével. Száztíz, az oktatásba mobil informatikai eszközt bevonó kutatás elemzése által arra a következtetésre jutottak, hogy a mobiltelefonok a leghatékonyabb oktatásban használható eszközök csoportjába tartoznak, nagyobb tanulási nyereséget indukálnak, mint a laptopok. Azonban rámutatnak, hogy ezekben a kutatásokban a mobiltelefonok használata innovatív pedagógiai módszerekkel párosult, illetve az eszközt a kutatások jelentős részében csak rövid tanulási periódusokban használták. Mivel a számítógépek, laptopok, tabletek és mobiltelefonok között ez utóbbiak képernyője a legkisebb, így azon mind a kivetített tananyag, mind a képernyőn megosztott táblakép nehezebben követhető, továbbá az interaktív, a vizualításra építő, vagy írott, rajzolt választ kérő feladatokba is nehezebb bekapcsolódni. Így, a többségében frontális órávezetéssel és kevés innovatív megoldással tartott tanórák követésére a mobil telefonok voltak a legkevésbé alkalmasak.

Azoknak a távolléti oktatáshoz mobiltelefont használó diákoknak, akiknek édesanyja alacsony iskolai végzettségű, az alsó tagozaton volt a legmagasabb az aránya (60%) (Hermann et al., 2020). Mivel az alsó tagozaton kiemelt jelentősége van a megfelelő színvonalú szemléltetésnek és a tevékenykedtető feladatoknak, így amennyiben ezeket az eszközöket leginkább tudatos oktatási eljárás nélkül, megosztott képernyőnek használták a tanórán, innovatív, és mobil eszközön is jól működő megoldások helyett, úgy ezeknek az eszközöknek a használata az alsó tagozatos diákok körében különösen alkalmatlan platform volt.

A távolléti oktatásban való részvételre kevésbé alkalmas eszköz nagy arányú használatán túl szintén az alacsonyabb, általános iskolai, vagy érettségi nélküli végzettséggel rendelkező anyák azok, akik legnagyobb arányban tapasztalták, hogy gyermekük oktatásban való részvételét akadályozta az informatikai eszközök hiánya. Hermann közlése alapján (idézi Polónyi, 2021) miközben a közoktatásnak online platformokon kellett működnie, közel minden ötödik felső tagozatos diák nem, vagy csak nehezen fért hozzá az oktatáshoz.

A távolléti oktatás fizikai környezete a rendelkezésre álló számítástechnikai eszközökön túl magába foglalja az otthon fizikai környezetét. Többségében a rosszabb anyagi helyzetben lévő családok gyermekeinek nem jutott megfelelő tanulótér, önálló szoba, vagy elkülöníthető hely, ami nyugodt tanulásra alkalmas lett volna. Sok esetben nemcsak a gyermekeknek kellett egy térben tartózkodniuk, hanem a szülők, vagy más családtagok is ugyanazon a helyiségen osztozkodtak, ahol a gyermeknek, vagy gyermekeknek az oktatásban kellett részt venniük. Szilveszter és munkatársai (2020) ezt a kérdést a háztartási rendezettség kontextusában tárgyalják. Megállapításuk szerint nem a család szocioökonómiai státusza, vagy a szülők iskolázottsága önmagában határozta meg a gyermek sikerességének mértékét a távolléti oktatásban, hanem a családi rutint is magában foglaló

háztartási rendezettség volt annak előrejelzője. Mivel a megváltozott élethelyzethez, és az ezzel járó új családi rutinokhoz való alkalmazkodásnak a feltétele a kognitív flexibilitás, amelynek gyengébb szintje figyelhető meg az alacsony szocioökonómiai státuszú egyének körében, így a rugalmas alkalmazkodás sérült ezekben a családokban. Bár a háztartási rendezetlenség ezeket a családokat már a járványhelyzet előtti időkben is jellemezte, várható, hogy a gyerekek iskolába járása enyhítette ezek negatív hatását, hiszen a tanulás színtere ekkor az iskola volt. A lezárások idején azonban összeadódott a rossz körülmények és a kognitív rugalmatlanság okozta nehéz alkalmazkodóképességből adódó hátrányok hatása.

A két iskolafokot tekintve, tanári becslések alapján a hátrányos helyzetű alsó tagozatos gyerekek 48%-a, a felső tagozatosok 57%-a szenvedett el jelentős tanulási veszteséget az iskolabezárások idején (Holb et al., 2022). Kvantitatív adatok alapján pedig az mutatható ki, hogy a hátrányos helyzetű diákok közel egy tanévnyi tanulási veszteséget halmoztak fel a járvány során (Hermann & Molnár, 2022). A hátrányos helyzetű alsó tagozatos diákok 2021 őszére az iskolabezárások idejének megfelelő, vagy azt meg is haladó tanulási veszteséget halmoztak fel. Matematikából körülbelül 15 hétnyi, olvasás-szövegértésből pedig 21 hétnyi veszteséget lehetett megállapítani. A tanulási veszteség mértékének a lezárások idejével megegyező mértéke alapján úgy tekinthetjük, mintha ezek a gyerekek ez idő alatt nem jártak volna iskolába (Molnár & Hermann, 2023). Ezáltal az egyes társadalmi csoportokba tartozó tanulók között az olló még tovább nyílt. E gyerekek esetében még nagyobb hangsúllyal merül fel az az aggodalom, hogy a merev iskolarendszer és a kötött tantervek adta körülmények között elmaradt fejlesztés és felzárkóztatás milyen következményekkel jár. A felhalmozódó tanulási veszteségnek hosszabb távú hatásai megmutatkozhatnak a korai iskolaelhagyásban, és ennek tovagyűrűző következményeiben.

1.6 Összefoglalás

A fejezetet összefoglalva megállapíthatjuk, hogy a matematikai alulteljesítés világszerte komoly kihívást jelent. Az UNESCO (2017) adatai szerint az iskoláskorú diákok több mint fele nem rendelkezik az alapvető matematikai készségekkel, aminek komoly gazdasági és társadalmi következményei vannak (Geary, 2011). A COVID-19 járvány következtében bevezetett távolléti oktatás tovább súlyosbította ezt a helyzetet, különösen a hátrányos helyzetű tanulók körében, akiknek a tanulmányi teljesítménye az iskolabezárások következtében még tovább romlott (Polónyi, 2021).

Az alulteljesítés hátterében kognitív, affektív és szocioökonómiai tényezők állnak, sokszor kölcsönhatásban egymással (Fritz et al., 2019). E tényezők közül a családi háttér, a szülők iskolázottsága, valamint a társadalmi és kulturális hátrányok különösképpen befolyásolják az alacsony szocioökonómiai státuszú diákok matematikai teljesítményét (pl. Dowker, 2019). Az

alulteljesítők az iskolai környezetben is hátrányos helyzetben vannak, hiszen a pedagógiai módszerek és a tanulási környezet sok esetben nem a fejlődésüket szolgálják, így e tanulók hátrányait az iskolai oktatás sem képes kompenzálni. Ezeket a diákokat sok esetben a lassabb munkatempó, figyelemhiány és gyors kifáradás is jellemzi, ami szintén hozzájárul a gyenge teljesítményhez (pl. Svraka & Ádám, 2018).

A tanulási nehézségek kezeléséhez és a hátránykompenzációhoz megfelelő pedagógiai beavatkozás szükséges, amely figyelembe veszi a diákok egyedi igényeit. A következő fejezetben egy rövid történeti áttekintés után az IKT eszközök felhasználásának elméleti kereteit mutatjuk be annak érdekében, hogy e keretek között vizsgáljuk meg a kutatásunk szempontjából releváns, alsó tagozatos diákoknak készült matematikai fejlesztőprogramokat, melyek fejlesztésének célja elsősorban a lemaradók felzárkóztatásának elősegítése volt.

2 Számítógép-alapú fejlesztőprogramok

A számítógép oktatási célú felhasználásának, mint kurrens neveléstudományi kutatási témának szerteágazó szakirodalma van. Jelen fejezetben a saját kutatásunk szempontjából releváns három kérdéskört járunk körül. Elsőként az IKT eszközök oktatási célú felhasználásának elméleti kereteként különbséget teszünk a technológiaközpontú és a tanulóközpontú megközelítés között, az utóbbi mellett foglalva állást. Ezt követően részletesen tárgyaljuk egy hátránykompenzációra alkalmas számítógép-alapú fejlesztőprogram létrehozásának kritériumait. Végezetül történeti áttekintést nyújtunk az alsó tagozatos diákok számára létrehozott matematikai fejlesztőprogramokról annak érdekében, hogy saját kutatásunkat ezek sorában el tudjuk helyezni.

2.1 AZ IKT eszközök oktatási célú felhasználásának elméleti keretei

Az Egyesült Királyság 1991-es Nemzeti Alaptantervében a matematikai követelményekkel kapcsolatban még a számítógépek alkalmazásának technológia központú megközelítését találjuk (Noss, 1995). Az alsó tagozatos korosztálynak szóló tanterv ugyanazon tanulási cél második szintjeként a számsorozatokkal való ismerkedést jelöli meg, és ennél nehezebb, hatodik szintként szerepel az ismerkedés a számsorozatokkal számítógépes környezetben. Noss rámutat, hogy ez a tanterv a számítógépre, mint eszközre tekint, amely ráadásul nehezebbé, bonyolultabbá teszi a matematikai ismeretszerzést.

Ennek ellenpontjaként a 2005-ben közzétett brit e-startégiában (Prime Minister's Strategy Unit, 2005) az szerepel, hogy az IKT eszközök interaktív eszközök lévén ideálisak a tanulók készségfejlesztésének segítésében. Jones (2016) felhívja a figyelmet, hogy ez a megállapítás az IKT eszközök nem kontextusba ágyazott, és problémamentes implementációját fogalmazza meg, ám a megfelelő elméleti háttér hiányával.

A technológia – és ezen belül az IKT eszközök – valamint a tanulás kapcsolatának e kétféle megközelítését összegzi Mayer (2010), amikor az erre irányuló kutatásokat két csoportba sorolja. Eszerint a technológiával kiegészített oktatás megközelítése elsősorban vagy technológiaközpontú vagy tanulóközpontú volt. A technológia ebben a megközelítésben bármilyen eszköz lehet, amit a tanulás folyamatába bevonunk – pl. a fehér tábla vagy a tankönyv. A technológiaközpontú megközelítés középpontjában az áll, hogy mire képes a technológia, melynek szerepe a tanítás folyamatában elsősorban a tartalomhoz és az instrukciókhoz való hozzáférésnek a biztosítása. Ezáltal a technológia csak egy újabb eszköz, amit az eredetileg is létező osztálytermi keretbe illesztünk, a hatékony tanulástámogatás feltételeinek figyelmen kívül hagyásával és így a tanítási módszerek érintetlenül maradnak. A tanulóközpontú megközelítésben a technológiát oly módon integráljuk a tanítás folyamatába, hogy egyaránt figyelembe vesszük a tanulók és tanárok igényeit,

és a technológiát a tanítási folyamatot támogató, és abba integrált eszközként – tulajdonképpen partnerként – vezetjük be az osztályterembe (Mayer, 2010). Ez utóbbit lehet technológiával támogatott oktatásnak nevezni. Ezen az értelmezési kereten belül az IKT eszközök akkor válnak tanulást támogató, azaz a tanítás folyamatába tanulóközpontú szemlélettel integrált eszközökké, ha a tanulók igényeihez szabva ki tudjuk használni a multimodalitását – vizuális és auditív információmegosztási lehetőségeit, beleértve többek között az írott szöveget, képeket, videókat –, és megfelelő szintű interaktivitást is biztosítunk általa (Mayer, 2010).

Mindkét kritikai olvasat arra mutat rá, hogy a számítógépre nem elégséges csak, mint eszközre tekinteni az oktatás folyamatában, hanem annak kulturális beágyazottságában kell vizsgálni, azaz mint a tanításba integrálható olyan eszközt, amelynek használata meghatározott elméleti keretek és feltételek mentén válik hatékonná az oktatás folyamatában. Ennek megfelelően a 90-es évek végétől kezdve a kutatások már nem az eszközhasználat versus tanulóközpontúság paradigma mentén zajlottak. Előtérbe kerültek a pedagógiai alapelveken és módszereken nyugvó kutatások, amelyek arra irányulnak, hogy hogyan lehet minél jobban felhasználni az oktatásban a digitális technológia nyújtotta lehetőségeket. A kutatók számára kihívást jelent, hogy olyan keretek között, amikor az új technológiák gyorsabban fejlődnek, mint ahogyan a tanulásról alkotott elméletek változnak, miként lehet tényeken és elméleteken alapuló elvek mentén minél jobban kiaknázni a technológia nyújtotta lehetőségeket a tanulás támogatásában ahelyett, hogy az oktatás szereplőinek új technológiákhoz való folyamatos alkalmazkodását várnánk (Adesope & Rud, 2019; Niemi et al., 2023).

2.2 A hátránykompenzációra alkalmas számítógép-alapú fejlesztőprogramok létrehozásának kritériumai

Számos országban egyenlőtlenség mutatkozik az azonosan magas színvonalú oktatáshoz való hozzáférésben (Reardon & Bischoff, 2011; Quaye & Pomeroy, 2021), ezért szükségesnek látszik olyan, mindenki számára azonosan magas minőséget képviselő fejlesztőprogramok létrehozása, amelyek csökkenthetik a hátrányokat, fejleszthetik az alapkészségeket, és segíthetik a tanulókat a felzárkózásban (de Barros & Ganimian, 2023). Igaz ez kutatásunk tárgyára, a matematika területére is. Egy számítógép-alapú adaptív fejlesztőprogram minden felhasználónak azonosan magas minőséget biztosíthat, csökkentheti a matematikatanulásban szerzett hátrányokat, ezáltal a társadalmi-gazdasági egyenlőtlenségek negatív hatásait is az általános iskolás gyermekek körében (Benavides-Varela et al., 2020). Egy hatékony digitális fejlesztőprogram tervezése alapos tervezést és számos tényező figyelembevételét igényli a szakirodalom alapján.

Egy digitális fejlesztőprogram tervezése során először is az elérhető technikai lehetőségeket és körülményeket kell figyelembe venni (Seo & Woo, 2010). A digitális formátum lehetővé teszi

számunkra, hogy a tanulók számára többféle hozzáférést biztosítsunk a tartalomhoz (Kieserling & Melle, 2019). A hozzáférés nemcsak többféle ábrázolásmódot (pl. vizuális és auditív) jelent, ami már önmagában túlmutat a papíralapú tankönyv nyújtotta lehetőségeken, hanem különböző tevékenységeket, kifejezési módokat is, amelyek felkínálására és kivitelezésére alkalmas a digitális eszköz. Ennek következtében, ha a megfelelő eszközök – pl. számítógépek – rendelkezésre állnak, elengedhetetlen a digitális platformok teljes potenciáljának kihasználása. A digitális oktatási platformok értékelési rendszere új lehetőségeket nyit a tanulási folyamat személyre szabásában (Choppin et al., 2014; Istenič, 2021; Kaplan-Rakowski, 2021). A digitális rendszer képes rögzíteni és elemezni a feladatokra adott válaszokat, visszajelzést adni a diákoknak és jelentéseket készíteni a tanároknak (Abell, 2006). Ezen adatok alapján a digitális programot a tanulók egyéni igényeihez igazíthatják az oktatást, és személyre szabott feladatokat kínálhatnak nekik (Choppin & Borys, 2017; Fletcher et al., 2012; Molnár & Csapó, 2023). Ez segít a pedagógusoknak is a hátrányos helyzetű tanulók differenciálásában és támogatásában. Továbbá, a digitálisan folyamatosan biztosítható formatív értékelés növelheti a diákok tanulási motivációját (Meeter, 2021; Whalen et al., 2024).

A számítógép-alapú programok megfelelő tervezésével nemcsak személyre szabott feladatokat és értékelést biztosíthatunk a tanulóknak, továbbá visszajelzéseket a tanároknak a diákok előrehaladásának nyomon követésére, hanem a tanulási környezet is motiválóvá válhat (Csapó et al., 2012; Csapó & Molnár, 2019; Molnár & Lőrincz, 2012), például azáltal, hogy egy online tanulási környezetben a tanulóknak aktív szerepet kell vállalniuk a tanulásban. Ellenkező esetben a tanulást túl korán feladhatják. Az online tanulási folyamat során a fejlesztőprogramoknak kifejezetten és szisztematikusan ösztönözniük kell a tanulási tevékenységekben való részvételt, és rendszeres visszajelzést kell küldeniük a tanuló teljesítményének minőségéről (McCarthy & Li, 2018; Voss & Wittwer, 2020).

A motiváló tanulási környezet kialakítása mellett fontos a megfelelő tartalom és tartalomközvetítés módjának kialakítása is. A digitális tananyagok tartalmának életkorhoz illeszkedőnek, továbbá kognitív és pedagógiai szempontból is relevánsnak kell lennie (Csapó & Molnár, 2019; Hanson & Carlson, 2005). Emellett további szempontokat is figyelembe kell venni, különösen az általános iskolás gyermekek vagy az olvasási nehézségekkel küzdő tanulók esetében. A digitális platformon a használati utasításokat előre rögzített hangon kell közölni, hogy a diákok olvasási teljesítménye ne befolyásolja a tantárgyi, esetünkben matematikai, teljesítményüket (Csapó & Molnár, 2019; Kieserling & Melle, 2019). A fiatalabb korosztály számára a tartalmat világos és egyszerű felületen kell bemutatni, olyan információktól és vizuális tartalomtól mentesen, amelyek csak elvonhatnák a figyelmüket (Kieserling & Melle, 2019; Mayer, 2014; Seo & Woo, 2010). Éppen ezért a programban megjelenő vizuális elemeknek támogatniuk kell az elsajátítandó tartalom

megértését, és nem szabad hátráltatniuk a figyelem összpontosítását és ezáltal a motiváció fenntartását (Seo & Woo, 2010).

A fejlesztőprogramok tervezési folyamata során nemcsak a diákok igényeit kell figyelembe venni, hanem a tanárok preferenciáit is (Choppin & Borys, 2017; Cuban, 2001; Gaffney, 2010; Phelps et al., 2012). A tanároknak elegendő szaktárgyi, pedagógiai és technológiai tudásra van szükségük ahhoz, hogy sikeresen integrálhassák a digitális tartalmat az osztálytermi munkába (Biber et al., 2022; Meletiou-Mavrotheris & Prodromou, 2016; Mishra & Koehler, 2006). A pedagógusok elvárása, hogy a digitális technológiák használata hozzájáruljon a tanulási eredmények javításához, növelje a diákok tanulás iránti motivációját, továbbá a digitális tanulás hatékonyan és könnyen megszervezhető legyen (Perrotta, 2013). A tanárok előnyben részesítik azokat az új digitális tartalmakat, amelyek illeszkednek a zsúfolt kötelező tantervbe (Xie et al., 2021), könnyen összehangolhatók azzal, és támogatják a saját tanítási stílusukat és gyakorlatukat (Gaffney, 2010; Hanson & Carlson, 2005). Amennyiben a digitális platformokat pedagógiaiilag megfelelő módon használjuk a tananyagok tervezésekor (Voss & Wittwer, 2020), az így létrehozott technológia-alapú tananyag minimalizálja a tanároktól elvárt erőfeszítéseket, melyeket a digitális fejlesztőprogramok használatába szükséges fektetniük (Csapó & Molnár, 2019; Huang et al., 2014).

Végül a tartalom időbeli elosztása is lényeges szempont a sikerességhez. A tanárnak nem szabad túl sok tudásanyagot egyszerre felajánlania, hanem kis lépésekben a legfontosabb készségekre és fogalmakra kell összpontosítani (Muijs, 2021). Bár ez az utolsó megállapítás eredetileg a távoktatás kontextusában fogalmazódott meg, figyelembe kell venni az digitális fejlesztőprogramok tervezésekor is, azaz a tartalmat kis egységekre kell bontani.

2.3 Matematikai fejlesztőprogramok az alsó tagozatos diákok számára

Kevés, és sok esetben bizonytalan kutatási eredménnyel rendelkezünk a 6-10 éves korosztály számára iskolai oktatási környezetben alkalmazható digitális oktatási, vagy felzárkóztató programokról matematikából (Cheung & Slavin, 2013; Dietrichson et al., 2017; Outhwaite et al., 2017). A rendelkezésre álló kutatások eredményeit szintetizálva nehéz általánosítható megállapításokat tenni, mert az e témakörben zajlott pedagógiai kísérletek többségében a közvetlen utóhatást vizsgálták, de a késleltetett utóhatás vizsgálata általában elmaradt. Értekezésünk jelen fejezetében e megkorítások figyelembevételével vázoljuk fel azt a történeti áttekintést, amelynek keretein belül saját kutatásunkat elhelyezni kívánjuk.

A közoktatásban tanuló diákok számára az iskolájuk osztálytermi környezetében számítógépes oktatást – ahol a számítógép tartalomközvetítő és tanulásszervezési feladatokat is ellát – elsőként 1965 tavaszán a Stanford University valósított meg a CAI (Computer Assisted Instruction) Stanford program keretein belül (Suppes & Morningstar, 1972). 41. negyedik

évfolyamos diák oldott meg napi rendszerességgel számítógép alapú aritmetikai gyakorlófeladatokat, A következő tanévben a programot már 270 általános iskolai és 60 középiskolai tanulóra terjesztették ki (Suppes & Macken, 1978). Egy tanévvel később a Brentwood projekt keretében már olyan személyre szabott tutorial programban vettek részt általános iskolások matematikából és olvasásból, amelyben feleletválasztós, illetve nyitott kérdéseket tartalmazó feladatokat oldottak meg, egy fejhallgató segítségével pedig a tanár által előre rögzített instrukciókat is meg tudták hallgatni (Atkinson, 1968). Az 1970-es években már olyan program készült, amely az iskolai tananyagot halláskárosult általános iskolai diákok számára tette elérhetővé (Suppes & Macken, 1978). E kezdeti ígéretes kutatások eredményei ugyanakkor nem hoztak érdemi megújulást, így Burns és Bozeman egy 1981-ben írt tanulmányukban kifogásolják, hogy akkoriban a számítógépek még csak az iskolák egy nagyon szűk körében voltak hozzáférhetőek, és felteszik a kérdést, hogy a használatuk kínálta előnyöket valóban kiaknázza-e majd valaha az oktatási rendszer. Megfogalmazzák azt az igényt, hogy az oktatási folyamat személyre szabásának érdekében szükség lenne a számítógépek oktatásban való széles körű alkalmazására., mivel ez javíthatna a tanulásszervezésben, a megfelelő tartalom átadásában, a tanulási motiváció növelésében, a tanulói teljesítmény javulásában, összességében tehát az oktatás színvonalának emelésében.

A téma fontosságát, és régóta fennálló aktualitását is mutatja, hogy az 1970-es évektől a 2010-es évek elejéig 21 olyan átfogó metaanalízis születik, amely a matematikai tartalmú digitális oktatóprogramok hatékonyságát vizsgálja (Cheung & Slavin, 2013). A digitális technológia alkalmazásának hatásmérete (Cohen-d) nagy különbségeket mutat: +0,10-től +0,62-ig terjedően. Ezt az eredményt azonban több megfontolás is árnyalja.

A digitális technológia alkalmazására nem állítanak fel kritériumrendszert, így az elemzésbe olyan oktatási programcsomagokat is bevonnak, amelyek számítógépes felületen – mintegy digitális tankönyvként – biztosították a tananyagot és a feladatokat, de az oktatást magát a tanár irányította (pl. Resendez et al., 2009). Az elemzésbe bevont egyesült államokbeli egy- vagy több államra kiterjedő oktatási kísérletek többségében nem a digitális technológia és az általa biztosított tananyag együttes hatékonyságát vizsgálták, hanem annak a folyamatnak a hatékonyságát, amikor a tananyag elsajátítását részben a pedagógus által tartott órák, részben a digitális technika által nyújtott tartalom biztosította. E programok hatásmérete a teljes mértékben hagyományos tanár irányította tantermi órákhoz képest rendre nem volt kimutatható, vagy nagyon kicsi volt (pl. CompassLearning Odyssey matematikaprogramja – Wijekumar et al., 2009).

További szempont, hogy egymástól nagyon eltérő kutatások hatásméretének elemzésével próbáltak rávilágítani a digitális technológia matematikaoktatásban tapasztalható előnyeire. Egyes kutatások (pl. Hartley, 1977 idézi Cheung & Slavin, 2013; Burns, 1981) kontrollcsoport bevonása nélkül zajlottak, másokban csak utótesztet vettek fel, ami nem teszi lehetővé a fejlődés viszonyítását a kiinduló állapothoz (pl. Wodarz, 1994; Zumwalt, 2001, idézi Cheung & Slavin, 2013). További

bizonytalanságot okoz az eredmények értékelésében, hogy egyes kutatásokban a digitális program olyan matematikai tartalmat tanít a kísérleti csoportnak, amelyet a kontrollcsoport nem tanul (pl. Roschelle et al., 2010). E problémák megoldásaként Cheung és Slavin 2013-ban egy szigorú kritériumlistát állít fel, csak randomizált, vagy illesztett mintával dolgozó, legalább 12 hétig tartó, és reálisan bármikor megismételhető kutatásokat vizsgáltak 1980-tól 2013-ig. Ennek alapján 45 általános iskolában és 29 középiskolában folytatott kutatást elemeznek, és arra az eredményre jutnak, hogy a matematikaoktatásban a digitális technológia alkalmazásának pozitív, bár kicsi a hatásmérete (Cohen- $d=0,15$).

A kezdeti kutatások – a kor technikai adottságainak és tanuláselméleti áramlatának megfelelően – gyakorló típusú oktatóprogramok hatékonyságát vizsgálták (pl. Carrier, 1985; Watkins, 1980; Morgan et al., 1977). Morgan, Sangstan és Pokras 1977-ben végzett kutatásában olyan iskolák 3-6. évfolyamon tanuló diákjait vonták be a kutatásba, ahol kiemelkedően nagy a hátrányos helyzetű tanulók aránya. Az írásbeli műveletként megjelenő négy alpművelet gyakorlását biztosító program minden évfolyamon, kiváltképpen a harmadikban és negyedikben, bizonyult hatékonynak. Watkins 1986-ban végzett kutatása szintén számítógép-alapú gyakorlóprogram fejlesztő hatását mutatta be első osztályosok körében a matematikai alapkészségek területén.

Carrier 1985-ben végzett kutatásában 9-10 éves diákok vettek részt kvázi-kísérletben matematikából. A kísérleti csoport három különböző számítógépes program által biztosított feladatokat oldott meg a szorzás és osztás témakörében. Ezek mindegyike gyakorló feladat (drill and practice) volt. Az egyikben a helyes számolás jutalma egy – az eredménynek megfelelően gyorsuló – sportkocsi volt, a másodikban a helyes eredmény beírását követően a szorzás, illetve osztás területi modelljét ábrázoló grafika szemléltette a diák által már beírt jó eredményt, a harmadikban pedig pusztán a papíralapú feladatlap jelent meg a monitoron. A kontrollcsoport tagjai ugyanezeket a feladatokat oldották meg papíralapon. A szorzótábla ismeretében a késleltetett utóteszten is szignifikánsan jobb eredményt értek el a számítógép-alapú feladatokat megoldó diákok, a bennfoglalt tábla ismeretében a program fejlesztő hatása hosszú távon már nem maradt meg, az írásbeli műveletvégzésben pedig nem volt különbség a két csoport között. A kimutatható különbségeket a kutató - hivatkozva korábbi kutatásokra is – annak tulajdonítja, hogy a gyakorlásra szánt idő számítógép-alapú tanulás esetén jobban kihasználható, ami lehet annak következménye, hogy a diák közvetlen visszajelzést kap a munkájára, és nem kell megvárnia, amíg a tanár a teljes feladatlapot késleltetve kijavítja, illetve a motivációját és figyelmét jobban fenntartják a számítógép által biztosított animációk, színes grafikák.

A számítógép-alapú oktatóprogramok költséghatékonyságára mutatnak rá Fletcher és munkatársai 1990-ben. Harmadik és ötödik évfolyamos matematikaórán a tanár tartotta az új ismereteket közlő részét az órának, a gyakorlást a csoport egy része hagyományos módon, másik

része számítógépen végezte. A kutatás újdonsága volt, hogy a számítógépek használatát már nem egy informatikai laborban, hanem közvetlenül az osztályteremben biztosították. Az oktatási folyamat végén felvett utóteszten a kísérleti csoport mindkét évfolyamon szignifikánsan jobban teljesített. A szerzők elemzése alapján a számítógép-alapú gyakorlás költségtakarékosnak bizonyult, szemben a tanár által biztosított tantermi oktatással, de ennek a költséghatékonyságnak feltétele az eszközök rendelkezésre állása a tanteremben.

Becker (1994) kontrollcsoportos kutatásában két különböző számítógép-alapú oktatási programban vettek részt 8-11 éves diákok matematikából vagy olvasásból egy teljes tanéven át. Bár a programok hatékonysága összességében minimálisnak bizonyult, Becker több fontos következtetést von le a kutatásból. Úgy találja, hogy az osztálytermi oktatás az átlagosan, a középmezőnyben teljesítő diákoknak kedvező, míg a számítógépes oktatási programok az átlag felett teljesítő diákoknak kedveztek, mivel gyorsabb egyéni haladási tempót tettek lehetővé. Az alulteljesítő diákok fejlődésének elmaradásában szerepet játszott az, hogy az egyik oktatási program jelentősen a készségszintjük feletti feladatokat biztosított számukra. E korai kutatásában Becker konklúziójában már azt veti fel, hogy az adaptív feladatsorok lehetnek igazán hatékonyak a számítógép-alapú oktatási programokban is.

2001-ben már olyan program hatékonyságáról számolnak be Spicuzza és munkatársai, amely a diák fejlettségi szintjét figyelembe véve kínálja fel a feladatokat. A kutatás idején a harmadikos tananyagra épülő, az alapozáshoz szükséges matematikai készségeket gyakoroltató feladatbank állt készen összesen tizenkét különböző nehézségi szinten. A programból a diák számára összeállított feladatsort még ki kellett nyomtatni, majd kitöltve beszkenneálni. A kitöltött feladatlapot a program pontozta, és visszajelzést adott a diáknak és a tanárnak is. Ennek alapján ebben a kutatásban részt vevő negyedik és ötödik évfolyamos diákok már az előteszt alapján lettek a megfelelő nehézségű feladatbankhoz hozzárendelve, illetve tanáraik már a teljesítményről rögzített adatok alapján követhették nyomon a diákok teljesítményét. A program hatékonynak bizonyult mindkét évfolyamon, és minden képességcsoportban. E program hatékonyságát abban látják (Ysseldyke et al., 2003), hogy a számítógépes program által tárolt adatok alapján a tanárok az egész osztály haladását, osztály- és egyéni szinten is könnyen átlátják, gyorsan tudnak a diákoknak a fejlettségi szintjüknek megfelelő feladatsort biztosítani, és a visszajelző funkciók segítségével személyre szóló értékelést adni.

Harskamp (2014) átfogó metaanalízisében összesen 11 olyan elsősorban 6-10 éves gyerekeknek szánt számítógépes matematikai programról számol be, amelyek 2000 és 2014 között születtek, és hatékonyságuk kutatása kvantitatív adatokra épülő, randomizált vagy kvázi-kísérletekben zajlott. Ezek a programok a számfogalom, a műveletvégzés, illetve a szöveges feladatok témaköreire épülnek. Az öt műveletvégzésre összpontosító számítógépes program közül (Fuchs et al., 2006; Main & O'Rourke, 2011; Rutherford et al., 2010; Schoppek & Tullis, 2010; Shin

et al., 2006) Main és O'Rourke (2011) eredményei annyiban nem szolgálnak kutatásunk szempontjából megbízható előképpel, hogy pilot kutatásukban a kísérleti (N=29) és kontroll (N=27) csoport előteszten elért eredménye erős szignifikáns különbséget mutatott. Ám a minta rendkívül kicsiny volta jelentős limitációt is jelent az eredmények értelmezésében. További három digitális fejlesztőprogram továbbra is a műveletvégzés gyakorlására fókuszál. Közülük Shin és munkatársai (2006) programja is egy primér gyakorlást biztosító program hatékonyságát méri. A kísérleti csoport tagjai, akik számítógépes programmal gyakorolnak, az 5. hét végére túlszárnyalják kontrollcsoportbeli társaik teljesítményét, akik ugyanazokat a műveleteket gyakorolják papíralapú játékkártyákkal. Ugyanakkor a 13. heti gyakorlás végére a két csoport teljesítményében már nem mutatkozik különbség. Ez is alátámasztani látszik azt a megállapítást, hogy a számítógép használata önmagában még nem jelent fejlesztő hatást (Christmann et al., 1997; Li & Ma, 2010). Feltételezhető, hogy az eszköz újdonságában rejlő motivációs erő az 5. hét végén elért eredményben még megmutatkozott, ám az újdonság erejének elmúltával a két, gyakorlásra biztosított, platform között már nem jelentkezett érdemi különbség.

Fuchs és munkatársainak (2006) koncepciója az volt, hogy az egyszerű műveletek eredményeinek bevétele munkamemóriát szabadít fel, ami lehetővé teszi a további fejlődést. Ezért első osztályos gyerekeknek rövid időre felvillantottak egy-egy összeadás vagy kivonás műveletet és az eredményt a 0-18 számkörben, majd a felvillanás után a gyerekeknek ezeket kellett leírniuk. Rossz válasz esetén a felvillanás idejét minimálisan meghosszabbították. Bár összeadásból a kísérlet végére javulást értek el, a kivonásban ez nem jelentkezett, és a bevésettnek tekintett műveleteket egyszerű szöveges feladatban alkalmazni nem tudták. Ez az eredmény valójában nem meglepő, hiszen konceptuális tudás nélkül a megfelelő művelet előhívása egy adott szöveges probléma megoldásához nem elvárható (Carstensen et al., 2025).

Schoppek és Tullis (2010) olyan új koncepció szerint alkotja meg a 9-10 évesek számára készült fejlesztő programot, amely már az algoritmus tudatos megválasztását és kivitelezését segíti elő egy művelet megoldásában. Merlin's Math Mill programjuk különböző számolási eljárásokra kínál feladatokat. Többszöri rossz válasz esetén Merlin, az animált kísérő elmagyarázza a megfelelő számolási eljárást. A feladatok kiköszvetítése során a program a gyerekek képességszintjét is figyelembe veszi a válaszaik alapján. A program az alpműveletek megfelelő szintű elsajátításához szükséges koncepcionális megértés és számolási készségek közül az utóbbi fejlesztésére fókuszál azzal a céllal, hogy idővel a munkamemória terhelése csökkenjen, és így magasabb szintű matematikai műveletek elsajátításához nyisson teret. A mindössze hét alkalommal 45 percben megvalósított digitális fejlesztőprogramban részt vevő diákok mind az utóteszten, mind a három hónapra rá felvett késleltetett utóteszten szignifikánsan jobban teljesítettek a kontrollcsoport tagjainál.

Az ST Math elnevezésű újszerű és máig egyedülálló koncepcióval megalkotott téri-idői tájékozódásra építő digitális matematikai oktatóprogram (Rutherford et al., 2010) heti kétszer 45 perces használat esetén hatékonynak bizonyult másodiktól ötödikig minden évfolyamon, egy-egy csoport esetén tanéveken átnyúlóan is. A program szóbeli és írásbeli instrukciók helyett a vizuális megértés felől közelíti a tantervvvel összhangban álló matematikai témaköröket. A program erőssége, hogy a nyelvi akadályok kiküszöbölésével a matematikai megértést elérhetővé igyekszik tenni nem anyanyelvi beszélők, és a szövegfeldolgozásban nehézséggel küzdő tanulók számára is. A program e jellegéből adódóan is jelentős szerepet szán a képernyőn megjelenő alakzatokkal, elemekkel való folyamatos virtuális manipulációnak.

A 'onebillion' elnevezésű, a Nottinghami Egyetem által 3-5, illetve 4-6 éves gyerekek számára fejlesztett matematikatanulást támogató applikációk hatékonyságát több, egymásnak ellentmondó eredményekre jutó kutatás is vizsgálta. Outhwaite és munkatársainak 2017-ben publikált kutatása már ötvözi a konceptuális és procedurális tudás elsajátítására irányuló törekvéseket. A négy különböző matematikai applikáció használata azt az eredményt hozta, hogy tabletre tervezett, azonnali visszajelzést biztosító, vonzó, színes képekkel és animációk és audiofájlok segítségével instruáló matematikai alapkészségeket fejlesztő digitális program segítségével 5 éves gyerekek matematikai készségszintjének és matematikai tudásának fejlődése felgyorsul, hét hónap alatt egy évnyi fejlődésnek felelve meg. Azaz a fejlesztésben részt vett gyerekek hét hónap alatt érték el az iskolaérettségi szintet. A kutatók rámutatnak, hogy a legnagyobb fejlődést a rossz szocioökonómiai háttérű gyerekek körében érték el. Nunes és munkatársai (2019) ugyanakkor leszögeznek, hogy mivel a kutatásba Outhwaite és munkatársai nem vontak be kontrollcsoportot, így ezek az eredmények hipotézisként fogadhatók el. E gondolat mentén Nunes és munkatársai megismétlik Outhwaite és munkatársai kutatását. A 12 hetes fejlesztés hatásaként a nem hátrányos helyzetű gyerekek valóban szignifikánsan jobban teljesítenek a kontrollcsoport tagjainál, ám a hátrányos helyzetű diákok nem fejlődtek kontrollcsoportos társaikhoz képest. Azaz a vizsgált négy applikáció nemcsak nem fejleszti, de hátrányba hozza a rossz szocioökonómiai státuszú gyerekeket. Ennek okai nem világosak, mindössze azzal magyarázzák, hogy harmadannyi gyerek tartozott ebbe a csoportba, mint a normál háttérű csoportba. Szintén e kutatásban szereplő matematikai applikációk hatékonyságát vizsgálta e kutatócsoportból Pitchford (2015) Malawiban. Eredményei abban a tekintetben figyelemre méltók, hogy olyan körülmények között bizonyult a számítógép-alapú matematikaoktatás 6-9 éves gyerekek körében hatékonynak, akiknek az oktatáshoz való hozzáférése máskülönben nem, vagy csak nehezen biztosított.

3 Az empirikus vizsgálatok céljai, kérdései és hipotézisei

3.1 A kutatás céljai és szerkezete

A kutatás elsődleges célja az volt, hogy a COVID-járvány miatt történt iskolabezárások és távolléti oktatás okozta tanulási veszteség kompenzálására alkalmas digitális matematikai fejlesztőprogramot dolgozzunk ki 3-4. osztályos diákok számára. A program felépítése során ugyanakkor arra a szempontra is figyeltünk, hogy az a későbbiekben szélesebb kontextusban is alkalmazható legyen. Ennek megfelelően másodlagos célként azt tűztük ki, hogy olyan fejlesztőprogramot dolgozzunk ki, amely a világjárvány okozta élethelyzetén kívül is szerepet kaphat a hátránykompenzációban.

A program hatékonyságvizsgálatának megvalósításához kidolgoztunk egy matematikai tesztet, ami a fejlesztőprogram tartalmához illeszkedően a diákok szorzás és osztás témakörében mutatott tudásszintjének mérésére alkalmas. Ezt követte a mérőeszköz viselkedésének elemzését lehetővé tevő adatfelvétel és elemzés, illetve a mérőeszköz revíziója, majd a fejlesztőprogram hatékonyságvizsgálatát célzó pilot kutatás és végül a nagymintás kutatás, majd utókövetéses vizsgálata. A folyamat időbeni ütemezését a 2. táblázat teszi áttekinthetővé.

2. táblázat. A matematikai fejlesztőprogram hatékonyságvizsgálatára irányuló kutatások időbeni ütemezése

Időbeni ütemezés	Kutatási tevékenység
2020. március-augusztus	A matematikai fejlesztőprogram és a mérőeszköz fejlesztése
2020. szeptember-október	A program hatékonyságvizsgálatához készült teszt próbamérése
2020. november- 2021. május	A matematikai fejlesztőprogram próbamérése
2021. szeptember- 2022. január	A matematikai fejlesztőprogram megvalósítása nagymintás mérés során
2022. május-június	A fejlesztőprogram hatékonyságának késleltetett utómérése

3.2 Kutatási kérdések

A kutatási kérdéseket a kutatás egyes fázisainak sorrendjét szem előtt tartva fogalmaztuk meg. A kérdések egyrészt a mérőeszköz működésére, másrészt a matematikai fejlesztőprogram hatékonyságvizsgálataira vonatkoznak.

- I. A mérőeszköz első verziójának viselkedésére vonatkozó kutatási kérdések:
1. Mennyire megfelelően működik a matematikai fejlesztőprogram hatékonyságának vizsgálatára létrehozott mérőeszköz egésze, illetve altesztjei a teljes mintán, illetve az egyes évfolyamokon?
 2. Milyen összefüggések tapasztalhatók az egyes altesztek között?
 3. Mennyire illeszkedik a teljesítményteszt a harmadik, illetve negyedik évfolyamos diákok tudás- és képességszintjéhez?
 4. Megoldható-e a teljesítményteszt a harmadik és negyedik évfolyamos diákok által a rendelkezésre álló időkereten belül? Van-e szignifikáns különbség a harmadik és negyedik évfolyamos diákok között
 - a) a tesztben eltöltött idő tekintetében?
 - b) a teszten, illetve az egyes alteszteken elért eredmények tekintetében?
 5. Befolyásolja-e a teljesítményteszt megoldása során alkalmazott eszköz használata a gyerekek sikerességét a teszt megoldásában?
- II. A pilot és nagymintás kutatásban alkalmazott mérőeszközre vonatkozó kutatási kérdések:
6. Mennyire megfelelően működik a matematikai fejlesztőprogram hatékonyságának vizsgálatára létrehozott mérőeszköz végleges változatának egésze, illetve altesztjei a teljes mintán, illetve az egyes évfolyamokon?
 7. Megfelelő-e a teszt konstruktumvaliditása? Empirikusan igazolható-e a teszten belüli altesztek/ dimenziók elkülönülése?
 8. Mennyire illeszkedik a teljesítményteszt a harmadik, illetve negyedik évfolyamos diákok tudás- és képességszintjéhez?
 9. Van-e szignifikáns különbség a harmadik és negyedik évfolyamos diákok teljesítményében, illetve az egyes alteszteken elért eredményeik tekintetében?
 10. Befolyásolja-e a teljesítményteszt megoldásához alkalmazott eszköz használata a gyerekek sikerességét a teszt megoldásában?
- III. A fejlesztőprogram pilot vizsgálatára vonatkozó kutatási kérdések:
11. Milyen hatékonysággal képes elősegíteni és támogatni a kidolgozott digitális fejlesztőprogram a 3. és 4. évfolyamos diákok matematikai tudását a szorzás és az osztás megértésének és elsajátításának területén?
 12. Milyen képességszinten lévő diákok matematikatanulását támogatja leginkább a fejlesztőprogram?
 13. Kimutatható-e szignifikáns javulás az altesztek által mért területeken a fejlesztőprogram hatására?

14. Van-e különbség a fiúk és a lányok között a fejlesztőprogram hatékonyságának mértékében?
15. Mennyire egyenletes időbeli terhelést jelent a diákok számára az egyes fejlesztő egységek megoldása?

IV. A mérőeszköz nagymintás kutatásban való alkalmazására vonatkozó kutatási kérdések:

16. Mennyire megbízhatóan működik a matematikai fejlesztőprogram hatékonyságának vizsgálatára létrehozott mérőeszköz az előteszt, az utóteszt és a késleltetett utóteszt megoldása során?
17. Mennyire illeszkedik a teljesítményteszt a harmadik, illetve a negyedik évfolyamos diákok tudás- és képességszintjéhez?
18. Mennyire jól különíti el egymástól a harmadik és negyedik évfolyamos diákokat a teljes teszt, illetve az egyes altesztek?

V. A fejlesztőprogram nagymintás vizsgálatára vonatkozó kutatási kérdések:

19. Milyen hatékonysággal képes elősegíteni és támogatni az átdolgozott digitális fejlesztőprogram a 9-11 éves tanulók matematikai tudását a szorzás és az osztás megértésének és elsajátításának területén?
20. Milyen hatása van a fejlesztőprogramnak rövid és hosszú távon az eltérő mennyiségű és tartalmú matematikai tapasztalattal rendelkező 3. és 4. osztályos tanulók matematikai tudására?
21. Milyen változások figyelhetők meg a kísérleti és kontroll csoportos tanulók teljesítményének eloszlásában az elő-, utó- és késleltetett utótesztek során?
22. Milyen rövid és hosszú távú hatásai vannak a fejlesztőprogramnak a szorzás és osztás megértéséhez, továbbá a szöveges feladatok megoldásához szükséges matematikai készségekre és tudásra?
23. Milyen képességszinten lévő diákok matematikatanulását támogatja leginkább a fejlesztőprogram?
24. Mennyire általánosíthatók az eredmények a teljes teszt és az altesztek vonatkozásában? A kutatás során igazolt fejlesztőhatás megerősítést nyer-e a látens szintű elemzések során a teljes teszt és az altesztek esetében?

VI. A mérőeszköz alacsony szocioökonómiai státuszú diákok körében végzett vizsgálataira vonatkozó kutatási kérdések:

25. Mennyire megbízhatóan működik a matematikai fejlesztőprogram hatékonyságának vizsgálatára létrehozott mérőeszköz az alacsony szocioökonómiai státuszú diákok körében?

26. Mennyire illeszkedik a mérőeszköz az alacsony szocioökonómiai státuszú diákok tudás- és képességszintjéhez?

VII. A fejlesztőprogram hatásának vizsgálata HH vagy HHH státusszal rendelkező és nem rendelkező státuszú diákok körében:

27. Milyen teljesítménybeli különbség figyelhető meg a késleltetett utóteszten nyújtott teljesítményben a hátrányos, illetve halmozottan hátrányos helyzetű diákok körében a kísérleti és a kontroll csoport tagjai között, amennyiben a fejlődést az előzetes tudáshoz igazítjuk?

28. Milyen képességszinten lévő HH vagy HHH státuszú diákok fejlődését támogatja leginkább a fejlesztőprogram?

29. A hátrányos helyzet megléte, illetve nem megléte mennyiben befolyásolja a teljesítményt a kísérleti, illetve a kontroll csoportban?

3.3 Hipotézisek

A hipotéziseket a kutatási kérdésekkel összhangban, a nemzetközi és hazai szakirodalom alapján fogalmazzuk meg és rendszerezzük.

I. A mérőeszköz első verziójának viselkedésére vonatkozó hipotézisek

H₁: A mérőeszköz mind a teljes teszt vonatkozásában, mind az egyes altesztjeiben megfelelően működik a teljes minta, illetve az egyes évfolyamok esetén is.

H₂: A teszten belül az egyes altesztek – szorzás, osztás, szöveges feladatok – között legalább közepes erősségű korrelációk állnak fenn. A szorzás és az osztás egymás inverz műveleteinek tekinthetők (Igács et al., 2008). A szöveges feladatok is mind multiplikatív helyzetek, azaz szorzásra, egyenlő részekre osztásra, vagy bennfoglalásra vezető problémák (Nunes & Csapó, 2011). Az egyes altesztek közös vonása tehát, hogy multiplikatív gondolkodást igénylő feladatokat tartalmaznak.

H₃: A teljesítményteszt jól illeszkedik a harmadik és negyedik évfolyamos diákok tudás- és képességszintjéhez. A teljesítményteszt itemeinek készítésekor az érvényben lévő NAT (2012) alapján készült matematika kerettanterv (2012) által a témakör második évfolyamban történő megismerésénél előírt tudáselemeket és készségeket tartottuk szem előtt.

H₄: A 32 itemből álló teljesítményteszt megoldható a harmadik és negyedik évfolyamos diákok által a rendelkezésre álló időkereten belül.

H_{4a}: Nincs szignifikáns különbség a teszt megoldásához szükséges idő tekintetében a harmadik és a negyedik évfolyamos diákok között. A Nemzeti Alaptanterv (2012, 2020) egységes,

összefüggő szakaszként tekint a 3-4. évfolyamra, amelyen a második évfolyamon tanult szorzás és osztás műveletének bővülő számkörben történő értelmezése történik. Mivel a teszt feladatai a második évfolyamon tanultakat mérik, így azok megértésére, és megoldására fordított időben nem feltételezhető szignifikáns különbség a két évfolyam között.

H_{4b}: A negyedik évfolyamos diákok teszten elért eredményei szignifikánsan jobbak a harmadik évfolyamos diákok eredményeinél. A kutatás idején érvényben lévő Nemzeti Alaptantervhez illeszkedő kerettanterv az általános iskolák 1-4. évfolyama számára (2012) a második évfolyam követelményeként írja elő a szorzó- és bennfoglaló táblák megismerését. A műveletvégzés elmélyítése és gyakorlása a harmadik évfolyamon az 1000-es számkörben folytatódik. A negyedik évfolyamos diákok tehát már nagyobb óraszámban találkoztak a teljesítménytesztben szereplő tartalommal, és a számkört illetően is bővebb tananyaggal ismerkedtek meg. Ennek alapján fogalmazzuk meg azt a hipotézist, hogy a teszten elért eredményeik szignifikánsan jobbak lesznek harmadikos társaik eredményeinél.

H₅: A teszt megoldásához alkalmazott eszköz nem befolyásolja a teszt megoldásának sikerességét. A teszt megoldása során a tanulóknak olyan interakciókat kell végrehajtani a rendelkezésre álló eszközzel, amelyekre ez a korosztály kutatási eredmények alapján már képes, vagy rövid gyakorlás után képessé válik (Donker & Reitsma, 2007a, 2007b). A megkívánt interakciók elsajátítását vagy megerősítését a teszt megoldását megelőző géphasználati teszt és gyakorlási lehetőség biztosítja.

II. A pilot és nagymintás kutatásban alkalmazott mérőeszközre vonatkozó hipotézisek

H₆: A mérőeszköz mind a teljes teszt vonatkozásában, mind az egyes altesztjeiben megfelelően működik a teljes minta, illetve az egyes évfolyamok esetén is.

H₇: A teszt konstruktumvaliditása megfelelő. A mérőeszköz szerkezetét tekintve az itemek három, egymástól elkülönülő, a szorzást, az osztást és a szöveges feladatokat mérő altesztbe rendezhetők. A szorzás és az osztás a multiplikatív gondolkodásra épül (Park & Nunes, 2001), ám egymás inverz műveletei (Igács et al., 2008), így az inverzitás mentén jól elkülöníthető a szorzás, illetve az osztás műveletének ismeretét mérő alteszt. A szöveges feladatok alteszt az előző kettővel szemben, amelyek a procedurális tudást is mérik, csak a konceptuális tudást méri (Connell et al., 1988), ezáltal egy önálló konstruktumot alkot.

H₈: A teljesítményteszt jól illeszkedik a harmadik és negyedik évfolyamos diákok tudás- és képességszintjéhez (110/2012. (VI. 4.) Korm. rendelet).

H₉: A negyedik évfolyamos diákok teszten elért eredményei szignifikánsan jobbak a harmadik évfolyamos diákok eredményeinél (Kerettanterv az általános iskola 1-4. évfolyamára, 2012).

H₁₀: A teljesítményteszt megoldásához alkalmazott eszköz nem befolyásolja a teszt megoldásának sikerességét. A mérőeszköz eredeti verziója olyan számítógép-alapú tevékenységeket tartalmazott, amelyekre ez a korosztály már képes, vagy gyakorlással képessé válik. (Donker & Reitsma, 2007a, 2007b). A mérőeszközbe illesztett új itemek is ilyen interakciókat várnak el a gyerekektől.

III. A fejlesztőprogram pilot vizsgálatára vonatkozó hipotézisek

H₁₁: A fejlesztés hatására a kísérleti csoport teljesítménye mindkét évfolyamon szignifikánsan javul a kontroll csoporthoz képest. Kutatási adatok alapján feltételezzük, hogy a célzott intervenció rövid távon már kimutatható fejlesztő hatással bír ebben a korosztályban (pl. Harskamp, 2014).

H₁₂: A fejlesztőprogram leginkább az alacsony képességszinten lévő diákok fejlődését segíti. Az eddigi kutatásokkal összhangban azt feltételezzük, hogy a diákok e csoportja a legszenzitívabb az alacsony képességszint miatt kialakult teljesítménybeli elmaradásra adott adekvát választ – megfelelő fejlesztést – biztosító programokra (Ginsburg & Pappas, 2004; Outhwaite et al., 2017).

H₁₃: A fejlesztőprogram hatására következik be szignifikáns javulás mindhárom alteszten mért területen – szorzás, osztás, szöveges feladat – a kísérleti csoportban. A NAT (2012) követelményei alapján e korosztálytól mérhető fejlődés várható e területeken az iskolai oktatás hatására. Ugyanakkor a célzott megsegítés a fejlődés mértékét szignifikánsan javíthatja, amennyiben azt az iskolai oktatás hatására létrejövő fejlődés mértékével vetjük össze (pl. Rutherford et al., 2010; Schoppek & Tulis, 2010).

H₁₄: A fejlesztőprogram hatékonyságának mértékében nincsen különbség a fiúk és a lányok között. Habár a matematikai teljesítményt számos tényező befolyásolja – pl. a nemi sztereotípiák (Steffens & Jelenec, 2011), vagy a matematikai szorongás, amely a lányok teljesítményére van erősebb negatív hatással (Yu et al., 2024), a lányok és fiúk közötti teljesítménykülönbségről ellentmondó kutatási adatokat találunk (Kimball, 1989). Feltételezésünk szerint egy kizárólag megerősítő és támogató üzeneteket közvetítő, a fiúk és a lányok számára is pontosan ugyanolyan tanulási környezetet biztosító digitális fejlesztőprogram ugyanolyan hatékonysággal képes fejleszteni mindkét nembe tartozó kisiskolások matematikai képességeit és tudását.

H₁₅: Az egyes fejlesztő egységek megoldása egyenletes időbeli terhelést jelent a diákok számára, azaz nincsenek kirívóan rövid, vagy kirívóan hosszú időt igénybe vevő egységek.

IV. A mérőeszköz nagymintás kutatásban való alkalmazására vonatkozó hipotézisek

- H₁₆: A mérőeszköz megbízhatóan működik az előteszt, az utóteszt és a késleltetett utóteszt megoldása során is.
- H₁₇: A teljesítményteszt jól illeszkedik a harmadik és negyedik évfolyamos diákok tudás- és képességszintjéhez (110/2012. (VI. 4.) Korm. rendelet).
- H₁₈: A negyedik évfolyamos diákok teszten elért eredményei szignifikánsan jobbak a harmadik évfolyamos diákok eredményeinél, ezáltal a teszt jól elkülöníti a két csoportot (Kerettanterv az általános iskola 1-4. évfolyamára, 2012).

V. A fejlesztőprogram nagymintás vizsgálatára vonatkozó hipotézisek

- H₁₉: A fejlesztés hatására rövid távon, az utóteszt idejére a kísérleti csoport teljesítménye szignifikánsan javul a kontroll csoporthoz képest (pl. Harskamp, 2014). A késleltetett utóteszt idejére a fejlődés ütemében mutatott előny nem jelentkezik a kísérleti csoport esetében (Stern et al., 2020).
- H₂₀: A fejlesztés szignifikánsan képes javítani mind a harmadikos, mind a negyedikes diákok matematikai teljesítményét az utóteszt idejére. További fejlesztés nélkül a fejlődés ütemét mindkét évfolyam diákjai megtartják, vagy növelik. A negyedikes diákok teljesítményének fejlődése erőteljesebb, mint a harmadik osztályosoké. A negyedikes diákok tanulmányaikban előrébb tartanak, mint a harmadikosok, a szorzás és osztás témakörével már többször találkoztak (Kerettanterv az általános iskola 1-4. évfolyamára, 2012). Ehhez hozzájárul, hogy a lemaradások pótlása felgyorsíthatja a fejlődést (Capone et al., 2021).
- H₂₁: A tanulók teljesítményének eloszlásában mind a kísérleti, mind a kontroll csoport esetében a jobb teljesítményértékek felé történő elmozdulást figyelhetünk meg, a kísérleti csoport esetében ez az elmozdulás nagyobb mértékű. Mivel az iskolai oktatásnak a vizsgált évfolyamokon része a fejlesztőprogram tartalmának bővülő számkörben történő megismerése és alkalmazása (Kerettanterv az általános iskola 1-4. évfolyamára, 2012), így mindkét csoport tagjai fejlődnek. Ugyanakkor a célzott fejlesztésre is fogékony ez a korosztály (Aunio et al., 2021), így a kísérleti csoport tagjainak eredménye nemcsak az átlagpontszám növekedésében, hanem a teljesítmény eloszlásának erőteljesebb jobbra tolódásával is járhat (Vidákovich & Csapó, 1998).
- H₂₂: A fejlesztőprogram hatására a szorzás, az osztás és a szöveges feladatok területén is szignifikáns javulás várható a kísérleti csoportban, mivel az iskolai tevékenységek fejlesztő hatásán túl (110/2012. (VI. 4.) Korm. rendelet) célzott megsegítésben is részesülnek (Harskamp, 2014). Ugyanakkor a legerőteljesebb fejlődés a szorzás területén, ezt követően az osztás területén lesz. A legkisebb fejlődés a szöveges feladatok alteszten várható. Az

osztás megértésének és elvégzésének sikerességében szerepet játszik a szorzás megértése és a szorzási műveletek elvégzésében szerzett jártasság (LeFevre & Morris, 1999). A szöveges feladatok megértésének fejlesztése a matematikaoktatás egyik komoly kihívása (Csíkos, 2003; Hegarty et al., 1995).

H₂₃: A fejlesztőprogram leginkább az alacsony képességszinten lévő diákok fejlődését segíti (Ginsburg & Pappas, 2004; Outhwaite et al., 2017).

H₂₄: A kutatás során igazolt fejlesztőhatás megerősítést nyer a látens szintű elemzések során a teljes teszt és az altesztek esetében is.

VI. A mérőeszköz alacsony szocioökonómiai státuszú diákok körében végzett vizsgálataira vonatkozó hipotézisek

H₂₅: A mérőeszköz megbízhatóan működik az alacsony szocioökonómiai státuszú diákok körében.

H₂₆: Az alacsony szocioökonómiai státuszú diákok jelentős részének a teszt nehéznek bizonyul. Ezek a gyerekek a szocioökonómiai státusz okozta hátrányokat már az óvodáztatás idején, majd később az iskolai évek alatt is elszenvedik, a tanulmányi előmenetelben megmutatkozó különbség közöttük és társaik között egyre nő (pl. Duncan & Magnuson, 2015; Nunes et al., 1993; Dowker, 2005; OECD, 2020). Amennyiben a második évfolyamon az előteszt által mért matematikai tartalom elsajátításában lemaradnak, úgy a teszt nehéznek bizonyul nekik harmadik és negyedik évfolyamon is.

VII. A fejlesztőprogram hatásának vizsgálatára vonatkozó hipotézisek HH vagy HHH státusszal rendelkező és nem rendelkező státuszú diákok körében

H₂₇: A kísérleti csoport tagjai szignifikánsan jobb teljesítményt érnek el a késleltetett utóteszten, mint fejlesztésben nem részesült társaik. A szocioökonómiai státusz okozta hátrányok nem feltétlenül járnak együtt képességbeli hátrányokkal is (Resnick et al., 1999; Ginsburg & Pappas, 2004), így ezek a gyerekek jól reagálnak a célzott fejlesztésre (Outhwaite et al., 2017).

H₂₈: A program leginkább a gyengébb képességszinten lévő diákok fejlődését támogatja.

H₂₉: A hátrányos helyzet meglétének befolyása a teljesítményre csökken a fejlesztés hatására, míg a fejlesztésben nem részesülő HH vagy HHH státuszú diákok lemaradása tovább nő (pl. Campione et al., 1988; Sylva et al., 2010).

4 Egy szorzás és osztás koncepciójának megértését támogató matematikai fejlesztőprogram bemutatása

A matematikai fejlesztőprogram tartalmi és módszertani kereteinek alapját a szorzás és osztás oktatásáról és elsajátításáról szóló szakirodalom, a kutatás idején érvényben lévő Nemzeti Alaptanterv (2012), továbbá a varga tamási hagyományokra építő matematikatankönyv-család (C. Neményi et al., 2020) adták. A fejlesztőprogram didaktikai alapelveinek kidolgozása során több megközelítést is alkalmaztunk, figyelembe véve az online tér nyújtotta lehetőségeket. Jelen fejezetben először a kereteket tárgyaljuk, ezt követik a didaktikai megfontolásoknak, majd az online térben történő ismeretszerzés síkjainak bemutatása. A fejezetet a fejlesztőprogram tartalmának, továbbá a tartalmi, módszertani keretek és a didaktikai megfontolások figyelembevételével létrehozott felépítésének részletes bemutatása zárja.

4.1 A kutatás során alkalmazott matematikai fejlesztőprogram tartalmi és módszertani keretei

4.1.1 A matematika fejlesztőprogram tartalmi keretei

A matematikai program fejlesztése 2020 tavaszán kezdődött, a pilot mérést a 2020/2021-es tanév őszére terveztük. Így a matematikai fejlesztőprogram céljának és tartalmának meghatározásához azt vettük figyelembe, hogy azok a 2020/2021-es tanévben már harmadik és negyedik évfolyamos gyerekek, akik a célcsoportot alkotják, a 2019/2020-as tanévben második, illetve harmadik osztályos tanulók voltak. Elemeztük a második és harmadik évfolyam számára érvényben lévő kerettantervet, továbbá az Oktatási Hivatal által javasolt tanmeneteket, melyeket a tanítók többsége által használt matematikatankönyvhöz (Fülöp et al., 2016) készítették. (A kutatásba bevont iskolák pedagógusait megkérdeztük arról, hogy melyik matematikatankönyvet használják, és egybehangzóan a kutatás elején elemzett kerettantervhez kapcsolódó tankönyvet jelölték meg.). A kutatás kezdetén második, illetve harmadik évfolyamos gyerekek a NAT 2012 és az ahhoz kapcsolódó tartalmi szabályozók követelményei szerint tanultak, így ezt vettük alapul.

Az egyes tantárgyak témaköreit, tartalmát, követelményeit, fejlesztési feladatait és az ezekhez rendelkezésre álló időkeretet a kerettantervek tartalmazzák a Nemzeti Alaptanterv céljaival és feladataival összhangban. Az 1-4. évfolyam számára a matematika kerettanterv mindezeket két évfolyamonkénti bontásban közli. Az 1-2. és a 3-4. évfolyam kerettantervében is kiemelkedő szerepet kap a számelmélet és algebra tematikus egység (3. táblázat). Az 1-2. évfolyamon a tanórák közel 63%-ában, a második évfolyamon 61%-ában e tematikai egység témaköreit tanulják a gyerekek.

3. táblázat. Az alsó tagozatos matematika kerettanterv tematikai egységei és órakerete (OH, 2012 alapján)

Tematikai egység / Fejlesztési cél	1-2. évfolyam	3-4. évfolyam
	Órakeret	
Gondolkodási módszerek, halmazok, matematikai logika, kombinatorika, gráfok	folyamatos	5 óra + folyamatos
Számelmélet, algebra	147	141
Függvények, az analízis elemei	32	32
Geometria	46	47
Statisztika, valószínűség	10	10

A matematika tantárgy témaköreinek épülésében spirális elrendezés figyelhető meg az egyes évfolyamokon. Az alsó tagozaton az első évfolyamon a húszas, második évfolyamon a százas, harmadik évfolyamon az ezres, negyedik évfolyamon a tízezres számkörrel ismerkednek a gyerekek. Az alapszámítások közül az összeadással és a kivonással első osztályban, a szorzással és az osztással második osztályban találkoznak először. A tanmenet spirális felépítésének mentén minden további évfolyamon a számkörbővítést követően az egyes műveletekhez tartozó számolási eljárások megfigyeltetése és gyakorlása is megtörténik a kisebb számkörben tanultak analógiájára.

A 2020 tavaszán történt iskolabezárások a második féléves tananyag javarészt távoktatásban történő elsajátítását eredményezték. A második évfolyamon a legnagyobb hangsúllyal szereplő számelmélet, algebra témakörön belül erre az időszakra esett a szorzással és az osztással való első találkozás, majd pedig a szorzótáblák megismerése és elsajátítása. Harmadik évfolyamon ugyancsak erre az időszakra esett a szóbeli szorzás és osztás 1000-es számkörben, a második évfolyamon a kisegyszeregyben tanult számolási eljárások felhasználásával. Szintén ebben az időszakban ismerkedtek meg a gyerekek a szorzás és az osztás műveleti tulajdonságaival.

Az alapszámítások elsajátítását felölelő tematikus egységek a leghangsúlyosabbak az alsó tagozaton, ezen belül pedig több évfolyamon is a szorzás és osztás témakörének tanulása zajlott távolléti oktatás formájában. Éppen ez a két témakör, a szorzás és az osztás későbbi témakörök (pl. törtek, százalékszámítás, algebra, arányok, lineáris függvények) elsajátításában is kiemelt jelentőséggel bírnak (Nunes & Bryant, 1996). Továbbá az additív gondolkodásról a multiplikatív gondolkodásra való áttérésben, és e két gondolkodásmód szituációhoz illesztett megfelelő alkalmazásában rejlő nehézségek gátjai a további fejlődésnek a matematikatanulás területén (Fernández et al., 2008; Modestou & Gagatsis, 2007). Mindezeket figyelembe véve a fejlesztőprogram tartalmát a szorzás-osztás témakörében jelöltük ki.

4.1.2 A fejlesztőprogram tartalma

A matematikai gondolkodás egyes területei kizárólag matematikai tartalommal fejleszthetők – ilyenek pl. a mennyiségekkel és számokkal kapcsolatos fogalmak és az ezekhez kapcsolódó gondolkodási műveletek, ideértve a multiplikatív gondolkodást is (Nunes & Csapó, 2011). Nunes & Csapó (2011) arra hívja fel a figyelmet, hogy mivel „*kellően fejlett matematikai gondolkodás hiányában nem lehet eredményes a matematikai ismeretek értő elsajátítása*” (p. 53), az iskola első évei pedagógiai gyakorlatának kiemelt fókuszában a matematikai gondolkodás fejlődése kell álljon, mely egy lassú, hosszan tartó folyamat. Kiemelik, hogy „*a matematikai gondolkodás fejlesztése során rendkívül fontos a fejlődési fázisok egymásra épülése*” (p. 53–54).

A szorzás és osztás területén elérendő megbízható tudás alapját a konceptuális és a procedurális tudás együttesen alkotja (Carstensen et al., 2025), utóbbinak a megfelelően kialakult konceptuális tudáson kell nyugodnia. A számolási eljárások értő alkalmazásához műveleti rendszerként kell megérteni és elsajátítani az alpműveleteket. Ugyanakkor az iskolai tanítási gyakorlat sok esetben a procedurális tudásra, azaz a számolási eljárások ismeretére és a műveletek helyes elvégzésének fejlesztésére helyezi a hangsúlyt. Aebli (1958) szokás-cselekvésnek nevezi azt a jelenséget, amikor két szám észlelése kiváltja egy harmadik szám kimondását. Ez a szorzótábla megtanulása esetén azt jelenti, hogy a számkombinációk egymástól elszigetelve vannak jelen az elménkben. A lemaradók fejlesztésének problematikája is abban rejlik, hogy többnyire a rutin eljárások gyakoroltatásában, a számolási algoritmusok bevézésében merül ki, a műveletek tartalmának megértése így a felzárkóztatás során sem kerül előtérbe (Connell et al., 1988; Ökördi & Molnár, 2020; van de Walle et al., 2020). Mivel a matematika tananyag elrendezése spirális felépítésű, a szorzás és osztás témakörben a második osztályban elsajátítandó tudásra építve kell tovább haladnia a tanulónak a harmadik évfolyamon, majd ezt a tudást is alkalmazva kell a negyedik tananyagot a szorzás és osztás témakörében elsajátítani. Ennek alapján a második osztályban már megszerzettnek vélt konceptuális, és az ezen alapuló procedurális tudásra szükség van mind a harmadik, mind a negyedik évfolyamon a további sikeres tudásépítéshez. Amennyiben a fejlődés a második évfolyamon sérül, úgy a továbbiakhoz szükséges alapok is hiányozni fognak. E megfontolások mentén a fejlesztőprogram a hatékony megsegítés érdekében a szorzás és osztás koncepciójának megértését állította a középpontba.

Értelmezésünkben a konceptuális tudás alapja a szorzási és osztási problémák megértése, mely a szorzás esetében az egy a többnek való megfeleltetést (one-to-many correspondence), az osztás esetében pedig a bennfoglalást és az egyenlő részekre osztást jelenti (Park & Nunes, 2001). Azáltal, hogy a fejlesztőprogram megalkotása során az egy a többnek megfeleltetést fogadtuk el a szorzás értelmezéseként, eltértünk az általános iskolai tankönyvek gyakorlatától, melyek a szorzást, mint egyenlő tagú összeadást vezetik be (C. Neményi et al., 2020) Esztergályos & Kóródi, 2013; Fülöp et al., 2015). Ahogy Correa, Bryant és Nunes (1998) rámutat, már Piaget is kísérletében

(1952), amelyben a gyerekeknek minden vázába két-két virágot kellett tenni. a szorzás és osztás alapjának az egy a többnek való megfeleltetést tekintette. Bryant (1997) megjegyzi, hogy habár maga Piaget az additív és multiplikatív szakkifejezéseket nem használja két mennyiség megfeleltetésének leírására, és az egy az egynek megfeleltetésről az aritmetikai szempontból szorzásnak nevezhető esetekre való áttérésként nevezi meg saját kísérleteit, mégis alapvetően járul hozzá az additív és multiplikatív gondolkodás megértéséhez és megkülönböztetéséhez. Additív matematikai probléma például, ha adott két ember életkora, és ezek viszonyát vizsgáljuk az időközben eltelt évek függvényében. Ebben az esetben azt kell figyelembe vegyünk, hogy a két érték között a különbség változatlan, Multiplikatív matematikai probléma például annak kiszámítása, hogy mennyibe kerül egy adott termékből többnek a megvásárlása, ha tudom az adott termék egységárát. Ebben az esetben a két érték közötti változatlan arányt kell felhasználni a válaszadáshoz. Például három termék vásárlása esetén a termék árának a háromszorosát kell kifizetni (Dooren et al., 2010).

Az egy a többnek megfeleltetés megértésén alapul a konceptuális tudás egy további eleme, amit a numerikus megismerésre irányuló kutatások (pl. Delazer et al., 2004; Krajcsi, 2010) önmagában is a konceptuális tudás elégséges definíciójaként fogadnak el. Ez az elem a számokkal végzett aritmetikai műveletek elvégzéséhez szükséges numerikus és aritmetikai szabályok (pl. a kommutativitás elve, a disztributivitás elve) ismeretét és ezek alkalmazását együttesen foglalja magában. Azaz konceptuális tudás, ha tudjuk, hogy $5 \cdot 12 = 60$, akkor számolás nélkül meg tudjuk mondani, hogy $12 \cdot 5 = 60$, mert alkalmazni tudtuk a kommutativitás elvét a probléma megoldásában. Azonban e műveleti tulajdonságok értő alkalmazása a művelet jelentésének megértésén kell alapuljon, amennyiben belátom, hogy az $5 \cdot 12 = 60$ esetében a 12-re mint egységre gondolok, és a műveletet elvégezhetem úgy is, hogy 'ötször veszem a 12-t, mint egységet, vagy pedig a 12-t, mint egységet ötször veszem'. Azonban a kommutativitás elvének megértéséhez azt is be kell lássam, hogy nem ugyanaz a probléma, ha 5 sorban helyezek el soronként 12 csempét, illetve 12 sorban helyezek el soronként 5 csempét, az elhelyezett csempék száma mégis ugyanannyi lesz. A műveleti tulajdonságok megértése, mint a konceptuális tudás része, nehéz feladat, és csak a művelet értelmezésén keresztül jutunk el az értő alkalmazásukig. Ugyanakkor látható az is, hogy a műveletvégzés során alkalmazott aritmetikai szabályok megértése egy időben zajlik magával a procedurális tudással, azaz a műveletvégzéshez szükséges számolási eljárások fejlődésével.

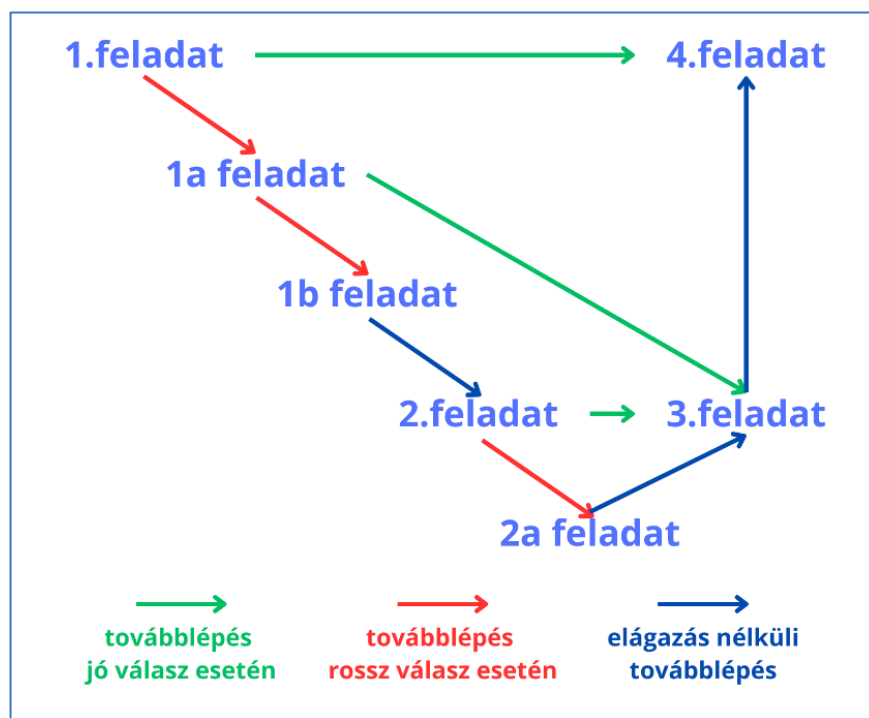
Elméleti keretrendszerünkben a műveletek értelmezését és a műveletek értelmezésén alapuló műveleti tulajdonságok megértését együttesen tekintjük konceptuális tudásnak. A program ennek fejlesztésére irányult úgy, hogy a procedurális tudás fejlesztése önálló célként nem jelent meg, a műveletvégzés gyakoroltatása, a szorzótáblák megtanítása nem képezte a fejlesztés részét. A procedurális tudást minduntalan különböző problémahelyzetekben fejlesztettük, szorosan a konceptuális megértéshez kapcsolva. Azt a döntést, hogy a procedurális tudás fejlesztését, mint

fókuszot kizártuk, a programmal szemben támasztott időbeli követelmények is befolyásolták, melyeket alább részletezünk (l. 7.3. fejezet).

4.2 A fejlesztőprogram didaktikai megfontolásokon nyugvó szerkezete

A fejlesztőprogram a lemaradók, az alulteljesítők, a távolléti oktatásból kimaradt, vagy abban csak korlátozottan részt vett diákok fejlesztését tűzte ki célul, így a módszertani kérdések megfontolásakor is ennek a célcsoportnak kerestünk hatékony didaktikai megközelítést. A célunk a szorzás és osztás konceptuális tudásának újraalapozása, és ezen alapulva a procedurális tudás fejlesztése volt. Ehhez megalkottunk egy 276 feladatból álló feladatfüzért, ahol a feladatok meghatározott sorrendben, logikailag egymásra épülve követték egymást.

Helytelen válasz esetén a diák tanulási útját elágaztattuk, és segítő feladatokat kapott. Sok esetben a segítő feladatokra adott választól függően vagy további ágra vittük, vagy visszacsatlakoztattuk a fő ágra, ahol onnan folytatta a tanulást, ahonnan előzőleg a segítő ágra tereltük (2. ábra). Helytelen válasz esetén a segítő ágon vagy (1) visszaléptettük a tanulási út egy korábbi fázisának megértését segítő feladathoz, vagy (2) az adott probléma megoldásához nyújtottunk további segítséget, vagy (3) a feladatban a matematikai tartalom megértését feltételezhetően akadályozó nyelvi nehézség esetén, annak kiküszöbölését célzó feladatot biztosítottunk. Mind a fő fejlesztési ág, mind a segítő ág feladatainak kidolgozását meghatározott didaktikai megfontolások mentén végeztük.



2. ábra. A fejlesztőprogram elágazásokat tartalmazó szerkezete

4.2.1 A fejlesztőprogram fő ágának feladatai mögött álló didaktikai megfontolások

A 6-10 éves korosztályra jellemző, hogy tárgyi tevékenységekhez kötött, vizuális dominanciára épülő gondolkodásmódja van, amelynek fejlesztése ennek megfelelően tevékenységeken keresztül történik (Kling & Kline, 2025). A cselekvés nemcsak a gondolkodás fejlesztésének, hanem az érdeklődés fenntartásának is eszköze (Aebli, 1958). A 19-20. század fordulójára jellemző cselekvés pedagógiája irányzaton túl a konstruktivista tanulásfelfogásban is központi szerepet kap a gyermeki öntevékenység, a gyermek ezen keresztül konstruálja meg magában a tudást (Nahalka, 2002; Nahalka, 2003; Kim, 2009). Varga (1969) és Dienes (2015) matematikaoktatásról alkotott felfogásában is megjelennek mind a konstruktivista, mind a cselekvés pedagógiájára jellemző elemek, a matematika elsajátításának útját a felfedezettő matematikaoktatásban látják. Dienes (2015) számára a játék a matematikatanulás alapvető formája. Mindezek alátámasztják azt a döntést, hogy a fejlesztőprogram fő ágának didaktikai alapelve a cselekedtető, felfedezettő, a tudás megkonstruálására alkalmas tevékenységek biztosítása lett. A tevékenységeket sok esetben a gondolatmenetet tudatosító kérdések követték (3. ábra), mely a konstruktivista felfogásban is megjelenő metakognitív folyamatok előkészítését, fejlesztését szolgálta (Connell et al., 1988; Csíkos, 2010, 2016).

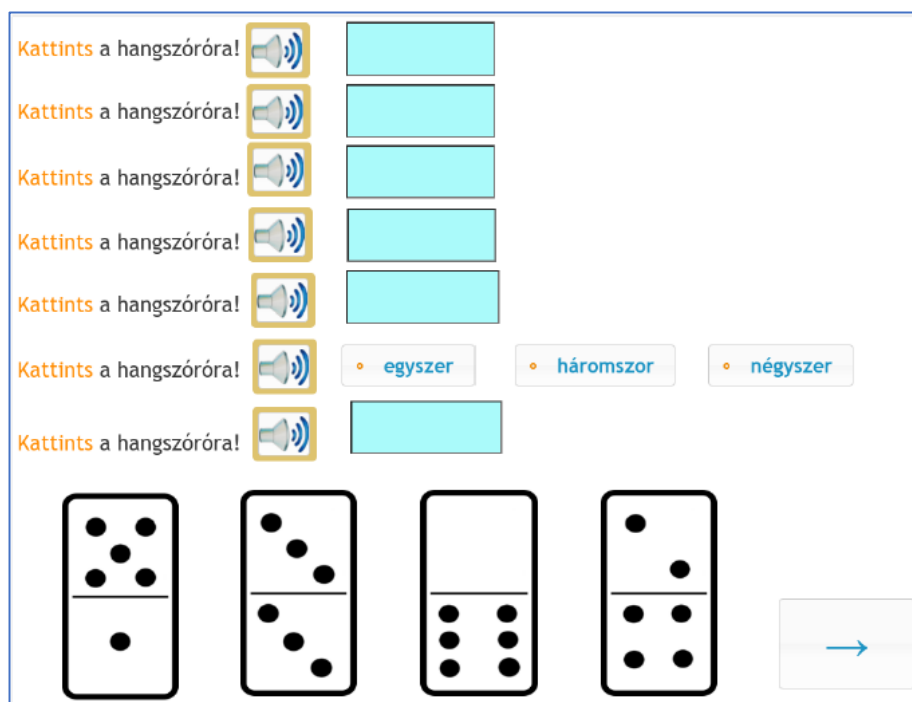


3. ábra. Példafeladat a programból: a gondolatmenetet tudatosító kérdések és magyarázatok
(Hangfájlok leirata: 1. hangfájl: Hány gombja van egy hóembernek?;
2. hangfájl: Hány gombja van összesen a hóembereknek?)

Tanulási nehézséggel küzdő gyerekeknél sok esetben megfigyelhető, hogy újra és újra vissza kell térniük a cselekvéshez ahhoz, hogy a műveletek belsővé válásának folyamata végbe menjen (Kim, 2009). Ugyanakkor vannak olyan matematikatanulási nehézséggel küzdő gyerekek, akiknek az absztrakciós folyamatokban vannak számottevő elakadásaik. Számukra a felfedezettő matematikaoktatás nem jelenti a tudás megszerzéséhez elégséges keretet (Majoros, 2010). Éppen ezért a felfedezettés mellett a segítő ágak megalkotásakor további módszertani megközelítéseket is alkalmaztunk.

4.2.2 A segítő ágak feladatai mögött álló didaktikai megfontolások

A felfedezettés logikáját megőrizve, nem azonnal mutattuk meg a megoldás menetét. A tanuló először olyan segítséget kapott, ahol lépésekre bontva, kérdések segítségével kellett végigjárnia a probléma megoldásának útját (4. ábra). További sikertelenség esetén azonban az explicit instrukciós modell online környezethez igazított lépesein vezettük keresztül a tanulót.



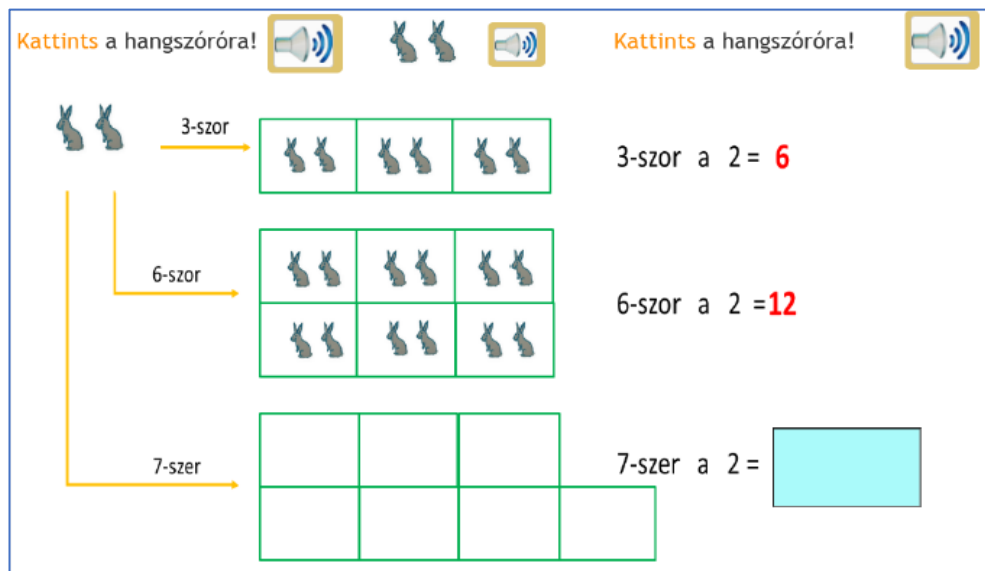
4. ábra. Lépésről-lépésre nyújtott segítség a fejlesztőprogramban

(Hangfájlok leírata: 1. hangfájl: Összesen hány dominóra rajzoltam pöttyöt? 2. hangfájl: Hány pöttyöt rajzoltam az első dominóra? 3. hangfájl: Hány pöttyöt rajzoltam a második dominóra? 4. hangfájl: Hány pöttyöt rajzoltam a harmadik dominóra? 5. hangfájl: Hány pöttyöt rajzoltam a negyedik dominóra? 6. hangfájl: Összesen hányszor rajzoltam hat pöttyöt? 7. hangfájl: Összesen, az összes dominóra együtt hány pöttyöt rajzoltam?)

Az explicit instrukciós modell, a vele nagyfokú hasonlóságot mutató, elődjének, vagy csupán eltérő elnevezésének hívott direkt instrukciós modellel együtt adatokkal alátámasztott módszer a nyelvi, szövegértési és matematikai alapkészségek fejlesztésére, melyet hátrányos helyzetű, illetve matematikatanulási nehézséggel küzdő gyermekek oktatásában is alkalmaztak (pl. Doabler & Fien, 2013; Kroesbergen & Van Luit, 2003; Long et al., 2021; Spooner et al., 2019). A cél meghatározása (introduction) után a tanár modellezi egy-két hasonló probléma megoldását, megoldási útját hangos gondolkodással kíséri (modeling). Ezt követően a diákok a tanárral közösen oldanak meg további egy-két problémát (guided practice), majd a diákok önálló problémamegoldása következik (independent practice). A folyamatot az összefoglalás és a visszajelzés zárja (review and feedback).

Az általunk fejlesztett programban a cél meghatározása már korábban megtörtént, így ezt a fázist kihagytuk, és első lépésként a diák számára modelleztük a megoldást (modeling), amelynek során megfigyelhette a tanári megoldást animált feladatmegoldás, vagy videó formájában. Ezt

követően neki is végre kellett hajtani, amit a videóban, vagy a képen látott (guided practice) (5. ábra). és ennek mintájára hasonló lépéseket kellett önállóan megtennie, illetve hasonló feladatot kellett megoldania (independent practice). Végezetül a tevékenységet és a hozzá tartozó gondolatmenetet tudatosító megerősítést kapott, vagy ezekre vonatkozó kérdésekre válaszolt. A teljes folyamat végén megerősítő, vagy bátorító visszajelzést kapott, mielőtt többnyire egy vagy két probléma azonos szerkezetű végigjárása után visszatért a fő ágra, ahol ismét a felfedeztető szemlélettel megírt feladattal találkozott. Későbbi sikertelenség esetén ismét az adott feladathoz tartozó segítő útvonalat járta be (ld. korábban 2. ábra).



5. ábra. A tanári modellezés mintájára végzendő tanulói tevékenység (guided practice)
(Hangfájlok leírata: 1. hangfájl: Töltsd ki a kereteket a nyilak szerint! Használd a húzható képet!
2. hangfájl: Ezek a nyuszik húzhatók.
3. hangfájl: Csináljuk együtt. Elkezdtem kitölteni a kereteket. Nézd meg, hogy csináltam.)

4.3 Az ismeretszerzés síkjai az online térben

Bruner (1966) kifejti, hogy a fogalmi fejlődéshez az ismeretszerzés három, egymásra épülő reprezentációs szintjét kell végigjárnia a gyermeknek. Bruner ezeket a szinteket a cselekvéses (enaktív), képi (ikonikus) és szimbolikus reprezentáció síkjainak nevezi el. A hatékony matematikatanítás során ugyanezeket a szinteket kell végigjárnia a tanulónak (pl. Ambrus, 1995; Flores et al., 2014; Mancl et al., 2012; Strickland & Maccini, 2013). A matematikadidaktikában érvényes elnevezés szerint a cselekvéses reprezentáció a materiális síknak felel meg, amely síkon az ismeretszerzés konkrét, tárgyakkal végzett cselekvéseken keresztül megy végbe. Az alsó tagozatos matematikaoktatásban ezen a síkon eleinte valóságos, a kisgyermek életéből ismert tárgyakkal végzünk manipulációt, majd ezeket a tárgyi szinten is az absztrakció irányába haladás

érdekében sematikus tárgyakra – pl. korongok, színes rudak – cseréljük. A képi, avagy ikonikus síkon az ismeretszerzés képeken és elképzelt szituációkon keresztül történik. A valóságos tárgyakat felváltják a rajzok, a színes rudak helyett bevezetjük azok képi megjelenítését, majd a szöveges feladatok megoldása során a szakaszos ábrázolást, a halmazokat kijelölő szalagok, vagy karikák helyett a Venn diagramot alkalmazzuk stb. Ezen a síkon is megvalósul a gyermek által ismert rajzok (pl. állatok, tárgyak) felől az absztrakt irányába történő elmozdulás (pl. korongképek, szakaszok). A szimbolikus síkon már a matematikai szimbólumok és a nyelv segítik az ismeretszerzés folyamatát. A szimbólumok (pl. számok) elszakadnak a valóságos tárgytól, és önálló jelentéssel bírnak.

A matematikatanulási nehézséggel küzdő tanulók számára e három sík bejárása elengedhetetlen. A materiális és a képi sík a konceptuális tudásra fókuszál, ám ezen keresztül hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló az absztrakt síkon a procedurális tudást képes legyen elsajátítani. Ugyanakkor figyelembe kell venni, hogy sok esetben a tanulási nehézséggel küzdő gyerekeknek éppen az absztrakciós képességekkel van problémájuk. Éppen ezért ezeknek a gyerekeknek segítséget jelent, ha már a konkrét és a képi síkon is a tevékenységgel párhuzamosan megjelenítjük azok matematikai nyelven leírt reprezentációját (pl. Agrawal & Morin, 2016; Flores, 2010; Miller et al., 2011; Strickland & Maccini, 2013).

A digitális technológia oktatási célú felhasználása magával hozta annak kérdését, hogy e három reprezentációs sík közül az első, a materiális sík, megvalósulhat-e a virtuális térben. A 2000-es évek elején fogalmazódnak meg a virtuális manipulatív eszközök ismérvei, melyek elkülönítik őket a statikus virtuális reprezentációtól. Ezek dinamikus vizuális reprezentációk, amelyeket forgatni, mozgatni lehet. A konkrét manipulatív eszközök virtuális manipulatív eszközökkel való kiváltása az alsó tagozatos korosztályban eltérő eredményeket hozott. A szingapúri matematikaoktatásban a konkrét eszközökkel párhuzamos használata eredményesnek bizonyult. Más kutatásokban inkább azok a diákok használták sikerrel, akiknek az adott témakörben már volt megbízható tudása. A kutatások többsége kiemeli, hogy a tanárok segítő jelenléte szerepet játszott a virtuális manipulatív eszközökkel való tanulás sikerességében. Azt is fontos azonban kiemelni, hogy ezek a kutatások inkább egy-egy applikáció alkalmazhatóságát kutatták (Bouck & Long, 2023; Lee & Tan, 2014; Litster et al., 2019; Moyer-Packenham et al., 2002).

Kutatásunkban a cél az volt, hogy a korosztálynak megfelelő, a kognitív fejlődést támogató és pedagógiai szempontból is releváns programot hozzunk létre, amelynek a tanuló igényeihez kell igazodnia (Csapó & Molnár, 2019; Hanson & Carlson, 2005). Ebben a keretben egyértelmű volt az ismeretszerzés síkjainak megőrzése, és mivel digitális fejlesztőprogramot hoztunk létre, a konkrét eszközöket virtuális manipulatív eszközökre váltottuk. A rendelkezésre álló kutatási adatok alapján azonban ezek használatát megtámogattuk. Egyrészt a program önálló használatra készült, tehát a pedagógus segítségére nem támaszkodhattunk, másrészt a szorzás-osztás témakörének megértését

célozta, azaz nem alapozhatott a diákok már meglévő ismeretére ebben a témakörben. Technikai segítségként a mozgatható elemekhez hangfájlt rendeltünk, amely felhívta a tanuló figyelmét, hogy az adott elem mozgatható, illetve arra is, hogy egyszer, vagy többször lehet mozgatni. Módszertani segítségként – elakadás esetére – részletes instrukciót tartalmazó hangfájllal, illetve rövid videóval segítettük a tanulókat.

4.4 A fejlesztőprogram egységeinek tartalma és felépítése

A fejlesztőprogram kidolgozásának idején a hivatalos tankönyvjegyzékben szereplő második évfolyamos matematikatan könyvek a szorzás tanítása során két eltérő szemléletet követtek. Egy kivételével a használatra engedélyezett tankönyvek a szorzás tényezőit a szorzó-szorlandó sorrendben tanították (Esztergályos & Kóródi, 2013; Fülöp et al., 2015). Ebben az időszakban szintén a jegyzékben szerepelt C. Neményi Eszter és Sz. Oravecz Márta szerzőpáros által jegyzett matematikatan könyv (1994), amely a szorzandó-szorzó sorrendet tanította. Ezt a tankönyvet a tanítók úgy használhatták, ha az OH valamely másik tankönyvével együtt szereztették be a tanulókkal, amely tankönyv ott kellett szerepeljen a tanuló órai felszerelésében. Szakmai megfontolásaink alapján a szorzandó-szorzó sorrend a matematikát nehezen tanulók számára előnyösebb, mint a szorzó-szorlandó sorrend (C. Neményi, 2011, 2012). Amennyiben a szorzandó az első tag, a tanuló annak tartalmát (pl. kisautó, kavics) könnyebben képes gondolatban átfogni, és a munkamemóriájában megtartani ahhoz, hogy a szorzóval megsorozza. Ugyanakkor amennyiben a szorzó az első tag, a diáknak egy absztrakt fogalmat, egy számot kell megjegyeznie, és ezzel kell szoroznia a képi síkon könnyebben feldolgozható szorzandót (Pintér, 2013). A tanítók nagy része a szorzó-szorlandó sorrendet tanította a forgalomban lévő tankönyveknek megfelelően, de nem zárhattuk ki, hogy egyes tanítók a C. Neményi-Oravecz-féle tankönyvet, vagy azt is használják. E megfontolás alapján a fejlesztőprogram minden olyan fejlesztő egységét, amelyben a szorzás lejegyzése szövegesen, vagy a matematika nyelvén megjelenik, megkettőztünk. Az egyik fejlesztő egység következetesen a szorzó-szorlandó sorrendet alkalmazta, a másik, a feladatok tartalmában és grafikájában pontosan megegyező egység pedig a szorzandó-szorzó sorrendet. Így állítottunk össze összesen 23 fejlesztő egységet. Az első egység mindenki számára azonos volt, mivel ebben még nem szerepelt a szorzás lejegyzése. A második egységtől kezdve mindegyiket dupláztuk a szorzás lejegyzésének sorrendje alapján. Így egy 12, egyenként 15-20 percre tervezett fejlesztő egységből álló fejlesztőprogramot alkottunk (1. és 2. melléklet). Mivel a cél a szorzás és osztás koncepciójának újratanítása volt, tartalmilag a fejlesztés lassan haladt. A cél az volt, hogy e tizenkét alkalomnak a végére a téma nehézsége és a rendelkezésre álló időkereten túlmutató volta miatt a tanulók a műveletek koncepciójának és a műveletek közötti kapcsolatnak a megértéséig jussanak el.

5 A matematikai fejlesztőprogram hatékonyságvizsgálatához készült mérőeszköz

5.1 A minta bemutatása

A mérőeszköz viselkedésének teszteléséhez harmadik és negyedik évfolyamos diákokból álló célcsoportot kerestünk, mivel a fejlesztőprogramba bevonni tervezett diákok is ezekből az évfolyamokból kerültek ki. Ennek alapján a mérőeszköz feladatait összesen 204 diák oldotta meg, akik közül 138 harmadik, 67 pedig negyedik évfolyamos diák volt. A diákok átlagéletkora a harmadik évfolyamon 9 év 4 hónap volt (szórás=0,50), a negyedik évfolyamon 10 év 2 hónap (szórás=0,44) volt. A mintavétel során – a reprezentativitás igénye nélkül – arra törekedtünk, hogy a tesztet megoldó tanulók az ország több területéről kerüljenek ki. Ezáltal mind a környezet, mind a társadalmi státusz, mind az iskola tárgyi és személyi ellátottsága szempontjából a gyerekek szélesebb rétegének teljesítményén keresztül szándékoztunk a teszt viselkedését vizsgálni. A minta területi eloszlása szerint 20 fő észak-magyarországi, 30 fő észak-alföldi, 73 fő dél-alföldi, 70 fő közép-magyarországi, 12 fő pedig dél-dunántúli iskolába járt.

5.2 A mérőeszköz bemutatása

A mérőeszköz első öt mérő, illetve fejlesztő feladata a diákok egér- és billentyűzethasználati képességei feltérképezésére és fejlesztésére szolgált, azaz azon műveletek (pl. húzd-és-vond, kattintás, gépelés) gyakorlására, amelyekre a diákoknak szükségük lesz az eDia felületén kiköszvetített számítógép-alapú matematika feladatok megoldásának megadásához. Az öt feladat közül egy a kattintással történő színezést, egy a legördülő mezőből való választást (kattintás), egy a szövegmezőbe írandó választ (kattintás és gépelés), kettő pedig a 'drag and drop' típusú instrukciók végrehajtását vizsgálta. Ezek közül a matematikai fejlesztőprogram hatékonyságát vizsgáló tesztben a legördülő menüből való választás, a szövegmezőbe írandó válasz és a drag and drop típusú instrukciók szerepeltek.

A matematikai fejlesztőprogram hatékonyságának vizsgálatához egy 30 itemből álló mérőeszközt állítottunk össze, melynek egyes feladatait az eDia-rendszer tanári teszt moduljából válogattuk, illetve a válogatást követően egyes feladatokat módosítottunk, más feladatait pedig magunk hoztunk létre (4. táblázat). Mivel a fejlesztőprogram a szorzás és osztás témakörében a második évfolyamon elsajátítandó tartalmat céloz meg, így a tesztben is olyan feladatokat szerepeltettünk, amelyek megfelelők mind tartalmukat, mind megjelenésüket tekintve az érintett évfolyamos diákoknak. A tesztet három altesztre bontottuk, a szorzás, az osztás és a szöveges feladatok altesztekre.

4. táblázat. A mérőeszköz szerkezeti felépítése

Itemszám / Teszt elnevezése	Teljes itemszám	A teljes itemszámból		
		konceptuális tudást mérő	procedurális tudást mérő	koncept. és proced tudást is mérő
Szorzás	14	4	4	6
Osztás	8	-	-	8
Szöveges	8	8	-	-
Teljes teszt	30	12	4	14

A szorzás és az osztás altesztekben a második évfolyam követelményeivel összhangban számolási műveletek eredményének megadását csak a kisegyszeregy eseteiből kérdeztünk. Ezekben az altesztekben a feladatok vagy csak a procedurális tudást, vagy a konceptuális és procedurális tudást egyaránt mérő itemekből álltak. A kizárólag procedurális tudás mérésére szolgáló feladat kiválasztásakor szem előtt tartottuk azt a két megközelítést, hogy a korábban (4.1.2. fejezet) tárgyaltaknak megfelelően az iskolai gyakorlatban a szorzást, mint az egyenlő tagú összeadást tanítják, a matematikai fejlesztőprogram összeállításakor azonban a szakirodalom alapján az összeadásra nem értelmezésként, hanem érvényes számolási eljárásként tekintünk (6. ábra). A procedurális és konceptuális tudást is vizsgáló feladatok esetén a diákok rövid, egylépéses szöveges feladatokat oldottak meg (7. ábra).

Babócaék osztálya vonatos családi kirándulást szervezett.

A kérdések után a legördülő listából kattints a helyes válaszra!

a) A mozdonyhoz 6 kocsi kapcsolódott és minden kocsiban négyen ültek.
Hányan kirándultak összesen?

b) Utazás közben 19 fenyőfát és 3-szor annyi nyárfát láttak.
Hány nyárfát láttak útközben?

c) Utazás közben 2 hídon keltek át. Az egyik patak 4 méter széles volt, a másik 12 méter széles.
Hányszor szélesebb volt a másik patak, mint az első?

d) A kiránduláson a gyerekek elfogyasztottak 16 szendvicset, a felnőttek kétszer annyit.
Hány szendvicset fogyasztottak el a felnőttek?

[Vissza](#) [Tovább](#)



6. ábra. Példa a procedurális tudás mérésére szolgáló feladatra a szorzás altesztből

A színes téglalapokba – valamilyen szabály alapján – számokat írtunk. 

Írd be a **piros keretes** téglalapokba a hiányzó számokat a felismert szabály alapján!

1	1	1	1	1	1	1	1	1	9
2	2	2	2	2	2	2	2		16
3	3	3	3	3	3	3			21
4	4	4	4	4	4				24
5	5	5	5	5					25
6	6	6	6						
									9

 Vissza  Tovább

7. ábra. Példa a konceptuális és procedurális tudás mérésére szolgáló feladatra a szorzás altesztből

A szöveges feladatok altesztbe csak konceptuális tudást mérő itemek kerültek. Ezek célja a szorzás, illetve az osztás koncepciója megértésének feltérképezése volt. Műveletvégzésre vonatkozó instrukciót ezek a feladatok nem tartalmaztak, több esetben azonban a kisegyszeregy eseteinél nagyobb számkörben mozogtak, annak érdekében, hogy egy helyesnek vélt művelet elvégzése helyett a diák kifejezetten a feladat megoldásához megfelelőnek tartott számolási eljárás kiválasztására koncentráljon (8. ábra).

Egy tepiben egyszerre 24 kekszet lehet sütni. Egy cukrász 12 tepsit tölt meg kekszekkel. **Hány kekszet** süt a cukrász?

Melyik számolás helyes az alábbiak közül? **Több helyes megoldás is lehet!** 

Minden számolás után válaszd ki a megfelelőt a "helyes", "nem helyes" lehetőségek közül!

24 : 12 Válassz!	24 - 12 Válassz!
24 + 24 Válassz!	24 • 12 Válassz!
12 • 24 Válassz!	24 + 12 Válassz!



 **Vissza**
Tovább 

8. ábra. Példa a konceptuális tudás mérésére szolgáló feladatra a szöveges feladat altesztből

5.3 Eljárások, adatelemzés

5.3.1 Eljárások, az adatfelvétel körülményei

A fejlődés monitorozására szolgáló online adatfelvétel a mérőeszköz megbízhatóságának vizsgálata, a pilot kutatás és a nagymintás kutatás során is azonos körülmények között valósult meg. A teszt első változatának adatfelvételét, a számítógép-alapú fejlesztőprogramot, valamint az elő- és utóteszteket az eDia online platformon valósítottuk meg (Csapó & Molnár, 2019; Molnár & Csapó, 2019). Az eDia platformon létrehozott mérő- és fejlesztő feladatok a rendszerbe történő belépés után bármilyen internetkapcsolattal rendelkező technológiai eszközön elérhetők, azaz asztali számítógépen, laptopon, táblagépen vagy mobiltelefonon (Molnár et al., 2021). Az adatfelvételhez az informatikai eszközökön túl fejhallgatóra volt szüksége a diákoknak annak érdekében, hogy a feladatokhoz tartozó hangfájlokat önállóan, a többi tanulót nem zavarva tudják meghallgatni. Mivel ezek az eszközök rendelkezésre álltak az iskolákban, ezért az elő- és utóteszteket, valamint a fejlesztőprogram könnyen hozzáférhetőek voltak a tanulók számára. Az adatgyűjtés kizárólag a kutatásban részt vevő iskolák számítógépes termeiben vagy tantermeiben történt. A teszt kitöltésére minden esetben 45 percet, azaz egy tanórányi időtartamot biztosítottunk.

A teszt befejezését követően az eDia rendszer azonnali, automatikus visszajelzést biztosított. A teszten elért százalékos teljesítmény mellett a minél magasabb teljesítményt a Malacka felett

megjelenő minél több lufi jelezte, 10%-onként jelent meg egy -egy újabb lufi, de a 10% alatt teljesítő gyerekek is kaptak a teszt végén egy lufit (9. ábra).



9. ábra. Azonnali visszajelzés az eDia rendszerben a teszt befejezése után

5.3.2 Adatelemzés

Az adatok elemzéséhez a klasszikus tesztelmélet módszerei mellett a valószínűségi tesztelmélet eszköztárát is alkalmaztuk. Előbbi eljárásokhoz az SPSS 21 statisztikai programot alkalmaztuk. A teszt megbízhatóságának jellemzéséhez a Cronbach- α mutatót használtuk. A teszt belső struktúrájának vizsgálatához korrelációs együtthatókat vizsgáltunk. Az elkülönítésmutató segítségével azt vizsgáltuk, hogy van-e olyan item, amely nem megfelelően működik. Mivel a tesztet harmadik és negyedik évfolyamos diákok töltötték ki, a két évfolyam teljesítményének összevetését kétmintás t-próbával végeztük. A teszten töltött időt és az ezen a téren az évfolyamok közötti különbséget szintén kétmintás t-próbával vizsgáltuk. A géphasználat sikerességét az erre irányuló feladatok átlagának és szórásának megállapításával monitoroztuk.

A valószínűségi tesztelmélet eszköztárából a Rasch-modellt alkalmaztuk, az elemzéseket a ConQuest programban végeztük el. Mivel a valószínűségi tesztelmélet azon a feltevésen alapszik, hogy egyrészt a jobb képességű diákok nagyobb valószínűséggel oldják meg a feladatokat, továbbá a nehezebb feladatokat mindenki kisebb valószínűséggel oldja meg, mint a könnyebbeket, így a két évfolyamon eltérő életkorú és a tanulmányaikban máshol tartó tanulók vizsgálatakor ennek mentén haladtunk tovább. A két évfolyam eredményeinek összehasonlítása abban az esetben ideális, ha az

itemek nehézségi szintje megegyezik, és ehhez viszonyítva vizsgáljuk meg a két évfolyamban a tanulók képességszintjét. Ezért első lépésként fixáltuk az itemek teljes mintára vetített nehézségi mutatóit, és a két évfolyam egyenkénti elemzése során az itemek így kapott paramétereit vettük figyelembe az elemzés során.

5.4 Eredmények: a mérőeszköz megbízhatósága és alkalmassága a vizsgált jelenség és populáció monitorozására

Az elemzések során a teszt tartalmát, annak a célcsoport számára megfelelő voltát, illetve a teszt megoldására alkalmazott eszközök használatának eredménybefolyásoló hatását monitoroztuk.

A teljes teszt, továbbá az egyes altesztek reliabilitását mind a teljes minta alapján, mind az egyes évfolyamok esetén a Cronbach- α mutatóval jellemeztük (5. táblázat). A teljes teszt megbízhatósága mind a teljes minta, mind az egyes évfolyamok esetén is magas. Az altesztek szintjén szintén magas a megbízhatóság a szorzás alteszten. Az osztás és a szöveges feladat alteszten a megbízhatóság megfelelőnek mondható. A szöveges feladat alteszten évfolyamok szerinti bontásban a harmadik évfolyamon a reliabilitásmutató értéke már elmaradt az elvárt értéktől, ugyanakkor Taber (2017) szerint a konstruktum sajátossága miatt még feltételesen elfogadható.

5. táblázat. A teljes teszt és az egyes altesztek reliabilitása a teljes minta, illetve az egyes évfolyamok vonatkozásában (Cronbach- α)

Évfolyam	N	Teljes teszt (30 item)	Szorzás alteszt (14 item)	Osztás alteszt (8 alteszt)	Szöveges feladatok alteszt (8 item)
3. és 4.	205	0,89	0,83	0,77	0,70
3.	138	0,86	0,81	0,75	0,634
4.	67	0,91	0,85	0,79	0,75

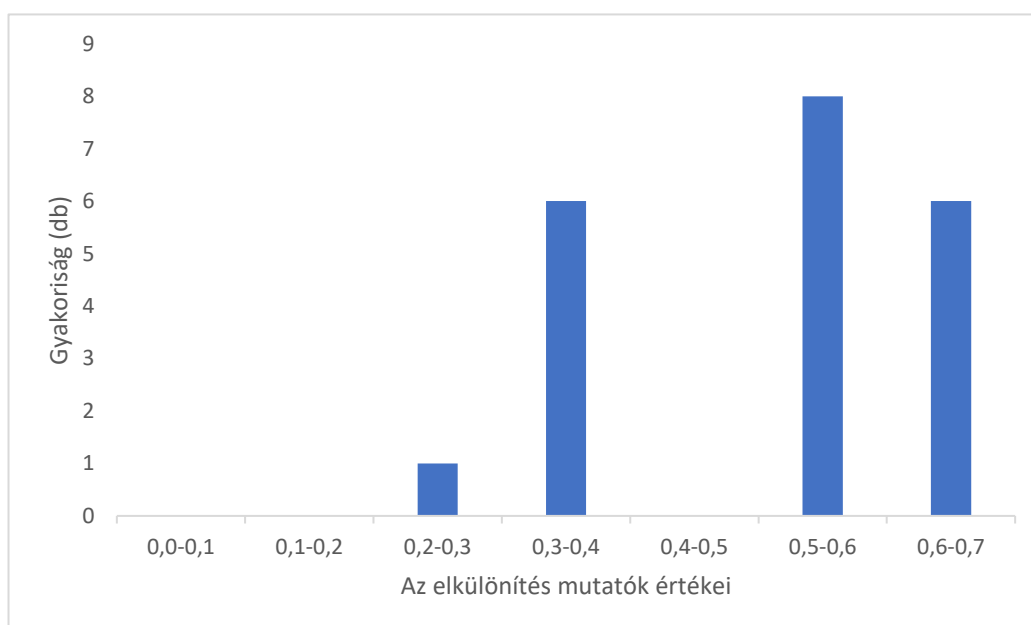
A teszt belső struktúráját a teljes teszt és az altesztek közötti korrelációk mentén vizsgáltuk (6. táblázat). Az együtthatók értéke a teljes teszt és az egyes altesztek között magas, vagy nagyon magas. Magas a korreláció a szorzás és az osztás altesztek között is. Ugyanakkor a szöveges feladatok alteszt mindkét másik alteszttel közepes korrelációt mutat.

6. táblázat. Az egyes altesztek és a teljes teszt közötti korrelációs együtthatók

	Szorzás	Osztás	Szöveges
Osztás	0,719		
Szöveges	0,490	0,467	
Teljes teszt	0,923	0,863	0,720

Megj. Minden korreláció szignifikáns $p < 0,01$ szinten.

Az itemek elkülönítési mutatóinak átlaga 0,49 (szórás=0,12), eloszlási gyakoriságát a 10. ábra segítségével tekinthetjük át. Az értékek egy item kivételével 0,3 fölöttiek.



10. ábra. Az itemek elkülönítés mutatóinak gyakorisági eloszlása

A teszt alkalmazhatóságát aszerint is vizsgáltuk, hogy mennyiben különbözött a harmadik, illetve a negyedik évfolyamos diákok teljesítménye, azaz mennyire bizonyultak nehéznek az egyik, illetve a másik évfolyam kapcsán a feladatok. A negyedik évfolyam teljesítménye mind a teljes teszten, mind az egyes alteszteken szignifikánsan jobb volt a harmadik évfolyamos diákok teljesítményénél (7. táblázat), azonban 4. évfolyamon sem tapasztaltunk plafoneffektust, a teszt feladatai jól differenciálták a diákokat.

7. táblázat. A harmadik és negyedik évfolyamos diákok teljesítménye a teljes teszten és az egyes alteszteken

Évfolyam	Teljes teszt		Szorzás alteszt		Osztás alteszt		Szöveges feladat alteszt	
	M (%)	SD	M (%)	SD	M (%)	SD	M (%)	SD
3. évf.	45,91	21,93	48,08	25,88	44,29	29,25	43,75	26,34
4. évf.	58,11	25,48	61,51	27,41	57,65	30,99	52,61	30,58
t	-3,359		-3,350		-2,947		-2,034	
p	<0,001		<0,001		<0,01		<0,05	

Mivel a teszt feladatai a második osztályos tananyagra épülnek, a tesztet megoldók pedig harmadik és negyedik évfolyamos diákok, akik a teszt által felölelt tartalommal eltérő mértékben és mélységben találkoztak, ezért indokolt alkalmazni a valószínűségi tesztelmélet eszköztárát is, ahogyan arról az 5.3.2. fejezetben írtunk. elemzése során az itemek így kapott paramétereit vettük figyelembe az elemzés során. Az elvégzett elemzés eredményeként az EAP/PV reliabilitás mutató értéke a harmadik évfolyamon 0,84, a negyedik évfolyamon 0,91. Mindkét mutató értéke magasnak tekinthető. Az eredmények alapján készült személy-item térkép mind a harmadik (11. ábra), mind a negyedik évfolyamon (12. ábra) azt mutatja, hogy az itemek jelentős része közepes nehézségűnek bizonyult. A gyerekek többsége olyan képességszinten van, hogy az itemek közül van egy vagy több olyan, amelyet 50%-os valószínűséggel megoldott. Harmadik évfolyamon a teszt a gyerekek kevesebb, mint fél százalékának bizonyult túl könnyűnek, míg negyedik évfolyamon minden ötödik gyerek számára a teszt nem jelentett kihívást. Ugyanakkor a harmadik évfolyamon a gyerekek közel 15%-a, a negyedik évfolyamon pedig a 10%-a olyan képességszinten van, hogy a teszt egyetlen feladatát sem tudta legalább 50%-os valószínűséggel megoldani.



11. ábra. A matematikai fejlesztőprogram hatékonyságvizsgálatához készült teszt személy-item térképe a harmadik évfolyamon. Az ábra bal oldalán található skála a feladatok nehézségi szintjét és a tanulók képességi szintjét jelenti. Minden x 0,2 tanulót reprezentál. A jobb oldalon lévő számok a tesztben foglalt egyes itemeket jelzik.

A teljes teszt működésének megállapításhoz megvizsgáltuk, hogy mennyi időt töltöttek a gyerekek a teszten. A teszt megoldására egy tanítási óra (kb. 45 perc) állt rendelkezésre. A legkevesebb tesztben eltöltött idő 382 mp (megközelítőleg hat és fél perc) volt. A megoldók között egy olyan diák akadt, aki nem fért bele a 45 percbe, ő 2841 másodpercet (megközelítőleg 47,5 percet) töltött a teszten. A tesztben eltöltött idő átlagosan 1176 másodperc (19,6 perc) volt (SD=408,43 mp). A harmadik és negyedik évfolyamos diákok tesztben eltöltött ideje között nem volt szignifikáns a különbség (8. táblázat).

8. táblázat. A tesztben töltött átlagos idő évfolyamonként

Osztályfok	Létszám	Átlag (mp)	Szórás	t	p
3.	138	1169,23	378,20	-0,338	n.s.
4.	67	1191,37	467,32		

Az eszközhasználat vizsgálatára szolgáló hat feladat közül a drag and drop feladatok egyike nem működött, egyetlen diák sem tudott helyes választ adni rá. A többi feladat esetében minden feladat egy pontot ért. Az eredmények átlaga 90 és 100% között volt az összes feladat esetében (9. táblázat).

9. táblázat. A géphasználat sikerességét vizsgáló feladatok átlaga és szórása

Instrukció típusa	Átlag	Szórás
Színezés	99	9
Válasz írása szövegmezőbe	100	0
Legördülő menüből választás	90	19
Drag and drop	91	29

5.5 A mérőeszköz alkalmazhatóságára irányuló vizsgálatok megvitatása

A reliabilitásra vonatkozó elemzések során a teljes teszt megbízhatósága magasnak bizonyult, az altesztek mutatóinak alapján azonban negyedik hipotézisünk csak részben, a teljes teszt és a szorzás alteszt vonatkozásában igazolódott. A mérőeszköz a teljes teszt vonatkozásában, és a szorzás altesztben is jól működött a teljes minta, illetve az egyes évfolyamok esetén is (H_1). Az osztás és a szöveges feladatok altesztek működése megfelelő, a szöveges feladat alteszt a harmadik évfolyamos diákok körében azonban mérsékelten fogadható el. Az eredmények oka egyrészt az alacsony itemszám lehet, azonban altesztenként további eltérő okok is adódhatnak. Az osztás altesztben a feladatok az osztás értelmezésének megértését nem elkülönülten, hanem csak összetettebb szövegekörnyezetbe illesztve vizsgálták. A szöveges feladat altesztben az egyes műveletek

megértését egyrészt hosszabb szövegezésű feladatokkal, és a kisegyszeregnél nagyobb számkörben vizsgáltuk, illetve a gyerekek három, egymáshoz a problémafelvetésben hasonló, a feladatban a műveletvégzéshez szükséges számokat tekintve megegyező, a műveletvégzés tartalmát tekintve azonban különböző szöveges feladattal is találkoztak. A szöveges feladatok megértése és megoldása különösen nehéz feladat a matematikatanulásban. Megfigyelhető, hogy ennek az altesztnek, csakúgy, mint a többi altesztnek, jobb a reliabilitása a negyedik évfolyamon, mint a harmadik évfolyamon. A szöveges feladatok alteszt esetén megfigyelhető nagyobb különbséget a két évfolyam között magyarázhatja, hogy – a 4a hipotézisben is megfogalmazott feltevésünkkel szemben – az olvasástanulás és a szövegértés fejlődés folyamatában egy tanévnyi különbség jelentős lehet. Magyarázhatja azonban az is, hogy a negyedik diákok a szorzás és osztás értelmezésének megértésében előrébb járnak egy évvel fiatalabb társaiknál, a kisegyszeregnél nagyobb számkörben mozgó szöveges feladatokkal is találkozhattak már, így nagyobb jártasságuk lehet abban, hogy az egyes feladatok megoldásához milyen stratégiát alkalmazzanak, milyen tudáselemet mozgósítsanak.

A korrelációs együtthatók vizsgálata során kapott eredményeket magyarázhatják az egyes altesztek közötti hasonlóságok és különbségek. A szorzás és az osztás altesztek közötti szorosabb korreláció a szöveges feladat alteszt bármely másik alteszttel mutatott összefüggésével szemben fakadhat abból, hogy e két művelet egymás inverze, továbbá abból is, hogy e két alteszt procedurális és konceptuális tudást is mér, szemben a szöveges feladat alteszttel, amely csak a konceptuális tudásra fókuszál. Hipotézisünk (H_2) beigazolódott, hiszen a szöveges feladat alteszt a többi alteszt között közepes erősségű, egyéb vonatkozásokban pedig magas korreláció áll fenn. .

A teljes tesztben egy item elkülönítési mutatója sem esett 0,2 alá, az itemek a 6. ábrán látható értékek alapján jól mértek. Következésképpen az itemek végleges tesztváltozatban történő megtartása mellett döntöttünk.

Habár a teszt által mért tudásanyag a második évfolyam követelménye, a személy-item térképek vizsgálata során megfigyelhető, hogy mindkét évfolyamon vannak gyerekek, akik a tesztben mért matematikai tartalom megértésének olyan szintjével rendelkeznek, hogy a feladatok sikeres megoldásához szükséges műveletek helyes kiválasztásában, illetve végrehajtásában kevesebb, mint 50%-os valószínűséggel lesznek sikeresek. Mindkét évfolyamon akad olyan tanuló is, akinek a teszt itemeinek helyes megoldása már nagy valószínűséggel nem okoz nehézséget, e tanulók aránya a negyedik évfolyamon magasabb. A tesztben várhatóan sikertelen tanulók teljesítménye értelmezésünkben nem azt jelenti, hogy a teszt legkönnyebb itemei is túlságosan nehezek lennének ezeken az évfolyamokon, hanem azt, hogy azok között a gyerekek között, akik e témakör megértésében a második évfolyamon lemaradtak, akadnak olyanok, akik harmadik, sőt negyedik évfolyamon sem tudnak felzárkózni. Mindez, továbbá a 0 és -1 logitszint között található diákok nagy aránya azt jelzi, hogy a szorzás és osztás témakörének megfelelő szintű elsajátítása

nem kizárólag a második évfolyam feladata, hanem évfolyamokon átívelő folyamatos fejlesztést kíván. A tanulók zömének ugyanakkor a teszt összességében megfelelő nehézségű. Eredményeink alapján a harmadik hipotézisünk is megerősítést nyert. A mérőeszköz mind a teljes teszt vonatkozásában, mind az egyes altesztjeiben megfelelően működik a teljes minta, illetve az egyes évfolyamok esetén is (H_3).

A teszten töltött idő vonatkozásában a harmadik hipotézist erősíti meg az is, hogy a két évfolyam teszten eltöltött idejében nem volt szignifikáns különbség. Ez az eredmény arra utal, hogy a teszt nem túl nehéz a harmadik évfolyamos diákoknak, hiszen ellenkező esetben várhatóan a rendelkezésre álló idő alatt nem érték volna végig a teszten, de nem is túl könnyű a negyedik évfolyamos diákoknak sem (H_3).

A teszt megírása során a legrövidebb tesztben töltött idő megközelítőleg hat és fél perc volt, ami azt jelenti, hogy nem volt olyan tanuló, aki a teszt feladatain mindössze csak az azokra való rákattintással ért volna végig. Azaz legalább néhány feladattal minden diák dolgozott. A teszt megoldói között mindössze egy olyan diák volt, akinek nem volt elegendő a rendelkezésre álló idő. Megerősítést nyert az a feltevés, hogy a teszt megírására rendelkezésre álló idő mindkét évfolyam diákjainak elegendő (H_{4a}).

A két évfolyam teljesítményének összevetése azért volt releváns kérdés a teszt működésének vizsgálata során, mivel a negyedik évfolyamos diákok egy évvel idősebbek, továbbá a teszt által felölelt matematikai tartalomban egy tanévnnyivel több jártasságuk van. Mivel a teszt feladatai a második évfolyam tananyagát vették alapul, melyet a negyedik évfolyamos diákok a harmadik évfolyamon már ismételtek, majd az ismereteket kiterjesztették az 1000-es számkörre, így a mérőeszköz feladatain nyújtott teljesítményük szignifikáns pozitív különbségét vártuk a harmadikos tanulók eredményeihez képest. A teszt itemei ezen a téren is jól viselkedtek, a negyedikes diákok mind a teljes teszt, mind az egyes altesztek vonatkozásában szignifikánsan jobban teljesítettek harmadikos társaiknál (H_{4b}).

Az eszközhasználat vizsgálatát célzó feladatok közül a nem működő feladat esetén technikai probléma állt a háttérben. Ezért ezt a feladatot a későbbiekben, a pilot mérés során alkalmazott tesztben egy hasonló, ám működő feladatra cseréltük. A többi feladat esetén az eredmények azt mutatták, hogy a gyerekeknek a géphasználat nem okozott gondot. Azaz igazolódott az ötödik hipotézisünk (H_5), miszerint a diákok géphasználati képessége a teszt megoldását és eredményét nem befolyásolta.

6 A fejlesztő program hatékonyságvizsgálatának pilot kutatása

6.1 Minta

A fejlesztés a 2020/2021-es tanévben, történt, amit a 2019/2020-as tanév tavaszi félévében iskolabezárások előztek meg, és amely tanévben ismételt iskolabezárások, illetve számos osztály esetében időszakos digitális tanrendre való átállások történtek. A kutatásban 13 általános iskola harmadik és negyedik osztályos diákjai vettek részt. A kutatásba bevont iskolák közül egy fővárosi, egy megyeszékhelyi, négy városi és hét községi iskola volt. A minta kiválasztása során arra törekedtünk, hogy olyan osztályokat vonjunk be a kutatásba, ahol a pedagógus megítélése alapján sok a matematikában lemaradást mutató tanuló. Amennyiben a bevont iskolákat az Országos kompetenciamérés eredményeinek segítségével jellemezzük, támpontot kaphatunk arról, hogy a kutatásba bevont iskolákban a távolléti oktatás következményeként a tanulók teljesítményében országos szinten, illetve az egyes településtípusokon belül, és iskolaméret szerint is az átlaghoz képest milyen irányban változott a teljesítmény. Az általános iskolás korosztályban az Országos kompetenciamérés adatai a hatodik és nyolcadik évfolyamos diákok teljesítményéről szolgáltatnak információt. Azonban a magyar iskolarendszer szegregáló jellege (pl. Hricsovinyi & Józsa, 2018; Radó, 2018), továbbá romló hátránykompenzációs képessége (OECD, 2023) alapján feltételeztük, hogy az egyes iskolákban megfigyelhető tendenciák az alsó tagozaton is érvényesek.

A vizsgált iskolák közül egy intézménnyel kapcsolatban nem rendelkezünk az általános iskolás korosztályról adatokkal, mivel ez az iskola egy 12 évfolyamos intézmény, ahol a kutatás évében a 10. évfolyamon történt kompetenciamérés. A többi iskolában a tanulók a 2019-es évi kompetenciamérésen mind a hatodik, mind a nyolcadik évfolyamon az országos átlagtól szignifikánsan nem eltérő teljesítményt nyújtottak matematikából. A 2021-es kompetenciamérésen tíz iskola országos szinten, közülük kilenc pedig az első – településtípus szerinti –, illetve a második – településtípuson belül iskolalétszám szerinti – viszonyítási csoportban is a csoportátlagnál szignifikánsan rosszabb teljesítményt nyújtott. A minimum szintet el nem érő tanulók aránya a budapesti iskolán kívül mindkét évfolyamon minden iskolában meghaladja az országos szintet (6. évf.: 15,9%, 8. évf.: 19,4%) (10. táblázat).

10. táblázat. A kutatásba bevont általános iskolák országos és viszonyítási csoportok átlagához mért eredménye, valamint a minimum szintet el nem érő tanulók aránya a 2021-es Országos kompetenciamérésen a 6. és 8. évfolyamos tanulók körében

	Országos	Első viszonyítási csoport		Második viszonyítási csoport		Minimum szintet el nem érő tanulók (%)	
		elnevezés:	eredmény:	elnevezés:	eredmény:	6. évf.	8. évf.
ÁI 1	+	budapesti	0	nagy	0	3,0	5,6
ÁI 2	0	községi	0	kis	0	33,3	28,6
ÁI 3	-	községi	0	közepes	0	18,8	30,0
ÁI 4	-	megyeszh	-	ki	-	55,6	60,0
ÁI 5	-	városi	-	nagy	-	81,7	96,9
ÁI 6				kis	-	46,2	58,9
ÁI 7						65,3	68,4
ÁI 8		községi	-	nagy	-	41,9	95,5
ÁI 9						53,3	64,3
ÁI 10				közepes	-	71,6	63,9
ÁI 11						72,7	73,3
ÁI 12				kis	-	61,5	100

Jelmagyarázat: ÁI = általános iskola; 0 / - / + = a viszonyítási csoporthoz képest szignifikánsan nem / lefelé / felfelé eltérő átlag; Első viszonyítási csoport: az országos mintából képzett csoportok településtípus szerint; budapesti = budapesti általános iskola; megyeszkh = megyeszékhelyi általános iskola; városi = városi általános iskola; községi = községi általános iskola; Második viszonyítási csoport: az első viszonyítási csoporton belül az iskola besorolása diáklétszám alapján; kis / közepes / nagy = az adott településtípuson kis / közepes / nagy általános iskola

Minden egyes osztályban az előteszt eredményei alapján tanulópárokat alkottunk, majd a tanulópárok egyik tagját a kísérleti csoportba, másik tagját a kontroll csoportba soroltuk. A fejlesztő program végén az összes tanuló megírta az utótesztet. Az adattisztítás során azokat a kísérleti csoportba sorolt diákokat (N=19), akik nem jutottak el legalább a fejlesztőprogram feléig, töröltük az adatbázisból. Ezt követően évfolyam – és lehetőség szerint nem – alapján párokat alakítottunk ki, ahol a párok előteszten elért eredményét vettük figyelembe. A propensity score matching eredményeként azokat a diákokat, akiknek nem akadt párja, szintén töröltük az adatbázisból. Ezek a diákok jellemzően a kontroll csoportból kerültek ki. Az adattisztítás után 112 harmadik osztályos és 122 negyedik osztályos tanuló eredményeit vontuk be az elemzésbe (11. táblázat).

11. táblázat. A fejlesztőprogram pilot hatásvizsgálatának mintája

Évfolyam	Tanulók létszáma	Fiú
		Lány
3.	112	49
		63
4.	122	61
		61
Sum	234	

6.2 Az elő- és utótesztelés mérőeszközének bemutatása

A matematikai fejlesztőprogram hatékonyságának vizsgálatára egy három altesztből – szorzás, osztás, szöveges feladat – felépülő mérőeszközt alkottunk (3. melléklet). A mérőeszköz első verziójának működését monitorozó kutatás eredményeit a 6. fejezetben mutattuk be. Ezek alapján a három alteszt közül az osztás és a szöveges feladat altesztek feladatait kellett módosítás szempontjából újragondolni. Az osztás alteszt (8 item, Cronbach $\alpha=0,77$) esetén itemkihagyásos reliabilitásvizsgálat során bármely item kihagyása esetén csökkent az alteszt megbízhatósága. Itemek kihagyása ellen szólt az is, hogy az osztás alteszt itemszámának csökkentésével a szorzás alteszt jelentős túlsúllyal rendelkezne a teljes teszten belül.

A szöveges feladatok alteszt megbízhatóságának (8 item, Cronbach $\alpha=0,70$) növelése érdekében az itemek számának csökkentése ugyanazon okokból nem volt elfogadható megoldás, mint az osztás alteszt esetében. A csökkentéssel nem nőtt a reliabilitás, ám az egyes altesztek elemszámai között jelentős aránytalanság következett volna be. E megfontolások mentén a szöveges feladat altesztet nem változtattuk.

A 30 itemből álló teljes teszt 26 iteme mind a konceptuális tudás, mind az erre alapozott procedurális tudás monitorozásának érdekében auditív és vizuális úton is befogadható, legalább két mondatból álló, összetettebb szövegek megértését és feldolgozását várta el az olvasástanulás korai fázisában járó harmadik és negyedik osztályos diákoktól. Ugyanakkor a tesztből hiányoztak olyan itemek, amelyek egyértelműen, komplexebb szövegkörnyezet nélkül, a szorzás és osztás tanulásának kezdeti fázisára jellemző, minél rövidebb, nyelvtani szerkezetét tekintve egyszerű mondatokban megfogalmazott matematikai problémák megoldását kéri a tanulótól. Ilyen itemek beillesztése a két művelet koncepciója megértésének egy újabb, az eddigi összetettebb problémák megválaszolásához szükséges dimenzióját teszi monitorozhatóvá. E megfontolás mentén öt új itemet illesztettünk a tesztbe. Ezek megalkotása során arra törekedtünk, hogy rövid, kizárólag a művelet értelmezésére koncentráló egyszerű mondatban fogalmazzuk meg a matematikai

problémát. Ennek alapján kellett a tanulónak a műveletvégzéshez használt műveleti jel kiválasztásával döntenie arról, hogy melyik művelet értelmezését kéri a feladat (13. ábra).

Hogyan számolod ki a következő szöveges feladatokat? Válaszd ki a megfelelő műveleti jelet a legördülő menüből!

Móni 28 darabos filctollkészletét négyesével tette a tartóiba.
Hány tartóba tette a filceit Móni?

28 : 4 = ♦

Kincsőnek 7 piros, és hétszer ennyi kék gyöngye van.
Hány kék gyöngye van Kincsőnek?

7 · 7 = ♦

A kiránduláson a 28 gyerek negyede gyűjtött makkot.
Hány gyerek gyűjtött makkot?

28 - 4 = ♦

13. ábra. Példa új itemekre a mérőeszköz végleges változatából

A végleges teszt a módosításokat követően úgy állt össze, hogy az eredeti 30 item mindegyikét megtartottuk, és további öt itemmel bővítettük a tesztet. Így a végleges 35 itemből álló teszt szorzás altesztjébe 15, osztás altesztjébe 12, szöveges feladat altesztjébe pedig 8 item tartozott.

6.3 Pilot kutatás: kutatási dizájn és módszerek

6.3.1 Kutatási dizájn, az adatfelvétel körülményei

A kutatás kvázi-kísérleti elrendezésben valósult meg. A kísérleti és a kontrollcsoport teljesítményét a fejlesztőprogram végrehajtása előtt és után is értékeltük. A csoportok kialakítása a tanulók előteszten nyújtott teljesítménye alapján történt.

A számítógép-alapú fejlesztőprogramot, valamint az elő- és utóteszteket az eDia online platformon valósítottuk meg (Csapó & Molnár, 2019; Molnár & Csapó, 2019) az 5.3.1. fejezetben bemutatottal azonos technikai körülmények között.

A fejlesztésben részt vett diákok szüleit a kutatócsoport instrukciói alapján az iskola tájékoztatta a fejlesztőprogram céljáról és az adatfelvétel körülményeiről. A kutatásban részt vett diákoknak az eDia rendszer biztosított olyan mérési azonosítót, amely a kutatók számára anonim, az azonosító segítségével csak a pedagógus tudta azonosítani a tanulót, így információt kapva a fejlődéséről.

A tanárok egy rövid online tájékoztatáson vettek részt a program kezdete előtt, és a megvalósítás során folyamatosan támogatást kaptak a kutatóktól. Ennek a folyamatnak az volt a célja, hogy tájékoztassa a tanárokat a fejlesztés céljáról, tartalmáról és a fejlesztőprogram használati módjáról. A tájékoztató az alábbi témákat érintette: (1) a fejlesztőprogram használati módja; (2) a fejlesztőprogram kidolgozásának célja; (3) milyen gondolkodási készségeket és tantervi tartalmakat céloz meg a fejlesztőprogram; (4) hogyan van felépítve a fejlesztőprogram; (4) mennyi időt vesz igénybe az ebben való részvétel; (5) információk a feladatokról és az egyes fejlesztősorok fókuszáról; és (7) az eDia platform használatának bemutatása. A tájékoztatás során a tanárok feladatait és tennivalóit is tisztáztuk. A tanárokat arra kértük, hogy a fejlesztő alkalmakat úgy szervezzék meg, hogy (a) a diákok hetente legfeljebb három egységet teljesítsenek naponta pedig legfeljebb egyet, (b) lehetőség szerint két feladatsor között tartsanak egy nap szünetet, és (c) a fejlesztő időszak végéig a tanulók legalább kilenc egységet teljesítsenek. A tanárok csak technikai problémák esetén segíthettek a gyerekeknek, a matematikai problémák megoldásában nem. Így minden iskola azonos feltételekkel rendelkezett a fejlesztőprogramban való részvételhez.

A fejlesztés a tájékoztatón részt vett tanárok felügyelete mellett zajlott. A fejlesztőprogram három-négy hétig tartott, és az iskolában töltött idő alatt, de nem matematikaórán zajlott. Minden fejlesztő egységhez legalább húsz percnyi időt biztosítottak. A diákok válaszait az eDia-rendszer rögzítette, naplózta és automatikusan értékelte. Pozitív vagy motiváló visszajelzés után a rendszer kijelölte a következő feladatot a diáknak. Mind a visszajelzés, mind a következő feladat kijelölése a diák korábban naplózott válaszai alapján történt.

A fejlesztőprogramok kiközvetítése során egy nehézség jelentkezett. A pedagógusok számára mind a huszonhárom fejlesztő egységet elérhetővé tettük. Arra kértük őket, hogy szakmai megfontolások mentén válasszák ki, hogy a szorzó-szorandó, vagy a szorzandó-szorzó sorrendet tartalmazó fejlesztő egységeket közvetítik ki a tanulónak. Ezzel az eljárással azonban nehézségekbe ütköztünk. A pedagógusok közül néhányan következtetlenül, egyes egységek esetén a szorzandó-szorzó sorrendet követő, máskor a szorzó-szorandó sorrendet követő egységet közvetítették ki a tanulónak. Akadt tehát olyan diák, aki a szorzás lejegyzésének kétféle megközelítésével esetlegesen, felváltva találkozott.

6.3.2 Adatelemzés

A teljes teszt, továbbá az egyes altesztek reliabilitását mind a teljes minta alapján, mind az egyes évfolyamok esetén is a Cronbach- α kiszámításával becsültük meg az előteszten nyújtott teljesítmények figyelembevételével. A teszt belső struktúráját első lépésben a teljes teszt és az altesztek közötti korrelációk mentén vizsgáltuk. A teszt konstruktumvaliditásának vizsgálatához, azaz a teszten belüli dimenziók elkülönülésének empirikus bizonyításához a megerősítő faktorelemzés (Confirmatory Factor Analyses) módszerét alkalmaztuk (Muthén & Muthén, 2010).

Az elemzéseket az MPlus program segítségével végeztük. Az illeszkedés pontosságának megítélésére a Chi-négyzet illeszkedési mutató osztva a szabadságfokok számával (χ^2/df), TLI (Tucker-Lewis Index), CFI (comparative fit index) és az RMSEA (root-mean-square error of approximation) mutatókat vettük figyelembe. A χ^2 mutató helyett a χ^2/df mutató alkalmazását az indokolta, hogy a χ^2 függ a minta nagyságától, mely hatást úgy lehet csökkenteni, ha a χ^2 értékét elosztjuk a szabadságfokok számával. Az így kapott mutató ideális értéke 1,00 és 3,00 között van (Glynn et al., 2011).

Az elkülönítésmutató segítségével ismét vizsgáltuk, hogy van-e olyan item, amely nem megfelelően működik. A két évfolyam teljesítményének összevetését kétmintás t-próbával végeztük.

A teljes teszt évfolyamonkénti bontásban történő működésének, illetve az itemek diákok képességszintjéhez történő illeszkedésének vizsgálata során kapott eredmények vizualizációját a Rasch modell személy/item térképe segítségével valósítottuk meg. Miután a két évfolyamon eltérő életkorú, és a tanulmányaikban nem ugyanott tartó diákok eredményeit vizsgáltuk, ezért először az itemek invariáns viselkedésének vizsgálata miatt külön-külön, évfolyamonkénti bontásban futtattuk le az elemzéseket. Ezáltal lehetőségünk adódott az itemek egymáshoz való viszonyának monitorozására, majd invariáns viselkedés esetén a harmadik és negyedik évfolyamos diákok teljesítményének összeskálázására (Molnár, 2013). Végül az eszközhasználat sikerességét az ennek felmérését célzó itemek átlagának és szórásának elemzésével vizsgáltuk.

6.4 Eredmények a végleges mérőeszközre vonatkozó vizsgálatban a pilot kutatás során

A teljes teszt megbízhatósága mind a teljes minta, mind az egyes évfolyamok esetén is magas (12. táblázat). Az altesztek szintjén szintén magas a megbízhatóság a szorzás és az osztás alteszteken a teljes minta esetén csakúgy, mint az egyes évfolyamokon. A szöveges feladat alteszten a megbízhatóság megfelelőnek mondható.

12. táblázat. A teljes teszt és az egyes altesztek reliabilitása a teljes minta, illetve az egyes évfolyamok vonatkozásában (Cronbach- α)

Évfolyam	N	Teljes teszt (35 item)	Szorzás alteszt (15 item)	Osztás alteszt (12 alteszt)	Szöveges feladatok alteszt (8 item)
Teljes minta	234	0,92	0,84	0,86	0,73
3.	112	0,92	0,86	0,84	0,70
4.	122	0,92	0,82	0,87	0,76

A korrelációvizsgálat során kapott korrelációs együtthatók értéke a teljes teszt és az egyes altesztek között magas, vagy nagyon magas (13. táblázat). Magas a korreláció a szorzás és az osztás altesztek között is. Ugyanakkor a szöveges feladatok alteszt mindkét másik alteszttel közepes korrelációt mutat.

13. táblázat. Az egyes altesztek és a teljes teszt közötti korrelációs együtthatók

Alteszt	Szorzás	Osztás	Szöveges feladat
Osztás	0,758		
Szöveges feladat	0,476	0,517	
Teljes teszt	0,913	0,914	0,706

Megj. Minden korreláció szignifikáns $p < 0,01$ szinten.

A részteszteket vizsgálva a szorzás és az osztás résztesztek viszonylag szoros kapcsolatot mutatnak, a szöveges feladat alteszt közepesen erős korrelációban van mindkét másik alteszttel, Ezek az értékek egyrészt arra utalnak, hogy a résztesztek ugyanazt a látens konstruktumot, a szorzás és osztás területén szerzett jártasságot, mérik, ám a korrelációk nem annyira magas volta alapján a résztesztek nem összevonhatók. Másrészt azonban azt is látjuk, hogy a szorzás és az osztás résztesztek tartalma szorosabban összefügg, a szöveges feladat alteszt értékei itt is a legalacsonyabbak. Felmerül az a kérdés, hogy a szorzás és az osztás alteszt nem ugyanazt, az értelmezéshez kötődő műveletvégzést vizsgálja-e, vagy helyes az a feltevésünk, hogy elkülönülnek egymástól annyiban, hogy az egyik a szorzáshoz, a másik az osztáshoz kapcsolódó ismereteket monitorozza.

Ennek a kérdésnek a megválaszolása során megerősítő faktoranalízist végeztünk (14. táblázat). Ennek során összehasonlítottuk az általunk létrehozni kívánt három dimenziós modellt a kétdimenziós, a műveletvégzést és a szöveges feladatok megértését és ezekhez a megfelelő művelet kiválasztását külön dimenzióba rendező, illetve az egy dimenziós, a minden feladatot egy dimenzióba soroló, a szorzás, osztás és szöveges feladatok témaköreit nem megkülönböztető modellel. A harmadik évfolyamon mindhárom modell illeszkedési mutatói megfelelőek ($CFI > 0,90$, $TLI > 0,90$, $RMSEA < 0,08$). Legjobb illeszkedése a 3 dimenziós modellnek van. Negyedik évfolyamon csak a 3 és a 2 dimenziós modell illeszkedési mutatói megfelelőek, az 1 dimenziós modell illeszkedési mutatói közül a TLI értéke már nem elfogadható. Legjobb illeszkedése ezen az évfolyamon is a 3 dimenziós modellnek van.

14. táblázat. A matematikai fejlesztőprogram hatásvizsgálatához készült teszt megerősítő faktorelemzésének eredményei

Év-folyam	Modell	χ^2/df	CFI	TLI	RMSEA (95% CI)
3	3 dimenzió	1,22	0,967	0,965	0,044 (0,031-0,055)
	2 dimenzió	1,23	0,964	0,962	0,046 (0,033-0,057)
	1 dimenzió	1,32	0,951	0,948	0,054 (0,043-0,064)
4	3 dimenzió	1,45	0,933	0,928	0,061 (0,051-0,070)
	2 dimenzió	1,49	0,926	0,921	0,064 (0,055-0,072)
	1 dimenzió	1,63	0,904	0,898	0,072 (0,064-0,080)

Az itemek elkülönítési mutatóinak átlaga 0,51 (szórás=0,12). Az eloszlási gyakoriságot a 14. ábrán szemléltetjük. Az értékek közül egyik sem közelít a nullához, ugyanakkor egy item értéke alacsony, 0,129. A további itemek értékei 0,2 fölöttiek, közülük 5 item 0,3 alatti, 13 item 0,5, 11 item pedig 0,6 fölötti elkülönítési mutatóval rendelkezik.



14. ábra. Az itemek elkülönítés mutatóinak eloszlási gyakorisága

A végleges tesztváltozatra adott válaszok elemzése során is vizsgáltuk, hogy a harmadik osztályos tanulók teljesítménye különbözik-e a negyedik évfolyamos diákok teljesítményétől. A két évfolyam teljesítménye sem a teljes teszten, sem az egyes alteszteken nem különbözött egymástól szignifikánsan (15. táblázat).

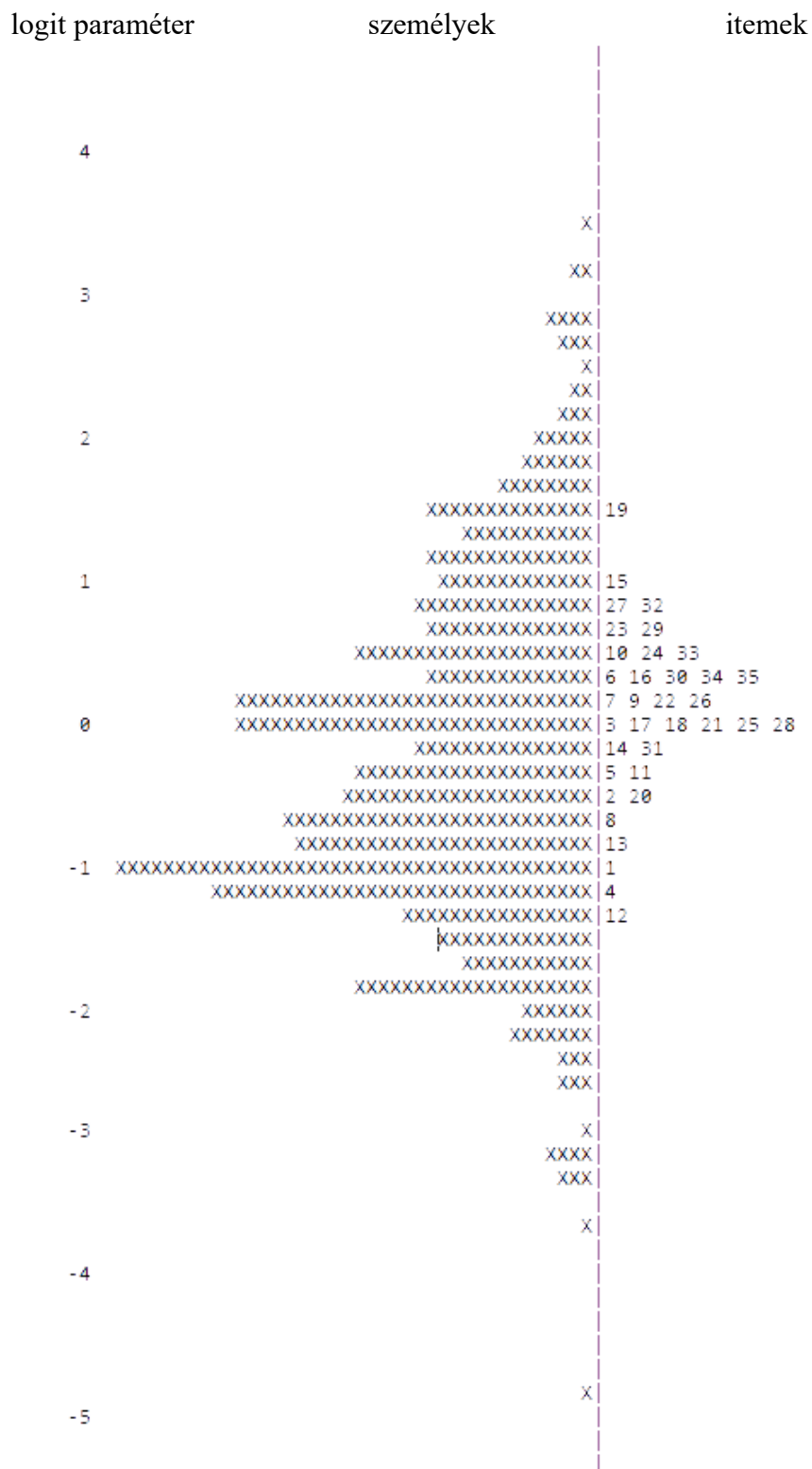
15. táblázat. A harmadik és negyedik évfolyamos diákok teljesítménye a teljes teszten és az egyes alteszteken

Évfolyam	Teljes teszt		Szorzás alteszt		Osztás alteszt		Szöveges feladat alteszt	
	M (%)	SD	M (%)	SD	M (%)	SD	M (%)	SD
3. évf.	43,57	24,76	48,75	27,84	38,39	28,68	41,63	28,15
4. évf.	45,36	24,73	50,66	26,15	44,60	31,78	36,58	29,16
t	-0,553		-0,540		-1,564		1,346	
p	=0,290		=0,295		=0,060		=0,090	

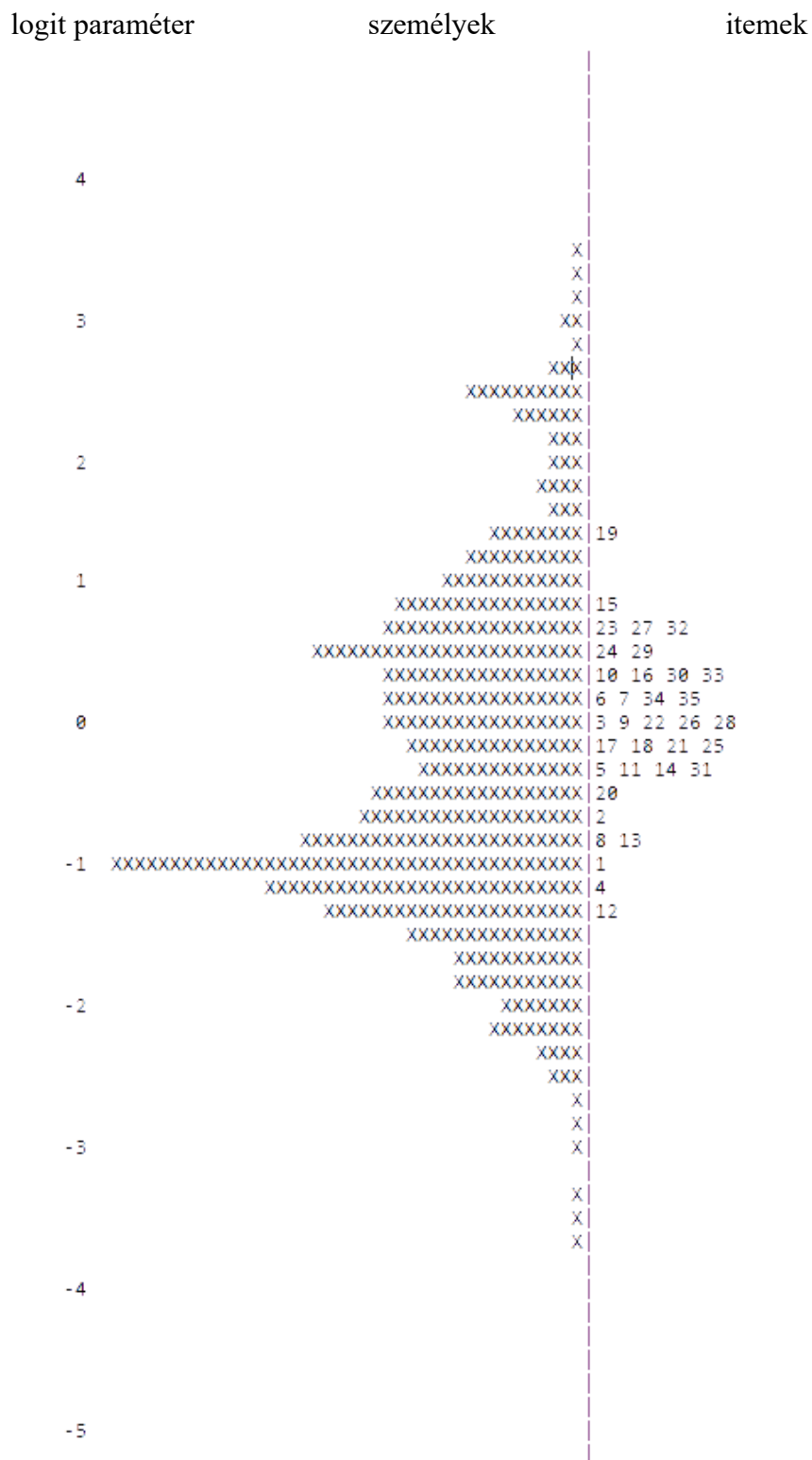
Évfolyamonkénti bontásban is elemeztük a teljes teszt működését, illetve az itemek diákok képességszintjéhez történő illeszkedését. Az eredmények vizualizációját a Rasch modell személy/item térképe segítségével valósítottuk meg.

A teszt itemeit és a tanulók képességszintjét a Rasch-modell segítségével közös skálán ábrázoltuk. Az EAP/PV reliabilitás mutató értéke mindkét évfolyamon magas, a harmadik évfolyamon 0,87, a negyedik évfolyamon 0,86. Az eredmények alapján készült személy-item térkép mind a harmadik (15. ábra), mind a negyedik évfolyamon (16. ábra) azt mutatja, hogy a jelentős részben közepes nehézségű itemekből álló teszt a gyerekek többsége számára megfelelő. Mindkét évfolyamon a gyerekek kevesebb, mint 1%-a számára bizonyult a teszt túl könnyűnek. Ugyanakkor a harmadik évfolyamon a gyerekek 13%-a, a negyedik évfolyamon pedig a 16%-a számára jelentett a teszt komoly kihívást, képességszintjük alapján kevesebb, mint 50%-os valószínűséggel oldották meg még a teszt legkönnyebb itemét is.

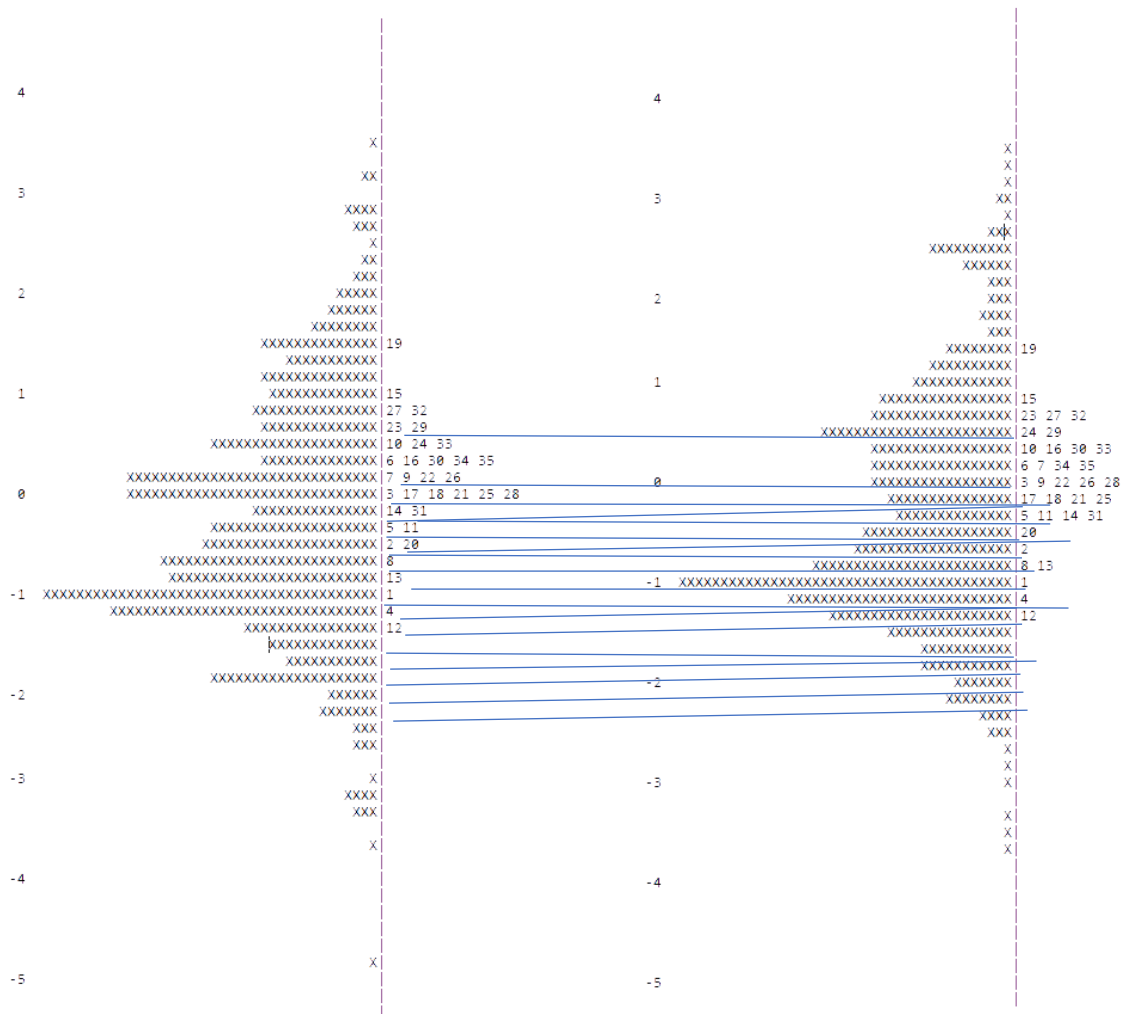
A feladatok nehézség szerinti sorrendje (17. ábra) közel azonos, azaz – bár a külön skálázás miatt a feladatok nehézségi indexei számszerűen nem hasonlítható össze, de egymáshoz való elhelyezkedésük igen (Molnár, 2013) – a feladatok viselkedés tekintetében invariánsan, azaz azonosan viselkedtek harmadik és negyedik évfolyamon (az ábrán nincs egymást metsző vonal). A diákok teszten nyújtott teljesítménye összevethető egymással, összeskálázhatóak a két évfolyamra járó diákok teljesítményei.



15. ábra. A matematikai fejlesztőprogram hatékonyságvizsgálatához készült végleges tesztváltozat személy-item térképe a harmadik évfolyamon. Az ábra bal oldalán található skála a feladatok nehézségi szintjét és a tanulók képességi szintjét jelenti. Minden x 0,2 tanulót reprezentál. A jobb oldalon lévő számok a tesztben foglalt egyes itemeket jelzik.



16. ábra. A matematikai fejlesztőprogram hatékonyságvizsgálatához készült végleges tesztváltozat személy-item térképe a negyedik évfolyamon. Az ábra bal oldalán található skála a feladatok nehézségi szintjét és a tanulók képességi szintjét jelenti. Minden x 0,2 tanulót reprezentál. A jobb oldalon lévő számok a tesztben foglalt egyes itemeket jelzik.



17. ábra. A feladatok harmadik és negyedik évfolyamon mutatott viselkedésének invarianciája

Az eredményeket a végleges teszt vonatkozásában is megvizsgáltuk abból a szempontból, hogy a teszt megoldására alkalmazott eszközök használata befolyásolja-e a teszten elért eredményt. Az eszközhasználat vizsgálatára szolgáló négy item mindegyike egy pontot ért. Az eredmények átlaga 89 és 100% között volt az összes feladat esetében (16. táblázat).

16. táblázat. A géphasználat sikerességét vizsgáló feladatok átlaga és szórása

Instrukció típusa	Átlag (%)	Szórás
Színezés	99	9
Válasz írása szövegmezőbe	100	0
Legördülő menüből	89	30
Drag and drop	90	29

6.5 A mérőeszköz alkalmazhatóságára irányuló vizsgálatok megvitatása

A teljes minta és az évfolyamonkénti bontás esetében is megállapítható, hogy a teljes teszt reliabilitása kiváló, a szorzás és az osztás alteszt reliabilitása jó, a szöveges feladat alteszt reliabilitása pedig elfogadható (H_6). Minden esetben igaz, hogy a módosított tesztváltozat reliabilitása javult a teszt első változatának mutatóihoz képest. Az osztás altesztbe illesztett négy új item jelentősen javította az alteszt reliabilitását. A szorzás altesztbe illesztett egy új item nem változtatta meg érdemben annak megbízhatóságát. A teszt ilyen irányú módosítása a szöveges feladatok alteszt reliabilitását is növelte. Ennek oka az lehet, hogy az osztás és szorzás altesztbe illesztett új itemek hangsúlyosan rövid szövegezésű feladatok a szöveges feladatok altesztől, amelyre a hosszabb és összetettebb szövegezésű feladatok a jellemzők. A teszt magas reliabilitását erősítik meg az EAP/PV mutatók is mind a két évfolyamon.

A teljes tesztben egy item elkülönítés mutatója 0,129 volt. Az item a harmadik legnehezebb itemnek bizonyult a tesztben, nehézségi indexe -1,016 volt. Az item a teljes teszt pontszámával 0,129 erősségű korrelációt mutat, amely gyenge, de szignifikáns kapcsolat ($p < 0,5$). Az itemet tartalmazó feladatban a gyerekeknek azt kellett eldönteniük, hogy előre megadott műveletek leolvashatók-e egy képen látható öt dominóról, vagy nem. A gyengén szereplő itemben a dominókról leolvasható szorzás szorzandó-szorzó sorrendben tartalmazta a szorzás tagjait. Ez az item tartalmában összefügg azzal az itemmel, amelyen ugyanez a művelet, csak szorzó-szorzendő sorrendben szerepel. E két itemre adott válaszok átlaga nem tér el egymástól szignifikánsan ($M=0,034$; $SD=0,539$; $p=0,333$). Mivel azonban a két item műveleti tartalma ugyanaz, viszont a műveletben részt vevő tagok sorrendje különböző, aminek megértése kiemelkedően fontos a szorzás tanulásának folyamatában, továbbá a nehézségi indexe alacsony, és az item-összpontszám korreláció szignifikáns értéket mutat, így a gyengén szereplő itemet nem távolítottuk el a tesztből. Eltávolítása sem az itemet tartalmazó alteszt, sem a teljes teszt megbízhatóságát nem növelte volna. A többi 0,3 érték alatti itemet is megvizsgáltuk abból a szempontból, hogy eltávolításuk növelné-e az azokat tartalmazó alteszt, vagy a teljes teszt reliabilitását. Az összes 0,3 érték alatti item eltávolítása a teljes teszt reliabilitását nem változtatta volna meg. Mivel a teljes teszt reliabilitása magas (H_6), így annak növelése már nem is volt célunk. Az összes item, vagy az itemek egyenkénti eltávolítása ugyanakkor az azokat tartalmazó altesztek reliabilitását nem növelte volna. Ezek alapján ezeket az itemeket is megőriztük a tesztben.

A megerősítő faktoranalízis eredményei alapján a harmadik évfolyamon mind a három – az egy-, a két- és a háromdimenziós – modell illeszkedési mutatói megfelelőek, ám a negyedik évfolyamon az egydimenziós modell illeszkedése már nem elfogadható. Mivel a szorzás és az osztás egymással összefüggő művelet, végrehajtásukhoz a multiplikatív gondolkodás megfelelő fejlettsége szükséges, így az e két művelet megértését és sikeres végrehajtását mérő feladatok elkülönítése nehéz feladat. Ezt támasztja alá, hogy a kétdimenziós modell, amelyben egy konstruktumként

vizsgáljuk a szorzásra és az osztásra vonatkozó itemeket, mindkét évfolyamon megfelelő illeszkedési mutatókkal rendelkezik. Mindkét évfolyamon a legjobb illeszkedési mutatókkal a három dimenziós modell rendelkezik, ami azt jelenti, hogy az általunk kialakított három alteszt leginkább a matematikai tudás három különböző aspektusát fedi le, és abban elkülöníthetők a szorzásra, az osztásra és a szöveges feladatokra vonatkozó itemek (H₇).

A két évfolyam teljesítményének összevetésekor – a mérőeszköz bemérése során kapott eredmények, és a két évfolyam közötti életkorbeli és várható képességbeli különbségek alapján – azt feltételeztük, hogy a negyedik évfolyam szignifikánsan jobban teljesít az előteszten, mint a harmadik évfolyam. Eredményeink ezt a hipotézist nem erősítik meg (H₈), a negyedik évfolyamos tanulók eredményei sem a teljes teszten, sem az egyes alteszteken nem térnek el szignifikánsan a harmadik évfolyamos diákok eredményeitől. A két évfolyam között nem kimutatható különbség oka kereshető a minta célzott kiválasztásában, amennyiben elsősorban olyan iskolákat kerestünk, ahol a pedagógusok megítélése alapján sok a lemaradással küzdő tanuló. A mintában azok a gyerekek, akik a szorzás és az osztás megértésében második osztályban lemaradtak, lemaradásaikat sem a harmadik, sem a negyedik évfolyamon nem tudták behozni. Így a negyedik évfolyamos diákok teljesítménye ebben a témakörben nem javult a harmadik évfolyamhoz képest.

A személy-item térképen abban a vonatkozásban nem látunk változást az eredeti teszthez képest, hogy a feladatok többsége közepes nehézségű, a gyerekek nagy többségének pedig megfelelő nehézségű a teszt mindkét évfolyamon. Azoknak a negyedikes gyerekeknek a száma, akik számára a teszt nem jelentett kihívást, csökkent, 20% helyett már csak 1% alatti ilyen gyerek van a mintában. Ezzel párhuzamosan azon negyedikesek száma, akiknek a képességszintjét még meghaladja a teszt, 10%-ról 15%-ra növekedett. Ez az eredmény magyarázható azzal, hogy a fejlesztő program célcsoportja a matematikában nehézséggel küzdő, lemaradó diákok, és a minta felkérése során törekedtünk arra, hogy olyan iskolákat vonjunk be, ahol feltételezhető, hogy magas a gyerekek aránya. Azaz azoknak a gyerekeknek a jelentős aránya, akiknek a teszt még nehéznek bizonyult nem abból fakad, hogy a feladatok nem a korosztálynak megfelelőek, hanem abból, hogy a mintaválasztás során olyan iskolákat kerestünk, ahol feltételezhető, hogy sok olyan gyerek van, akiknek elakadása lehet a második osztályos matematika követelményekben is. Eredményeink arra mutatnak rá, hogy a mérőeszköz mind a teljes teszt vonatkozásában, mind az egyes altesztjeiben megfelelően működik a teljes minta, illetve az egyes évfolyamok esetén is. Ezáltal a kilencedik hipotézisünk is megerősítést nyert (H₉).

A mérőeszköz használatát, mint a teszt megoldásának alapvető feltételét vizsgáló feladatok eredményei a gyerekek magabiztos géphasználatáról tanúskodnak. Ezáltal igazolódott a tizedik hipotézisünk (H₁₀), a géphasználat nem befolyásolta a teszt megoldását.

6.6 A fejlesztőprogram pilot hatásvizsgálatának eredményei

Évfolyamonként az egyes csoportok között a két tesztfelvételi időpontban mérhető különbséget és a csoportokon belül az elő- és utóteszten elért eredmények közötti változást t-próbákkal vizsgáltuk, a hatásméretet pedig Cohen-d-ben adtuk meg (17. táblázat). Amennyiben a kontroll és a kísérleti csoport előteszten elért eredményét vetjük össze évfolyamonként, nem találunk közöttük szignifikáns eltérést, a tanuló párok előteszten elért eredmények alapján történt kialakításának köszönhetően.

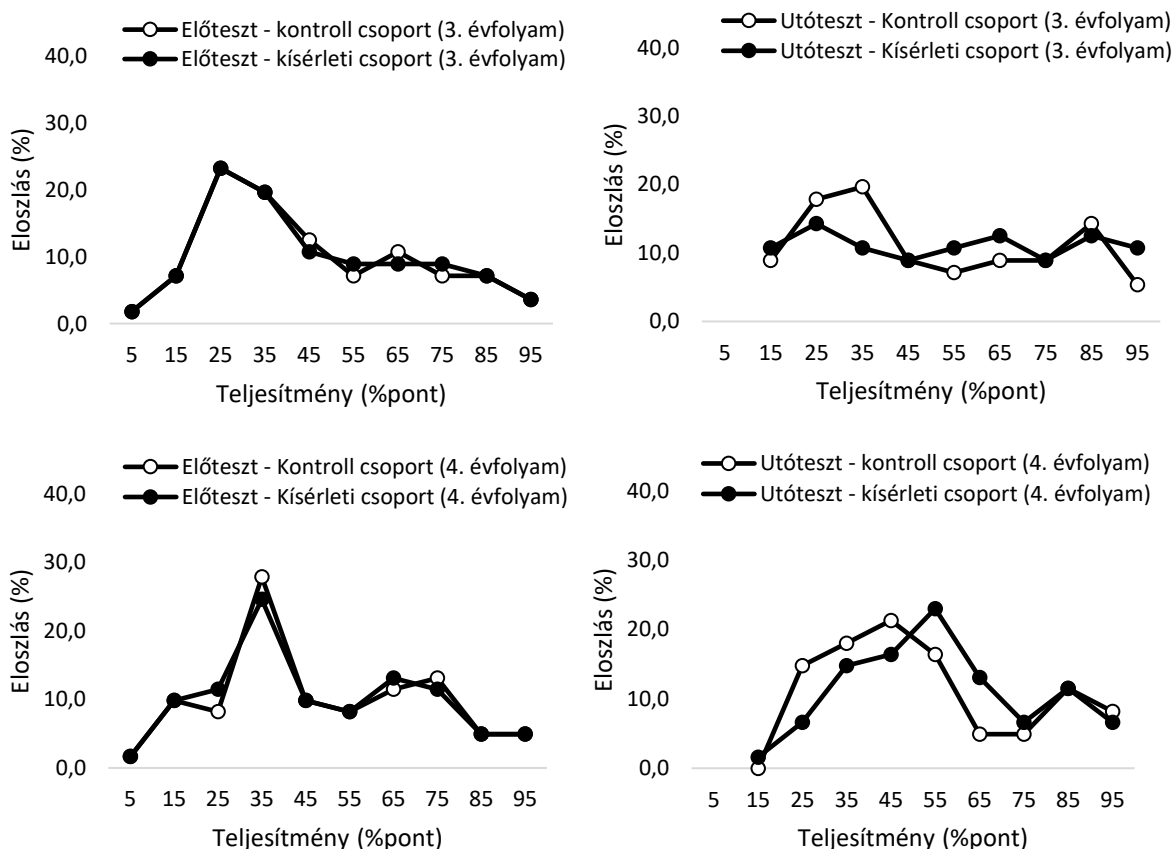
Mindkét évfolyamon szignifikánsan javult mind a kísérleti, mind a kontroll csoportban a tanulók teljesítménye az elő- és az utóteszt közötti időszakban. A két csoport a fejlesztés időtartama alatti iskolai oktatás hatására fejlődik, ezt jelzi a kontroll csoport teljesítményében kimutatható szignifikáns javulás. A kísérleti csoport önmagához mért fejlődése jelentősebb, mint a kontroll csoporté. Az ő fejlődésükhöz a kontroll csoporttal azonos iskolai fejlesztő hatáson túl a digitális fejlesztőprogram is hozzájárult. A kísérleti és a kontroll csoport utóteszten elért eredményeinek összevetésekor kimutatható a fejlesztőprogram kis hatásmérete. Cohen d-ben, azaz szórás egységben kifejezve a változás, a hatásméret nagyságát, a harmadik évfolyamon 0,17, negyedik évfolyamon 0,18 a Cohen-d értéke. Az eredmények azt támasztják alá, hogy az újonnan kidolgozott digitális fejlesztőprogram hatékonyan képes fejleszteni az alapvető matematikai készségeket a szorzás, az osztás és e két művelet valamelyikével megoldható szöveges feladatok megértése terén az alsó tagozaton. Az iskolai oktatás kiegészítéseként alkalmazva, a kísérleti csoport tagjai kimutathatóan jobban fejlődnek (H_{11}).

17. táblázat. A csoporton belüli, és a csoportok közötti teljesítménykülönbség az elő- és az utóteszten évfolyamok szerinti bontásban

	Évfolyam	N	Előteszt		Utóteszt		r	t	p	d
			Átlag	Szórás	Átlag	Szórás				
Kísérleti csoport	3	56	42,45	24,11	51,38	26,49	0,799	4,12	<0,001	0,35
	4	61	43,79	24,45	53,07	21,81	0,840	5,44	<0,001	0,39
Kontroll csoport	3	56	42,19	24,59	46,94	25,71	0,898	3,12	<0,01	0,19
	4	61	44,45	24,37	48,48	23,88	0,863	2,49	<0,01	0,17
t (p)	3	112	t=-0,055; p=0,478		t=-0,900; p=0,185					
	4	122	t=0,148; p=0,441		t=-1,109; p=0,135					
d	3	112	0,01		0,17					
	4	122	0,03		0,20					

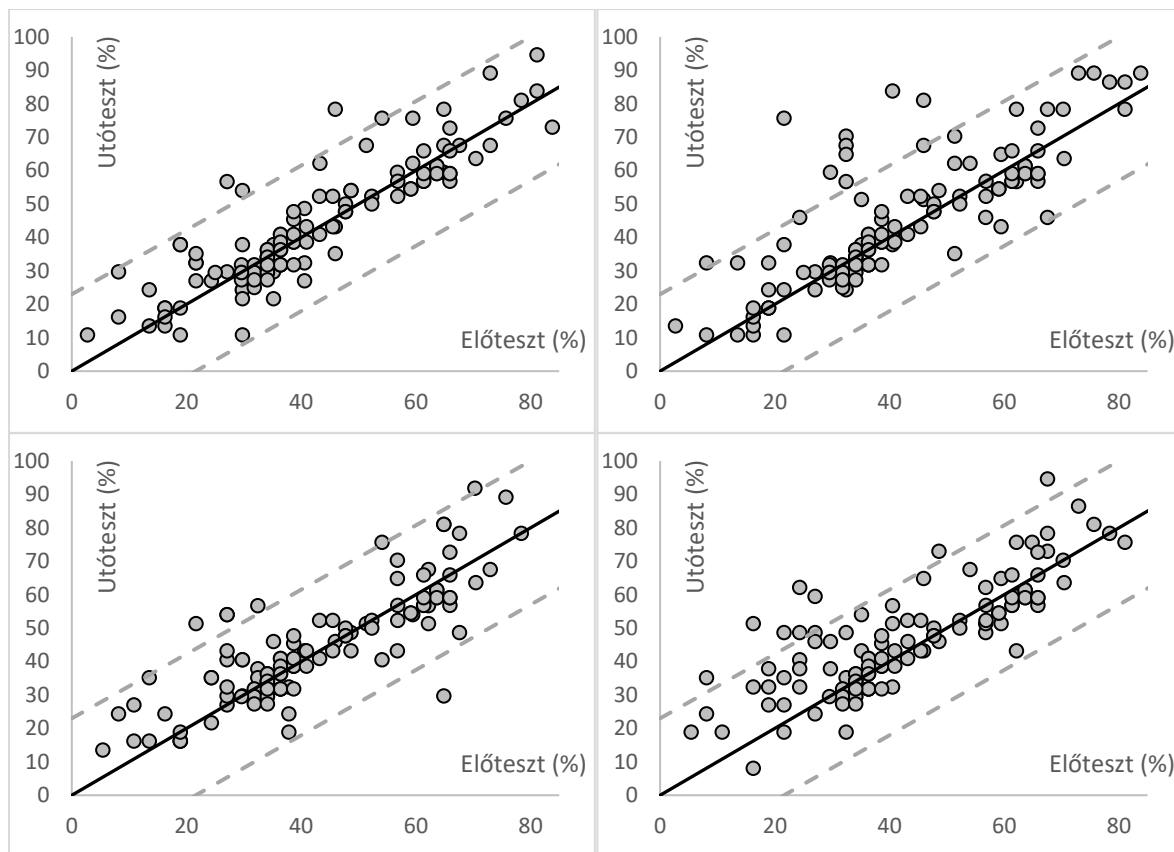
A kísérleti és a kontroll csoportos tanulók teljesítményének eloszlását összevetettük mind a harmadik, mind a negyedik évfolyamon (18. ábra). Az előteszten az eloszlási görbék megegyeznek.

Az utóteszten mindkét évfolyamon és mind a kísérleti, mind a kontroll csoport tekintetében enyhe jobbra, azaz a jobb teljesítményértékek irányba történő eltolódást figyelhetünk meg. Ez azt jelzi, hogy ez az életkor a gyermekek kognitív fejlődésében egy szenzitív időszak, amikor rövid idő alatt úgy is fejlődnek, ha az iskolai oktatáson kívül egyéb fejlesztő tevékenységet nem biztosítunk számukra. Harmadik évfolyamon a kísérleti csoport teljesítménygörbéje jobban ellaposodik, mint a kontroll csoporté, a teljesítményük egyenletesebben oszlik el, a görbe bal oldali csúcsa eltűnik. Más szóval, a kontroll csoporthoz képest azoknak a fejlesztésben részesült gyerekeknek, akik az előteszten a gyengébb teljesítménytartományban helyezkedtek el, az utótesztre a teljesítményük láthatóan javul. Negyedik évfolyamon a teljesítménygörbéknek mindkét csoportban megfigyelhető a csúcsa, amely mindkét esetben jobbra tolódott. A kísérleti csoport teljesítménygörbéjének csúcsa azonban nagyobb mértékben, a teljesítményskála közepe felé tolódik, azt jelezve, hogy az előteszten gyengébb eredményt elért tanulók közül a kísérleti csoportba tartozók nagyobb fejlődésen mentek keresztül, mint kontroll csoportos társaik. Az eloszlásgörbék alapján azt feltételezzük, hogy az előteszten gyenge teljesítményt nyújtó gyerekek tanultak legtöbbet a fejlesztőprogramból.



18. ábra. A kontroll és a kísérleti csoport teljesítményének eloszlása az előteszten (bal oldal) és az utóteszten (jobb oldal), a harmadik évfolyamon (első sor) és a negyedik évfolyamon (második sor)

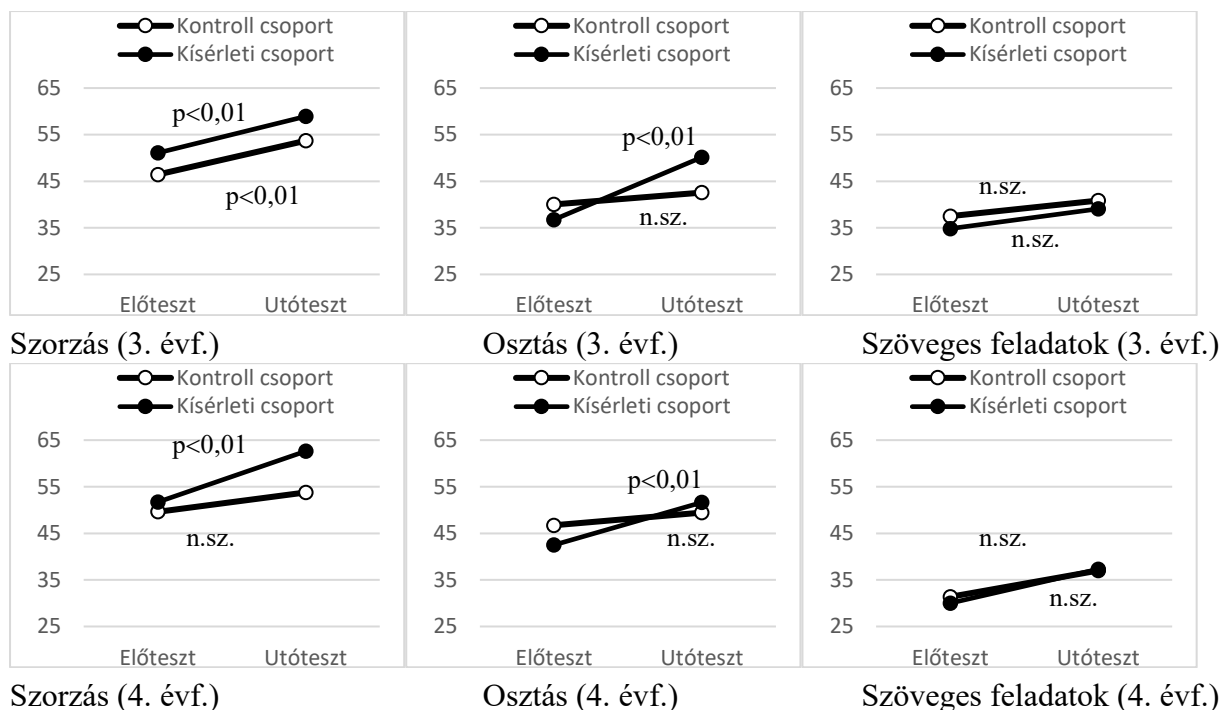
A tanulói szintű elemzések alátámasztják a csoportszintű eredményeket. A tanulók elő- és utóteszten nyújtott teljesítménye évfolyamonként a 19. ábrán látható. Az abszcissa a gyermekek előteszten elért eredményeit mutatja, míg az ordináta az utóteszt eredményeit ábrázolja. Minden pont egy-egy tanulót jelöl. A két szaggatott vonal egy-egy szórásnyira helyezkedik el az átlagtól. Azok a tanulók, akiknek az őket jelző szimbólumai az átlagvonalon vagy a két szaggatott vonal között, tehát kevesebb, mint egy szórásnyira az átlagtól helyezkednek el, mindkét teszten azonos teljesítményt nyújtottak. Ha egy tanulót jelző pont a felső szaggatott vonal fölött helyezkedik el, az azt jelenti, hogy a tanuló jelentős javulást mutatott az előteszthez képest az utóteszten. Ezzel szemben, ha egy pont az alsó szaggatott vonal alatt helyezkedik el, az jelentősen rosszabb teljesítményt jelez az első és a második teszt között. A kontroll és a kísérleti csoport tanulói szintű elemzését bemutató ábrák összehasonlításakor enyhe felfelé irányuló eltolódás figyelhető meg a kísérleti csoportnál a kontroll csoporthoz képest, azaz mind harmadik, mind negyedik osztályban több pont található a szaggatott vonal felett. Más szóval, több kísérleti csoportba tartozó tanuló javította jelentősen a teljesítményét, mint a kontroll csoportban. Az eloszlások vizsgálata során bemutatott és a tanulói szintű elemzések eredményei megerősítik a hipotézisünket (H_{12}), miszerint az alacsony képességszinttel rendelkező diákok fejlődését segíti elő legnagyobb mértékben az általunk kidolgozott matematikai fejlesztőprogram.



19. ábra. A teljesítmény elő- és utóteszten mért tanulói szintű változása a kontroll csoportban (bal oldal) és a kísérleti csoportban (jobb oldal) a harmadik évfolyamon (felső sor) és a negyedik évfolyamon (alsó sor)

A 20. ábra a kontroll- és kísérleti csoportok teljesítménykülönbségeit ábrázolja a vizsgálatban szereplő alapvető matematikai készségeket, a szorzást, az osztást és a szöveges feladatok megértését mérő alteszteken belül. A szorzás területén a harmadik évfolyamon mindkét csoport szignifikánsan jobb eredményt ért el az utóteszten az előteszthez képest. Negyedik évfolyamon a kísérleti csoport eredménye javul szignifikánsan, a kontroll csoport eredményében ilyen mértékű javulás már nem figyelhető meg. Az osztás esetén mindkét évfolyamra igaz, hogy a kontroll csoport teljesítménye a fejlesztés időtartama alatt nem változik, ellenben a kísérleti csoport szignifikáns fejlődést mutat. A gyerekek tehát ezen a területen is jól reagálnak egy rövid időintervallumban, és összességében rövid fejlesztésre fordított időtartamban megvalósuló beavatkozásra is. A szöveges feladatokat illetően a harmadikosok eredményeihez hasonlóan a negyedikesek körében sem volt szignifikáns előrelépés a szöveges feladatok megoldásához szükséges matematikai műveletek megválasztását vizsgáló alteszten sem a kísérleti, sem a kontroll csoportban. A felállított hipotézisünket, miszerint a fejlesztőprogram hatására mindhárom alteszten

a fejlesztőprogram hatására javul szignifikánsan a kísérleti csoport teljesítménye, eredményeink részben igazolták (H_{13}).



20. ábra. A kontroll és a kísérleti csoportok teljesítményének változása az előteszt és az utóteszt között a harmadik és a negyedik évfolyamon az egyes altesztek vonatkozásában

Megvizsgáltuk, hogy a fejlesztőprogram milyen hatással van az egyes évfolyamokon belül a fiúk, illetve a lányok teljesítményére, továbbá azt is, hogy azonos fejlesztő hatással bír-e a fiúk és a lányok csoportjára az egyes évfolyamokon belül. Az elemzést páros t-teszt és független t-teszt elemzésekkel végeztük. Az eredményeket a 18. táblázat tartalmazza.

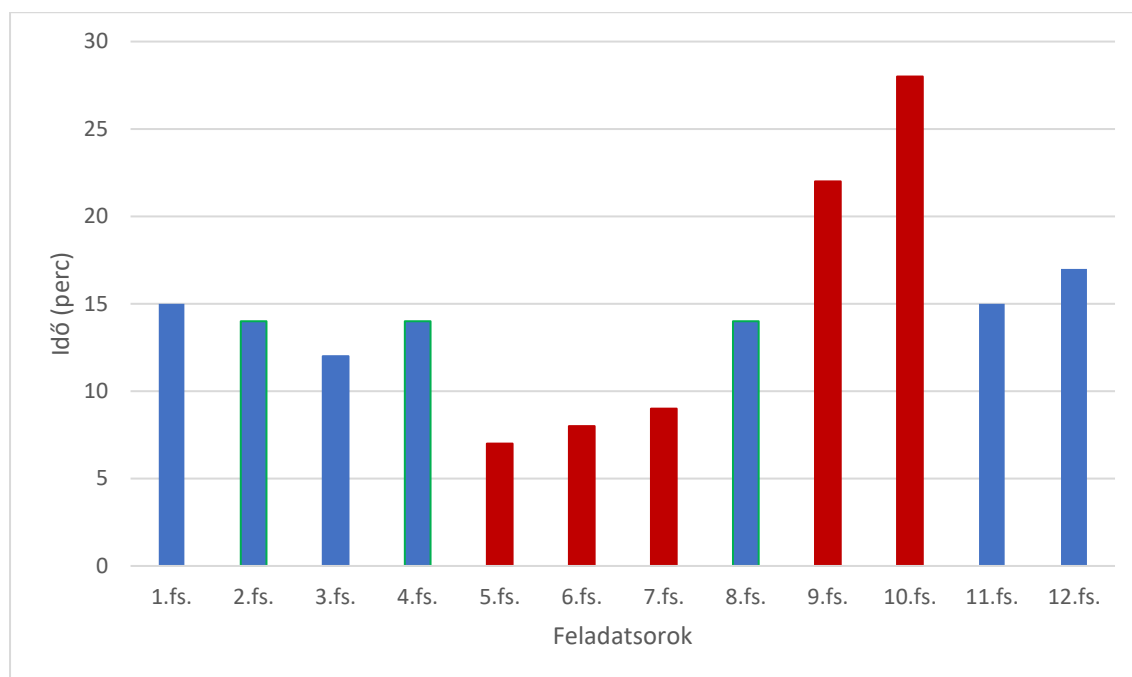
Az iskolai oktatás hatását tekintve a kontroll csoport eredményeit vizsgálva azt látjuk, hogy a negyedik évfolyamon a teljes csoport szignifikáns fejlődését a lányok és a fiúk együtt határozták meg, mivel e két csoport külön-külön vizsgálatakor sem a lányok, sem a fiúk nem fejlődtek szignifikánsan. A harmadik osztályos kontrollcsoport jelentős fejlődése azonban a fiúknak köszönhető, amint ez a 18. táblázatban látható. A kísérleti csoport esetében mindkét évfolyamon mind a fiúk, mind a lányok teljesítménye szignifikánsan javult. Évfolyamonként a kísérleti és a kontroll csoportokon belül a fiúk és a lányok teljesítményének összevetésekor nem mutatható ki szignifikáns különbség. Ez a fejlesztőprogram tekintetében azt jelenti, hogy az az eltérő nemű gyerekcsoportok fejlődésére gyakorolt hatásában igazságosnak bizonyult. Ezzel igazoltuk hipotézisünket, miszerint a fejlesztőprogram hatékonyságának mértékében nincsen különbség a fiúk és a lányok között egyik évfolyamon sem (H_{14}).

18. táblázat. A nemek szerinti csoportokon belüli és csoportok közötti teljesítménykülönbségek a harmadik és a negyedik évfolyamokon a kontroll és a kísérleti csoportokban és csoportok között

Évf		N	Korre- láció	Átlag különb- sége	Szó- rás	t_elő_úto (p)	t_elő (p)	t_úto (p)	
3	Kont- roll	fiú	25	0,939	5,27	8,91	-3,02 (p<0,01)	-1,48 (p=0,074)	-1.261 (p=0,106)
		lány	31	0,856	4,29	13,31	-1,76 (p<0,05)		
	Kísér- leti	fiú	25	0,854	7,54	14,42	-2,62 (p<0,01)	-0,335 (p=0,370)	-0,646 (p=0,261)
		lány	31	0,765	10,05	17,69	-3,16 (p<0,01)		
4	Kont- roll	fiú	32	0,886	4,63	13,16	-1,89 (p<0,05)	0,826 (p=0,206)	1,024 (p=0,156)
		lány	29	0,828	3,48	12,35	-1,59 (p=0,6)		
	Kísér- leti	fiú	32	0,833	9,91	13,75	-4,08 (p<0,001)	-1,248 (p=0,108)	-1,166 (p=0,124)
		lány	29	0,846	8,57	13,02	-3,54 (p<0,001)		

A fejlesztőprogram működésének elemzése során megvizsgáltuk, hogy egy-egy fejlesztő egység feladataival átlagosan hány percet töltöttek el a tanulók. Ahhoz, hogy egy fejlesztőprogram hatékonyan működjön, fontos, hogy a fejlesztésben résztvevők ne irreálisan kevés idő alatt jussanak végig egy-egy egységen, ugyanakkor ne is legyen számukra megterhelően hosszú egy-egy fejlesztéssel töltött alkalom. A fejlesztőprogram egységei közül mindössze három olyan volt, amelynek megoldásával a tanulók átlagosan 15-20 perc közötti időt töltöttek (21. ábra). További négy egység volt, amelynek a megoldási ideje csak kis mértékben volt kevesebb, mint 15 perc. Ezt az időtartamot még elfogadhatónak ítéltük. Ezeket az egységeket kékkel jelöltük a diagramon. Ugyanakkor öt olyan fejlesztő egység volt, amelynek megoldási ideje kirívóan eltért attól, amelyek kitöltési ideje 14 és 20 perc közé esett. Ezeket a diagramon pirossal jelöltük. Ezek közül az 5., 6. és 7. egységeken a tanulók túlságosan rövid időt, kevesebb, mint 10 percet, két egységen, a 9. és 10-en pedig a többi egységhez képest jóval több időt töltöttek.

Az 5-7. egységek lényegében rendkívül kis továbblépésekkel már az első egységben bevezetett tartalmat, a szorzás értelmezését segítik, és e tudást mélyítik el. A kis továbblépések közé tartozik a szorzás lejegyzésének alapozása és a szorzás és osztás kapcsolatának előkészítése. Megfigyeltük, hogy e három egységen töltött idő szórása is a legkisebb intervallumot öleli fel az egységek között (rendre 4,5; 3,5; 3,7 perc). Feltételezhető, hogy a gyerekek azért töltöttek ennyire kevés időt ezeken, mert ezek tartalmát a korábbi egységek már megfelelően előkészítették és megalapozták, és a túlságosan elnyújtott gyakorlás a jobb képességszinttel rendelkező gyerekeket sem állította kihívás elé, és a gyengébb képességszinttel rendelkező gyerekeknek is könnyűnek bizonyult. Arra következtetünk tehát, hogy e három egység tartalma összevonható kettőbe. A 9. és a 10. egységeken töltött idő is kapcsolatban van azok tartalmával. Ez a két egység új témakört vezet be, a kilencedik a bennfoglalást, a tizedik az egyenlő részekre osztást. A megoldással töltött idő alapján e két témakört érdemes több egységre elosztva tárgyalni. Eredményeink alapján nem teljesült az a hipotézisünk (H_{15}), hogy a fejlesztőprogram egyes egységeinek megoldásával a tanulók átlagban közel azonos időt töltenek.



21. ábra. A digitális matematikai fejlesztőprogram egyes egységein töltött időtartamok átlaga (kék szín: az időtartam 10 és 20 perc közé esik; piros szín: az időtartam a 10 és 20 perc közötti időtartamon kívülre esik)

6.7 A fejlesztőprogram pilot hatásvizsgálata eredményeinek megvitatása

Az előző fejezetben egy digitális matematikaigondolkodás-fejlesztő program pilot vizsgálatának eredményeit mutattuk be. A program célja, hogy megszüntesse, vagy legalább jelentősen csökkentse az alapvető matematikai készségek terén fennálló tanulási szakadékot a harmadik és negyedik osztályos gyermekek körében. A tanulmány kvázi-kísérleti tervezést követett, és a hatékonysága értékelésének érdekében az előteszt eredményei alapján tanulópárokat alakítottunk ki. A fejlesztőprogram kontextusa a tantervi követelményeken alapult, ugyanakkor a témák feldolgozása némely aspektusában eltért a tanárok által többségében használt tankönyvekben megszokottaktól. A fejlesztés a szorzás és osztás fogalmainak és a szöveges feladatok tartalmának megértésére irányult a tanulók gondolkodási készségeinek javítása révén. A tizenkétfejlesztő egység összesen 276 feladatot tartalmazott, melyeket a program a diák választól függően különböző tanulási útvonalakon közvetített ki a tanulók számára. Ezáltal biztosított személyre szabott tanulási útvonalakat. A program hatékonyságát egy megbízható digitális mérőeszközzel felvett adatok alapján vizsgáltuk.

A digitális fejlesztőprogram hatékonyságáról összességében elmondható, hogy bár mindkét évfolyamon mindkét csoport teljesítménye szignifikánsan javul az utóteszt idejére, azon tanulók fejlődésében, akik a fejlesztő egységek több mint felét teljesítették, az iskolai oktatás és a fejlesztőprogram együttes hatásmérete nagyobb volt, mint a kontroll csoport esetében az iskolai oktatás hatásmérete. A kísérleti csoport tagjai körében az együttes hatásméret mind a harmadik, mind a negyedik osztályban közepes volt ($d_{3\text{évf_kís}}=0,35$; $d_{4\text{évf_kís}}=0,39$). A kontroll csoport tagjai körében az iskolai oktatás hatásmérete mind a harmadik, mind a negyedik osztályban kicsi volt ($d_{3\text{évf_kont}}=0,19$; $d_{4\text{évf_kont}}=0,17$). Az eredmények azt mutatták, hogy a program fejleszti a harmadik és negyedik osztályos gyermekek alapvető matematikai készségeit (H_{11}).

Ezek a tanulók már a második osztályban találkoztak a fejlesztés tartalmával. Ezért a digitális fejlesztőprogram sikeresnek tekinthető, ha javítja azok teljesítményét, akik lemaradásban vannak. A csoportszintű eloszlási görbék és a tanulói szintű elemzések alapján megállapíthatjuk, hogy azok fejlődtek a legtöbbet a program révén, akiknek az előteszt eredményei alapján nehézségeik voltak az érintett matematikai területeken (H_{12}). Korábbi kutatások is beszámoltak róla, hogy amennyiben egy általános iskolai korosztályt célzó fejlesztőprogram nem a tesztre tanít, hanem a szükséges készségeket fejleszti az alapfogalmak megértéséhez, akkor az utóteszten mért fejlődés a jövőben sem tűnik el (Dowker, 2019). Pilot kutatásunkban késleltetett utótesztet nem vettünk fel. Ugyanakkor az utóteszt eredményei alapján megfogalmazhattuk azt az elvárást, hogy a nagymintás kutatás során a fejlesztésben részesülő tanulók késleltetett utóteszten mérendő teljesítménye ne essen vissza az utóteszt eredményéhez képest. A pilot kutatás eredménye megerősíti a korábbi kutatási eredmények azon aspektusát, hogy a legalacsonyabb teljesítményt nyújtó tanulók

teljesítménye is javítható digitális fejlesztőprogramokkal (Benavides-Varela et al., 2020; Kuhn et al., 2020; Shih et al., 2023).

A felállított hipotézisünket, miszerint a fejlesztőprogram hatására mindhárom alteszten szignifikánsan javul a kísérleti csoport teljesítménye, eredményeink részben igazolták (H_{13}). Az osztás területén mindkét évfolyamon csak a kísérleti csoport indul szignifikáns fejlődésnek, mely fejlődést a digitális fejlesztőprogram hatásának tulajdoníthatunk. Ugyanez mondható el a negyedik évfolyamon a szorzás területén. Harmadik évfolyamon a szorzás területén a kísérleti csoport szintén fejlődésnek indul, ám ez a fejlődés párhuzamosan halad a kontroll csoport fejlődésével, tehát nem tudjuk megállapítani, hogy ebben a fejlődésben mekkora szerepe van a digitális matematikai fejlesztőprogramnak. Ugyanakkor figyelembe véve a kutatás módszereinél (7.3. fejezet) leírtakat a kutatás megvalósulásának nehézségeiről, fennállt az a rizikó, hogy a fejlesztésben részt vevő gyerekek a fejlesztő egységek kiközvetítéséből adódó következtetlenségek és esetlegességek miatt – melyek a tananyag nem rendszerezett és nem logikus megismeréséhez vezettek – a szorzás területén vagy stagnálnak, vagy akár rontanak is az előteszt eredményeihez képest. Ennek fényében eredménynek tekintjük, hogy a harmadikos tanulók fejlődése a kontroll csoporttal párhuzamosan és szignifikánsan javult.

Az az eredmény, hogy a negyedik évfolyamon a kísérleti csoport tagjai szignifikánsan fejlődnek, míg a kontroll csoportban ilyen változás nem következik be tulajdonítható annak is, hogy ezek a gyerekek már találkoztak tanulmányaik során a szorzás kommutativitásával, illetve több tapasztalatuk van a vizsgált témakörökben, így könnyebben reagálnak pozitívan a fejlesztőprogram e zavaró aspektusára is.

A negyedik évfolyamon a kontroll csoport stagnálásának oka lehet, hogy azok a gyerekek, akik második évfolyamon lemaradtak, és hiányaikat nem tudták pótolni, kizárólag az iskolai oktatás hatására néhány hét alatt már nem tudnak fejlődni. Oka lehet azonban az is, hogy a kutatásban részt vevő gyerekek a kutatást megelőző év tavaszi félévében távolléti oktatásban részesültek. A kutatásban részt vevő harmadikosok abban a félévben – ha távolléti formában is, de – találkoztak a szorzással, mint új ismerettel a második évfolyamon. A negyedikesek esetében elképzelhető, hogy a megelőző tanévben a távolléti oktatás keretei között kevesebb, vagy a jelenléti oktatással nem azonos mértékű ismétlést, a már megszerzett ismeretek konszolidálását célzó oktatást biztosítottak számukra. Ilyen előzmények mellett már nagyobb a szakadék az aktuális iskolai tananyag és az ahhoz szükséges alapvető készségek és ismeretek között. Ugyanakkor, ahogyan a 19. ábráról leolvasható, az azonos mértékű lemaradást mutató kísérleti csoportba tartozó negyedikesek célzott fejlesztés hatására rövid időn belül is mérhető fejlődésnek indulnak.

A szöveges feladatok alteszten sem a kontroll, sem a kísérleti csoport eredménye nem javult szignifikánsan. Ez az eredmény fakadhat a szöveges feladatok megértésében rejlő nehézségekből (Csíkos, 2003), a fejlesztésre fordított rövid időtartamból és az olvasástanulás lassú folyamatából

(Blomert & Csépe, 2012) is, hiszen a szöveges feladatok megoldása szorosan összefügg az olvasásértési teljesítménnyel (Vilenius-Tuohimaa et al., 2008; Boone et al., 2016; Gunbas & Kinzer, 2025). Mivel ennek fejlődése hosszú folyamat, így ez a matematikai készségeket fejlesztő rövid időtartamot felölelő fejlesztőprogram tudatosan nem vállalkozott az olvasási és olvasott szövegértési teljesítmény javítására. Azáltal, hogy minden feladathoz biztosítottuk, hogy a tanulók akár többször is meg tudják hallgatni az instrukciót és magát a matematikai problémahelyzetet, a szöveges feladatot is, az olvasási teljesítmény matematikai teljesítményre gyakorolt hatását igyekeztünk minél jobban csökkenteni. Azonban e feladatok megoldásához a megfelelő szintű szövegértés akkor is nélkülözhetetlen, ha hallott szövegről van szó. Következésképpen az olvasott és hallott szöveg-értési készségek fejlesztése elengedhetetlen része a matematikai gondolkodás és a szöveges feladatokhoz szükséges matematikai készségek fejlesztésének.

A lányok és a fiúk matematikai teljesítményének összehasonlításáról eltérő kutatási eredmények állnak rendelkezésünkre. Habár a kutatások többségében a fiúk előnyéről számolnak be (pl. Carmichael et al., 2014; Weis et al., 2013), találunk adatokat a lányok előnyére vonatkozóan is (pl. Mensah & Kiernan, 2010). Egy 18 000 gyermeket bevonó longitudinális francia vizsgálat arra a következtetésre jutott, hogy a fiúk előnye az óvoda-iskola átmenet időszakában alakul ki (Fischer & Thierry, 2022). Magyarországon a 2022-es PISA mérésen a fiúk matematikateljesítménye 15 ponttal haladta meg a lányokét (Oktatási Hivatal, 2022). Ebben a keretben nyer értelmet az a kutatási adatunk, hogy amíg a harmadik évfolyamos kontroll csoport fejlődése a fiúknak köszönhető, addig a kísérleti csoportban mindkét évfolyamon szignifikánsan javult mind a lányok, mind a fiúk teljesítménye. Azaz a matematikai fejlesztőprogram azonos fejlődési lehetőséget biztosít mindkét nem számára.

Az egyes fejlesztő egységek megoldása nem egyenletes időbeli terhelést jelentett a diákoknak, ezáltal az erre vonatkozó hipotézisünk nem igazolódott (H_{15}). A fejlesztőprogram által kínált terhelést tekintve a nagymintás kutatáshoz az egyes fejlesztő egységekbe fűzött feladatok mennyiségén módosítani szükséges a megoldással töltött idő alapján. A teljes fejlesztősor közepén az előrehaladás biztosítása lassúnak bizonyult, ezek az egységek kevesebb kihívást jelentettek. A túlságosan lassú haladás azonban nem hat fejlesztően a gyenge képességű tanulóakra sem (Stein et al., 2008). Ennek megoldása érdekében össze is lehet vonni egységeket, illetve az eredetiek megtartásával, vagy részleges összevonásával azokat dúsítani lehet további, a játékosítás irányába mutató tartalommal. Mivel a fejlesztőprogram kisebb hangsúlyt helyez a procedurális tudás fejlesztésére, a további beillesztendő tartalom esetén érdemesnek látszik ennek fejlesztésére szolgáló, ugyanakkor a motivációt is növelő feladatokat létrehozni. Az osztás két értelmezésének bevezetése viszont hirtelen jelentett nagy terhelést, így ezt a tartalmat kisebb egységekben érdemes feldolgozni.

A fejlesztőprogramban való részvétel után kimutatható kis hatásméret ($d_{3\text{évf}}=0,17$; $d_{4\text{évf}}=0,20$) megerősítette, hogy a szakirodalomban megfogalmazott jellemzők mentén hatékony digitális matematikai fejlesztőprogram létrehozásában jó úton járunk (Choppin & Borys, 2017; Gaffney, 2010; Hanson & Carlson, 2005; Huang et al., 2014). A program a tanulók naplózott válaszai alapján különböző tanulási útvonalakat biztosított. A feladatokat a kötelező tanterv mellett végezték el. A tartalom korosztálynak megfelelő volt, az utasításokat kis szegmensekre osztottuk, vizuális és auditív megsegítést biztosítottunk a megértés elősegítése, a figyelem és a motiváció fenntartása érdekében. Egy ilyen paraméterekkel rendelkező digitális program – a megfelelő változtatások végrehajtásával – alkalmas lehet az általános iskolás tanulók alapvető matematikai készségeinek fejlesztésére online környezetben, úgy, hogy a tanár részéről nem igényel többletmunkát. Dowker 2017-es kutatása alapján arra következtethetünk, hogy a fejlesztőprogramban részt vevő diákok – amennyiben megőrzik a fejlesztőprogram segítségével elsajátított tudást – nagyobb eséllyel lesznek képesek megérteni egyes magasabb évfolyamokon tanított matematikai témaköröket, mint kontroll csoportos társaik.

Ez az eredmény ösztönzően hatott arra nézve, hogy a pilot program alapján megfogalmazott változtatások végrehajtása után nagymintás kutatásban vizsgáljuk a módosított fejlesztőprogram hatékonyságát, hogy ezáltal választ adjunk azokra a sürgető igényekre, hogy fejlesztőprogramokat kínáljunk azoknak az iskolásoknak, akiknek a legnagyobb szükségük van támogatásra (Cawley et al., 2011; Workman, 2022).

Miután az oktatáshoz való hozzáférés egyenlőtlenségei mélyen érintik a legkiszolgáltatottabb gyermekeket, ennek következményei tartósak és helyrehozhatatlanok lehetnek. Ezért a beavatkozást a lehető legkorábban el kell kezdeni és hosszú távon fenn kell tartani (Workman, 2022; Flores, 2007). Ennek lehetőségét bizonyította a pilot kutatás során vizsgált matematikai fejlesztőprogram.

7 A fejlesztő program nagymintás hatásvizsgálatának bemutatása

7.1 Minta

A kutatás mintáját harmadik és negyedik osztályos általános iskolai tanulók (9–11 évesek) alkották. Összesen 2187 tanuló vett részt a kvázi-kísérleti elrendezésben megvalósult kutatásban. Az adattisztítás után 810 tanuló adatai kerültek be az elemzésekbe. Csak azoknak a tanulóknak az adatait dolgoztuk fel, akik nemcsak az előtesztet és az utótesztet, hanem a késleltetett utótesztet is megoldották. Közülük kizártuk azokat a tanulókat, akikről valamely teljesítményteszten az itemek több mint 50%-ában nem rendelkezünk adatokkal. A teszt megoldására fordított idő alapján kizártuk azokat is, akik nem töltöttek el annyi időt a feladatokkal, amennyi minimálisan szükséges lett volna legalább az utasítások elolvasásához vagy meghallgatásához. Továbbá kizártuk azokat a kísérleti csoportban részt vevő tanulókat is, akik a fejlesztőprogram kevesebb mint felét teljesítették. Az adattisztítást követően 'propensity score matching' eljárással a kísérleti csoport minden tanulójaához egy kontrollcsoportos tanulót rendeltünk hozzá, évfolyam (3. vagy 4.) és az előteszt teljesítményük alapján. Mindezen eljárások eredményeként harmadik évfolyamon 207, negyedik évfolyamon 198 kísérleti–kontroll csoport pár (összesen 810 tanuló) adatai kerültek be az elemzésbe (19. táblázat). A minta bemutatása során a háttéradatokat csak azon tanulók vonatkozásában vizsgáljuk, akiknek adatait bevontuk az elemzésekbe.

19. táblázat. A fejlesztőprogram nagymintás hatásvizsgálatának mintája

Évfolyam	Tanulók létszáma	Kísérleti
		Kontroll
3.	414	207
		207
4.	396	198
		198
Sum	810	405
		405

A fejlesztés a 2021/2022-es tanévben zajlott. Ezt a tanévet már nem jellemezték a járványhelyzet miatt elrendelt iskolabezárások. A kutatásba bevont diákok azonban a megelőző két tanévben legalább 19 hetet távolléti oktatásban töltöttek (Molnár & Hermann, 2023). A bezárások miatt elszenvedett tanulási veszteség pedig az alsó tagozatos tanulók körében volt a legnagyobb (Molnár & Hermann, 2023; Tomasik et al., 2021). A kutatásba bevont gyerekek mindkét évfolyamon ezekben a bezárásokkal nehezített tanévekben találkoztak először a szorzás és az osztás témakörével.

Az adatalemzésbe bevont 810 diák 36 általános iskolából került ki, területi eloszlás szerint az ország minden tájegységéről. 4 nyugat-dunántúli, 6 dél-dunántúli, 2 közép-dunántúli, 2 közép-magyarországi, 6 észak-magyarországi, 5 észak-alföldi és 11 dél-alföldi iskola vett részt a fejlesztésben. Településtípus szerint az iskolák közül 1 a fővárosban, 6 megyeszékhelyen, 11 városban, 18 községben működik.

A magyar iskolarendszer szegregáló jellege és romló hátránykompenzációs ereje miatt (OECD, 2023; Radó, 2023) e minta jellemzőinek bemutatásához – csakúgy, mint a pilot kutatás mintájának jellemzéséhez – támpontul szolgálhat a kutatásba bevont általános iskolák diákjainak Országos kompetenciamérésen nyújtott teljesítménye.

A 2021/2022-es tanévben hatodik osztályos diákok a 2019/2020-as tanévben még alsó tagozatos negyedikesek voltak. Amennyiben megvizsgáljuk, hogy a kutatásban részt vevő 36 iskola hatodik évfolyamos diákjai a 2019-es, a 2021-es és a 2022-es kompetenciamérésen milyen teljesítményt nyújtottak, azt állapíthatjuk meg, hogy az iskolabezárások második évében, a 2020/2021-es tanévben, 11 iskola hatodikos diákjainak eredménye romlott a járvány előtti eredményekhez képest, és 6 olyan iskola van, ahol a diákok teljesítménye javult (20. táblázat). Az iskolabezárásokat követő 2021/2022-es tanévben a 2019-es adatokkal összevetve ez az arány romlott. Hét iskola az országos átlagnak megfelelően teljesített 2019-ben, de 2022-re a teljesítményük már szignifikánsan romlott. Két iskola az országos átlag felett teljesített 2019-ben, de 2022-re már szignifikánsan rosszabb teljesítményt mutattak. További hét olyan iskola van, amely 2019-ben és 2022-ben is az országos átlagnál szignifikánsan rosszabbul teljesített. Mindössze négy olyan iskola van, amely javítani tudott a 2019-es eredményen. 20 iskolában a minimum szintet el nem érő hatodik osztályos diákok aránya magasabb volt, mint az országos átlag.

20. táblázat. A kutatásba bevont általános iskolák országos átlagához mért eredménye a 2018/2019, 2020/2021 és 2021/2022-es tanévben zajlott Országos kompetenciamérésen, valamint a minimum szintet el nem érő tanulók aránya a 2021/2022-es tanévben a 6. évfolyamos tanulók körében

Iskola kódja	Település-típus	Teljesítmény az országos átlaghoz képest (2019)	Teljesítmény az országos átlaghoz képest (2021)	Teljesítmény az országos átlaghoz képest (2022)	Minimum szintet el nem érő tanulók 2022-ben (%) Országos átlag:
ÁI9	község	-	-	-	78,8
ÁII7		-	-		76,5
ÁII3		-	-		52,9
ÁII4		0	0		50,0
ÁI4		0	-		47,4

ÁI12		+	-		28,6
ÁI3		0	-		26,7
ÁI15		0	0		18,2
ÁI10		0	0		12,5
ÁI8		-	0		7,0
ÁI5		+	-		31,0
ÁI2		-	0	0	14,3
ÁI6		0	+		11,1
ÁI11		0	0		0
ÁI1		0	+		16,7
ÁI7		+	+	+	0
ÁI16		+	0		0
ÁI19		-	-		100
ÁI27		-	-		84,0
ÁI26		+	-	-	46,2
ÁI23		-	-		33,7
ÁI29		0	-		29,9
ÁI21	város	0	-		20,0
ÁI18		+	+		19,0
ÁI24		-	0	0	19,0
ÁI20		0	0		13,8
ÁI25		-	-		9,0
ÁI28		+	-	+	5,6
ÁI30		0	0		23,1
ÁI33		0	0	0	14,3
ÁI35	megye-	0	0		6,7
ÁI32	székhely	-	0		6,1
ÁI34		+	0	+	3,0
ÁI31		+	+		3,6
ÁI36	főváros	0	-	-	35,3

Jelmagyarázat: 0 / - / + = az országos átlaghoz képest szignifikánsan nem / lefelé / felfelé eltérő átlag

A kutatásban igyekeztünk elérni a megsegítésre leginkább rászoruló tanulókat, ezért az Országos kompetenciamérés eredményeit elemeztük a hátrányos helyzetű tanulók aránya tekintetében. Öt olyan iskola volt a 36 kutatásba bevont iskola között, amelyek mindkét évfolyamon minden viszonyítási csoportban, azaz mind országosan, mind településtípus és azon belül településméret szerint is mindhárom mérési időpontban az adott viszonyítási csoport átlagánál rosszabbul teljesítettek. Ezekben az iskolákban együttesen a mérésben részt vevő hatodik évfolyamos tanulók 53%-a, a nyolcadik évfolyamos tanulók 49%-a halmozottan hátrányos helyzetű volt. Három iskola a 2019-es kompetenciamérésen még minden viszonyítási csoportban az átlagtól szignifikánsan nem eltérő, egy iskola pedig az átlagnál szignifikánsan alacsonyabb teljesítményt nyújtott. Ezek az iskolák a 2021-es, majd a 2022-es kompetenciamérésen is minden évfolyamon és minden viszonyítási csoportban az átlagnál már szignifikánsan alacsonyabb eredménnyel szerepeltek matematikából. Ezekben az iskolákban is kiemelkedően magas volt a halmozottan hátrányos helyzetű tanulók aránya. Együttesen hatodik évfolyamon 56%, nyolcadik évfolyamon 57% volt ez az arány. A kutatásba bevont hátrányos, vagy halmozottan hátrányos helyzetű harmadik és negyedik évfolyamos tanulók 48%-a ezen iskolák valamelyikébe járt, és további 68 olyan diák volt a mintában, aki szintén ezen iskolák valamelyikébe járt, és rendszeres gyermekvédelmi kedvezményben részesült.

A minta összetételének alaposabb jellemzését segítik a kutatásba bevont osztályok tanítóitól felvett háttér adatok. Az adatszolgáltatás nem volt egyenletes, a kutatásba bevont 810 tanuló 86%-áról rendelkezünk hiánytalan, vagy egyes esetekben hiányos háttér adatokkal. Ez az arány azonban megfelelően magas ahhoz, hogy a felvett adatokkal jellemezzük a mintát.

A tanulók szocioökonómiai háttérének feltérképezéséhez a hátrányos helyzetre és a gyermekvédelmi kedvezményre vonatkozó adatok járulnak hozzá. Erre vonatkozóan 621 tanuló esetén rendelkezünk információval. A pedagógusok adatközlése ezen a téren nem volt egységes. Egyes tanítók csak a gyermekvédelmi kedvezményre vonatkozó adatokat adták meg, a hátrányos, vagy halmozottan hátrányos helyzetre vonatkozó adatokat nem közölték. Ennek, szóbeli közlésük alapján, az utóbbira vonatkozó információik hiánya volt az oka. Hátrányos vagy halmozottan hátrányos helyzetű az a gyermek, akinek a gyermekvédelmi kedvezményre jogosító anyagi helyzeten túl további egy, illetve több nehezítő körülmény áll fenn a családi háttérében (részletesen ld. 1997. évi XXXI. évi tv. 67/A. §.). A rendszeres gyermekvédelmi kedvezményre való jogosultság azonban már önmagában is a gyermek rossz szociális helyzete miatt állapítható meg (Göczéné Pankaczi et al., 2021). A pedagógusok által közölt adatokat a 21. táblázat tartalmazza. Ennek alapján a 621 tanulóból 122 diák hátrányos, vagy halmozottan hátrányos helyzetű, és további 123 rendszeres gyermekvédelmi kedvezményre jogosult.

21. táblázat. A kutatásba bevont diákok szocioökonómiai státuszára vonatkozó tanítói adatközlésből származó adatok a 3. és a 4. évfolyamon

Évfolyam	Fejlesztés	Gyermekvédelmi kedvezmény	Státusz		
			HH / HHH	nem HH/HHH	nincs adat
3	kísérleti	részesül	27	12	20
		nem részesül		51	32
	kontroll	részesül	22	6	23
		nem részesül		55	30
4	kísérleti	részesül	37	4	18
		nem részesül		55	53
	kontroll	részesül	36	5	35
		nem részesül		55	45

A kutatásba bevont iskolákat jellemezhetjük az adatvesztés nagy mértékével is. Mivel az adatelemzésbe csak azoknak a diákoknak az adatait vontuk be, akiktől minden mérési ponton rendelkezünk adattal, és a fejlesztések több, mint felén részt vettek, a sem HH, sem HHH státusszal rendelkező diákok 62%-ától, a HH vagy HHH státusszal rendelkező diákoknak a 74%-ától származó adatokat nem tudtuk bevonni az elemzésbe. Ez a magas arány az iskolalátogatás rendszertelenségének gyakori előfordulására utal a kutatásban részt vevő iskolák többségében.

A sajátos nevelési igényű státuszról 326 harmadikos és 372 negyedikes diák esetében rendelkezünk információkkal. Évfolyamonként 12 diák rendelkezett sajátos nevelési igényről kiállított szakértői véleménnyel. Ugyanezzel a 326, illetve 372 diákkal kapcsolatban az iskolabezárások alatti iskolai munkában való részvételről és a pedagógus által jelzésre érdemes matematikatanulási nehézségről is rendelkezünk információkkal (22. táblázat). Ebben a vonatkozásban a 2019/2020-as tanévben 2, a 2020/2021-es tanévben 12 HH vagy HHH státuszú diákról nem rendelkezünk adattal. 2019-ben a harmadikos tanulók 26,5%-a, a negyedikes tanulók 18,8% nem vett részt rendszeresen a távolléti oktatásban. Ez az arány a 2020/2021-es tanévre a harmadikosoknál javult, 20,5%-ra csökkent, a negyedikeseknél lényegében változatlan maradt. A hátrányos vagy halmozottan hátrányos helyzetű gyerekek esetében mindkét évfolyamon alacsony azon gyerekek aránya, akik online órákon vettek részt, azaz a bezárások idején is legalább online kapcsolatban voltak a tanítóval. Ez az arány a 2020/2021-es tanévre valamelyest javult. Harmadik évfolyamon ez az arány 2019/2020-ban 25,5%, 2020/2021-ben 27,7% volt. Negyedik évfolyamon 2019/2020-ban 38,4% volt az arány, a 2020/2021-es tanévről pedig 10 tanulóval kevesebből rendelkezünk adattal, közöttük az online órán rendszeresen részt vevők aránya 42,8% volt.

A pedagógusoktól arra a kérdésre is választ kértünk, hogy mely gyerekekkel kapcsolatban jeleztek már a szülőknek matematikatanulási nehézséget. Ez alatt nem diagnosztikus jelzést értettünk, hanem azt, hogy a pedagógus úgy ítélte meg, hogy a tanulónak annyira nehezen megy a matematika, hogy arról a szülőt tájékoztatni szükséges. Mindkét évfolyamon a gyerekek több, mint negyedével kapcsolatban a pedagógusok jeleztek a szülőknek matematikatanulási nehézségek miatt.

22. táblázat. A bevont tanulók távolléti oktatásban való részvételére és a pedagógus által a szülőnek jelzett matematikatanulási nehézségére vonatkozó tanítói adatközlés eredményei

Tanév	Adatközlés szempontja	Évfolyam	
		3	4
		Minta (ebből HH/HHH)	Minta (ebből HH/HHH)
2019/2020	Online órákon rendszeresen részt vett	174 (12)	212 (28)
	Kiközvetített tananyagot rendszeresen feldolgozta	59 (18)	90 (27)
	Nem vett részt rendszeresen a távolléti oktatásban	88 (17)	70 (18)
	Más iskolába járt (nincs információ)	5	-
2020/2021	Online órákon rendszeresen részt vett	193 (12)	229 (21)
	Kiközvetített tananyagot rendszeresen feldolgozta	63 (22)	72 (27)
	Nem vett részt rendszeresen a távolléti oktatásban	67 (13)	71 (15)
	Más iskolába járt (nincs információ)	3	-
	Pedagógus tanulási nehézséget jelzett	89 (24)	108 (19)
	Pedagógus tanulási nehézséget nem jelzett	237 (100)	264 (54)

A matematikaoktatással kapcsolatban a pedagógusoktól a kutatásba bevont diákcsoportok második évfolyamos heti matematikaóra számára és a másodikban használt matematikatanfolyamra vonatkozóan kértünk információkat. A 36 iskola közül 13-ból, összesen 289 diákra vonatkozóan érkezett válasz erre a kérdésre (23. táblázat). Ahogyan arról a 7. fejezetben szóltunk, a kérdéses időszakban három tankönyv közül lehetett választani a második évfolyamon. Az Esztergályos és Kóródi (2013) és a Fülöp és munkatársai (2015) által jegyzett tankönyvek a szorzó-szorandó sorrendet, míg a C. Neményi és Sz. Oravecz (1994) által jegyzett tankönyv a szorzó-szorandó

sorrendet tanította. Az adatközlő pedagógusok által tanított diákok kivétel nélkül olyan tankönyvből tanultak, amely a szorzó-szorandó sorrendet tárgyalja. Ezek az adatok azt a gyakorlati tapasztalatot erősítik meg, hogy a tanítók többsége a tárgyalt időszakban olyan tankönyvet választott diákjainak, amely a szorzó-szorandó sorrendet tanítja. A heti óraszámok tekintetében azt a tendenciát figyelhetjük meg a válaszadók körében, hogy azokban az iskolákban volt heti 5 matematikaóra, ahol a minta tekintetében magas a hátrányos, vagy halmozottan hátrányos helyzetű tanulók aránya.

23. táblázat. A második osztályban használt matematikatanácskönyvek és a második osztályos heti matematikaórák száma

Évfolyam	Tankönyv	Heti óraszám	Minta
3	Fülöp et al. (2016)	4	41
		5	32
	Esztergályos (2013)	4	32
		5	33
4	Fülöp et al. (2016)	4	55
		5	14
	Esztergályos (2013)	4	14
		5	68

7.2 A nagymintás kutatás során alkalmazott matematikai fejlesztőprogram bemutatása

A pilot kutatás során alkalmazott fejlesztőprogram 23 fejlesztő egységből épült fel, melyek közül az első fejlesztő egység még nem tartalmazta a szorzás lejegyzését, az azt követően pedig már megjelent ez a tartalom, így azokat megkettőztük. Az egyik a szorzó-szorandó sorrendben, a másik szorzandó-szorzó sorrendben mutatta be ugyanazt a tananyagot. A nagymintás kutatás során a felépítésen több okból is változtattunk. Egyrészt a pilot kutatásban a pedagógusok egy része nem következetesen biztosította a diákok számára a szorzás tagjainak általa választott sorrendjét tartalmazó fejlesztő egységeket, így egyes diákok vegyesen, didaktikai szempontból nem megfelelően találkoztak a kétféle sorrenddel. Másrészt a gyakorlati tapasztalatokat megerősíteni látszottak a pedagógusoktól nyert adatok arra vonatkozóan, hogy a szorzás tagjait többségében szorzó-szorandó sorrendben tanítják. Továbbá a 2020/2021-es tanévben már elérhetővé vált a C. Neményi és Sz. Oravecz által jegyzett matematikakönyv (1994) szerzők és munkatársaik által átdolgozott, a NAT 2020-hoz igazított első osztályos tankönyve (2020), és előkészületben volt a második osztályos tankönyv (2020), amelyben a szerzők – a pedagógusok és a többi tankönyv gyakorlatát figyelembe véve – a szorzás tagjainak tanítását szorzó-szorandó sorrendre cserélték az addigi szorzandó-szorzó sorrend helyett, sajátos grafikai megoldással segítve a szorzás értelmezését. A kutatásba bevont diákok még egy vagy két tanévvel korábban voltak második osztályosok, ám az

eljövendő második osztályos diákok a NAT 2020 alapján elérhetővé váló új tankönyvek mindegyikében egységesen a szorzó-szorandó sorrenddel találkoznak majd. Mivel a kutatás egyik célja egy, a jövőben is alkalmazható fejlesztőprogram létrehozása, így a fenti szempontok alapján a fejlesztő egységek megkettőzésétől eltekintettünk, és csak a szorzó-szorandó sorrendet tanító egységeket tartottuk meg.

A pilot kutatás eredményei alapján a fejlesztőprogram tartalmában változtatásokat hajtottunk végre. Az egyes egységeken töltött idő vizsgálata során megállapítottuk, hogy a tanulók az 5., 6. és 7. egységeken túlságosan rövid, a 9. és 10. egységeken túlságosan hosszú időt töltöttek. A túl rövid idő lehetséges oka a kis lépésekben történő haladás és gyakorlás elnyújtott és így kevésbé motiválónak váló volta, a túl hosszú idő oka pedig az érintett egységekben bevezetett, egy alkalomra mérten megterhelő új tartalom volt. Az 5-7. egységben a monotonitás megtörésére kellett törekedni, a 9-10. egységben pedig az új tartalom megismerésére irányuló tevékenységek számának csökkentése látszott célravezetőnek.

A 9. és a 10. egység tartalmának tanítását, mely a bennfoglalás és a részekre osztás bevezetése volt, kisebb lépésekben, a korábbi két fejlesztő egység helyett négy fejlesztő egységben biztosítottuk. Az 5-7. egység gyakorló feladatainak számát úgy csökkentettük, hogy azok közül egyes feladatokat áthelyeztünk korábbi egységekbe – ezzel kissé felgyorsítva a haladás ütemét –, valamint későbbi egységekbe – biztosítva ezzel az egy alkalomra eső gyakorlás mennyiségének csökkenését, viszont a gyakorlásra fordított időintervallum szélesítését.

A feladatok átstrukturálásán túl a motiváció fenntartását, illetve a tanultak alkalmazási lehetőségeinek és a gyakorlásnak a körét bővítő új feladatokat hoztunk létre. Egyrészt, olyan új feladatokat készítettünk, amelyek a tanultak alkalmazását egy-egy videó megtekintésével kapcsolatban kéri a tanulótól. Ezzel a lehetőséggel élve a percepció, a figyelem és a munkamemória fejlesztésén túl valós helyzeteket bemutató videók segítségével tettük lehetővé a matematikai tartalom megfigyelését, értelmezését és a műveletvégzés gyakorlását. Ezekhez a feladatokhoz is elágazásokat biztosítottunk arra az esetre, ha a tanuló valamely részképességének fejlettsége még nem tenné lehetővé a videók alapján történő matematikai műveletvégzést. A videóban és a képen rejlő lehetőségeknek köszönhetően az azonos felépítésű feladatok nemcsak a matematikai, hanem a képi tartalomban is eltérő nehézségi szintet képviselhetnek (22-25. ábra).





Kattints a hangszóróra!



Kattints a hangszóróra!



→

22. ábra. Matematikai tartalomban nehezebb, a képi feldolgozás területén egyszerűbb mintafeladat a videók megtekintésén alapuló matematikafeladatok közül, a feladat képével és a videóból rögzített képkockákkal

(Hangfájlok leírata: 1. hangfájl: Számláld meg, hány autót látsz versenyezni! 2. hangfájl: Hány autót láttál versenyezni? Írd a szövegdobozba! 3. hangfájl: Hány kereke van összesen ennyi autónak? Írd a szövegdobozba!))



Kattints a hangszóróra!



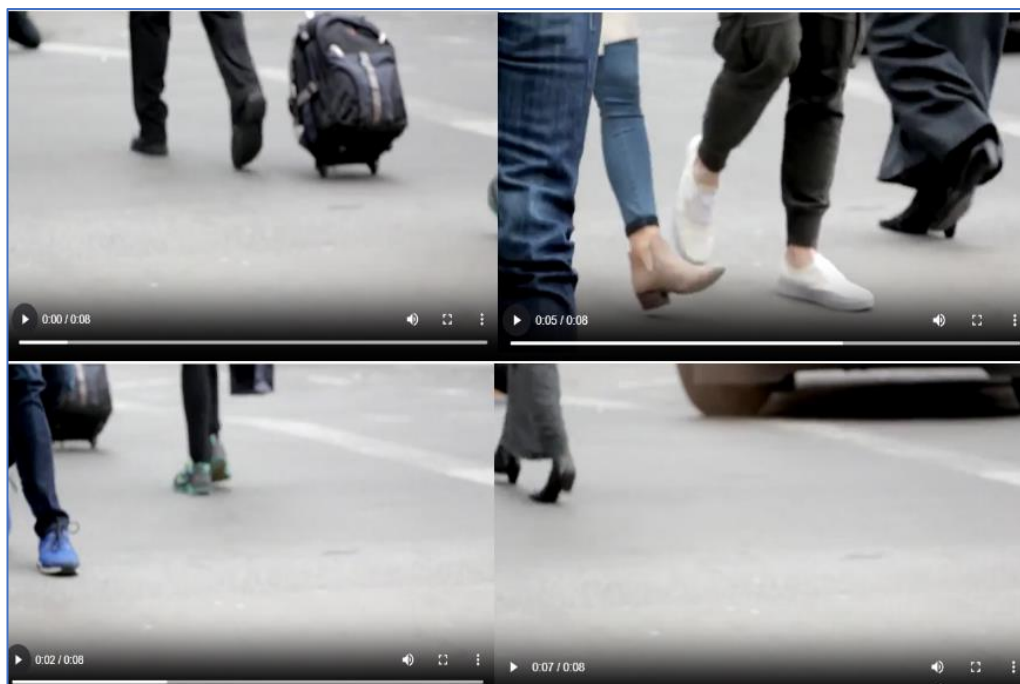

Kattints a hangszóróra!

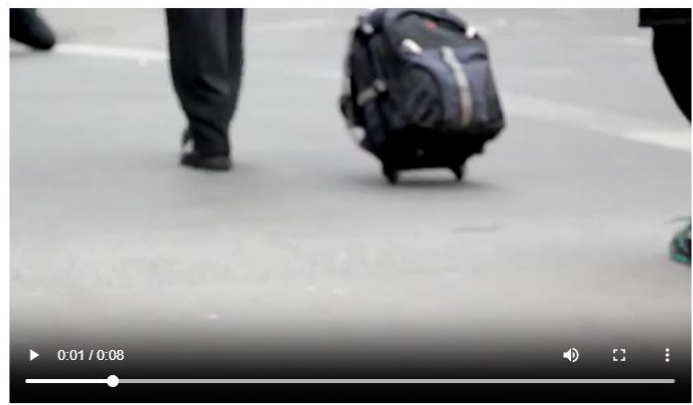




23. ábra. A videón alapuló versenyautókhoz fűződő feladat megoldásának sikertelensége esetén biztosított statikus képhez fűződő, matematikai tartalomban és tematikában a videón alapulóval azonos feladat

(Hangfájlok leírata: 1. hangfájl: Hány autót látsz versenyezni? Írd a szövegdobozba!
2. hangfájl: Hány kereke van összesen ennyi autónak? Írd a szövegdobozba!)



Kattints a hangszóróra!





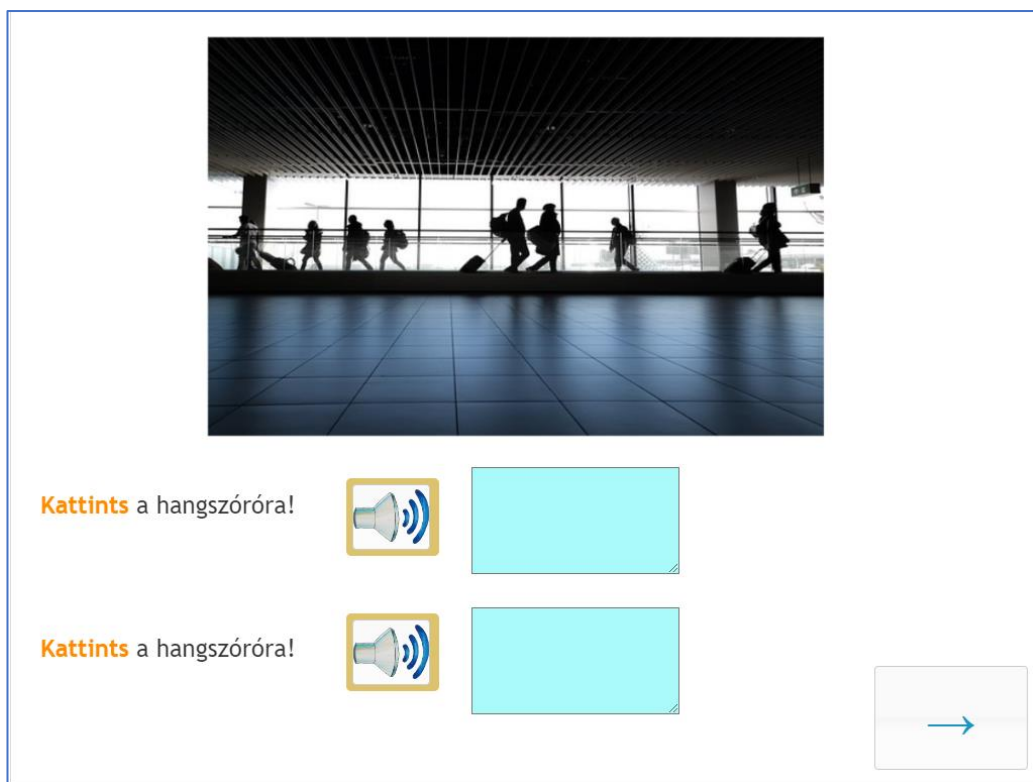
Kattints a hangszóróra!







24. ábra. Matematikai tartalomban egyszerűbb, a képi feldolgozás területén nehezebb mintafeladat a videók megtekintésén alapuló matematikafeladatok közül, a feladat képével, a szöveg leíratával és a videóból rögzített képkockákkal
(A hangfájlok leírata: 1. hangfájl: Számláld meg, hány embert látsz sétálni! 2. hangfájl: Hány embert számláltál? Írd a szövegdobozba! 3. hangfájl: Hány lába van összesen ezeknek az embereknek? Írd a szövegdobozba!)

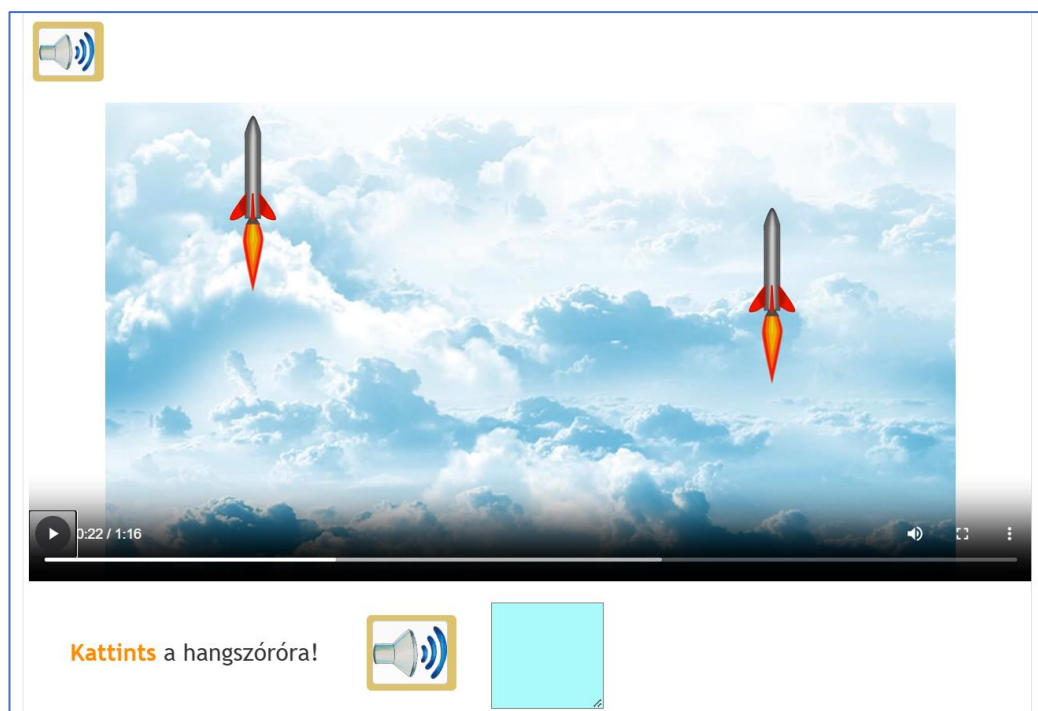


25. ábra. A videón alapuló feladat megoldásának sikertelensége esetén biztosított statikus képhez fűződő, matematikai tartalomban és tematikában a videón alapulóval azonos feladat
(A hangfájlok leírata: 1. hangfájl: Számláld meg, hány embert látsz sétálni! Írd a szövegdobozba!
2. hangfájl: Hány embert számláltál? Írd a szövegdobozba!)

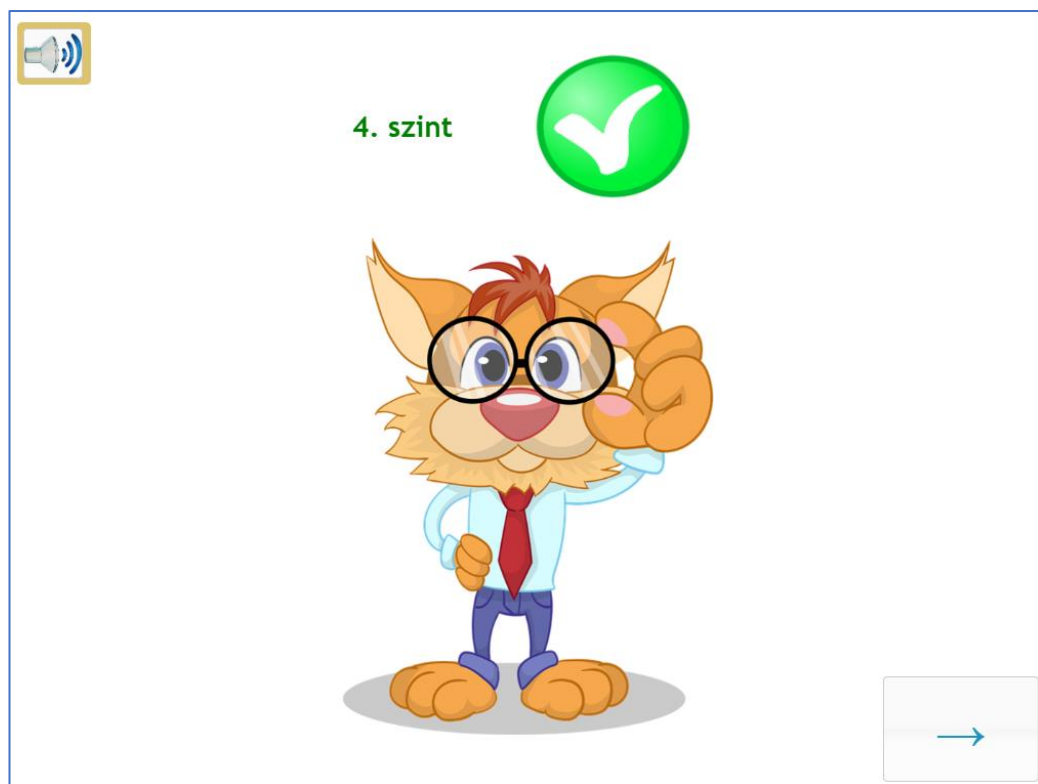
További új elemként egyes egységeket kihívásokkal zártunk. A kihívásokkal olyan játékos elemeket illesztettünk a fejlesztőprogramba, amelyekkel az volt a célunk, hogy a játék öröme magából a tanultak alkalmazásából fakadjon (Habgood & Ainsworth, 2011). A tanulók a feladathoz készült videókhoz kapcsolódó kérdéseket kaptak a szorzótábla eseteiből, a játékban tovább haladni pedig csak helyes válasz esetén tudtak. Egy-egy kérdést egy-egy szintnek neveztünk el, melyek az adott szorzótábla egyre nehezebb eseteit kérdezték a tanulóktól. A videókban az egy a többnek megfeleltetés értelmezést erősítve különböző csoportok haladtak át a képernyőn (pl. két madár balról jobbra, összesen nyolc alkalommal). A nehézség fakadhatott a nehezebben megjegyezhető, vagy kiszámolható szorzatokból, illetve a videón megjelenő tartalom gyorsabb sebességéből, illetve a videóban megjelenő csoportok mozgásából, vagy elrendezéséből (26-27. ábra). A cél az volt, hogy a diákok minél magasabb szintre jussanak. A visszajelzés a vetélkedőműsorokból ismert hanghatásokra épült, taps és megerősítés, vagy lemondó hangeffekt és elköszönés volt a visszajelzés minden szinten (28-30. ábra). Mivel tartalmilag ezekben a játékokban a szorzásnak a tanultakban addig előfordult eseteit kérdeztük, így a fejlesztőprogramban új elemként a fejszámolást gyakoroltattuk, ezáltal a procedurális tudásra vonatkozó gyakorlási lehetőséget biztosítottunk.



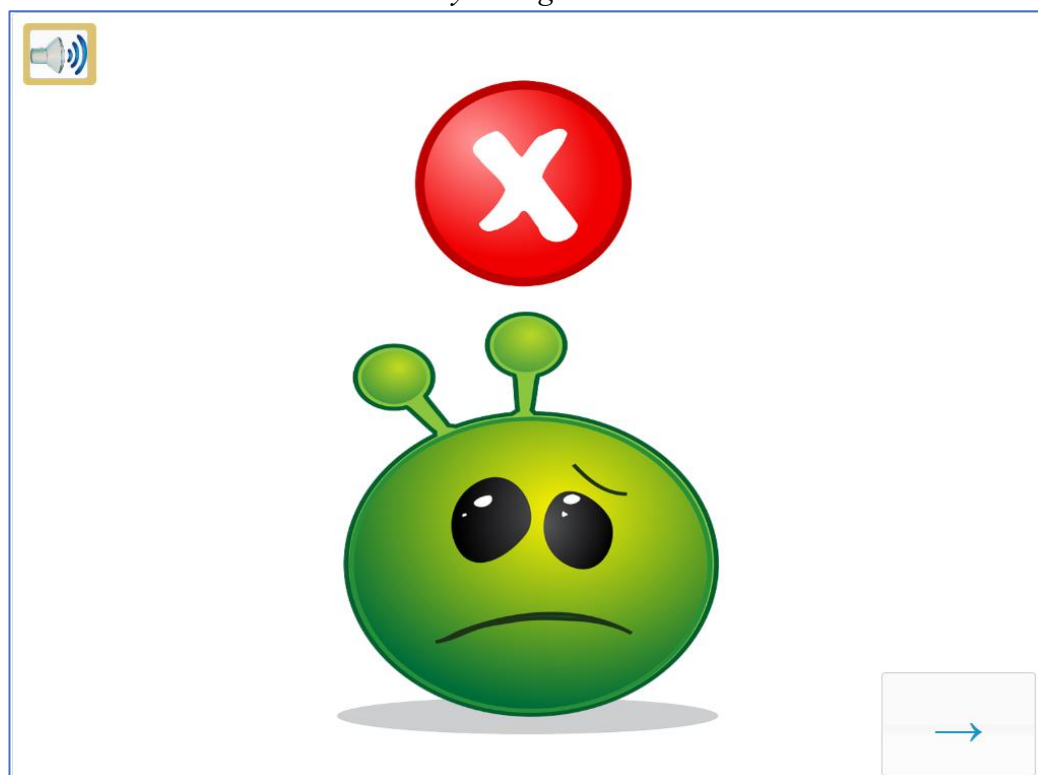
26. ábra. Egy kihívás második szintjén látható videó pillanatfelvétele
 (A hangfájlok leírata: 1. hangfájl: Hány biciklist látsz, kattints a képre, és nézd végig figyelmesen a videót, ami a kattintásra elindul! 2. hangfájl: Hány biciklist láttál? Írd a szövegdobozba!)



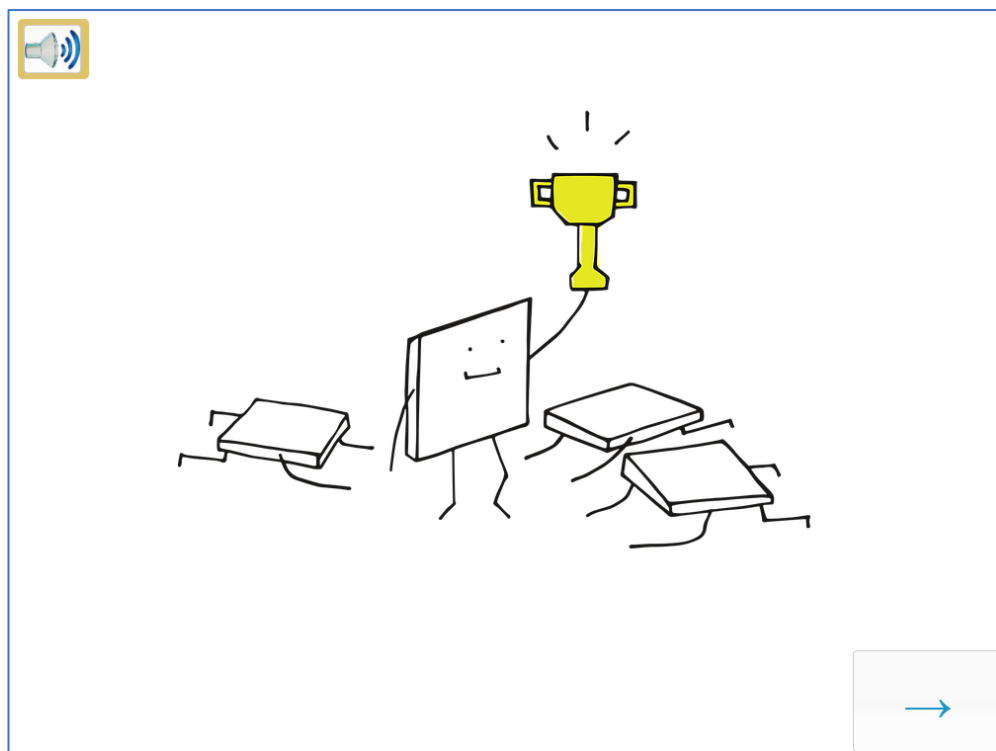
27. ábra. Egy kihívás ötödik szintjén látható videó pillanatfelvétele
 (A hangfájlok leírata: 1. hangfájl: Hány rakétát látsz, kattints a képre, és nézd végig figyelmesen a videót, ami a kattintásra elindul! 2. hangfájl: Hány rakétát láttál? Írd a szövegdobozba!)



28. ábra. Taps és ováció hanghatással kísért megerősítő képi üzenet egy kihívás negyedik kérdésének helyes megválaszolása esetén



29. ábra. Sajnálkozó hanghatással kísért visszajelző képi üzenet egy kihívás negyedik kérdésének helytelen megválaszolása esetén



30. ábra. Taps és ováció hanghatással kísért megerősítő képi üzenet egy kihívás összes kérdésének helyes megválaszolása esetén

Az új struktúrának és az új feladatok beillesztésének az eredménye a korábbi 276 helyett egy 306 feladatot tartalmazó fejlesztőprogram lett, amelyeket a korábbi 12 helyett 15 fejlesztő egységbe rendeztünk.

7.3 Nagymintás kutatás: kutatási dizájn és módszerek

7.3.1 Kutatási dizájn, az adatfelvétel körülményei

A kutatás a pilot kutatáshoz hasonlóan kvázi-kísérleti elrendezésben valósult meg. A tanulók teljesítményét három alkalommal monitoroztuk az 5.2 fejezetben bemutatott mérőeszköz segítségével. A tesztet a diákok a fejlesztés megkezdése előtt előtesztként, közvetlenül a fejlesztést követően utótesztként és három hónappal a fejlesztés befejezése után késleltetett utótesztként oldották meg. A kísérleti és a kontrollcsoport kialakítása a tanulók előteszten nyújtott teljesítménye alapján történt.

A számítógép-alapú fejlesztőprogramot, valamint az elő- és utóteszteket a pilot programmal megegyezően az eDia online platformon valósítottuk meg (Csapó & Molnár, 2019; Molnár & Csapó, 2019). A diákok szüleit a kutatócsoport instrukciói alapján a pilot kutatás során alkalmazott

eljárás szerint itt is az iskola tájékoztatta a fejlesztőprogram céljáról és az adatfelvétel körülményeiről. Az eDia rendszerben rögzített mérési azonosító biztosította a résztvevők anonimitását a kutatók felé, illetve beazonosíthatóságát a pedagógusok számára.

A pedagógusok tájékoztatása szintén a pilot program leírásában ismertetett módon és közel azonos tartalommal zajlott. Mivel a fejlesztőprogram 15 egységet tartalmazott, az időbeli ütemezésre vonatkozó kérdésben tértünk el a pilot programban megfogalmazottaktól. A pedagógusokat arra kértük, hogy heti 2 vagy 3 alkalommal történjen fejlesztés úgy, hogy egy-egy alkalom között lehetőség szerint legyen egy nap szünet.

Az adatgyűjtés a kutatásban részt vevő iskolák számítógéptermeiben vagy számítógépekkel, illetve tablettákkal felszerelt tantermeiben történt. A fejlesztés négy-hat hétig a tájékoztatón részt vett tanárok felügyelete mellett, iskolaidőben, de nem matematikaórán zajlott. Minden fejlesztő egység megoldására legalább húsz percnyi időt biztosítottak. A diákok válaszait az eDia-rendszer rögzítette, naplózta és automatikusan értékelte, majd a naplózott válasz alapján jelölte ki a következő feladatot.

7.3.2 Adatelemzés

A nagymintás kutatás eredményeinek elemzése során a 7.3.2. fejezetben bemutatott eljárásokon túl páros t-próbát alkalmaztunk az egyes csoportokon belül történt teljesítményváltozások vizsgálatára, eloszlásgörbével vizualizáltuk a változásokat, továbbá Cohen-d érték számításával elemeztük az egyes mérési időpontokban nyújtott teljesítmények változását. A manifeszt szinten kapott eredmények általánosíthatóságának vizsgálatát strukturális egyenlet-elemzésekkel végeztük. A fejlesztőprogram hátrányos helyzetű diákokra gyakorolt hatását páros-t próbával, Cohen-d érték számításával, továbbá ANCOVA elemzéssel vizsgáltuk.

7.4 Eredmények a mérőeszközre vonatkozó vizsgálatban

A teljes teszt, továbbá az egyes altesztek reliabilitását mind a három tesztfelvételi időszakra vonatkozóan a Cronbach- α kiszámításával becsültük meg (24. táblázat). A teljes teszt, továbbá a szorzás és az osztás altesztek megbízhatósága is magasnak bizonyult az elő-, az utó- és a késleltetett utóteszt vonatkozásában is. A szöveges feladat alteszten a megbízhatóság mindhárom esetben megfelelőnek mondható (H_{16}).

24. táblázat. A teljes elő-, utó- és késleltetett utóteszt és ezek egyes altesztjeinek reliabilitása (Cronbach- α)

	Teljes teszt	Szorzás alteszt	Osztás alteszt	Szöveges feladatok
Előteszt	0,90	0,80	0,84	0,70
Utóteszt	0,91	0,82	0,86	0,71
Késleltetett utóteszt	0,92	0,86	0,84	0,75

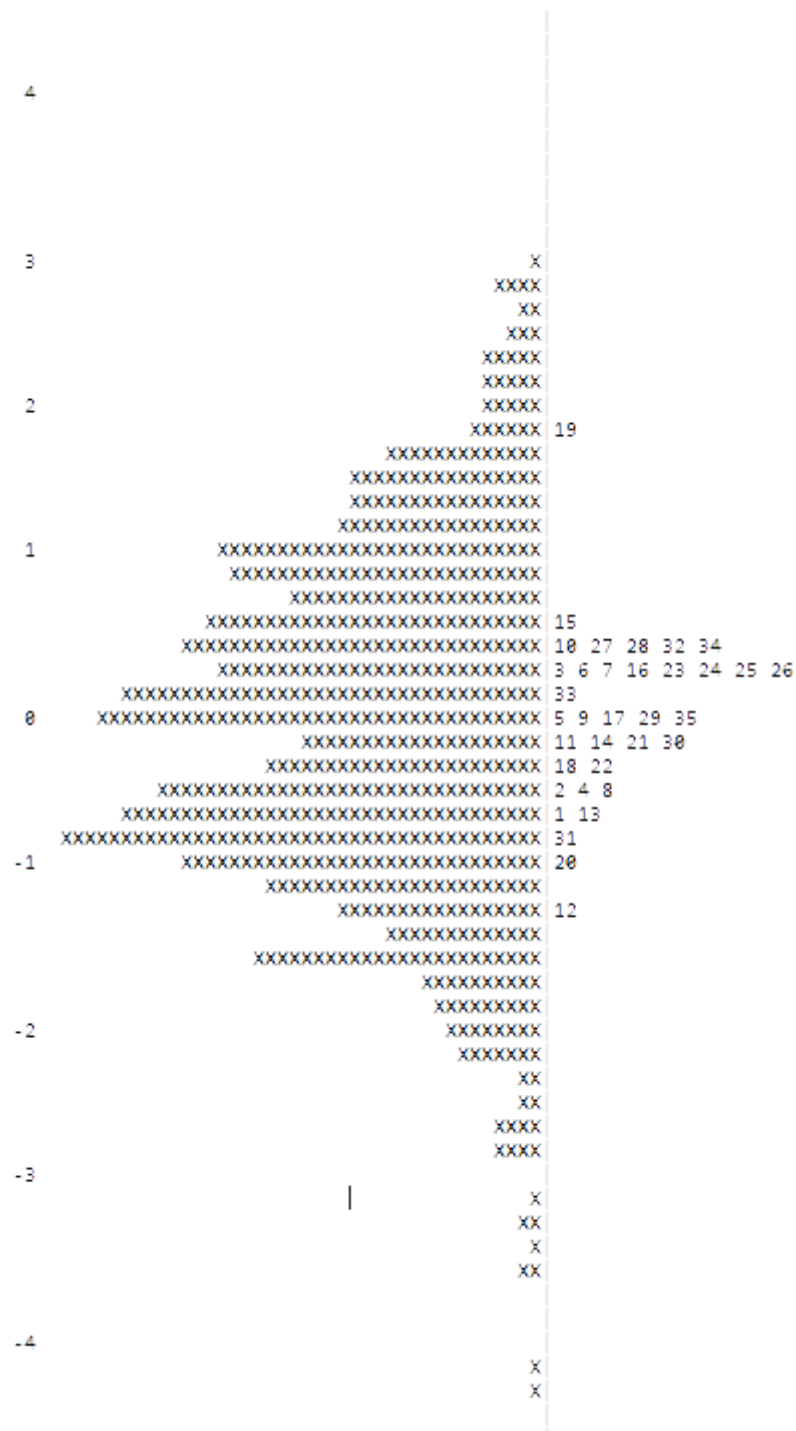
Mivel a másodikos tananyagot felölölő teszt megoldói a tanulmányaikban nem ugyanott tartó harmadik, illetve negyedik évfolyamos diákok, ezért a két évfolyam diákjai teljesítményének vizsgálatában ismételten alkalmaztuk a valószínűségi tesztelmélet eszköztárát is, hogy megvizsgáljuk, mennyire illeszkedik a teljesítményteszt a két évfolyam diákjainak tudás- és képességszintjéhez. Ennek első lépéseként fixáltuk az itemek teljes mintára vetített nehézségi mutatóit, hogy azok az évfolyamonkénti elemzés során azonosak legyenek, majd a két évfolyam tanulóinak képességszintjét vizsgálva az itemek így kapott paramétereit vettük figyelembe.

Az EAP/PV reliabilitásmutató értéke mindkét évfolyamon 0,89, mely érték magasnak tekinthető. A személy-item térkép alapján megállapítható, hogy az itemek jelentős része közepes nehézségűnek bizonyult mind a harmadik (31. ábra), mind a negyedik évfolyamon (32. ábra). A tesztben – a pilot kutatással megegyezően – egy olyan item van, amelynek nehézségi szintje kiugróan eltér a többitől. Ez az item egy olyan kérdést tartalmaz, amelynek megoldásához a szöveges feladatban megfogalmazott matematikai probléma megoldásához eggyel több szempontot kell figyelembe venni, mint a teszt többi feladatában. A harmadikosok 5%-a, míg a negyedikesek 10%-a volt képes ezt a feladatot legalább 50%-os valószínűséggel megoldani. Ez az arány magasabb, mint a pilot kutatásban, ahol ez az arány mindkét évfolyam esetén 1% körüli volt. A gyerekek többsége – a pilot kutatáshoz hasonlóan – mindkét évfolyamon olyan képességszinten volt, hogy az itemek közül van egy vagy több olyan, amelyet 50%-os valószínűséggel megoldottak (H_{18}). Ugyanakkor harmadik évfolyamon a gyerekek 15%-a, negyedik évfolyamon pedig 8%-a volt olyan képességszinten, hogy a teszt egyetlen feladatát sem tudta legalább 50%-os valószínűséggel megoldani. A harmadikos diákok aránya a pilot kutatásban szereplő harmadikosokéval közel azonos – 15, illetve 13% – a negyedikes tanulók aránya azonban a felére csökkent.

logit paraméter

személyek

itemek



31. ábra. A matematikai fejlesztőprogram hatékonyságvizsgálatához készült teszt személy-item térképe a harmadik évfolyamon az előteszt eredményei alapján. Az ábra bal oldalán található skála a feladatok nehézségi szintjét és a tanulók képességi szintjét jelenti. Minden x 0,7 tanulót reprezentál. A jobb oldalon lévő számok a tesztben foglalt egyes itemeket jelzik.



32. ábra. A matematikai fejlesztőprogram hatékonyságvizsgálatához készült teszt személy-item térképe a negyedik évfolyamon az előteszt eredményei alapján. Az ábra bal oldalán található skála a feladatok nehézségi szintjét és a tanulók képességi szintjét jelenti. Minden x 0,7 tanulót reprezentál. A jobb oldalon lévő számok a tesztben foglalt egyes itemeket jelzik.

Elemeztük, hogy a harmadik osztályos tanulók előteszten mért teljesítménye különbözik-e a negyedik évfolyamos diákok teljesítményétől. A két évfolyam teljesítménye mind a teljes teszten, mind az egyes alteszteken szignifikánsan különbözött egymástól (25. táblázat)(H₁₉).

25. táblázat. A harmadik és negyedik évfolyamos diákok előteszten mért teljesítménye a teljes teszten és az egyes alteszteken

Évfolyam	Teljes teszt		Szorzás alteszt		Osztás alteszt		Szöveges feladat alteszt	
	Átlag	Szórás	Átlag	Szórás	Átlag	Szórás	Átlag	Szórás
3. évf	48,58	23,48	51,57	24,87	48,95	30,35	42,39	27,38
4.évf.	54,05	23,20	56,48	24,47	54,82	29,08	48,36	28,36
t	-3,337		-2,828		-2,809		-3,044	
p	<0,001		<0,005		<0,005		<0,005	

7.5 A mérőeszköz alkalmazhatóságára irányuló vizsgálatok megvitatása

A reliabilitásra vonatkozó elemzések során a teljes teszt, a szorzás és az osztás alteszt megbízhatósága magasnak, a szöveges feladat alteszt megbízhatósága megfelelőnek bizonyult mindhárom mérési időpontban (H₁₆). Az alsó tagozat folyamatos fejlesztési feladatai közé tartozik az olvasási és a szövegértési képesség fejlesztése (Kerettanterv az általános iskola 1-4. évfolyamára, 2012). A fejlődés eredményeként a tanulók egyre inkább képesek megérteni az írott szövegben rejlő információkat. Ez is oka lehet annak, hogy a szöveges feladatok alteszt késleltetett utóteszt esetén számított reliabilitása javul az előteszten számított értékhez képest.

A személy-item térképek vizsgálata során megfigyelhető, hogy a teszt minden feladatát legalább 50%-os valószínűséggel megoldó diákok aránya mindkét évfolyamon magasabb volt, mint a pilot kutatás mintája esetén, a leggyengébb képességszintű diákok aránya pedig a negyedik évfolyamon a felére csökkent. Ezt magyarázhatják a két minta közötti különbségek. A pilot kutatás kisebb mintája abból a szempontból homogénebb, hogy a tanulók által látogatott iskolák szinte mindegyike rosszul szerepelt az Országos kompetenciamérésen. A nagymintás kutatásba több iskolát vontunk be, melyek ebből a szempontból heterogénebb képet mutattak. Ennek oka lehet, hogy a nagymintás kutatás idején már nem történtek a járvány miatt iskolabezárások, így a tanév eleji ismétlés zavartalanabb és eredményesebb lehetett. Bár adataink nincsenek róla, de a mintákban eltérő lehet, hogy az intézmények milyen mértékig voltak érintettek az eseti iskolabezárásokban. Összegezve megállapítható, hogy a teljesítményteszt jól illeszkedett a harmadik és negyedik évfolyamos diákok tudás- és képességszintjéhez (H₁₇).

A negyedikes diákok mind a teljes teszten, mind annak altesztjein szignifikánsan jobban teljesítettek, mint harmadikos társaik, megerősítve ezzel a 18. hipotézisünket, hogy a teszt jól elkülöníti egymástól a két évfolyam diákjait. A pilot kutatás során ezt a hipotézist el kellett vessük, mivel a két évfolyam teljesítménye között nem volt szignifikáns különbség. A nagymintás kutatás során kimutatható szignifikáns különbség okát a két évfolyam egymásra épülő tantervén túl – mely magyarázó erővel bírhat iskolabezárásokkal nem nehezített tanévekben – szintúgy a 17. hipotézis tárgyalásakor felsorakoztatott okok között kereshetjük. Egyrészt, a minta heterogénebb voltára következtethetünk, amelyből fakad az is, hogy a jobb képességű vagy magasabb szocioökonómiai státuszú tanulók kisebb tanulási veszteséget elszenvedve (pl. Weidmann et al., 2022) jobb eredményt értek el az előteszten. Másrészt, a zavartalanabb iskolai működés a jobban teljesítő iskolákban gyorsabb felzárkózáshoz vezethetett.

7.6 A nagymintás fejlesztőprogram hatásvizsgálatának eredményei

A teljes minta teljesítményét vizsgálva, az előteszten nem volt szignifikáns különbség a kísérleti és a kontroll csoport teljesítménye között ($t = 1,2$, $p = 0,19$). Az utóteszt eredményei alapján mind a kísérleti, mind a kontroll csoport teljesítménye szignifikánsan javult az előteszten mért eredményekhez képest (26. táblázat), azonban a kísérleti csoport teljesítményének javulása szignifikánsan felülmúlta a kontroll csoportét ($t = -10,1$, $p < 0,001$). A fejlesztés időtartama alatt mindkét csoport részt vett az iskolai oktatásban, a kísérleti csoport ezen felül részesült fejlesztésben is. Ennek eredményeként a kísérleti csoportban a diákok teljesítménye az iskolai oktatás és a kiegészítő beavatkozás együttes eredményeként javult egyharmad szórásegységgel. A kontroll csoport tanulóinak fejlődése alapján a kísérleti csoportban a teljesítmény javulásának a fele a rendszeres iskolai oktatásnak, fele pedig a fejlesztőprogramnak volt köszönhető. Az utótesztet követő három hónapban a kísérleti csoport már nem részesült további fejlesztésben. A késleltetett utóteszt eredményei alapján a két tesztfelvételi időpont között mindkét csoport teljesítménye egyharmad szórásegységgel javult (H_{19}).

26. táblázat. A csoporton belüli teljesítménykülönbség az elő-, utó- és késleltetett utóteszten a teljes minta vonatkozásában

Csoport	N	Előteszt				Késleltetett				t	p	d	d
		M	SD	M	SD	M	SD	M	SD				
Kís.	40	50,2	23,4	57,1	24,4	64,4	24,0	-8,08	<0,001	0,29	0,30		
Kont	40	52,3	23,6	56,0	24,0	63,2	24,8	-4,04	<0,001	0,15	0,29		

A tanulók teljesítményének változását évfolyamonként is megvizsgáltuk. Mivel a fejlesztőprogram tartalma a második osztályos tananyag, ezért releváns eljárás volt megvizsgálni a fejlesztés hatását azokra a tanulókra, akik az előző tanévben találkoztak először a fejlesztőprogramban foglalt matematikai tartalommal, valamint azokra, akik két tanévvel korábban találkoztak vele először. Továbbá, a pandémia miatti iskolabezárások a harmadik és negyedik évfolyamon különböző matematikai tartalmak oktatását érintették.

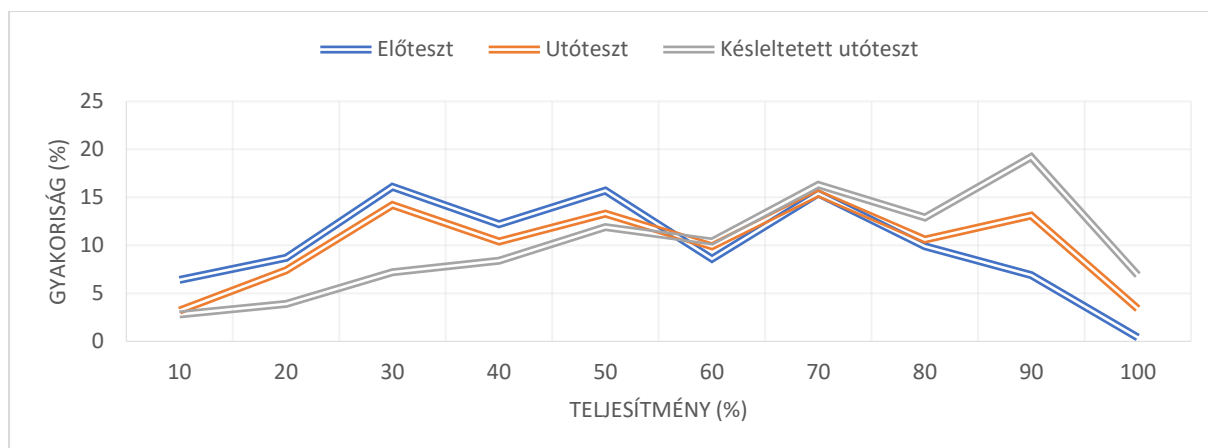
Ahogy a 8.4. fejezetben tárgyaltuk, szignifikáns különbség volt a két évfolyam előteszten mutatott teljesítménye között, azaz a negyedikes diákok nagyobb tudással rendelkeztek a szorzásról és az osztásról a fejlesztőprogram megkezdésekor. Közvetlenül a fejlesztőprogram befejezését követően mindkét évfolyamon nagyobb hatásméretet mutathattunk ki a kísérleti csoportban a kontroll csoporthoz képest. Mindkét évfolyamon, mindkét csoportban szignifikáns javulás következett be, de a fejlesztőprogram eredményeként mindkét évfolyamon felgyorsult a fejlődés. A késleltetett utóteszt idejére mindkét évfolyamon, a kontroll és a kísérleti csoportokban is a hatásméret már azonos, vagy közel azonos volt. Harmadik évfolyamon mindkét csoportban felgyorsult a fejlődés. Negyedik évfolyamon a kísérleti csoport fejlődése kissé lelassult a fejlesztés nélkül, míg a kontroll csoport fejlődésének mértéke egyenletes maradt (27. táblázat) (H₂₀).

27. táblázat. A kísérleti és a kontroll csoport elő-, utó- és késleltetett utóteszten nyújtott teljesítményének változása a harmadik és a negyedik évfolyamon (Cohen-d érték számításával)

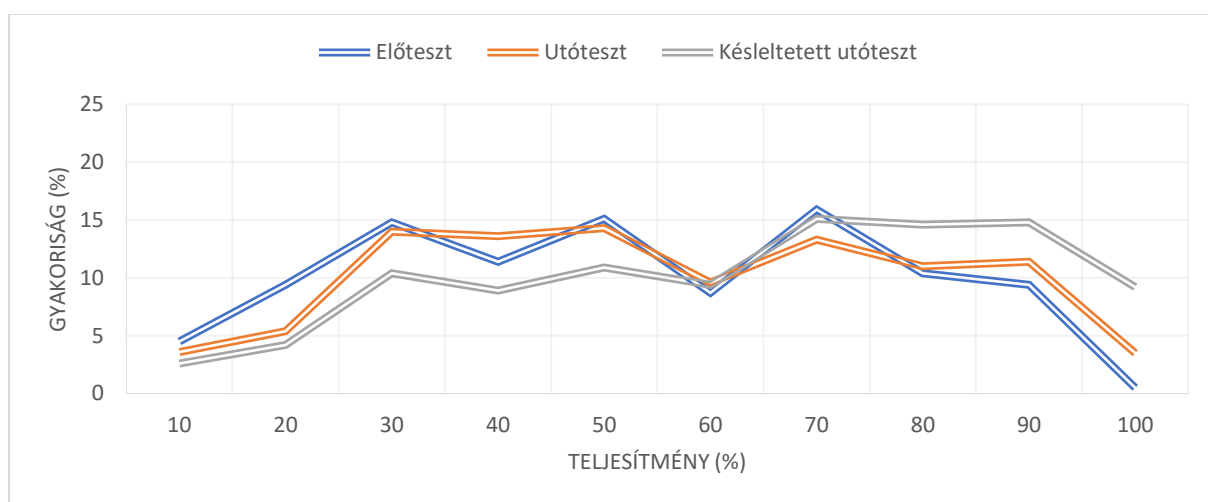
Csoport / évfolyam		Előteszt (T1)		Utóteszt (T2)		Késlelte- tett utó- teszt (T3)		t	p	d	d
								T1_T2	T1_T2	T1_T2	T2_T3
		M	SD	M	SD	M	SD				
Kís. / 3	207	47,2	22,9	52,2	24,2	60,9	25,3	-4,0	<0,001	0,22	0,35
Kont. / 3	207	50,1	24,1	52,1	23,7	60,8	25,8	-7,6	<0,05	0,08	0,35
Kís. / 4	198	53,3	23,5	62,2	23,5	68,1	21,9	-7,8	<0,001	0,38	0,26
Kont. / 4	198	54,8	22,9	60,1	23,6	65,7	23,7	-4,0	<0,001	0,23	0,24

Megjegyzések: kís. = kísérleti csoport; kont. = kontroll csoport; d = Cohen-d

Az eloszlási görbéken (33. és 34. ábra) szintén a kísérleti és a kontroll csoport teljesítményének javulását figyelhetjük meg az előteszthez képest mindkét további tesztfelvételi időpontban. Azonban a késleltetett utóteszt eloszlási görbéje jobbra tolódik el a kísérleti csoport esetében, a magasabb teljesítménytartományban megfigyelhető kicsúcsosodással, továbbá a görbe az alacsonyabb teljesítményszinteknél laposabbá válásával az alacsonyabb teljesítményszinteknél (H₂₁).



33. ábra. A kísérleti csoport teljesítményének eloszlásgörbéje az elő-, az utó- és a késleltetett utóteszt időpontjában



34. ábra. A kontroll csoport teljesítményének eloszlásgörbéje az elő-, az utó- és a késleltetett utóteszt időpontjában

A teljes teszten megfigyelhető változások elemzése után megvizsgáltuk, hogy az egyes alteszteken hogyan változott az egyes csoportok teljesítménye. A fejlesztőprogram hatására a tanulók fejlődése mindhárom területen felgyorsult a kontroll csoport fejlődéséhez képest (28. táblázat). Ugyanebben az időszakban a kontroll csoport matematikai teljesítménye csak az iskolai oktatás eredményeként fejlődött. A két csoport fejlődésének összehasonlítása során megfigyelhető, hogy mindkét csoport a szorzás területén fejlődött legintenzívebben. Az osztás területén mindkét csoportban szerényebb méretű fejlődést tapasztaltunk, mint a szorzás területén. Ezt magyarázhatja a két téma nem egyenlő arányú megjelenése a fejlesztőprogramban, illetve az iskolai gyakorlatban, továbbá az is, hogy az osztás megértéséhez a bennfoglalást és az egyenlő részekre osztást is meg kell érteni, melyek közül a bennfoglalás megértése nehezebb (pl. Correa et al., 1998).

A két csoport utóteszten mért fejlődésének mértéke között a szorzás és az osztás területén is azonos, egy tized szórásnyi a különbség a kísérleti csoport javára. Ez várhatóan annak köszönhető, hogy a kerettanterveknek megfelelően (Kerettanterv az általános iskola 1-4. évfolyamára) a fejlesztés időszakában mindkét évfolyamon a szorzásról és osztásról tanultak felelevenítése is témája volt a matematikaóráknak. Azaz mindkét csoport fejlődik az iskolai oktatás hatására, és ez a fejlődés a program hatására a szorzás és az osztás területén is azonos mértékben gyorsul fel.

Jelentős, egyötöd szórásegységnyi a fejlődésbeli különbség a szöveges feladatok utóteszten a kísérleti és a kontroll csoport között, az előbbi javára. A fejlesztőprogram fókuszában a matematikai problémák megértésének elősegítése volt, ez magyarázhatja a két csoport teljesítménye közötti jelentős különbséget. A tanév végére, a késleltetett utóteszt idejére a hatásméretek közötti különbség csak a szorzás területén maradt fenn, az osztás és a szöveges feladat alteszteken kimutatható hatásméretek szinte azonosnak bizonyultak. Azaz ezen a két területen a két csoport már közel azonos mértékben fejlődik tovább. A szöveges feladatok alteszt esetében azonban megfigyelhető, hogy a kontroll csoport közel egy tanévnnyi idő alatt nem sokkal többet fejlődött a szöveges feladatok megértése terén, mint amennyit a kísérleti csoport fejlődött a négy-hat hetes intenzív fejlesztési időszak alatt (H₂₂).

28. táblázat. A kísérleti és a kontroll csoport elő-, utó- és késleltetett utóteszten nyújtott teljesítményének változása az egyes altesztek által mért területeken (Cohen-d érték számításával)

	d_T1_T2		d_T2_T3	
Részterület	Kísérleti	Kontroll	Kísérleti	Kontroll
Szorzás	0,31	0,22	0,31	0,24
Osztás	0,19	0,09	0,25	0,27
Szöveges	0,26	0,05	0,22	0,25

Megjegyzés. T1: előteszt, T2: utóteszt, T3: Késleltetett utóteszt, d: Cohen-d

A teljesítményben bekövetkezett változást képességszint-kategória szerint is megvizsgáltuk. Ehhez a tanulókat három csoportra osztottuk az előteszt pontszámai alapján. Az A csoportba azok a tanulók tartoztak, akik több mint egy szórással alacsonyabb eredményt értek el, mint az átlag; a B csoportot az átlagteljesítménytől kevesebb, mint egy, vagy éppen egy szórásnyival eltérő tanulók alkották; míg a C csoportba azok kerültek, akik eredménye több, mint egy szórással magasabb volt az átlagos teljesítőkénél.

Közvetlenül a fejlesztést követően az A és a B kísérleti csoport fejlődésének mértéke nagyobb, mint a kontroll csoporté (29. táblázat). Megfigyelhető, hogy a leggyengébben teljesítő tanulók, azaz az A csoport esetében magának az iskolai oktatásnak is kiemelten jelentős szerepe van

a fejlődésben, több, mint egy szórásegységnyit javulnak rövid idő alatt. A fejlődés mértéke mindkét csoport esetében lelassul a késleltetett utóteszt idejére, de a kísérleti csoport a kontroll csoporthoz viszonyítva továbbra is nagyobb ütemben fejlődik. Mivel a fejlesztés ideje alatt az iskolai oktatás tematikájában is előfordult a szorzásról és osztásról második osztályban tanultak ismétlése, a nagy hatásméret arról tanúskodik, hogy ebből mindkét csoport tagjai kifejezetten sokat hasznosítottak. A hatásméret későbbi visszaesését magyarázhatja, hogy a tanultak ismétlése a továbbiakban már nem volt jelen ugyanekkora hangsúllyal a matematika tananyagban. A kísérleti csoport előnye azonban azt mutatja, hogy az iskolai oktatás és a fejlesztés együttes hatására a fejlődésben a tanulók kevésbé esnek vissza, mint fejlesztésben nem részesült társaik.

A B csoportba tartozó tanulók fejlődése az utóteszt idejére szintén nagyobb mértékű a kísérleti csoport esetében, mint a kontroll csoportban. A késleltetett utóteszt esetén azonban már mindkét csoport azonos fejlődési ütemét figyelhetjük meg. A kontroll csoport fejlődési üteme az utóteszt és a késleltetett utóteszt között jelentősen gyorsul. A kísérleti csoport fejlődési üteme is, kis mértékben ugyan, de növekszik, ami szintén arra enged következtetni, hogy esetükben is kimutatható hosszú távú hatása is a fejlesztőprogramnak.

Az előteszten legjobban teljesítő C csoport esetében az előteszten a teljesítmény kimutatható mértékben nem változik. A fejlődés üteme csak az előteszt és a késleltetett utóteszt összehasonlításával mutatható ki. A kontroll csoport fejlődési üteme még e két mérési időpont között sem jelentős, a kísérleti csoportnál viszont majdnem egyharmad szórásegységnyi fejlődést figyelhetünk meg. Az eredményeink alapján megállapítható, hogy az átlag alatt és az átlagosan teljesítők csoportjában a fejlesztőprogram rövid és hosszú távon is hatással van a programban megcélzott matematikai készségek fejlődésére. A C csoport esetében rövid távú hatás nem jelentkezik, ám hosszú távon megfigyelhető a program fejlesztő hatása. Hipotézisünk (H_{22}) ennek alapján teljesült, miszerint az alacsonyabb képességszinttel rendelkező csoportokban van fejlesztő hatása a programnak. Ugyanakkor a program jótékony hatása hosszabb távon a legmagasabb képességszintű csoportban is kimutatható (H_{23}).

29. táblázat. A kísérleti és a kontroll csoport elő-, utó- és késleltetett utóteszten nyújtott teljesítményének változása képességszintek szerinti bontásban (Cohen-d érték számításával)

Csoport	N	Előteszt		Utóteszt		Késl. utót.		t	p	d_T1_T2	d_T2_T3
		(T1)		(T2)		(T3)					
		M	SD	M	SD	M	SD				
Kísérleti_A	72	16,6	7,5	32,9	15,8	40,5	19,5	-8,4	<0,001	1,32	0,42
Kontroll_A	68	18,1	6,1	33,3	17,6	38,3	20,9	-7,4	<0,001	1,15	0,25
Kísérleti_B	250	49,8	15,8	56,1	21,2	64,4	21,3	-6,5	<0,001	0,34	0,39
Kontroll_B	243	49,8	13,6	53,5	20,4	61,5	21,4	-3,1	<0,001	0,21	0,38
Kísérleti_C	83	83,9	6,6	82,0	13,9	86,9	12,0	-2,2	<0,05	-	0,31 (T1_T3)
Kontroll_C	94	84,4	6,3	79,1	15,8	85,3	14,5	5,8	n.s.	-	0,08 (T1_T3)

Megjegyzés: A: az előteszten gyengén teljesítő tanulók (több, mint egyharmad szórásegységgel alacsonyabb teljesítmény, mint az átlag; B: az átlagtól legfeljebb egyharmad szórásegységgel eltérő teljesítményt nyújtó diákok, C: az előteszten jól teljesítő tanulók (több, mint egyharmad szórásegységgel magasabb teljesítmény, mint az átlag).

Elemzésünk következő lépéseként megvizsgáltuk, hogy a teljes teszt és az altesztek manifeszt szintjén végzett elemzések eredményei mennyire általánosíthatók, azaz, hogy a fejlesztőprogram manifeszt szinten igazolt hatásai megerősítést nyernek-e a látens szintű elemzések során. Ehhez meghatároztuk az előteszt és utóteszt közötti időszakra a látens változást feltételező (latent change) modellt, amelyben azt feltételezzük, hogy az iskolai oktatás hatására, további fejlesztés nélkül is szignifikáns javulás következik be mind a kísérleti, mind a kontroll csoportban. Ebben a modellben a kísérleti és a kontroll csoportban is megbecsültük a meredekség növekedése (slope growth) faktort, hogy az esetleges változásokat megfigyeljük. Ezt követően három lehetőséget vizsgáltunk. Egyrészt a változást nem feltételező (no-change) modellt mindkét csoport esetében, azaz azt feltételezve, hogy nem történt szignifikáns változás a fejlesztés, illetve az iskolai oktatás hatására egyik csoportban sem. Másrészt vizsgáltuk a kísérleti és a kontroll csoport esetében is a látens változást feltételező (latent change) modellt, továbbá a kísérleti csoport esetében a látens változást feltételező modellt, a kontroll csoport esetében a változást nem feltételező modellt.

A Cronbach-alfa értéke jó volt ($>0,80$), a korrelációk a három mérési időpontban 0,822; 0,836 és 0,861 értékkel erősnek bizonyultak. A modellilleszkedési mutatókat illetően az RMSEA értékek meghaladják a szakirodalom (Hu & Bentler, 1999) által javasolt 0,06-0,08 közötti elfogadható tartományt (30. táblázat). Ugyanakkor figyelembe véve azt a módszertani megfontolást, hogy alacsony szabadságfok esetén az RMSEA érték torzíthat (Kenny et al., 2015), a modell értékelésekor a komparatív illeszkedési mutatókra – CFI (Comparative Fit Index) és TLI (Tucker-Lewis Index) – támaszkodtunk, mely mutatóknál a 0,90 feletti érték elfogadhatónak tekinthető (Hu & Bentler, 1999). E megfontolások mentén adódik az a megállapítás, hogy előzetes hipotézisünknek megfelelően mindkét csoportban a látens változást feltételező modell illeszkedett legjobban az adatokhoz. Más szóval, a látens változás modellje mindkét csoport esetében alátámasztotta a szignifikáns fejlődés mivoltát, azt, hogy ebben az életkorban a gyerekek fogékonyak az iskolai oktatás fejlesztő hatására. A meredekségi faktor szignifikánsan nagyobb mértékű növekedését ($s = 0,506$) állapítottuk meg a kísérleti csoportban a kontroll csoporthoz képest ($s = 0,244$). A fejlődés menetét leíró görbe y tengellyel való metszéspontja (intercept) és a fejlődés mértékét leíró meredekség értékek negatív korrelációja a kísérleti csoportban ($r = -0,339$) pedig azt jelezte, hogy az alacsonyabb képességszintű tanulók jobban reagáltak a fejlesztésre, ők fejlődtek legtöbbet kontroll csoportos társaikhoz képest a fejlesztés hatására.

30. táblázat. Modellilleszkedési mutatók a teszt szinten vizsgált modellek esetén

Modell	χ^2	df	CFI	TLI	RMSEA [90% CI]
Látens változást feltételező modell a kísérleti és a kontroll csoport esetén is	171,3	10	0,935	0,922	0,200 [0,174, 0,227]
Változást nem feltételező modell a kontroll csoport és látens változást feltételező modell a kísérleti csoport esetén	233,3	11	0,910	0,902	0,224 [0,199, 0,249]
Változást nem feltételező modell a kísérleti és a kontroll csoport esetén is	250,8	12	0,903	0,903	0,222 [0,199, 0,246]

Megjegyzések: CFI: összehasonlító illeszkedési mutató (Comparative Fit Index); TLI: Tucker-Lewis Index; RMSEA: Megközelítési négyzetes középérték hiba (Root Mean Square Error of Approximation); CI: konfidencia intervallum.

Ezt követően a látens változásokat a kísérleti és a kontroll csoportokban az altesztek szintjén is elemeztük (31. táblázat). A szorzás esetében a látens változási modell illeszkedett legjobban az

adatokhoz, vagyis látens szinten is megállapítható, hogy a fejlesztés ideje alatt mind a kísérleti csoport tagjai esetén, mind a kizárólag iskolai oktatásban részt vevő kontroll csoport tagjainál is történt fejlődés. A fejlődés meredekségét leíró görbe esetében azonban jelentős a különbség. A kontroll csoport esetében $s = 0,271$, a kísérleti csoport esetében $s = 0,462$. A látens görbék metszéspontjai nem mutattak szignifikáns különbséget ($I=2,124$), vagyis mindkét csoport képességszintje megegyezett az előteszt idején. Az eredmények megerősítik, hogy a fejlesztőprogram felgyorsította a kísérleti csoport tagjainak fejlődését a szorzás területén a kontroll csoporthoz viszonyítva. A fejlődést leíró görbék y tengellyel való metszéspontjának és meredekségének negatív korrelációs értéke azt jelzi, hogy az alacsonyabb képességszinttel rendelkező tanulók gyorsabban fejlődtek, mint a magasabb képességszinttel rendelkezők, amely eredmény szintén alátámasztja a manifeszt szinten kapott eredményeket.

Hasonló eredményeket fogalmazhatunk meg az osztás esetében is, vagyis a látens változási modell illeszkedett legjobban az adatokhoz, megerősítve a fejlődést ezen a területen mind a kísérleti, mind a kontroll csoportban. A fejlődés meredekségét leíró görbék (kontrollcsoport: $s = 0,136$, beavatkozási csoport: $s = 0,363$) jelentős különbséget jeleznek a fejlődés sebességében a kísérleti csoport javára. Mivel a látens görbék metszéspontjai nem mutattak szignifikáns különbséget ($I = 1,974$), azaz mindkét csoport képességszintje azonos volt az előteszt idején, a beavatkozás eredményeként sikerült felgyorsítani a tanulók fejlődését az osztás területén a kísérleti csoportban a kontrollcsoporttal összehasonlítva. A fejlődést leíró görbék y tengellyel való metszéspontjának és meredekségének negatív korrelációs értéke az osztás esetében is azt jelenti, hogy a fejlesztőprogram hatására az alacsonyabb képességszinttel rendelkező tanulók gyorsabban fejlődtek, mint a magasabb képességszinttel rendelkezők. Ez az eredmény is alátámasztja a manifeszt szinten kapott eredményeket.

A szöveges feladatok alteszt esetén az eredmények eltérőek a szorzás és az osztás területén kapott eredményektől. A szöveges feladatok alteszt esetén a második modell illeszkedett a leginkább, azaz az iskolai tanórán felül további fejlesztésben nem részesülő csoport diákjai az érintett időszak alatt nem fejlődtek ezen a területen, míg a fejlesztésben résztvevő diákok igen. A fejlődést leíró látens növekedési görbe meredeksége: $s = 0,309$. Ez az eredmény megerősíti a szöveges feladatok alteszttel kapcsolatban manifeszt szinten tapasztalt eredményeket (H_{24}).

31. táblázat. Modellilleszkedési mutatók az egyes altesztek szintjén vizsgált modellek esetén

	Modell	χ^2	df	CFI	TLI	RMSEA [90% CI]
Szor- zás	Látens változást feltételező modell a kísérleti és a kontroll csoport esetén is	73,6	10	0,960	0,951	0,125 [0,100-0,153]
	Változást nem feltételező a kontroll csoport és látens változást feltételező modell a kísérleti csoport esetén	91,7	11	0,949	0,944	0,135 [0,110- 0,161]
	Változást nem feltételező a kísérleti és a kontroll csoport esetén is	136,4	12	0,921	0,921	0,160 [0,137- 0,185]
Osz- tás	Látens változást feltételező modell a kísérleti és a kontroll csoport esetén is	107,9	10	0,928	0,913	0,156 [0,130- 0,183]
	Változást nem feltételező a kontroll csoport és látens változást feltételező modell a kísérleti csoport esetén	112,2	11	0,925	0,919	0,151 [0,126- 0,177]
	Változást nem feltételező a kísérleti és a kontroll csoport esetén is	134,6	12	0,910	0,910	0,159 [0,135- 0,184]
Szö- ve- ges fela- da- tok	Látens változást feltételező a kísérleti és a kontroll csoport esetén is	12,4	10	0,996	0,996	0,025 [0,000- 0,062]
	Változást nem feltételező a kontroll csoport és látens változást feltételező modell a kísérleti csoport esetén	12,4	11	0,998	0,998	0,018 [0,000-0,057]
	Változást nem feltételező modell a kísérleti és a kontroll csoport esetén is	29,9	12	0,974	0,974	0,061[0,034-0,089]

Megjegyzések: CFI: összehasonlító illeszkedési mutató (Comparative Fit Index); TLI: Tucker-Lewis Index; RMSEA: Megközelítési négyzetes középérték hiba (Root Mean Square Error of Approximation); CI: konfidencia intervallum.

7.7 Az eredmények megvitatása

A nagymintás kutatás során a pilot kutatásra jellemző kutatási dizájn megtartásával, az ott kipróbált fejlesztőprogram pilot eredményei alapján továbbfejlesztett változatának hatékonyságát monitoroztuk. Ehhez három mérési ponton, a fejlesztés megkezdése előtt, közvetlenül a fejlesztés befejezése után, végül három hónappal később elő-, utó- és késleltetett utótesztet oldottak meg a tanulók. A kvázi-kísérleti elrendezésben megvalósult kutatásban 2187 tanulótól nyert adatokból annak a 810 diáknak az eredményeit elemeztük, akiktől megbízható eredményekhez szükséges elegendő adattal rendelkezünk. A tantervi követelményeken alapuló, a szorzás és osztás

konceptuális megértését célul kitűző fejlesztőprogram pilot kutatásban alkalmazott változatát kibővítettük, és átstrukturáltuk. A feladatok mennyiségét 276-ról 306-ra bővítettük, és az eredeti 12 fejlesztési egység helyett 15 fejlesztési egységbe rendeztük. A fejlesztés időtartama így változott, a pilot kutatásban rendelkezésre álló 3-4 hét helyett a nagymintás kutatásban a tanulók 4-6 hét fejlesztésben vettek részt.

A kísérleti csoport esetében a teljes teszten kimutatott hatásméret közvetlenül a fejlesztés befejezését követően majdnem a kétszerese ($d=0,29$) a kontroll csoporténak ($d=0,15$). Habár a 0,15 hatásméret elhanyagolható, a 0,29 pedig kis hatásméret (Cohen, 1988), azaz a kettő közötti különbséget ennek fényében érdemes interpretálni, ez az eredmény arra utal, hogy a gyermekek kognitív fejlődésében van egy érzékeny időszak, amikor az iskolai oktatáson kívüli – akár rövid távú – célzott beavatkozás hatására is fejlődnek. A késleltetett utóteszten tapasztalt azonos fejlődési ütemet ($d=0,30$ és $d=0,29$) érdemes interpretálni abban a vonatkozásban, hogy a kísérleti csoport megtartja, ám nem gyorsítja a fejlődés ütemét a fejlesztés befejezését követően. Mivel a fejlesztés a második évfolyamos tananyagban történt lemaradások pótlását, az ehhez szükséges gondolkodási folyamatok fejlesztését tűzte ki célul, így ez az eredmény azért elgondolkodtató, mert annak oktatására, újbóli alapozására a későbbiekben az iskolai oktatás során már nem kerül sor (Kerettanterv az általános iskola 1-4. évfolyamára, 2012). Ugyanakkor a kontroll csoport és a kísérleti csoport azonos fejlődési üteme a fejlesztés befejezése után már egységesen az iskolai oktatás hatására következik be. A fejlődés ütemében szerzett előnyét a kísérleti csoport nem képes megtartani. Azaz a másodikos tananyag pótlásához a fejlesztésre hosszabb távon van szükség. Másképp fogalmazva, a lemaradásokat ez a korosztály nem tudja önmagától pótolni, folyamatos és célzott megsegítésre van szükség a megfelelő fejlettségi szint eléréséig (Fábiánné et al., 2008).

A harmadik évfolyamon tapasztalt fejlődési ütemet vizsgálva megállapítható, hogy célzott beavatkozás nélkül az előző évfolyamból felhalmozódott hiányosságok leküzdése rendkívül lassú (Weidman et al., 2022). Mivel a lemaradás pótlásának elmaradása és a készségek megfelelő fejlődésének hiánya lassíthatja vagy akár meg is akadályozhatja a további matematikai tartalmak elsajátítását, a korai beavatkozás szükségesnek tűnik a későbbi matematikai siker érdekében (Capone et al., 2021). Ezt megerősíti az a feltételezés, hogy a fejlesztési időszak alatt a harmadik osztályos tanulók a szorzás és osztás második osztályos matematikaórákon elsajátított ismereteit ismételték át és bővítették a Nemzeti Alaptanterv (2012) szerint. Ebben az összefüggésben a kontrollcsoport és a kísérleti csoport fejlődése közötti különbség a kísérleti csoport javára a már elvárt tudás újraalapozásának hatására alakul ki.

Negyedik évfolyamon mind a kontroll-, mind a kísérleti csoportban erőteljesebb a fejlődés, mint a harmadik évfolyamon. Feltételezhető, hogy mivel a negyedik osztályosok nemcsak második osztályban, hanem harmadikban is találkoztak a szorzással és osztással, így több tapasztalatot és gyakorlatot szereztek e műveletekkel, mire megkezdték a negyedik osztályt. Ez annak fényében is

erőteljesebb fejlődést eredményezhet, hogy a fejlesztés időszaka alatt a negyedik évfolyam más témakörök mellett a harmadikban e témakörben tanultakat is ismételte (Kerettanterv az általános iskola 1-4. évfolyamára, 2012). Azonban, ha összehasonlítjuk a kísérleti csoport fejlődését a kontroll csoportéval, láthatjuk, hogy a fejlesztőprogram és az iskolai oktatás együttes hatása ezen az évfolyamon is erősebb, mint az iskolai oktatásé önmagában. Ez azt jelenti, hogy célzott beavatkozás ezen az évfolyamon is elengedhetetlen ahhoz, hogy a diákok leküzdhessék a nehézségeket. Ráadásul a teljesen az alapoktól induló, a tudást újra felépítő fejlesztőprogram hatékony ebben a korosztályban is, nemcsak az egy évvel fiatalabb társaik esetében.

Az eloszlási görbék által jelzett változások értelmezését a két csoport előteszten elért eredményeinek hasonló eloszlása fényében tesszük meg. A késleltetett utóteszt eredményeinek eloszlását megfigyelve megállapítható, hogy a kísérleti csoport eloszlási görbéje az alacsonyabb teljesítményszinteknél laposabb, mint a kontroll csoporté, míg a magasabb teljesítményértékeknél kicsúcsosodik, ellentétben a kontroll csoportéval.

Bár a kontroll és a kísérleti csoport fejlődési üteme között az utó- és a késleltetett utóteszt között eltelt időszakban nem jelentős a különbség, az eredményekből eltérő tendenciákra következtethetünk. Az utó- és a késleltetett utóteszt között eltelt időszakban mind a harmadik, mind a negyedik évfolyam tanmeneteiben (pl. OFI, 2021a, 2021b) bővülő számkörben megjelenik a szorzás és az osztás. Ennek is van szerepe abban, hogy mindkét csoport csoportszinten azonos mértékű fejlődést mutat. A kísérleti csoport tagjai közül azonban többen vannak, akik jobban megértették e műveletek koncepcióját, és a tudást megbízhatóbban megőrizték, mint a kontroll csoport tagjai. Az ő teljesítményüket fejezheti ki az eloszlási görbe magasabb teljesítményértékeknél történő kicsúcsosodása. A kontroll csoport fejlődési görbájéről az olvasható le, hogy a tanulók zöme lassú fejlődésnek indult, egyenletesen és kevésbé mozdultak el a teljesítményértékek a magasabb tartományok felé.

A részteszteket egyenként vizsgálva megállapíthatjuk, hogy a fejlesztésben részt vevő tanulók fejlődése mindhárom területen felgyorsult heti két vagy három 15-20 perces fejlesztés eredményeként. Mindkét csoport fejlődésének mértéke a szorzás alteszten a legnagyobb az utóteszt idejére, amely eredményt magyarázhat a szorzás nagyobb hangsúllyal való szerepeltetése a matematikaórákon, továbbá az is, hogy az osztás megértéséhez gyakran a szorzás megértésén keresztül vezet az út (LeFevre & Morris, 1999), illetve az osztás kétféle értelmezését is meg kell érteni. A szóveges feladatok alteszten a kísérleti csoport egyötöd szórásegységnyivel jobban fejlődik, mint a kontroll csoport. Ez az eredmény a szóveges feladatok megértésében rejlő nehézségek (pl. Csíkos, 2003) ismeretében figyelemre méltó, hiszen összesen 15 alkalmat felölölő rövid fejlesztő egységek elvégzésének hatására értek el ilyen fejlődést a tanulók. A fejlesztőprogram feladatainak nagy részében kiemelt hangsúlyt kapott a feladat szituációját narráló szöveg megértése, és az együtt gondolkodásra hívó szövegek meghallgatásának lehetősége, amikor a feladat

megfigyelése közben a tanuló a tanár gondolkodását hallgathatta meg az adott matematikai problémával kapcsolatban, majd ennek mentén kellett a gondolatsort legtöbbször manipulatív tevékenységgel folytatnia. Úgy tűnik, a fejlesztőprogram ezen aspektusa olyan új elemet emelt be a tanulók matematikatanulásának gyakorlatába, amely rövid idő alatt is fejlesztő hatásúnak bizonyult. A fejlesztőprogram együtt gondolkodásra hívó szövegei – habár ugyanazt hallgatja meg minden egyes diák a saját haladási ütemében – nem az osztálytermi szituációt modellezzik, ahol a tanulónak az osztálytársaival együtt kell figyelnie, és esetleges, hogy neki kell-e majd folytatnia a gondolatsort, hanem az egyéni fejlesztés személyre szóló közlésformáira emlékeztetnek, hiszen egyéni döntés alapján többször meghallgathatók, és a gondolatmenetet minden diáknak egyéni ütemében folytatnia kell.

A késleltetett utóteszt idejére megfigyelhető változások az egyes alteszteken történt fejlődési ütemben mindhárom alteszt esetén arra engednek következtetni, hogy az alapműveletek koncepciójának megértésére fordított idő hosszú távon kifizetődik (Capone et al., 2021). A szorzás alteszten a tanulók fenn tudták tartani mind a fejlődési ütemet, mind a fejlődési ütemben az utóteszten kimutatható előnyt a kontroll csoporthoz képest. Az osztás és a szöveges feladatok alteszten a kísérleti csoport fejlődési üteme már nem tér el a kontroll csoporttól. Azonban a célzott fejlesztés hatására a fejlődésük az utó- és a késleltetett teszt időpontja között már magasabb tudásszintről indul, és így sem lassul le a fejlődésük.

Egy korábban tanultak megértését célzó fejlesztőprogram akkor igazán hatékony, ha a lemaradó tanulók teljesítményének javítására alkalmasnak bizonyul. A képességcsoportok szerinti bontásban nyert adatok elemzése alapján megállapíthatjuk, hogy azok a 9-11 éves diákok fejlődtek legjelentősebben az utóteszt idejére, akik az előteszten a leggyengébb teljesítményt nyújtották, és az iskolai oktatáson túl a fejlesztésben is részt vettek (kísérleti csoport, A képességszint). Ezek a diákok a fejlesztés során szerzett előnyüket a fejlődés ütemében a késleltetett utóteszt idejére is megtartják. A fejlődés üteme közvetlenül a fejlesztés hatására a B képességszintű kísérleti csoportban is gyorsabb, mint a kontrollcsoportokban. A képességszint-kategória szerinti csoportok teljesítményében bekövetkező változások iránya összhangban van azzal a szándékunkkal, hogy a fejlesztőprogram célja a lemaradó tanulók matematikai gondolkodási készségeinek bekövetkező pozitív változást elősegítése. Ez az eredmény megerősíti azon korábbi kutatási eredményeket, miszerint számítógép-alapú fejlesztőprogramok hatékonyan alkalmazhatók a lemaradó tanulók megsegítésében, a tanulási veszteségek pótlásában (Bernavides-Varela et al., 2020; Kuhn et al., 2020).

Az előteszten az átlagnál szignifikánsan jobban teljesítő tanulók (C csoport) az utóteszten nem mutattak fejlődést, ám a kísérleti csoport fejlődése majdnem egyharmad szórásegységgel, szignifikánsan javult a késleltetett utóteszt idejére, miközben a kontroll csoport teljesítménye továbbra sem változott szignifikánsan. Habár az A és B csoportban kimutatott eredményeink

megegyeznek azon kutatási eredményekkel, miszerint egy jól kidolgozott célzott fejlesztőprogram a lemaradókat fejleszti leginkább (Ginsburg & Pappas, 2004; Outhwaite et al., 2017), a kísérleti csoportban a késleltetett utóteszten tapasztalt fejlődés viszont arra mutat rá, hogy habár a matematikából jobban teljesítő diákok rugalmasabban választanak problémamegoldási stratégiát, és a műveltségzésben, illetve a megjegyzett esetek előhívásában is pontosabbak (Zhang et al., 2014), e képességek fejlesztése és a tudás konszolidálása az ő oktatásuk során is több évfolyamon át expliciten meg kell jelenjen.

Az eredmények általános érvényű voltát illetően megállapítottuk, hogy tesztszinten a látens változási modell illeszkedik legjobban mind a kontroll, mind a kísérleti csoport esetében nyert adatokhoz. Fontos megjegyezni, hogy ebben az életkorban a gyerekek matematikai gondolkodása alapvetően fejlődik a matematikai tapasztalatszerzésen keresztül, továbbá megfigyelhető, hogy a gyerekek ebben az életkorban fogékonyak ezeknek a készségeknek az iskolai fejlesztésére. Ugyanakkor a látens szintű elemzés rámutat arra, hogy a fejlesztőprogram hatására a fejlődés szignifikáns mértékben felgyorsítható. Az elemzés azt is megerősíti, hogy az előteszt során alacsonyabb teljesítményt nyújtó diákok nagyobb mértékben fejlesztették matematikai készségeiket a fejlesztőprogram segítségével, mint jobban teljesítő társaik.

További elemzések a résztesztek szintjén is megerősítették a manifeszt módszerekkel kapott eredményeket. A szorzás és osztás esetében mindkét csoport tanulójának teljesítménye javult, de a kísérleti csoport fejlődése, valamint az előző tanévekből származó hiányosságaik leküzdése felgyorsult a fejlesztőprogram hatására. A szöveges feladatok résztesztnél azonban az eredmények azt mutatják, hogy csak a kísérleti csoport ért el előrelépést, míg a kontrollcsoport nem. Más szóval, az eredményeink általánosíthatók és megfogalmazható, hogy a fejlesztőprogram valóban elősegíti a szorzás és osztás fogalmi megértését úgy, hogy közben a rutin számolási eljárásokban is fejlődnek a tanulók.

7.8 A fejlesztőprogram hatásvizsgálata a hátrányos és halmozottan hátrányos helyzetű tanulók esetében

Az alacsony szocioökonómiai státusz iskolai beválásra, ezen belül a matematikai teljesítményre gyakorolt negatív hatását az 2.2.1. fejezetben tárgyaltuk részletesen. Az 2.2.1.1. fejezetben bemutattuk a magyarországi helyzetet, a szegregáló iskolarendszert, amelyben azon iskolák diákjai, ahol magas az alacsony szocioökonómiai státuszú gyerekek aránya, kétszeresen járnak rosszul (Harsányi et al., 2019). Az 2.2.1.2. fejezetben a HH és HHH státuszú tanulók által – a státusszal nem rendelkező gyermekeknél nagyobb arányban – elszenvedett tanulási veszteségről szóló kutatásokat mutattuk be. Az alsó tagozatos diákok számára készült digitális matematikai fejlesztőprogramokról kevés megbízható kutatást ismerünk, ezeket a 3.4. fejezetben tárgyaltuk. A

bemutatott fejlesztőprogramok között elenyésző azok száma, amelyekkel kapcsolatban a rossz szocioökonómiai háttérű gyerekek számítógép-alapú matematikai fejlesztésben való részvételéről, és a fejlesztés eredményességéről információval rendelkezünk. A szakirodalom, illetve annak hiányossága alapján tehát releváns feladat a mintánk 15%-át kitevő HH vagy HHH státuszú tanulók által alkotott részminta adatainak elemzése, hozzájárulva ezzel az e populáció számára biztosítható számítógép-alapú matematikai fejlesztőprogramok hatékonyságáról rendelkezésre álló tudás gyarapításához.

7.8.1 Minta

A minta kiválasztása során arra törekedtünk, hogy olyan iskolákat érjünk el, ahol a matematikában tapasztalható tanulási veszteség minél több tanulót érint (l. 8.1. fejezet). A háttéradatok elemzése alapján megállapítható, hogy a minta összetétele megfelelt az előzetes szándékainknak. Az adatközlésben rejlő nehézségek miatt 364 diákról rendelkezünk biztos adattal arról, hogy rendelkezik-e hátrányos, vagy halmozottan hátrányos helyzetű, státusszal. Közülük 122 diák hátrányos vagy halmozottan hátrányos helyzetű. További 123 gyermek esetében a pedagógusok csak a rendszeres gyermekvédelmi támogatás folyósítását erősítették meg, de a HH vagy HHH státuszról nem rendelkeztek információval. Habár a rendszeres gyermekvédelmi támogatásra jogosult tanuló közül 68 olyan iskolába jár, ahol kiemelkedően magas a HH és HHH státuszú diákok aránya, továbbá a támogatás folyósítása önmagában is rendkívül rossz anyagi helyzetet feltételez, az elemzések megbízhatóságának érdekében csak azoknak a gyerekeknek az adatait vettük figyelembe, akiknek a szocioökonómiai státuszáról a HH vagy HHH státusz meglétére alapozott biztos információkkal rendelkezünk (32. táblázat).

32. táblázat. A nagymintás kutatás HH/HHH státusszal biztosan rendelkező, vagy biztosan nem rendelkező részmintája

Évfolyam	HH / HHH státusz	Fejlesztés	Létszám
3.	van	kísérleti	27
		kontroll	22
	nincs	kísérleti	63
		kontroll	61
4.	van	kísérleti	37
		kontroll	36
	nincs	kísérleti	60
		kontroll	59

7.8.2 mérőeszközre vonatkozó vizsgálatok eredménye azon diákok körében, akiknek szocioökonómiai státuszáról adatokkal rendelkezünk

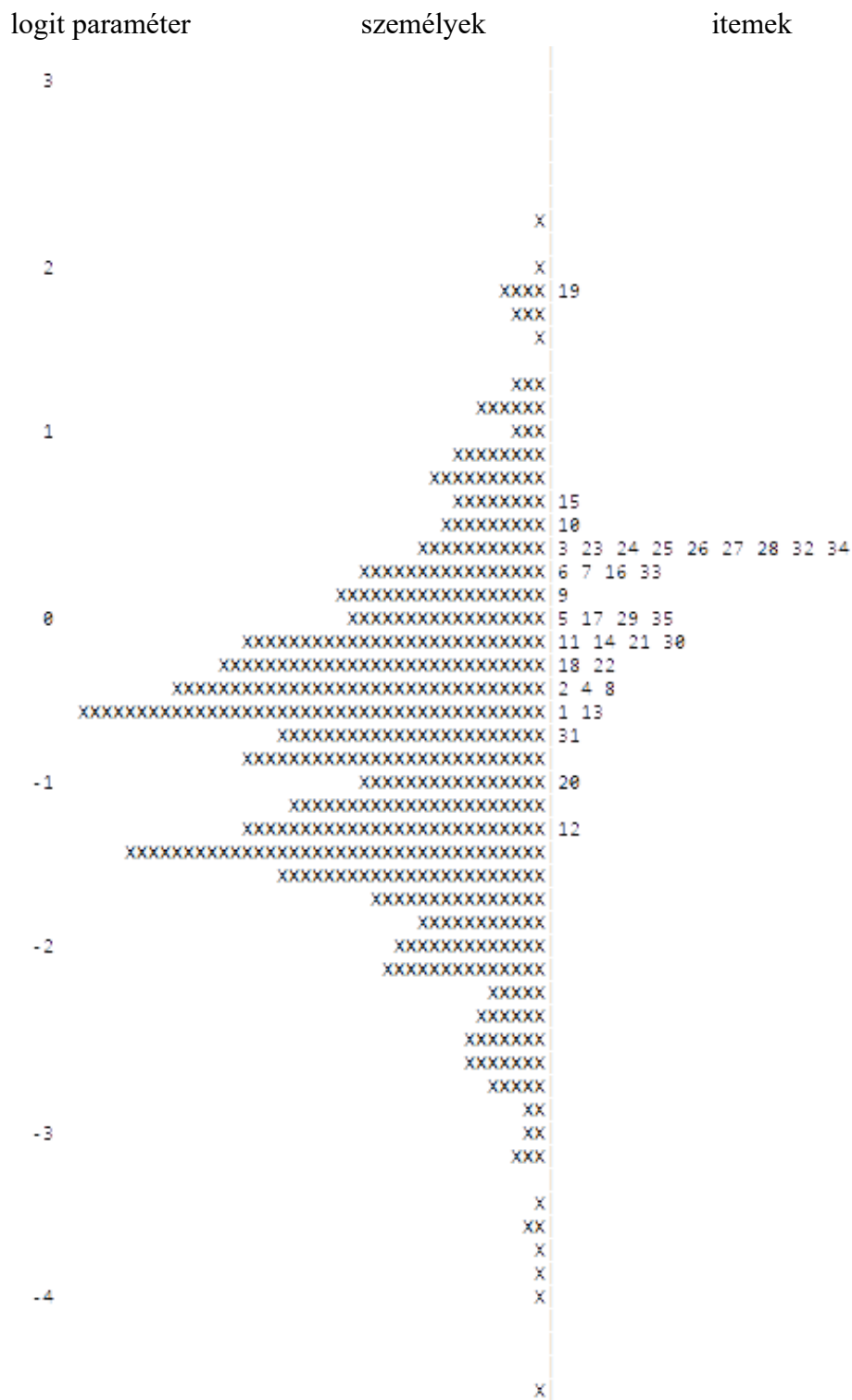
A teszt reliabilitását vizsgáltuk a szocioökonómiai státuszról rendelkezésre álló adatok alapján alkotott részminta – van, vagy nincs HH/HHH státusz – esetében is, a kísérleti és a kontroll csoportban, az elő- és a késleltetett utóteszt vonatkozásában (33. táblázat). A teljes teszt, a szorzás és az osztás altesztek esetén a reliabilitás mutatók mindkét mérési időpontban elfogadhatónak vagy jónak tekinthetők, és az eltérő háttérű csoportok esetében nincsen, vagy minimális az eltérés a mutató értékei között. A szöveges feladatok altesztén a két csoport esetén eltérés van a teszt reliabilitásában, a rossz szocioökonómiai háttérű tanulók esetében az előteszt időpontjában az alteszt itemei még nem mérnek megbízhatóan. A késleltetett utóteszt idejére mindkét csoportban közel azonos mértékben javult az alteszt reliabilitása (H₂₅).

33. táblázat. A teljes elő- és késleltetett utóteszt és ezek egyes altesztjeinek reliabilitása a HH / HHH státusszal rendelkező, illetve nem rendelkező diákok csoportjaiban (Cronbach- α)

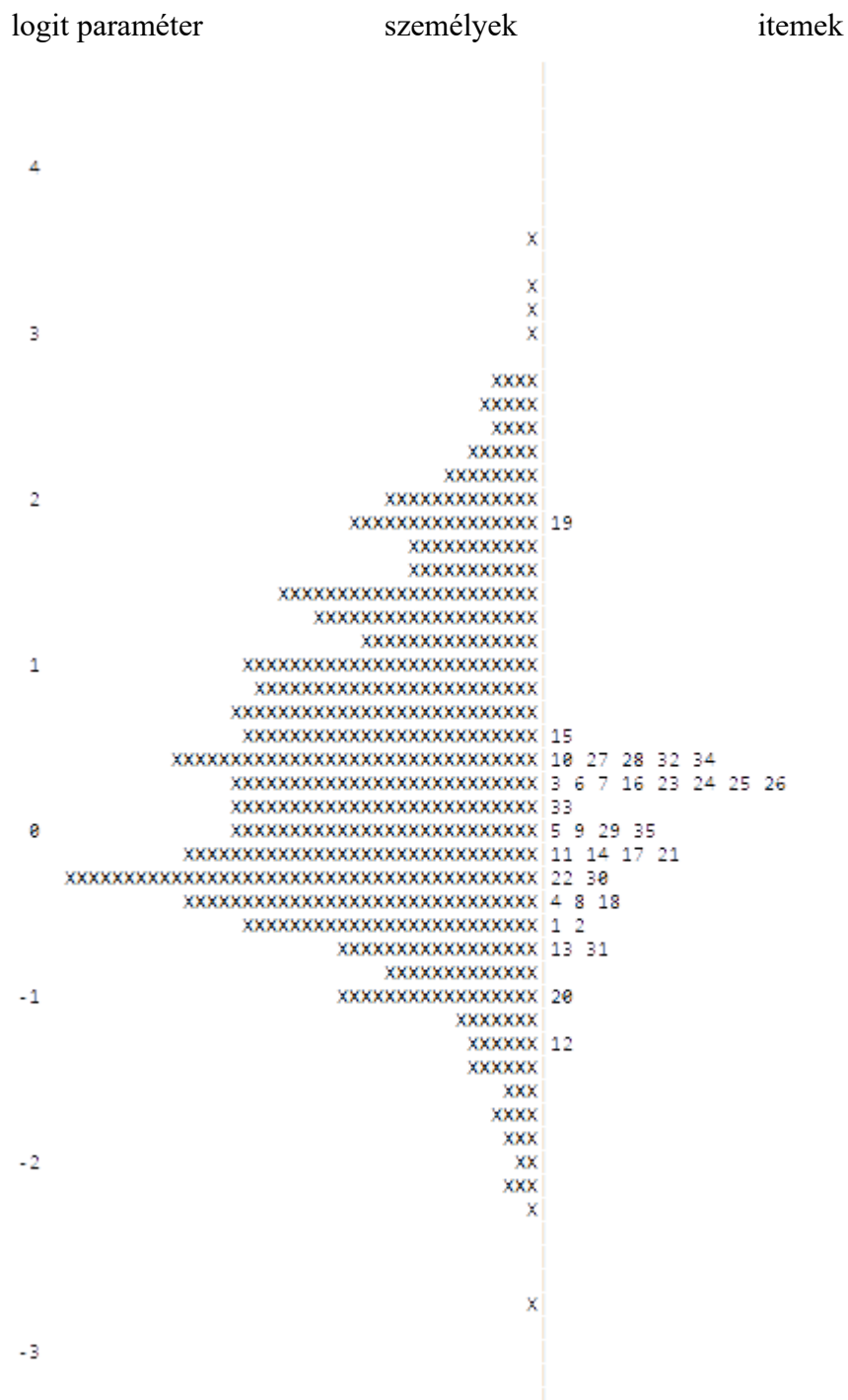
	Teljes teszt		Szorzás alteszt (15 item)		Osztás alteszt (12 item)		Szöveges feladatok alteszt (8 item)	
	HH	Ø	HH	Ø	HH	Ø	HH	Ø
Előteszt	0,87	0,88	0,76	0,79	0,78	0,80	0,54	0,66
Késleltetett utóteszt	0,89	0,92	0,80	0,82	0,78	0,86	0,68	0,77

Megjegyzés: HH: hátrányos vagy halmozottan hátrányos helyzetű tanulók; Ø: HH vagy HHH státusszal nem rendelkező tanulók.

A valószínűségi tesztelméletre alapozva megvizsgáltuk, hogy a fejlesztés megkezdésekor a HH, illetve HHH státuszú gyerekek hol helyezkednek el azon a személy-item térképen, amelyhez az itemek nehézségi mutatóit a teljes mintára vetítve fixáltuk (35. ábra). Az EAP/PV reliabilitásmutató értéke 0,853, ami magasnak tekinthető. A személy-item térkép alapján a tanulók zömének képességszintje 0 logitegység alatt volt. Elenyésző azon diákok száma, akik a feladatok jelentős részét nagy valószínűség szerint meg tudták oldani. A tanulók negyede olyan képességszinten volt, hogy egyetlen feladatot sem tudott legalább 50%-os valószínűséggel megoldani.



35. ábra. A matematikai fejlesztőprogram hatékonyságvizsgálatához készült teszt személy-
item térképe a HH vagy HHH státusszal rendelkező tanulók körében az előteszt eredményei
alapján. Az ábra bal oldalán található skála a feladatok nehézségi szintjét és a tanulók
képességi szintjét jelenti. Minden $x 0,2$ tanulót reprezentál. A jobb oldalon lévő számok a
tesztben foglalt egyes itemeket jelzik.



36. ábra. A matematikai fejlesztőprogram hatékonyságvizsgálatához készült teszt személy-item térképe a HH vagy HHH státusszal nem rendelkező tanulók körében az előteszt eredményei alapján. Az ábra bal oldalán található skála a feladatok nehézségi szintjét és a tanulók képességi szintjét jelenti. Minden x 0,4 tanulót reprezentál. A jobb oldalon lévő számok a tesztben foglalt egyes itemeket jelzik.

Amennyiben ezeket az eredményeket összevetjük azon diákok személy-ítem térképével, akikről biztosan tudjuk, hogy nem rendelkeznek HH vagy HHH státusszal (36. ábra), jelentős eltérést tapasztalunk. E gyerekek mindössze 4%-a nem tudott jelentős valószínűséggel megoldani egyetlen feladatot sem a tesztben, viszont 38%-uk a feladatok több, mint 90%-át nagy valószínűséggel meg tudta oldani. Ez utóbbi a HH vagy HHH státuszú gyerekek megközelítőleg 10%-a esetén állt fenn. Elmondhatjuk tehát, hogy az előteszt a rossz szocioökonómiai státuszú diákok számára többségében jóval nehezebbnek bizonyult, mint jobb háttérrel rendelkező társaiknak (H26).

7.8.3 A mérőeszközre vonatkozó vizsgálatok megvitatása

A szöveges feladatok alteszt reliabilitása az előteszt idején mindkét csoportban alacsonyabb értékeket mutatott a szorzás és osztás alteszten kimutatható megbízhatóságnál. A hátrányos helyzetű tanulók csoportjában ez az alteszt az előteszt idején alacsonyabb megbízhatósági mutatóval rendelkezett (Cronbach $\alpha=0,54$). A tanulók e csoportjának a szókincsben és a szókincs bővíthetőségében, fejleszthetőségében megmutatkozó hátrányai, melyek a már hallott szavak jelentésének előhívhatóságában is megnyilvánulnak, magyarázhatják a szöveges feladatok alteszt gyenge reliabilitását az előteszt időpontjában (pl. Hoff, 2006; Maguire et al., 2018).

A késleltetett utóteszt idejére mindkét csoportban azonos mértékben nőtt a megbízhatóság. Mivel az első négy évfolyam folyamatos fejlesztési feladatainak egyike az olvasási és a szövegértési képesség fejlesztése (Kerettanterv az általános iskola 1-4. évfolyamára, 2012), így a javulás ennek következménye is lehet. Továbbá mind harmadik, mind negyedik évfolyamon, bővülő számkörökben, a tematika része a szorzás és az osztás, így e témák egyre alaposabb megismerése is segítheti a szorzási, illetve osztási problémákat tartalmazó szöveges feladatok megértését.

Az alacsony szocioökonómiai státusz, mint a gyenge tanulmányi teljesítményt magyarázó indok, oka lehet a személy-ítem térkép alapján megfogalmazott különbségeknek a HH vagy HHH státusszal rendelkező, illetve nem rendelkező diákok csoportjai között. Amennyiben a rossz szocioökonómiai státuszú tanulók személy-ítem térképén kirajzolódó eredményét a teljes mintára vetítjük, amelyben összesen 93 nagy valószínűséggel egyetlen feladatot sem megoldani képes tanuló van (lásd 31. és 32. ábra), minden harmadikról biztosan tudhatjuk, hogy HH, vagy HHH státuszú gyermek.

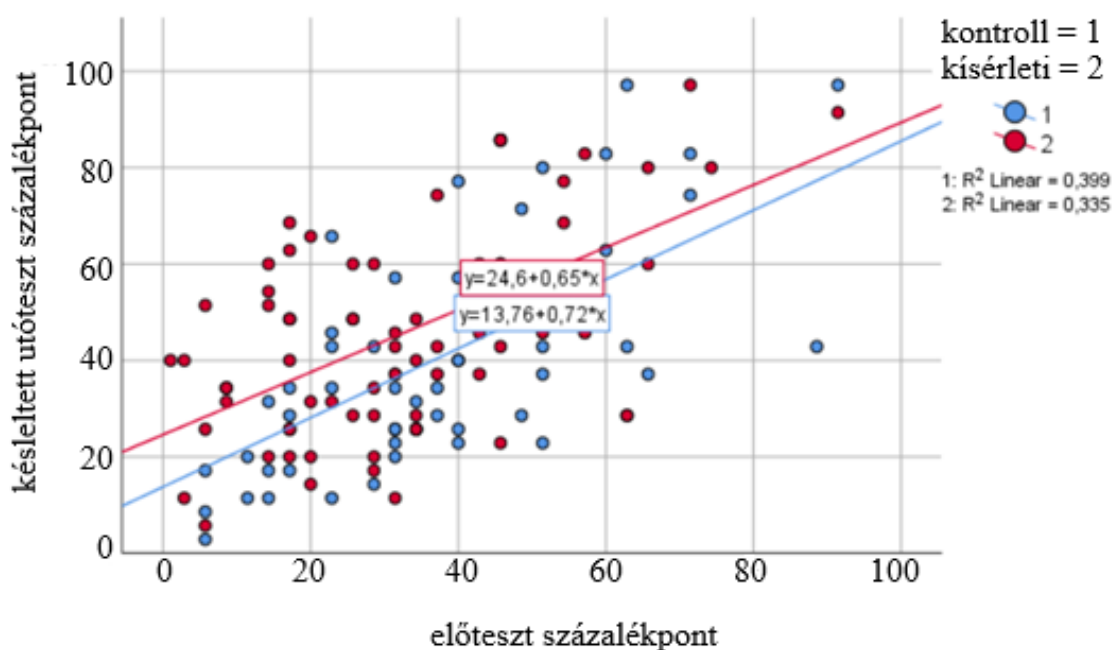
7.8.4 A fejlesztőprogram hatásvizsgálata a szocioökonómiai státusz alapján képzett csoportok esetén

Az alacsony szocioökonómiai státuszú diákok teljesítményét több szempontból monitoroztuk. Vizsgáltuk, hogy a fejlesztőprogram milyen hatással van a teljesítményükre. Vizsgáltuk továbbá azt

is, hogy az eltérő szocioökonómiai háttér mennyiben magyarázza a két mérési időpont között bekövetkezett teljesítményváltozást a kísérleti, illetve a kontroll csoportban. Mindkét kérdést az elő- és a késleltetett utóteszt között eltelt időszakra vonatkozóan vizsgáltuk annak érdekében, hogy a fejlesztés megtartott hatásáról vonhassunk le következtetéseket.

A fejlesztőprogram teljesítményre gyakorolt hosszú távú hatásának vizsgálatához a HH vagy HHH státusszal rendelkező diákok körében független változóként a kísérleti vagy kontroll csoportba való tartozásra tekintettünk, a késleltetett utóteszten elért eredményeket függő változóként, az előteszten elért eredményt pedig kovariánsként vontuk be az elemzésbe.

A Shapiro-Wilk teszt eredménye szignifikánsnak bizonyult ($p < 0,05$), ám a minta nagysága, továbbá a többi mutató megfelelő értéke (Levene teszt eredménye nem szignifikáns ($p=0,218$), a boxplotok vizsgálata nem mutatott ki szélsőséges kiugró értékeket, továbbá a regressziós egyenesek különbsége kevesebb, mint 0,4) alapján ANCOVA elemzést végeztünk (van den Berg, n. a.). Az előteszt eredményét kovariánsként tekintve az ANCOVA elemzés szignifikáns különbséget mutatott a késleltetett utóteszt eredményében a kísérleti és a kontroll csoport tanulói között, $F(1, 119) = 6,594$, $p = 0,011$, $\eta^2 = 0,053$. Az eredmények arra utalnak, hogy az előzetes tudásszinthez való igazítás után azok a tanulók, akik fejlesztésben részesültek, jobban fejlődtek, mint a kontroll csoport tagjai, és a fejlesztés eredménye hosszabb távon is kimutatható (H_{27}). A lineáris regressziós egyeneseket tartalmazó pontdiagram szintén a kísérleti csoport előnyéről tanúskodik (37. ábra). A diagram alapján megállapítható, hogy a kísérleti csoport tagjai közül az előteszten gyengébben teljesítő diákokat ábrázoló pontok nagyobb része a regressziós egyenes felett helyezkedik el, míg a kontroll csoport esetében a helyzet fordított, az őket ábrázoló pontok jelentős része a vonatkozó regressziós egyenes alatt helyezkedik el. Azaz a kísérleti csoport gyengébb bemeneti készségekkel rendelkező tagjainak a teljesítménye javult a késleltetett utóteszt idejére, miközben a fejlesztésben nem részesült társaik teljesítménye stagnált, vagy romlott (H_{28}).



37. ábra. Az előteszt eredménye által meghatározott késleltetett utóteszt eredmény csoportosított pontdiagramja a kísérleti és a kontroll csoport vonatkozásában

A HH / HHH státusszal rendelkező, illetve nem rendelkező diákok teljesítményét az elő- és a késleltetett utóteszt esetén is kísérleti, illetve kontroll csoportos bontásban páros t-tesztel vetettük össze, majd az ennek alapján számított hatásméret (Cohen-d) változásának irányát és nagyságát vizsgáltuk annak a kérdésnek a megválaszolásához, hogy a fejlesztés csökkentette-e a HH / HHH státusszal rendelkező diákok hátrányát a nem hátrányos helyzetű társaikkal szemben (34. táblázat).

A kísérleti csoportban a két csoport teljesítménye között megfigyelhető hatásméret a fejlesztés hatására csökkent. A kontroll csoportban ezzel ellentétes irányú a folyamat, a két csoport teljesítménye közötti hatásméret a késleltetett utóteszt idejére nőtt. A kísérleti csoport eredményei alapján elmondható, hogy a fejlesztőprogram oly módon gyorsította fel a hátrányos helyzetű tanulók fejlődését, hogy azok a fejlesztést követően, hosszú távon is képesek csökkenteni a lemaradásuk mértékét a fejlesztésben szintén részesült, nem hátrányos helyzetű társaikkal szemben. Ugyanakkor a kontroll csoport hátrányos helyzetű tagjai lemaradásának mértéke – fejlesztés nélkül – tovább nőtt azokkal a társaikkal szemben is, akik szintén nem részesültek fejlesztésben, ám nem hátrányos helyzetűek (H29).

34. táblázat. A hátrányos helyzetű és a nem hátrányos helyzetű diákok elő-, illetve késleltetett utóteszten nyújtott teljesítményének összevetése kísérleti és kontroll csoport szerinti bontásban

		Státusz	N	Átlag	Szórás	d
Kísérleti csoport	előteszt	nem HH/HHH	123	55,89	21,55	1,16
		HH/HHH	64	32,11	19,43	
	késleltetett utóteszt	nem HH/HHH	123	69,06	23,14	1,05
		HH/HHH	64	45,40	21,75	
	előteszt	nem HH/HHH	120	58,38	21,84	0,99
		HH/HHH	58	37,39	20,35	
Kontroll csoport	késleltetett utóteszt	nem HH/HHH	120	70,19	22,91	1,29
		HH/HHH	58	40,59	23,09	

7.8.5 Az eredmények megvitatása

A legfontosabb, és a nemzetközi szakirodalomban kevésbé vizsgált és elemzett eredmény, hogy feltérképezhetjük egy matematikai fejlesztőprogram alacsony szocioökonómiai státuszú diákok teljesítményére gyakorolt hosszú távú hatását. A fejlesztőprogram HH vagy HHH státuszú diákok matematikai teljesítményére gyakorolt hosszú távú hatásának elemzése két megközelítésben is pozitív irányú változásra mutatott rá. Egyrészt a fejlesztőprogram hatására a hátrányos helyzetű gyerekek teljesítménye javult, miközben a fejlesztésben nem részesült hátrányos helyzetű társaik teljesítménye stagnált, vagy romlott. Másrészt a fejlesztés hatására e gyerekek teljesítménye oly módon javult, hogy csökkentették hátrányukat a fejlesztésben szintén részesült nem hátrányos helyzetű diákokkal szemben. Ezzel egyidejűleg a kontroll csoport tagjainak teljesítménye

alátámasztani látszik azokat a kutatási eredményeket, hogy célzott fejlesztés nélkül az olló a két csoport folyamatosan nyílik (pl. Campione et al., 1988). A fejlesztőprogram azonban az egyenlőtlen oktatási hozzáfértést tudja ellensúlyozni azáltal, hogy mindenkinek ugyanazt a tartalmat és minőséget biztosítja.

Eredményeink megerősítik, hogy az alacsony szocioökonómiai státuszú gyerekek matematikai fejlődésének a fő terepe az iskola (Ginsburg & Pappas, 2004). A program hosszú távú hatása abból a szempontból is információval szolgál, hogy rövid, mindössze 4-6 hetes fejlesztés hatására javul a tanulók teljesítménye (Dietrichson et al., 2017). Ez az eredmény alátámasztja azt, hogy az alacsony szocioökonómiai státuszú tanulók hatékony felzárkóztatásának érdekében a heti célzott beavatkozás rendszeresítésére van szükség (Fuchs et al., 2006), amelyek ideális időtartama alkalmanként 20 perc (Bryant et al., 2008). Eredményeink rámutatnak, hogy ez a digitális fejlesztőprogram alkalmas arra, hogy a lemaradó hátrányos helyzetű diákok hosszabb távon is megmaradó matematikai tudást szerezzenek a segítségével.

A fejlesztőprogram olyan matematikai tudás tanítását, újratanítását célozta, amelynek az elsajátítása a második évfolyamban volt elvárás. Megfelelő fejlesztés nélkül e tudás kialakítása nagyon lassan, vagy nem valósul meg. Ugyanakkor az eredmények azt mutatják, hogy alsó tagozaton a lemaradóknak évfolyamtól függetlenül olyan fejlesztést kell biztosítani, amely az alapoktól indul, és az adott témakört – esetünkben a szorzás-osztás témakörét – újratanítja.

Azzal, hogy a program egyéni tanulási utakat biztosított, lehetővé vált, hogy a gyerekek megtapasztalják a tanulási autonómiát és az egyénre szabott tanulási élményt, ami a gyenge teljesítményt nyújtó rossz szocioökonómiai státuszú diákok számára a fejlődéshez vezető út egyik fontos eleme (Outhwaite et al., 2017). Annak ellenére, hogy a szorzás-osztás 100-as számkörben ezeken az évfolyamokon már inkább összetett szöveges feladatokban, illetve absztrakt formában jelenik meg, a fejlesztőprogram eleinte kizárólag digitális manipulatív eszközökre, videókra és képekre támaszkodva vezeti be a szorzás és osztás értelmezését. Későbbi egységekben, amikor már szöveges problémák is előfordulnak, sikertelenség esetén a program újra és újra visszavezeti a tanulókat a vizuális reprezentációkhoz. A program sikerességéből feltételezhető, hogy ez – a módszertanilag fontos – elem hozzájárul a fejlődéshez. Azaz a hátrányos helyzetű gyermekek számára sokkal hosszabb ideig kell biztosítsuk a manipulatív eszközöket és a vizuális megsegítést (Jordan et al., 1992). Ezek a gyerekek jóval kevésbé sikeresek a csak szövegesen megfogalmazott problémák megoldásában (Jordan & Levine, 2009). Ugyanakkor az intervenció hatására megtartják fejlődésbeli előnyüket, a fejlődésüket olyan teszttel mérve, amelynek legtöbb feladata már csak írott és olvasott szöveg által közvetített matematikai problémából állt vizuális reprezentáció nélkül. Mivel a matematikaoktatás spirálisan épül fel, e gyerekek esetében meglehet az esély, hogy megfelelő alapokra épülhessen majd a további tudás a szorzás és osztás témakörében.

7.9 Limitáció

A kutatás korlátai a fejlesztési időszak során bekövetkezett nagy mennyiségű adatvesztésből fakadnak. Azokban a hetekben, amikor a fejlesztések zajlottak, sok gyerek rendszertelenül járt iskolába. A szigorú módszertannak köszönhetően csak a teljes folyamatban részt vevő gyermekek adatait vontuk be a kutatásba, azokat, akik a fejlesztőprogram több mint felét teljesítették, az elő-, utó- és késleltetett utótesztet is megírták, és azok mindegyikében kevesebb mint 50% volt a hiányzó válaszok aránya. Ennek eredményeként a 2187-ből csak 810 gyermek adatai kerültek be az elemzésbe. Ez az adatvesztés egyrészt korlátozhatja az eredmények általánosíthatóságát, hiszen azoknak a gyerekeknek az adatai kerültek elemzésre, akiknél valószínűsíthető a fejlesztés időtartamán kívül is a rendszeresebb iskolába járás. Ám éppen azoknak a gyerekeknek a fejleszthetőségéről nem jutunk adatokhoz, akik feltehetően rendszertelenül járnak iskolába, és így a lemaradásuk is halmozódhat, és a fejlesztésük is nehezebb, mint rendszeresen iskolába járó társaiké. Ugyanakkor ahhoz, hogy a fejlesztőprogram egészének működéséről megbízható eredményekkel rendelkezünk, erre a korlátra, mint szükséges feltételre kell inkább tekintsünk.

További korlátja a kutatásnak, hogy mivel azok között a gyerekek között, akik nem feleltek meg a szigorú kritériumoknak, sokan hátrányos vagy halmozottan hátrányos helyzetűek, így éppen a kiemelt célcsoportunk mintájából veszítettünk jelentős mennyiségű adatot. Ugyanakkor, támaszkodva a 2. fejezetben tárgyaltakra, valószínűsíthető, hogy ez az a tanulói csoport, akik rendszertelenebbül járnak iskolába, és akik körében fontos lenne a fejlesztőprogramok hatékonyságának azonosítása e rendszertelenség mellett is.

A HH vagy HHH státuszú diákok alkotta célcsoport esetén további adatvesztést okozott, hogy a pedagógusok a háttérkérdőíveket sok esetben hiányosan töltötték ki, így azokat a gyerekeket, akiknél csak feltételezhetjük a hátrányos vagy halmozottan hátrányos helyzetet, ki kellett zárjuk az e csoportra irányuló kutatásból még akkor is, ha minden tesztet kitöltöttek, és a fejlesztésben végig részt vettek. A mintával összefüggő limitáció az is, hogy bár kértünk háttéradatokat a gyerekek diagnosztizált tanulási nehézségeiről, ezekről rendkívül szórványosan kaptunk adatokat, ezért érdemi elemzést ennek mentén nem tudtunk végezni. Így az elemzésekben egységes csoportként tekintettünk a diákokra, és eredményeinket nem tudtuk árnyalni abban a tekintetben, hogy azokat mennyiben befolyásolta a matematika tanulásában nehezítettséggel rendelkező diákok teljesítménye, illetve arról sincsenek adataink, hogy az ő fejlődésükhöz hozzájárulhat-e egy ilyen fejlesztőprogram.

A kutatás limitációja továbbá, hogy a kifejezetten az iskolai tantervre épülő fejlesztőprogram alkalmazása abban az időszakban történt, amikor a spirális felépítésű matematika tanterv szerint a diákok az osztályfoknak megfelelő számkörben bővítették tudásukat a témával kapcsolatban. Így az egyes iskolákban a tanárok által választott tanítási stílus és módszerek mind a kísérleti, mind a kontroll csoport eredményeire hatással lehettek.

A limitációk között kell említeni, hogy a szorzás oktatása egy olyan területe az alsó tagozatos matematikaoktatásnak, amely – mint ahogy erre a dolgozatban rámutattunk – két szempontból is kérdéseket vet fel. A fejlesztőprogramban, szakmai érvek mentén (pl. C. Neményi, 2012), a szorzás megértését azzal a szemlélettel kívántuk fejleszteni, amely a szorzandó-szorzó sorrendhez kötődik, ugyanakkor a szorzás lejegyzésében a tankönyveknek és a nemzetközi gyakorlatnak megfelelően a szorzó-szorandó sorrendet kívántuk meg a gyerekektől. További szempont az, hogy a tankönyvek a szorzásra, mint egyenlő tagú összeadásra tekintenek. A fejlesztőprogramban részt vevő gyerekek ezt az értelmezést tanulták második osztályos korukban, és a fejlesztőprogram ezt az értelmezést hivatott felülírni azzal, hogy ugyancsak szakmai érvek alapján (pl. Park & Nunes, 2001) a szorzás értelmezéseként az egy a többnek megfeleltetést tekintette.

Azonban e limitációk mellett is megállapítható, hogy a fejlesztőprogram hatékony eszköznek bizonyult a lemaradók felzárkóztatásában. A nagyfokú adatvesztés ellenére is elegendő adattal rendelkezünk ahhoz, hogy a HH és HHH státuszú diákok fejlődésére vonatkozóan is következtetéseket vonjunk le.

8 Összegzés

Kutatásunk témája egy tudományos eredményeken alapuló, a matematikában alulteljesítő alsó tagozatos diákok oktatásában, felzárkóztatásában hatékony digitális matematikai fejlesztőprogram létrehozása és működésének monitorozása volt. Habár elsődleges célunk a COVID-járvány miatt bekövetkezett iskolabezárások okozta tanulási veszteségek kompenzálására alkalmas fejlesztőprogram megalkotása volt, a program kidolgozása során úgy jártunk el, hogy az a későbbiekben is a hátránykompenzáció hatékony eszköze lehessen. Az alsó tagozatos diákok számára rendelkezésre álló matematikai fejlesztőprogramokról szóló szakirodalom szintetizálása során arra a következtetésre jutottunk, hogy kevés, és sok esetben bizonytalan kutatási eredménnyel rendelkezünk ezek hatékonyságáról. Az általunk létrehozott fejlesztőprogram hatékonyságát, megbízható eredmény közlésének és az ebből fakadó következtetések levonásának igényével, nagymintás kutatásban, előteszt, közvetlen és késleltetett utóteszt felvételével is vizsgáltuk.

A fejlesztőprogram tartalmának meghatározása során a 2012-es Nemzeti Alaptantervhez kapcsolódó 1-4. évfolyamok számára készült kerettanterv (2012) követelményeit vettük figyelembe. A szorzás és osztás tanításának követelményeiben és megközelítésében nem történt változás a 2020-as NAT-ban sem, így a fejlesztőprogram jelen kutatáson túlmutató alkalmazását a NAT-ban bekövetkezett változások nem befolyásolják. Az alulteljesítő diákok fejlesztésére irányuló program a szorzás és osztás konceptuális tudásának újraalapozására összpontosít, és kisebb hangsúllyal, de a procedurális tudás gyakorlására is játékos lehetőséget biztosít. A program didaktikai megközelítésében a felfedeztető matematikatanulás (pl. Dienes, 2015) és az explicit instrukciós modell (p. Doabler & Fien, 2013) játszottak szerepet. A létrejött, 15 egységből, és összesen 306 feladatból álló, elágazásos rendszerű matematikai fejlesztőprogram a tanulóknak egyéni tanulási utakat, közvetlen és gyakori visszajelzést biztosít, mentesítve ezáltal a pedagógusokat a programot használó alulteljesítő tanulók felzárkóztatásából eredő munkaterhek egy része alól.

A kvázi-kísérleti elrendezésben zajlott pilot kutatás eredményei rámutattak arra, hogy a fejlesztőprogram kidolgozásában jó úton járunk. Nemcsak a kísérleti csoport teljesített jobban az utóteszten, mint kontrollcsoportos társaik, de közülük is a legtöbb lemaradással küzdők profitáltak legtöbbet a fejlesztőprogramból.

A nagymintás kutatás során a pilot kutatási dizájnt megőrizve, a pilot kutatás tanulságaira alapozva a fejlesztőprogram továbbfejlesztett változatának hatékonyságát monitoroztuk. Elemzéseink manifeszt és látens szinten is a fejlesztőprogram hatékonyságáról, és a fejlesztés során elsajátított tudás hosszabb távon is sikeres megőrzéséről tettek tanúbizonyságot mind harmadik, mind negyedik évfolyamos tanulók körében. Kutatási célkitűzésünknek megfelelően a fejlesztőprogram kifejezetten a lemaradók teljesítményének javítására, az ő hiányosságai pótlására és készségeik fejlesztésére alkalmas. A kutatás további eredménye, hogy a matematikai

fejlesztőprogram alkalmas eszköze az alacsony szocioökonómiai státuszú gyermekek hátránykompenzációjának, többek között azáltal, hogy az alapoktól kezdve tanította újra a szorzás és osztás témakörét, a tananyagot rövid – legfeljebb 20 perces – szakaszokra bontva, egyéni tanulási utakat és többféle megközelítést, továbbá folyamatos visszajelzést biztosítva számukra.

A kutatás korlátait egyrészt a fejlesztőprogram témájának, a szorzásnak és osztásnak a kétféle tankönyvszerzői megközelítése, másrészt a rászorultságra vonatkozó pedagógusi adatközlésben jelentkező ellentmondások és hiányosságok jelentették, amelyeket a 7. és a 8. fejezetben mutattunk be. E korlátok közül az előbbi mindössze a pilot kutatásban jelentett nehézséget, mivel a nagymintás kutatás idejére már minden tankönyvszerző a szorzó-szorandó sorrendet követte, így a szorzandó-szorzó sorrendet tartalmazó feladatsorok kikerültek a programból. A HH vagy HHH státuszú diákok elérése sok esetben nehézségekbe ütközik, így az adatvesztés érzékenyen érintette a rájuk vonatkozó adatok elemzését. Ugyanakkor a mintánkban szereplő 122, a tanítóik által igazoltan HH vagy HHH státusszal rendelkező diák részvétele a fejlesztésben, és a tőlük nyert adatok elemzése így is releváns megállapításokkal szolgált a célcsoport sikeres felzárkóztatásának kérdésében.

Eredményeink alapján megállapítható, hogy egy olyan, a lemaradók fejlesztésére fókuszáló digitális matematikai fejlesztőprogramot hoztunk létre, amely Magyarországon legjobb tudásunk szerint egyedülálló. Ahogyan arra rámutattunk, a matematikai alapkészségek döntő szerepet játszanak a tanulók további iskolai sikerességében, nemcsak a matematikában, hanem más tantárgyakban mutatott előmenetelében, továbbá később a munkaerőpiaci boldogulásukban is. A fejlesztő program létrehozása egy azonnal és hatékonyan alkalmazható válasz a jelenlegi oktatási rendszer egyik égető problémájára – nevezetesen az eltérő minőségű oktatásra egy szegregáló iskolarendszerben –. Olyan programot hoztunk létre, amely a tantervhez illeszkedve, az iskolai mindennapokba integrálva, a pedagógusoktól többletmunkát nem igényelve alkalmas a szorzás és osztás területén a lemaradások pótlásának elősegítésére. A program célzottan a lemaradókra fókuszál, digitális formában valósul meg, lehetővé téve az egységesen magas színvonal biztosítását minden felhasználó számára. A kutatás jelentőségét nemzetközi kitekintésben is érdemes megvizsgálni. Az általunk létrehozott fejlesztő program illeszkedik a nemzetközi szakirodalomban bemutatott eredményes, alsó tagozatos gyermekek számára létrehozott digitális fejlesztőprogramok sorába, ám túlmutat rajtuk azáltal, hogy hatásvizsgálatának eredményei hosszú távon, és általánosítva is igazoltnak tekinthetők. Kijelenthető tehát, hogy az általunk létrehozott digitális fejlesztő program tudományos eredményekkel igazolt eszköze lehet a hagyományos iskolai gyakorlatban jelentkező hátrányok leküzdésének.

A dolgozatot további kutatási irányoknak, és a jelen kutatás fejlesztési lehetőségeinek megfogalmazásával zárjuk. Mivel az alsó tagozat egyik kiemelt feladata a négy alapműveletben való értő jártasság megszerzése (NAT, 2020), és a műveletek közötti kapcsolatok megértése, amely

a későbbiekben a sikeres matematikatanulás egyik feltétele (Gaidoschik, 2012), ezért a dolgozatban tárgyalt fejlesztőprogram továbbfejlesztése és kiterjesztése is megfontolandó. Egyrészt, a fejlesztőprogram a fejlesztésre szánt időkeret miatt leginkább mindössze a szorzás és osztás koncepciójának megértésére fókuszált. E program tartalmának a továbbfejlesztése a megértésen alapuló számolási eljárások tanításával, majd a számolási eljárások megértésén alapuló gyakorlással biztosítaná e témakör komplex fejlesztőprogramját. Másrészt, az összeadás és a kivonás témakörének feldolgozása a most bemutatott fejlesztőprogram alapelvei mentén szintén hiánypótló munka lenne. Mivel a számolás megtanulásán kívül más matematikai témakörök megalapozása és az azokhoz szükséges gondolkodási műveletek fejlesztése is nélkülözhetetlen a későbbi matematikaórai beváláshoz (pl. C. Neményi, 2002), így komplex, mindenre kiterjedő, az órai munkát kiegészítő, illetve hiányokat pótló digitális fejlesztőprogram létrehozása e további területek feldolgozásával készülhet el. Ezek szükségességéről a 2. és a 3. fejezetben szoltunk részletesen. További, ugyanezen didaktikai alapokon nyugvó fejlesztőprogramok létrehozására azért is lehet szükség, mert ahogyan arról a 2. és a 6. fejezetben is értekeztünk, az iskolai gyakorlat többnyire a procedurális tudás elsajátítására helyezi a hangsúlyt, ám a lemaradók fejlődése a konceptuális tudás megszerzése nélkül nem várható. Ezt az állítást kutatási eredményeink is alátámasztják.

A 6. fejezetben tárgyaltuk a szorzásról kialakítandó konceptuális tudás elméleti alapjait, amely szerint a szorzás értelmezése az egy a többnek megfeleltetés (Park & Nunes, 2001). A forgalomban lévő tankönyvek ugyanakkor a szorzásra, mint egyenlő tagú összeadásra tekintenek. E kutatás és dolgozat keretein belül nem tárgyalhattuk részletesen ezt a szakmai, a szorzás tanításáról alkotott, egymástól az értelmezésben és a megértéshez szükséges gondolkodási műveletben is eltérő két megközelítést. Ugyanakkor a szakirodalom és az arra alapozott szakmai tapasztalataink alapján a fejlesztőprogram a tankönyvektől eltérően a multiplikatív gondolkodás fejlesztésére, azaz az egy a többnek megfeleltetés megközelítésre helyezte a hangsúlyt. További, az alsó tagozatos matematikaoktatás lényegi kérdésére vonatkozó kutatási iránynak látszik a kétféle megközelítés oktatási folyamatban való összehasonlítása, és a megértés, illetve az alkalmazás sikerességének monitorozása.

Az SZTE Oktatásméleti Kutatócsoport által létrehozott, majd az MTA-SZTE Digitális Tanulási Technológiák Kutatócsoport által fejlesztett és funkcióiban egyre bővülő eDia-rendszer a megfelelő tantárgyi tartalommal feltöltve alkalmas az imént vázolt kutatási irányok megvalósítására. A dolgozatban bemutatott fejlesztőprogram, kiaknázva a rendszer adta lehetőségeket, rámutatott a megfelelően tervezett fejlesztőprogramok megvalósíthatóságára és eredményességére. E fejlesztőprogram és az eredmények mentén megvalósuló kutatások nemcsak a matematikaoktatás és a hátránykompenzáció területének kutatásaihoz tesznek hozzá, hanem eredményeink pedagógiai gyakorlatban való közvetlen alkalmazhatósága egyrészt a pedagógiai

gyakorlat megújításához, másrészt az elmélet és a gyakorlat közötti párbeszéd serkentéséhez is hozzájárulhatnak.

Köszönetnyilvánítás

Mindenekelőtt óriási köszönettel tartozom témavezetőmnek, Molnár Gyöngyvérnek. A kezdetektől odafigyelt, hogy mi érdekelne engem igazán, és amikor eljött a pillanat, tudta, hogy mi az a téma, ahol összeér, amit ő és amit én szeretnék, és innentől kezdve rengeteget segítette minden egyes lépésemet. Köszönöm, hogy valahogy mindig tudta, mikor kell az elvárásokat megfogalmazni, és mikor kell dicsérni és buzdítani. Köszönöm, hogy nemcsak a tanulmányaimban, de a szakmai pályafutásomban is igazi mentorommá vált, neki köszönhetem, hogy ma olyan pályán vagyok, amiről a tanulmányaim elején nem is ábrándoztam.

Hálásan köszönöm az MTA-SZTE Digitális Tanulási Technológiák Kutatócsoportból Kiss Renátának, Kállai Istvánnak és Bartók Zitának a minta szervezésében, a technikai kérdésekben és bármilyen más kérdésben is a hatalmas segítséget, amely nélkül ez a kutatás nem valósulhatott volna meg. Továbbá köszönöm Mokri Dórinak a revelatív értékű beszélgetésünket a vonaton, amely hozzásegített néhány kutatási kérdés megválaszolásához. Köszönöm az együttműködést azoknak a vállalkozó kedvű iskoláknak, tanárainak és diákjainak, akik részt vettek a kutatásban.

Köszönöm a Neveléstudományi Doktori Iskola oktatóinak az értékes tudást, amit általuk szerezhettem. Köszönöm, hogy részt vehettem Terezinha Nunes óráin, az ő szemlélete alapjaiban határozta meg a fejlesztőprogram létrehozásának elméleti kereteit. Köszönöm Csikos Csabának mindazt a tudást, amit a kurzusán átadott, és ami nagyban hozzájárult a disszertációm szakirodalmi háttérének feltárásához, még ha tudom, ő erre nem is emlékszik. Köszönöm Józsa Krisztiánnak azt a néhány, rövid sétányi beszélgetést, amit elsőéves koromban a vonattól az egyetemig folytattunk, kezdeti kétségbeesésem az ő segítségével lettem mindig úrrá. Köszönöm Dudok Fanninak és Tóth Editnek, hogy a házi vitára benyújtott dolgozatomhoz olyan meglátásokat fűztek, amelyek érdemben segítettek a végleges változat elkészítésében.

Hálás szívvel mondok köszönetet Molnár Edit Katalinnak, Kasik Lászlónak, Molnár Katalinnak és ismételten Molnár Gyöngyvérnek, hogy 2023-ban, amikor az életemben számomra traumatikus fordulat következett be, nem engedték el a kezem, kéretlenül is segítettek, támogattak, és megtartottak, hogy később legyen esélyem a tanulmányaim folytatására. Ugyanakkor köszönöm dr. Helfferich Frigyesnek és dr. Kovács Gábornak, hogy mindent megtettek, és így ma ezeket a sorokat írhatom.

Utamat iskolapszichológusok támogatása is szegélyezte. Mindenekelőtt őszintén köszönöm Benis Máriának, egykori oktatómnak, később kollégámnak, hogy elindított engem ezen a pályán. Nélküle, az ő megfelelő időben tett éleslátó meglátásai és bátorítása nélkül neki sem kezdek a doktori tanulmányaimnak. Köszönöm jelenlegi kollégámnak, Bence Orsolyának a beszélgetéseket, és a nehézségeimre, elfáradásomra reagáló meglátásait.

Munkáltatóim közül köszönettel tartozom Bagota Mónikának, egykori tanszékvezetőmnek, aki elintézte számomra, hogy a lehetőségekhez mérten órakedvezményben részesüljek egy félévre, és az órarendem kialakítása során is rendre tekintettel volt a doktori tanulmányaimra. Köszönettel tartozom az I. kerületi Szilágyi Erzsébet Gimnázium vezetésének, akik mindvégig hagyták, hogy a munkámat a keretek nyújtotta lehetőségek között a saját tempómban, a doktori tanulmányaimhoz igazítva végezhessem.

Végezetül, de közel sem utolsósorban szívből köszönöm páromnak, Demeter Zoltánnak, hogy ennyi éven át csak és kizárólag támogatott, és mindent, de tényleg mindent megtett, hogy ennek a kalandnak a végére érhessek.

Irodalomjegyzék

- 110/2012. (VI. 4.) Korm. rendelet a Nemzeti Alaptanterv kiadásáról, bevezetéséről és alkalmazásáról. (2012).
<https://net.jogtar.hu/jogszabaly?docid=a1200110.kor>
- 1102/2020. (III. 14.) Korm. határozat a koronavírus miatt a köznevelési és szakképzési intézményekben új munkarend bevezetéséről. (2020). <https://njt.hu/jogszabaly/2020-1102-30-22>
1997. évi XXXI. törvény a gyermekek védelméről és a gyámügyi igazgatásról (1997).
<https://net.jogtar.hu/jogszabaly?docid=99700031.tv>
- Abell, M. (2006). Individualizing learning using intelligent technology and universally designed curriculum. *Journal of Technology, Learning, and Assessment*, 5(3). <http://www.jtla.org>
- Adesope, O. O., & Rud, A. G. (2019). Maximizing the affordances of contemporary technologies in education: Promises and possibilities. In O. O. Adesope & A. G. Rud (Eds.), *Contemporary Technologies in Education: Maximizing Student Engagement, Motivation, and Learning* (p. 1–15). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-89680-9_1
- Aebli, H. (1958). *Lélektani didaktika. Piaget lélektanának didaktikai alkalmazása*. Gépirat.
- Agrawal, J., & Morin, L. L. (2016). Evidence-based practices: Applications of concrete representational abstract framework across math concepts for students with mathematics disabilities. *Learning Disabilities Research & Practice*, 31(1), 34–44. <https://doi.org/10.1111/ldrp.12093>
- Aiman, S., Yusof, S. Md., Kadir, Z. A., & Sabturani, N. (2016). The relationship between socioeconomic status and fine motor skills among six-year-old preschool children. In S. I. Ismail, N. Sulaiman, & R. Adnan (Eds.), *Proceedings of the 2nd International Colloquium on Sports Science, Exercise, Engineering and Technology 2015 (ICoSSEET 2015)* (pp. 141–148). Springer. https://doi.org/10.1007/978-981-287-691-1_15
- Alexander, K. L., Entwisle, D. R., & Dauber, S. L. (1993). First-grade classroom behavior: Its short- and long-term consequences for school performance. *Child Development*, 64(3), 801–814. <https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.1993.tb02944.x>
- Allier-Gagneur, Z. C., & Gruijters, R. J. (2023). Beyond Heyneman & Loxley: The relative importance of families and schools for learning outcomes in francophone Africa. *Compare: A Journal of Comparative and International Education*, 53(4), 654–673. <https://doi.org/10.1080/03057925.2021.1951663>
- Ambrus, A. (1995). *Bevezetés a matematikadidaktikába*. Budapest: Eötvös Kiadó.
- Aronson, E. (2008). *A társas lény*. Budapest: Akadémiai Kiadó.
- Ashcraft, M. H. (2019). Models of math anxiety. In I. C. Mammarella, S. Caviola, & A. Dowker (Eds.), *Mathematics anxiety: What is known and what is still to be understood* (pp. 1–19). Routledge/Taylor & Francis Group. <https://doi.org/10.4324/9780429199981-1>

- Ashcraft, M. H., & Kirk, E. P. (2001). The relationships among working memory, math anxiety, and performance. *Journal of Experimental Psychology: General*, 130(2), 224–237. <https://doi.org/10.1037/0096-3445.130.2.224>
- Ashcraft, M. H., & Rudig, N. O. (2012). Higher cognition is altered by noncognitive factors: How affect enhances and disrupts mathematics performance in adolescence and young adulthood. In V. F. Reyna, S. B. Chapman, M. R. Dougherty, & J. Confrey (Eds.), *The adolescent brain: Learning, reasoning, and decision making* (pp. 243–263). American Psychological Association. <https://doi.org/10.1037/13493-009>
- Atkinson, R. C. (1968). Computerized instruction and the learning process. *American Psychologist*, 23(4), 225–239. <https://doi.org/10.1037/h0020791>
- Atlay, C., Tieben, N., Hillmert, S., & Fauth, B. (2019). Instructional quality and achievement inequality: How effective is teaching in closing the social achievement gap? *Learning and Instruction*, 63, 101211. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2019.05.008>
- Aunio, P., Korhonen, J., Ragpot, L., Törmänen, M., & Henning, E. (2021). An early numeracy intervention for first-graders at risk for mathematical learning difficulties. *Early Childhood Research Quarterly*, 55, 252–262. <https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2020.12.002>
- Autin, F., Batruch, A., & Butera, F. (2019). The function of selection of assessment leads evaluators to artificially create the social class achievement gap. *Journal of Educational Psychology*, 111(4), 717–735. <https://doi.org/10.1037/edu0000307>
- Bachman, H. J., Miller, P., Elliott, L., Duong, S., Libertus, M., & Votruba-Drzal, E. (2022). Associations among socioeconomic status and preschool-aged children's, number skills, and spatial skills: The role of executive function. *Journal of Experimental Child Psychology*, 221, 105453. <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2022.105453>
- Baker, D. P., Goesling, B., & LeTendre, G. K. (2002). Socioeconomic status, school quality, and national economic development: A cross-national analysis of the “Heyneman-Loxley Effect” on mathematics and science achievement. *Comparative Education Review*, 46(3), 291–312. <https://doi.org/10.1086/341159>
- Balázsi, I., Szabó, A., Szabó, V., Szalay, B., & Szepesi, I. (2006). *Országos kompetenciamérés 2004. Összefoglaló tanulmány*. SuliNova Kht.
- Bandura, A. (1997). *Self-efficacy: The exercise of control*. Freeman.
- Barnes, H. (2005). The theory of realistic mathematics education as a theoretical framework for teaching low attainers in mathematics. *Pythagoras*, (61), 42–57. <https://doi.org/10.4102/pythagoras.v0i61.120>
- Baten, E., Pixner, S., & Desoete, A. (2019). Motivational and math anxiety perspective for mathematical learning and learning difficulties. In A. Fritz, V. G. Haase, & P. Räsänen (Eds.), *International Handbook of Mathematical Learning Difficulties: From the Laboratory to the Classroom* (pp. 457–467). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-97148-3_28

- Beacco, J.-C., Fleming, M., Goullier, F., Thürmann, E., Vollmer, H., & Sheils, J. (with Europarat). (2016). *The language dimension in all subjects: A handbook for curriculum development and teacher training*. Council of Europe Publishing.
- Becker, H. J. (1994). Mindless or mindful use of integrated learning systems. *International Journal of Educational Research*, 21(1), 65–79. [https://doi.org/10.1016/0883-0355\(94\)90024-8](https://doi.org/10.1016/0883-0355(94)90024-8)
- Beilock, S. L., & Carr, T. H. (2001). On the fragility of skilled performance: What governs choking under pressure? *Journal of Experimental Psychology. General*, 130(4), 701–725.
- Beilock, S. L., & Willingham, D. T. (2014). Math anxiety: Can teachers help students reduce it? Ask the cognitive scientist. *American Educator*, 38(2), 28.
- Benavides-Varela, S., Zandonella Callegher, C., Fagiolini, B., Leo, I., Altoè, G., & Lucangeli, D. (2020). Effectiveness of digital-based interventions for children with mathematical learning difficulties: A meta-analysis. *Computers & Education*, 157, 103953. <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2020.103953>
- Ben-Zeev, T., Duncan, S., & Forbes, C. (2005). Stereotypes and math performance. In M. Danesi (Ed.), *Handbook of mathematical cognition* (pp. 235–249). Psychology Press. <https://doi.org/10.4324/9780203998045>
- Bernstein, B. (1964). Elaborated and restricted codes: Their social origins and some consequences. *American Anthropologist*, 66(6), 55–69.
- Best, J. R., & Miller, P. H. (2010). A developmental perspective on executive function. *Child Development*, 81(6), 1641–1660. <https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.2010.01499.x>
- Biber, S.K., Biber, M., & Erbay, H.N. (2022). Teachers' perceptions on technology-assisted mathematics teaching and the interactive activities. *Education and Information Technologies*, 27, 6913–6945. <https://doi.org/10.1007/s10639-022-10898-9>
- Blair, C., & Scott, K. G. (2002). Proportion of LD placements associated with low socioeconomic status: Evidence for a gradient? *The Journal of Special Education*, 36(1), 14–22. <https://doi.org/10.1177/00224669020360010201>
- Blaskó, Z., Da Costa, P., & Schnepf, S. V. (2021). *Learning losses and educational inequalities in Europe: Mapping the potential consequences of the COVID-19 crisis*. <https://doi.org/10.1177/09589287221091687>
- Blomert, L., & Csépe, V. (2012). Az olvasástanulás és -mérés pszichológiai alapjai. In B. Csapó & V. Csépe (Eds.), *Tartalmi keretek az olvasás diagnosztikus értékeléséhez* (pp. 17–86). Nemzeti Tankönyvkiadó.
- Boliver, V., & Capsada-Munsech, Q. (2021). Does ability grouping affect UK primary school pupils' enjoyment of Maths and English? *Research in Social Stratification and Mobility*, 76, 100629. <https://doi.org/10.1016/j.rssm.2021.100629>

- Boonen, A. J. H., de Koning, B. B., Jolles, J., & van der Schoot, M. (2016). Word problem solving in contemporary math education: A plea for reading comprehension skills training. *Frontiers in Psychology*, 7. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2016.00191>
- Bouck, E. C., & Long, H. (2023). Online delivery of a manipulative-based intervention package for finding equivalent fractions. *Journal of Behavioral Education*, 32(2), 313–333. <https://doi.org/10.1007/s10864-021-09449-y>
- Bouhlila, D. S. (2015). The Heyneman–Loxley effect revisited in the Middle East and North Africa: Analysis using TIMSS 2007 database. *International Journal of Educational Development*, 42(C), 85–95.
- Boza I., & Hermann Z. (2023). A koronavírus-járvány és az iskolai teszteredmények egyenlőtlensége. In Á, Szabó-Morvai, & R. Pető (Eds.), *Munkaerőpiaci Tükör* (pp. 110–118). Közgazdaság- és Regionális Tudományi Kutatóközpont, Közgazdaságtudományi Intézet, HUN-REN Magyar Kutatási Hálózat.
- Bradley, K. (2022). The socioeconomic achievement gap in the US public schools. *Ballard Brief*, 2022(3). <https://scholarsarchive.byu.edu/ballardbrief/vol2022/iss3/10>
- Bradley, R. H., & Corwyn, R. F. (2002). Socioeconomic status and child development. *Annual Review of Psychology*, 53, 371–399. <https://doi.org/10.1146/annurev.psych.53.100901.135233>
- Bruner, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction*. Harvard University Press.
- Bryant, D. P., Bryant, B. R., Gersten, R., Scammacca, N., & Chavez, M. M. (2008). Mathematics intervention for first- and second-grade students with mathematics difficulties: The effects of tier 2 intervention delivered as booster lessons. *Remedial and Special Education*, 29(1), 20–32. <https://doi.org/10.1177/0741932507309712>
- Burchinal, M., Steinberg, L., Friedman, S. L., Pianta, R., McCartney, K., Crosnoe, R., McLoyd, V., & Network, N. E. C. C. R. (2011). Examining the black-white achievement gap among low-income children using the NICHD study of early child care and youth development. *Child Development*, 82(5), 1404–1420.
- Burns, P. K., & Bozeman, W. C. (1981). Computer-assisted instruction and mathematics achievement: Is there a relationship? *Educational Technology*, 21(10), 32–39.
- Byrnes, J. P., & Miller, D. C. (2007). The relative importance of predictors of math and science achievement: An opportunity–propensity analysis. *Contemporary Educational Psychology*, 32(4), 599–629. <https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2006.09.002>
- C. Neményi, E. (2002). Az alsó tagozatos matematika tantárgy helyzete és fejlesztési feladatai. *Új Pedagógiai Szemle* (52)12, 89-98.
- C. Neményi, E. (2011). *A természetes szám fogalmának kialakítása*. ELTE Tanító- és Óvóképző Kar.
- C. Neményi, E. (2012). *A számolás tanítása*. ELTE Tanító- és Óvóképző Kar.
- C. Neményi, E., Oravecz, M., & Móricz, M. (2020a). *Építsük fel! Matematika gyűjtemény I.* Oktatási Hivatal.
- C. Neményi, E., Oravecz, M., & Móricz, M. (2020b). *Építsük fel! Matematika gyűjtemény 2. Osztály.* Oktatási Hivatal.

- C. Neményi, E., & Sz. Oravecz, M. (1994). *Matematika tankönyv általános iskola 2. osztály*. Nemzeti Tankönyvkiadó.
- Campione, J., Brown, A., & Connell, M. (1988). Metacognition: On the importance of understanding what you are doing. In *The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving* (Vol. 3, pp. 93–114). National Council of Teachers of Mathematics.
- Capone, R., Filiberti, F., & Lemmo, A. (2021). Analyzing difficulties in arithmetic word problem solving: An epistemological case study in primary school. *Education Sciences*, 11(10), 596. <https://doi.org/10.3390/educsci11100596>
- Carey, E., Hill, F., Devine, A., & Szűcs, D. (2016). The chicken or the egg? The direction of the relationship between mathematics anxiety and mathematics performance. *Frontiers in Psychology*, 6. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2015.01987>
- Cargnelutti, E., Tomasetto, C., & Passolunghi, M. C. (2017). How is anxiety related to math performance in young students? A longitudinal study of Grade 2 to Grade 3 children. *Cognition and Emotion*, 31(4), 755–764. <https://doi.org/10.1080/02699931.2016.1147421>
- Carmichael, C., MacDonald, A., & McFarland-Piazza, L. (2014). Predictors of numeracy performance in national testing programs: Insights from the longitudinal study of Australian children. *British Educational Research Journal*, 40(4), 637–659. <https://doi.org/10.1002/berj.3104>
- Carrier, C., Post, T. R., & Heck, W. (1985). Using microcomputers with fourth-grade students to reinforce arithmetic skills. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16(1), 45–51. <https://doi.org/10.2307/748972>
- Carstensen, B., Asbury, K., Benckwitz, L., Hilz, A., & Guill, K. (2025). Bridging the Gap: Enhancing Mathematical Competence and Motivation in Low-Achieving Fifth-Grade Students Through Small-Group Tutoring and Digital Learning Interventions. SSRN. <http://dx.do.org/10.2139/ssrn.5092847>
- Caviola, S., Mammarella, I. C., & Szűcs, D. (2021). Individual differences in mathematical abilities and competencies. In M. Danesi (Ed.), *Handbook of Cognitive Mathematics* (pp. 1–32). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-44982-7_28-1
- Cawley, J., Parmar, R., Foley, T. E., Salmon, S., & Roy, S. (2001). Arithmetic performance of students: Implications for standards and programming. *Exceptional Children*, 67(3), 311–328. <https://doi.org/10.1177/001440290106700302>
- Chetty, R., Friedman, J. N., & Rockoff, J. E. (2014). Measuring the impacts of teachers II: Teacher value-added and student outcomes in adulthood. *American Economic Review*, 104(9), 2633–2679. <https://doi.org/10.1257/aer.104.9.2633>
- Cheung, A. C. K., & Slavin, R. E. (2013). The effectiveness of educational technology applications for enhancing mathematics achievement in K-12 classrooms: A meta-analysis. *Educational Research Review*, 9, 88–113. <https://doi.org/10.1016/j.edurev.2013.01.001>

- Chmielewski, A. K. (2019). The global increase in the socioeconomic achievement gap, 1964 to 2015. *American Sociological Review*, 84(3), 517–544. <https://doi.org/10.1177/0003122419847165>
- Choppin, J., & Borys, Z. (2017). Trends in the design, development and use of digital curriculum materials. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, 49(3), 663–674. <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0860-x>
- Choppin, J., Carsons, C., Borys, Z., Cerosaletti, C., & Gillis, R. (2014). A typology for analyzing digital curricula in mathematics education. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology*, 2(1). <https://doi.org/10.18404/ijemst.95334>
- Christmann, E., Badgett, J., & Lucking, R. (1997). Microcomputer-based computer-assisted instruction within differing subject areas: A statistical deduction. *Journal of Educational Computing Research*, 16(3), 281–296. <https://doi.org/10.2190/5LKA-E040-GADH-DNPD>
- Clark, A. E., Nong, H., Zhu, H., & Zhu, R. (2021). Compensating for academic loss: Online learning and student performance during the COVID-19 pandemic. *China Economic Review*, 68, 101629. <https://doi.org/10.1016/j.chieco.2021.101629>
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2019). Executive function and early mathematical learning difficulties. In A. Fritz, V. G. Haase, & P. Räsänen (Eds.), *International Handbook of Mathematical Learning Difficulties: From the Laboratory to the Classroom* (pp. 755–771). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-97148-3_43
- Cohen, J. (1988). *Statistical power analysis for the behavioral sciences* (2nd ed.). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Coleman, J. S. (1988). Social capital in the creation of human capital. *American Journal of Sociology*, 94, S95–S120.
- Connell, M. L. (1988, April). *What counts in mathematical evaluation?* [Paper presentation]. Annual Meeting of the American Educational Research Association, New Orleans, LA, United States.
- Correa, J., Nunes, T., & Bryant, P. (1998). Young children's understanding of division: The relationship between division terms in a noncomputational task. *Journal of Educational Psychology*, 90(2), 321–329. <https://doi.org/10.1037/0022-0663.90.2.321>
- Cosso, J., Finders, J. K., Duncan, R. J., Schmitt, S. A., & Purpura, D. J. (2023). The home numeracy environment and children's math skills: The moderating role of parents' math anxiety. *Journal of Experimental Child Psychology*, 227, 105578. <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2022.105578>
- Crosnoe, R., & Schneider, B. (2010). Social capital, information, and socioeconomic disparities in math course work. *American Journal of Education*, 117(1), 79–107. <https://doi.org/10.1086/656347>
- Cuban, L. (2001). *Oversold and underused. Computers in the classroom*. Harvard University.
- Czifrusz, D., Misley, H., & Horváth, L. (2020). A digitális munkarend tapasztalatai a magyar közoktatásban. *Opus et Educatio*, 7(3), 220–229. <https://doi.org/10.3311/oep.394>

- Csapó, B., Lőrincz, A., & Molnár, G. (2012). Innovative assessment technologies in educational games designed for young students. In Ifenthaler, D., Eseryel, D. & Ge, X. (Eds.), *Assessment in game-based learning: foundations, innovations, and perspectives* (pp. 235-254). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-3546-4_13
- Csapó, B., & Molnár, G. (2019). Online diagnostic assessment in support of personalized teaching and learning: The eDia system. *Frontiers in Psychology*. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2019.01522>
- Csapó B., Molnár G., & Kinyó L. (2009). A magyar oktatási rendszer szelektivitása a nemzetközi összehasonlító vizsgálatok eredményeinek tükrében. *Iskolakultúra*, 19(3–4), 3–13.
- Csapó M. (2012). Az alapkészségek fejlődése az iskola kezdő szakaszában. *Iskolakultúra*, 22(1), 14-35.
- Csíkos C. (2003). Matematikai szöveges feladatok megértésének problémái 10-11 éves tanulók körében. *Magyar Pedagógia*, 103(1), 35-55.
- Csíkos, C. (2007). *Metakogníció—A tudásra vonatkozó tudás pedagógiája*. Műszaki Könyvkiadó.
- Csíkos C. (2010). Problémaalapú tanulás és matematikai nevelés. *Iskolakultúra*, 20(12), 52-60.
- Csíkos C. (2016). *A gondolkodás stratégiai összetevőinek fejlesztése iskoláskorban*. Akadémiai doktori értekezés.
- Csíkos, C., András, S., Rausch, A., & Shvarts, A. (2019). Mathematical learning and its difficulties in eastern European countries. In A. Fritz, V. G. Haase, & P. Räsänen (Eds.), *International Handbook of Mathematical Learning Difficulties: From the Laboratory to the Classroom* (pp. 145–163). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-97148-3_10
- de Barros, A., & Ganimian, A. J. (2023). Which students benefit from computer-based individualized instruction? Experimental evidence from public schools in India. *Journal of Research on Educational Effectiveness*, 17(2), 318–343. <https://doi.org/10.1080/19345747.2023.2191604>
- Delazer, M., Domahs, F., Lochy, A., Karner, E., Benke, T., & Poewe, W. (2004). Number processing and basal ganglia dysfunction: A single case study. *Neuropsychologia*, 42(8), 1050–1062. <https://doi.org/10.1016/j.neuropsychologia.2003.12.009>
- Deloitte, European Commission, & Ipsos MORI (2016). *2nd Survey of Schools: ICT in Education | Shaping Europe's digital future*. Publications Office of the European Union. 10.2759/23401
- Denvir, B., Stolz, C., & Brown, M. (1982). *Low attainers in mathematics 5-16: Policies and practices in schools*. Methuen Educational.
- Desoete, A., & Baten, E. (2017). Indicators for a specific learning disorder in mathematics or dyscalculia in toddlers and in kindergarten children. *Belgian Journal of Paediatrics*, 19(2), 122–124.
- Diamond, A. (2013). Executive Functions. *Annual Review of Psychology*, 64(64), 135–168. <https://doi.org/10.1146/annurev-psych-113011-143750>
- Dienes, Z. (2015). *Építsük fel a matematikát!* Edge 2000.

- Dietrichson, J., Bøg, M., Filges, T., & Klint Jørgensen, A.-M. (2017). Academic interventions for elementary and middle school students with low socioeconomic status: A systematic review and meta-analysis. *Review of Educational Research*, 87(2), 243–282. <https://doi.org/10.3102/0034654316687036>
- Doabler, C., & Fien, H. (2013). Explicit mathematics instruction what teachers can do for teaching students with mathematics difficulties. *Intervention in School and Clinic*, 48, 276–285. <https://doi.org/10.1177/1053451212473151>
- Donker, A., & Reitsma, P. (2007a). Aiming and clicking in young children's use of the computer mouse. *Computers in Human Behavior*, 23(6), 2863–2874. <https://doi.org/10.1016/j.chb.2006.06.002>
- Donker, A., & Reitsma, P. (2007b). Young children's ability to use a computer mouse. *Computers and Education*, 48(4), 602–617. <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2005.05.001>
- Donnelly, R., & Patrinos, H. A. (2022). Learning loss during Covid-19: An early systematic review. *Prospects*, 51(4), 601–609. <https://doi.org/10.1007/s11125-021-09582-6>
- Dooren, W. V., Bock, D. D., & Verschaffel, L. (2010). From Addition to Multiplication ... and Back: The Development of Students' Additive and Multiplicative Reasoning Skills. *Cognition and Instruction*, 28(3), 360–381. <https://doi.org/10.1080/07370008.2010.488306>
- Dowker, A. (2005). *Individual differences in arithmetic: Implications for psychology, neuroscience and education*. Psychology Press. <https://doi.org/10.4324/9780203324899>
- Dowker, A. (2019). Children's mathematical learning difficulties: Some contributory factors and interventions. In A. Fritz, V. G. Haase, & P. Räsänen (Eds.), *International Handbook of Mathematical Learning Difficulties: From the Laboratory to the Classroom* (pp. 773–787). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-97148-3_44
- Duncan, G. J., Dowsett, C. J., Claessens, A., Magnuson, K., Huston, A. C., Klebanov, P., Pagani, L. S., Feinstein, L., Engel, M., Brooks-Gunn, J., Sexton, H., Duckworth, K., & Japel, C. (2007). School readiness and later achievement. *Developmental Psychology*, 43(6), 1428–1446. <https://doi.org/10.1037/0012-1649.43.6.1428>
- Duncan, G. J., & Magnuson, K. (2011). The nature and impact of early achievement skills, attention skills, and behavior problems. In G. J. Duncan, & R. J. Murnane (Eds.), *Whither Opportunity?: Rising Inequality, Schools, and Children's Life Chances* (pp. 47–69). Russell Sage.
- Duncan, G. J., & Magnuson (2015). Early childhood interventions for low-income children. *Research on Poverty*, 31(2), 1-5.
- Duncan, G. J., & Murnane, R. (Eds.) (2011). *Whither Opportunity? Rising Inequality, Schools, and Children's Life Chances*. Russell Sage Foundation.
- Duncan, G. J., & Murnane, R. J. (2016). Rising inequality in family incomes and children's educational outcomes. *RSF: The Russell Sage Foundation Journal of the Social Sciences*, 2(2), 142. <https://doi.org/10.7758/rsf.2016.2.2.06>

- Duncan, G. J., & Sojourner, A. J. (2013). Can intensive early childhood intervention programs eliminate income-based cognitive and achievement gaps? *The Journal of Human Resources*, 48(4), 945–968. <https://doi.org/10.3368/jhr.48.4.945>
- Dunne, M., Humphreys, S., Sebba, J., Dyson, A., Gallannaugh, F., & Muijs, D. (2007). *Effective Teaching and Learning for Pupils in Low Attaining Groups*. University of Sussex.
- Elliott, L., & Bachman, H. J. (2018). SES disparities in early math abilities: The contributions of parents' math cognitions, practices to support math, and math talk. *Developmental Review*, 49, 1–15. <https://doi.org/10.1016/j.dr.2018.08.001>
- Engzell, P., Frey, A., & Verhagen, M. D. (2021). Learning loss due to school closures during the COVID-19 pandemic. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 118(17), e2022376118. <https://doi.org/10.1073/pnas.2022376118>
- Erőss, G., & Kende, A. (2010). Sajátos nevelési igény: Közpolitikák, tudományok, gyakorlatok. *Educatio*, 4, 625–636.
- Eszenyiné Borbély M. (2018). Pedagógus digitális kompetencia-körkép 2018. 1. Rész. *Tudományos és Műszaki Tájékoztatás*, 65(12), 627–652.
- Esztergályos, J., & Kóródi, B. (2013). *Az én matematikám 2: Tankönyv a 2. évfolyam számára*. Apáczai Kiadó.
- Esztergályos, J., & Nagyné Madár, A. (2021). *Az én matematikám 2. Tankönyv a 2. évfolyam számára*. Oktatási Hivatal.
- European Commission. (2022). *Hungary 2022 Country Report. Accompanying the document Recommendation for a Council Recommendation on the 2022 National Reform Programme of Hungary and delivering a Council opinion on the 2022 Convergence Programme of Hungary*. European Commission. <https://eur-lex.europa.eu/legal-content/SV/TXT/?uri=CELEX:52022SC0614>
- Eurostat. (2020). *Do young people in the EU have digital skills?* <https://ec.europa.eu/eurostat/web/products-eurostat-news/-/edn-20200715-1>
- Fábián, M., Lajos, J., Olasz, T., & dr. Vidákovich, T. (2008). *Matematikai kompetencia. Szakmai koncepció*. Educatio Kht.
- Fábiánné Andrónyi, K. (2015). *Romológia*. L'Hartmann.
- Fang, S., Huang, J., Curley, J., & Birkenmaier, J. (2018). Family assets, parental expectations, and children educational performance: An empirical examination from China. *Children and Youth Services Review*, 87, 60–68. <https://doi.org/10.1016/j.childyouth.2018.02.018>
- Farkas, A., Földeáki, A., Főző, A. L., Frész, A. J., Genáhl, K. J., Horváth, Á., Jánossy, Z., Kapcsáné Némethi, J., Krajcsovicz, Á., Neumann, V., Pintér, G., Sió, L., Szabados, T., Szalay, S. Z., Szilágyi, Á., Timár, B., & Tóth, T. (2021). *Digitális pedagógiai módszertani ajánlások gyűjteménye*. Oktatási Hivatal.
- Feischmidt, M. (é. n.). *Ethnic Differences in Education in Hungary: Community Study*.

- Fejes, J. B., & Szűcs, N. (2017). Hol tart ma az oktatási integráció ügye? *Új Pedagógiai Szemle*, 67(11–12), 100–116.
- Fejes J. B., & Szűcs N. (2018). Az oktatási integráció ügye a 2010-es évek végén. In J. Fejes, & N. Szűcs (Eds.), *Én vétkem. Helyzetkép az oktatási szegregációról* (pp. 11–30). Motiváció Oktatási Egyesület.
- Fekete T., & Porkoláb Á. (2020). Karanténpedagógia a magyar közoktatásban: A digitális oktatásra történő átállás eddigi tapasztalatairól. *Iskolakultúra*, 30(9), 96–112. <https://doi.org/10.14232/ISKKULT.2020.9.96>
- Fernández, C., Llinares, S., & Valls, J. (2008). Implicative analysis of strategies in solving proportional and nonproportional problems. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, & A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 369–376). Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.
- Ferrari, A. (2013). *DIGCOMP: A Framework for Developing and Understanding Digital Competence in Europe*. JRC Publications Repository. <https://doi.org/10.2788/52966>
- Feuerstein, R., & Feuerstein, S. (1991). Mediated learning experience: A theoretical review. In R. Feuerstein, P. S. Klein, & A. J. Tannenbaum (Eds.), *Mediated learning experience (MLE): Theoretical, psychosocial and learning implications* (pp. 3–51). Freund Publishing House.
- Fischer, J.-P., & Thierry, X. (2022). Boy's math performance, compared to girls', jumps at age 6 (in the ELFE's data at least). *British Journal of Developmental Psychology*, 40(4), 504–519. <https://doi.org/10.1111/bjdp.12423>
- Fletcher, J. D., Hawley, D. E., & Piele, P. K. (1990). Costs, effects, and utility of microcomputer assisted instruction in the classroom. *American Educational Research Journal*, 27(4), 783–806. <https://doi.org/10.2307/1163109>
- Fletcher, G., Schaffhauser, D., & Levin, D. (2012). *Out of Print: Reimagining the K-12 Textbook in a Digital Age*. Washington, DC: State Educational Technology Directors Association. https://www.setda.org/wp-content/uploads/2013/11/SETDA_Out_of_Print_FNL.pdf
- Flores, A. (2007). Examining disparities in mathematics education: Achievement gap or opportunity gap? *The High School Journal*, 91(1), 29–42. <https://doi.org/10.1353/hsj.2007.0022>
- Flores, M. M. (2010). Using the concrete-representational-abstract sequence to teach subtraction with regrouping to students at risk for failure. *Remedial and Special Education*, 31(3), 195–207. <https://doi.org/10.1177/0741932508327467>
- Flores, M. M., Hinton, V. M., Strozier, S. D., & Terry, S. L. (2014). Using the concrete-representational-abstract sequence and the strategic instruction model to teach computation to students with autism spectrum disorders and developmental disabilities. *Education and Training in Autism and Developmental Disabilities*, 49(4), 547–554.
- Francis, B., Hodgen, J., Craig, N., Taylor, B., Archer, L., Mazenod, A., Tereshchenko, A., & Connolly, P. (2019). Teacher 'quality' and attainment grouping: The role of within-school teacher deployment in

- social and educational inequality. *Teaching and Teacher Education*, 77, 183–192. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2018.10.001>
- Fritz, A., Haase, V. G., & Räsänen, P. (2019). Introduction. In A. Fritz, V. G. Haase, & P. Räsänen (Eds.), *International Handbook of Mathematical Learning Difficulties: From the Laboratory to the Classroom* (pp. 1–6). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-97148-3_1
- Fuchs, L. S., Fuchs, D., Hamlet, C. L., Powell, S. R., Capizzi, A. M., & Seethaler, P. M. (2006). The effects of computer-assisted instruction on number combination skill in at-risk first graders. *Journal of Learning Disabilities*, 39(5), 467–475. <https://doi.org/10.1177/00222194060390050701>
- Fülöp, M., Jancsula, V., & Somfalvi, E. D. (2021). *Matematika 2. osztályosoknak I. kötet*. Oktatási Hivatal.
- Fülöp, M., Somfalvi, E. D., & Leszák, M. (2015). *Matematika 2. osztályosoknak*. OFI.
- Gaffney, M. (2010). *Enhancing teachers' take-up of digital content: Factors and design principles in technology adoption*. Education Services Australia.
- Gaidoschik, M. (2019). Didactics as a source and remedy of mathematical learning difficulties. In A. Fritz, V. G. Haase, & P. Räsänen (Eds.), *International Handbook of Mathematical Learning Difficulties: From the Laboratory to the Classroom* (pp. 73–89). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-97148-3_6
- Galindo, C., & Sonnenschein, S. (2015). Decreasing the SES math achievement gap: Initial math proficiency and home learning environments. *Contemporary Educational Psychology*, 43, 25–38. <https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2015.08.003>
- Geary, D. C. (1993). Mathematical disabilities: Cognitive, neuropsychological, and genetic components. *Psychological Bulletin*, 114(2), 345–362. <https://doi.org/10.1037/0033-2909.114.2.345>
- Geary, D. C. (2011). Consequences, characteristics, and causes of mathematical learning disabilities and persistent low achievement in mathematics. *Journal of Developmental & Behavioral Pediatrics*, 32(3), 250. <https://doi.org/10.1097/DBP.0b013e318209edef>
- Geary, D. C. (2013). Early foundations for mathematics learning and their relations to learning disabilities. *Current Directions in Psychological Science*, 22(1), 23–27. <https://doi.org/10.1177/0963721412469398>
- Gindis, B. (2003). Remediation Through Educationw: The developmental path toward reflection. In A. Kozulin, B. Gindis, S. M. Miller, & V. S. Ageyev (Eds.), *Vygotsky's Educational Theory in Cultural Context* (pp. 200–222). Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511840975.012>
- Ginsburg, H. P., & Pappas, S. (2004). SES, ethnic, and gender differences in young children's informal addition and subtraction: A clinical interview investigation. *Journal of Applied Developmental Psychology*, 25(2), 171–192. <https://doi.org/10.1016/j.appdev.2004.02.003>

- Glynn, S. M., Brickman, P., Armstrong, N., & Taasoobshirazi, G. (2011). Science motivation questionnaire II: Validation with science majors and nonscience majors. *Journal of Research in Science Teaching*, 48(10), 1159–1176. <https://doi.org/10.1002/tea.20442>
- Gore, J., Fray, L., Miller, A., Harris, J., & Taggart, W. (2021). The impact of COVID-19 on student learning in New South Wales primary schools: An empirical study. *The Australian Educational Researcher*, 48(4), 605–637. <https://doi.org/10.1007/s13384-021-00436-w>
- Göczéné Pankaczi, H., Tóthné Németh, G., & Varga, F. (2021). *Gyermek. és ifjúságvédelem a köznevelésben*. Oktatási Hivatal.
- Grewenig, E., Lergetporer, P., Werner, K., Woessmann, L., & Zierow, L. (2021). COVID-19 and educational inequality: How school closures affect low- and high-achieving students. *European Economic Review*, 140, 103920. <https://doi.org/10.1016/j.euroecorev.2021.103920>
- Gunbas, N., & Kinzer, C. K. (2025). Supporting Students' Mathematics Word-Problem Solving Achievement within a Computer Story Context: High and Low Readers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1–27. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2025.2454612>
- Gustafsson, J.-E., Nilsen, T., & Hansen, K. Y. (2018). School characteristics moderating the relation between student socio-economic status and mathematics achievement in grade 8. Evidence from 50 countries in TIMSS 2011. *Studies in Educational Evaluation*, 57, 16–30. <https://doi.org/10.1016/j.stueduc.2016.09.004>
- Gyarmathy É. (2017, december 3). SNI, BTMN és hátrányos helyzet—Az adatok tükrében. *SNI, BTMN és hátrányos helyzet – az adatok tükrében*. CKP. <https://ckpinfo.hu/2017/12/03/btmn-es-hatranynos-helyzet/>
- Haase, V. G., Guimarães, A. P. L., & Wood, G. (2019). Mathematics and Emotions: The case of math anxiety. In A. Fritz, V. G. Haase, & P. Räsänen (Eds.), *International Handbook of Mathematical Learning Difficulties: From the Laboratory to the Classroom* (pp. 469–503). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-97148-3_29
- Habgood, J., & Ainsworth, S. (2011). Motivating children to learn effectively: Exploring the value of intrinsic integration in educational games. *The Journal of the Learning Sciences*, 20, 169–206. <https://doi.org/10.1080/10508406.2010.508029>
- Hackman, D. A., & Farah, M. J. (2009). Socioeconomic status and the developing brain. *Trends in Cognitive Sciences*, 13(2), 65–73. <https://doi.org/10.1016/j.tics.2008.11.003>
- Hammerstein, S., König, C., Dreisörner, T., & Frey, A. (2021). Effects of COVID-19-related school closures on student achievement - A systematic review. *Frontiers in Psychology*, 12. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2021.746289>
- Hannula-Sormunen, M. M., McMullen, J., & Lehtinen, E. (2019). Everyday context and mathematical learning: On the role of spontaneous mathematical focusing tendencies in the development of numeracy. In A. Fritz, V. G. Haase, & P. Räsänen (Eds.), *International Handbook of Mathematical*

- Learning Difficulties: From the Laboratory to the Classroom* (pp. 25–42). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-97148-3_3
- Hanushek, E. A., Light, J. D., Peterson, P. E., Talpey, L. M., & Woessmann, L. (2022). Long-run trends in the U.S. SES — Achievement gap. *Education Finance and Policy*, 17(4), 608–640. https://doi.org/10.1162/edfp_a_00383
- Hanson, K., & Carlson, B. (2005). *Effective access: Teachers' use of digital resources in STEM teaching*. Education (ED485602). Eric. <https://eric.ed.gov/?id=ED485602>
- Harsányi S. G., Koltói L., Pulai-Kottlár G., Kovács D., Kövesdi A., Nagybányai-Nagy O., Nyitrai E., Simon G., Smohai M., Takács N., & Takács S. (2019). Az iskolai teljesítménykülönbség és a szocioökonómiai státusz összefüggései—Az országos kompetenciamérés eredményeinek vizsgálata a szülők munkájának rendszeressége, az észlelet társadalmi helyzet és a lakókörnyezet voonatkozásában. *Psychologia Hungarica Caroliensis*, 7(4), 148–221.
- Harskamp, E. (2014). The effects of computer technology on primary school students' mathematics achievement: A meta-analysis. In S. Chinn (Ed.), *The Routledge International Handbook of Dyscalculia and Mathematical Learning Difficulties* (pp. 383–392). Routledge.
- Hattie, J. (2009). *Visible Learning: A Synthesis of Over 800 Meta-Analyses Relating to Achievement*. Routledge.
- Haylock, D. (2007). Low attainment. In D. Haylock, & F. Thangata (Eds.), *Key Concepts in Teaching Primary Mathematics* (pp. 106–108). SAGE Publications Ltd.
- Hegarty, M., Mayer, R., & Monk, C. (1995). Comprehension of arithmetic word problems: A comparison of successful and unsuccessful problem solvers. *Journal of Educational Psychology*, 87, 18–32. <https://doi.org/10.1037/0022-0663.87.1.18>
- Hermann, Z., Horn, D., Sebők, A., & Köllő, J. (2022). A kompetenciaeredmények hatása a munkaerőpiaci sikerességre. *Közgazdasági Szemle*, 69(2), 177–198. <https://doi.org/10.18414/KSZ.2022.2.177>
- Hermann, Z., Horn, D., Varga, J., & Varga, K. (2020). Távoktatás a koronavírus járvány idején. In K. Fazekas, I. Kónya, & J. Krekó (Eds.), *Munkaerőpiaci Tükör* (o. 224–232). Közgazdaság- és Regionális Tudományi Kutatóközpont, ELKH.
- Hermann, Z., & Kisfalusi, D. (2023). School segregation, student achievement, and educational attainment in Hungary. *International Journal of Comparative Sociology*, 1–26. <https://doi.org/10.1177/00207152231198434>
- Hermann, Z., & Molnár, G. (2022). A koronavírus-járvány okozta rendkívüli oktatási helyzet hatása a tanulói teljesítményekre. In *Fehér könyv a Covid-19-járvány társadalmi-gazdasági hatásairól* (pp. 130–136). Eötvös Loránd Kutatási Hálózat Közgazdaság- és Regionális Tudományi Kutatóközpont, Közgazdaságtudományi Intézet.

- Heyneman, S., & Loxley, W. (1983). The effect of primary-school quality on academic achievement across twenty-nine high- and low-income countries. *AJS; American journal of sociology*, 88, 1162–1194. <https://doi.org/10.1086/227799>
- Hoff, E. (2006). How social contexts support and shape language development. *Developmental Review*, 26(1), 55–88. <https://doi.org/10.1016/j.dr.2005.11.002>
- Holb, É. M., Khayouti, S., Kisfalusi, D., Messing, V., Varga, K., & Varga, J. (2022). A távolléti oktatás időtartama, az iskolák, pedagógusok és diákok felkészültsége, tanulási elmaradás a pedagógusok véleménye szerint. In D. Horn & A. M. Bartal (Eds.), *Fehér könyv a Covid-19-járvány társadalmi-gazdasági hatásairól* (pp. 108–129). ELKH Közgazdaság- és Regionális Tudományi Kutatóközpont, Közgazdaságtudományi Intézet.
- Holt, J., & Holt, J. C. (2005). *The Underachieving School*. Sentient Publications.
- Horváth, L. (2022). Alkalmazkodási mintázatok a digitális munkarendben. In Gy. Molnár, & E. Tóth (Eds.), *Új kutatások a neveléstudományokban 2021: A neveléstudomány válaszai a jövő kihívásaira* (pp. 239–252). Szegedi Tudományegyetem Neveléstudományi Intézet, Magyar Tudományos Akadémia Pedagógiai Tudományos Bizottsága.
- Hricsovinyi, J., & Józsa, K. (2018). Iskolaválasztás és szelekció. In J. Fejes, & N. Szűcs (Eds.), *Én vétkem. Helyzetkép az oktatási szegregációról* (pp. 129–146). Motiváció Oktatási Egyesület.
- Hu, L., & Bentler, P. M. (1999). Cutoff criteria for fit indexes in covariance structure analysis: Conventional criteria versus new alternatives. *Structural Equation Modeling: A Multidisciplinary Journal*, 6(1), 1–55. <https://doi.org/10.1080/10705519909540118>
- Huang, Y.-M., Huang, S.-H., & Wu, T.-T. (2014). Embedding diagnostic mechanisms in a digital game for learning mathematics. *Educational Technology Research and Development*, 62(2), 187–207. <https://doi.org/10.1007/s11423-013-9315-4>
- Igács, J., Janacsek, K., & Krajcsi, A. (2008). A numerikus feldolgozás és számolás teszt (NFSZT) magyar változata. *Magyar Pszichológiai Szemle*, 63(4), 633–649. <https://doi.org/10.1556/mpszle.63.2008.4.2>
- Isoda, M., & Olfos, R. (2011). *La Enseñanza de la Multiplicación*. Ediciones Universitarias de Valparaíso.
- Istениč, A. (2021). Online learning under COVID-19: Re-examining the prominence of video-based and text-based feedback. *Educational Technology Research and Development*, 69(1), 117–121. <https://doi.org/10.1007/s11423-021-09955-w>
- Jacob, L., & Willis, S. G. (2003). The development of multiplicative thinking in young children. In L. Bragg, C. Campbell, G. Herbert, & J. Mousley (Eds.), *Mathematics Education Research: Innovation, Networking, Opportunity: Proceedings of the 26th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australia* (Vol. 1, pp. 460–467). Deakin University.
- Johnson, A., Kuhfeld, M., & Soland, J. (2021). The forgotten 20%: Achievement and growth in rural schools across the nation. *AERA Open*, 7. <https://doi.org/10.1177/23328584211052046>

- Jones, A. (2016, Nov 27-Dec 1). *If Only: Changing Classroom Learning Teaching with ICT* [Paper presentation]. Annual Meeting of the Australian Association for Research in Education, Melbourne, Victoria, Australia.
- Jordan, N. C., Huttenlocher, J., & Levine, S. C. (1992). Differential calculation abilities in young children from middle- and low-income families. *Developmental Psychology*, 28(4), 644–653. <https://doi.org/10.1037/0012-1649.28.4.644>
- Jordan, N. C., & Levine, S. C. (2009). Socioeconomic variation, number competence, and mathematics learning difficulties in young children. *Developmental Disabilities Research Reviews*, 15(1), 60–68. <https://doi.org/10.1002/ddrr.46>
- Jorgensen, R. (2011). Language, culture and learning mathematics: A Bourdieuan analysis of indigenous learning. In C. Wyatt-Smith, J. Elkins, & S. Gunn (Eds.), *Multiple Perspectives on Difficulties in Learning Literacy and Numeracy* (pp. 315–329). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-1-4020-8864-3_15
- Józsa, G., & Józsa, K. (2018). *Végrehajtó funkció: Elméleti megközelítések és vizsgálati módszerek*. 118, 175–200. <https://doi.org/10.17670/MPed.2018.2.175>
- Kaffenberger, M. (2021). Modelling the long-run learning impact of the Covid-19 learning shock: Actions to (more than) mitigate loss. *International Journal of Educational Development*, 81, 102326. <https://doi.org/10.1016/j.ijedudev.2020.102326>
- Kaplan-Rakowski, R. (2021). Addressing students' emotional needs during the COVID-19 pandemic: A perspective on text versus video feedback in online environments. *Educational Technology Research and Development: ETR & D*, 69(1), 133–136. <https://doi.org/10.1007/s11423-020-09897-9>
- Kende Á., Messing V., & Fejes J. B. (2021). Hátrányos helyzetű tanulók digitális oktatása a koronavírus okozta iskolabezárás idején. *Iskolakultúra*, 31(2), 76–97. <https://doi.org/10.14232/ISKKULT.2021.02.76>
- Kenny, D. A., Kaniskan, B., & McCoach, D. B. (2014). The Performance of RMSEA in Models With Small Degrees of Freedom. *Sociological Methods & Research*, 44(3), 486–507. <https://doi.org/10.1177/0049124114543236>
- Kerettanterv az általános iskola 1-4. évfolyama számára, 5/2020. (I.31.) Korm. Rendelet (2020). https://www.oktatas.hu/koznevels/kerettantervek/2020_nat/kerettanterv_alt_isk_1_4_evf
- Kieserling, M., & Melle, I. (2019). An experimental digital learning environment with universal accessibility. *Chemistry Teacher International*, 1(2). <https://doi.org/10.1515/cti-2018-0024>
- Kimball, M. M. (1989). A new perspective on women's math achievement. *Psychological Bulletin*, 105(2), 198–214. <https://doi.org/10.1037/0033-2909.105.2.198>
- King, Y. A., & Purpura, D. J. (2021). Direct numeracy activities and early math skills: Math language as a mediator. *Early Childhood Research Quarterly*, 54, 252–259. <https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2020.09.012>

- Kling, G., & Kline, K. (2025). Visual Imagery as a Catalyst for Multiplication Fact Fluency and Multiplicative Understanding. *International Journal of Science and Mathematics Education*. <https://doi.org/10.1007/s10763-025-10541-2>
- Kohn, J., Rauscher, L., Kucian, K., Käser, T., Wyszkon, A., Esser, G., & von Aster, M. (2020). Efficacy of a computer-based learning program in children with developmental dyscalculia. What influences individual responsiveness? *Frontiers in Psychology*, 11, 1115. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2020.01115>
- Koltói L., Harsányi S. G., Kovács D., Kövesdi A., Nagybányai-Nagy O., Nyitrai E., Simon E., Smohai M., Takács N., & Takács S. (2019). Az iskolai szülői bevonódás iskolai szintű vizsgálata megyei és regionális szinten az Országos kompetenciamérés 2017-es és 2018-as adatai alapján. *Psychologia Hungarica Caroliensis*, 7(4), 222–258.
- Kovács, K., Faragó, B., Kövi, Z., Rózsa, S., & Dávid, M. (2016). A rövid távú emlékezet és a munkamemória online mérése: Corsi, számterjedelem és n-vissza. *Magyar Pszichológiai Szemle*, 71(1), 73–90.
- Kozulin, A., Lebeer, J., Madella-Noja, A., Gonzalez, F., Jeffrey, I., Rosenthal, N., & Koslowsky, M. (2010). Cognitive modifiability of children with developmental disabilities: A multicentre study using Feuerstein's Instrumental Enrichment—Basic program. *Research in Developmental Disabilities*, 31(2), 551–559. <https://doi.org/10.1016/j.ridd.2009.12.001>
- König, C., & Frey, A. (2022). The impact of COVID-19-related school closures on student achievement—A meta-analysis. *Educational Measurement: Issues and Practice*, 41(1), 16–22. <https://doi.org/10.1111/emip.12495>
- Krajcsi A. (2010). A numerikus képességek zavarai és diagnózisuk. *Gyógypedagógiai Szemle*, 38(2), 93–113.
- Kroesbergen, E. H., & Van Luit, J. E. H. (2003). Mathematics interventions for children with special educational needs: A meta-analysis. *Remedial and Special Education*, 24(2), 97–114. <https://doi.org/10.1177/07419325030240020501>
- Kryst, E. L., Kotok, S., & Bodovski, K. (2015). Rural /urban disparities in science achievement in post-socialist countries: The evolving influence of socioeconomic status. *Global Education Review*, 2(4), 60–77.
- KSH. (2018). *Oktatási adatok, 2017/2018*. Központi Statisztikai Hivatal. <https://www.ksh.hu/docs/hun/xftp/idoszaki/oktat/oktatas1718.pdf>
- Kuhfeld, M., Soland, J., Tarasawa, B., Johnsona, A., Ruzek, E., & Lewis, K. (2020). *How is COVID-19 affecting student learning?* Brookings.
- Kukucska Z. (2022). Oktatási módszerek az általános iskolások körében, a Covid-19 járvány idején. *METSZETEK Társadalomtudományi folyóirat*, 11(3), 78-102. <https://doi.org/10.18392/metsz/2022/3/5>

- Lannert J. (2022). A pandémia miatti iskolabezárások és a digitális oktatás hatása a tanulók felkészültségére a közoktatásban és a felsőoktatásban. In Kolosi T., Szelényi I., & Tóth I. G. (Eds.), *Társadalmi Riport* (pp. 307–323). TÁRKI Társadalomkutatási Intézet Zrt. <https://doi.org/10.61501/TRIP.2022.16>
- Lannert J. (2025). Oktatási eredmények hatása a gazdasági folyamatokra. In Zs. Kollányi, Cs. Kucsra, É. Orosz, & P. Asztalos (Eds.), *Humán tőke, társadalmi-gazdasági fejlődés: Kulcskérdések Magyarországon* (pp. 79-87). ELTE Eötvös Kiadó.
- Lannert J., & Hartai L. (2021). Médiaműveltség az iskolában. *Iskolakultúra*, 31(7–8), 3-27. <https://doi.org/10.14232/ISKKULT.2021.07-08.3>
- Lee, J. (2009). Universals and specifics of math self-concept, math self-efficacy, and math anxiety across 41 PISA 2003 participating countries. *Learning and Individual Differences*, 19(3), 355–365. <https://doi.org/10.1016/j.lindif.2008.10.009>
- Lee, J. A. N. (2004). History of computing in education. In J. Impagliazzo & J. A. N. Lee (Eds.), *History of computing in education* (pp. 1–16). Springer US. https://doi.org/10.1007/1-4020-8136-7_1
- Lee, N. H., & Tan, B. L. J. (2014). The role of virtual manipulatives on the concrete-pictorial-abstract approach in teaching primary mathematics. *Electronic Journal of Mathematics & Technology*, 8(2), 102–121.
- LeFevre, J.-A., & Morris, J. (1999). More on the relation between division and multiplication in simple arithmetic: Evidence for mediation of division solutions via multiplication. *Memory & Cognition*, 27(5), 803–812. <https://doi.org/10.3758/BF03198533>
- Li, Q., & Ma, X. (2010). A Meta-analysis of the effects of computer technology on school students' mathematics learning. *Educational Psychology Review*, 22(3), 215–243. <https://doi.org/10.1007/s10648-010-9125-8>
- Litster, K., Moyer-Packenham, P. S., & Reeder, R. (2019). Base-10 Blocks: A study of iPad virtual manipulative affordances across primary-grade levels. *Mathematics Education Research Journal*, 31(3), 349–365. <https://doi.org/10.1007/s13394-019-00257-2>
- Long, H. M., Bouck, E. C., & Jakubow, L. N. (2021). Explicit instruction in mathematics: Considerations for virtual learning. *Journal of Special Education Technology*, 36(2), 67–76. <https://doi.org/10.1177/0162643421994099>
- Lukács, I. (2009). Tanulási stratégiák és stílusok. In *Cigányokról – másképpen Tanulmányok az emlékezetről, a családi szocializációról és a gyerekek kognitív fejlődéséről* (pp. 239–266). Gondolat.
- Ma, X., & Xu, J. (2004). The causal ordering of mathematics anxiety and mathematics achievement: A longitudinal panel analysis. *Journal of Adolescence*, 27(2), 165–179. <https://doi.org/10.1016/j.adolescence.2003.11.003>
- Magnuson, K. (2007). Maternal education and children's academic achievement during middle childhood. *Developmental Psychology*, 43(6), 1497–1512. <https://doi.org/10.1037/0012-1649.43.6.1497>

- Maguire, M. J., Schneider, J. M., Middleton, A. E., Ralph, Y., Lopez, M., Ackerman, R. A., & Abel, A. D. (2018). Vocabulary knowledge mediates the link between socioeconomic status and word learning in grade school. *Journal of Experimental Child Psychology*, 166, 679–695. <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2017.10.003>
- Magyarország Digitális Oktatási Stratégiája, 1536/2016. (X.13.) Kormányhatározat melléklete (2016). <https://epale.ec.europa.eu/hu/resource-centre/content/magyarorszag-digitalis-oktatasi-strategiaja>
- Main, S., & O'Rourke, J. (2011). „New directions for traditional lessons”: Can handheld game consoles enhance mental mathematics skills? *Australian Journal of Teacher Education*, 36(2), 43–55.
- Majoros, M. (1993, July 6-9). *A matematikai gondolkodás leírásának történeti áttekintése* [Paper presentation]. Rátz László Vándorgyűlés, Szolnok, Jász-Nagykun-Szolnok megye, Magyarország.
- Maldonado, J. E., & De Witte, K. (2022). The effect of school closures on standardised student test outcomes. *British Educational Research Journal*, 48(1), 49–94. <https://doi.org/10.1002/berj.3754>
- Mancl, D. B., Miller, S. P., & Kennedy, M. (2012). Using the concrete-representational-abstract sequence with integrated strategy instruction to teach subtraction with regrouping to students with learning disabilities. *Learning Disabilities Research & Practice*, 27(4), 152–166. <https://doi.org/10.1111/j.1540-5826.2012.00363.x>
- Mayer, R. E. (2010). Learning with technology. In H. Dumont, D. Istance & F. Benavides (Eds.), *The nature of Learning. Using Research to Inspire Practice* (pp. 179–198). OECD.
- Mayer, R. (2014). Incorporating motivation into multimedia learning. *Learning and Instruction*, 29, 171–173. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2013.04.003>
- Mazzocco, M. M. M., Devlin, K. T., & McKenney, S. J. (2008). Is it a fact? Timed arithmetic performance of children with mathematical learning disabilities (MLD) varies as a function of how MLD is defined. *Developmental Neuropsychology*, 33(3), 318–344. <https://doi.org/10.1080/87565640801982403>
- McCarthy, E., Tiu, M. & Li, L. (2018). Learning math with curious george and the odd squad: Transmedia in the classroom. *Technology, Knowledge and Learning*, 23(2), 223–246. <https://doi.org/10.1007/s10758-018-9361-4>
- Meeter, M. (2021). Primary school mathematics during the COVID-19 pandemic: No evidence of learning gaps in adaptive practicing results. *Trends in Neuroscience and Education*, 25, 100163. <https://doi.org/10.1016/j.tine.2021.100163>
- Meletiou-Mavrotheris, M., & Prodromou, T. (2016). Pre-service teacher training on game-enhanced mathematics teaching and learning. *Technology, Knowledge and Learning*, 21(3), 379–399. <https://doi.org/10.1007/s10758-016-9275-y>
- Mensah, F. K., & Kiernan, K. E. (2010). Gender differences in educational attainment: Influences of the family environment. *British Educational Research Journal*, 36(2), 239–260. <https://doi.org/10.1080/01411920902802198>

- Mesterházi, Z. (2023). Pedagógiai, gyógypedagógiai válaszok. In Zs. Mesterházi & Á. Szekeres (Eds.), *A nehezen tanuló gyermekek iskolai nevelése* (pp. 221–401). ELTE Bárczi Gusztáv Gyógypedagógiai Kar.
- Mészáros, A., & Kas, B. (2008). A kognitív funkciók megismerésének szerepe a nyelvfejlődési zavar diagnosztikájában. *Gyógypedagógiai szemle*, 2, 86–104.
- Miller, S., Stringfellow, J., Kaffar, B., Ferreira, D., & Mancl, D. (2011). Developing computation competence among students who struggle with mathematics. *Teaching Exceptional Children*, 44, 38–46. <https://doi.org/10.1177/004005991104400204>
- Mishra, P., & Koehler, M. J. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teachers College Record*, 108(6), 1017–1054. <https://doi.org/10.1111/j.1467-9620.2006.00684.x>
- Miyake, A., Friedman, N. P., Emerson, M. J., Witzki, A. H., Howerter, A., & Wager, T. D. (2000). The unity and diversity of executive functions and their contributions to complex „Frontal Lobe” tasks: A latent variable analysis. *Cognitive Psychology*, 41(1), 49–100. <https://doi.org/10.1006/cogp.1999.0734>
- Modestou, M., & Gagatsis, A. (2007). Students’ Improper Proportional Reasoning: A result of the epistemological obstacle of “linearity.” *Educational Psychology*, 27(1), 75–92. <https://doi.org/10.1080/01443410601061462>
- Molnár, G. (2013). *A Rasch modell alkalmazási lehetőségei az empirikus kutatások gyakorlatában*. Budapest: Gondolat Kiadó.
- Molnár, G. & Csapó, B. (2023). Report on smart education in Hungary. In. Zhuang, R. et al. (Eds.), *Smart Education in China and Central & Eastern European Countries. The white paper on smart education in China and Central & Eastern Europe countries* (pp. 155–178). Springer, Singapore.
- Molnár, G., & Hermann, Z. (2023). Short- and long-term effects of COVID-related kindergarten and school closures on first- to eighth-grade students’ school readiness skills and mathematics, reading and science learning. *Learning and Instruction*, 83, 101706. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2022.101706>
- Molnár G., Hódi Á., Ökördi R., & Mokri D. (2021). A koronavírus-járvány okozta rendkívüli oktatási helyzet hatása 2-8. évfolyamos diákok tudás- és képességszintjére az olvasásszövegértés, a matematika és a természettudományok területén. *Iskolakultúra*, 31(2), 3–22. <https://doi.org/10.14232/ISKKULT.2021.02.3>
- Molnár, G., & Lőrincz, A. (2012). Innovative assessment technologies: Comparing ‘face-to-face’ and game-based development of thinking skills in classroom settings In Chen, D. (Ed.), *International Proceedings of Economics Development and Research. Management and Education Innovation*. (Vol. 37, pp. 150–154). IACSIT Press.
- Molnár, G., Pásztor, A., Kiss Renáta, M., & Csapó, B. (2021). Az eDia online diagnosztikus értékelő rendszer: A személyre szóló fejlesztés alapvető eszköze. *Új Pedagógiai Szemle*, 71(9–10), 42–55.

- Morgan, C. E., Sangstan, R., & Pokras, R. (1977). *Evaluation of Computer-Assisted Instruction, 1975-76*. (ED139655). Eric. <https://eric.ed.gov/?id=ED139655>
- Moser Opitz, E. (2013). Zählen, Zahlbegriff, rechnen. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 22, 91–92. <https://doi.org/10.1007/BF03339318>
- Moyer-Packenham, P., Bolyard, J., & Spikell, M. (2002). What are virtual manipulatives? *Teaching Children Mathematics*, 8(6), 372–377. <https://doi.org/10.5951/TCM.8.6.0372>
- Muijs, D. (2021). *What's working well in remote education*. Office for Standards in Education, Children's Services and Skills.
- Muthén, L. K., & Muthén, B. O. (2010). *Mplus user's guide*. Los Angeles, CA: Author.
- Nagy J. (2003). Az eredményes képességfejlesztés feltételeiről és lehetőségeiről. *Iskolakultúra*, 13(8), 40–52.
- Nagy, J. (2007). *Kompetencia alapú kritériumorientált pedagógia*. Mozaik Kiadó.
- Nahalka, I. (2009). A roma gyerekek kognitív fejlődése. In Á. Boreczky (Ed.), *Cigányokról – másképpen Tanulmányok az emlékezetről, a családi szocializációról és a gyerekek kognitív fejlődéséről*. (pp. 185–238). Gondolat.
- Nahalka, I. (2002). *Hogyan alakul ki a tudás a gyerekekben?* Nemzeti Tankönyvkiadó.
- Nahalka, I. (2003). A tanulás. In I. Falus (Ed.), *Didaktika: Elméleti alapok a tanítás tanulásához* (pp. 103–136). Nemzedékek Tudása Tankönyvkiadó.
- National Mathematics Advisory Panel. (2008). *Foundations for Success: The Final Report of the National Mathematics Advisory Panel*. (ED500486). Eric. US Department of Education. <https://eric.ed.gov/?id=ED500486>
- Németh S., Rajnai R., Cziboly Á., & Bethlenfalvy Á. (2021). A karanténoktatás tapasztalatai szegregátumban és azon kívül: 18 tanulói és szülői fókuszcsoporthoz készített beszélgetés alapján. *Iskolakultúra*, 31(6), 17–34. <https://doi.org/10.14232/ISKKULT.2021.06.17>
- Niemi, H., Pea, R. D., & Lu, Y. (2023). Introduction to AI in learning: Designing the future. In H. Niemi, R. D. Pea, & Y. Lu (Eds.), *AI in Learning: Designing the Future* (pp. 1–15). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-031-09687-7_1
- Noss, R. (1995). Thematic chapter: Computers as commodities. In A. A. diSessa, C. Hoyles, R. Noss, & L. D. Edwards (Eds.), *Computers and Exploratory Learning* (pp. 363–381). Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-57799-4_20
- Nunes, T., & Csapó, B. (1996). *Children Doing Mathematics (Understanding Children's Worlds)*. Wiley-Blackwell.
- Nunes, T., & Csapó, B. (2011). A matematikai gondolkodás fejlesztése és értékelése. In B. Csapó & M. Szendrei (Eds.), *Tartalmi keretek a matematika diagnosztikus értékeléséhez* (pp. 17–57). Nemzeti Tankönyvkiadó. <https://publicatio.bibl.u-szeged.hu/11240/>

- Nunes, T., Malmberg, L.-E., Evans, D., Sanders-Ellis, D., Baker, S., Barros, R., Bryant, P., & Evangelou, M. (2019). *Onebillion: Evaluation Report*. Education Endowment Foundation. <https://educationendowmentfoundation.org.uk/projects-and-evaluation/projects/onebillion-year-1-pupils-learning-maths-on-apps>
- Nunes, T., Schliemann, A. D., & Carraher, D. W. (1993). *Street mathematics and school mathematics*. Cambridge University Press.
- OECD. (2020). *Early Learning and Child Well-being: A Study of Five-year-Olds in England, Estonia, and the United States*. Organisation for Economic Cooperation and Development.
- OECD. (2023). *PISA 2022 Results (Volume I): The State of Learning and Equity in Education*. Organisation for Economic Cooperation and Development.
- OFI (2021a). *Harmadik matematikakönyvem 3. Tanmenetjavaslat*. Oktatókutató és Fejlesztő Intézet.
- OFI (2021b). *Negyedik matematikakönyvem 4 Tanmenetjavaslat*. Oktatókutató és Fejlesztő Intézet.
- Outhwaite, L. A., Gulliford, A., & Pitchford, N. J. (2017). Closing the gap: Efficacy of a tablet intervention to support the development of early mathematical skills in UK primary school children. *Computers & Education*, 108, 43–58. <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2017.01.011>
- Ökördi R. (2024). *A matematikai szorongás megjelenése a gyermekirodalomban*. In: G. Daróczi, T. Lócsi, & H. Merényi (Eds.), *Színes mesekincsünk* (pp. 99–110). ELTE TÓK.
- Ökördi R., Kulman K., & Bagota M. (2023). Tanító és óvodapedagógus hallgatók matematikai szorongásának vizsgálata matematikai képzésük tükrében. *Pedagógusképzés*, 22(1), 36–55. <https://doi.org/10.37205/TEL-hun.2023.1.02>
- Ökördi R., & Molnár G. (2020). A matematikai gondolkodás fejlettségi szintje beilleszkedési, magatartási és tanulási nehézséggel küzdő 5–8. évfolyamos diákok körében: Szakértői vélemények kvalitatív elemzése. *Iskolakultúra*, 30(9), 26–44. <https://doi.org/10.14232/ISKKULT.2020.9.26>
- Ökördi, R., & Molnár, G. (2022). Computer-based intervention closes learning gap in maths accumulated in remote learning. *Journal of Intelligence*, 10(3), 58. <https://doi.org/10.3390/jintelligence10030058>
- Pappas, S., Ginsburg, H. P., & Jiang, M. (2003). SES differences in young children's metacognition in the context of mathematical problem solving. *Cognitive Development*, 18(3), 431–450. [https://doi.org/10.1016/S0885-2014\(03\)00043-1](https://doi.org/10.1016/S0885-2014(03)00043-1)
- Park, J.-H., & Nunes, T. (2001). The development of the concept of multiplication. *Cognitive Development*, 16(3), 763–773. [https://doi.org/10.1016/S0885-2014\(01\)00058-2](https://doi.org/10.1016/S0885-2014(01)00058-2)
- Passolunghi, M. C., & Lanfranchi, S. (2012). Domain-specific and domain-general precursors of mathematical achievement: A longitudinal study from kindergarten to first grade. *British Journal of Educational Psychology*, 82(1), 42–63. <https://doi.org/10.1111/j.2044-8279.2011.02039.x>
- Patrinos, H. A. (2023). The longer students were out of school, the less they learned. *Journal of School Choice*, 17(2), 161–175. <https://doi.org/10.1080/15582159.2023.2210941>

- Perrotta, C. (2013). Do school-level factors influence the educational benefits of digital technology? A critical analysis of teachers' perceptions. *British Journal of Educational Technology*, 44(2). 314-327. <https://doi.org/10.1111/j.1467-8535.2012.01304.x>
- Piaget, J. (1952). *The child's conception of number*. Routledge & Kegan Paul.
- Pintér, J., & Pintér Krekity, V. (2010). *Matematikadidaktika*. Fórum Könyvkiadó, Újvidék és Újvidéki Egyetem, Magyar tannyelvű Tanítóképző Kar.
- Pintér, K. (2013). *Matematika tantárgy-pedagógia*. http://www.jgypk.hu/mentorhalo/tananyag/Matematika_tantrgypedaggia/
- Oktatási Hivatal (2022). *PISA 2022 Összefoglaló jelentés*. Oktatási Hivatal.
- Phelps, R., Maher, D., Urane, N., & Lee, M. (2012). Primary school teachers' use of digital resources with interactive whiteboards: The Australian context. *Australasian Journal of Educational Technology*, 28(1), 138-158. <https://doi.org/10.14742/ajet.888>
- Pitchford, N. J. (2015). Development of early mathematical skills with a tablet intervention: A randomized control trial in Malawi. *Frontiers in Psychology*, 6. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2015.00485>
- Pitsia, V., Biggart, A., & Karakolidis, A. (2017). The role of students' self-beliefs, motivation and attitudes in predicting mathematics achievement: A multilevel analysis of the Programme for International Student Assessment data. *Learning and Individual Differences*, 55, 163–173. <https://doi.org/10.1016/j.lindif.2017.03.014>
- Polónyi, I. (2021). Pandémiás oktatás. *Educatio*, 30(1), 3–21. <https://doi.org/10.1556/2063.30.2021.1.1>
- Portes, P. R., & Vadeboncoeur, J. A. (2003). Mediation in cognitive socialization: The influence of socioeconomic status. In *Vygotsky's educational theory in cultural context* (pp. 371–392). Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511840975.019>
- Powell, S. R., Berry, K. A., & Tran, L. M. (2020). Performance differences on a measure of mathematics vocabulary for english learners and non-english learners with and without mathematics difficulty. *Reading & Writing Quarterly*, 36(2), 124–141. <https://doi.org/10.1080/10573569.2019.1677538>
- Prediger, S., Erath, K., & Opitz, E. M. (2019). The language dimension of mathematical difficulties. In A. Fritz, V. G. Haase, & P. Räsänen (Eds.), *International Handbook of Mathematical Learning Difficulties: From the Laboratory to the Classroom* (pp. 437–455). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-97148-3_27
- Prime Minister's Strategy Unit. (2005). *Connecting the UK: the Digital Strategy*.
- Proháczik, Á. (2020). A tantermi és online oktatás összehasonlító elemzése. *Opus et Educatio*, 7(3), 208-219. <https://doi.org/10.3311/oep.390>
- Quaye, J., & Pomeroy, D. (2022). Social class inequalities in attitudes towards mathematics and achievement in mathematics cross generations: A quantitative Bourdieusian analysis. *Educational Studies in Mathematics*, 109(1), 155–175. <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10078-5>

- Radnainé dr. Szendrei, J., Makara, Á., Mátyásné Kokovai, J., & Pálfi, S. (1994). *Tanulási nehézségek a matematikában*. Iskolafejlesztési Alapítvány.
- Radó, P. (2018). A közoktatás szelektivitása mint a roma szegregáció általános kontextusa. In J. Fejes, & N. Szűcs (Eds.), *Én vétkem. Helyzetkép az oktatási szegregációról* (pp. 31-55). Motiváció Oktatási Egyesület.
- Radó P. (2023). *PISA 2022*. Taní-tani Online. <https://www.tani-tani.info/pisa2022>
- Räsänen, P., Haase, V. G., & Fritz, A. (2019). Challenges and future perspectives. In A. Fritz, V. G. Haase, & P. Räsänen (Eds.), *International Handbook of Mathematical Learning Difficulties: From the Laboratory to the Classroom* (pp. 799–827). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-97148-3_46
- Raver, C. C., Jones, S. M., Li-Grining, C., Zhai, F., Bub, K., & Pressler, E. (2011). CSRP's impact on low-income preschoolers' preacademic skills: Self-Regulation as a mediating mechanism. *Child Development*, 82(1), 362–378. <https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.2010.01561.x>
- Raviv, T., Kessenich, M., & Morrison, F. J. (2004). A mediational model of the association between socioeconomic status and three-year-old language abilities: The role of parenting factors. *Early Childhood Research Quarterly*, 19(4), 528–547. <https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2004.10.007>
- Reardon, S. F. (2012). The widening academic achievement gap between the rich and the poor: New evidence and possible explanations. In G. J. Duncan & R. J. Murnane (Eds.), *Whither Opportunity?: Rising Inequality, Schools, and Children's Life Chances* (pp. 47–69). Russell Sage.
- Reardon, S. F., & Bischoff, K. (2011). Income inequality and income segregation. *American Journal of Sociology*, 116(4), 1092–1153. <https://doi.org/10.1086/657114>
- Reiss, F. (2013). Socioeconomic inequalities and mental health problems in children and adolescents: A systematic review. *Social Science & Medicine*, 90, 24–31. <https://doi.org/10.1016/j.socscimed.2013.04.026>
- Resendez, M., Azin, M., & Strober, A. (2009). *A Study on the Effects of Pearson's 2009 enVisionMATH Program*. Pres associates inc.
- Resnick, M. B., Gueorguieva, R. V., Carter, R. L., Ariet, M., Sun, Y., Roth, J., Bucciarelli, R. L., Curran, J. S., & Mahan, C. S. (1999). The impact of low birth weight, perinatal conditions, and sociodemographic factors on educational outcome in kindergarten. *Pediatrics*, 104(6), e74. <https://doi.org/10.1542/peds.104.6.e74>
- Rónay, Z., & Matyasovszky-Németh, M. (2022). The effects of neoliberal social policy on the institutional selectivity of the Hungarian K-12 educational system from a socio-legal perspective. *Hungarian Journal of Legal Studies*, 62(3), 216–235. <https://doi.org/10.1556/2052.2022.00363>
- Roschelle, J., Shechtman, N., Tatar, D., Hegedus, S., Hopkins, B., Empson, S., Knudsen, J., & Gallagher, L. P. (2010). Integration of technology, curriculum, and professional development for advancing middle

- school mathematics: Three large-scale studies. *American Educational Research Journal*, 47(4), 833–878. <https://doi.org/10.3102/0002831210367426>
- Rubinsten, O., & Tannock, R. (2010). Mathematics anxiety in children with developmental dyscalculia. *Behavioral and Brain Functions*, 6(1), 46. <https://doi.org/10.1186/1744-9081-6-46>
- Rutherford, T., Kibrick, M., Burchinal, M., Richland, L., Conley, A., Osborne, K., Schneider, S., Duran, L., Coulson, A., Antenore, F., Daniels, A., & Martinez, M. E. (2010, April 30--May 4). *Spatial Temporal Mathematics at Scale: An Innovative and Fully Developed Paradigm to Boost Math Achievement among All Learners* [Paper presentation]. Annual Meeting of the American Educational Research Association, Denver, CO, United States.
- Samson, J. F., & Lesaux, N. K. (2009). Language-minority learners in special education: Rates and predictors of identification for services. *Journal of Learning Disabilities*, 42(2), 148–162. <https://doi.org/10.1177/0022219408326221>
- Schaeffer, M. W., Rozek, C. S., Maloney, E. A., Berkowitz, T., Levine, S. C., & Beilock, S. L. (2021). Elementary school teachers' math anxiety and students' math learning: A large-scale replication. *Developmental Science*, 24(4), e13080. <https://doi.org/10.1111/desc.13080>
- Schleicher, A. (2023). *PISA 2022. Insights and Interpretations*. OECD.
- Schoepke, W., & Tulis, M. (2010). Enhancing arithmetic and word-problem solving skills efficiently by individualized computer-assisted practice. *Journal of Educational Research - J EDUC RES*, 103. <https://doi.org/10.1080/00220670903382962>
- Schott, N., Mündörfer, A., & Holfelder, B. (2023). Neighborhood socio-economic status influences motor performance and inhibitory control in kindergarten children—Findings from the cross-sectional kitafit study. *Children*, 10(8), 1332. <https://doi.org/10.3390/children10081332>
- Schult, J., Mahler, N., Fauth, B., & Lindner, M. A. (2022). Did students learn less during the COVID-19 pandemic? Reading and mathematics competencies before and after the first pandemic wave. *School Effectiveness and School Improvement*, 33(4), 544–563. <https://doi.org/10.1080/09243453.2022.2061014>
- Seo, Y.-J., & Woo, H. (2010). The identification, implementation, and evaluation of critical user interface design features of computer-assisted instruction programs in mathematics for students with learning disabilities. *Computers & Education*, 55(1), 363–377. <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2010.02.002>
- Shalev, R. S., & Gross-Tsur, V. (2001). Developmental dyscalculia. *Pediatric Neurology*, 24(5), 337–342. [https://doi.org/10.1016/s0887-8994\(00\)00258-7](https://doi.org/10.1016/s0887-8994(00)00258-7)
- Shih, S.-C., Chang, C.-C., Kuo, B.-C., & Huang, Y.-H. (2023). Mathematics intelligent tutoring system for learning multiplication and division of fractions based on diagnostic teaching. *Education and Information Technologies*, 28(7), 9189–9210. <https://doi.org/10.1007/s10639-022-11553-z>

- Shikalepo, E. E. (2020). Improving the quality of education at rural schools in Namibia. *International Journal of Research and Innovation in Social Science*, 4(2), 62–68.
- Shin, N., Norris, C., & Soloway, E. (2006). *Effects of Handheld Games on Students Learning in Mathematics*. In S. Barab, K. Hay, & D. Hickey (Eds.), *Proceedings of the 7th International Conference on Learning Sciences*, 702–708. Bloomington Indiana.
- Silver, A. M., & Libertus, M. E. (2022). Environmental influences on mathematics performance in early childhood. *Nature Reviews Psychology*, 1(7), 407–418. <https://doi.org/10.1038/s44159-022-00061-z>
- Spicuzza, R., Ysseldyke, J., Lemkuil, A., Kosciulek, S., Boys, C., & Teelucksingh, E. (2001). Effects of curriculum-based monitoring on classroom instruction and math achievement. *Journal of School Psychology*, 39(6), 521–542. [https://doi.org/10.1016/S0022-4405\(01\)00087-5](https://doi.org/10.1016/S0022-4405(01)00087-5)
- Spitzer, M. W. H., & Musslick, S. (2021). Academic performance of K-12 students in an online-learning environment for mathematics increased during the shutdown of schools in wake of the COVID-19 pandemic. *PLOS ONE*, 16(8), e0255629. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0255629>
- Spooner, F., Root, J. R., Saunders, A. F., & Browder, D. M. (2019). An updated evidence-based practice review on teaching mathematics to students with moderate and severe developmental disabilities. *Remedial and Special Education*, 40(3), 150–165. <https://doi.org/10.1177/0741932517751055>
- Steffens, M. C., & Jelenec, P. (2011). Separating implicit gender stereotypes regarding math and language: Implicit ability stereotypes are self-serving for boys and men, but not for girls and women. *Sex Roles: A Journal of Research*, 64(5–6), 324–335. <https://doi.org/10.1007/s11199-010-9924-x>
- Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(4), 313–340. <https://doi.org/10.1080/10986060802229675>
- Sterner, G., Wolff, U., & Helenius, O. (2020). Reasoning about representations: Effects of an early math intervention. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 64(5), 782–800. <https://doi.org/10.1080/00313831.2019.1600579>
- Strickland, T. K., & Maccini, P. (2013). The effects of the concrete–representational–abstract integration strategy on the ability of students with learning disabilities to multiply linear expressions within area problems. *Remedial and Special Education*, 34(3), 142–153. <https://doi.org/10.1177/0741932512441712>
- Su, M., Li, P., Zhou, W., & Shu, H. (2021). Effects of socioeconomic status in predicting reading outcomes for children: The mediation of spoken language network. *Brain and Cognition*, 147, 105655. <https://doi.org/10.1016/j.bandc.2020.105655>
- Sung, Y.-T., Chang, K.-E., & Liu, T.-C. (2016). The effects of integrating mobile devices with teaching and learning on students' learning performance: A meta-analysis and research synthesis. *Computers & Education*, 94, 252–275. <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2015.11.008>

- Suppes, P., & Macken, E. (1978). The historical path from research and development to operational use of CAI. *Educational Technology*, 18(4), 9–12.
- Suppes, P., & Morningstar, M. (1972). *Computer-Assisted Instruction At Stanford, 1966-68. Data, Models, and Evaluation of the Arithmetic Programs*. Academic Press.
- Svraka T., & Ádám S. (2018). A matematikai tanulás eredményességét befolyásoló tényezők. *Gyermeknevelés*, 6(1), 3-11. <https://doi.org/10.31074/gyn20181311>
- Sylva, K., Melhuish, E., Sammons, P., Siraj-Blatchford, I., & Taggart, B. (Eds.). (2010). *Early Childhood Matters: Evidence from the Effective Pre-school and Primary Education Project*. Routledge. <https://doi.org/10.4324/9780203862063>
- Szenczi, B. (2023). A tanulási nehézségek típusai. In Zs. Mesterházi, & Á. Szekeres (Eds.), *A nehezen tanuló gyermekek iskolai nevelése* (pp. 65–93). ELTE Bárczi Gusztáv Gyógypedagógiai Kar.
- Szilveszter, Á., Kassai, R., Takács, Z. K., & Futó, J. (2021). Az otthoni tanulás sikerességét bejósoló tényezők a Covid–19 okozta vészhelyzet miatt kialakított digitális munkarendben eltérő szocioökonómiai helyzetű családok esetében. *Educatio*, 30(1), 88–102. <https://doi.org/10.1556/2063.30.2021.1.7>
- Szűgyi, J. (2009). *Nevelési tanácsadók, közoktatás, szegénység*. GYEP.
- Szűts Z. (2020). A digitális pedagógia jelenségei és megnyilvánulási formái. *Új Pedagógiai Szemle*, 5–6, 15–38.
- Taber, K. (2017). *The use of Cronbach's alpha when developing research instruments in science education*. <https://doi.org/10.17863/CAM.8256>
- Tánczos T., Janacsek K., & Németh D. (2014). A munkamemória és végrehajtó funkciók kapcsolata az iskolai teljesítménnyel. *Alkalmazott Pszichológia*, 14(2), 55–75.
- Toh, T. L., & Kaur, B. (2019). Low attainers and learning of mathematics. In T. L. Toh, B. Kaur, & E. G. Tay (Eds.), *Mathematics Education in Singapore* (pp. 287–311). Springer. https://doi.org/10.1007/978-981-13-3573-0_13
- Tomasik, M. J., Helbling, L. A., & Moser, U. (2021). Educational gains of in-person vs. distance learning in primary and secondary schools: A natural experiment during the COVID-19 pandemic school closures in Switzerland. *International Journal of Psychology*, 56(4), 566–576. <https://doi.org/10.1002/ijop.12728>
- Tóth, E., Csapó, B., & Székely, L. (2010). Az iskolák és osztályok közötti különbségek alakulása a magyar iskolarendszerben. Egy longitudinális vizsgálat eredményei. *Közgazdasági Szemle*, 57(9), 798–814.
- UNESCO. (2017). *More Than One-Half of Children and Adolescents Are Not Learning Worldwide*. UIS Fact Sheet, 46.
- UNESCO. (2020). *Adult numeracy: Assessment and development*. <https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000375130>
- van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. (2020). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally*. Pearson.

- van den Berg, R. G. (2025). *SPSS Tutorials*. SPSS Tutorials. <https://www.spss-tutorials.com/>
- Varga, A. (2018). A hazai oktatási integrációs tapasztalatok és a korai iskolaelhagyás megelőzése. In J. Fejes, & N. Szűcs (Eds.), *Én vétkem. Helyzetkép az oktatási szegregációról* (pp. 31-55). Motiváció Oktatási Egyesület.
- Vernon-Feagans, L., Willoughby, M., & Garrett-Peters, P. (2016). Predictors of behavioral regulation in kindergarten: Household chaos, parenting and early executive functions. *Developmental psychology*, 52(3), 430–441. <https://doi.org/10.1037/dev0000087>
- Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J., & Van Dooren, W. (2009). Conceptualizing, investigating, and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. *European Journal of Psychology of Education*, 24(3), 335–359. <https://doi.org/10.1007/BF03174765>
- Vidákovich, T., & Csapó, B. (1998). A szövegesfeladat-megoldó készségek fejlődése. In Á. Budai, & L. Varga (Eds.), *Közoktatás-kutatás* (pp. 247–273). Művelődési és Közoktatási Minisztérium.
- Vilenius-Tuohimaa, P. M., Aunola, K., & Nurmi, J.-E. (2008). The association between mathematical word problems and reading comprehension. *Educational Psychology*, 28(4), 409–426. <https://doi.org/10.1080/01443410701708228>
- von Hippel, P. T., Workman, J., & Downey, D. B. (2018). Inequality in reading and math skills forms mainly before kindergarten: A replication, and partial correction, of “Are Schools the Great Equalizer?”. *Sociology of Education*, 91(4), 323–357. <https://doi.org/10.1177/0038040718801760>
- Voss, T., & Wittwer, J. (2020). Unterricht in Zeiten von Corona: Ein Blick auf die Herausforderungen aus der Sicht von Unterrichts- und Instruktionsforschung. *Unterrichtswissenschaft*, 48(4), 601–627. <https://doi.org/10.1007/s42010-020-00088-2>
- Watkins, M. W. (1986). Microcomputer-based math instruction with first-grade students. *Computers in Human Behavior*, 2(1), 71–75. [https://doi.org/10.1016/0747-5632\(86\)90023-3](https://doi.org/10.1016/0747-5632(86)90023-3)
- Weidmann, B., Allen, R., Bibby, D., Coe, R., James, L., Plaister, N., & Thomson, D. (2022). *COVID-19 Disruptions: Attainment Gaps and Primary School Responses*. Education Endowment Foundation.
- Weis, M., Heikamp, T., & Trommsdorff, G. (2013). Gender differences in school achievement: The role of self-regulation. *Frontiers in Psychology*, 4. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2013.00442>
- Whalen, K. A., Renkl, A., Eitel, A., & Glogger-Frey, I. (2024). Digital re-attribitional feedback in high school mathematics education and its effect on motivation and achievement. *Journal of Computer Assisted Learning*, 40(2), 478–493. <https://doi.org/10.1111/jcal.12889>
- Wijekumar, K., Hitchcock, J., Turner, H., Lei, P., & Peck, K. (2009). *A Multisite Cluster Randomized Trial of the Effects of CompassLearning Odyssey® Math on the Math Achievement of Selected Grade 4 Students in the Mid-Atlantic Region*. U.S. Department of Education.
- Wodarz, N., & Taylor, G. (1994). *The effects of computer usage on elementary students' attitudes, motivation and achievement in mathematics*. Northern Arizona University.

- Workman, J. (2022). Inequality begets inequality: Income inequality and socioeconomic achievement gradients across the United States. *Social Science Research*, 107, 102744. <https://doi.org/10.1016/j.ssresearch.2022.102744>
- Xiang, L., & Stillwell, J. (2023). Rural–urban educational inequalities and their spatial variations in China. *Applied Spatial Analysis and Policy*, 16(2), 873–896. <https://doi.org/10.1007/s12061-023-09506-1>
- Xie, Z., Xiao, L., Hou, M. Liu, X., & Liu, J. (2021). Micro classes as a primary school–level mathematics education response to COVID-19 pandemic in China: students’ degree of approval and perception of digital equity. *Educational Studies in Mathematics* 108(1-2), 65–85. <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10111-7>
- Ysseldyke, J., Spicuzza, R., Kosciolk, S., Teelucksingh, E., Boys, C., & Lemkuil, A. (2003). Using a curriculum-based instructional management system to enhance math achievement in urban schools. *Journal of Education for Students Placed at Risk (JESPAR)*, 8(2), 247–265. https://doi.org/10.1207/S15327671ESPR0802_4
- Yu, X., Zhou, H., Sheng, P., Ren, B., Wang, Y., Wang, H., & Zhou, X. (2024). Math anxiety is more closely associated with math performance in female students than in male students. *Current Psychology*, 43(2), 1381–1394. <https://doi.org/10.1007/s12144-023-04349-y>
- Yulibeth, D. Z. O. (2011). Habilidades de pensamiento matemático en alumnos de educación básica. *European Journal of Psychology of Education*, 26(3). <https://www.eumed.net/rev/ced/26/ydzo.htm>
- Zhang, D., Ding, Y., Barrett, D. E., Xin, Y. P., & Liu, R. (2014). A comparison of strategic development for multiplication problem solving in low-, average-, and high-achieving students. *European Journal of Psychology of Education*, 29(2), 195–214. <https://doi.org/10.1007/s10212-013-0194-1>
- Zhang, S. Z., Georgiou, G. K., & Shu, H. (2019). What aspects of the home literacy environment differentiate Chinese children at risk for reading difficulties from their not at risk controls? *Preschool and Primary Education*, 7(1).
- Zsoldos, M., & Sarkadi, K. (2001). *Szűrőeljárás óvodáskorban a tanulási zavar lehetőségének vizsgálatára: MSSST (Meeting Street School Screening Test)*. ELTE BGGYFK.

Ábrajegyzék

1. ábra. Az alulteljesítés okai (Byrnes és Miller, 2007 alapján).....	9
2. ábra. A fejlesztőprogram elágazásokat tartalmazó szerkezete	65
3. ábra. Példafeladat a programból: a gondolatmenetet tudatosító kérdések és magyarázatok	66
4. ábra. Lépésről-lépésre nyújtott segítség a fejlesztőprogramban.....	67
5. ábra. A tanári modellezés mintájára végzendő tanulói tevékenység (guided practice	68
6. ábra. Példa a procedurális tudás mérésére szolgáló feladatra a szorzás altesztből.....	73
7. ábra. Példa a konceptuális és procedurális tudás mérésére szolgáló feladatra a szorzás altesztből	74
8. ábra. Példa a konceptuális tudás mérésére szolgáló feladatra a szöveges feladat altesztből	75
9. ábra. Azonnali visszajelzés az eDia rendszerben a teszt befejezése után.....	76
10. ábra. Az itemek elkülönítés mutatóinak gyakorlati eloszlása	78
11. ábra. A matematikai fejlesztőprogram hatékonyságvizsgálatához készült teszt személy-item térképe a harmadik évfolyamon	80
12. ábra. A matematikai fejlesztőprogram hatékonyságvizsgálatához készült teszt személy-item térképe a negyedik évfolyamon.....	81
13. ábra. <i>Példa új itemekre a mérőeszköz végleges változatából</i>	880
14. ábra. Az itemek elkülönítés mutatóinak eloszlási gyakorisága	92
15. ábra. A matematikai fejlesztőprogram hatékonyságvizsgálatához készült végleges tesztváltozat személy-item térképe a harmadik évfolyamon	94
16. ábra. A matematikai fejlesztőprogram hatékonyságvizsgálatához készült végleges tesztváltozat személy-item térképe a negyedik évfolyamon.....	95
17. ábra. A feladatok harmadik és negyedik évfolyamon mutatott viselkedésének invarianciája	96
18. ábra. A kontroll és a kísérleti csoport teljesítményének eloszlása az előteszten és az utóteszten , a harmadik évfolyamon és a negyedik évfolyamo.....	100
19. ábra. A teljesítmény elő- és utóteszten mért tanulói szintű változása a kontroll csoportban és a kísérleti csoportban a harmadik évfolyamon és a negyedik évfolyamon	102
20. ábra. A kontroll és a kísérleti csoportok teljesítményének változás az előteszt és az utóteszt között a harmadik és a negyedik évfolyamon az egyes altesztek vonatkozásában.....	103
21. ábra. A digitális matematikai fejlesztőprogram egyes egységein töltött időtartamok átlaga (kék szín: az időtartam 10 és 20 perc közé esik; piros szín: az időtartam a 10 és 20 perc közötti időtartamon kívülre esik)	105
22. ábra. Matematikai tartalomban nehezebb, a képi feldolgozás területén egyszerűbb mintafeladat a videóknak megtekintésén alapuló matematikafeladatok közül, a feladat képével és a videóból rögzített képkockákkal	118

23. ábra. A videón alapuló versenyautókhoz fűződő feladat megoldásának sikertelensége esetén biztosított statikus képhez fűződő, matematikai tartalomban és tematikában a videón alapulóval azonos feladat.....	119
24. ábra. Matematikai tartalomban egyszerűbb, a képi feldolgozás területén nehezebb mintafeladat a videók megtekintésén alapuló matematikafeladatok közül, a feladat képével, a szöveg leíratával és a videóból rögzített képkockákkal	120
25. ábra. A videón alapuló feladat megoldásának sikertelensége esetén biztosított statikus képhez fűződő, matematikai tartalomban és tematikában a videón alapulóval azonos feladat.....	121
26. ábra. Egy kihívás második szintjén látható videó pillanatfelvétele	122
27. ábra. Egy kihívás ötödik szintjén látható videó pillanatfelvétele	122
28. ábra. Taps és ováció hanghatással kísért megerősítő képi üzenet egy kihívás negyedik kérdésének helyes megválaszolása esetén	123
29. ábra. Sajnálkozó hanghatással kísért visszajelző képi üzenet egy kihívás negyedik kérdésének helytelen megválaszolása esetén.....	123
30. ábra. Taps és ováció hanghatással kísért megerősítő képi üzenet egy kihívás összes kérdésének helyes megválaszolása esetén	124
31. ábra. A matematikai fejlesztőprogram hatékonyságvizsgálatához készült teszt személy-ítem térképe a harmadik évfolyamon az előteszt eredményei alapján	127
32. ábra. A matematikai fejlesztőprogram hatékonyságvizsgálatához készült teszt személy-ítem térképe a negyedik évfolyamon az előteszt eredményei alapján	128
33. ábra. A kísérleti csoport teljesítményének eloszlásgörbéje az elő-, az utó- és a késleltetett utóteszt időpontjában.....	132
34. ábra. A kontroll csoport teljesítményének eloszlásgörbéje az elő-, az utó- és a késleltetett utóteszt időpontjában.....	132
35. ábra. A matematikai fejlesztőprogram hatékonyságvizsgálatához készült teszt személy-ítem térképe a HH vagy HHH státusszal rendelkező tanulók körében az előteszt eredményei alapján.	145
36. ábra. A matematikai fejlesztőprogram hatékonyságvizsgálatához készült teszt személy-ítem térképe a HH vagy HHH státusszal nem rendelkező tanulók körében az előteszt eredményei alapján	146
43. ábra. Az előteszt eredménye által meghatározott késleltetett utóteszt eredmény csoportosított pontdiagramja a kísérleti és a kontroll csoport vonatkozásában	149

Táblázatok jegyzéke

1. táblázat. A matematikai kompetencia fejlesztésre javasolt komponensei az egyes iskolafokokon, képességcsoport szerinti bontásban	28
2. táblázat. A matematikai fejlesztőprogram hatékonyságvizsgálatára irányuló kutatások időbeni ütemezése	52
3. táblázat. Az alsó tagozatos matematika kerettanterv tematikai egységei és órakerete (OH, 2012 alapján)	61
4. táblázat. A mérőeszköz szerkezeti felépítése	72
5. táblázat. A teljes teszt és az egyes altesztek reliabilitása a teljes minta, illetve az egyes évfolyamok vonatkozásában (Cronbach- α)	77
6. táblázat. Az egyes altesztek és a teljes teszt közötti korrelációs együtthatók	78
7. táblázat. A harmadik és negyedik évfolyamos diákok teljesítménye a teljes teszten és az egyes alteszteken	79
8. táblázat. A tesztben töltött átlagos idő évfolyamonként.....	82
9. táblázat. A géphasználat sikerességét vizsgáló feladatok átlaga és szórása	82
10. táblázat. A kutatásba bevont általános iskolák országos és viszonyítási csoportok átlagához mért eredménye, valamint a minimum szintet el nem érő tanulók aránya a 2021-es Országos kompetenciamérésen a 6. és 8. évfolyamos tanulók körében.....	86
11. táblázat. A fejlesztőprogram pilot hatásvizsgálatának mintája.....	87
12. táblázat. A teljes teszt és az egyes altesztek reliabilitása a teljes minta, illetve az egyes évfolyamok vonatkozásában (Cronbach- α)	90
13. táblázat. Az egyes altesztek és a teljes teszt közötti korrelációs együtthatók	91
14. táblázat. A matematikai fejlesztőprogram hatásvizsgálatához készült teszt megerősítő faktorelemzésének eredményei	92
15. táblázat. A harmadik és negyedik évfolyamos diákok teljesítménye a teljes teszten és az egyes alteszteken	93
16. táblázat. A géphasználat sikerességét vizsgáló feladatok átlaga és szórása	96
17. táblázat. A csoporton belüli, és a csoportok közötti teljesítménykülönbség az elő- és az utóteszten évfolyamok szerinti bontásban.....	99
18. táblázat. A nemek szerinti csoportokon belüli és csoportok közötti teljesítménykülönbségek a harmadik és a negyedik évfolyamokon a kontroll és a kísérleti csoportokban és csoportok között	104
19. táblázat. A fejlesztőprogram nagymintás hatásvizsgálatának mintája	110

20. táblázat. A kutatásba bevont általános iskolák országos átlagához mért eredménye a 2018/2019, 2020/2021 és 2021/2022-es tanévben zajlott Országos kompetenciamérésen, valamint a minimum szintet el nem érő tanulók aránya a 2021/2022-es tanévben a 6. évfolyamos tanulók körében	111
21. táblázat. A kutatásba bevont diákok szocioökonómiai státuszára vonatkozó tanítói adatközlésből származó adatok a 3. és a 4. évfolyamon	114
22. táblázat. A bevont tanulók távolléti oktatásban való részvételére és a pedagógus által a szülőnek jelzett matematikatanulási nehézségére vonatkozó tanítói adatközlés eredményei	115
23. táblázat. A második osztályban használt matematikatanfolyamok és a második osztályos heti matematikaórák száma	116
24. táblázat. A teljes elő-, utó- és késleltetett utóteszt és ezek egyes altesztjeinek reliabilitása (Cronbach- α).....	126
25. táblázat. A harmadik és negyedik évfolyamos diákok előteszten mért teljesítménye a teljes teszten és az egyes alteszteken	129
26. táblázat. A csoporton belüli teljesítménykülönbség az elő-, utó- és késleltetett utóteszten a teljes minta vonatkozásában	130
27. táblázat. A kísérleti és a kontroll csoport elő-, utó- és késleltetett utóteszten nyújtott teljesítményének változása a harmadik és a negyedik évfolyamon (Cohen-d érték számításával).....	131
28. táblázat. A kísérleti és a kontroll csoport elő-, utó- és késleltetett utóteszten nyújtott teljesítményének változása az egyes altesztek által mért területeken (Cohen-d érték számításával).....	133
29. táblázat. A kísérleti és a kontroll csoport elő-, utó- és késleltetett utóteszten nyújtott teljesítményének változása képességszintek szerinti bontásban (Cohen-d érték számításával).....	135
30. táblázat. Modellilleszkedési mutatók a tesztszinten vizsgált modellek esetén	136
31. táblázat. Modellilleszkedési mutatók az egyes altesztek szintjén vizsgált modellek esetén	138
32. táblázat. A nagymintás kutatás HH/HHH státusszal biztosan rendelkező, vagy biztosan nem rendelkező részmintája	143
33. táblázat. A teljes elő- és késleltetett utóteszt és ezek egyes altesztjeinek reliabilitása a HH / HHH státusszal rendelkező, illetve nem rendelkező diákok csoportjaiban (Cronbach- α).....	144
34. táblázat. A hátrányos helyzetű és a nem hátrányos helyzetű diákok elő-, illetve késleltetett utóteszten nyújtott teljesítményének összevetése kísérleti és kontroll csoport szerinti bontásban	150

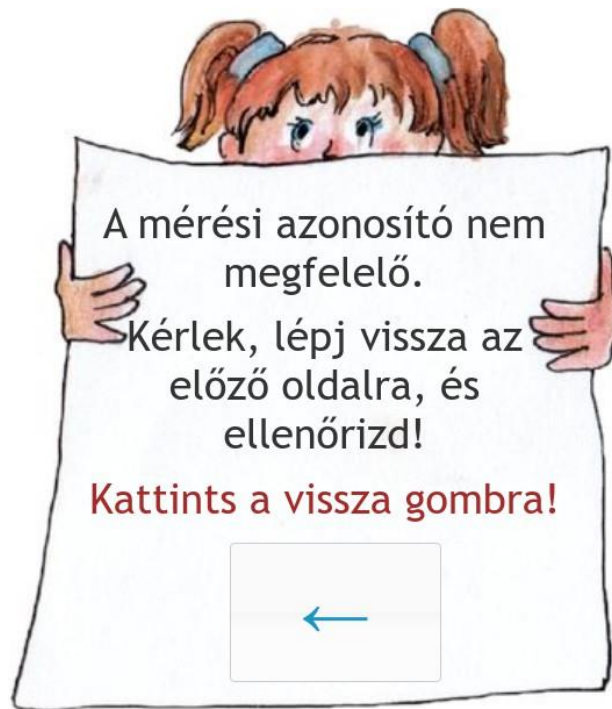
Mellékletek jegyzéke

- | | |
|---------------------|--|
| 1. számú melléklet. | Első fejlesztő feladatsor belépő üzenete, feladatai, és néhány példa a feladatok utáni azonnali visszajelzésekre |
| 2. számú melléklet. | Tizenegyedik fejlesztő feladatsor belépő üzenete, feladatai, és néhány példa a feladatok utáni azonnali visszajelzésekre |
| 3. számú melléklet. | A fejlesztőprogram hatékonyságvizsgálatához készült mérőeszköz |

1. számú melléklet. Első fejlesztő feladatsor belépő üzenete, feladatai, és néhány példa a feladatok utáni azonnali visszajelzésekre

(Egyes feladatok az olvasó megértését megkönnyítendő írott formában is tartalmazzák a feladatok instrukcióit, melyeket azonban a tanuló az eDia felületén nem látott.)



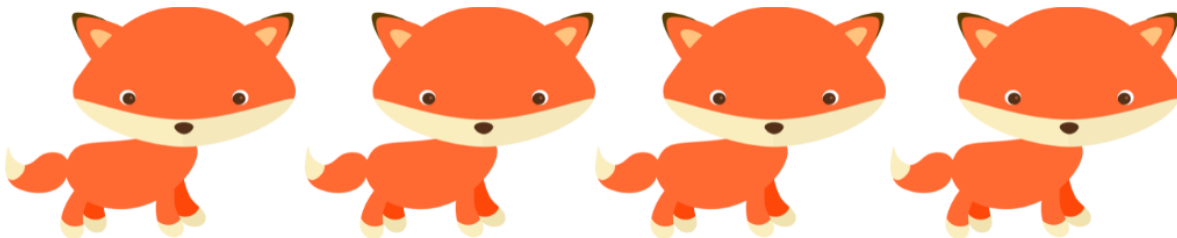




Tovább



Kattints a hangszóróra!



Hány füle van **egy** rókanak?



Hány füle van **két** rókanak?



Hány füle van **négy** rókanak?



Képzeld a négy róka mellé még egyet! Hány füle van **öt** rókanak?



Kattints a hangszóróra!



Hány levele van 1 virágnak?



Hány levele van 2 virágnak?



Hány levele van 3 virágnak?



Hány levele van 4 virágnak?



Figyelj! Mondd meg ügyesen, hány levele van 5 virágnak!



Nono, gondold még egyszer át!



[Tovább](#) ➤

Ügyes, okos vagy!



[Tovább](#) ➤



Olvass a képekről!

Hány lába van összesen 5 galambnak? Írd a szövegdobozba!





Olvass a képekről!

Hány lába van **3 lónak**? Írd a szövegdobozba!



- : -

Egyre ügyesebb leszel!



[Tovább](#) ➤

Kattints a hangszóróra!



Hány gomb van **egy** hóemberen?



Hány gomb van **2** hóemberen?



Hány gomb van **3** hóemberen?



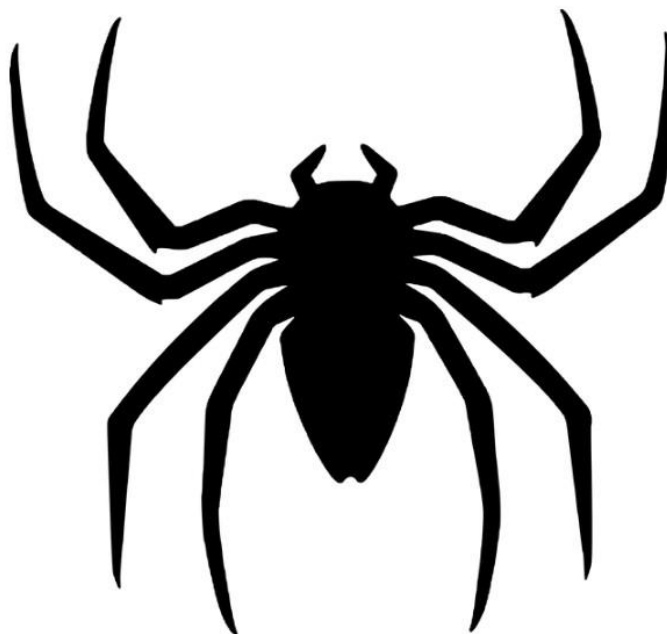
Hány gomb van **5** hóemberen?





Egy póknak **8 lába** van.

Hány lába van összesen **3 póknak**? Írd a szövegdobozba!



Kattints a hangszóróra!



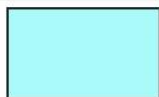
Kattints a hangszóróra!



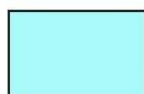
Kattints a hangszóróra!



Kattints a hangszóróra!



Kattints a hangszóróra!

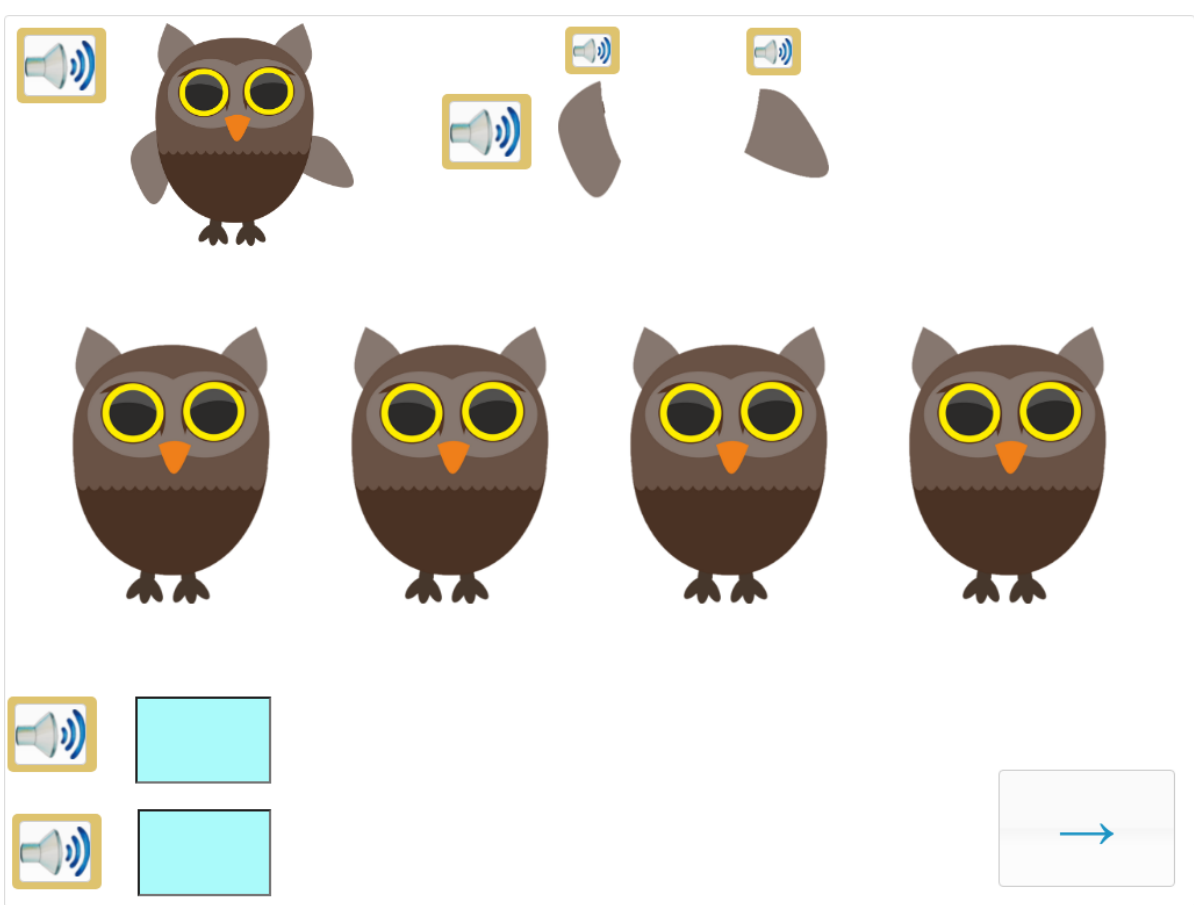


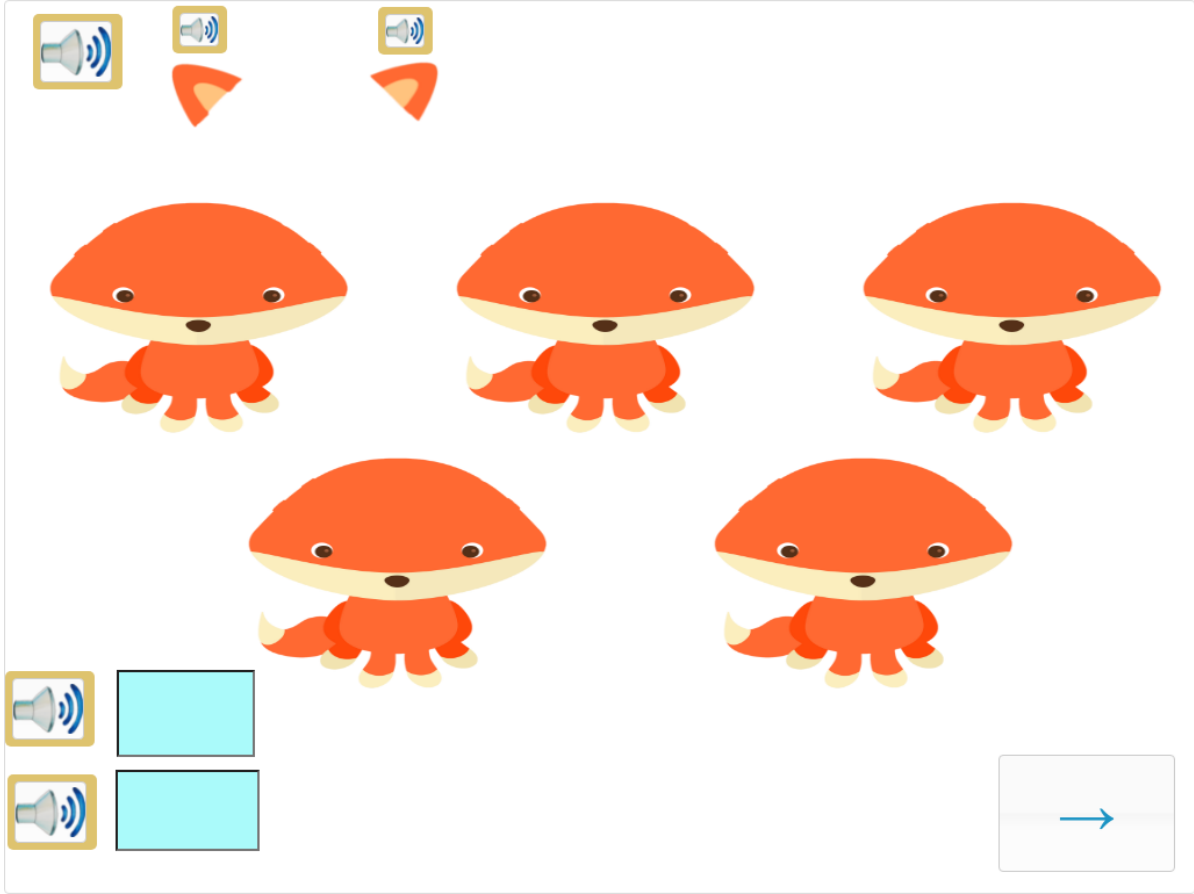
Kattints a hangszóróra!



Kattints a hangszóróra!







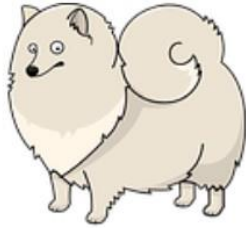
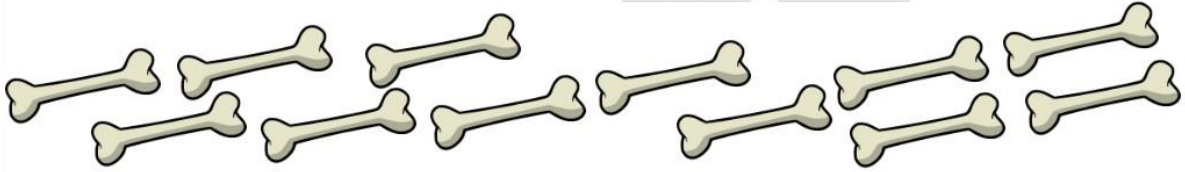


Adj minden kutyának 3 csontot. **Húzz 3 csontot** minden kutyához!

Jut-e minden kutyának 3 csont?

☐ Igen

☐ Nem





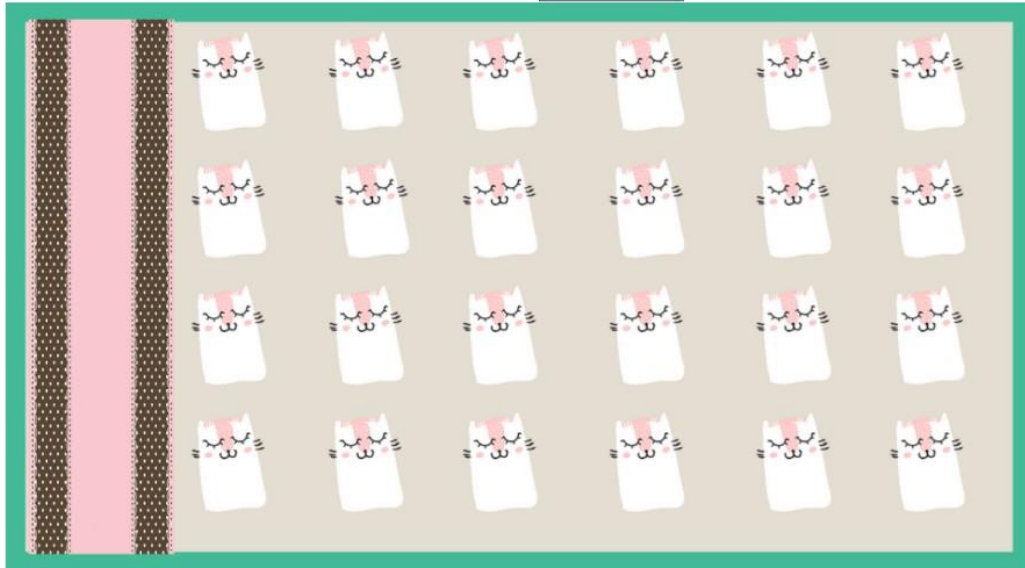
Hány macska alszik a dobozban? Írd a szövegdobozba!





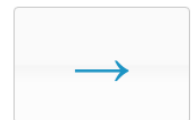
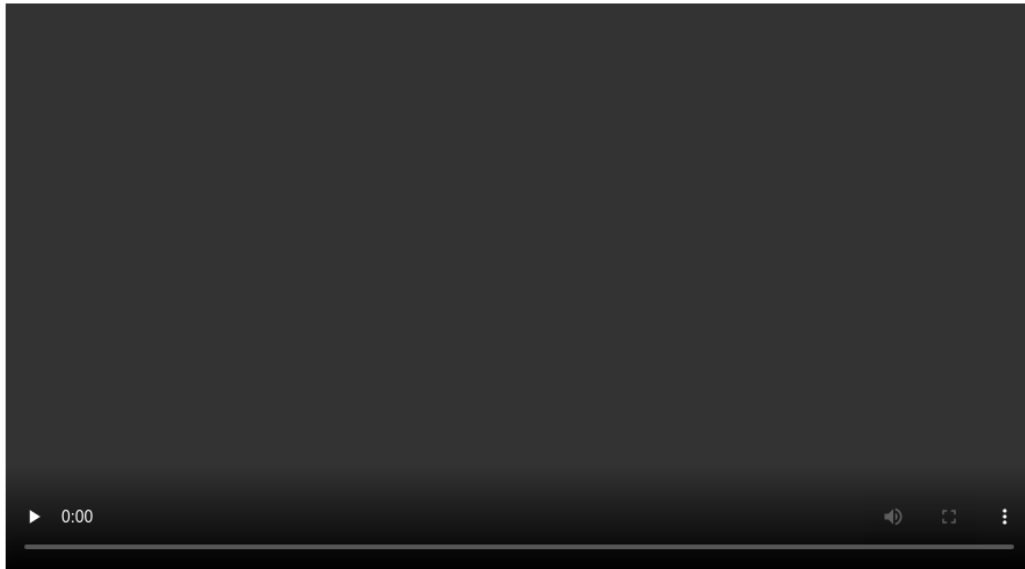
Nézd csak! A doboz egy része **le van takarva**.

Hány macska alszik a dobozban? **Írd a szövegdobozba!**



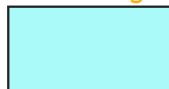


Egy kicsit többet mutatok. **Kattints** a képre!
Hány macska alszik a dobozban? **Írd a szövegdobozba!**



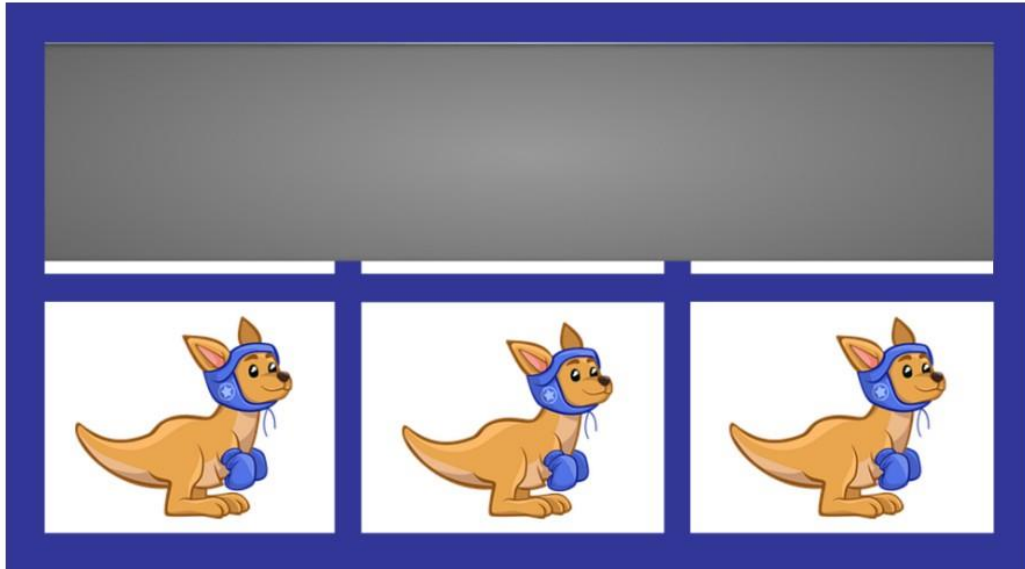


Még egy kicsit többet mutatok. **Kattints** a képre!
Hány macska alszik a dobozban? **Írd a szövegdobozba!**





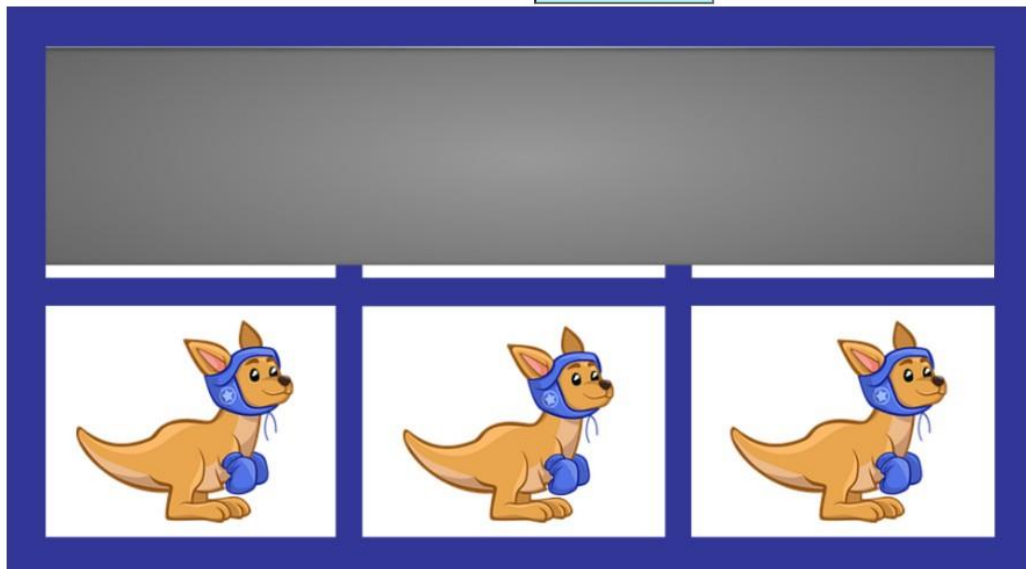
Hány kenguru van a képen? Írd a szövegdobozba!





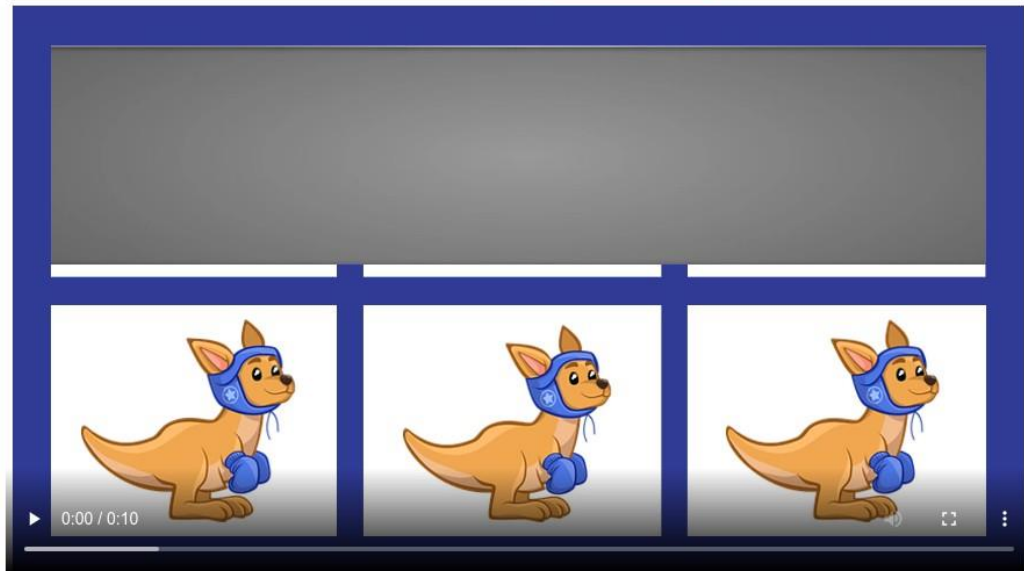
Nézd csak! A kép egy része **le van takarva**.

Hány kenguru van a képen? **Írd a szövegdobozba!**





Egy kicsit többet mutatok. **Kattints** a képre!
Hány kenguru van a képen? **Írd a szövegdobozba!**





Hány vendég érkezett? Írd a szövegdobozba!





Hány vendég érkezett? **Írd a szövegdobozba!**





Hány vendég érkezett? Írd a szövegdobozba!

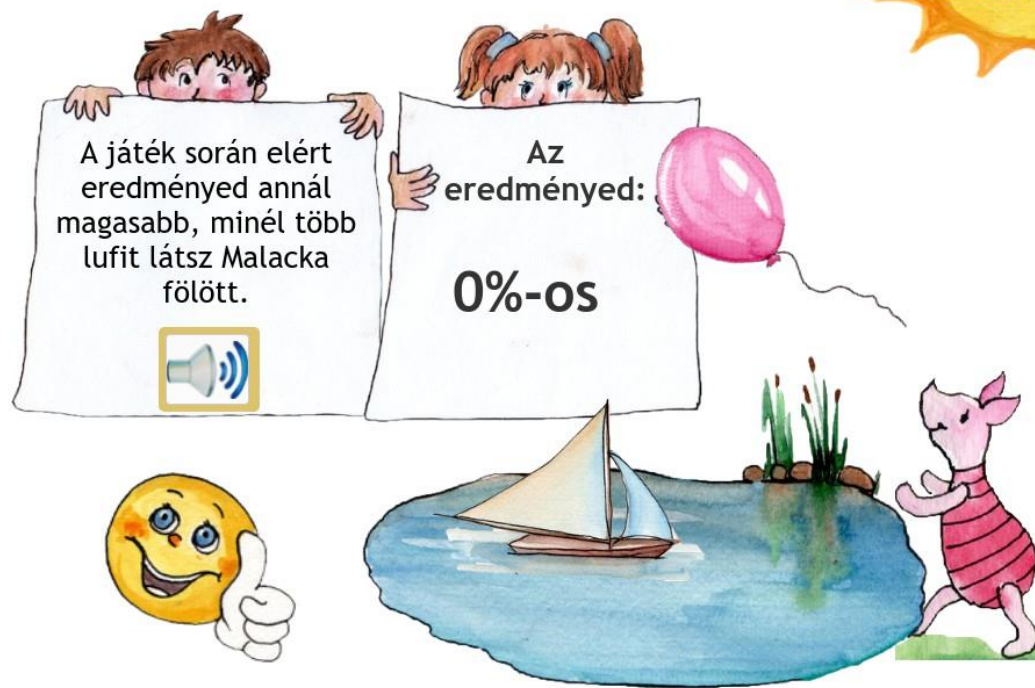


Egyre ügyesebb leszel!



[Tovább](#) 

A feladatok végéhez értél. Köszönjük, hogy velünk tartottál!



2. számú melléklet. Tizenegyedik fejlesztő feladatsor belépő üzenete, feladatai, és néhány példa a feladatok utáni azonnali visszajelzésekre

(Egyes feladatok az olvasó megértését megkönnyítendő írott formában is tartalmazzák a feladatok instrukcióit, melyeket azonban a tanuló az eDia felületén nem látott.)

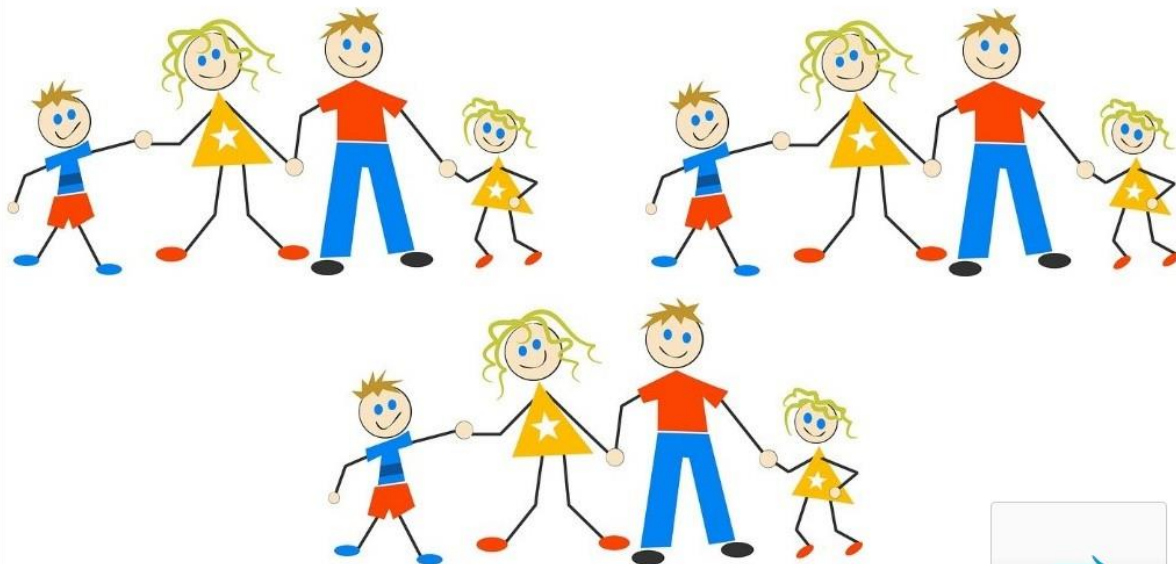




3-szor a

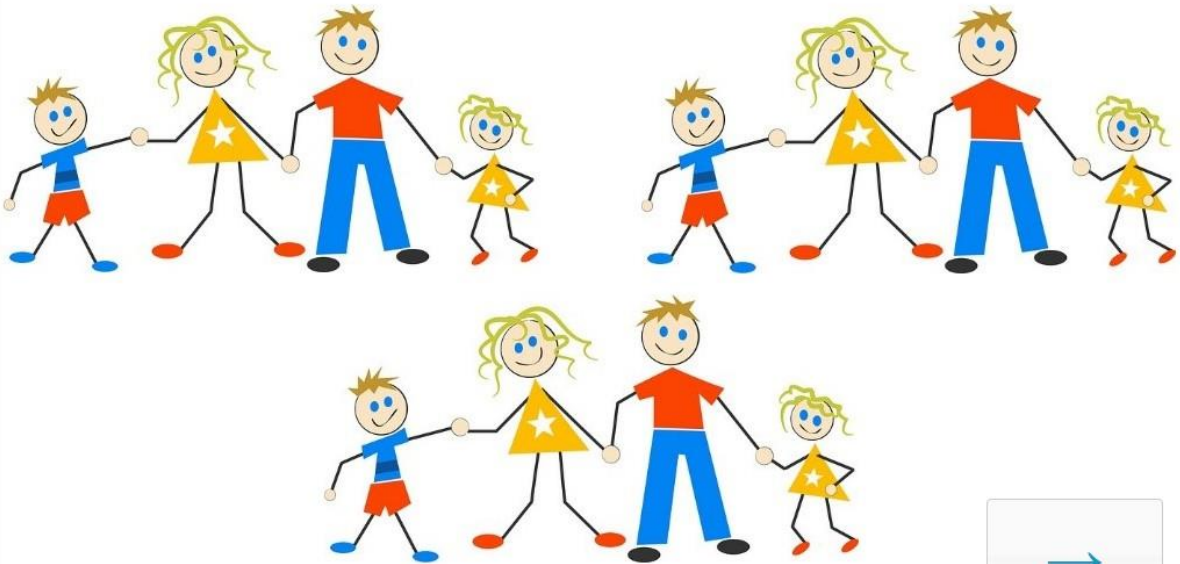
gyerek =

gyerek



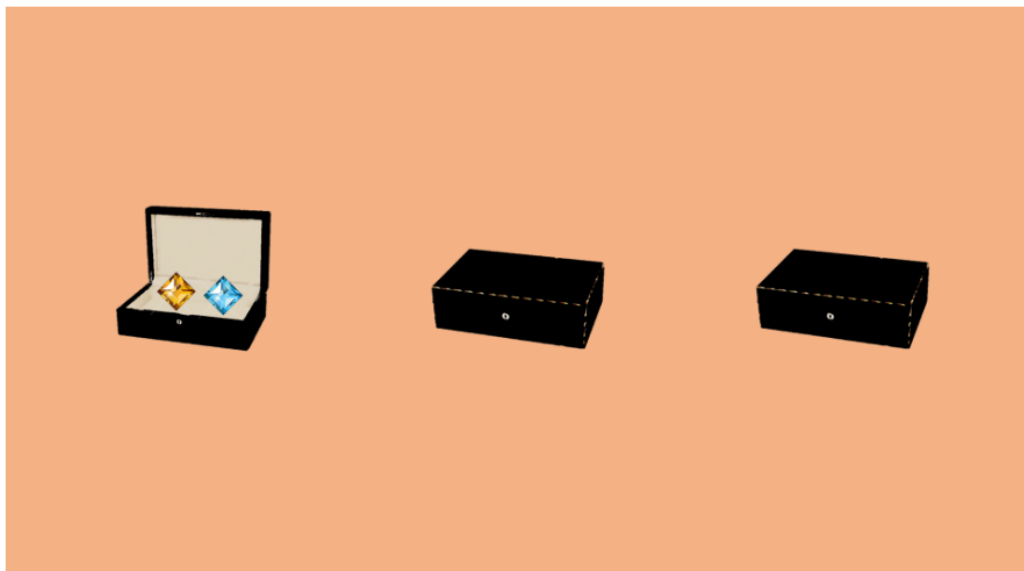


3-szor a gyerek = 12 gyerek





Hány sárga gyémánt van **összesen** a dobozokban? Írd a szövegdobozba!



Nono, gondold még egyszer át!



[Tovább](#) ➔

Ügyes, okos vagy!



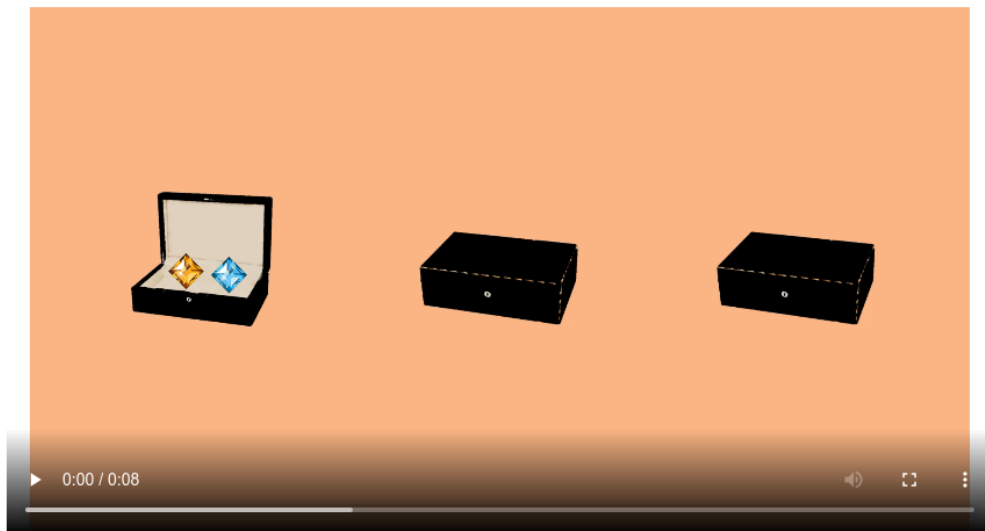
Tovább 



Kattints a képre!



Hány **sárga gyémánt** van **összesen** a dobozokban?
Írd a szövegdobozba!

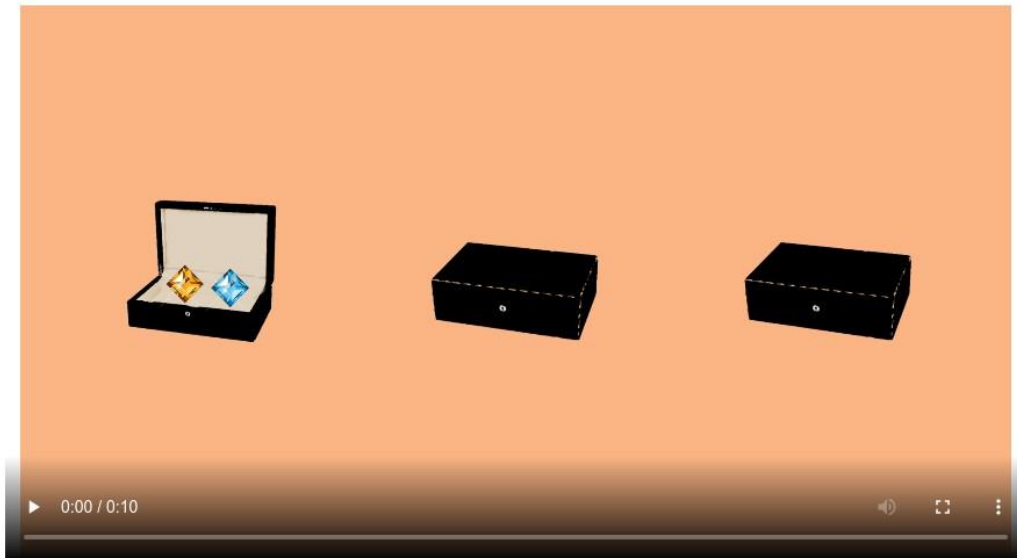




Segítek másképp. **Kattints** a képre!



Hány sárga gyémánt van **összesen** a dobozokban!
Írd a szövegdobozba!





Segítek így is. [Kattints a képre!](#)



Hány sárga gyémánt van **összesen** a dobozokban?
Írd a szövegdobozba!



Egyre ügyesebb leszel!



[Tovább](#) 

Olvass a **képekről**! Számolj! **Írd be** a hiányzó számokat!



-szer 5 rózsza = rózsza



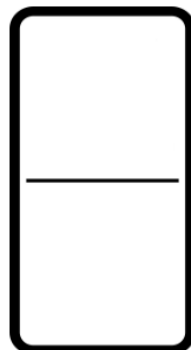
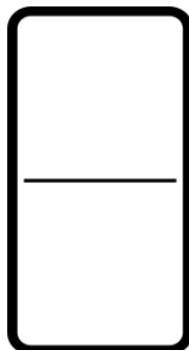
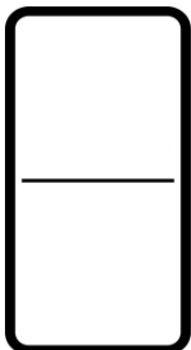
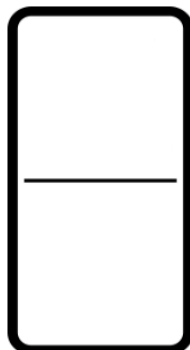
- - -



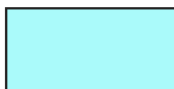
2 -szer az 5 rózsza = rózsza



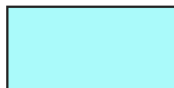
Kattints a hangszóróra!



Kattints a hangszóróra!

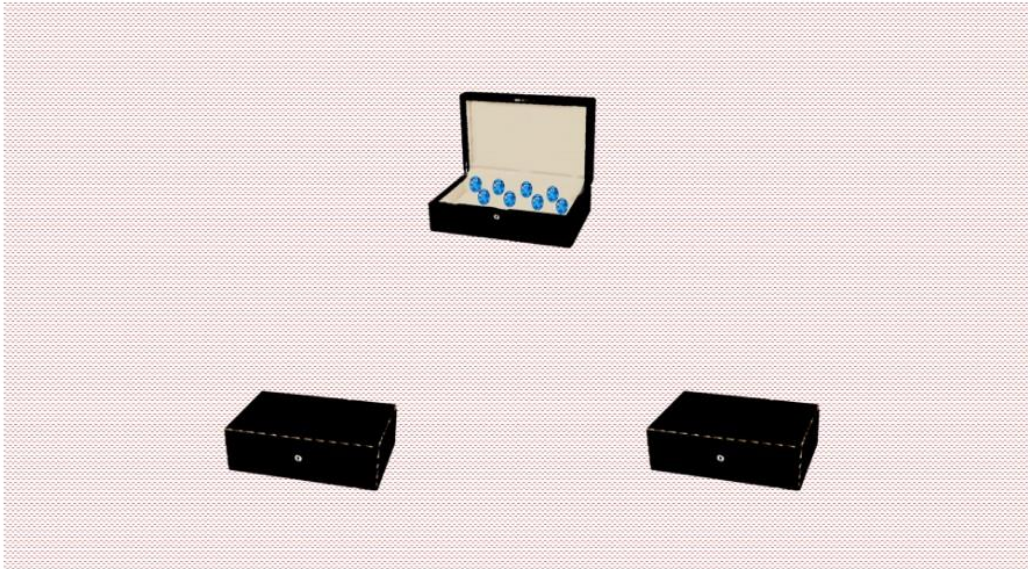


Kattints a hangszóróra!





Hány kék gyémánt van **összesen** a dobozokban? Írd a szövegdobozba!

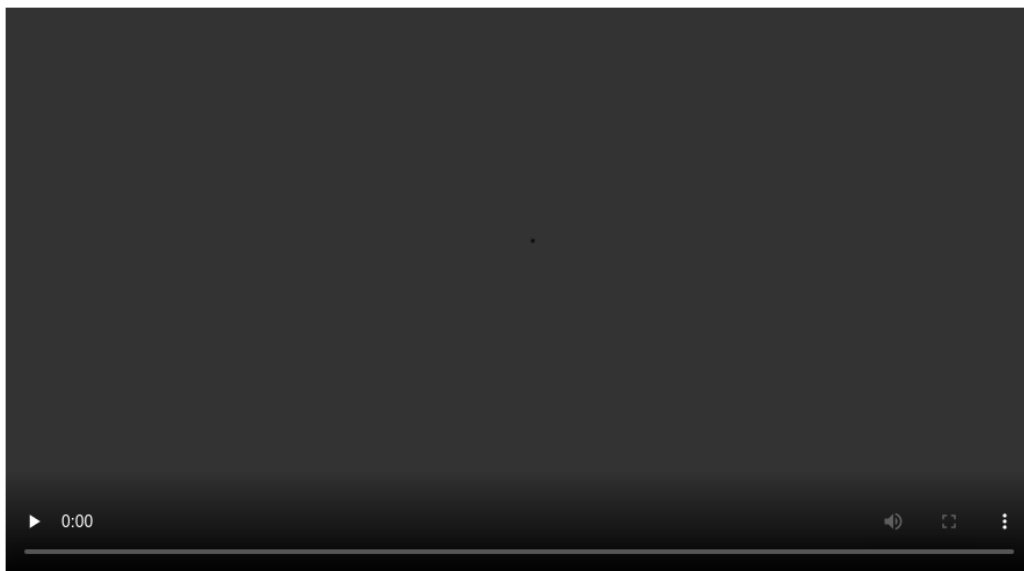




Kattints a képre!



Hány **kék gyémánt** van **összesen** a dobozokban?
Írd a szövegdobozba!

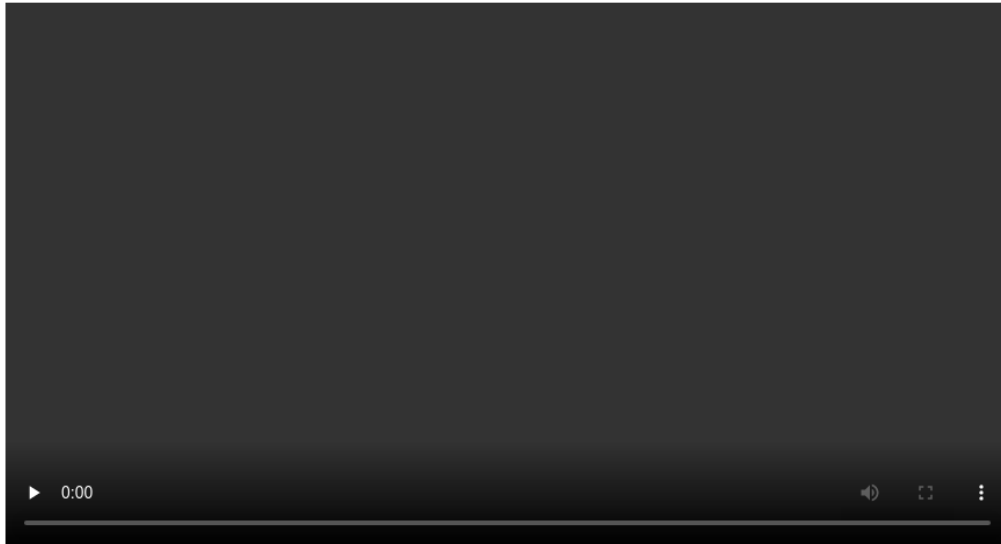




Segítek másképp. **Kattints** a képre!



Hány kék gyémánt van **összesen** a dobozokban?
Írd a szövegdobozba!

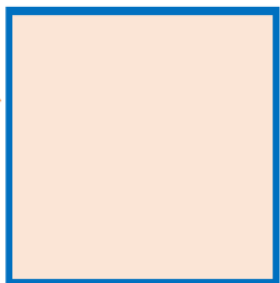


--

Kattints a hangszóróra!



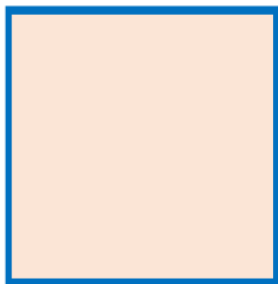
kétszer annyi



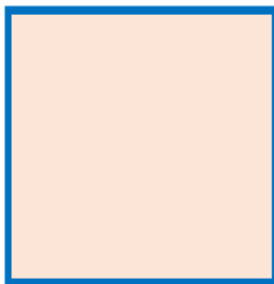
kétszer annyi



háromszor annyi



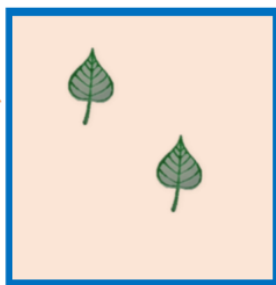
kettővel több



Kattints a hangszóróra!



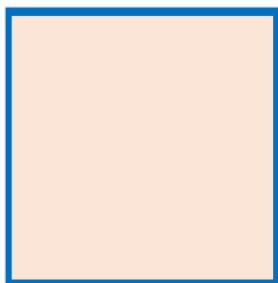
kétszer annyi



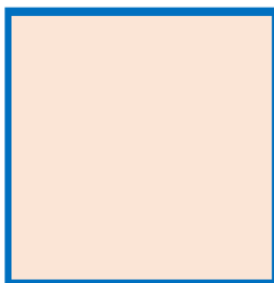
kétszer annyi



háromszor annyi



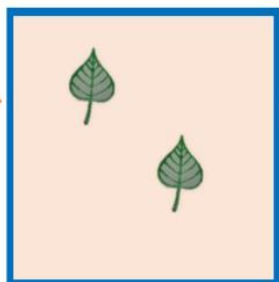
kettővel több



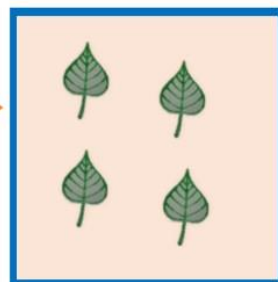
Kattints a hangszóróra!



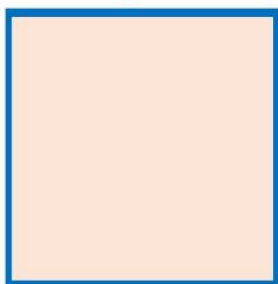
kétszer annyi



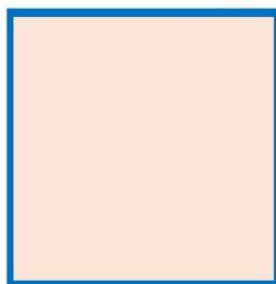
kétszer annyi



háromszor annyi



kettővel több



Egyre ügyesebb leszel!



Tovább



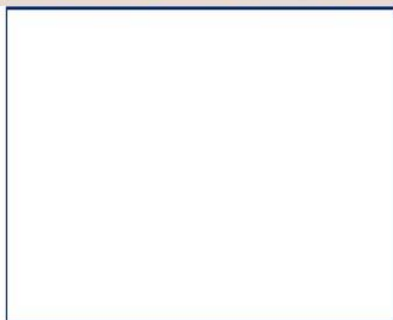
A feladatok végéhez értél. Köszönjük, hogy velünk tartottál!



3. számú melléklet. A fejlesztőprogram hatékonyságvizsgálatához készült mérőeszköz

OR eloteszt_007:

Melyik művelet illik a dominókhöz? Húzd a kép alá! Több helyes megoldás is lehet.
Ezek után húzd a kukába azokat, amelyek kimaradtak!



$$9 \cdot 2 + 7 \cdot 3$$

$$2 \cdot 9 + 7$$

$$2 \cdot 9 + 3 \cdot 7$$

$$9 + 9 + 7 + 7 + 7$$



[Vissza](#)

[Tovább](#)

OR eloteszt-002:

A színes téglalapokba – valamilyen szabály alapján – számokat írtunk.



Írd be a **piros keretes** téglalapokba a hiányzó számokat a felismert szabály alapján!

1	1	1	1	1	1	1	1	1	9
2	2	2	2	2	2	2	2		16
3	3	3	3	3	3	3			21
4	4	4	4	4	4				24
5	5	5	5	5					25
6	6	6	6						
									9

[Vissza](#)

[Tovább](#)

OR eloteszt-005:

Babócaék osztálya vonatos családi kirándulást szervezett.

A kérdések után a legördülő listából kattints a helyes válaszra!



a) A mozdonyhoz 6 kocsi kapcsolódott és minden kocsi négyen ültek.



Hányan kirándultak összesen?



b) Utazás közben 19 fenyőfát és 3-szor annyi nyárfát láttak.



Hány nyárfát láttak útközben?

c) Utazás közben 2 hídon keltek át. Az egyik patak 4 méter széles volt, a másik 12 méter széles.



Hányszor szélesebb volt a másik patak, mint az első?

d) A kiránduláson a gyerekek elfogyasztottak 16 szendvicset, a felnőttek kétszer annyit.



Hány szendvicset fogyasztottak el a felnőttek?

[Vissza](#)

[Tovább](#)

OR eloteszt-001:

A ruhaszárító kötélre minden ruhát két csipesszel raktunk fel.



A következő kérdések után írd be a választ számjegyekkel az üres keretekbe!



a) Hány ruhát tettünk fel, ha 12 csipeszt használtunk?



b) Hány ruhát tettünk fel, ha 16 csipeszt használtunk?



[Vissza](#)

[Tovább](#)

OR eloteszt-003:

Az osztályba **16 fiú** és **12 lány** jár. A tanító néni minden nap „szuperhős” kártyákat ad azoknak, akik valami nagyszerűt tettek.

A következő kérdések után válaszd ki a helyeset a legördülő menükből!

a) A lányok közül négyen a szép olvasásért kaptak jutalomkártyát.

Hányad része kapott a lányoknak jutalomkártyát?



b) A fiúk negyede a jó sportolásért kapott jutalmat.

Hány fiú kapott kártyát a jó sportolásért?



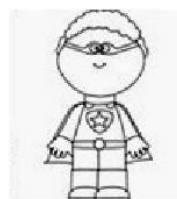
c) A lányok közül hatan szépen írtak.

Hányad részük kapott jutalomkártyát a szép írásért?



d) A fiúk fele nagyon udvarias, előzékeny volt a lányokkal. Ezért jutalmazta őket a tanító néni.

Hány fiú kapott udvariasságért jutalomkártyát?



[Vissza](#)

[Tovább](#)

OR eloteszt-004:

A következő kérdések után kattints a helyes válaszra!

a) A Futrinka utca 6 lakója virágokat ültetett. Mindegyik lakó ugyanannyi virágot. Együtt összesen 18 virágot ültettek.



Hány virágot ültetett egy lakó?

- ☐ 9 ☐ 12 ☐ 3 ☐ 6



b) Cicamica 24 kekszet osztott el egyenlően a 4 barátnője között.



Hány kekszet kapott egy barátnő?

- ☐ 12 ☐ 6 ☐ 8 ☐ 4

c) Morzsi kutya délelőtt 4 idegen járókelőt köszöntött csaholással.



Hány járókelő járt az utcában egész nap, ha a délután még kétszer ennyit köszöntött?

- ☐ 4 ☐ 8 ☐ 12 ☐ 16



d) Cicamica és Böbe baba szorgosan söprögettek. Délelőtt 5 zsákot töltöttek meg falevéllal, délután háromszor annyit.

Hány zsákot töltöttek meg délután?

- ☐ 10 ☐ 15 ☐ 20 ☐ 25



☐ Vissza

Tovább ☐

OR eloteszt-010:

Hogyan számolod ki a következő szöveges feladatokat? Válaszd ki a megfelelő műveleti jelet a legördülő menüből!



Marci 36 szem cukorkát kapott. Minden nap 6-ot evett meg belőle.

Hány napig tartott a cukorkája?



36 6 = ♦

Évi 36 matricát kapott. Albumában 6 oldalra egyenlően elosztotta.

Hány matrica került egy oldalra?



36 6 = ♦

 Vissza

Tovább 

OR eloteszt-009:

Egy tepsiben egyszerre 24 kekszet lehet sütni. Egy cukrász 12 tepsit tölt meg kekszekkel. Hány kekszet süt a cukrász?

Melyik számolás helyes az alábbiak közül? Több helyes megoldás is lehet!



Minden számolás után válaszd ki a megfelelőt a "helyes", "nem helyes" lehetőségek közül!

$12 \cdot 24$

$24 - 12$

$24 + 24$

$24 \cdot 12$



[Vissza](#)

[Tovább](#)

OR eloteszt-011:

Hogyan számolod ki a következő szöveges feladatokat? Válaszd ki a megfelelő műveleti jelet a legördülő menüből!



Móni 28 darabos filctollkészletét négyesével tette a tartóiba.

Hány tartóba tette a filceit Móni?



28 Válassz! 4 = ♦

Kincsőnek 7 piros, és hétszer ennyi kék gyöngye van.

Hány kék gyöngye van Kincsőnek?



7 Válassz! 7 = ♦

A kiránduláson a 28 gyerek negyede gyűjtött makkot.

Hány gyerek gyűjtött makkot?



28 Válassz! 4 = ♦

 Vissza

Tovább 

OR eloteszt-006:

Egy iskolai ünnepségre **91 vendég érkezett**, hogy megnézzék a gyerekek ünnepi előadását. A nézőtéren a székeket sorokba rendezték. **Egy sorban 7 széket** helyeztek el. **Hány széksorra van szükség** ahhoz, hogy minden vendég le tudjon ülni?

Melyik számolás helyes az alábbiak közül? **Kattints a helyes válaszra!**



◦ $91 \cdot 7$

◦ $91 : 7$

◦ $7 - 91$

◦ $91 - 7$

◦ $7 + 91$

◦ $7 : 91$



◦ [Vissza](#)

[Tovább](#) ◦

Nyilatkozat

A disszertáció elkészítése során a Perplexityt és a Grammarlyt használtam az angol nyelvű összefoglaló nyelvhelyességének ellenőrzésére és javítására. Ellenőriztem és szerkesztettem az eszköz által generált tartalmat, biztosítva annak pontosságát és a kutatással és érveimmel való összhangját. A disszertáció szövegének tartalmáért és eredetiségéért teljes felelősséget vállalok.

2025. június 30.

Ökördi Réka