

ARÁNY, ARÁNYOSSÁG, SZÁZALÉKSZÁMÍTÁS:
VIZSGÁLATOK A DIÁKOK TUDÁSSZINTJÉVEL
ÉS STRATÉGIÁIVAL KAPCSOLATBAN

Doktori (PhD) értekezés tézisei

Szerző:

Torma Gábor

Témavezetők:

Dr. Kosztolányi József
egyetemi docens

Dr. Hajnal Péter
egyetemi docens



Matematika Doktori Iskola
Szegedi Tudományegyetem
Természettudományi és Informatikai Kar
Bolyai Intézet

Szeged

2025

BEVEZETÉS

Az arányossági gondolkodás fejlődése és az arányossággal kapcsolatos feladatok megoldása nem csupán a diákok iskolai tanulmányaiban játszik fontos szerepet. Kijelenthető, hogy az arányossággal kapcsolatos képességek kulcsfontosságúak a mindennapi életben is. Talán fel sem tűnik, de ezen ismereteinket kamatoztatjuk többek között főzés és sütés során a szükséges mennyiségek meghatározásakor és a mértékegységek átváltásakor, az építkezéskor megvásárolni kívánt anyagok mennyiségének kiszámításakor, valamint, amikor a boltban a különböző kisserelésű termékek árát szeretnénk összehasonlítani. Ez a pár példa is jól szemlélteti, hogy ezen ismeretek, képességek megfelelő mértékű, mélységű elsajátítása elengedhetetlen a pontos, hatékony és észszerű döntések meghozatalában.

Ahhoz, hogy jobban megismerjük a tanulók arányossági gondolkodásának fejlődését, fontos rálátást biztosítani előrehaladásuk aktuális helyzetére, lehetséges elakadásaikra. Ezen cél eléréséhez segíthet hozzá az általuk használt megoldási stratégiák vizsgálata. Doktori kutatásom az arány, arányosság, százalékszámítás témakörök ismeretanyagára fókuszál. A célom az volt, hogy megvizsgáljam a pedagógusok témával kapcsolatos véleményét, tanítási szokásait, valamint hetedik és kilencedik évfolyamos diákok körében felmérjem a résztvevő tanulók jelenlegi tudásszintjét, feltérképezzem az általuk használt stratégiákat, illetve azok rugalmasságát.

AZ ÉRTEKEZÉS ALAPJÁT KÉPEZŐ PUBLIKÁCIÓK

- Torma, G., & Kosztolányi, J. (2025). Conversion between different symbolic representations of rational numbers among 9th-grade students. *Teaching Mathematics and Computer Science*, 23(1), 29-45. <https://doi.org/10.5485/TMCS.2025.14624>
- Torma, G., & Kosztolányi, J. (2025). Strategies used in solving proportion problems among seventh-grade students. *Teaching Mathematics and Computer Science*, közlésre elfogadva

AZ ÉRTEKEZÉSHEZ KAPCSOLÓDÓ EGYÉB KÖZLEMÉNY

- Torma, G. (2024). Hogyan oldanak meg 9. évfolyamos diákok arányossági problémákat? In: Lócska, O. D.; Kónya, E. (szerk.), *Matematika és Informatika Didaktikai Kutatások 2024* (pp. 59). Debreceni Egyetem Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

KONFERENCIAELŐADÁSOK

- Torma, G. (2024. április 5-7.). *Hogyan oldanak meg 9. évfolyamos diákok arányossági problémákat?* Matematika és Informatika Didaktikai Kutatások 2024, Szeged.
- Torma, G. (2024. július 3-5.). *How do 7th Grade Students Solve Proportion Problems?* CSM – The 7th Conference of PhD Students in Mathematics, Szeged.
- Torma, G. (2024. november 8-9.). *Arányossági feladatok megoldása: diákok tudásszintjének és stratégiáinak vizsgálata.* XXXVI. Varga Tamás Módszertani Napok, Budapest.

A szerző MTMT azonosítója: 10073200

ELMÉLETI HÁTTÉR

Az arányossági gondolkodás a matematikaoktatás egyik megkerülhetetlen pontja, hiszen a matematikai megértés és alkalmazás alapját képezi. Az arányossági gondolkodás alapját két (vagy több) mennyiség együttes változása adja (Adey & Csapó, 2012). A diákoknak tehát ezen mennyiségek összehangolására kell törekedniük, a köztük lévő viszonyokat, kapcsolatokat kell felfedezniük (Lobato et al., 2010).

Az arányossági gondolkodás három fontos képesség meglétét foglalja magában:

- két mennyiség közötti állandó arány felismerését, azaz a tanuló képes észrevenni, ha két mennyiség aránya állandó;
- két arány között egy állandó szorzó segítségével létesített kapcsolat megértését, azaz a tanuló megérti, hogy ha az egyik mennyiséget valahányszorosára változtatjuk, akkor a másikat is arányosan kell módosítani;
- különböző helyzetekben és különböző reprezentációkban ezeknek az arányos kapcsolatoknak a felismerését és megértését, azaz a tanuló nem csak konkrét szituációban, hanem különféle kontextusban és formában is képes észrevenni és alkalmazni az arányossági kapcsolatot (de la Torre et al., 2013).

Az ezekhez a képességekhez kapcsolódó számításokat (arányos osztás, arányszámítás, mértékváltás, arányosságok kezelése, százalékszámítás) közös néven arányosságszámítási készségnek nevezzük (Varga et al., 2007). Ezen készségek elsajátítását és alkalmazását megfigyelve kaphatunk pontosabb képet az egyén arányossági gondolkodásának jelenlegi állapotáról, fejlődési üteméről, fejleszthetőségi lehetőségeiről.

A témában eddig megjelent tanulmányok különböző megoldási stratégiákat azonosítottak, melyek jól illeszkednek a tanulók fejlődési szintjeihez. Az eddigi

kutatások eredményei rálátást biztosítanak a sikeres stratégiák közötti eltérésekre, a leggyakrabban tapasztalt sikertelen stratégiákra, valamint az arányos gondolkodás fejlődése alatt megfigyelt stratégiák megjelenési sorrendjére (Tourniaire & Pulos, 1985). Munkám során két osztályozási modellt alkalmaztam.

Az egyik kategorizálás öt helytelen és négy helyes megoldási stratégiát különít el (Fisher, 1988):

- nincs válasz;
- intuitív;
- additív hiba;
- arányossági kísérlet;
- egyéb helytelen;
- arányossági formula;
- arányossági érvelés;
- algebra;
- egyéb helyes.

Egy másik kategorizálás a helyes stratégiákra helyezi a hangsúlyt, így nagyobb részletességgel vizsgálhatjuk a fejlődési szakaszokhoz kapcsolódó műveletek, készségek meglétét (Avcu & Avcu, 2010):

- nincs válasz;
- helytelen;
- kereszt szorzat algoritmus;
- egységarány stratégia;
- változási tényező stratégia;
- egyenértékű törtek stratégiája;
- ekvivalenciaosztály stratégia;
- felépítési stratégia;
- egyéb helyes.

Az arányosság és százalékszámítás tárgyalása esetén a törtekkel végzett műveletek magabiztos ismeretére is támaszkodnunk kell. Clark és munkatársai (2003) megállapították, hogy a sikeres tanulók rugalmasan mozognak a törtek és az arányok használata között, a feladat megoldása során végig fenntartva a kontextust. Ez a mozgás akkor könnyebb, ha a két fogalom közötti kapcsolat már korábban létrejött.

Kihívást jelent a diákok számára, hogy a racionális számoknak több különböző megjelenítési formájával (közönséges törtek, tizedes törtek, százalékok) is találkoznak tanulmányaik során. Ezek bevezetésénél több kérdés is felmerülhet a pedagógusban. Az egyik, hogy milyen sorrendben célszerű ezeknek a tanítása, a másik pedig, hogy milyen megközelítéssel, milyen ábrázolások, illusztrációk segítségével történjen az oktatásuk (Tian & Siegler, 2018).

A KUTATÁS EGYSÉGEI, MÓDSZEREI

Kutatásom alapvetően négy egységből épült fel:

- 1) Az általunk használt kérdőívet 106 magyarországi pedagógus töltötte ki. Ezek alapján feltérképeztük a válaszoló matematikatanárok arányossággal kapcsolatos témakörökről kialakult gondolatait.
- 2) Egy osztálytermi kísérlet során egy rövid tanítási egységhez dolgoztunk ki tanmenetet, valamint vizsgáltuk a résztvevő 146 diák eredményességét és az általuk használt stratégiákat egy-egy egységes elő-, valamint utómérés elemzése alapján.
- 3) Egy 794 diák részvételével lezajlott mérés során megvizsgáltuk, hogy a középiskola kezdetén álló diákok milyen eredményesen, és milyen stratégiákat alkalmazva oldanak meg arányossággal kapcsolatos feladatokat.

- 4) A tapasztalatok alapján egy hétköznapi problémákra fókuszáló tanítási kísérletet dolgoztunk ki és bonyolítottunk le. Ennek eredményeiről esettanulmányt készítettünk a bemutatott szakirodalmakra és a korábbi eredményekre reflektálva.

KUTATÁSI KÉRDÉSEK ÉS EREDMÉNYEK

Az elvégzett kísérletek és mérések alapján a kutatási kérdésekkel kapcsolatban a következő válaszok születtek:

K1) Tapasztalható-e különbség az egyenes és fordított arányossági feladatok megoldásának sikerességében?

- A hetedik évfolyamos diákok jó eredményt értek el az egyenes arányossági feladat megoldásakor: az előmérés során a tanulók 96%-a, az utómérés során a 95%-uk oldotta meg helyesen a feladatot. A kilencedik osztályos diákok 87%-a dolgozott hibátlanul a feladat-sor egyenes arányossággal kapcsolatos feladatának megoldásakor.
- A fordított arányosságra fókuszáló szöveges feladatokat az előmérésen a hetedik évfolyamos diákok 84%-a, az utómérésen 87%-a oldotta meg hibátlanul, míg a kilencedikes tanulók 66%-a tudta helyesen megoldani a problémát.

K2) Az összetett arányossági problémák és az arányos osztással kapcsolatos feladatok nagyobb nehézséget jelentenek-e a diákok számára, mint az egyenes és fordított arányossággal kapcsolatos feladatok?

- A hetedik évfolyamos diákok 63%-a tudta megoldani az előmérésben szereplő összetett arányossági feladatot, majd 43%-a volt sikeres az utómérés ilyen típusú feladatának megoldásakor.
- Az arányos osztással kapcsolatos feladatot a hetedik évfolyamos diákok 84%-a oldotta meg az előmérés és 71%-a az utómérés során.
- A kilencedikes tanulók 35%-a oldotta meg hibátlanul az arányos osztással kapcsolatos feladatot.

K3) Azonos típusú feladatok megoldásakor a kilencedik évfolyamos diákok jobb eredményeket érnek-e el, mint a hetedik évfolyamosok?

- A hetedik és a kilencedikes feladatsorokban található öt közös probléma mindegyikére igaz, hogy az adott feladatot sikeresen megoldók aránya a hetedik évfolyamos diákok esetében volt magasabb.
- Ez a különbség különösen szembetűnő, ha a diákokat az aktuális iskolájuk típusa szerint osztályozzuk.

K4) Kollaboratív és projekt alapú hozzáállás segítségével jobban fejleszthető-e a hetedik évfolyamos diákok arányossági problémák megoldásakor tapasztalt sikeressége?

- Az esetek kevesebb, mint felében fordult elő, hogy az utómérésen jobban teljesítők aránya (a nem hibátlanul teljesítők számához viszonyítva) magasabb volt a kísérleti csoport esetén, mint a kontrollcsoportnál.
- A kísérleti csoportok tanárai és tanulói is a módszerek újdonságát emelték ki, melyek valószínűleg az idő rövidsége miatt sem hozták meg a várt eredményt.

K5) *A megkérdezett pedagógusok szerint mennyire hangsúlyos az arányossági feladatok formális megoldása a magyarországi iskolákban?*

- A tanári kérdőívek eredményei alapján a pedagógusok inkább az arányossági érvelést helyezik előtérbe a formális megoldásokkal szemben.

K6) *Mekkora hangsúlyt kap az arányossági feladatok formális megoldása a magyarországi diákok körében?*

- A hetedik és kilencedik évfolyamos diákok kevesebb, mint 10%-ára volt jellemző, hogy valamelyik feladattípus megoldása során az arányossági formulát vagy algebrai módszert használt volna.

K7) *Arányossági feladatok megoldása esetén melyik stratégiák használata a leggyakoribb?*

- A hetedik és kilencedik évfolyam esetén is igaz volt, hogy a diákok több, mint fele (bizonyos esetekben több, mint 80%-a) alkalmazza az arányossági érvelést a feladatok megoldásakor. Szinte kivétel nélkül minden esetben ez a stratégia dominált.
- A hetedikes diákok 73%-a (előmérés esetén) és 86%-a (utómérés esetén), valamint a kilencedik évfolyamos diákok 72%-a használta az egységarány stratégiát az egyenes arányossággal kapcsolatos feladat megoldásakor.

K8) *Változnak-e egy tanítási egység alatt a hetedik évfolyamos tanulók által használt stratégiák?*

- Az egyenes arányossággal, fordított arányossággal, arányos osztással és százalékokkal kapcsolatos feladatok jellegét a hetedik évfolyamos elő- és utómérés során nem változtattuk meg számottevően. Ezeknél a feladatoknál a hibátlanul dolgozó diákok legalább 60%-a dolgozott ugyanazzal a stratégiával.
- A hetedik évfolyamos elő- és utómérés során az összetett arányosági és a törtekkel kapcsolatos feladatpárnál a feladat jellegében jelentősebb változás történt. Ezeknél a feladatoknál a hibátlanul dolgozó diákok legfeljebb 25%-a dolgozott ugyanazzal a stratégiával.

K9) Mennyire tekinthetőek rugalmasnak a tanulók a racionális számok különböző reprezentációi között történő áttérés tekintetében?

- A hetedik évfolyamos diákok sikereesebbek a különböző reprezentációk közötti áttérések esetén, eredményességük meghaladja az 50%-ot. A kilencedik évfolyamosok esetén a megjelenítési formák közötti váltás a tanulók kevesebb, mint felénél sikeres.
- Mindkét évfolyam esetén kijelenthető, hogy magasabb arányban mutatnak sikerességet a tört alakból százalék alakba történő áttérés esetén, mint a százalék alakból tört alakba váltás során.

K10) Tapasztalható-e a különböző iskolatípusok hatása a tanulók eredményességének tükrében?

- A feladatok többségénél mind a két évfolyam esetén tapasztalható volt, hogy a gimnáziumi tanulók jobb teljesítményt mutattak a többi iskolatípusba járó diákoknál (ez különösen igaz volt a nyolc- és hatosztályos gimnáziumba járó tanulókra). A sikeresen megoldott feladatok aránya az esetek döntő többségében a szakképző iskolások esetén volt a legalacsonyabb.

SUMMARY

Developing proportional reasoning and solving problems related to proportionality not only plays an important role in students' studies at school, but what they learn in mathematics class is also crucial in their everyday lives. The aim of our research was to investigate teachers' views on the subject, their teaching habits, and the current level of knowledge of seventh- and ninth-grade students, to explore their strategies and their flexibility in using them, focusing on the topics of proportion, proportionality and percentage.

My research was basically structured in four units:

- 1) The questionnaire we used was completed by 106 teachers in Hungary. These were used to map the responding mathematics teachers' thoughts on proportionality.
- 2) In a classroom experiment, we developed a curriculum for a short teaching unit and examined the achievement of the 146 students involved and the strategies they used, based on the analysis of a uniform pre- and post-measurement.
- 3) In a survey of 794 students, we investigated the effectiveness and strategies used by students at the beginning of secondary school to solve proportionality problems.
- 4) Based on the experiences, we designed and implemented a teaching experiment focusing on everyday problems. The results were presented in a case study reflecting on the literature presented and the previous results.

The results show that:

- students show a higher success rate in solving problems related to direct proportionality than in the case of inverse proportionality,

- there is partial evidence that complex proportionality problems and proportional division problems are significantly more challenging for students,
- ninth-grade students do not show significantly more positive results on the same type of tasks than the seventh-grade students,
- for both teachers and students, proportional reasoning takes preference over formal reasoning,
- the use of the unit rate strategy is most common in tasks involving direct proportionality,
- a significant proportion of students persist with the strategy they use, but the change in strategy used is strongly influenced by the nature of the task,
- our assumption that learners are not flexible in switching between different representations of rational numbers is partially supported,
- performance is worse when converting percentages to fractional form than when doing the reverse,
- there are differences in the achievement of pupils of different types of school.

VÁLOGATOTT HIVATKOZÁSOK

- Adey, P., & Csapó, B. (2012). A természettudományos gondolkodás fejlesztése és értékelése. In B. Csapó & G. Szabó (Eds.) *Tartalmi keretek a természettudomány diagnosztikus értékeléséhez* (pp. 17–58.) Nemzeti Tankönyvkiadó.
- Avcu, R., & Avcu, S. (2010). 6th grade students' use of different strategies in solving ratio and proportion problems. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 9, 1277–1281.
<https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2010.12.320>
- Clark, M. R., Berenson, S. B., & Cavey, L. O. (2003). A comparison of ratios and fractions and their roles as tools in proportional reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior*, 22(3), 297–317.
[https://doi.org/10.1016/s0732-3123\(03\)00023-3](https://doi.org/10.1016/s0732-3123(03)00023-3)
- de la Torre, J., Tjoe, H., Rhoads, K., & Lam, D. (2013). Conceptual and theoretical issues in proportional reasoning. *Jornal Internacional De Estudos Em Educação Matemática*, 6(1), 21–38.
<https://doi.org/10.17921/2176-5634.2013v6n1p0p>
- Fisher, L. C. (1988). Strategies used by secondary mathematics teachers to solve proportion problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19(2), 157–168. <https://doi.org/10.2307/749409>
- Lobato, J., Ellis, A. B., & Charles, R. I. (2010). *Developing essential understanding of ratios, proportions, and proportional reasoning for teaching mathematics in grades 6-8*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Tian, J., & Siegler, R. S. (2018). Which type of rational numbers should students learn first? *Educational Psychology Review*, 30(2), 351–372.
<https://doi.org/10.1007/s10648-017-9417-3>

- Tourniaire, F., & Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics*, 16(2), 181–204.
<https://doi.org/10.1007/bf02400937>
- Varga, J., Józsa, K., & Pap-Szigeti, R. (2007). Az arányosságszámítási készség kritériumorientált fejlesztése 7. osztályban. *Magyar Pedagógia*, 107(1), 5–27.

TÁRSSZERZŐI NYILATKOZAT

Kijelentem, hogy ismerem Torma Gábor PhD fokozatra pályázó „Arány, arányosság, százalékszámítás: vizsgálatok a diákok tudásszintjével és stratégiáival kapcsolatban” című disszertációját, amelyet a Szegedi Tudományegyetemre nyújt be. A következő cikkekből felhasznált eredményekben a pályázó hozzájárulása meghatározó volt:

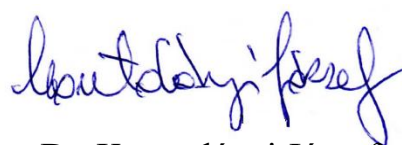
Torma, G., & Kosztolányi, J. (2025). Conversion between different symbolic representations of rational numbers among 9th-grade students. *Teaching Mathematics and Computer Science*, 23(1), 29-45. <https://doi.org/10.5485/TMCS.2025.14624>

Torma, G., & Kosztolányi, J. (2025). Strategies used in solving proportion problems among seventh-grade students. *Teaching Mathematics and Computer Science*, közlésre elfogadva

Torma Gábor hozzájárulása ezekhez a cikkekhez: 50%.

Kijelentem, hogy ezeket az eredményeket nem használtam fel, és nem is fogom felhasználni tudományos fokozat megszerzéséhez.

Szeged, 2025. június 27.



Dr. Kosztolányi József

Szegedi Tudományegyetem
egyetemi docens