

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI ÉS INFORMATIKAI KAR
FIZIKA DOKTORI ISKOLA

Nemradiális pulzációk vizsgálata fedési kettős rendszerekben

PhD értekezés

Bókon András

okleveles fizikus

Témavezető:

Dr. Bíró Imre Barna, tudományos főmunkatárs
SZTE Bajai Obszervatórium

Konzulens:

Dr. Szabó M. Gyula, kutatóprofesszor
ELTE Gothard Asztrofizikai Obszervatórium és Multidisziplináris
Kutatóközpont

Szeged

2024

Tartalomjegyzék

1. Elméleti áttekintés	1
1.1. Pulzáló változócsillagok	1
1.1.1. Fősorozati pulzáló változócsillagok az instabilitási sávban	6
1.2. Fedési kettőscsillagok	9
1.3. Pulzáló változócsillagok fedési kettőscsillagokban	12
1.4. Exobolygók	15
2. Elfedett pulzációk sztochasztikus vizsgálata	20
2.1. A feladat megfogalmazása	20
2.2. A kiválasztott algoritmusok és adaptálásuk	22
2.2.1. Metropolis–Hastings algoritmus	26
2.2.2. Gibbs-mintavételezés	27
2.2.3. Megvalósítás	27
2.3. Tesztek és eredmények	31
2.3.1. Egymódusú tesztek	32
2.3.2. Többmódusú tesztek	36
2.3.3. Nagyteszt	38
2.4. Összefoglalás	39
3. Csillagpulzáció hatásának vizsgálata a tranzit fénygörbére	40
3.1. Irodalmi áttekintés	40
3.2. Vizsgálati módszerek	41
3.2.1. A tranzitok modellezése	42
3.2.2. A pulzációk modellezése	44
3.2.3. Illesztés	46
3.3. Eredmények	50
3.3.1. Egymódusú, radiális pulzációk	50
3.3.2. Többmódusú, nemradiális pulzációk	52

3.4. Következtetések	61
3.5. Összefoglalás	62
4. Nemradiális pulzációk módusazonosítása a KIC 3858884 fedési kettős rendszerben	64
4.1. A KIC 3858884 pulzáló fedési kettős	64
4.2. Mérési adatok és kezelésük	67
4.3. Vizsgálati módszerek	68
4.3.1. Fedési és pulzációs modell szétválasztása	68
4.3.2. Pulzáció forrásának meghatározása	72
4.3.3. Módusazonosítási módszerek fedésmodulált pulzációkra	74
4.4. Eredmények	80
4.4.1. A fénygörbe szétválasztása	80
4.4.2. A pulzációk forrásának a kérdése	82
4.4.3. Módusazonosítás	84
4.5. Diskusszió	92
4.6. Összefoglalás	94
5. Összefoglalás és kitekintés	98
6. Summary	102
Hivatkozások	107
A. Függelék	113

Bevezetés

Földünk éltető légköre, azon kívül, hogy létezésünk biztosítója, az általunk megfigyelhető csillagok fényét is gyönyörködtető sziporkázásra készíti. E látszólagos változás mellett a csillagok többsége saját természetük okán is mutat emberi időskálán megfigyelhető változásokat - a kutatók nagy örömeire. Ugyanis e változások elemzése tette lehetővé a csillagok alapvető fizikai jellemzőinek, belső szerkezetének, hosszú távú fejlődésének feltárását. A változócsillagok vizsgálata tehát kiemelt fontossággal bír. Kis sarkítással azt is mondhatnánk, hogy az állandó fényességű csillagok csak kalibrálásra jók.

A változócsillagok tanulmányozásához a fényességükben és színképi jellemzőikben történő szabályos vagy szabálytalan változások használhatók fel. Egy jól körülhatárolható osztályt alkotnak a *fizikai változók*. Egy részük kitöréses változó: flercsillagok, nóvák, szupernóvák; róluk több szó itt nem hangzik el. Számunkra most a szabályos vagy félszabályos változásokat mutató, *pulzáló változócsillagok* az érdekesek, amelyek a belsejükben gerjesztett sajátrezgéseknek köszönhetően periodikus kitágulást és összehúzódást mutatnak. A bennük zajló csillagrezgések a Földön is tapasztalható földrengésekhez hasonló módon használhatóak fel belső szerkezetük feltérképezésére. Az ezzel foglalkozó *asztroszeizmológia* eszköztárával egyedülálló módon határozható meg egyes fizikai tulajdonságok eloszlása a csillagok belsejében. Erre a feladatra jelenlegi ismereteink szerint nem létezik más módszer. A belső szerkezet ismeretében pedig a csillag fejlődési állapota, kora is meghatározható.

A változócsillagok egy további csoportja szintén alapvető fontossággal bír az asztrofizika számára: a *fedési kettőscsillagok*. A pulzáló változócsillagokkal ellentétben ezek nem asztrofizikai, hanem geometriai okokból mutatnak változásokat: a csillagok kölcsönös elfedődése az összfényességben okoz periodikus csökkenéseket, egymás körüli keringésük pedig a színképükben idézi elő a színképvonalak periodikus eltolódását. Azért nagyon fontosak, mert a fedési fénygörbéik és a radiális sebességgörbéik együttes elemzésével a tagcsillagok olyan abszolút fizikai jellemzői határozhatók meg, mint a tömeg, sugár, felszíni hőmérséklet, és olyan nagy pontossággal, amilyenre egyedülálló csillagoknál – az egy Napot leszámítva – soha nem nyílik lehetőség. Segítségükkel olyan megfigyelési adatbázis gyűlik össze, amely lehetővé teszi az elméleti csillagmodellek validálását és pontosítását. Ezen felül

olyan izgalmas folyamatok is tanulmányozhatóak kettős rendszerekben, mint a csillagok között történő tömegátadás, vagy a pályaparaméterek hosszú távú változása a tömegátadás, árapály-perturbációk, vagy egy harmadik (negyedik, sokadik...) komponens gravitációs perturbációi hatására.

Ezek után az olyan fedési kettősök, amelyeknek egyik tagja pulzáló változó, különösen értékesnek számítanak. Az ilyen rendszerek elemzése során a két jelenség kölcsönös szinergiával segíti a másik pontosabb megértését. Az asztroszeizmológia sikerét a fedési kettős jellegből kinyerhető pontos fizikai jellemzők (elsősorban a tömeg és sugár) segítik elő, míg az asztroszeizmológiai eredményekből a tagsillagok kora és ezáltal a kettős rendszer fejlődési útvonala állapítható meg. További izgalmas lehetőség, hogy a csillagfelszínen levő pulzációs mintázatok összfluxushoz való járulékaik különféle modulációkat szenvednek el a fedések alatt, amikor az egyik csillag árnyéka mintegy letapogatja a másik felszínét. E jelenség sikeres inverziója esetén a felszíni pulzációs mintázatokat rekonstruálhatjuk, ami nagyban megkönnyítheti a teljes asztroszeizmológiához nélkülözhetetlen módusazonosítást. Ugyanakkor ennek a lehetőségnek a kihasználása kihívás állítja a kutatókat: a fedési és pulzációs asztrofizikai jelek maradéktalan különválasztása nagy feladat, új és sajátos, többnyire iteratív módszereket igényel.

Már az egyetemi tanulmányaim elején, az alapképzés alatt ilyen pulzáló komponenset tartalmazó fedési kettőscsillagok modellezésével kezdtem el foglalkozni. Dr. Bíró Imre Barna témavezetése alatt egy olyan ígéretes, világviszonylatban is egyedülálló projektbe kapcsolódtam be, amely az egyes nemradiális módusok rekonstrukcióját, azonosítását tűzte ki a periodikus jelek fedés alatt történő modulációjának a vizsgálata révén. A téma összetettsége és akkori tudásom csak a modellezést tette lehetővé, így alapszakos szakterületemben még csak az ilyen rendszerekben várható modulációkat, és azok fedési geometriától való függését vizsgáltam. Ezek a modellezések azonban megalapozták a későbbi munkához szükséges ismereteket, tapasztalatokat.

Ezt követően a mesterszakos és doktori tanulmányaim alatt a figyelem középpontjába már az űrobszervatóriumok által mért fotometriai adatsorok feldolgozása és ez alapján történő kettősrendszerek részletes elemzése került. Ezeknek a méréseknek az analízise rendkívül összetett, mert megtalálható benne a mérés és űrfotometriai eljárás során keletkezett szabálytalan változás, a fedési kettőscsillagrendszer sztatikus fényességváltozása, a pulzációból származó fényjárulék és nem utolsósorban az utóbbi kettő kapcsolatából származó, fedés alatt történő moduláció is. Mivel az utóbbi alapján történik az (ℓ, m) módusok rekonstrukciója, különleges figyelmet kell szentelni a trend, a fedésből és pulzációból származó jelek szétválasztására.

Mesterszakos tanulmányaim alatt a KIC 3858884 nevű rendszerrel kezdtem el alaposabban foglalkozni, Dr. Bíró Imre Barna útmutatásával. Ehhez a nyilvánosan elérhető, *Kepler* által mért fotometriai adatsorát használtam fel, hogy egy korábbi tanulmány alapján kapott fedési kettősmodellt pontosítsam egy hosszas, ciklikus módszer segítségével. Egy kettősmodellt illesztő programmal, idősor-analízissel és későbbi finomítások során a domináns frekvenciákat tartalmazó adatsorral, amelyet már a kezdeti módusrekonstrukciós munkálatokból hoztam ki. Az akkor elvégzett utolsó ciklus után sikeres módusazonosítást hajtottam végre két módszerrel: a Dinamikus Fedési Tomográfiával (Dynamic Eclipse Mapping) valamint a közvetlen gömbfüggvények illesztésével operáló Direct Fitting eljárásokkal. Végül megvizsgáltam annak a lehetőségét, hogy a pulzáció dőlt tengellyel történik-e, és ha igen, akkor abban az esetben milyen módusszámok jönnek ki. Diplomamunkámban ezeket az előzetes eredményeket mutattam be.

Doktori tanulmányok alatt folytattam e rendszer vizsgálatait, amelynek rögtön az elején két dolog vált világossá. Egyrészt kiderült, hogy a rendszer elemzése a témavezetőm által írt program határait feszegeti, ami miatt a módusok meghatározása sok esetben nem volt gördülékeny. Felmerült továbbá az a gyanú, hogy a rendszernek akár mindkét csillag is pulzálhat, mert jellemzőikben nagyon hasonlítanak egymáshoz. Ez utóbbival kapcsolatban többféle eljárást kíséreltem meg, míg a végső konklúzió az lett, hogy a domináns frekvenciák valószínűleg az eddig elemzett másodkomponensről származnak.

Ugyancsak doktori tanulmányaim során sikerült elnyernem 2018-ban az Új Nemzeti Kiválósági Program keretében egy egyéves ösztöndíjat, amelynek kitűzött programjaként egy új, sztochasztikus eljárásokon alapuló módusazonosítási módszert dolgoztam ki, a gömbfüggvényeket alapul vevő Direct Fitting megközelítés gyors és hatékony alkalmazására. Két népszerű módszerrel (Metropolis-Hastings- valamint Gibbs-mintavételezéssel) saját, egyedi, Python programnyelven írtam meg egy hatékony Markov Láncozott Monte Carlo algoritmust, amely az $Y_\ell^m(\vartheta, \varphi)$ gömbfüggvények paraméterterét ergodikusan bejárva keresi meg azokat a legvalószínűbb módusokat, amelyek modulálódása egy fotometriai adatsor jelét magyarázni képes. A saját fejlesztésű algoritmust teszteltem, ami alapján megbízhatónak bizonyult az algoritmus erre a célra bizonyos korlátok között. Ezt a programot később, az ÚNKP pályázati időszakon kívül a saját általam vizsgált rendszerek elemzése során is felhasználtam, és számos esetben meg is erősítette az egyes meghatározott módusokat egy független módszerrel, így a fedési tomográfiából származó módusazonosítás megbízhatóságát növelte.

2022 szeptemberétől félállásban, majd 2023 januárjától teljes állásban csatlakoztam a HUN-REN Exobolygó Kutatócsoporthoz (ex MTA Exobolygó Kutatócsoport) Dr. Szabó M. Gyula meghívására. Az ő útmutatása alapján lehetőségem volt bekapcsolódni olyan

csillagok vizsgálatába, amelyek körül egy náluk jóval kisebb égitest: exobolygó kering. Az együttműködés gyümölcseként született egy olyan vizsgálat, amely a pulzációk által okozott paraméterkorrelációk vizsgálataként írható le. Megmutattam, hogy ugyan a nemradiális módusok exobolygók általi fedése korántsem okoz olyan mértékű modulációkat, amelyek befolyásolhatnák a tranzit fénygörbéjét, de bizonyos frekvenciájú pulzációk képesek megéveszteni egy illesztő kódot, amelynek eredményeképpen tévesen dőlt exobolygó-pályát jelez az egyébként igazodott tengelyű helyett.

A közös munka a témavezetőmmel természetesen folytatódott, és a folyamatos programfejlesztésnek köszönhetően konzekvens eredmények jöttek ki a 7 évnyi projekt végére. Egy időközben megjelent tanulmány miatt három különböző módszerrel vizsgáltam meg, és tudtam választ adni arra a kérdésre, hogy a vizsgált pulzációk valóban a másodlagos komponensről érkeznek-e. A továbbfejlesztett eszköztár segítségével pedig sikerült azonosítanom a másodkomponensen levő domináns módusok egy részét.

Értekezésem első fejezetében rövid áttekintést nyújtok az általam eddig érintett három témaköréről, azaz a kettőscsillagokról, pulzálóváltozókról és exobolygókról. Ismertetem jelenlegi tudásunkat azokról a fedési kettőscsillagokról, amelyek pulzáló komponenset tartalmaznak. A 2. fejezetben az elfedett pulzációk sztochasztikus vizsgálatának módszerét mutatom be. Ezt követi a csillagpulzáció tranzit fénygörbére gyakorolt hatásáról szóló vizsgálataim ismertetése a 3. fejezetben, majd a KIC 3858884 jelű fedési kettőssel kapcsolatos tudományos munkásságom leírása a 4. fejezetben.

1. fejezet

Elméleti áttekintés

Változócsillagnak nevezzük azokat a csillagokat, amelyeknek valamilyen állapotváltozója emberi időskálán mérve is rövid idő alatt megváltozik. Oka szerint egyik fő típust a belső (intrinsic) változók alkotják, amikor a csillagok belsejében, vagy felszínükön történik valami, a másik pedig a külső (extrinsic) változók, amikor valamilyen geometriai ok hatását figyelhetjük meg. Ilyen például a csillag tengely körüli forgása, vagy az adott csillag megfigyelőhöz viszonyított pozíciójának változása (Eyer és Mowlavi, 2008; Gaia Collaboration és tsai., 2019). Mindkét típus közös sajátossága, hogy megváltoznak a fotometriai és a színképi tulajdonságok, ezeket a változásokat pedig a földi vagy az űrben működő eszközeinkkel észlelhetjük.

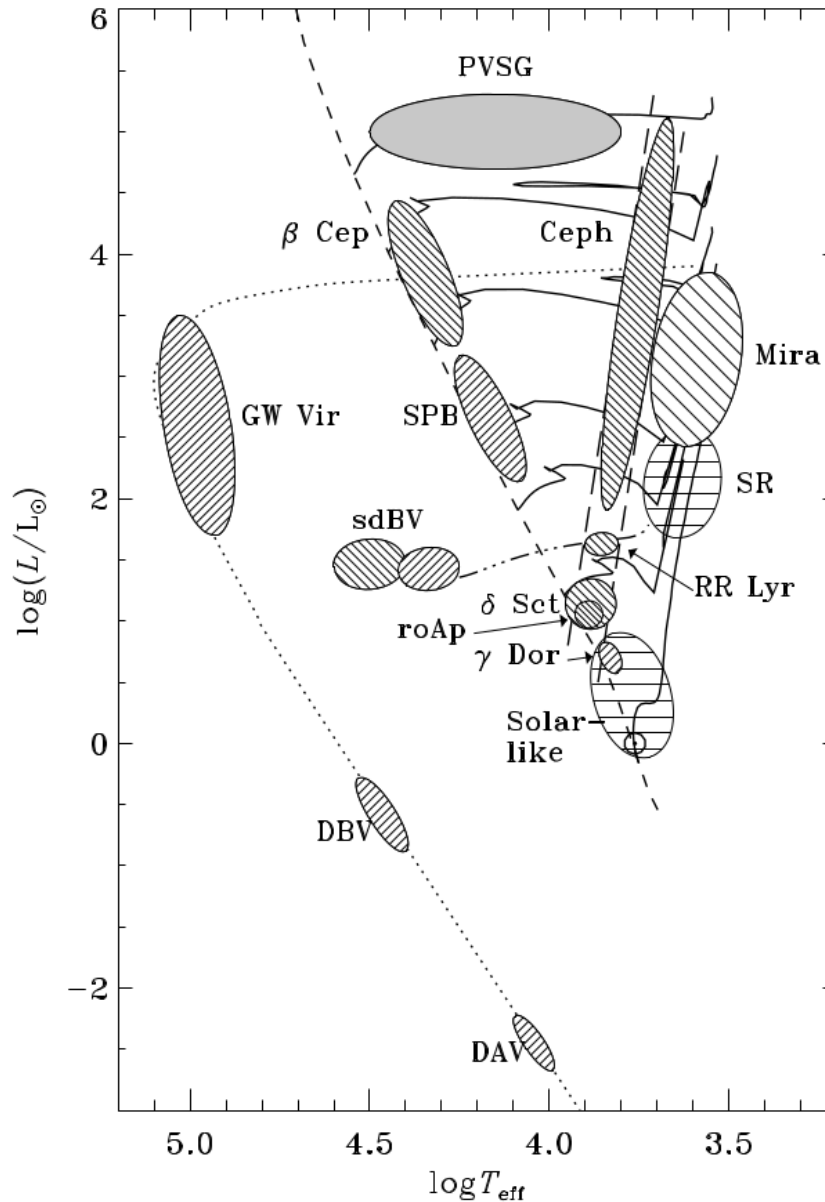
A következő alfejezetekben a doktori munkám szempontjából releváns változócsoportokat, illetve esetenként azok egy típusát fogom ismertetni.

1.1. Pulzáló változócsillagok

Azokat a változócsillagokat, amelyek fényességváltozását a csillag anyagának ütemes kitágulása és összehúzódása okozza, pulzáló változóknak nevezzük. Ez a megfogalmazás természetesen a jelenség jelentős leegyszerűsítése. Ugyan pulzáló változók legfényesebb képviselői, a cefeidák valóban így, egy testként lüktetve pulzálnak, de a csillagrezgések ennél jóval változatosabbak. Az asztrofizikában pulzáció alatt tulajdonképpen az égitest sajátrezgéseinek, oszcillációinak együttes megnyilvánulását értjük.

Ez a belső változás számos csillagfejlődési szakaszban fellép, a fősorozati csillagoktól kezdve a vörös óriásokon át a fehér törpékig. Ezért szokás a változócsillagokat a csillagászat legfontosabb állapotdiagramján, a Hertzsprung–Russell-diagramon (HRD) is ábrázolni (1.1. ábra). A szabályos, periodikus változások időskálája széles tartományt ölel fel a másodperces változásoktól egészen a napos időskáláig, a lüktetés fényességben mérhető

amplitúdói is változatosak lehetnek változótípusonként. Ennek és könnyű megfigyelhetőségének köszönhetően ismerjük már évszázadok óta ezt a változócsoportot. A pulzáló változók izgalmas világába betekintést nyújt Aerts, Christensen-Dalsgaard és Donald W. Kurtz, 2010 „*Asteroseismology*” című monográfiája.



1.1. ábra A pulzáló változók HRD-n. Forrás: Aerts, Christensen-Dalsgaard és Donald W. Kurtz (2010)

A pulzációk mint a csillag sajátrezgései annak belső szerkezetéről hordoznak információt. Az elméleti vizsgálatok szerint az öngerjesztő folyamatok következtében a csillag belsejében

jellemzően kétféle hullám alakul ki. Az egyik általában a csillag központi magjára koncentráldódik, fő visszaható ereje a felhajtóerő (ami az egyensúlyi helyzetből kimozdult anyagot visszatéríti), ezért *gravitáció hajtotta* hullámnak¹, röviden *g-hullámnak* nevezzük. A másik fajta hullám a csillag felszínének közelében jelenik meg, fő visszaható ereje a nyomás, emiatt *nyomás-* vagy *p-hullám* a neve (az angol *pressure wave* kifejezés nyomán). Habár csak a p-rezgések számítanak akusztikus hullámoknak, mégis mindkét rezgés leírható a csillag belsejében *terjedő* hullámként, és ebben a kontextusban a pulzációk annak a térrésznek a fizikai tulajdonságairól – nevezetesen a lokális hangsebesség révén a sűrűségről és nyomásról – szolgáltatnak integrált információt, amelyben terjednek. Fontos kihangsúlyozni, hogy a csillag belső felépítésének feltérképezésére más vizsgálati módszer nem létezik, így a pulzáló változócsillagok megfigyelése és vizsgálata az asztrofizika legfontosabb területeinek egyike.

Mivel a csillagok háromdimenziós, első közelítésben gömbszimmetrikus testként kezelhetők, a csillag alkotóelemeinek idő- és helyfüggő elmozdulásait gömbi koordináta-rendszerben célszerű leírni. A szakirodalomban megszokott jelöléseknek és definícióknak megfelelően a dolgozatban a következő mennyiségeket fogom használni:

- r : középponttól mért távolság;
- ϑ : a forgástengely jobbkékszabály által kijelölt pólusától mért szögtávolság;
- ϕ : a csillagrajzi egyenlítő mentén mért csillagrajzi hosszúság (szögtávolság).

Kimutatható, hogy egyszerű közelítésekkel élve – úgymint: adiabatikus állapotváltozás, gömbszimmetrikus egyensúlyi állapot, valamint kis elmozdulások a csillag méretéhez képes – a pulzáció egyenletei perturbációs közelítésben megoldhatók, és a probléma sajátfüggvényei a *gömbfelületi harmonikus függvények* (röviden: szférikus harmonikusok vagy egyszerűen gömbfüggvények) lesznek. Szerencsére a szükséges közelítések, beleértve a perturbációs közelítést is, a legtöbb nemradiálisan pulzáló csillagra jól teljesülnek; de még az olyan „klasszikus” radiális pulzátorokra is érvényesek maradnak, mint a cefeidák vagy RR Lyrae csillagok, abban az értelemben, hogy noha a felszínükön jelentős elmozdulások történnek, de abban a belső tartományukban, ahova a pulzációjuk energiájának zöme koncentráldódik és amely így elsősorban meghatározza annak tulajdonságait, a relatív elmozdulások szintén nagyon kicsik. Ezért a gömbfüggvények a pulzáló csillagok széles körében jó közelítést jelentenek. (Ez alól az óriáscsillagok félszabályos pulzációi minden bizonnyal kivételt jelentenek.)

¹Nem tévesztendő össze az általános relativitáselmélet gravitációs hullámaival.

Így a csillag anyagának pulzációk okozta elmozdulása az (r, ϑ, ϕ) irányokban az alábbi kifejezésekkel írható le:

$$\xi_r(r, \vartheta, \phi, t) = a(r) Y_\ell^m(\vartheta, \phi) \exp(-i2\pi\nu t), \quad (1.1)$$

$$\xi_\vartheta(r, \vartheta, \phi, t) = b(r) \frac{\partial Y_\ell^m(\vartheta, \phi)}{\partial \vartheta} \exp(-i2\pi\nu t), \quad (1.2)$$

$$\xi_\phi(r, \vartheta, \phi, t) = \frac{b(r)}{\sin \vartheta} \frac{\partial Y_\ell^m(\vartheta, \phi)}{\partial \phi} \exp(-i2\pi\nu t), \quad (1.3)$$

A fenti összefüggésekben a ξ_r a radiális (függőleges), ξ_ϑ és ξ_ϕ pedig a tangenciális (vízszintes) elmozdulást jelölik, $a(r)$ és $b(r)$ az amplitúdókat, melyek a csillag belsejében a sugár függvényei, ν az oszcillációs frekvenciát, $Y_\ell^m(\vartheta, \phi)$ pedig a gömbfelületi, rövidebben *szférikus* harmonikusokat adja meg:

$$Y_\ell^m(\vartheta, \phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_\ell^m(\cos \vartheta) \exp(im\phi), \quad (1.4)$$

Az egyenletben ℓ a *módusfokszám*, egy pozitív egész szám ($\ell \geq 0$), m az *azimutális* rend, egy egész szám, értéke $-\ell$ -től nullán át ℓ -ig terjedhet ($|m| \leq \ell$). $P_\ell^m(\cos \vartheta)$ a Legendre-polinomok, amelyeknek alakja

$$P_\ell^m(\cos \vartheta) = \frac{1}{2^\ell \ell!} (1 - \cos^2 \vartheta)^{m/2} \frac{d^{\ell+m}}{d \cos^{\ell+m} \vartheta} (\cos^2 \vartheta - 1)^\ell \quad (1.5)$$

Az (ℓ, m) számpáros a pulzációs módusok felszíni mintázatának határozza meg. Ezek a mintázatok határozzák meg a megfigyelhető pulzációk tulajdonságait, amelyekből így elsősorban ezeket a módusszámokat lehet meghatározni.

A pulzációk, mint a csillag belsejében végighaladó rezgések, oszcilláló mozgásba hozzák a csillag anyagát, amely periodikusan összenyomódik és ritkul, helyről helyre változó amplitúdóval. Ennek következtében a helyi nyomás és ezért a hőmérséklet, következőképpen pedig a sugárzás helyi mértéke is periodikusan változik, amelynek helyfüggését ugyancsak a fenti, gömbfüggvényeket tartalmazó kifejezések határozzák meg. Így az egyes pulzációs módusokhoz tartozó felszíni intenzitásváltozás-mintázat is egy-egy gömbfüggvénnyel írható le.

A csillagok rezgési módusai közül a legegyszerűbb az $\ell = 0$ esetén fellépő radiális módus. Ekkor a csillag egésze azonos ütemben tágul és összehúzódik, felmelegszik és lehűl. Ilyen módon pulzál a legtöbb cefeida típusú változó, illetve az RR Lyrae csillagok is.

Amennyiben $\ell \neq 0$, akkor a tekintett pulzációs módus nemradiális. Nemradiális módusok kis amplitúdójú pulzációnál lépnek fel. Az (ℓ, m) módusszámok a csillag felszínén végigfutó *csomóvonalak* számát és elhelyezkedését, topológiáját kódolják. Összesen ℓ csomóvonal van, amelyek közül m darab meridionális „függőleges”, áthalad a pulzációs tengelyen, a többi pedig arra merőlegesen osztja fel a felszínt az egyenlítővel párhuzamos zónákra. A csomóvonalak mentén a pulzáció amplitúdója nulla. Az ℓ 1, 2 és 3 értékeinek megfelelően a nemradiális módusokat dipólusnak, kvadrupólusnak, illetve oktopólusnak nevezzük, amennyiben az m azimutális rendszám zérus. Általánosan az $m = 0$ módusok *zonálisak*, mert csak zónákra osztó csomóvonalak vannak (ℓ darab). Az $\ell = |m|$ módusokat *szektorálisnak* nevezik, mert akkor mind az ℓ darab csomóvonal szektorokra osztja a csillagfelszínt. A köztes, $\ell \neq |m|$ eseteknek *tesszerális* módus a neve.

A pulzációkat az ℓ fokszám és m azimutális rendszám mellett még egy n *radiális* rendszám is jellemzi. Ez az $a(r)$ és $b(r)$ amplitúdók r sugár szerinti zérushelyeinek, vagyis a csillag belsejében levő koncentrikus csomófelületek száma. A radiális rendszám a felszíni pulzációs mintázatból természetesen nem állapítható meg. Nemradiális módusok viszont csak $n \geq 1$ esetén léteznek, annyi tehát tudható, hogy olyankor a csillag belsejében van legalább egy csomófelület.

A csomófelületek és csomóvonalak által határolt szomszédos térfogatelemekben egymáshoz képest ellenfázisban történik az anyag mozgása valamint a fényességváltozás is: ha az egyik összehúzódik, a másik tágul; ha az egyik halványul, a másik fényesedik (habár az összehúzódás és a felfényesedés általában nem szinkronban történik). Ez a gömbfüggvények és az időfüggés matematikai alakjából következik.

A legtöbb pulzáló csillagnál a pulzációs tengely egybeesik a forgástengellyel. A fő kivételek a gyorsan oszcilláló Ap csillagok, ahol a pulzációs tengely a mágneses tengellyel egyezik meg, amely a forgástengellyel szöget zár be.

Egyszerűsített scenárió szerint a csillag belsejében terjedő hullámokkal leírható nemradiális pulzációk a felszíntől lefele haladva különböző mértékben hajlanak el a csillag középpontjától. A mélységgel együtt változó lokális hangsebesség következtében ezek a nemcentrális hullámok refrakciót szenvednek, hasonlóan a fénytöréshez, ezért egy bizonyos mélység elérése után visszahajlanak a felszín felé. Magáról a felszínről a teljes visszaverődés jelenségéhez hasonlóan verődnek vissza, a hangsebesség hirtelen nullára csökkenése miatt. A konvekciós zónákat azonban a pulzációk elkerülik, azokban az anyag kaotikus mozgása miatt nem tudnak fennmaradni, határukra élve elhalnak. Egy konvektív köpeny így például lénye-

gében elszigetelt egymástól a belső g-hullámokat és a felszínközeli p-hullámokat. Mindezek következménye, hogy a különböző módusszámú pulzációk a csillag belsejének különböző régióiban terjednek, tapogatóják le azt. Egy-egy módus frekvenciája a hangsebességnek a hullám által bejárt út menti integráljától függ. Megfelelően sok módus frekvenciájának és kvantumszámainak azonosításával a hangsebesség sugár szerinti függése feltérképezhető, alkalmas inverziós matematikai módszerek segítségével. A hangsebességből pedig a sűrűség- és nyomásviszonyok sugár szerinti függése számítható. Ily módon a pulzációk elemzése utat jelent a csillag belső tulajdonságainak feltérképezéséhez. A csillagászatnak külön ága, az *asztroszeizmológia* foglalkozik ezzel.

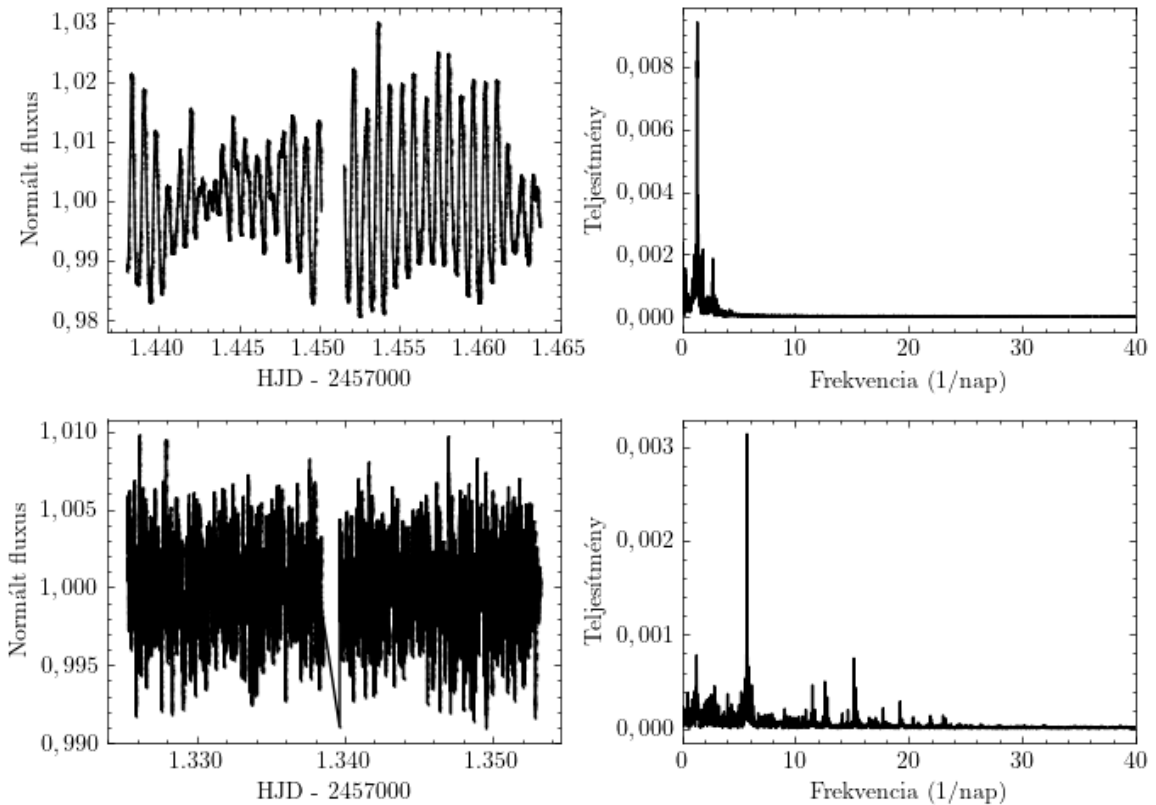
Az imént vázolt asztroszeizmológiai inverzió azonban csak a pulzációk módusszámainak azonosítása esetén működik. (A frekvenciák idősor-analízissel könnyebben megállapíthatóak.) Sajnálatos módon jelenleg nem rendelkezünk olyan technológiával, hogy a távoli, egyedülálló csillagok felszínét felbontsuk, ez egyedül a Nap esetén lehetséges a közelségének köszönhetően. Így a csomóvonalak hiánya miatt az (ℓ, m) módusok *közvetlen* meghatározása nem lehetséges. A nemradiális módusok jelenléte miatt bizonyos esetekben adott frekvenciájú rezgések nem detektálhatóak a *részleges kioltás* (angolul partial cancellation) miatt. Mivel a műszereinkkel az intenzitás helyett annak a teljes korongra integrált értékét, a fluxust mérjük, az ellentétes fázisban lévő területek járuléka kioltathatják egymást. Ennek mértéke nemcsak a módustól függ, hanem a csillag megfigyelőhöz viszonyított forgási pozíciójától és a szélsőtétedési törvénytől is. Egyedülálló csillagokra emiatt a módusok azonosítása csak közvetett módon lehetséges, például többszín-fotometria alkalmazásával (Garrido, 2000), vagy nagy idő- és hullámhosszfelbontású spektrumok alapján a színekvonalprofilok részletes analizálásával (Gies és Kullavanijaya, 1988), továbbá meglehetősen részletes csillagmodellek bevonásával. Ezek a módszerek általában csak az ℓ fokszámot képesek meghatározni. Egyes esetekben a frekvenciaspektrum is elegendő információt tartalmaz a módusazonosításhoz. A Nap típusú csillagok esetében például az ún. *aszimptotikus közelítésben* a pulzáció frekvenciája elég szabályos mértékben függ annak módusszámaitól, hogy az ebből adódó szabályos, fésűszerű csúcsokkal tűzdelt frekvenciaspektrumból az egyedi módusszámok beazonosíthatóak. A legtöbb csillagra azonban a pulzációs spektrum jóval szabálytalanabb, így az (ℓ, m) módusszámok hiányában az adott módus frekvenciája csupán részleges információt nyújt a későbbi modellalkotáshoz. (Ennek az osztálynak a δ Scuti típusú csillagok a leghírhedtebb képviselői.)

1.1.1. Fősorozati pulzáló változócsillagok az instabilitási sávban

Az 1.1. ábrán mutatott HRD-n jól látható, hogy majdnem minden csillagfejlődési állapotban megtalálhatóak a pulzáló változók. Ami még inkább szembeötlő, hogy van egy keskeny sáv,

amelynek mentén a pulzáló változócsillagok sűrűsége jóval nagyobb. Ez az 1.1. ábrán szaggatott vonalakkal határolt régiót takarja, és klasszikus instabilitási sávnak (angolul *classical instability strip*) nevezzük. Az ebben a sávban előforduló pulzációt egy, a csillag belsejében zajló termikus folyamat okozza, amelynek hajtóereje a He II részleges ionizációjával függ össze. Ezt hívják κ -mechanizmusnak. Röviden, az anyag periodikus felforrósodása-lehűlése során az ionizációs folyamatok lényegében energiát tárolnak el, ami a rekombináció során felszabadul, és ha ez megfelelő ütemben történik, akkor képes fenntartani a pulzációt.

A klasszikus instabilitási sávon belül helyezkednek el a klasszikus pulzátorok: a cefeidák és RR Lyrae csillagok az óriáságon, a fősorozat közelében pedig a γ Dor, δ Sct típusú változók, valamint az úgynevezett *roAp* (*rapidly oscillating Ap*, azaz gyorsan oszcilláló, pekuliáris A színképtípusú) csillagok. Ezek mindegyikéről külön tanulmányt lehetne írni. Itt csak a legalapvetőbb, és a későbbiek szempontjából fontos tudnivalókra szorítokozom.



1.2. ábra Példafénygörbe és hozzá tartozó Lomb–Scargle-periodogram a γ Dor és δ Sct/ γ Dor hibrid változótípus illusztrációjaként. A felső sor a névadó γ Dor változócsillagról készült tényleges *TESS*-mérés a 3. szektorból, az alsó sor pedig az α Pic változócsillagról készült az 1. *TESS*-szektorból.

A δ Sct csillagok A2–F2 színképtípusúak ($M \sim 1,5 - 2,5M_{\odot}$, $T_{\text{eff}} \sim 6300 - 8600$ K), amelyeknek periódusideje jellemzően néhány perctől néhány óráig terjed, a fényességválto-

zás amplitúdója pedig néhány tized magnitúdó és a millimagnitúdó között van. Változatos szerkezetű pulzációt mutatnak, a ritka egymódusú csillagoktól a több száz, $0\text{--}80\text{ d}^{-1}$ frekvenciájú módusban pulzáló csillagok is megtalálhatók köztük. Utóbbiakra – ilyen például az FG Vir (Breger, Zima és tsai., 1998) – elsőként az 1990-es években figyeltek fel hosszú fotometriai mérési kampányok során. Ez motiválta az asztroszeizmológusokat arra, hogy minél szélesebb körű együttműködéseket építsenek ki dedikáltan a δ Sct típusú változócsillagok minél hosszabb ideig történő megfigyelésére. Ilyen volt például a DSN (Delta Scuti Network; Zima, 1997). A hosszú megfigyelési ablak tette lehetővé azt, hogy az akkoriban igen részletes felbontásúnak számító Fourier-spektrumokban több tucat csúcsot azonosítsanak. Dupret, Grigahcène és tsai. (2005) előre megmutatta, hogy előfordulhatnak olyan csillagok, amelyekben a p- mellett a g-módusok is megjelennek, ezért az így létrejövő kevert módusú pulzációk vizsgálata kiemelten fontos lehet az asztroszeizmológia számára. A több száz frekvencia másik jellemző oka az, hogy ezek a csillagok általában gyorsan forognak, aminek hatására az adott ℓ módusfokszámú frekvencia $2\ell + 1$ csúcsra hasad fel.

A Kepler-misszió során végzett mérésekből az derült ki, hogy a δ Sct-ra jellemző hőmérsékleti tartományban lévő csillagoknak csak kb. 41%-a mutat pulzációt a 20 ppm-es szintig² (Uytterhoeven és tsai., 2011). Murphy, Bedding, Niemczura és tsai. (2015) nagy felbontású spektroszkópiai vizsgálatok segítségével megmutatták, hogy a pulzációt nem mutató csillagok többségében jellegzetes fémvonalak figyelhetők meg (Am típusú csillagok). Ilyen esetekben az az elfogadott feltételezés, hogy nincsen, vagy jóval kevesebb hélium van a κ -mechanizmus létrejöttéhez. A pulzáló változók hiányának másik lehetséges oka az, hogy az észlelt csillagoknak van egy beleolvadó, felbontatlan társ csillaga, és az „összemérésük” miatt a valósnál magasabb a meghatározott hőmérséklet.

A γ Dor osztályba tartozó csillagok színképtípusa késői A és korai F közötti ($M \sim 1,5\text{--}1,8 M_{\odot}$), pulzációjuk g-módusban történik jellemzően $0,5\text{--}3$ nap periódusidővel. A viszonylag kis amplitúdója és rövid periódusa miatt csak az elmúlt évtizedekben detektálták magának a névadó csillagnak a pulzációját, ezt elsőként Cousins, Caldwell és Menzies (1989), míg változóosztályként Balona, Krisciunas és Cousins (1994) írta le. Az osztály hajtómechanizmusának a konvektív blokkolást (Guzik és tsai., 2000) tekintik, ami a csillag belsejéből érkező sugárzási fluxus konvektív réteg miatti modulációja.

A Kepler-misszió során viszont teljesen átalakult a képünk a γ Dor változótípusról és annak δ Sct-val való kapcsolatáról. Már 2009 előtt is ismert volt néhány olyan csillag, amely mindkét változótípus jegyeit mutatta (Handler, Balona és tsai., 2002; Henry és Fekel, 2005; Rowe és tsai., 2006). A HRD-n a két típus egy keskeny átfedést mutat, ami miatt ugyan

²ppm = parts per million, azaz 1 milliommód relatív zaj; magnitúdóskálán a 20 ppm 0,02 millimagnitúdónak felel meg. A legprecízebb földfelszíni mérések pontossága 1 millimagnitúdó nagyságrendű.

várható volt ezen hibrid csillagok létezése, a tényleges felfedezésük kihívás elé állította a kutatókat a teljesen eltérő gerjesztő mechanizmus miatt. A *Kepler* méréseiből viszont kiderült, hogy számos más csillag is mutat hibrid jelleget a δ Sct és a γ Dor tartományain belül (Uytterhoeven és tsai., 2011). Ugyan maradtak tiszta γ Dor pulzációt mutató csillagok, de nagyon kevés tisztán δ Sct csillag ismert, mintha minden δ Sct típus valójában hibrid lenne. Másrészt számos γ Dor változóról kiderült, hogy mutat ún. r-módusokat, amelyek a Rossby-hullámok következtében alakulnak ki. A Rossby-hullámok a csillag forgásából adódó toroidális és a Coriolis-erőből eredő szférikus mozgás csatolásából alakulnak ki (Saio és tsai., 2018).

A roAp csillagok gyorsan oszcilláló Ap színtípusú csillagok, amelyek magas felhangú magneto-akusztikus módusban pulzálnak 4,7 – 25,8 perc periódusidővel. Jellemzően dőlt pulzációs tengelyűek.

1.2. Fedési kettőscsillagok

Egy másik, az asztrofizikában szintén jelentős szerepet játszó osztály a fedési kettőscsillagok csoportja. Itt a fényességváltozás oka geometriai, mert a két (vagy több) csillagból álló rendszer tagjainak egymáshoz viszonyított helyzete a megfigyelő szemszögéből olyan, hogy azok periodikusan váltakozva elfedik egymást. A csillagok több mint felének van legalább egy társa (Duchêne és Kraus, 2013; Guszejnov, Hopkins és Krumholz, 2017), viszont ezek pályásíkja nem mindig esik közel a megfigyelő látóirányához. A fedés feltétele a következő egyenlettel fejezhető ki.

$$R_1 + R_2 \geq a \sin i, \quad (1.6)$$

ahol R_1 és R_2 a két csillag sugara, a a távolságuk a kérdéses együttállás pillanatában (excentrikus pályákra is gondolva), i pedig a kettőscsillag pályásíkja és a látóirány normálisa által bezárt szög, amit a pályahajlás szögének vagy inklinációnak nevezünk. A kettőscsillagok komponenseinek a rendszer tömegközéppontja körüli pályája leírásához a mechanika törvényeinek megfelelően összesen hat paramétert kell megadni. Ezek:

a a pálya fél-nagy tengelye;

e a pálya elnyúltságát meghatározó excentricitás;

ω a pericentrum hossza, a pericentrum iránya és a felszálló csomó közötti szög a keringési síkban mérve;

i az inklináció, a pályahajlás szöge, 90 fok esetén a megfigyelő a pályasíkban van és a fedések centrálisak;

Ω a felszálló csomó hossza a pályasík normálisa és a látóirány (alapsík) által bezárt szög;

τ a pericentrumon való valamelyik áthaladás időpontja.

Az egyes fedések a tipikus megfigyelési időablakok alatt periodikusan, egyenlő időközönként következnek be ezekben a rendszerekben, emiatt a megfigyeléseket szokás keringési időre feltekerve ábrázolni úgy, hogy a P periódus legyen a mértékegység és a t_0 időpontban történő egyik főfedésnél legyen a nulla érték. Ennek érdekében definiálható a keringési (pontosabban fotometriai keringési) fázis a P és t_0 ismeretében, amit az alábbi összefüggés ad meg:

$$\Phi(t) = \left\{ \frac{t - t_0}{P} \right\} \quad (1.7)$$

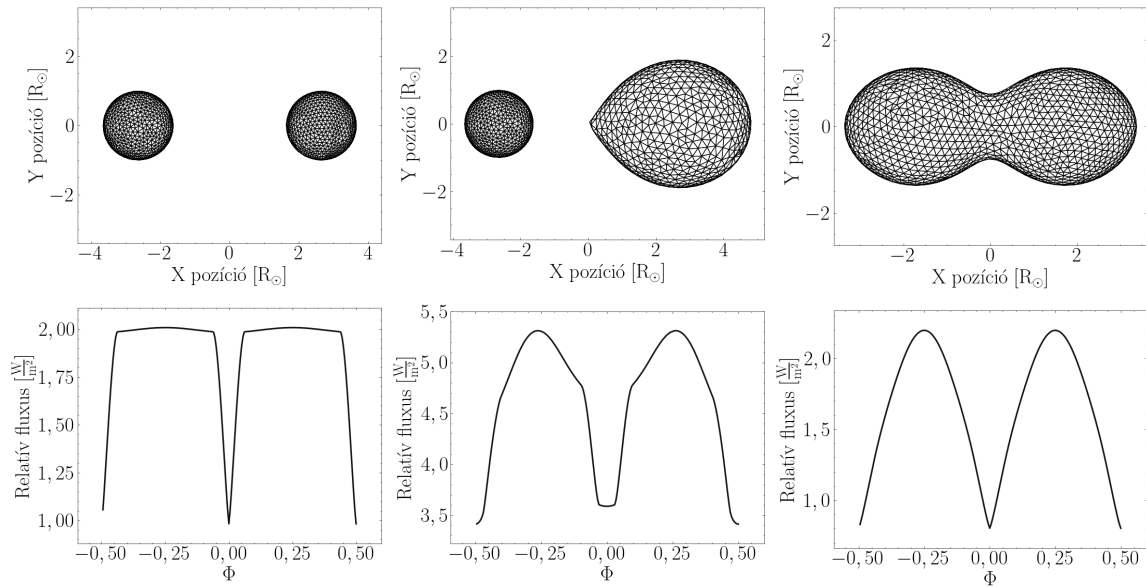
Itt a $\{ \}$ kapcsos zárójel a törtrész-függvényt jelenti. A dolgozat hátralévő részében következetesen használom majd a háromféle írásképű görög betűt: a ϕ jelöli a csillagrajzi hosszúságot, a φ a pulzációt jellemző kezdőfázist, az újonnan bevezetett Φ pedig a keringési vagy fotometriai fázist.

A fedés okozta fényességváltozás alakja (lásd 1.3. ábra alsó paneljei) alapján a fedési kettősöket az alábbi empirikus csoportokba sorolhatjuk:

- Algol (jelölése EA) típusúak esetén a fedésen kívüli fényességváltozás gyakorlatilag elhanyagolható, jellemzően a hosszú ($P > 9$ nap) keringési idejű rendszereknél tapasztalható.
- A β Lyrae (jelölése EB) típusú fedési kettőscsillagoknál már számottevő a változás, de még elkülöníthetők a fedések szakaszai.
- A W Uma (EW) csoportjába tartozóknál viszont pusztán a fénygörbe alapján nehéz körülhatárolni az egyes fedéseket, ezek jellemzően rövid periódusú ($P < 2$ nap) fedési kettősök.

Egy másik, morfológiai osztályozási módszer alapja a csillag alakját meghatározó gravitációs ekvipotenciális felületek, az ún. Roche-lebeny kitöltöttsége (lásd 1.3. ábra felső paneljei). Ez leginkább a szoros fedési kettősök esetében fontos osztályozás. A következő csoportok léteznek:

- *Elváló rendszerek*: amennyiben egyik csillag sem tölti ki a Roche-lebenyét. Ebben az esetben a két csillag egymás fejlődését nem befolyásolja.



1.3. ábra A fedési kettőscsillagok típusait szemléltető ábra. Oszloponként látható egy-egy szimulált konfiguráció a két csillagkomponensről rácsháló formájában a $\Phi = 0,25$ -ös keringési fázisban, illetve egy-egy modell fénygörbe az Algol, β Lyrae és W Uma típusú rendszerekre.

- *Félig érintkező rendszerek:* ha az egyik csillag kitölti a Roche-lebenyét. Ilyenkor ez a komponens anyagot veszít az L_1 Lagrange-ponton keresztül.
- *(Túl)érintkező rendszerek:* amennyiben mindkét csillag kitölti a Roche-lebenyét. Ilyenkor a két csillag közös légkörrel rendelkezik, és megegyezik a felszíni hőmérsékletük.

A két osztályozási séma között egyértelmű kapcsolat van, amit az 1.3. ábra elrendezése is kihangsúlyoz.

A fedés okozta fényességcsökkenés morfológiai alakját befolyásolja még a szélsötétedés jelensége, ami egy optikai jelenség minden csillag korongján. Látszólag az égitest közepe fényesebb, mint a széle, amit a csillagok légköri átlátszóságát jellemző optikai mélység és a csillag gömb alakja eredményez. A látóirányban mélyebbre lát a megfigyelő, míg a korong széle felé közeledve a görbület miatt az egyre magasabb légköri rétegekből érkező fotonokat látja, amelyek hűvösebbek a központi régióknál. A Stefan–Boltzman törvény értelmében így a felszíni intenzitás is csökken a korong széle felé haladva, mivel az függ a hőmérséklettől. (A csillagok spektrális energiaeloszlása első közelítésben a feketetest-sugárzással írható le.) Mivel a csillag atmoszférájának közvetlen modellezése fénygörbe-illesztéskor nehéz, empirikus szélsötétedési törvényeket írtak fel, amelyek közül a négyzetgyökös és kvadratikuss

szélsötétedés rendre az alábbiak:

$$I_{\mu} = I_0 (1 - c_1 (1 - \mu) - c_2 (1 - \sqrt{\mu})) \quad (1.8)$$

$$I_{\mu} = I_0 (1 - c_1 (1 - \mu) - c_2 (1 - \mu^2)) \quad (1.9)$$

A fenti egyenletekben $\mu = \cos \gamma$, ahol γ a látóirány és a megfigyelt felületelem normálisa által bezárt szög, c_1 a lineáris, c_2 a nemlineáris együttható. Ezeket az együtthatókat adott T_{eff} effektív hőmérsékletre jellemzően szélsötétedési táblázatokból lehet kikeresni, amelyeket például űrobszervatóriumokra általában előzetesen elkészítenek. Számos esetben viszont előnyös lehet ezen együtthatókra is illesztést végezni.

Természetesen a fedés okozta fényességváltozáson felül további kisebb fényességváltozás is bekövetkezhet asztrofizikai, dinamikai vagy geometriai okok miatt, amit a modellezéskor figyelembe kell venni. Ezek mindegyikére területi okokból nincs módom kitérni, csak azokat fogom részletezni, amelyek a bemutatandó kutatómunkám során előfordultak.

1.3. Pulzáló változócsillagok fedési kettőscsillagokban

Számos olyan fedési kettősrendszert találtak, amelyben az egyik komponens pulzáló. Már a „Kepler-korszak” előtt is ismertek ilyen rendszereket, csak a földi obszervatóriumok korlátai nem tették lehetővé folyamatos megfigyelésüket, a mérési pontosságról nem is beszélve; ezért sok tulajdonságuk rejtve maradt.

Az első olyan katalógust, amely a kettőscsillagokban található pulzáló csillagokat gyűjtötte össze, Szatmáry (1990) tette közzé. A korai tanulmányban számos változótípus mellett δ Sct típusú változók is szerepelnek, 34 kettős vagy fedési kettős rendszerben. Az évek előrehaladtával az ilyen típusú ismert rendszerek száma fokozatosan növekedett, ezek többsége klasszikus pulzátorokat: cefeidákat, RR Lyrae, valamint δ Sct változókat tartalmaz. A Rodríguez, López-González és López de Coca (2000) munkájában bemutatott δ Sct katalógusban közölt csillagok mintegy 14 %-a, 86 darab található kettős vagy többes rendszerben, amelyek közül 9 fedési kettősrendszer (Rodríguez és Breger, 2001). Az űrmissziók megjelenésével az előző fejezetekben olvasottakhoz hasonlóan ugrásszerűen növekedett pulzáló kettősök száma is. A Zhou (2014) katalógusában 515 pulzáló kettős volt ismert 2014 októberéig, több mint felük fedési kettősrendszerben, 96 darab pedig jól elváló Algol rendszerben. Utóbbiakat oszcilláló Algol típusúakként is ismerik („oscillating Algol-types” angolul, ‘oEA’; Mkrichian és tsai., 2002) A későbbiekben Liakos és Niarchos (2017) 199 darab δ Sct pulzátor listázott kettősökben; Gaulme és Guzik (2019) 303 olyan rendszert – köztük 163 újat – azonosított a

Kepler fénygörbékben, amelyekben δ Sct, γ Dor, vörös óriások vagy árapálykeltett pulzáló változók voltak találhatóak.

Az ilyen rendszerek kiemelt jelentőségűek az asztroszeizmológiában, mert segítségükkel kalibrálható, pontosítható például a tömeg asztroszeizmológiai meghatározási módszere, ez pedig az egyedülálló pulzáló változók esetében is segíti a tömeg meghatározását.

Cserébe az asztroszeizmológiai inverziók szolgáltatva belső szerkezet a kettős paramétereivel együtt a rendszer fejlődési állapotát határozza meg.

A fentiekben túl a pulzáló csillagot tartalmazó – nem feltétlenül fedési – kettősök kitűnő lehetőségeket nyújtanak különböző asztrodinamikai hatásokat megfigyelésére, vizsgálatára. A szoros kettőscsillagoknál fellépő anyagátadás hatását tárhatjuk fel a már említett oEA típusú változóknál (Mkrichian és tsai., 2002), például a pulzáció karakterisztikája szekuláris változásainak a megfigyelése révén. Az oszcillációkra kifejtett árapályhatás is egy izgalmas kérdéskör, amelynek mértékétől függően beszélhetünk *árapály-perturbált* (Reyniers és Smeyers, 2003b; Reyniers és Smeyers, 2003a) illetve *árapály gerjesztette* pulzációkról (pl. Guo és tsai., 2019); ezek extrém példái az úgynevezett *szívdobbanás-csillagok* (*heartbeat stars* Welsh és tsai., 2011), melyek jellegzetes EKG-szerű fénygörbéjükről kapták a nevüket. Szélsőséges esetekben az árapály-erő a pulzációs tengelyt a másik csillag irányába döntheti, ilyenkor egy roAp-szerű, körbeforgó szimmetriatengelyhez kötött pulzációt tanulmányozhatunk (*árapály-döntötte* pulzációk, Johnston és tsai., 2023); vagy pedig akár maga a pulzáció is *árapály-csapdába* kerülhet oly módon, hogy a csillagnak csak a kísérő felé eső oldala mutat pulzációkat (Fuller és tsai., 2020; Handler, D. W. Kurtz és tsai., 2020; Shi és tsai., 2021).

Fedési kettősökben levő pulzáló csillagok esetén egy érdekes módusazonosítási lehetőség is felmerül. A fedésen kívüli, első közelítésben közel állandó fényességhez hozzáadódik a pulzáló csillag harmonikus jele az (ℓ, m) módusszámtól függetlenül, ami gyakorlatilag egy önálló csillag pulzációja is lehetne. Felbontatlan csillagkorong esetén ugyanis csak a rá kiintegrált fluxus mérhető. A fedések ideje alatt viszont a kiintegrálandó korongrészek változnak, a korábbi szimmetria megtörik. Ez a különböző nemradiális módusokra igen változatos amplitúdó- és kezdőfázis-változásokat eredményez. Jellemük *egyrészt* függ a fedés időbeli lefutását meghatározó geometriai paramétereiktől, nevezetesen az r_1 , r_2 relatív csillagsugaraktól és az i inklinációtól (valamint excentrikus pálya esetén annak e lapultságától és az irányultságot meghatározó ω -tól is, *másodsorban* pedig a felszíni pulzációs mintázattól, amit az (ℓ, m) módusszámok valamint a pulzációs tengely iránya határoznak meg. Az 1.4. ábra három pulzációs módusra mutat be numerikusan generált elméleti modulált pulzációs jeleket.

Ismert geometriai konfiguráció esetén a modulált pulzációk a pulzációs módusokról hordoznak értékes információt. Ha sikerül kinyerni azokat, akkor asztroszeizmológiai mo-

dellezéstől független módon lehet pulzációs módusokat azonosítani. Ennek megvalósítására változatos módszerek születtek:

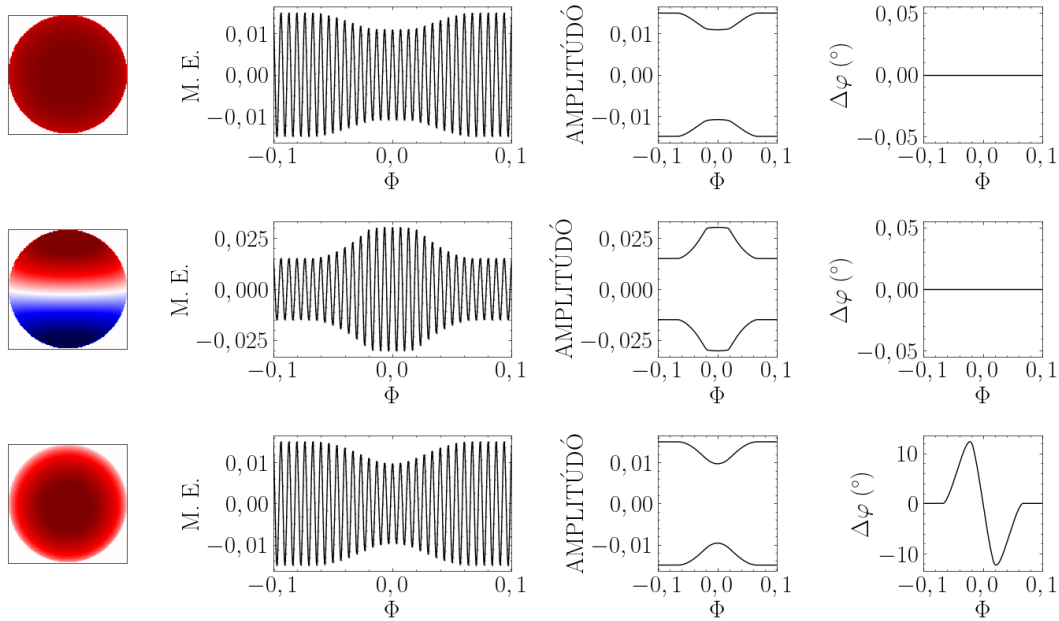
- térbeli szűrés – az amplitúdó- és kezdőfázismodulációk közvetlen illesztése az egyes módusok okozta elméleti modulációkkal (*spatial filtration*, Mkrichian és tsai., 2002; Gamarova és tsai., 2003);
- képrekonstrukciós megközelítés – egy regularizációs inverz módszer modelfüggetlen mintázatok rekonstrukciójára (*Dynamic Eclipse Mapping*, I. B. Bíró és Nuspl, 2011);
- pulzációs minták illesztése gömbharmonikus függvényekkel (*Direct Fitting*, I. B. Bíró, 2013).

E módszerek sikere azon múlik, hogy az adott geometriai konfiguráció esetén a különféle módusok modulációi kellően elkülönülnek-e egymástól, azaz hogy az elrendezés kellő *módusszelektivitást* tesz-e lehetővé.

Ennek modellezését részletesen bemutattam a 2015-ben készült BSc szakdolgozatomban, amelyben rámutattam, hogy akkor lesz ideális az amplitúdó- és fázisvariációk elkülönülése, ha a pulzáló csillagot elfedő csillagtárs a nagyobb sugarú, a fedések pedig kellően nagy mértékűek, de nem teljeseek. Az 1.4. ábra is abból a tanulmányból származik.) Ezek a feltételek sajnos leszűkítik az ilyen analízisekre érdemes fedési kettősök körét.

A fenti módszerek alkalmazhatóságához nagy pontosságú és nagy időfelbontású (sűrű mintavételezésű) adatsorok kellenek, amilyeneket a földfelszíni mérések nem tudnak szolgáltatni. Öröndetes módon azonban az elmúlt évtizedtől kezdődően számos olyan űr-obszervatóriumot üzemelttek be, amelyek – a tranzitáló exobolygók keresése mellett – a különféle változócsillagok, elsősorban pulzáló változók mérését is célul tűzték ki. Ezek a csúcscsillagok extrém pontos, jó időfelbontású és hosszú, tipikusan egy hónapos lefedettségű méréseket szolgáltatnak a célpontokról. A *MOST* (Microvariability and Oscillations of Stars; Walker és tsai., 2003), a *CoRoT* (CONvection, ROTation and planetary Transits; Baglin és tsai., 2006), a *Kepler* (Borucki és tsai., 2010), a *TESS* (Transiting Exoplanet Survey Satellite; Ricker és tsai., 2015) és a *CHEOPS* (CHARacterising ExOPlanet Satellite; Benz és tsai., 2021) ezek közé tartozik, az általuk gyűjtött mérési adatsorok nyilvánosan hozzáférhetőek.

Egy másik nehézség a kettős és pulzációs modellek minél korrektebb különválasztása, ami nem kis kihívást jelent a terület művelői számára. A mért adatsor ugyanis ezeket szimultán tartalmazza, és a nehézséget éppen a pulzációk fedések alatti ismeretlen jellegű modulációja jelenti. További gondot okozhatnak a kérdéses űreszközre jellemző fotometriai trendek is. Utóbbiakra léteznek ugyan korrekciókat végző algoritmusok, de egy részük éppen



1.4. ábra Radiális és nemradiális módusok és modulációjuk egy fedési kettősrendszerben ($i = 85^\circ$, $R_1 = 2R_2$). Fentről lefelé haladva rendre a (0,0), (1,0), (1,1) módusok láthatók. Az első oszlop a megfigyelő által látható csillagkorongot, a második a pulzáció fénygörbejárulékát a csillag fedésének idején és annak környezetében, míg a harmadik és negyedik a hozzájuk tartozó amplitúdó- és fázisváltozást ábrázolja.

a pulzáció által okozott periodikus jelkomponens jelenléte miatt nem alkalmazható (éppen a hasznos jelet vonnák le, szakszerűtlenül).

Egy harmadik, ritkábban előforduló nehézség az, ha a másik komponens is pulzál. Egyszerűen feloldható a konfliktus, ha a csillagok eltérő típusú változók, amelyek jellemző frekvenciatartományai egyértelműen elkülönülnek. Így a két csillag HRD-n elfoglalt helyének pontos behatárolása feloldja ezt a degenerációt. De még akkor is van lehetőség a szétválasztásra, ha a gerjesztett módusok frekvenciatartománya közel azonos: a rövid periódusú rendszerek esetében a Doppler-effektus miatt fellépő frekvenciamoduláció (Shibahashi és Donald W. Kurtz, 2012), a hosszú periódusúak esetében pedig a fényidőeffektus következtében kialakuló fáziskésés modulációja (Murphy, Bedding, Shibahashi és tsai., 2014) segíthet megállapítani a kérdéses frekvenciák hovatartozását.

1.4. Exobolygók

A fedési kettőscsillagokhoz hasonló elven okoz – kedvező pályaorientáció esetén – szabályos fényességváltozást egy exobolygó gazdacsillaga előtti elhaladása, azaz *transzitja* (Perryman, 2018). Az első olyan exobolygót, amelynél a felfedezést követően a tranzitot is kimérték,

Charbonneau és tsai. (2000) és Henry, Marcy és tsai. (2000) találták meg egymástól függetlenül, míg tisztán az első tranzit alapján történő felfedezést Konacki és tsai. (2003) közölte először. A *Kepler* űrtávcső által elvégzett felmérési program révén exobolygók ezreit ismerjük már, a statisztikai minta alapján úgy véljük, hogy minden csillag körül kering legalább egy exobolygó (Cassan és tsai., 2012), és minden negyedik körül egy Földhöz hasonló exobolygó (Petigura, Howard és Marcy, 2013). A fentiek felül is számos ponton alakult át a bolygórendszerekről kialakult általános képünk. A forró Jupitereknek is nevezett bolygótípus volt az egyik ilyen első felfedezés, ami rámutatott, hogy a Jupiter méretű gázóriások közel is keringhetnek a gazdacsillagukhoz.

A fedési kettős csillagok és tranzitos exobolygó-rendszerek sok ponton hasonlítanak egymásra, de a köztük levő különbségek is hangsúlyosak. Az egyik az exobolygónak mint áthaladó égitestnek a csillagánál jóval kisebb mérete. Emiatt az áthaladásból származó relatív fényességsökkenés is jóval kisebb, legjobb esetben 1-2 százalék, de inkább az ezrelékben mérhető érték a jellemző. A másik, hogy a közel keringő exobolygó az optikai tartományban jóval kevesebb energiát sugároz ki, mint a gazdacsillaga. Bizonyos esetekben gazdacsillaghoz közel keringő égitesten reflexiók hatása is érvényesül, aminek következtében az exobolygó csillag felőli oldala felmelegszik. Az infravörös tartományban történő észlelés esetén viszont már van az exobolygónak saját fénye, amit a *Hubble* illetve *Spitzer*-űrtávcsövekkel ki is mértek. Az infravörös tartomány másik kiaknázzható alkalmazása a bolygó légkörének vizsgálata a tranzit során észlelhető transzmissziós színek segítségével, amelyet például a James Webb-űrtávcsővel (JWST) el is végeztek (Constantinou, Madhusudhan és Gandhi, 2023). Egy keringési periódus során azonban csak egyetlen tranzit detektálható, ráadásul a földi megerősítő célú spektroszkópiai mérések csak a csillag színeképvonalait mutatják, ezért a bolygó tömegére csak az úgynevezett *tömegfüggvény* adható meg, ismert (lényegében 90 fokos) inklinációval (Perryman, 2018, 20. oldal.). Ebből adódóan a pálya fél nagytengelyére csak alsó becslés adható, és csak a relatív bolygóméret határozható meg elfogadható pontossággal.

A fedési kettősök esetéhez hasonlóan itt is nagy segítség lehet, ha a gazdacsillag pulzáló változó. Akkor ugyanis például az asztroszeizmológiai skálázási relációk segítségével meghatározható a csillag tömege, ennek ismeretében pedig a bolygó egyéb fizikai paraméterei is. Emiatt volt kiemelten fontos a Kepler-missziónál is a pulzáló változók megfigyelése, hiszen tranzit jelenléte esetén ilyen csillagoknál van legnagyobb esélyünk a minél pontosabb bolygósugár-meghatározásra. Másik lehetséges haszna a pulzáló változók folyamatos megfigyelésének, hogy a pulzáció frekvenciája a csillag bolygómozgása által okozott imbolygása következtében, a Doppler-hatásnak köszönhetően szintén kicsit imbolyog. Ennek

kimérése felér egy radiálissebesség-görbével, amellyel kiváltható a Földön elvégzendő, csúcsműszereket igénylő spektroszkópiai mérés (és a vele járó adatfeldolgozás).

A kettőscsillagokkal, illetve az exobolygó-rendszerekkel foglalkozó kutatók által használt szakterminológia néhány ponton különbözik. Ezek közül az egyik leglényegesebb a tranzitfénygörbe modellezésénél az i inklináció kifejezése. Mivel az illesztéskor az elfajultságot mutat a ω pericentrum-argumentummal, a nála kisebb degeneráltságok mutató b *impakt paraméter*t használják, amit az exobolygó elhaladási vonalának csillagkorongtól vett távolságaként írnak le (Perryman, 2018, 202. oldal.). Az i inklinációt pedig a

$$b = \frac{a \cos i}{R_{\star}} \left(\frac{1 - e^2}{1 + e \cos \omega} \right) \quad (1.10)$$

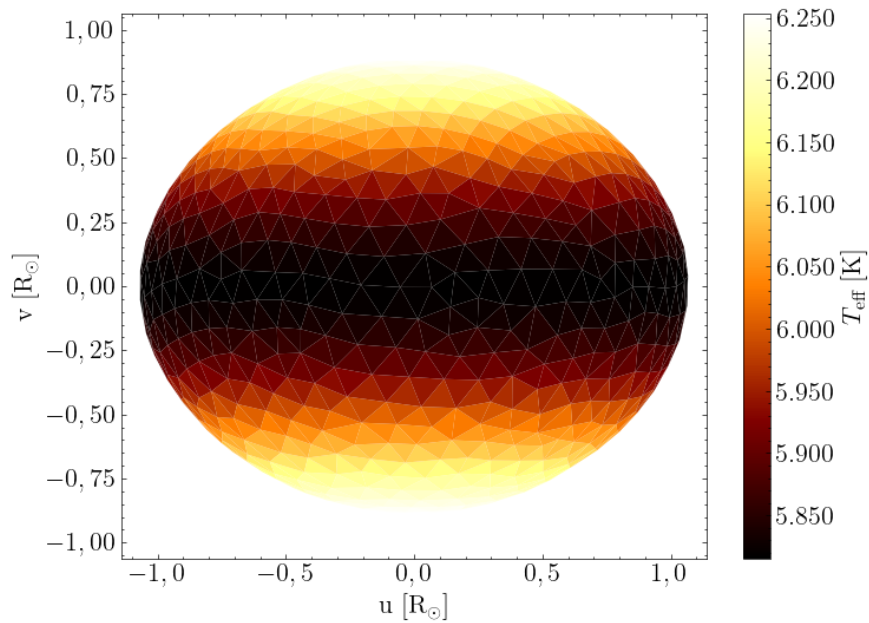
összefüggésből lehet kiszámolni, ahol az R_{\star} a csillag sugarát jelöli.

A tranzit okozta fényességcsökkenés profilját a csillag korongjának gravitációs sötétedése és az exobolygó pályasíkjának a csillag egyenlítői síkjától való eltérése is befolyásolja. A gravitációs sötétedést a csillag tengely körüli gyors forgása okozza, aminek következtében a csillag alakja nem gömb, hanem forgási ellipszoid lesz, emiatt a különböző csillagrajzi szélességeken eltérő felszíni gravitációs gyorsulás lép fel. Ennek következtében a sugárzási egyensúly fenntartásához szükséges felszíni hőmérsékleteloszlás sem lesz egyenletes, hanem a von Zeipel-féle törvény értelmében a gravitációs gyorsulás helyi értékével arányosan változik:

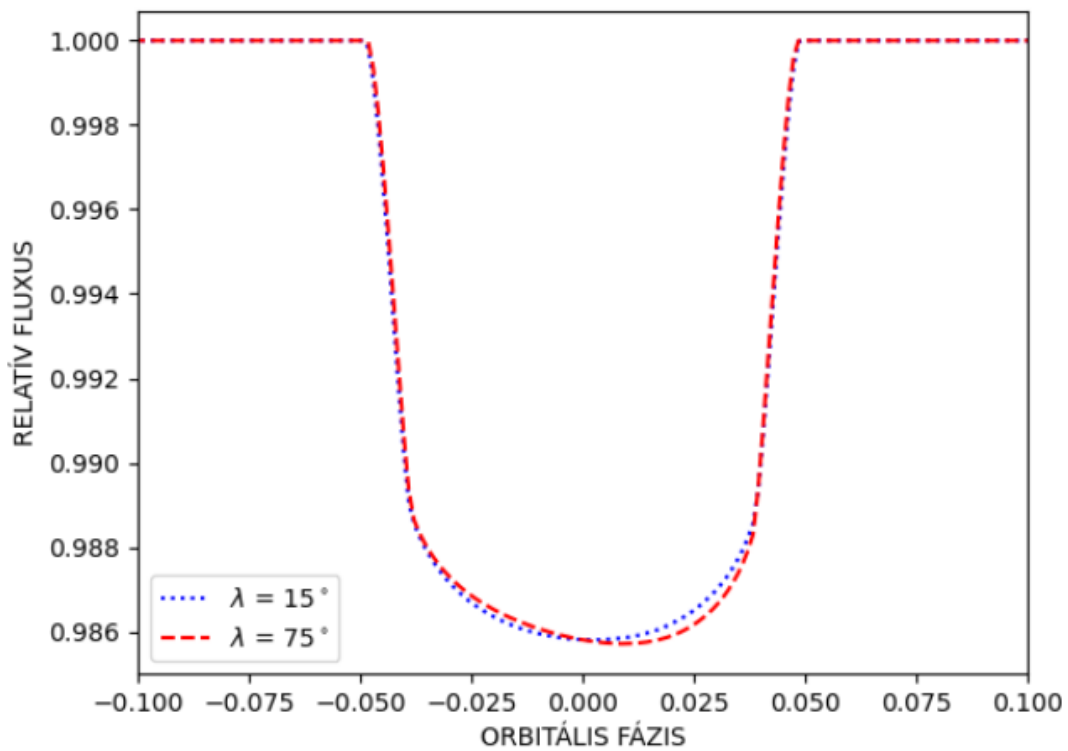
$$T \propto g^{\beta/4} \quad (1.11)$$

A β hőmérsékleti gravitációs sötétedési hatványkitevő értéke elsősorban a csillag légkörében uralkodó energiatranszport fajtájától függ. Radiatív burokra 1, míg konvekciónál 0,32 – bár ez utóbbi esetben függ a csillag belső szerkezetétől és a forgás ütemétől is. Ma már megfigyelési adatokból származó táblázatok mellett a csillagfejlődést modellező programok is képesek kiszámolni ennek elméleti értékét. Egy gravitációs sötétedéssel rendelkező csillagot szemléltet az 1.5. ábra.

Amennyiben egy exobolygó egy ilyen gravitációsan sötétedett korongú csillag előtt dőlt pályán halad át, akkor a tranzit fénygörbe aszimmetrikussá válik, amelynek mértéke a b impakt paramétertől és a csillag forgástengelye és a bolygópálya iránya közötti viszonytól függ, amelyet két irányszöggel írnak le. Az egyik a forgástengely I_{\star} dőlésszöge, amely a látóirány és a forgástengely által bezárt szög, a másik pedig a csillag egyenlítői síkja és a bolygópálya síkja által bezárt λ_{\star} *spin-pálya* szög, amelyet az óramutató járásával megegyező irányban mérünk a megfigyelő irányából (vö. 3. fejezet, 3.1. ábra).



1.5. ábra A gravitációs sötétedést szemléltető ábra.



1.6. ábra A ferde tranzit okozta aszimmetrikus fénygörbét szemléltető ábra.

Ilyen gravitációsan sötétedett korongú csillag körül keringő exobolygót először magyar kutatók mutattak ki a Kepler-13 esetében (G. M. Szabó, A. Pál és tsai., 2012). Azóta számos

exobolygó-rendszerre sikerült igazolni a gravitációs sötétedés jelenlétét, és meghatározni az aszimmetrikus profilból az i_* és λ_* szögeket, amelyeket néhány esetben meg is erősítettek Doppler-tomográfiai úton. Kálmán és tsai. (2022a) kimutatta, hogy a WASP-33 rendszer esetén szintén jelen van, így a tranziton egyszerre jelentkezik a pulzáció és a gravitációs sötétedés és ferde pálya összjátékából adódó aszimmetria.

2. fejezet

Elfedett pulzációk sztochasztikus vizsgálata

Doktori tanulmányaim alatt 2018-ben elnyertem az Új Nemzeti Kiválóság Program egy évre szóló doktori ösztöndíját, amelynek kitűzött programja egy új módusmeghatározási eljárás kidolgozása egyedi megközelítéssel. Ebben a fejezetben az ehhez vezető utat és ennek tesztelési eredményeit mutatom be oly módon, hogy a hivatkozott publikációmban (András Bókon és Imre Barna Bíró, 2020) leírtakon felül ismertetem az egyes nehézségeket, amelyekkel e munkám során szembesültem. Az akkor létrehozott algoritmust az egyes alváltozataival együtt a Github repozitóriumomban¹ elérhetővé tettem.

2.1. A feladat megfogalmazása

Az 1.1. fejezetben bemutattam, hogy ésszerű feltételezésekkel élve a csillagpulzációk sajátfüggvényei az Y_ℓ^m gömbharmonikus függvények. Ilyenkor a csillag felszínén az egyes pulzációk által keltett fényességváltozásokat is ugyanezek az ismert alakú, analitikusan számolható függvények írják le. Így a fedési kettőscsillagrendszerben adottnak tekinthető egy lehetséges megközelítés a módusmeghatározás szempontjából. Ismert fedési geometria és (ℓ, m) esetén a pulzáció fedés alatti modulációja is ismert alakú; így a feladat ismert alakú bázisfüggvények lineáris kombinációinak illesztése a mért adatokra. Ez egyszerű lineáris modellillesztés, amelynek paramétereit módusonként két-két szorzótényező alkotja. Ha még figyelembe vesszük azt is, hogy az egyes pulzációs módusoknak a fedésen kívüli integrált fluxusbeli amplitúdója és kezdőfázisa meghatározott (ugyanazon harmonikus idősoranalízisből, amelyből a pulzációs frekvenciaspektrumot is meghatározzák), a feladat még egyszerűbbé

¹<https://github.com/abokon/thesis-exp>

váltak: különbözően skálázott és kezdőfázisban eltoltt fix bázisfüggvények különböző lineáris kombinációinak kipróbálása, és a legjobban illeszkedő kiválasztása. Ez az eljárás `df fit` néven hívható meg az általam használt pulzem programcsomagban.

A feladat nehézsége abban rejlik, hogy éppen az (ℓ, m) módusszámok nem ismertek. Ezért végig kell próbálni az összes lehetséges módusszámkiosztási variációt, és mindegyikre illeszteni (vagy kipróbálni az előző bekezdésben említett skálázott bázisfüggvények illeszkedését). Sok módus esetén a lehetséges variációk száma óriási lehet. Egy adott ℓ -el bezáróan $N_\ell = 1 + 3 + \dots + 2\ell + 1 = (\ell + 1)^2$ lehetséges eset van minden egyes módusra. P darab pulzációs módus együttes vizsgálata esetén pedig N_ℓ^P nagyságrendű esetet kell végigvenni. Ez nyolc frekvenciára $\ell=3$ -el bezárólag már 16^8 , mintegy 4,3 milliárd lehetséges esetet jelent. Ugyan bizonyos nyilvánvaló eseteket fizikailag is ki lehet zárni – például nagyon valószínűtlen, hogy mind a nyolc módus radiális legyen –, ám az a nagyságrenden nem változtat lényegesen.

A hatalmas esetszámon lehet úgy rövidíteni, hogy nem az összes pulzációs módust keressük egyszerre, hanem egyenként, a nagyobb amplitúdójú frekvenciától a kisebbek felé haladva „fehérítünk”, mialatt a többi pulzáció befolyását azzal csökkentjük minimumra, hogy azokat jobb híján (0,0) radiális módusonként vesszük figyelembe. Körönként, iterációnként mindig egyetlen frekvencián hajtjuk végre a fenti minimumkeresést, az abból adódó megoldás járulékát pedig a következő körre már levonjuk az adatsorból. Az eljárás végére szintén egyetlen megoldást kapunk, jóval kevesebb esetszám vizsgálatával, ami a nyolc frekvencia mellett maradván $25 \cdot 8 = 200$ esetet jelent. A pulzem programcsomag ezt az algoritmust is tartalmazza, `df clean` néven.

A szekvenciális fehérítés legnagyobb hátránya, hogy nem garantálja a globális minimum elérését. Az éppen nem illesztett, inaktív pulzációk fedés alatti modulációja akkor is jelen van, ha mindet radiális módusnak feltételezve kezeljük (ilyenkor csak a fedések alatti amplitúdócsökkenést írva elő rájuk); emiatt az algoritmus tévútra kerülhet, és egy lokális minimumban érhet véget. Ez potenciálisan akkor fordulhat elő a legkönnyebben, ha a frekvenciák között több azonos amplitúdójú van jelen. Ezek modulációi nagyságrendileg megegyeznek, így könnyen rossz irányba téríthetik a tisztogatási eljárást. A problémát lehet csillapítani úgy, hogy az azonos nagyságrendű amplitúdóval rendelkező módusokat csoportosan, csomagonként illesztjük és fehérítünk azokkal. Biztos megoldást azonban csak a teljes paraméterterület idő- és erőforrásigényes feltérképezése jelenthet.

A bemutatott eljárások közül a `df fit` esetében az összes vizsgált eset relevanciáját csak a hosszú futtatási idő után ismerjük meg, míg a `df clean` programnál erről információ sincsen. Ráadásul az előbbi esetén a további jelöltek esetében csupán az adatokra való szoros illeszkedés, a χ^2 értékeivel rendelkezünk, de ezek minimálisan térnek el egymástól. Itt az

adatelemzésből jól ismert stabilitásvizsgálat lehet a segítségünkre. Ez még inkább igaz lehet, ha a valós módusok felszíni rezgései nem írhatóak le a gömbharmonikusok segítségével, például a gyors csillagforgás következtében.

A fentebb ismertetett nehézségeken egyszerre tudnak segíteni a sztochasztikus módszereken alapuló eljárások, ezek egyike a klasszikus és általánosan használt Markov-láncos Monte Carlo-módszer (Markov Chain Monte Carlo, röviden MCMC). Habár ezeket a csillagászati és más tudományterületi alkalmazásokban először csak a hibák, esetleges paraméterkorrelációk meghatározására használták a megoldás ismeretében, a számítási kapacitások rohamos növekedése lehetővé tette, hogy úgynevezett *brute force* típusú globális optimalizációs algoritmusként is hasznosítsák azokat. Egyes biológiai vagy orvosi területeken pedig már régebben is alkalmazták modellkiválasztásra, ahol véges számú modell közül kell az előzetes információ és az adatok ismeretében kiválasztani a legvalószínűbb modellt. Ez utóbbi adta az ötletet a kutatási feladat megvalósításához.

Céljaim között szerepelt, hogy áttekintsem a lehetséges sztochasztikus algoritmusokat, kiválasszam a megfelelőket, majd az általam vizsgált problémához illeszkedő algoritmust írjak és teszteljek.

2.2. A kiválasztott algoritmusok és adaptálásuk

A terjedelmi korlátok és a téma nagyságára való tekintettel csak a két kiválasztásra került sztochasztikus módszert tárgyalom, azok előnyeivel, illetve hátrányaival együtt. E két módszer szoros kapcsolatban áll a Bayes-i valószínűség számítással, mert lényegében az MCMC két válfajáról van szó.

A valószínűség számítás Bayes-i szemlélete szerint minden mennyiség (paraméter) valószínűségi változónak tekinthető, amelynek mindenkori valószínűségi eloszlásfüggvénye² a paraméterről rendelkezésre álló információt kódolja. Az eloszlás középértéke vagy maximumhelye a legvalószínűbb értékről, a szélessége pedig a bizonytalanságról vagy szórásról tájékoztat. A mérési adatok feldolgozása során egy paraméter előzetes, *a priori* eloszlása új információ birtokában *a posteriori* eloszlássá alakítható. Ehhez a feltételes valószínűségekre vonatkozó Bayes-tételt lehet használni:

$$p(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{D}) = p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{D}) p(\mathbf{D}) = p(\mathbf{D}|\boldsymbol{\theta}) p(\boldsymbol{\theta}), \quad (2.1)$$

ahol θ a paraméterek vektora, \mathbf{D} pedig az adatpontoké. A vastagított szimbólumok azt emelik ki, hogy ezek általában több értéket magukban foglaló vektorok. A fenti kifejezésből

$$p(\theta|\mathbf{D}) = p(\theta) \cdot \frac{p(\mathbf{D}|\theta)}{p(\mathbf{D})}, \quad \text{poszterior} = \text{prior} \times \frac{\text{likelihood}}{\text{evidencia}}, \quad (2.2)$$

ahol $p(\mathbf{D}|\theta)/p(\mathbf{D})$ az adatok valószínűségi eloszlása a paraméterek ismeretében, de mivel a nevezőben levő $Z = p(\mathbf{D})$ *evidencia* nehezen (többdimenziós integrálással) kiszámolható mennyiség, viszont egy modellen belül maradván csupán egy integrációs állandó, így a paraméterbecsléshez csak a számlálóban levő $p(\mathbf{D}|\theta)$ ún. *likelihood*-függvényt használják, ami külön nevet azért kapott, mert így önmagában nem nevezhető valószínűségi eloszlásnak. Ugyanezen okból a baloldali poszterior sem teljes jogú valószínűségeloszlás, mert nem normált; viszont az MCMC-bejárás során összegyűjtött pontok értékeinek összegével könnyedén normálható. (Z jelentősége a különböző modellek összehasonlításakor kerül előtérbe, akkor minden modellre külön-külön kiszámolandó és figyelembe veendő.) Az egyszerűsített formula tehát

$$p(\theta|\mathbf{D}) = \frac{1}{Z} p(\mathbf{D}|\theta) p(\theta) \quad (2.3)$$

A paraméterekről rendelkezésre álló előzetes ismeretünket hordozó a priori valószínűségeket a likelihood által képviselt új információ birtokában a fenti kifejezéssel alakíthatjuk *a posteriori* valószínűségeké. Ha a poszterior szűkebbé, „összeszedettebbé” válik, akkor az adatok releváns információt hordoztak a paraméterekre vonatkozóan, jobban meghatározták azokat, mint előtte. Ha ez a javulás nem következik be, akkor vagy irrelevánsak az adatok, vagy nem megfelelő az elemzés alapjául szolgáló modell.

Az így kapott valószínűségi eloszlás mérőszámaival lehet aztán következtetéseket levonni a paraméterre vonatkozóan. Többek között az eloszlás maximumának helye a paraméter legvalószínűbb értéke, de helyette használható a középérték vagy a medián is, helyzettől és felhasználótól függően. Egy jól viselkedő, egymódusú (egyetlen maximummal rendelkező) eloszlás esetén például a különféle módon kiszámolt „átlag”-értékek egymáshoz közeli lesznek. Hasonlóképpen, az eloszlás második momentuma (nem teljesen szabatosan, de mondjuk azt: a szélessége) a paraméter értékének bizonytalanságát méri. A mérőszámok használatában a kutatónak választási szabadsága van, feltéve, hogy egyértelműen rögzíti a mérőszámok jellegét, vagyis hogy a közölt átlagok melyik jellemzőből származnak, illetve a szórásértékek milyen konfidencia-intervallumnak felelnek meg.

²A szaknyelvben a szigorúan definiált *valószínűségi sűrűségfüggvény* elnevezés helyett inkább a *valószínűségi eloszlásfüggvény* vagy *valószínűségeloszlás* kifejezések honosodtak meg, azok rövidege és kézenfekvősége okán. Ugyanezen okból az értekezésben én is élni fogok ezekkel az ekvivalens elnevezésekkel.

A paraméterbecslés gyakorlati nehézsége abban áll, hogy még ha a 2.3 egyenlet jobb oldalán álló összes tényező rendelkezésre is áll analitikus alakban, a poszterior eloszlás akkor is egy többdimenziós paraméterterben foglal helyet, és legtöbbször nem olyan alakú, hogy a paraméter különböző momentumait – átlag, szórás – megadó sokdimenziós integrálok, vagy akár a maximumhelyének megállapítása analitikusan kezelhető lenne. Ehelyett numerikus algoritmusokra (optimalizáció, Monte Carlo integrálási módszerek) kell hagyatkoznunk.

A fenti feladatok optimális végrehajtásában segítenek az MCMC-eljárások. Ezek lényegében a fenti $p(\theta)$ a poszteriori eloszlásfüggvényt mintavételezik, de nem egyenletesen, mint a generikus Monte Carlo integráció, hanem a poszterior értékével arányos gyakorisággal. Szemléletesen fogalmazva, a nagy valószínűségű helyeket nagyobb gyakorisággal mintavételezik, míg a jóval nagyobb tartományt felölelő, kis valószínűségű lokációkra kevesebb figyelmet szentelnek. Ezáltal nem vesztegetnek túl sok pontot az alacsony valószínűségű tartományokra – éppen csak annyit, hogy az integrálban megfelelő súllyal azért azok is szerepeljenek. Nagyon fontos, hogy e nem egyenletes mintavételezés azért a paraméterter minden tartományát elérje. Az MCMC-bejárást megvalósító algoritmusokat pontosan úgy szerkesztették meg, hogy azok *ergodikusak* legyenek: elegendően hosszú mintavételi láncban a paraméterter minden tartományát bejárják. Az ergodicitás egyik szép következménye, hogy a különböző mennyiségek integráljai egyszerű, a mintavételi pontokra végzett ún. *ergodikus* összeggel közelíthetők:

$$\int_{\Omega} f(\theta) p(\theta|\mathbf{D}) d\theta \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(\theta_k),$$

ráadásul lényegesen kevesebb mintavétellel érik el ugyanazt a pontosságot, mint az egyszerű MC-integrálások. A másik előny, hogy a teljes együttes poszterior paramétereloszlás is ugyanilyen kevés pontból áll össze, és a maximuma is egyszerűbben állapítható meg.

Az eljárás során létrejövő Markov-lánc tartalmazza a paraméterterből mintavételezett pontok θ „koordinátáit” (a paraméterek értékeit), amiből könnyedén konstruálhatóak az adott marginalizált eloszlásfüggvények. Természetesen erre bizonyos mértékű befolyásunk lehet a *priori* eloszlásfüggvény megadásával, de annak konkrét alakja jó esetben nem befolyásolhatja lényegesen a folyamat végén létrejövő eredményt, a poszteriori pdf-et (posteriori density function), hiszen azt az adatok illeszkedésével, pontosabban az általuk definiált likelihooddal együttesen határozza meg. (A nem jó esetet pedig fentebb tárgyaltam.)

A $p(\theta|\mathbf{D})$ poszterior kiszámításához szükséges a $p(\theta)$ prior és az $p(\mathbf{D}|\theta)$ értéke. Először is, egymástól független változók együttes a priori valószínűsége egyszerűen az egyes

változók a priori valószínűségeinek szorzata:

$$p(\boldsymbol{\theta}) = \prod_k p_k(\theta_k),$$

Az egyes a priori valószínűségek választásában van némi szabadságunk, a változók jellegétől függően. Másodsor, ha egy változó *helyparaméter*, és csak annak alsó és felső határaitól van információnk, akkor az azokra korlátozott, egyenletes eloszlású prior jó választás. Ha a változó *skálaparaméter*, de semmi mást nem tudunk róla, akkor annak kódolására a logaritmusában egyenletes, ún. *Jeffreys-prior* lehet alkalmas³, amely a különböző *nagyságrendek* valószínűségét veszi azonosnak ($p_J(\log \theta) = \text{konst.}$, avagy $p_J(\theta) \propto 1/\theta$). Ha ismert a változó egy középértéke és valamilyen szórása, arra pedig a megfelelő paraméterű normáli (Gauss-) eloszlás használható. Az általam vizsgált változók esetében az egyenletes eloszlás tűnt jó választásnak, mivel előzetesen az összes módusszám azonos valószínűséggel fordulhat elő.

A *likelihood* kiszámításához az adatokban korrelálatlan zajt feltételezünk. Ez esetben ha a modell helyes, akkor az általa jósolt adatsor és a valódi adatsor közötti különbség csak a véletlen zajt tartalmazza:

$$\mathbf{D} = \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{e},$$

ahol \mathbf{D} a mért adatok, $\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})$ a modell-adatok vektorai, \mathbf{e} pedig a maradványvektor. Ezért a maradvány pontjai egy 0 átlagú, σ szórású valószínűségi változó mintavételezett pontjai, amelynek eloszlása

$$p(\mathbf{e}) \propto \exp\left(-\frac{\|\mathbf{e}\|^2}{2\sigma^2}\right), \quad (2.4)$$

ahol $\|\mathbf{e}\|$ a hibavektor hossza (euklidészi normája), σ pedig az adatpontok szórása (a szemléltetés kedvéért itt a minden pontra azonos szórás esetét vettem). A mért adatok feltételes valószínűsége is ugyanezen eloszlással egyenlő, így a *likelihood*

$$p(\mathbf{D}|\boldsymbol{\theta}) \propto \exp\left(-\frac{\|\mathbf{e}\|^2}{2\sigma^2}\right) = \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \|\mathbf{D} - \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})\|^2\right) = \exp\left(-\frac{1}{2} \chi^2\right), \quad (2.5)$$

ahol χ^2 a szórásokkal leosztott maradványok négyzetösszege, az adatilleszkedés jól ismert mérőszáma.

³Ennek van egy szépséghibája: nem normálható, mert 0-ban végtelen az értéke; de ez könnyen orvosolható, ha alulról egy bármilyen kis értékkel behatároljuk.

A likelihood tehát egyszerű esetekben a modellből és adatokból számolható χ^2 értékével adható meg.

A következőekben sorrendileg az MCMC két leggyakrabban használt fajtáját, a Metropolis–Hastings algoritmust és a Gibbs-mintavételezést fogom tárgyalni, majd ismertetem az általam kifejlesztett algoritmust és teszteredményeit.

2.2.1. Metropolis–Hastings algoritmus

A Metropolis–Hastings-algoritmus (továbbiakban: MH-algoritmus) első, kezdetleges verzióját Metropolis és tsai. (1953) hozta létre egy statisztikus mechanikai probléma megoldására, ezt később általánosította Hastings (1970), amivel az algoritmus elnyerte a végleges, ma ismert formáját. Ez az MCMC-eljárás egyszerűsége miatt hamar elterjedt, és fokozatosan meghódította az összes természettudományi területet. Gyors elterjedésében természetesen szerepet játszott a számítógépes kapacitások exponenciális növekedése is.

A MH-algoritmus lényegében két fő lépésből áll. Az előző körben elfogadott $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_K)$ paraméterhalmazból generál egy új $\theta' = (\theta'_1, \theta'_2, \dots)$ változóértékvektort. Második lépésben kiszámolja az általuk meghatározott modellek szorosság-arányát, majd egy egyenletes eloszlásból véletlenszerűen generált számmal összevetve elfogadja az új paraméterhalmazt, vagy azt elvetve a régi marad abban az iterációban elfogadott megoldásként.

1. Algorithm Metropolis–Hastings algoritmus

Require: kiinduló $\theta_1, \theta_2, \dots$ paraméterek, f függvény, $q(\theta'|\theta)$ átmeneti függvény

for $t = 1 \rightarrow N - 1$ **do**

 Új θ' a $q(\theta'|\theta_{t-1})$ segítségével

 Mintavétel az U egyenletes valószínűségi változóból

if $U \leq \frac{f(\theta')}{f(\theta_{t-1})}$ **then**

$\theta_t \leftarrow \theta'$

 ▷ Az új kerül elfogadásra

else

$\theta_t \leftarrow \theta_{t-1}$

 ▷ A régi marad és kerül be ismét a Markov-láncba

end if

end for

Kimenet: θ_t -kből álló Markov-lánc

Az algoritmus által generált lánc korrelációs „memóiahossza” 1: a következő pont csak az azt közvetlenül megelőző ponttól függ, a korábbiaktól már nem. Kiemelkedően fontos a $q()$ *tranzíciós függvény* helyes megválasztása, mert azon múlik a mintavételezés ergodikussága a paramétertérben.

2.2.2. Gibbs-mintavételezés

A Gibbs-mintavételezés egy másik népszerű választás a Bayes-i valószínűség számítással, analízissel foglalkozók körében, amelyet S. Geman és D. Geman (1984) dolgozott ki. (Az algoritmust azért nevezték el Josiah Willard Gibbs-ről, a modern termodinamikát megalapozó amerikai tudósról, mert ezzel akartak utalni a mintavételezési algoritmus és a statisztikus fizika közti analógiára.) Az egyik lényegi változtatás az volt, hogy a teljes paraméterter szimultán letapogatása helyett egy iteráción belül az egyes paraméterváltozók (mint a paraméterter koordináta-komponensei) egyenként kerülnek mintavételezésre, míg a többi változó addig rögzítve van. A másik lényegi változtatás, hogy az egyes változókat közvetlenül a poszterior eloszlás alapján mintavételezzük, és az új megoldást mindig elfogadjuk. Ennek a megközelítésnek az a nehézsége, hogy feltételes valószínűségi eloszlásokból kellene mintavételezni. A nehézséget végül Müller (1991) oldotta fel, aki lényegében az előzőleg bemutatott MH-algoritmust módosította az alábbiakban szerint.

2. Algorithm Gibbs-algoritmus

Require: kiinduló $\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^K$ paraméterek, f függvény

for $t = 1 \rightarrow N - 1$ **do**

for $k = 1 \rightarrow K$ **do**

 Új θ_t^k mintavételezése $f(\theta_t^k | \dots, \theta_t^{k-1}, \theta_{t-1}^{k+1}, \dots)$ segítségével

 ▷ minden lehetséges θ^k paraméterű f -ből választás

end for

end for

Kimenet: θ_t -kből álló Markov-lánc

A fő különbség a két algoritmus között, hogy a szimultán, összes paraméterre vonatkozó véletlenszerű letapogatás helyett minden egyes iteráción belül egyesével végighalad az összes paraméteren, a többit rögzítve tartva. Az MH-algoritmusban tapasztalható, véletlenszerű paraméterrel való összehasonlítás pedig továbbra is megmarad, ezzel biztosítva az algoritmus MCMC-jellegét.

2.2.3. Megvalósítás

Modellként a pulzem programcsomagban már implementált függvényeket használtam, amelyek ismert gömbharmonikus függvények és fedésikettős-modell ismeretében létrehozzák a szintetikus fénygörbét. A C++-ban megírt csomag releváns részeihez készült python-modul segítségével ezeket kényelmesen elérhettem a saját kódomból. Ez elősegítheti a program beépíthetőségét a pulzem programcsomagba.

A két algoritmus és így a két program bemenete és kimenete teljesen azonos. Bemenetként természetesen szükség van az elemzésre szánt adatsorra, az elemezni kívánt frekvenciák adatait tartalmazó fájlra, valamint a fedési adatokat tartalmazó kernelfájltra. Az első kettő külön paraméterként adható meg a parancssori bemenetben, utóbbit viszont a forráskódban kell mindig kézzel módosítani. Ez azért alakult így, mert a programot első körben tesztelni kívántam, és a később ismertetett néhány rendszerkonfigurációt használtam tesztelésre, amelyek között soknak azonos a fedési geometriája és a frekvenciák száma is, így a kernel is azonos volt. A parancssori bemenetek között szerepel egy 'a' konstans is, amely már az MH- vagy Gibbs-algoritmus hangolásáért felel. Ennek az állandónak az elfogadási arányok beállításában van szerepe olyan módon, hogy a kapott χ^2 -ek és p likelihood mennyiséget összekötő 2.5 egyenletben az exponenciális függvény argumentumát skálázza. Ennek akkor van például jelentősége, amikor MH algoritmusban a kérdéses modell nagyobb χ^2 -tel rendelkezik az aktuálisan elfogadotthoz képest, de az egyenletesen mintavételezett u értékkel való összehasonlításnál még nagyobb lehet. Viszont adott 'a' értéknél előfordulhat, hogy olyan értékek jönnek ki, amelynek értelmében az MCMC egy adott értéknél marad.

2.1. Táblázat Az MH- és Gibbs-algoritmus által használt közös paraméterfájl paraméterei és hozzátartozó rövid. Gibbs esetén csak az `mcmc_len` paramétert veszi figyelembe.

Paraméter	Leírás
<code>l_min</code>	ℓ minimális értéke
<code>l_max</code>	ℓ maximális értéke
<code>l_step</code>	ℓ minimális lépéshossza
<code>m_step</code>	m maximális lépéshossza
<code>Delta_step</code>	$\ell - m $ maximális lépéshossza
<code>mcmc_len</code>	MCMC lánc hossza

A python forráskód mellett szerepel egy `mcmc.par` nevezetű paraméterfájl is, amely az MCMC futását paraméterezi. Ennek paramétereit a 2.1 táblázatban foglaltam össze. Az `l_min` és `l_max` a lehetséges ℓ módusfokszámok minimális és maximális értékét jelenti. Az `l_step` és `m_step` az ℓ módusfokszám és m azimutális rend maximális lépéshosszát tartalmazza, míg a `Delta_step` a program egy másik módjának maximális lépéstávolságát adja meg. Végül az `mcmc_len` a leendő Markov-lánc kívánt hossza. Utóbbival kapcsolatban meg kell jegyezni, hogy a hagyományos MCMC-k esetén általában 10 000 elegendő szokott lenni, de ezt erősen befolyásolja egyrészt a paraméterter dimenziója (a változók száma), valamint az ún. *autokorrelációs idő*, amivel az MCMC hatékonyságát mérik.

Az (ℓ, m) módusok paraméterterének mintavételezésében van egy alapvető különbség a valós változókhoz képest: egyrészt ezek diszkrét változók, másrészt pedig nem összemérhetőek, nincs nyilvánvaló metrika a köztük levő távolság mérésére, de még rendezési szabály

sem, amellyel legalább sorba rendezhetők. Emiatt az egyik pontról másira történő ugrás lépésköze sem értelmezett, márpedig az az MCMC-algoritmusok kulcseleme.

A probléma megoldása, hogy a módusszámokat nem numerikus, hanem úgynevezett *kategóriaváltozó*ként kell kezelni őket. Sőt, mint kiderült, nem is az ℓ és m számokat külön-külön, hanem az (ℓ, m) számpárokat együttesen célszerű annak tekinteni.

A programot először úgy írtam meg, hogy az ℓ és m változókra különállóként, vagyis *klasszikus* változóként tekintettem, a szokásos aritmetikai szabályok mellett. Ez magyarázza, hogy az előzőleg bemutatott paraméterfájlban miért szerepel mindkét módusszámra külön egy-egy lépéshossz-paraméter. (Járulékos és nem feltétlenül kívánatos következmény, hogy ilyenkor minden egyes pulzációs módushoz a paramétertér két koordinátája is tartozik, meredeken emelve a paramétertér dimenzióját a módusok számával.) Ugyanakkor ennek algoritmusbeli megvalósításához egy viszonylag összetett feltételrendszert kellett beépíteni, biztosítandó, hogy az m módusszámok az $|m| \leq \ell$ értékeken belül legyenek.

Első közelítésben a q tranzíciós függvény megalkotása diszkrét változók jelenléte miatt egy speciális eljárás lett. Az esetünkben figyelnie kell a felhasználó által megadott maximális módus fokszámra (l_max) és a maximális lépésméretre a módus fokszám (ℓ) és azimutális rend (m) tekintetében. Adott ℓ -re az eljárással úgy vettem figyelembe az $|m| \leq \ell$ feltételt, hogy a kockadobást a relatív esetszámok szorzatával súlyoztam. Mivel az algoritmus első változatának megírásakor az ℓ és m generálása egymástól függetlenül zajlott, természetesen előfordult, hogy egyes esetekben m a $[-\ell, \ell]$ tartományon kívülre esett. Ilyenkor az eljárás egyszerűen addig folytatta az m újragenerálását, amíg a kívánt feltétel nem teljesült.

A paraméterezés első változatáról szerzett tapasztalataim alapján egy másik paraméterezést is kipróbáltam: azt a kombinációt, amely inkább meghatározza a felszíni mintázat topológiáját. Nevezetesen: mivel $\ell - |m|$ a felszínt zónákra osztó horizontális, m pedig a szektorokra osztó meridionális csomóvonalak száma, logikus lehetőségnek adódott az $x_1 = \ell - |m|$, $x_2 = m$ paraméterek választása. Ilyen paraméterezéssel, igazodott tengelyű pulzációk esetén, a módusok többé-kevésbé az általuk okozott modulációk növekvő mértéke szerint lesznek rendezve. E paraméterezés hátránya, hogy az m előjele nem adódik magától, azt egy újabb véletlenszám-generálással kell kisorsolni. Ez pedig jó eséllyel ronthatta az MH és Gibbs algoritmus hatékonyságát, mert egy új vizsgálandó elem generálása több lépésből állna. Az itt alkalmazott konfigurációs paraméter az l_min és l_max mellett a Δ_step .

A későbbi tesztek során arra a következtetésre jutottam, hogy szükség lehet egy alternatív megközelítésre is. A probléma gyökere abban rejlik, hogy ugyan a módusszámok közötti különbségek numerikusak, de a távolságuk nem feltétlenül így mérendő, hiszen egyszerű skalárokon túl mutató jelentésük van. A megfelelő *metrika* keresése során először egy rossz választáshoz, majd végül egy olyanhoz jutottam, ami később jó megoldásnak

bizonyult. Az utóbbi szerint az (ℓ, m) számokat együttesen, ún. *kategóriaváltozóként* kezeli az algoritmus. Ehhez kapcsolódik az előbb ismertetett `Delta_step` paraméter, újraértelmezve, ami az ezen belüli maximális lépéshosszt állítja be. Az egyes módusok legalább kétféleképpen rendezhetők sorba: topológiai komplexitás szerint, vagy pedig az általuk okozott amplitúdó- és fázismoduláció mértéke szerint; utóbbi természetesen a vizsgált kettős rendszertől függ. Ebből következően úgy láttam jónak, hogy *rendezett* kategóriaváltozóként kezeljem őket a rendezetlen helyett. Mivel előzetesen egyiket sem preferáltam, a teszteléshez mindkét sorrendiséget létrehoztam. A sorbarendezést külön fájlban (`lm_sort_ap.txt`) tettem meg.

A program először létrehoz egy olyan `df.par` fájlt, amellyel a `dfit` segédprogram legenerálja a számba veendő módusok gömbfüggvényeinek normalizált fluxus-járolékát – vagyis a bázisfüggvényeket – az adott fedési geometriában, és eltárolja azokat a számítógép memóriájában. Ezt követően ágazik ketté a kód az alkalmazott algoritmusnak megfelelően (MH vagy Gibbs). Az **MH-algoritmus** alapján működő megoldásban az alábbi utasítás segítségével meghívásra kerül a DF modellillesztő segédprogramja, amely a paramétertér kérdéses pontjához tartozó fénygörbét lemodellezi és kiszámolja a bemeneti adatsorra való illeszkedés χ^2 értékét, amit a `test_1` változóban tárol.

```
test_1 = df.fitModel(mk_string(array_cvar, p_id))
```

Ezt követően az **MH-algoritmus** magjában a próbapontra is végrehajtja a fenti utasítást, a kapott χ^2 -et a `test_2` változóban tárolva. Ennek birtokában ki lehet számolni az `r` értéket, illetve generálni egy `u` törtszámot 0 és 1 között.

```
r = np.exp(coeff_a * ( test_1 - test_2 ) )
u = np.random.uniform(0,1)
```

Ezek a változók határozzák meg a lánc következő elemének legenerálását. Mivel a két χ^2 a zárójelen belül fordított sorrendben szerepel, `r` azt méri, hogy az új jelölt (próbpont) jobb-e, mint az előző (χ^2 tekintetében). Ha igen ($r > 1$), a jelöltet elfogadjuk. Ha $r < 1$, de még nagyobb az `u`-ban tárolt értéknél, akkor is elfogadjuk; egyébként nem, és a korábbi pontot használjuk az aktuális lépésben is.

A **Gibbs-algoritmus** első fő különbsége az, hogy nem számol ki kezdeti χ^2 -értéket, hanem a Markov-láncon belül egy további beágyazott (`for`) ciklusban végigfut az összes paraméteren, és számolja ki minden lehetséges érték modelljét és a hozzátartozó χ^2 -értéket, amelyeket aztán egy tömbben tárol a megoldásnak megfelelően. Ezt követően véletlenszerű választás történik az egyes megoldások közül a következő valószínűsűségek súlyának

megfelelően:

$$p_i = \frac{\exp(-\chi_i^2/2)}{\sum_{i=0}^N \exp(-\chi_i^2/2)}, \quad (2.6)$$

A ciklus végén a két algoritmus szintén azonos módon viselkedik, utolsó lépésként a Markov-lánc elmentése marad, amit egy fájlban tárol el oly módon, hogy soronként szerepelteti az N db frekvenciának megfelelő (ℓ, m) számpárokat és a hozzájuk tartozó χ^2 -értéket⁴

2.3. Tesztek és eredmények

Az alábbiakban bemutatom azokat a vizsgálatosorozatokat, amelyek segítségével ellenőriztem a kifejlesztett algoritmust vagy annak valamely alváltozatát, hogy teljesíti-e a kitűzött célt. A tesztek másik célja az új módusazonosítási módszerek képességeinek és korlátainak megállapítása volt. Az általános felvezetőben röviden bemutatom a modellezés folyamatát, majd az azt követő alfejezetekben előbb az egy-, majd a többmódusú tesztek kerülnek ismertetésre. Végül egy úgynevezett nagytesztet is bemutatok, amelyet már egy 8 frekvenciájú szintetikus adatsoron végeztem el.

A modell-adatsorokat, illetve a fedési modellt tartalmazó *kernelfájlok*at a *pulzem* csomag *pulsec1* programjával gyártottam le. Választott modellrendszerem lényegében megegyezik a később bemutatott KIC 3858884 azonosítójú, erősen excentrikus ($e = 0,465$) fedési kettős modelljével (4.1. fejezet), amelynek másodkomponensére tételeztem fel a kérdéses pulzációkat. A szintetikus adatsorokban levő pulzáció kellő pontosságához a csillagfelszín $N = 120 \times 120$ pixeles felbontása elegendő volt⁵, szélsötétedéshez pedig az alábbi négyzetgyökös törvényt használtam:

$$I(\gamma) = I_0 \cdot (1 - c_1(1 - \cos \gamma) - c_2(1 - \sqrt{\cos \gamma})), \quad (2.7)$$

ahol γ a felületelem rálátási szöge, I_0 a merőleges rálátású felület intenzitása, c_1 és c_2 pedig a szélsötétedési együtthatók, melyeket a kérdéses csillag légkörmodelljéből számoltam az azt modellező program keretében. A feltételezett főkomponens csak egy adott sugarú „sötét” korong volt, ami miatt nem volt szükséges megadni sem a felbontását, sem az alkalmazott

⁴Mivel a lánc generálás egy átlagos számítási kapacitású gépen órákat-napokat is igénybe vehet, a program természetesen nem a legvégén menti el a kész láncot, hanem menet közben, szakaszosan adja hozzá az eredményfájlhoz, elkerülendő egy esetleges áramszünet kellemetlen következményeit.

⁵A *pulzem* akkori változatában a 3. részben említett geodetikus trianguláció még nem került beépítésre, azért volt szükség ilyen nagyszámú pixelre

szélsötétedést. Így a 2.2. táblázatban feltüntetett felbontás és szélsötétedési együtthatók a másodkomponensre értendőek.

2.2. Táblázat A tesztben szereplő fedésikettős-rendszer és pulzációjának modellezésére használt geometriai paraméterek. A szélsötétedéshez a négyzetgyökös törvényt használtam, és csak a másodkomponensre értendő.

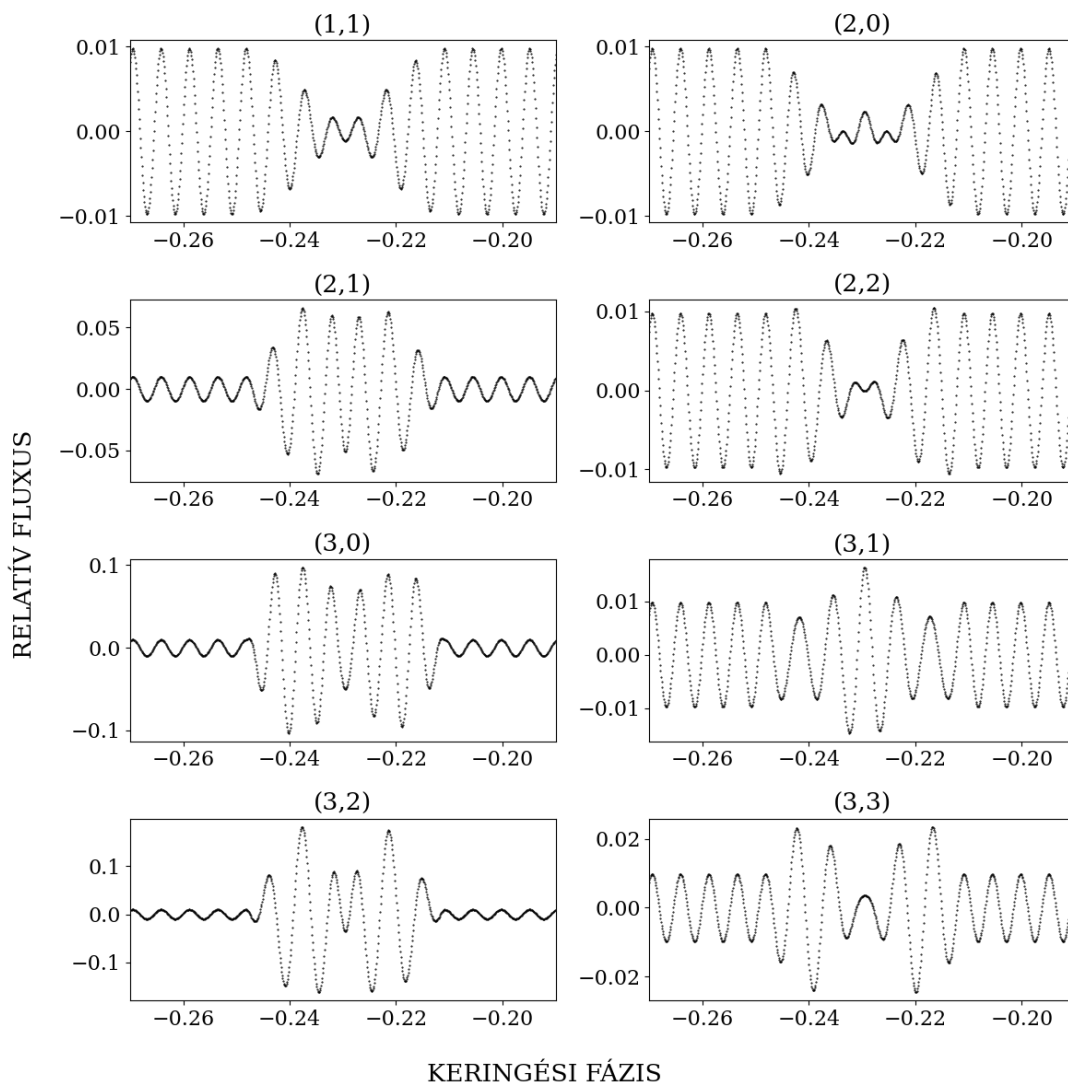
	Paraméter	Érték
MR	q	0.988
R1	R_p/a	0.623
R2	R_s/a	0.0518
INCL	i	88.17
ECC	e	0.465
PARG	ω ($^\circ$)	21.4
GRIDRES	N	60x30
LIMBDARK	c_1	0.3509
	c_2	0.4792

A kiszámolt adatsorok mindegyikéhez külön-külön adtam hozzá véletlen zajt, illetve véletlen zajt és véletlenszerű frekvenciájú, amplitúdójú és fáziskésésű pulzációkat mint korrelált zajt, amelyek amplitúdói akkorának lettek választva, hogy a Fourier-spektrumban mérhető legnagyobb detektált csúcs jel/zaj aránya ne érje el rájuk a 4-et (ami az általánosan elfogadott detektálhatósági limit, Breger, Stich és tsai., 1993). Ez utóbbi számított a teszt sorozat minden egyes szintjén a legnehezebbnek, hiszen a valós esethez ezek állnak a legközelebb, ha a pulzációt szférikus gömbharmonikussal leírhatónak tételezzük fel. A kiszámolt adatsorok nem tartalmazzák a csillag egyensúlyi intenzitásának a fedés által modulált járulékat, amelyet már egy helyesen megalkotott fedésikettős-modell keretében levontnak tekintettem. A nemnegatív m -hez társított, fedésen kívüli szakaszra normált pulzációkat és azok modulációit egy közös frekvenciára lemodellezve, 2.1. ábrán szemléltetem a a fedés tartományának környezetében.

2.3.1. Egymódusú tesztek

E tesztek során a 2.2. táblázatban feltüntetett rendszert használtam, amelyhez azonos tulajdonságú pulzációs frekvenciákat adtam ($f = 187,65f_{\text{orb}}$, A , φ), de különféle módusszámokkal, nevezetesen az $\ell = 1 \dots 3$ módusfokszámok minden lehetséges módusait számba vettem. Azt tételeztem fel, hogy a másodkomponens pulzál.

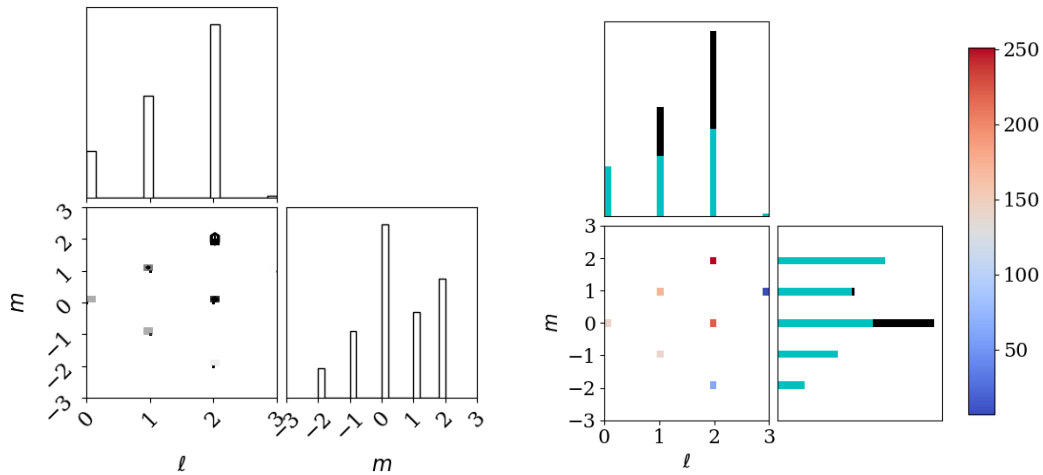
A tesztek ekkor még a két algoritmus kétféle módozatával hajtottam végre úgy, hogy az a hangolási paraméter több értékét is kipróbáltam. A kiértékeléshez először a Python-ban nyilvánosan elérhető egyik corner csomagot szándékoztam használni, amely az együttes



2.1. ábra Az egyes modellezett nemnegatív m értékű (ℓ, m) módusok fotometriai fénygörbéi a vizsgált fedésikettős-konfigurációban.

valószínűségeloszlás különböző jellemzőit – nevezetesen az egyes változók marginalizált, illetve két változó marginalizált együttes eloszlásait – számítja ki és ábrázolja. Ezt a fajta ábrát a szakirodalomban „corner plot”-nak (magyarul sarokábra, vagy döntött piramisábra) nevezik. Hamarosan kiderült, hogy diszkrét változókra nem igazán alkalmas, ezért saját kódot fejlesztettem ki azokra.

A 2.2. ábra jobb oldali fele egy ilyen egyedi fejlesztésű corner plot-ot mutat, amely első ránézésre nagyon hasonló a szokványos corner plot-okhoz (bal oldalt). A bal alsó sarokban látható grafikon az ℓ és m marginalizált együttes eloszlásának megfelelő kétdimenziós hisztogram, szeizmikus színskálával. Ezen a skálán a sötétvörös színnel megjelölt pont az



2.2. ábra Egy hagyományos (balra) és egy saját fejlesztésű corner plot (jobbra) összehasonlítása. Utóbbi bal alsó sarokban látható grafikon az l és m marginalizált együttes loszlásnak megfelelő hisztogram, szeizmikus színskálával. A marginális valószínűségeük pedig az átlóban szerepelnek fekete színben, míg a türkizkék színűvel jelölt az adott paraméteren belül a legtöbb letapogatott.

eloszlás maximuma (a legvalószínűbb módus), míg az egyre fakóbb, majd kékebb színek az egyre kevésbé valószínűket jelentik. Végül a marginális valószínűségeknek megfelelő átlóban két diagram szerepel: a jobb alsó sarokban lévő, vízszintes sávdiagramként az m marginalizált valószínűsége, illetve a bal felső sarokban függőleges oszlopdiagramként az l -hez tartozó. Ezeket kétféle adatot ábrázoltam. Az összes paraméterérték letapogatott száma fekete színnel szerepel, azon belül pedig türkizkék színnel annak az (l, m) módusszámának a számossága, amely a legtöbb letapogatást („találatot”) kapta a Markov-láncon belül. Az utóbbi diagramok igazából csak az egyes megoldásjelöltek közötti viszonyt próbálják szemléltetni, amelyek közül a türkizkék színben ábrázolt a mérvadó. Szemléltető céljukat leszámítva a fekete színű oszlopok ábrázolásának nincs további jelentőségük.

A Markov-lánc eredményének kvantitatív értelmezése érdekében egy olyan szkriptet is írtam, amely százalékosan tünteti fel a Markov-lánc egyes letapogatott értékeit.

Az egyfrekvenciás adatsorokra elvégzett futtatások közül néhány előzetesen kiválasztott esetre vonatkozó eredményeket az MH-algoritmusra a 2.3., a Gibbs-algoritmusra a 2.4. táblázatban foglaltam össze, amelyek egyaránt lefedik a pozitív és negatív tapasztalatokat.

A bemutatott egymódusú tesztek eredményei egyértelműen azt mutatják, hogy számos esetben a legvalószínűbb módus az ismert bemeneti modell módusaival egyezik meg. A (2,2) és (3,1) módusok esetén egyébként ez teljesen érthető, mert ezek a módusok ebben a konfigurációban látványos amplitúdó- és fázismodulációval rendelkeznek, ami miatt igen

(ℓ, m)	V. típus	1. jelölt (%)	2. jelölt (%)	3. jelölt (%)
(1,1)	kl	(0,0) (29.96)	(1,1) (18.3)	(2,0) (17.0)
(1,1)	ka	(2,2) (21.53)	(2,0) (19.95)	(1,1) (18.73)
(2,2)	kl	(2,2) (41.9)	(2,0) (21.3)	(1,1) (14.8)
(2,2)	ka	(2,2) (37.53)	(1,1) (18.82)	(2,0) (16.2)
(3,2)	kl	(3,2) (90.5)	(2,1) (6.1)	(2,-1) (2.3)
(3,2)	ka	(3,2) (99.88)	(2,1) (0.05)	(2,-2) (0.04)

2.3. Táblázat Válogatott eredmények az egyfrekvenciás adatsorokra végzett MCMC futtásaiból. Az oszlopok balról jobbra haladva: a bemeneti modellek (ℓ, m) módusszámai, a változótípusok (kl = klasszikus, ka = kategóriaváltozó), és a legtöbb letapogatást kapott három jelölt (ℓ, m) módusszámai a teljes Markov-lánchoz százalékosan viszonyítva; ezek közül a legvalószínűbbet kövérítéssel is kiemeltem. A bemeneti módusok a találatoknál kövérítve jelennek meg. *Ha ez nem az „1. jelölt” oszlopban található, ott az algoritmus tévesztett. (A módusszám-párosoktól való jobb megkülönböztethetőség érdekében a százalékpontoknál ezúttal tizedespontot használtam.)*

(ℓ, m)	V. típus	1. jelölt (%)	2. jelölt (%)	3. jelölt (%)
(1,1)	kl	(0,0) (51.83)	(2,2) (15.5)	(1,1) (11.2)
(1,1)	ka	(2,2) (20.61)	(2,0) (18.97)	(1,1) (17.5)
(2,2)	kl	(0,0) (46.8)	(2,2) (28.9)	(1,1) (14.3)
(2,2)	ka	(2,2) (39.4)	(1,1) (17.31)	(2,0) (16.1)
(3,2)	kl	(3,2) (100)	-	-
(3,2)	ka	(3,2) (99.70)	(2,1) (0.06)	(2,-2) (0.03)

2.4. Táblázat Válogatott eredmények a Gibbs-mintavételezés futtatásaiból, szintén az egyfrekvenciás adatsorokon végezve. Az oszlopok jelentései és az egyéb jelölések megegyeznek a 2.3. táblázatnál alkalmazottakkal.

erős a fedés alatti változás. Ezzel szemben az (1,1) bemeneti módus amiatt nem lett az első jelölt, mert nagyon hasonló a (0,0) modulációjához.⁶ Ami viszont fontos az eredeti cél szempontjából, hogy a három legnagyobb találatot kapott jelölt között található. Amennyiben az adatok minősége lehetővé tenné, a helyes módus egyértelműen kiválasztódna; addig viszont az ekvivalens módus-jelöltek hasonló valószínűséggel szerepelnek a megoldásban.

Feltűnő viszont, hogy a 2.4. táblázat egyes eseteiben a klasszikus változókezelésnél a Markov-lánc 50% körüli esetek esetén volt radiális módus. A program tesztelésénél ez

⁶A közlésre került cikkben első találatként (0,0) helyett (2,0) volt véletlenül jelölve, amit a cikket bíráló sajnós nem vett észre, holott a (2,0) harmadik találatként is szerepel abban a sorban.

volt az első pont, amikor felmerült bennem egy alternatív változókezelés, ami elvezetett a kategóriaváltozókhöz. A döntés jónak bizonyult, mert azzal a (0,0) és (1,1) viszonylatában is a módusok szelektivitásának megfelelő arányokat kaptam.

2.3.2. Többmódusú tesztek

A teszteléseknek ezen a szintjén a vizsgálatok célja az volt, hogy a jellegzetes módusoknál tapasztalt egyértelmű eredmény hogyan változik több, különböző amplitúdójú módus egyidejű jelenléte mellett. Ha az algoritmus, illetve valamelyik alváltozata a különböző frekvenciaszámú esetek között elromlik, a módszer korlátjai pontosabban felmérhetőek.

	$f (f_{orb})$	A	φ
F1	187,64969	0,00976	0,83166
F2	193,94944	0,00905	0,48539
F3	255,30330	0,00188	0,21432
F4	194,96342	0,00178	0,87195

2.5. Táblázat A többmódusú tesztek során használt pulzációk adatai.

A többmódusú tesztek során 2, 3 illetve 4 módussal rendelkező adatsorokat készítettem, amelyek frekvenciájának, amplitúdójának és kezdőfázisának összefoglaló adatait a 2.5. táblázatban tüntettem fel. Ezeket szintén a KIC 3858884 első nyolc domináns amplitúdójú pulzációinak paramétereiből válogattam. A hozzájuk társított, adott 'var'-ral jelölt módusvariációk összesítése a 2.6. táblázatban található. Látható, hogy az egyes tesztek között számos egyedi amplitúdó- és fázismodulációjú (ℓ, m) szerepel, de előfordulnak olyanok is, amelyeket az algoritmus eltévesztett az egymódusú tesztek során. Ezzel azt szerettem volna tesztelni, hogy egy ilyen módusú, dominánsabb frekvencia mellett egy kisebb amplitúdójú, de egyedi modulációjú (ℓ, m) esetén elromlik-e az egymódusú tesztekénél kapott pozitív eredmény.

	2f					3f				4f	
	var1	var2	var3	var4	var5	var1	var2	var3	var4	var1	var2
F1	(1,0)	(2,0)	(1,0)	(2,0)	(1,1)	(1,0)	(1,0)	(1,0)	(1,0)	(1,0)	(1,0)
F2	(1,1)	(1,1)	(3,1)	(2,0)	(3,3)	(1,1)	(2,0)	(1,1)	(1,1)	(2,0)	(1,1)
F3						(1,0)	(1,0)	(2,1)	(2,0)	(2,1)	(1,0)
F4										(3,1)	(3,1)

2.6. Táblázat A használt módusok listája a különböző var esetekben a 2, 3 és 4 módussal modellezett adatsorokban. Az egyes sorok a 2.5. táblázatban feltüntetett frekvenciájú, amplitúdójú és fáziskésésű komponensnek felelnek meg.

A modellezett adatsorokra hasonló módszerrel végeztem el az egyes MH-, illetve Gibbs-mintavételezést, ezekre kezdetben 10000, nagyobb frekvenciaszámok felé haladva 100000 tagból álló Markov-láncot készítettem. Mivel ezek ismertetése túl hosszadalmas lenne, csak az állításokra vonatkozó főbb futtatásokat és táblázatokat mutatom be. Általánosságban az mondható el, hogy a klasszikus változójú kezelés többmódusú futtatásoknál vált igazán megbízhatatlanná, különösen Gibbs-mintavételezéssel.

		1. jelölt		2. jelölt		3. jelölt	
		Arány (%)	(ℓ, m)	Arány (%)	(ℓ, m)	Arány (%)	(ℓ, m)
F1	MH/KL	99.59	(1,0)	0.21	(2,1)	0.19	(2,-1)
	MH/KA	98.00	(1,0)	1.40	(2,-1)	0.17	(1,-1)
	G/KL	56.25	(1,0)	8.57	(0,0)	4.86	(1,-1)
	G/KA	73.15	(1,0)	10.35	(2,1)	8.90	(2,-1)
F2	MH/KL	21.56	(1,1)	20.35	(2,0)	20.20	(2,2)
	MH/KA	22.93	(2,0)	19.33	(2,2)	17.82	(1,1)
	G/KL	20.87	(0,0)	14.00	(2,0)	13.48	(1,1)
	G/KA	15.59	(1,1)	14.65	(2,0)	13.94	(2,2)
F3	MH/KL	20.05	(1,0)	17.03	(2,-1)	9.38	(2,1)
	MH/KA	15.10	(1,0)	14.25	(2,1)	12.76	(2,-1)
	G/KL	21.32	(2,-1)	13.16	(1,0)	11.53	(2,1)
	G/KA	10.06	(1,0)	8.13	(2,-1)	7.27	(2,1)
F4	MH/KL	9.33	(3,-1)	9.07	(2,2)	8.87	(3,1)
	MH/KA	15.54	(3,1)	13.27	(3,-3)	10.86	(3,3)
	G/KL	22.14	(0,0)	9.60	(2,2)	9.47	(2,0)
	G/KA	6.98	(3,1)	6.62	(2,0)	6.60	(0,0)

2.7. Táblázat A 4 frekvenciás 'var1' variációjú adatsoron végzett összes programvariáns futtatási eredményének összefoglaló táblázata. A sorok a frekvenciák szerint kerültek csoportosításra a négy MCMC-variáns eredményeinek jobb összehasonlíthatósága végett. Utóbbiakat a második oszlop jelöli (MH és G az MH- és Gibbs algoritmus, KL és KA a klasszikus és kategórikus változóknak megfelelő). A táblázat jobb oldalán levő hat oszlopban a három legvalószínűbb módot tüntettem fel csökkenő valószínűség szerint, a százalékban kifejezett arányokkal és az (ℓ, m) módusszámokkal egyetemben.

Állítások. Az egyidejű pulzációk számának növelésével ugyan a nagyobb amplitúdójú módusok mintavételezése nagyrészt érintetlen maradt, ám az egyre kisebbeknél a Markov-lánc egyre jobban bejárja a teret. Ez összhangban van azzal a ténnyel, hogy a dominánsabb módusok mellett a kevésbé dominánsak jelentősen kisebb mértékben befolyásolják a χ^2 meghatározott értékét, így a hozzájuk társított valószínűség is hasonlóan kisebb lesz.

Viszont az igazán nagy amplitúdó- és/vagy fázismodulációt elszenvedő módusok jelenlétét a Markov-lánc a többihez hasonló módon, nagy biztonsággal igazolja. Ez a tulajdonság

még akkor sem romlik el, amikor az ilyen nagy szelektivitású módus a legkisebb amplitúdóval szerepel, és a nála nagyobb amplitúdójú másik frekvenciára egy kisebb szelektivitású, összetéveszthető módust illesztünk be.

2.3.3. Nagyteszt

Valódi rendszerekre történő alkalmazása előtt a módszert még egy utolsó, „nagytesztnek” vettem alá: egy valódihoz nagyon hasonló adatsorra alkalmazva azt. Ehhez az eddigi négy mellé további négy frekvenciát választottam ki, amelyekhez véletlenszerűen társítottam módusszámokat. Így egy nyolc módusú adatsorra kellett elvégezni egy-egy futtatást, az előző tesztekéből levont tanulságok alapján ezúttal kifejezetten csak kategóriaváltozókezelési módban. A bevont fedési ciklusok számát pedig 10-re emeltem. Nyilván nem várható el, hogy 8 pulzáció modulációja egyetlen fedés adataiból rekonstruálni lehessen.

A kapott eredményt az alábbi táblázat foglalja össze mind az MH-, mind pedig a Gibbs-algoritmusra.

ID	modell (l,m)	MH		Gibbs	
		(l,m)	%	(l,m)	%
F1	(0,0)	(0,0)	22.3123	(1,-1)	22.9227
F2	(0,0)	(0,0)	23.3581	(1,1)	20.1821
F3	(1,1)	(1,-1)	11.8104	(2,-2)	9.0033
F4	(3,-1)	(3,-1)	13.3614	(3,-1)	10.1756
F5	(2,2)	(3,-1)	10.4345	(3,-1)	8.2108
F6	(3,1)	(3,-1)	10.3927	(3,3)	7.5828
F7	(2,0)	(3,1)	11.4752	(3,-1)	8.467
F8	(3,1)	(3,-1)	9.3415	(3,-1)	6.8505

2.8. Táblázat A nyolc frekvenciás nagyteszt összefoglaló táblázata.

Amint az látható a 2.8. táblázatban, hogy a nyolcfrekvenciás adatsor esetén az alacsonyabb amplitúdójú pulzációknál az 5. frekvenciától kezdve a módszer már megbízhatatlanná válik. Ezen lehet úgy segíteni, hogy a jelentősebb amplitúdójúaknál kapott legvalószínűbb megoldást levonjuk, és új elemzést hajtunk végre a maradék frekvenciákra. Az algoritmus továbbfejlesztési lehetősége az idősor-analízisben fehérítési eljárásnak nevezett módszer választható eljárásként történő beépítése a programba. Ugyanakkor megjegyzendő, hogy a fehérítési eljárás létjogosultsága a szinuszfüggvényekkel leírható harmonikus adatsorok esetén ugyan egyértelmű – lévén, hogy a különböző frekvenciájú jelek egymással ortogonális bázist alkotnak, tehát jól különválnak –, semmi nem garantálja azonban, hogy modulált pulzációk esetén ez a tulajdonságuk bármilyen mértékben is megmarad.

2.4. Összefoglalás

Sikeresen létrehoztam egy olyan programot, amely a Markov-láncos Monte Carlo-mintavételezés Metropolis–Hastings és Gibbs-algoritmusait *kategóriaváltozók* esetére adaptálta. Erre azért volt szükség, mert a mintavételezni kívánt (ℓ, m) egész típusú, egymástól nem teljesen független módusszámok ilyen változóknak számítanak, nincs rájuk magától értetődő rendezési utasítás vagy a köztük levő távolságot mérő metrika. A program képes arra, hogy – bizonyos korlátokkal – pulzáló fedési kettősök fotometriai adatsorait elemezze módusmeghatározás céljából, és a nemradiális oszcillációk módusaira vonatkozóan valószínűségi információkkal szolgáljon. Bár az (ℓ, m) paraméterkészletei erősen korlátozottak a módusszámok egész számú értékei miatt, mégis sikerült megoldani a feladatot a változók megfelelő kezelésével. Ennek felismerésében viszont kiemelt szerepet játszott az előzetes tesztek sokaságának elvégzése, ami rámutatott a kidolgozott algoritmus gyengeségeire.

A teszteléshez egy olyan nagy excentricitású kettős rendszert modelleztem, amelynek egyik csillaga pulzált. Többféle forgatókönyvet vizsgáltam meg. Ezekkel az egyszerűbb, egymódusú pulzációktól egészen az összetettebb, nyolc módusú együttes pulzációkig, fokozatosan növeltem a program terhelését, hogy feltárjam annak képességeit, korlátait. A tesztek elvégzése során az alábbi kulcsfontosságú következtetéseket vontam le.

- A módszer szelektivitása megmaradt. Ez azt jelenti, hogy a jól megkülönböztethető modulációkkal rendelkező (erősen szelektív) módusok egyértelműen elkülöníthetőek. A hozzájuk társított legnagyobb valószínűségek pedig egyértelműen módusazonosításként tekinthetőek majd. Ez a képesség kissé romlik a nagyobb amplitudójúakhoz képest a kisebb amplitudójú frekvencia-komponensek felé haladva.
- A szelektivitás szempontjából kétértelmű módusok esetén az adott módus az összetevészthető móduspárjával együttesen kapja a legtöbb találatot, így ezekhez a módusokhoz nagyságrendileg közel egyforma valószínűséget társít.

A bemutatott eredmények alapján a program – korlátozott számú pulzációra – alkalmasnak ítéltető mind a módusazonosításra, mind pedig a kérdéses esetekben a valószínűség kifejezésére. Ezzel pedig reményeim szerint segíteni fogja a területen kutató asztroszeizmológusok munkáját, hiszen az azonosított módusok segítségével képletesen és szó szerint is mélyebben megérthetjük a csillagok belső szerkezetét.

3. fejezet

Csillagpulzáció hatásának vizsgálata a tranzit fénygörbére

3.1. Irodalmi áttekintés

Számos detektált tranzitáló exobolygórendszer mutat aszimmetrikus fénygörbéket. Az első ilyen rendszer a Kepler-13 volt (G. M. Szabó, R. Szabó és tsai., 2011; G. M. Szabó, A. Pál és tsai., 2012), amelyet a gyors forgás következtében gravitációsan sötétedett csillagfelszín, valamint a megdőlt bolygópálya együttes hatása okozott. Az elmúlt években számos olyan exobolygót találtak, amely δ Sct pulzációt és gravitációs sötétedést egyszerre mutató anyacsillag körül keringett (WASP-33; Collier Cameron és tsai., 2010; Herrero és tsai., 2011; von Essen és tsai., 2014; Shashank Dholakia, Luger és Shishir Dholakia, 2022; Kálmán és tsai., 2022b). Ugyanakkor a csillagaktivitás, a pulzáció és a granuláció szintén okozhatnak aszimmetrikus tranzitokat. Számos ezt vizsgáló tanulmány modellezett aktív csillaggal rendelkező exobolygó- fénygörbéket, és például azt találta, hogy a kérdéses tranzit paraméterek értékét és hibáját komolyan befolyásolja a csillagfoltok jelenléte (Oshagh, Santos és tsai., 2013). Emellett Oshagh, Dreizler és tsai. (2016) vizsgálta a csillagaktivitás zavaró jelének hatását olyan, a Rossiter-McLaughlin effektusból meghatározható spektroszkópiai mennyiségekre, mint például a központi csillag forgástengelyének iránya. Bizonyos esetekre kimutatta, hogy a szennyező jel képes oly módon eltorzítani az illesztést, hogy egy igazodott forgástengelyű rendszerre hamis módon merőleges állású rendszer paraméterei jöttek végeredményül.

A pulzáció hasonló módon okozhat ilyen jellegű problémát, különösen, ha annak amplitúdója túl alacsony a pulzáció azonosításához és a fénygörbéről való leválasztásához. Igaz ugyan, hogy az elemzéseket sok egyedi megfigyelt tranzitból átlagolt egyetlen, jó minőségű tranzitgörbén történik, és ugyanez a folyamat a pulzációkat is kiátlagolja, „elnyomja”, ám

csak azokat, amelyek nincsenek rezonanciában a bolygómozgással. Léteznek azonban olyan pulzációk is, amelyek frekvenciája közel áll egy keringési rezonanciához, és ezek a keringési periódussal feltekert és átlagolt tranzitgörbén is aszimmetrikus lenyomatot hagynak. Másik aggasztó probléma lehet a nemradiális pulzáció, ami elfedésre kerül az exobolygó csillag előtti elhaladása során. Igaz ugyan, hogy ez a 1.3. fejezetben ismertetett jelenség exobolygók esetén sokkal kisebb mértékű, de még mindig okozhat a tranzit alakjában olyan kismértékű eltorzulásokat, amelyek eltorzítják az illesztett paramétereket. Ezért mindenképpen érdemes megvizsgálni a kérdést.

A szabálytalan csillagaktivitás hatásainak kiküszöbölése történhet úgy, hogy a zavaró jeleket idő-korrelált („vörös”)¹ zajként tekintjük, amelyek kezelésére léteznek wavelet-alapú megközelítések. Ezt alkalmazza például az általam is használt Tranzit és Fénygörbe Modellező (Transit and Light Curve Modeller, a továbbiakban TLCM;) program is (Sz Csizmadia, 2020; Sz. Csizmadia és tsai., 2021). Ugyanakkor még senki nem vizsgálta, hogyan birkózik meg e módszer többszörös periodikus jelekkel.

Doktori tanulmányaim során ezt a kérdést is megvizsgáltam. Nevezetesen feltártam a különböző amplitúdójú, mono- illetve multiperiodikus pulzációk hatását a tranzit fénygörbékből származó bolygóparaméterek meghatározására.

3.2. Vizsgálati módszerek

A vizsgálathoz egy olyan hipotetikus exobolygó-csillag rendszert tételeztem fel, amely szülőcsillaga olyan lassan forog, hogy nincs forgási torzultsága, ellenben pulzál. Forgási torzultság hiányában gravitációs sötétedés sincs, a felszíni fényességeloszlása egyenletesnek tekinthető, ebből adódóan nincs kitüntetett szimmetriatengelye, amihez képest dőlt konfiguráció jöhetne ki az illesztés során. A pulzációs mintázatokat a tetszőleges irányban álló forgási tengellyel egybeeső pulzációs tengellyel modelleztem; viszont előrebocsájtom, hogy az eredményeknél részletezett okokból adódóan a pulzációs tengely iránya teljesen irrelevánsnak bizonyult az általa gyakorolt hatás tekintetében.

Az így kialakított pulzáló-tranzitáló rendszerre szintetikus fénygörbéket gyártottam két segédprogram felhasználásával: egyikük a tranzit, másikuk a pulzációk modellezésében jeleskedik. A két adatsor összeadásra került. Több tesztesetre készítettem ily módon szintetikus fénygörbéket, amelyeket a már említett TLCM programmal illesztettem és meghatároztam az

¹Ez az elnevezés a jel Fourier-transzformációjának jellegzetes alakja, egész pontosan annak spektroszkópiai színekép-analógiája alapján honosodott meg a szakirodalomban. Míg a fehér zaj minden frekvencián azonos amplitúdóval képviselteti magát, addig a korrelált vörös zajban az alacsonyabb frekvenciák dominálnak.

exobolygó-paramétereket, azt vizsgálva, milyen torzulások adódnak azok bemeneti értékeihez képest.

3.2.1. A tranzitok modellezése

Azt a fényességváltozást, amelyet a bolygó elvonulása eredményez egy állandó intenzitású csillagkorong előtt a megfigyelő számára, a `fitsh/lfit` programmal (András. Pál, 2012) szimuláltam. Az algoritmus analitikus formulák felhasználásával számolja ki a felbontástól független fénygörbét. A precizitás ára az, hogy nem képes modellezni a forgás okozta torzult, gravitációsan sötétedett csillagkorongot, de mivel a kiindulási model nem is tartalmazott ilyet, azért ez itt nem okozott hátrányt.

A `fitsh` program az inklináció helyett az alábbi paramétert használja:

$$\omega = \frac{2\pi a}{P R_s} \frac{1}{\sqrt{1-b^2}}, \quad (3.1)$$

ahol P a periódusidő, a a fél-nagy tengely, R_s a csillag sugara, b pedig az (1.10) szerinti impaktparaméter (az ott szereplő ω a pericentrum argumentuma, nem tévesztendő össze az itteni ω -val – a `fitsh` csak körpályát tud modellezni).

A fotometriai adatsor létrehozása során kvadratikus szélsötétedési törvényt tételeztem fel, a WASP-33 rendszerre talált $\mu_1 = 0,209$ és $\mu_2 = 0,217$ értékekkel (Kálmán és tsai., 2022a).

A pulzációt és annak tranzit okozta modulációját a 2.3. fejezetben említett `pulzem` programcsomag modellező segédprogramjával modelleztem. Az eredetileg fedési kettőscsillagokra tervezett algoritmus témavezetőmnek köszönhetően alkalmassá vált kis, exobolygó méretű elfedő objektumok kezelésére is. A pontosabb szintetizálás egyik kulcsa a felszínnek egy geodéziai rácshálózaton alapuló képelemekre való osztása. E sémát először Hendry és Mochnacki (1992) alkalmazta érintkező, W UMa típusú kettősök minél pontosabb modellezésére. A kiindulási pont egy a csillag térfogatába írt ikozaéder, amelynek 20 egyenlő oldalú háromszöglapja van. Ezeket a lapokat kisebb háromszögekre osztjuk (szubtrianguláció). Végül a létrehozott rácshálózatot a csillag középpontja szerint radiális irányban a csillagfelszínre vetítjük. Ezáltal olyan háromszöglapokból álló felosztást kapunk, amely a lehető legkisebb számú elemmel a teljes csillagfelszín egyenletes felbontását valósítja meg. A másik kulcslépés a kör alakú vetített fedési árnyék és a háromszöglap-képelemek metszeteinek pontos analitikus kiszámolása. Ugyanerre a kivetített hálóra történik a mind a fedési kettősmodell, mind pedig a kívánt Y_ℓ^m mintázat szimulációja is. A segédprogram a szélsötétedés, forgási torzultság és gravitációs sötétedés modellezésére is képes, bár az utóbbi kettőre esetben nem volt szükség. A szélsötétedésre a `fitsh`-nál használt alakot és együtthatókat használtam itt is.

A rácshálózat sűrűségét addig növeltem, amíg a fénygörbe normált fluxusban mért változása a nem-korrelált („fehér”) zajkomponens szintje alá nem csökkent. Ez a kitűzött feltétel az ún. szubtriangulációs paraméter 15-ös értékénél teljesült, ami az ikozaéder oldalainak 15 szegmensre való osztását jelentette, és a 20 *oldallap* mindegyikére $15^2 = 225$ lapkát jelent, azaz az egész csillagfelszín $20 \cdot 15^2 = 4500$ lapkára került felosztásra.

Az állandó fluxus és a pulzációs komponens kiszámítására azért volt szükség két különböző segédprogramra, mert jelen pillanatban nem áll rendelkezésre olyan program, ami mindkét komponenst azonos pontossággal kiszámolhatná. A *fitsh* gyakorlatilag egzakt a tranzit fénygörbékre, de tetszőleges, időfüggő mintázat legyártására nem alkalmas a tranzitok számításán felül. A fedések által modulált pulzációkat modellező *pulzem* ugyan mindkettőt ki tudja számolni, de a pontosságát behatárolja a raszterizációs megközelítése. A projektet előkészítő vizsgálataim során arra jutottam, hogy akármilyen nagyra növeljem is a felbontást, a pontossága nem éri el a *fitsh*-ét, mindig maradt egy kis különbség a sztatikus tranzit fénygörbék között.

Ami a pulzációs mintázatokat illeti, azokat hasonló relatív pontatlansággal számolja ugyan, mint a fedési (tranzit) fénygörbét, de a pulzációk amplitúdója eleve kicsi a tranzit mélységéhez képest, így a hibáik még kisebbek – igazából még a gyakorlatban elérhető tipikus nem-korrelált mérési zaj mértékénél is kisebbek. Ezért a kombinált szimulációs módszer használata megfelel a kívánt pontossági feltételeknek.

3.1. Táblázat A tesztrendszer geometriai és fizikai tulajdonságait leíró paraméterek, ahogyan azok a két modellező segédprogram számára átadódtak.

	Paraméter	Érték
fitsh	P	1,22 d
	b	0,0
	ω	18,975
	R_p/R_s	0,1117
	μ_1	0,209
	μ_2	0,217
pulzem	R_s/a	0,2714
	R_p/a	0,0303
	i	90
	e	0
	N	$20 \times 15 \times 15$
	μ_1	0,209
	μ_2	0,217

Az első esetben egy olyan tesztrendszert vizsgáltam, amely egy gömbalakú csillagból és egy körülötte 2 napos periódussal keringő, $R_p \sim 0.1 R_s$ sugarú exobolygóból áll. Ez egy

tipikus forró Jupiter-konfiguráció. Kör alakú pályát tekintettem, amelyet éléről látunk (az inklináció 90 fok). A modellezett tranzit időtartama így körülbelül 0,1 orbitális fázis lett, a tranzit mélysége pedig 0,013 relatív fluxusban mérve. Az adatsorhoz korrelálatlan zajt adtam hozzá. Ennek mértékét úgy választottam meg, ahogy a *TESS* űrtávcső egy 10–11 magnitúdó látszó fényességű, átlagos csillagot tudna mérni a küldetése során: normalizált fluxusban $\sim 0,0002$ 3σ -szint. A 3.1. táblázat foglalja össze azokat a bemeneti paramétereket, amelyekkel a két segédprogramot el kellett látni. Az e fejezetben szereplő vizsgálataim során ugyanezt a paraméterhalmazt használtam.

Egy második esetben egy hasonló konfigurációjú rendszert használtam azzal, a különbséggel, hogy az inklináció értéke $89,89^\circ$ volt, a WASP-33 rendszernek megfelelően, amelynek korábbi tanulmányozása részben ihlette ezt a vizsgálatot.

3.2.2. A pulzációk modellezése

Ahogy az előző alfejezetben is említettem, a vizsgálatokhoz két pulzációs scenáriót használtam. Az első egy *egymódusú* eset, egyetlen harmonikus, radiális pulzációval. A második, *többszámú* esetben több különböző periódusú pulzáció egyidejű jelenlétét tételeztem fel, melyeket a δ Scuti típusú változóknál tapasztalható módusokhoz hasonló paraméterű mesterséges pulzációkból raktam össze. Mindkét scenárióban több esetet is megvizsgáltam különböző paraméter-kombinációkkal. A szimulált adatsorokat minden esetben a pulzem segítségével hoztam létre.

Egymódusú, radiális esetek

A 3.2 táblázat mutatja be az egymódusú esetekben használt pulzációs jelek tulajdonságát. Ezek a frekvenciák a hagyományos, integrált fluxusban mért járulékos adatait adja meg a tranziton kívüli tartományon, méghozzá az alábbi formula szerint.

$$f(t) = A \cdot \sin(2\pi(ft + \varphi)), \quad (3.2)$$

A vizsgálat során arra voltam kíváncsi, hogy azok vörös zajként való kezelése megfelelő-e, azaz az illesztési folyamat mennyire adja vissza a bemeneti paramétereket. A TLMC által is használt vöröszaj-algoritmust elsődlegesen a tranziton kívüli asztrofizikai folyamatok kezelésére fejlesztették ki, amik közül is a csillagaktivásra kitűnőnek bizonyult (Kálmán, Sz., Szabó, Gy. M. és Csizmadia, Sz., 2023).

3.2. Táblázat Az egymódusú esetekben használt radiális pulzációk adatai. A frekvenciák a keringési frekvencia egységeiben értendők. A φ kezdőfázis értékét véletlenszerűen válogattam a $[0, 1]$ tartományból. Az amplitúdót egységesen 0,0006-nak vettem. A modellekhez tartozó azonosító a frekvencia és kezdőfázis sorszámaiból lett alkotva úgy, hogy az egyszerű modell azonosító kezdőbetűje "i". Például az "i02" esetben az első frekvencia és a harmadik kezdőfázis került felhasználásra (a sorszámok nullával indulnak).

$f[f_{\text{orb}}]$	φ
0,25652	0,78636
0,31001	0,31961
0,54229	0,43413
3,24241	
3,21314	
2,58046	
13,21510	
26,10723	
19,87613	
19,37048	

Többmódusú esetek

Azt is megvizsgáltam, hogy mekkora eltérés várható a különböző geometriai konfigurációkban nemradiális pulzációk jelenléte esetén. Egyértelmű, hogy a vezető paraméter a relatív exobolygó sugár, ugyanis nagyobb sugarú csillaghoz tartozó korong árnyéka nagyobb területeket érint a csillag felszínén, aminek következtében nagyobb modulációkat okoz a rendszerről megfigyelt fluxusok idősorában. Mivel a modell-rendszerünk az egyik legnagyobb lehetséges sugarú exobolygót tartalmazza, a vizsgálat egy felső határt eredményez a modulációk detektálhatóságára.

Alapvető célom itt az volt, hogy feltérképezsem a fénygörbe-modulációk változásait az exobolygó-pálya hajlásszögének függvényében. Ebből adódóan rendszerek egy sorozatát hoztam létre a λ vetített spin-pálya (ang: *spin-orbit*) szögének 0 és 180 fok között 15 fokként történő léptetésével. Ez a tranzit pályagörbéjének módosulása miatt hatással van az elfedett pulzációs mintázatok jellegére, aminek következtében a moduláció jellege is változik. Eddigi és a későbbi vizsgálataim során a pulzáció szimmetriatengelye mindvégig egybeesik a forgástengellyel.

A pulzem programcsomag fénygörbe-szintetizáló `pulse1` segédprogramjának van egy olyan választható funkciója, amely amely a szintetizált idősor minden pontjára kiszámolja a pillanatnyi amplitúdót és kezdőfázist, amelyeket amplitúdó- és fázismodulációt tartalmazó adatsorba fűz össze. A pillanatnyi értékeket úgy kell elképzelni, hogy ha a rendszer keringését képzeletben megállítanánk az adott időpontban, de magát az időt tovább engedjük telni, akkor

a pulzációk a pillanatnyi amplitúdóval és kezdőfázissal leírható szinuszos oszcillációként történének. A fedések illetve tranzitok során ezek a mennyiségek azért változnak, mert változik a csillagkorong elfedettlen tartománya is és emiatt a róla érkező integrált fluxus is. Ennek megfelelően az amplitúdó- és kezdőfázis-modulációk a fedési geometrián kívül a pulzációs módusszámoktól is függenek (módusszám-specifikusak), de függetlenek a pulzáció harmonikus tulajdonságaitól (amplitúdó, frekvencia, kezdőfázis, mind a fedésen kívüli állapotban értve). Ezért olyan pulzációkat használtam, amelyek amplitúdója, frekvenciája és kezdeti fázisa rögzített volt, de nemradiális módusszámoknak minden lehetséges (ℓ, m) kombinációit végigvettem $\ell=3$ -al bezárólag, nem feledkezve meg a $(0,0)$ radiális módusról sem. Ez utóbbihoz tartozó moduláció viszonyítási alapként szolgál, amelyen összehasonlítható a többi nemradiális módus modulációja. Ez azért tehető meg, mert a radiális módus is szenved egy csekély fényességcsökkenést a csillagkorong tranzit általi részleges elrejtése miatt, de fázismoduláció nem történik, mivelhogy ebben az esetben az egész felszín azonos fázisban, koherensen oszcillál. (Ugyanezen okból az $m = 0$ zonális módusokra sem történik fázismoduláció; amplitúdó-moduláció annál inkább.)

A vizsgálat előrehaladtával egy realiztikusabb, több frekvenciát tartalmazó modellt is tanulmányoztam. A módusokhoz rendelt amplitúdók kicsinek számítanak egy tipikus δ Sct pulzációhoz képest, mert ezt a tanulmányt a WASP-33 rendszer inspirálta, ezért a paramétereket is többnyire azzal a rendszerrel összhangban választottam meg. A különböző frekvenciákhoz véletlenszerű (ℓ, m) nemradiális módusszámokat választottam, mivel a szakirodalom szerint e rendszer pulzációira jelenleg nem ismert semmilyen módusazonosítás. A választott frekvenciákat és az egyes nXX modellekben való szerepeltetésüket a 3.3. táblázat tartalmazza.

Annak érdekében, hogy δ -Sct típusú csillaghoz hasonló nagyságrendű amplitúdók esete is vizsgálva legyen, egy utolsó körben az összes frekvenciát felhasználtam (mint az n02-ben), de az amplitúdót 10-szeresére növeltem meg. Ezekre a szimulációkra pXX-ként hivatkozom.

3.2.3. Illesztés

A csillagpulzációt és tranzitot együttesen tartalmazó, szintetizált fénygörbék illesztéséhez a már említett TLCM kódot használtam. A tranzit modellezése Mandel és Agol (2002) sémája szerint történik, ahol a paraméterek a P keringési periódus, a tranzit közepének t_C időpontja, az R_p/R_S bolygó-csillag sugárány, az a/R_S skálázott félnagy tengely és a b ütközési paraméter. A szélsötétedés jelenségét is figyelembe vettük kvadratikusszélsötétedési formulával az említett μ_1 és μ_2 paraméterekkel. A TLCM algoritmus tartalmaz wavelet-kezelő rutinokat is (Carter és Winn, 2009), amelyek az időkorrelált zajokat képesek kezelni. Ezek magukba foglalják a különböző műszereffektusoktól kezdve asztrofizikai jelenségekből

3.3. Táblázat Az nXX modellsorozatokban használt pulzációs módusok listája. A frekvenciák a keringési frekvencia egységeiben értendők, az A amplitúdót és φ kezdőfázist a 3.2. egyenlet szerint kell értelmezni. A telített körök (●) azt kódolják, hogy az egyes nXX esetek mely módusokból kerültek „kikeverésre”. Az utolsó oszlop a véletlenszerűen kiválasztott (ℓ, m) módusszámokat sorolja fel.

f_id	f (f_{orb})	A ppm	φ	n00	n01	n02	n03	n04	n05	(ℓ, m)
F1	30,0047	670	0,7695		●	●	●			(1,-1)
F2	2,8300	667	0,5968	●	●	●			●	(0,0)
F3	14,6532	557	0,5714			●	●	●	●	(1,1)
F4	31,3453	496	0,4724		●	●	●	●	●	(1,1)
F5	3,6987	437	0,5490	●	●	●			●	(1,1)
F6	0,3586	337	0,8244	●	●	●			●	(2,2)
F7	11,2085	327	0,1155			●	●	●	●	(1,1)
F8	30,5633	290	0,8003		●	●	●	●	●	(2,1)
F9	1,4248	243	0,3316			●	●	●	●	(2,1)
F10	0,1519	247	0,7518	●		●			●	(2,1)

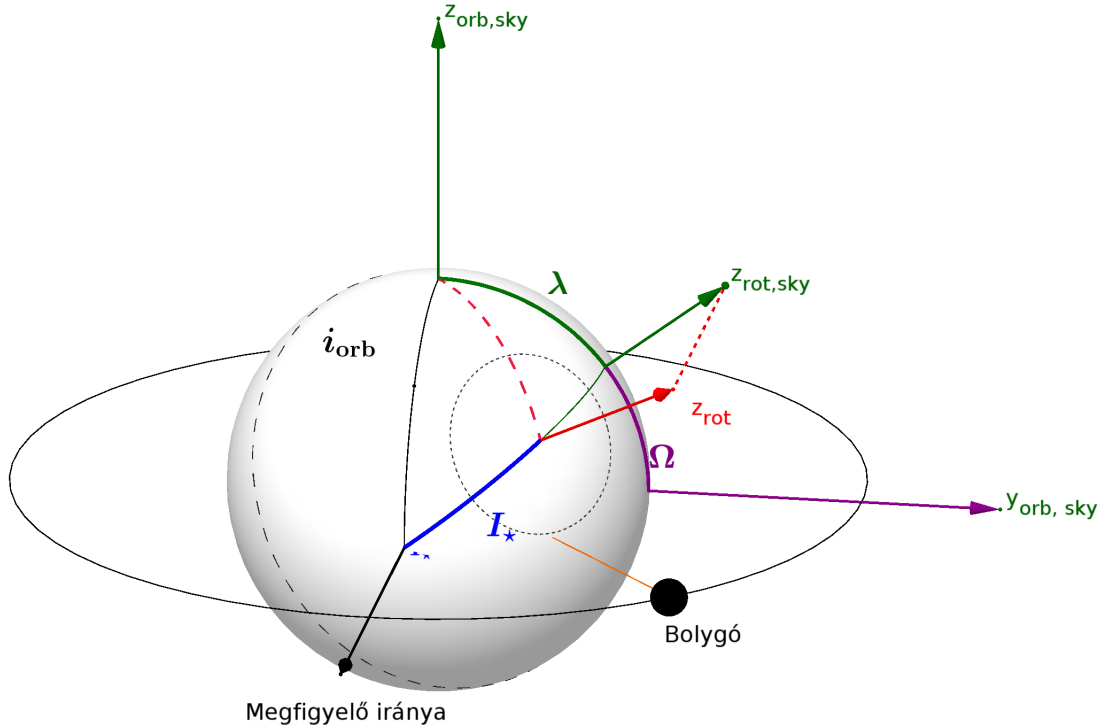
(mint amilyenek a flerek, granulációk, csillagpulzáció, stb.) származó jeleket, amelyek közös tulajdonsága az ún. vöröszaj-jelleg. Így a tranzit ideális görbéjére rárakódó zajokat egy ideális illesztés esetén az algoritmus két komponensre választja szét: egy σ_r számmal jellemezhető *vörös zajra* (red noise) és egy σ_w számmal jellemezhető *fehér zajra* (white noise). A vörös zaj kezelésére konstruált, wavelet alapú módszert Sz. Csizmadia és tsai. (2021) tanulmányozta részleteiben, és hatékonynak találta. Jelen esetben a korrelált zaj csupán a csillagpulzációból származik. Kálmán és tsai. (2022b) kimutatta, hogy a wavelet-alapú megközelítés képes kezelni a WASP-33 rendszer δ Scuti típusú pulzációját.

Az 1.4. fejezetben említett gravitációs sötétedés egy némileg módosított verzióját használtam (Lendl és tsai., 2020; Sz. Csizmadia és tsai., 2021), amely egy, a csillagfelszín pontos alakjának kiszámolására alkalmazott teljes Roche-geometriát (R. E. Wilson, 1979) foglal magába. A potenciálok meghatározásakor a modellezés felhasználja a vetített csillag forgási sebességét ($v \sin I_*$), amelyből a β gravitációs sötétedés együtthatóval együtt a felszíni hőmérsékletváltozást határozza meg.

Az egész még a forgástengelyének irányát leíró további két szögparamétertől is függ. Ezek jelentését a 3.1. ábra illusztrálja.

I_* a forgástengelynek a megfigyelő irányától mért szöge;

λ_* pedig az ún. *spin-pálya szög*, a forgástengely és a keringési tengely *égboltra vetített* irányai közötti szög.



3.1. ábra A csillag forgástengelye és a pálya közötti térbeli viszonyt leíró szögek szemléltetése. I_* a megfigyelő iránya és a z_{rot} forgástengely közötti szög. $z_{orb,sky}$ a pályára merőleges irány vetülete az égbolt síkjára; $z_{rot,sky}$ a forgástengelyé. λ_* az általuk bezárt szög. Ω_* pedig annak pótszöge. Az i_{orb} pályahajlás itt 90° .

A TLCM a λ_* helyett annak kiegészítő szögét használja:

$$\Omega_* = 90^\circ - \lambda_*, \quad (3.3)$$

ugyanazt az irány méri, ugyanúgy az égbolt síkjában, csak nem az égboltra vetített keringési tengelytől „déli irányban”, hanem a keringési pályasík és az égbolt síkjának metszetétől mindkét irányban. Így amíg λ_* 0 és 180 fok között mozoghat, addig Ω_* 90 és -90 fok közötti értékeket vehet fel.

Ennek megfelelően

- az igazodott bolygó-csillag konfigurációra $I_* = i_{orb} \approx 90^\circ$, és $\lambda_* = 0^\circ$ ill. $\Omega_* = \pm 90^\circ$;
- a 90 fokban megdőlt konfigurációra $\lambda_* = 90^\circ$, azaz $\Omega_* = 0^\circ$, I_* pedig tetszőleges.

Ha $I_* = 0^\circ$, akkor a csillag forgástengelye éppen felénk mutat, ha pedig $I_* = 90^\circ$, akkor a csillag az égbolt síkjában van 90 fokkal elforgatva. Reálisan mérlegelve ezek

előfordulása elég valószínűtlen, hiszen a megfigyelő irányához vannak kötve – ám természetesen nem lehetetlen.

Minden egyes szintetizált fénygörbéhez legalább két illesztés-sorozatot hajtottam végre. Az első megegyezik a bemeneti paraméter konfigurációjával, azaz igazodott konfiguráció, gravitációs sötétedés nélkül ($I_* = 90^\circ$, $\Omega_* = 90^\circ$ vagy $\lambda = 0^\circ$). A második sorozatnál nem-nulla gravitációs sötétedést tételeztem fel úgy, hogy a hőmérsékleti gravitációs sötétedési együtthatót $\beta = 0,25$ -re, a vetített csillagforgási sebességet pedig $v \sin I_* = 86,5$ km/s-ra állítottam, a két irányszöveget pedig szabadon hagytam. Szórványosan, azaz egy-egy esetben a b konjunkciós paramétert is illesztettem, hogy a pulzációs zavar rá gyakorolt hatását is felmérjem. Az a/R_S skálázott félnagy tengely, a R_p/R_S relatív bolygósugár, a t_C tranzit-középidő, a P keringési periódus mindig illesztési paraméterek voltak, ahogyan a σ_r vörös- és a σ_w fehér zajparaméter is. A szélsötétedési paraméterek szintén rögzítve voltak. (Itt jegyzem meg, hogy a TLCM ezeket sem a szokásos módon igényli a bemenetén, hanem az $u_+ = \mu_1 + \mu_2$ és $u_- = \mu_1 - \mu_2$ kombinációikat.)

Hogy a legalkalmasabb modellt objektív módon tudjam kiválasztani, az úgynevezett Akaike- és a Bayes-féle információs kritériumokat használtam (Akaike ill. Bayesian Information Criteria, a továbbiakban AIC ill. BIC ; Cavanaugh és Neath, 2019). Ezeknek a modellszelekcióban használatos mennyiségeknek a definíciói:

$$AIC = 2 \cdot n_{\text{par}} + n_{\text{obs}} \cdot \log(RSS/n_{\text{obs}}), \quad (3.4)$$

$$BIC = n_{\text{par}} \cdot \log n_{\text{obs}} + n_{\text{obs}} \cdot \log(RSS/n_{\text{obs}}), \quad (3.5)$$

ahol n_{par} a paraméterek száma, n_{obs} a megfigyelések (adatpontok) darabszáma, RSS pedig az adatillesztés maradványainak négyzetösszege (*Residual Sum of Squares*). Mindkét kritérium annak az általános elvnek szerez érvényt, hogy a több illeszthető paramétert tartalmazó modell természetes módon jobban illeszkedhet az adatokra, mint a kevesebb paraméterű, ezért pusztán az illeszkedés jósága alapján nem lehet eldönteni, hogy melyikük az alkalmasabb. Az egyetlen különbség a két formula között, hogy a BIC az első tagjában levő $\log n_{\text{obs}}$ szorzótényező révén jobban bünteti a modellparaméterek magasabb számát, mint az AIC . Általános szabály, hogy a legalacsonyabb AIC/BIC számú modell a legelfogadhatóbb, míg a többi modell relevanciáját a legkisebbtől való különbsége alapján mérjük. Ha ez a különbség kevesebb, mint 3, akkor az adott modell alátámasztottsága alaposnak tekinthető; 4 és 7 közötti különbség esetén a modell kevésbé elfogadható; 10 felett pedig a modell elvethető.

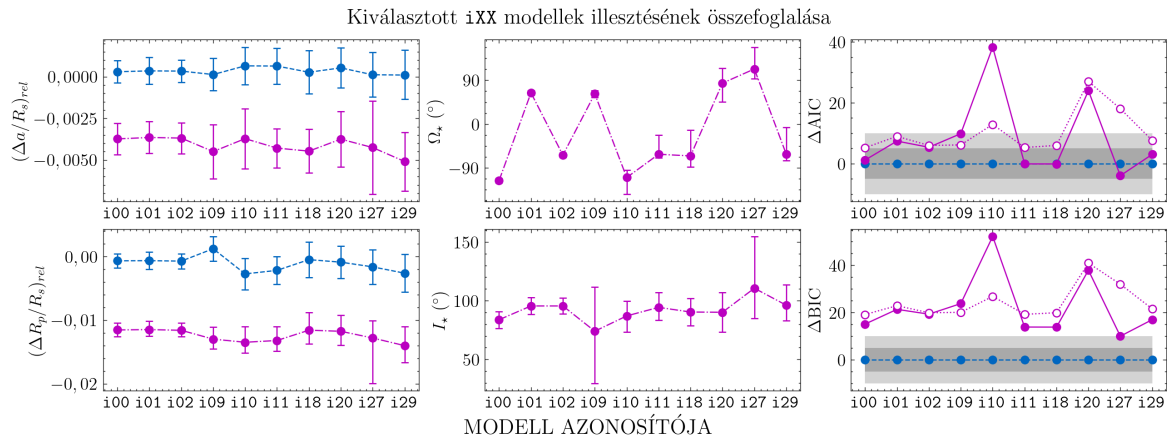
Mivel a pulzációk kerültek illesztésre vörös zaj egy formájaként, mindkét kritériumból két változatot számoltam ki. Az egyikben a vörös zaj hozzáadásra került a tranzit modellhez, amit 'yn'-ként (angol 'yes noise' rövidítéseként) jelöltem a modellszámítások eredményénél.

A másikon pedig nem tekintetem a tranzit modell részeként, hanem a reziduálhoz adtam hozzá, amit emiatt 'nn'-ként (angol 'no noise' rövidítéseként) jelöltem.

A pXX sorozat esetén a megerősített pulzációs amplitúdó maga után vonhat egy olyan nagy vörös zaj összetevőt, amelyet a TLCM vörös zajt kezelő algoritmus nem képes már kielégítően kezelni. Amennyiben ez előfordult, akkor az érintett frekvenciákat egyedileg azonosítottam a `Period04` programmal (Lenz és Breger, 2005), majd levontam őket egyszerű harmonikus jel formájában. Ha a fehéritési folyamat kielégítőnek mutatkozott, akkor a TLCM illesztési eljárását megismételtem.

3.3. Eredmények

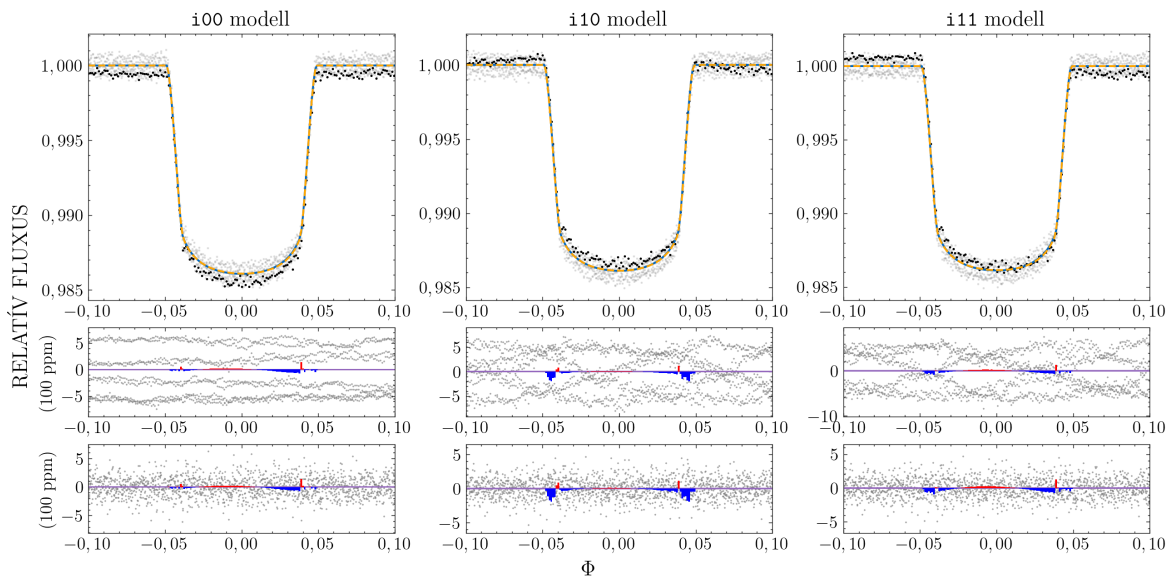
3.3.1. Egymódusú, radiális pulzációk



3.2. ábra Válogatott iXX modellek futtatási eredményeinek összefoglalója. A kék szín a $\beta = 0$ igazodott esethez, a vörös színű pedig a $\beta = 0,25$ szabad szögű esethez tartozik minden ábrán. **Bal oldali panelek:** a a/R_S és R_p/R_S illesztési paraméterek bemeneti értéktől való relatív eltérése. **Középső panelek:** Az Ω_* és I_* illesztett szögek szabad szögű illesztéseknél a $\beta = 0,25$ feltételezésével. **Jobb oldali panelek:** a ΔAIC és ΔBIC kiszámított különbségei a szabad szögű és igazodott szögű esetek között. A telített körök jelölik az 'n' scenáriókat (vörös zaj a tranzit-modell része), az üres körök pedig az 'nn' scenáriókat kódolják (nincs vörös zaj a tranzit-modellben). A szürkeárnyaltos zónák az AIC/BIC értékek 5-ös és 10-es különbségéhez tartoznak és a két elutasítási küszöböt jelölik ki.

Az egyfrekvenciás pulzációk semmilyen nehézséget nem jelentettek a TLCM wavelet algoritmusának, amely a vörös zaj kezeléséért felel. Az igazodott (rögzített szögű) esetben mind a 30 tesztrendszer hibán belül visszanyertem az eredeti bemeneti paramétereket, ahogy azt a 3.2. ábra is szemlélteti néhány válogatott esetre. Az adatok szórása nagyobb

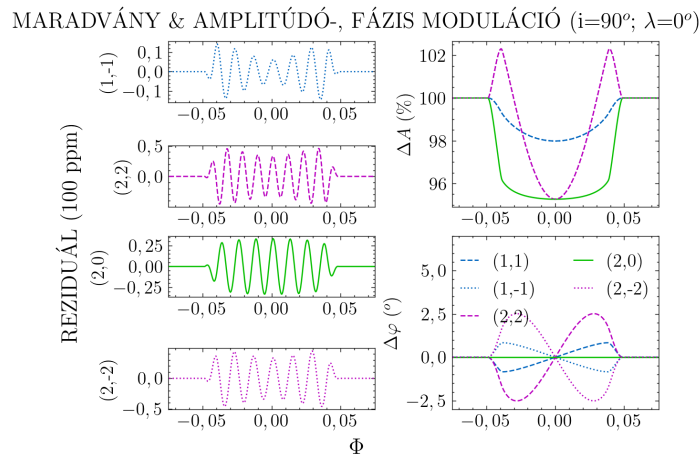
bizonytalanságokat eredményezett az illesztett paraméterek értékeiben, és ez várható is volt. A szabad tengelyű illesztések is az esetek többségében az igazodott tengelyhez tartozó megoldást eredményezték, bár általában nagyobb AIC , és mindig nagyobb BIC értékekkel, ami alapvetően alátámasztja az egyszerűbb modelleket. Voltak ugyan kis mértékű eltérések a relatív bolygósugárra kapott értékekben (a 3.2. ábra bal panelje), ám ezek hibán belül még mindig megegyeznek az eredeti, bemeneti értékkel. A szintetikus adatsorokra kapott illeszkedést a 3.3. ábra szemlélteti három teszt-esetre. Az $i00$, $i01$ és $i11$ szintetikus adatsorai azok illesztéseivel, illetve a vörös zaj és a reziduál elkülönítve szerepelnek egymás alatt. Ebben a felállásban az igazodott és szabad tengelyű modellek kék illetve piros színnel jelölt maradványai gyakorlatilag együtt futnak.



3.3. ábra Példaillesztések és reziduálok három szimulált rendszerre az iXX sorozatból. **Felső panelek:** Keringési fázisra feltekert fénygörbék szürke szürke telített körökkel, a szimulált zajmentes tranzitgörbe az első keringési periódusra, zajjal és pulzációval együttesen fekete telített körökkel. Egy-egy panelen két illesztett modell került ábrázolásra: a fix, igazodott tengelyű ($\lambda_* = 0^\circ$, $I_* = 90^\circ$, $\beta = 0$) modell kék szaggatott vonallal, és az illesztett tengelyű ($\beta = 0,25$) modell narancssárga folytonos vonallal. A két illesztés gyakorlatilag megkülönböztethetetlenek ezeken a grafikonon. **Középső panelek:** a reziduál illesztett vörös zaj komponense. **Alsó panelek:** A reziduál maradék komponense. A színek a fix és az illesztett tengelyű modellek generált görbéi közötti különbségek előjelét kódolják a vízszintes $y = 0$ tengely mentén (a pozitív különbséget vörös, a negatívát kék, egyébként pedig bíbor színnel jelöltem).

3.3.2. Többszörös, nemradiális pulzációk

A különféle nemradiális pulzációknak a tranzitok ideje alatt az integrált fluxusban mérhető modulációit a 3.4. ábra szemlélteti. A szimulált fénygörbék minden esetben a tranzit során elfedett pulzáció nagyon kicsi modulációira világítanak rá. Összehasonlítva a fedési kettőscsillagok esetén fellépő modulációval (2.1. ábra), a különbség szembeötlő, mert a tranzit okozta amplitúdó-modulációk nem nagyobbak 2–5%-nál a nem perturbálthoz képest, a kezdőfázis-változások pedig alig érik el a 2° -ot. Összehasonlításképpen egy tipikus fedési kettőscsillagban 30-50%-os amplitúdó- és $30-50^\circ$ -os kezdőfázis-modulációk fordulnak elő. Valódi körülmények között tehát az exobolygós tranzitok alatti modulációk sokkal kisebbek, mint a mérési hibák, emiatt gyakorlatilag nem érzékelhetők.

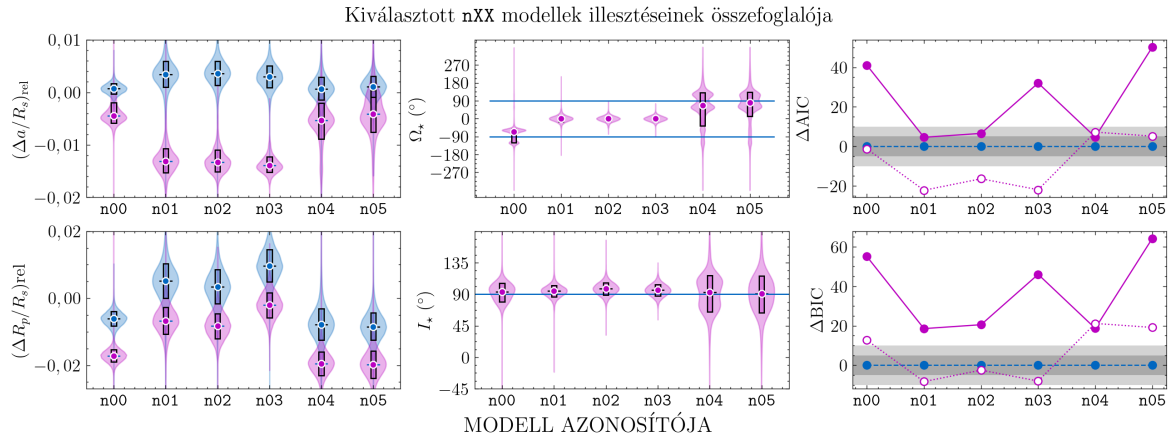


3.4. ábra Egy példa néhány nemradiális pulzációra egy igazodott tengelyű pályán keringő ($i = 90^\circ$, $\lambda = 0^\circ$) exobolygó tranzitja alatt. Balra a négy panel mutatja be a jelek reziduáljait a (0,0) módus levonását követően. A jobb oldali panelek szemléltetik az elszenvedett amplitúdó (felül), és fáziskésés modulációt a látható nemradiális módusok esetére. Bár a moduláció jellege változatosnak tűnik, a függőleges tengelyek értékei rávilágítanak arra, hogy a változás alig érzékelhető, különösen a fázis tekintetében.

A teljesség kedvéért azt is megvizsgáltam, hogyan függnek ugyanezen nemradiális módusok modulációi a λ_* vetített spin-pálya szögtől, miközben az I_* szöget 90° -on tartom. Ennek során arra jutottam, hogy a modulációknak gyakorlatilag nincsen észlelhető erősödése. Bár nem vettem tekintetbe az összes lehetséges dőlt konfigurációt, a vizsgáltakra kapott kis modulációk azt sugallják, hogy semmilyen dőlt konfigurációban nem lennének jelentősek.

Emiatt úgy tűnik, hogy a modellezett paraméterek eltorzulása nem fog függeni a pulzáció radiális vagy nemradiális természetétől. E következtetés árnyoldala viszont az, hogy a pulzációk nem is hasznosíthatók az anyacsillag ferdeségének feltárásában. Ahogy az az előző alfejezetben találtam, az egymódusú pulzációk nem jelentettek problémát az illesztésekre

nézve. Ugyanakkor több pulzáció szimultán jelenléte még vezethet a tranzitprofil észrevehető eltéréséhez, ha egy nem szerencsés együttállásban vannak. Ennek lehetőségét térképeztem fel az n_{xx} illesztési sorozatokban. Az e célból vizsgált esetekre kapott eredményekről a 3.6. táblázat és a 3.5. ábra adnak tájékoztatást.



3.5. ábra Az n_{xx} esetek eredményeinek összefoglalója. Az ábra elosztása a 3.2. ábrához hasonló, de a bal és középső paneleken az egyes paraméterek marginalizált eloszlásai kerültek ábrázolásra egy úgynevezett hegedűs diagramon (angolul *violin plot*). Azokon belül a telített körök és sávok a mediánt és a 99%-os konfidencia-tartományokat jelölik.

Az első, n_{00} esetben a gravitációsan sötétedett, szabad tengelyű modellel is a helyes, igazodott konfigurációt kaptam. Az adatsoron elért illesztést a 3.6. ábra mutatja. Az n_{01} esetben viszont – hasonlóan véletlenszerűen kiválasztott módusokkal – már egy oldalra dőlt konfigurációt kaptam, akárcsak az n_{02} -re is (lásd: 3.7. ábra), amelybe az összes módust belevettem. Ugyanakkor a hozzájuk tartozó 'yn' ΔBIC különbségek minden esetben elég nagyok ahhoz, hogy a bonyolultabb, gravitációsan sötétedett modelleket kevésbé elfogadhatónak tartsuk az igazodott tengelyű modelleknél.

Mindazonáltal igen tanulságosnak ígérkezett feltárni a torzulás természetét, amelyet a pulzációs jelek hoznak létre, és amely végső soron félrevezeti a megoldást az igazodott konfigurációtól. Hogy ezt kiderítsem, számos próbafuttatást hajtottam végre, hogy azonosítsam azt a módust, ami jelentősen hozzájárul a kapcsolódó tranzit fénygörbe aszimmetriájához. Ezek során négy gyanús módust azonosítottam, amelyek a 3.3. táblázat 2, 5, 7, és 10-es sorszámú frekvenciáinak felelnek meg. Ezek együttes járuléka, amit a 3.8. ábrán mutatok be az egyedi átlagolt jelekkel együtt, emlékeztet a kétféle modell illesztett görbéinek különbségére, így joggal tételezhető fel, hogy ezek okozzák azt az eltérést, amit a gravitációsan sötétedett modell esetén bemutattam.

A másik gyanús jelölt az F1-es frekvencia volt, azon nyilvánvaló okból, hogy igen közel áll a keringési frekvencia 30-szoros felharmonikusához ($30 \cdot f_{\text{orb}}$), ami lehetővé tette, hogy

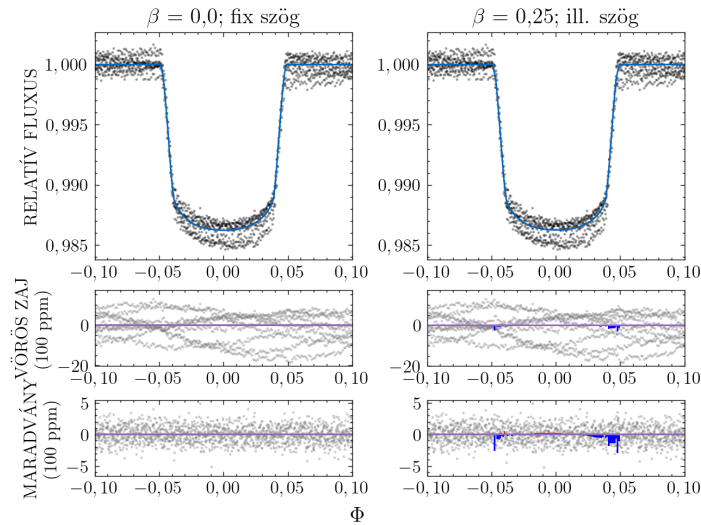
3.4. Táblázat Összefoglaló táblázat a mind a tíz pulzációt magában foglaló n02 esetről.

Paraméter	rögzített szögek rögzített b $\beta = 0,0$	illesztett szögek illesztett b $\beta = 0,25$	illesztett szögek rögzített b $\beta = 0,25$
a/R_s	$3,6980^{+0,0084}_{-0,0083}$	$3,631^{+0,012}_{-0,012}$	$3,6356^{+0,0085}_{-0,0066}$
R_p/R_s	$0,11208^{+0,00057}_{-0,00056}$	$0,11081^{+0,00045}_{-0,00044}$	$0,11077^{+0,00041}_{-0,00042}$
t_C	$0,49995^{+0,00019}_{-0,00019}$	$0,49996^{+0,00011}_{-0,00011}$	$0,49996^{+0,00011}_{-0,00010}$
P	$0,999987^{+0,000041}_{-0,000041}$	$0,999982^{+0,000028}_{-0,000025}$	$0,999982^{+0,000028}_{-0,000025}$
σ_r (100 ppm)	$223,9^{+3,1}_{-3,1}$	$223,6^{+2,4}_{-2,3}$	$223,5^{+2,3}_{-2,3}$
σ_w (100 ppm)	$3,073^{+0,066}_{-0,065}$	$3,068^{+0,047}_{-0,048}$	$3,069^{+0,049}_{-0,047}$
b	0,	$0,001^{+0,075}_{-0,077}$	-1
I_*	90	$97,7^{+8,7}_{-9,0}$	$97,7^{+8,8}_{-9,0}$
Ω_*	90	0^{+15}_{-14}	-0^{+13}_{-14}
AIC yn	-139526	-139506	-139519
BIC yn	-139484	-139443	-139463
AIC nn	-108523	-108530	-108539
BIC nn	-108495	-108481	-108498

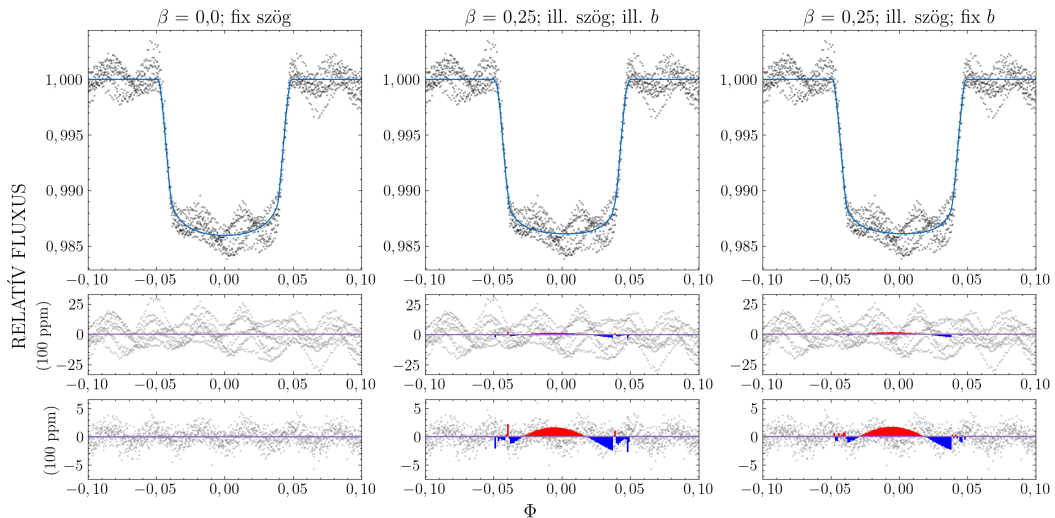
a jele az előző csoporthoz képest jóval közvetlenebb módon befolyásolja az illesztést. E hipotézisem leellenőrzése végett három teszt-esetet állítottam össze, amelyekből vagy a négy gyanúsnak vélt módust (n04), vagy csupán a rezonáns módust n05, vagy pedig mindkettőt kihagytam. Ahogy a 3.5. ábrán is látható, az n03 eset semmilyen javulást nem mutatott a modell kiválasztása szempontjából, a másik két esetben (n04 és n05) viszont jelentősnek bizonyult a BIC értékekre nézve.

Megjegyzendő hogy a pusztán fotometriai adatsorokra történő illesztésekből kapott (I_* , Ω_*) szögek valójában még három másik szögpárossal egyenértékűek: (I_* , $180^\circ \pm \Omega_*$) és ($-I_*$, $360^\circ - \Omega_*$) (Barnes, Linscott és Shporer, 2011). E négy konfigurációban a központi csillag gravitációs sötétedése az exobolygó pályája mentén teljesen azonos módon változik, ezért pusztán fotometriai adatokból nem lehet különbséget tenni közöttük. Ezek az ekvivalens szögpárok kettős csúcsok formájában tisztán megmutatkoznak a 3.5. ábra Ω_* marginalizált eloszlását ábrázoló „hegedűs” ábráin.

A pxx, felerősített amplitúdójú pulzációkat tartalmazó esetre vonatkozóan azt találtam, hogy az már a TLMC vöröszaj-kezelési algoritmusának alkalmazhatósági határán túl van, mert a 3.5 táblázat alapján a kapott megoldások jóval nagyobb bizonytalanságokkal rendelkeznek

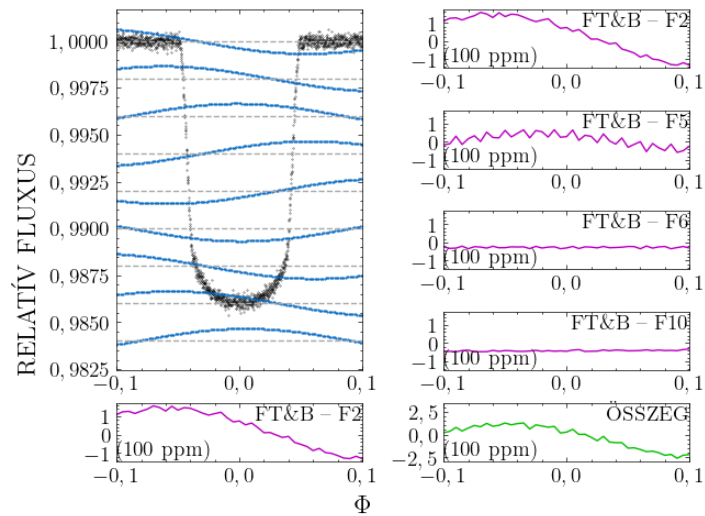


3.6. ábra Az n00 teszt esetre kapott modellillesztés. Az egyes modellek azonosítói az oszlopcégekben találhatóak. A **felső sorban** a szintetikus adatsort fekete szimbólummal, a kapott modellillesztést pedig kék vonallal jelöltem. A **középső és alsó sorok** az illesztett vörös zajt illetve a végső reziduálokat mutatják. A színezett területek a 3.3. ábrához hasonlóan a két modell közötti különbségek előjeleit kódolják.



3.7. ábra Az n02 esetre kapott modellillesztés. A szerkezet és jelölések a 3.7. ábrával egyezik meg.

az nxx esetekhez képest: körülbelül 10-szer nagyobbak azoknál (vö. a 3.6. táblázattal). Az egyik leglátványosabb bizonytalanság az $\Omega_{\star} = 2^{+147}_{-148}$. Ezen a szintetikus adatsorra kapott fénygörbe-megoldást elnézve nem is kell nagyon csodálkozni (3.9. ábra bal oldali panelje).



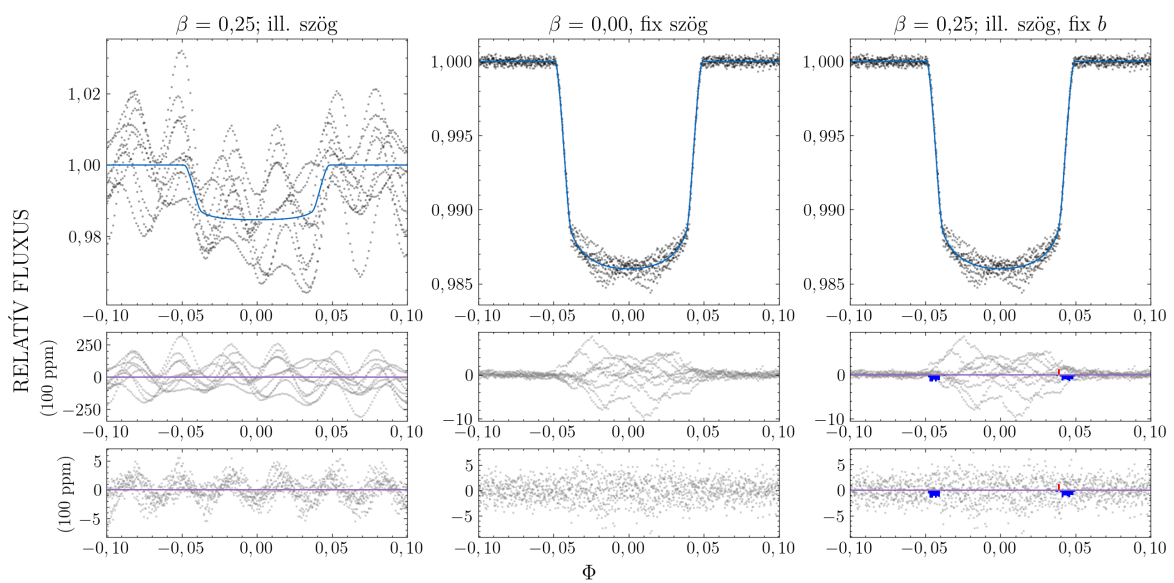
3.8. ábra Néhány szinuszos harmonikus jel járuléka a teljes fluxushoz a tranzit fázisa környékén. **Bal felső panel:** az F2 járuléka minden egyes tranzit idején, függőlegesen eltolva a jobb láthatóság érdekében. A könnyű összehasonlítás végett a feltekert tranzit-modellt is feltüntettem. **Bal alsó panel:** Az F2 járuléka keringési periódusra feltekerve és binnelve, 100 ppm-es skálán mutatva. **Jobb oldali panelek:** F2, F5, F6 és F10 átlagos járulékai, legalul pedig azok összege.

A fellépő probléma feloldására az adatsort a Period04 program segítségével fehérítési eljárásnak vettem alá az adatsort, majd a szignifikánsnak azonosított frekvenciákat egyszerű harmonikusként vontam le az adatsorból, ahogy a 3.10. ábrán is látható.

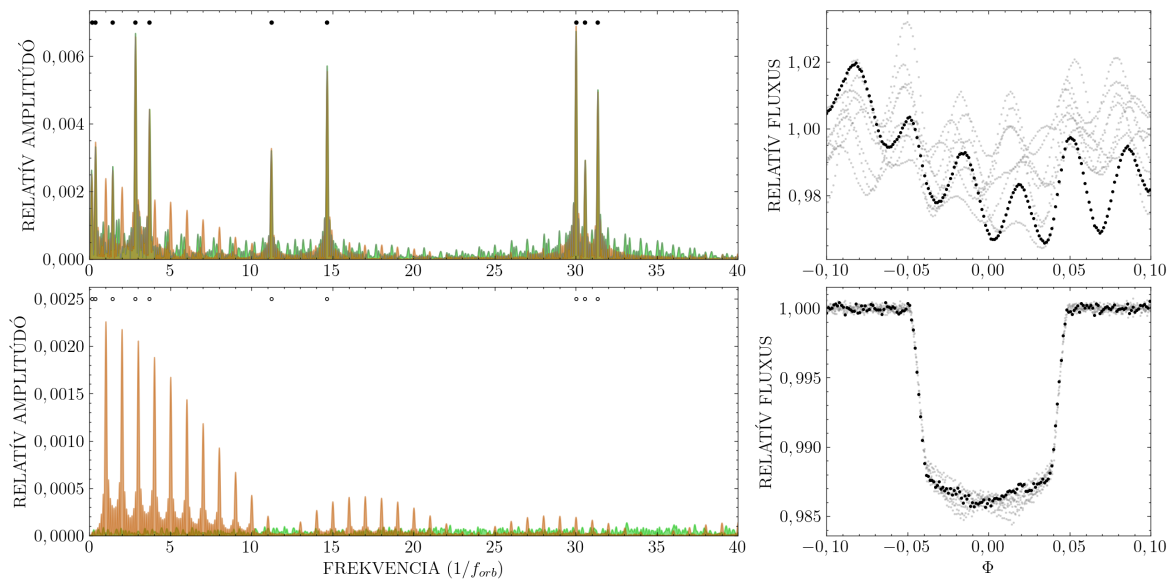
Ahogy az a 3.5. táblázat bal- és jobboldali oszlopaiban is látható, a kinyert megoldás a szabad szöges illesztésre lényegében az igazodott helyzetet mutatja ($I_{\star} = 93^{+15}_{-20}$; $\Omega_{\star} = 81^{+32}_{-15}$). Mindenesetre az *AIC* és *BIC* értékek szintén megerősítik, hogy az egyszerűbb, igazodott tengelyű modell a helyes megoldás. A teljesség kedvéért a fénygörbe-megoldásokat is ábrázoltam a 3.9 ábra középső és jobboldali paneljein.

3.5. Táblázat A tízfrekvenciás, tízszeresen felerősített amplitúdójú pxx tesztet elemzéséből kapott paraméterek.

Paraméter	pxx; összes frekv.	pxx - sin()	pxx - sin()
	$\beta = 0,25$	$\beta = 0,00$	$\beta = 0,25$
a/R_s	$3,679^{+0,063}_{-0,073}$	$3,6813^{+0,0029}_{-0,0030}$	$3,6698^{+0,0029}_{-0,0024}$
R_p/R_s	$0,1165^{+0,0036}_{-0,0036}$	$0,11192^{+0,00016}_{-0,00016}$	$0,11071^{+0,00012}_{-0,00012}$
b	$0,11^{+0,12}_{-0,09}$	0,	0,
t_C	$0,49988^{+0,00083}_{-0,00080}$	$0,500022^{+0,000061}_{-0,000062}$	$0,500014^{+0,000079}_{-0,000055}$
P	$0,99986^{+0,00018}_{-0,00018}$	$0,999998^{+0,000013}_{-0,000012}$	$0,999996^{+0,000011}_{-0,000014}$
σ_r (100 ppm)	2165^{+21}_{-21}	$50,4^{+2,1}_{-2,2}$	$50,5^{+1,6}_{-1,6}$
σ_w (100 ppm)	$11,29^{+0,14}_{-0,14}$	$1,966^{+0,034}_{-0,034}$	$1,966^{+0,025}_{-0,025}$
I_*	90^{+27}_{-28}	90	93^{+15}_{-20}
Ω_*	2^{+147}_{-148}	90	81^{+32}_{-15}
AIC yn	-135473	-136278	-136247
BIC yn	-135410	-136236	-136191
AIC nn	-72379	-131545	-131495
BIC nn	-72330	-131517	-131453



3.9. ábra A pxx esetekből kapott eredmények összefoglalója. Az ábra szerkezete hasonló a 3.7. ábrához azon kívül, hogy a bal oldali panel annak az adatsornak felel meg, amiben minden frekvencia benne van, míg a másik kettő oszlop esetén a 10 detektált frekvencia szinuszos modellként levonásra került. Ezért a modellek közötti különbség csupán utóbbiak esetén van megadva.



3.10. ábra A pxx adatsor adatain elvégzett fehérítési folyamat illusztrációja. A felső és alsó sor a fehérítés előtti és utáni állapotoknak felel meg. **Bal oldali panelek:** Az adatsor Fourier-transzformáltja oly módon, hogy a tranzit fázisait magában foglaló illetve azok nélküli számításokat is ábrázoltam, illetve zöld színekkel. A fehérítés után kapott Fourier-spektrum amplitúdóit 10-szeresükre emeltem a jobb láthatóság végett. A detektált frekvenciák telített, illetve üres karikákkal van jelölve aszerint, hogy a tranzitok jelei be voltak-e vonva az analízisbe vagy sem. **Jobb oldali panelek:** a feltekert szintetikus adatsor (világos szürkével), valamint az első keringési fázishoz tartozó adatpontok (feketével).

3.6. Táblázat A többmódusú, nemradiális pulzációval rendelkezőnXX esetek illesztési eredményeinek összefoglalója. A b ütközési paraméterek rögzítve voltak a bemutatott illesztéseknél.

Esetek; Modellek	$\Delta a/R_s$ (%)	$\Delta R_p/R_s$ (%)	Δt_c (%)	ΔP (100 ppm)	σ_r (100 ppm)	σ_w (100 ppm)	I_*	Ω_*	AIC yn	BIC yn	AIC nn	BIC nn
n00; ($\beta = 0,0$)	$+0,27^{+0,37}_{-0,37}$	$-0,68^{+0,24}_{-0,24}$	$+0,04^{+0,08}_{-0,08}$	$-0,05^{+0,17}_{-0,17}$	$96,3^{+1,6}_{-1,7}$	$1,885^{+0,034}_{-0,035}$	90	90	-141122	-141080	-115370	-115343
n00; ($\beta = 0,25$)	$-1,64^{+0,93}_{-0,50}$	$-1,92^{+0,20}_{-0,20}$	$+0,07^{+0,09}_{-0,10}$	$-0,12^{+0,19}_{-0,18}$	$96,4^{+1,3}_{-1,3}$	$1,887^{+0,027}_{-0,027}$	94^{+12}_{-15}	-65^{+13}_{-55}	-141081	-141025	-115372	-115330
n01; ($\beta = 0,0$)	$+1,26^{+0,91}_{-0,90}$	$+0,57^{+0,58}_{-0,57}$	$+0,05^{+0,18}_{-0,18}$	$-0,35^{+0,37}_{-0,38}$	$203,0^{+3,2}_{-3,3}$	$2,903^{+0,068}_{-0,068}$	90	90	-139253	-139211	-110522	-110494
n01; ($\beta = 0,25$)	$-4,83^{+0,89}_{-0,80}$	$-0,75^{+0,44}_{-0,44}$	$+0,01^{+0,12}_{-0,11}$	$-0,31^{+0,23}_{-0,24}$	$202,8^{+2,3}_{-2,3}$	$2,900^{+0,045}_{-0,047}$	$94,6^{+7,9}_{-8,3}$	0^{+15}_{-15}	-139248	-139192	-110544	-110502
n02; ($\beta = 0,0$)	$+1,34^{+0,84}_{-0,83}$	$+0,38^{+0,57}_{-0,56}$	$-0,05^{+0,19}_{-0,19}$	$-0,13^{+0,41}_{-0,41}$	$223,9^{+3,1}_{-3,1}$	$3,073^{+0,066}_{-0,065}$	90	90	-139526	-139484	-108523	-108495
n02; ($\beta = 0,25$)	$-4,90^{+0,85}_{-0,66}$	$-0,93^{+0,41}_{-0,42}$	$-0,04^{+0,11}_{-0,10}$	$-0,18^{+0,28}_{-0,25}$	$223,5^{+2,3}_{-2,3}$	$3,069^{+0,049}_{-0,047}$	$97,7^{+8,8}_{-9,0}$	-0^{+13}_{-14}	-139519	-139463	-108539	-108498
n03; ($\beta = 0,0$)	$+1,09^{+0,77}_{-0,76}$	$+1,09^{+0,54}_{-0,53}$	$-0,09^{+0,17}_{-0,17}$	$-0,07^{+0,35}_{-0,35}$	$215,8^{+2,9}_{-2,9}$	$3,010^{+0,058}_{-0,058}$	90	90	-139274	-139232	-112326	-112298
n03; ($\beta = 0,25$)	$-5,14^{+0,61}_{-0,48}$	$-0,23^{+0,41}_{-0,41}$	$-0,08^{+0,09}_{-0,09}$	$-0,13^{+0,27}_{-0,23}$	$215,5^{+2,3}_{-2,2}$	$3,008^{+0,047}_{-0,046}$	$95,8^{+8,3}_{-8,3}$	-0^{+13}_{-13}	-139242	-139186	-112348	-112306
n04; ($\beta = 0,0$)	$+0,25^{+0,82}_{-0,79}$	$-0,88^{+0,53}_{-0,51}$	$-0,01^{+0,18}_{-0,17}$	$+0,09^{+0,37}_{-0,37}$	$175,6^{+2,7}_{-2,7}$	$2,629^{+0,064}_{-0,063}$	90	90	-140324	-140282	-112337	-112309
n04; ($\beta = 0,25$)	$-1,96^{+1,20}_{-1,30}$	$-2,18^{+0,39}_{-0,40}$	$-0,03^{+0,16}_{-0,13}$	$+0,08^{+0,30}_{-0,31}$	$175,7^{+2,1}_{-2,0}$	$2,630^{+0,046}_{-0,046}$	93^{+24}_{-28}	66^{+64}_{-103}	-140319	-140263	-112330	-112288
n05; ($\beta = 0,0$)	$+0,40^{+0,74}_{-0,73}$	$-0,94^{+0,46}_{-0,45}$	$+0,01^{+0,15}_{-0,15}$	$+0,05^{+0,31}_{-0,33}$	$179,7^{+2,5}_{-2,5}$	$2,653^{+0,056}_{-0,055}$	90	90	-140549	-140507	-110299	-110271
n05; ($\beta = 0,25$)	$-1,56^{+1,60}_{-1,30}$	$-2,21^{+0,46}_{-0,45}$	$+0,03^{+0,16}_{-0,15}$	$-0,04^{+0,33}_{-0,31}$	$179,7^{+2,3}_{-2,4}$	$2,656^{+0,050}_{-0,049}$	91^{+26}_{-27}	80^{+53}_{-68}	-140498	-140443	-110294	-110252

3.4. Következtetések

Az ebben a fejezetben taglalt vizsgálatokkal az volt az elsődleges célom, hogy feltárjam a csillagpulzáció lehetséges zavaró hatásait az előtte elhaladó exobolygó paramétereinek tranzitgörbékben történő meghatározására. Próbailestéseket végeztem el szintetikus adatsorokra, amelyeket mesterségesen keltett, többféle típusú pulzációs jellel "szennyeztem" be, hogy tanulmányozhassam az effektust.

Azt találtam, hogy egyrészt a nemradiális pulzációk exobolygótranzitok által okozott, integrált fluxusban mért modulációi olyan kicsik, hogy észrevehetetlenek a *TESS* megfigyeléseiben. Így a pulzáció nemradiális természete nagy biztonsággal elhanyagolható, a tranzit elemzése során elegendő, ha radiális módusokként kezeljük azokat – azaz a tranzit mélységével arányos amplitúdócsökkenésüket azért figyelembe véve szabadulunk meg tőlük.

Az egymódusú pulzációk egyetlen esetben sem térítették el az illesztést. A gravitációsan sötétedett ($\beta = 0,25$), szabad tengely(szögű) modellek lényegében az igazodott tengelyű konfigurációt, illetve hibán belül a bemeneti paraméterértékeket adták vissza. Az egyszerű $\beta = 0$ modellek is ugyanazokat a bemeneti paramétereket eredményezték. Ráadásul a rendre alacsonyabb *AIC* és *BIC* értékek mind azt jelezték, hogy a gravitációs sötétedés egy felesleges feltételezés, az adatok nem támasztják alá. Ezen utóbbi számok még inkább döntőek, ha a vörös zajt is a modell részeként tekintjük, ezzel igazolva, hogy a wavelet alapú megközelítés a szinuszoidális szennyező jelek kezelésére is alkalmas.

Ugyanakkor azt találtam, hogy több, kis amplitúdójú pulzációs jel együttes kombinációja képes megtéveszteni a modellezést a gravitációsan sötétedett esetekben, mint például a n02 esetben (lásd 3.7. ábra és 3.4. táblázat). Eredménynek egy a csillagra egyenlítőjére teljesen merőleges dőlésű exobolygó-pálya adódott, $\Omega_* \sim 0^\circ$ -kal. Furcsa módon 0 és 90 fok közötti értékek sosem fordultak elő. A csillag dőlésszöge is lényegében az égbolt síkjához közel maradt, $I_* \sim 80 - 85^\circ$ -kal. Ebben a konfigurációban a forgástengely égbolt síkjától mért $\sim 5 - 10^\circ$ -os eltérése a tranzit profil mélységét befolyásolja, míg az exobolygó-pálya eldőlése kis aszimmetriaként jelentkezik a tranzit görbében. Úgy néz ki, hogy a pulzációs jelek az tranzit utóbbi jellemzőjére, az *aszimmetriára* bírnak nagyobb hatással.

Az eldőlt tengelyű megoldásokkal végzett vizsgálatok során arra a következtetésre jutottam, hogy azokat a keringési rezonanciához közel eső frekvenciák jele okozza, ami ily módon torzult tranzitgörbét eredményez. A frekvenciák egyéb csoportjának nem volt ilyen befolyása. Azok közvetett rezonanciáját ugyanis a modellezett adatsor hossza okozza, így a feltekert és binnelt járulékok a mérések hosszának, valamint a megfigyelt tranzitok számának függvényében esetenként más és más lehet. Ennek ellenére a jelek eltávolítása biztosabb

eredményekhez vezet még az adatsor elemzése és az arra illesztett modellek *AIC/BIC* alapján történő értelmezése előtt.

Mindenesetre a modellek kiválasztásánál a ΔAIC és ΔBIC különbség többségében arra mutatott, hogy a torzító tényezők ellenére is a gravitációs sötétedés nélküli modell az elfogadhatóbb megfejtés. Ez különösen igaz a ΔBIC 'yn' variánsára, mert minden modellforgatókönyv mellett konzisztensen jelezte az egyszerűbb megoldás érvényességét a vizsgálataim során. Ez jó összhangban van azzal a ténnyel, hogy a korrelált zajkomponens becslésére használt wavelet módszer a TLCM szerves része, ezért mind az *AIC* és mind a *BIC* esetén az 'yn' variáns a megfelelő választás különböző modellek összehasonlításakor.

Az általam először megvalósított scenáriókhöz szintetizált pulzációkat a tipikus δ Sct típusú pulzáció kisebb amplitúdójú részhalmozásának kell tekinteni. Emiatt azt az esetet is megvizsgáltam, amikor tipikusabb δ Sct-jelegű pulzáció volt jelen, legalábbis az amplitúdók mértékét illetően. Tapasztalataim azt jelzik, hogy ilyen nagy mennyiségű és komplexitású pulzációt a TLCM már nem képes vörös zajként megbízhatóan kezelni. Ennek következtében létfontosságú volt eltávolítani a problémát okozó jeleket. Ez esetben minden frekvenciát érintett, ugyanakkor elegendőnek bizonyult, egyszerű harmonikusként levonni azokat. Ezzel azt is kívántam tesztelni, hogy a tranzit idején megmaradó nagyobb reziduál mit okoz az illesztésnél. A TLCM zajkezelő algoritmus könnyen kezelte ezt a szituációt, és az igazodott tengelyű megoldás került elfogadásra. Ugyanakkor ha más frekvenciák is jelen lennének az eredeti 10 darab levont frekvencia mellett, az extra reziduáljuk már okozhat problémákat.

Találtak már néhány δ Sct körüli exobolygó-rendszerben meglehetősen ferde konfigurációkat, mint például WASP-33b (Kálmán és tsai., 2022b) és KELT-26b (Rodríguez Martínez és tsai., 2020) esetén, közöttük fordult elő közel merőleges is. A KELT-26b esetében jelen volt ugyan az adatsorban egy frekvencia, amely közel esett a keringési frekvencia 18-szorosához, de talán nem kapcsolódik az eredményeinkhez, mert a rendszer ferdeségének a tényét Doppler tomográfiával erősítették meg. Ugyanakkor az sem zárható ki, hogy a nemradiális pulzációk esetleg befolyásolják a Doppler-tomográfia eredményeit.

Megállapításaim alapján különös figyelmet kell szentelni azoknál a szimultán fedés- és tranzitmodellezéseknél, amelyekben a gyanított pulzációs jel vörös zajként kerül kezelésre.

3.5. Összefoglalás

Ebben a fejezetben bemutattam azt a kutatómunkát, amellyel feltártam a pulzáció és gravitációs sötétedés által az exobolygós tranzit-fénygörbék fotometriai modellezésében létrehozott degenerációkat. Számos növekvő bonyolultságú fénygörbét szintetizáltam a pulzem és `fitsh` programok segítségével, majd a TLCM algoritmusával illesztettem azokat. Az ered-

mények megmutatták, hogy az exobolygó tranzitárnyéka által okozott amplitúdó- és fázis-modulációk elhanyagolhatóak a fénygörbében. Azt találtam, hogy a TLMC vörös zajt kezelő algoritmus alapvetően jól kezeli azokat az adatsorokat, amelyek egymódusú pulzációkat tartalmaznak, abban az értelemben, hogy mindig az eredeti, igazodott tengelyű megoldások bizonyultak jobbnak a rosszul feltételezett gravitációs sötétedésű futtatások végeredményei ellenében. Ez a következtetés általában igaz maradt többmódusú pulzáció jelenlétével terhelt adatsoroknál is, ám akadt néhány fontos kivétel. Megállapításaim szerint a keringési frekvenciához közeli rezonáns frekvenciák kibújnak a vöröszaj kezelése alól és eltorzíthatják az illesztést, különösen a spin-pálya szögeket illetően. Ezt elkerülhetjük a problémát jelentő frekvenciák egyszerű levonásával még a tranzit elemzése előtt, illetve az igazodott és dőlt tengelyű eredmények elfogadhatóságának összevetésével. E tekintetben arra jutottam, hogy a legmegbízhatóbb mérőszám az egyes illesztett modellek közötti választáshoz a BIC 'yn' variánsa, ami a vörös zajkezelést a kapott tranzitmodell részének tekinti. A vöröszaj-kezelési algoritmusnak ugyanakkor van egy alkalmazhatósági felső határa, ami miatt a nagy amplitúdójú pulzációkat érdemes előzetesen levonni. Az aszimmetrikus tranzitokra visszatérve hasonló következtetésre jutottak más tanulmányokban is, mint például a csillagaktivitásból származó „szennyező” jel kapcsán (Oshagh, Dreizler és tsai., 2016).

4. fejezet

Nemradiális pulzációk módusazonosítása a KIC 3858884 fedési kettős rendszerben

Doktori tanulmányaim legnagyobb részét egy több éven átívelő kutatási projekt tette ki. Az eddig tárgyalt két problémához képest jóval összetettebb feladatot kívántam megoldani: fedési kettősök pulzáló komponenseinek módusazonosítását a fedések modulációs hatásainak kihasználásával. Ez tartogatta a legtöbb kihívást, meglepetést, olykor-olykor zsákutcát. A következő nagy fejezetben egy komplex pulzációkat mutató fedési kettőscsillag adatelemzését és módusrekonstrukcióját mutatom be.

4.1. A KIC 3858884 pulzáló fedési kettős

A KIC 3858884 két majdnem egyforma csillagból álló, jól elkülönülő rendszer, mintegy 26 napos keringési idővel, ugyanakkor erősen elnyújtott pályával: az excentricitás $e = 0,465$. A fedések mélyek, a pályainklináció kb. 88 fok. A rendszert a *Kepler* űrtávcső mérései nyomán azonosították, még az eredeti misszió alatt, az eredeti látómezőben. Különlegessége, hogy a fénygörbéjén jól láthatóak a többmódusú pulzáció jelei, különösen egy, két nagyobb amplitúdójú, közeli frekvenciájú pulzáció kombinációjából adódó *lebegési* jelenség.

A két tagcsillag tömege, hőmérséklete és sugara hasonló, bár a főkomponens kissé nagyobb annál, mint ami a tömege alapján várható lenne. A tág pálya következtében az árapálytorzulások elhanyagolhatóak, a csillagok igen jó közelítéssel gömb alakúak (a tengely körüli forgásuk okozta lapultságot leszámítva). Jellemzőik alapján mindkettő a δ Scuti és γ Doradus csillagok közé tartoznak, így akár mindkettejük mutathat ilyen jellegű, vagy akár hibrid pulzációkat is. A hibrid jellegét igazolták is a rendszerről készült első tanulmányban

(Maceroni és tsai., 2014), amely a *Kepler* űrtávcső által mért fotometriai adatsorok, valamint járulékos nagy felbontású spektroszkópai mérések alapján készült.

Az általuk megállapított paramétereiket a 4.1. táblázatban soroltam fel.

4.1. Táblázat A KIC 3858884 Maceroni és tsai. (2014) által közölt paramétereit.

	Rendszer	
	Főkomponens	Másodkomponens
i ($^\circ$)		$88,176 \pm 0,002$
e		$0,465 \pm 0,002$
ω		$21,61 \pm 0,01$
q		$0,988 \pm 0,02$
a (R_\odot)		$57,22 \pm 0,22$
T_{eff} (K)	6800 ± 70	6606 ± 70
M (M_\odot)	$1,88 \pm 0,03$	$1,86 \pm 0,04$
R (R_\odot)	$3,45 \pm 0,01$	$3,05 \pm 0,01$
$\log g$ (cgs)	$3,63 \pm 0,01$	$3,74 \pm 0,01$
$v_{\text{rot}} \sin i$ (km s^{-1})	$32,2 \pm 1,5$	$25,7 \pm 1,5$

Az idézett tanulmány a pulzációk mélyreható elemzésére is kiterjedt. Míg a keringés okozta oldalcsúcsokat megtalálták a Fourier-spektrumban, a forgásra utaló oldalcsúcsok nem voltak láthatóak, aminek oka az igen gazdag, 400-nál több csúcsot tartalmazó spektrum, valamint a színképek elemzéséből megállapított forgási sebesség bizonytalansága lehetett.

A fedési kettős modelljének az adatokból történő levonása utáni maradványokról megállapították, hogy azok a másodlagos fedések során erősödnek fel. Eszerint a legnagyobb jelű pulzációk többsége a másodkomponensen van; eredményeik szerint ez a két legnagyobb amplitúdójú p-módusú pulzációra ($F_1 \approx 7,23$ és $F_2 \approx 7,47 \text{ d}^{-1}$) minden bizonnyal igaz. Ugyanezen két pulzációs frekvencia módusait is részben azonosították egy, a Breger, Lenz és Pamyatnykh (2009) által bemutatott frekvenciacsoportosulás alapján, amelyet δ Scuti csillagok statisztikai vizsgálata során derítettek fel. Eszerint ezek spektrumában a frekvenciacsúcsok előszeretettel szerepelnek csoportokba rendeződve, továbbá egy-egy csoport legnagyobb amplitúdójú tagja többnyire *radiális* módus, a többi tag pedig – valószínűleg – az ezáltal gerjesztett *nemradiális* módusok tömkelege. Breger, Lenz és Pamyatnykh (2009) a jelenség részleges magyarázatát egy korábbi módusszelekciós mechanizmusban találták meg (Dziembowski és Krolikowska, 1990): azon nemradiális pulzációk, amelyek a csillag köpenyében kerülnek csapdába, a legközelebbi radiális módus által gerjesztődnek. Vizsgálataik szerint ez az $\ell = 1$ módusokra hat a legerősebben.

Ezek alapján Maceroni és tsai. (2014) az első két frekvencia közül F_2 -re (0,0) módust azonosított, mert annak frekvenciája áll a legközelebb a másodkomponens elméleti alaprez-

gési frekvenciájához. míg a másik egy nemradiális módus lehet – valószínűsíthetően $\ell = 1$ fokszámmal.

A pulzációk vizsgálatánál kitértek még az alacsony frekvenciatartományban, alacsony amplitúdóval rezgő g-módusokra is. Elméleti csillagfejlődési és -pulzációs kódok segítségével (CLE, Scuflaire és tsai., 2008, illetve MAD, Dupret, De Ridder és tsai., 2003) megállapították a két csillag korát és fejlődési állapotát. Ezek alapján mindkét komponens mutathat p-rezgéseket, de a g-rezgések hajtómechanizmusa csak a másodkomponensre működhet, a kissé jobban elfejlődött főkomponensre nem (szabad rezgésekre legalábbis; árapály okozta rezgések bármelyik csillagban kialakulhattak, bár ezekre utaló jeleket nemigen találtak). Igen alacsony amplitúdók miatt a g-módusok jelenleg nem alkotják vizsgálataim tárgyát.

A közelmúltban egy másik tanulmány is megjelent a rendszerről (Manzoori, 2020), amelyben a szerző bemutatta a saját fedési modelljét és pulzációs elemzését. A tanulmány elsősorban *árapály keltette* pulzációk keresésére irányult. A pulzációs frekvenciák vizsgálatánál arra jutott, hogy számos frekvencia nemlineárisan csatolódik egymáshoz, és együttesen adják a frekvenciaspektrumban látható harmonikus módusokat. A szakirodalomban található, árapály keltette oszcillációkra vonatkozóan elméleti számolásokat is végzett, amelyekből módusszámokat is kapott.

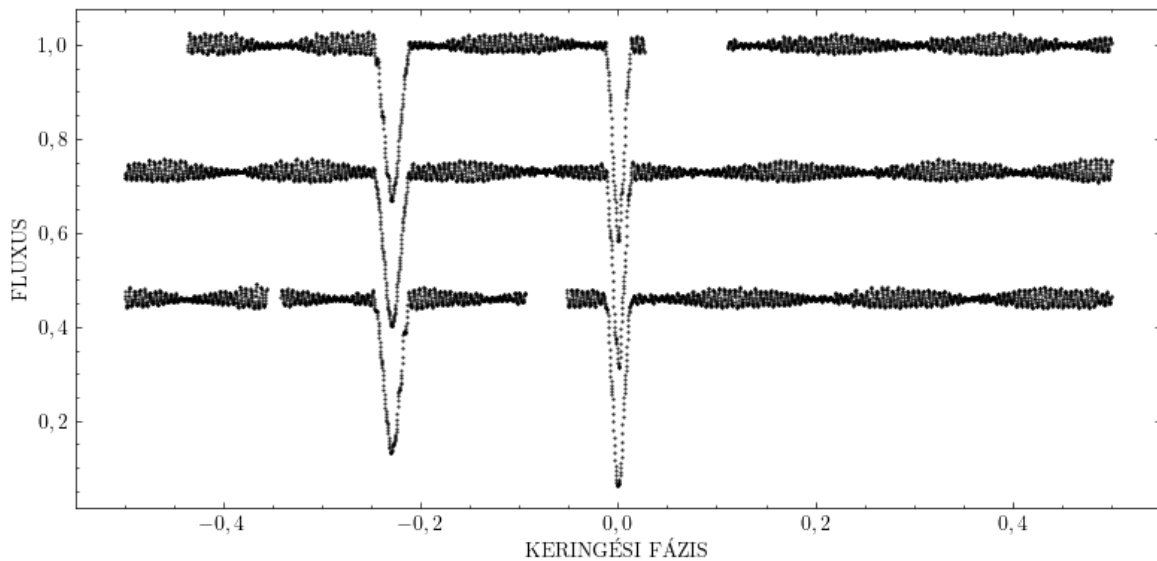
Manzoori (2020) a két legerősebb pulzáció lehetséges eredetét is vizsgálta, és a Maceroni és tsai. (2014) eredményeitől eltérő következtetésre jutott. A pulzációk keringés okozta fázismodulációit vizsgálta Murphy, Bedding, Shibahashi és tsai. (2014) módszerével, és a két frekvenciára egymással ellenfázisban történő fázismodulációt talált, ami arra utal, hogy azok két különböző csillagról származnak (habár az, hogy akkor melyik frekvencia melyik komponenshez tartozhat, nem szerepel a közleményben, és közvetett információkból sem lehetett kikövetkeztetni.)

A komponensekre Maceroni és tsai. (2014) spektroszkópiai elemzéséből a forgási sebességeket is megállapították (4.1. táblázat). Az ezekből becsült forgási periódusok rendre $P_1 \sim 5,4$ és $P_2 \sim 5,9$ nap. A keringési periódushoz mért $f = \omega_{\text{rot}}/\omega_{\text{orb}}$ szinkronizációs paraméterek rendre 4,4 és 5,7 körüliek. Ezekkel leellenőrizve a kettős modellt, megállapítottam, hogy a forgási lapultságaik még így is elhanyagolhatóak. A csillagok tehát tényleg nagyon jól közelíthetőek gömbbel, és ez ideálissá tette a rendszert az általam tervezett vizsgálatokra. A forgástengely irányát illetően csak a főkomponensre lehetett annyit mondani, hogy a keringéshez igazodott forgástengellyel jó összhangban van; a másodkomponensre nincs elegendő adat, mivel a fedések tartományába túl kevés spektrum esett.

4.2. Mérési adatok és kezeléseik

A KIC 3858884-ről a Kepler még az eredeti missziója (2009–2012) során végzett fotometriai méréseket. A célpontról kis és nagy időfelbontású adatok egyaránt elérhetőek. Az ún. *long cadence* (LC) adatok, kb. 30 perc effektív expozíciós idővel, minden negyedéves mérési kampányban megtalálhatóak voltak, kivéve a Q6, Q10 és Q14 negyedeket. A sűrű mintavételezésű, ún. *short cadence* (SC) adatok 2 perc expozíciós idővel, de csak a Q2, Q8 és Q9 alatt készültek a célpontról. A másodlagos fedések időtartama 23 óra 1 perc, az elsődlegeseké 16 óra 41 perc. A δ Scuti típusú pulzációk jellemző periódusa 90 és 300 perc közötti ($f = 5 \dots 15 \text{ d}^{-1}$). Az LC-mérések mind a fedéseket, mind a pulzációkat erősen alulmintavételeznék, ezért az elemzéshez az SC-adatokra esett a választásunk. Ezek az adatsorok összesen 9 hónapnyi időszakot fednek le – nem folytonosan, mivel a Q2 és Q8 között elég nagy űr van. Ezekbe a 26 napos keringési idővel kb. 11 teljes keringés fért be. Két perc időfelbontással ez több, mint 300 000 adatpontot jelentett. Az adatsorokat a Mikulski Archive for Space Telescopes (MAST) nyilvános adatbázisából töltöttem le. Az elemzéshez a Simple Aperture Photometry (SAP) fluxusadatokat választottam, mert a másik választási lehetőséggel, a Pre-search Data Conditioning SAP (PDCSAP) esetén a fotometriai kiértékelést végző algoritmus által kiválasztott, exobolygó-tranzitokra optimalizált trend került levonásra, és esetenként előfordul, hogy a levonandó trendbe belekerülnek a csillagokról származó értékes asztrofizikai jelek is, mint amilyenek a pulzációk. Így a hosszútávú trend levonását külön el kellett végezni.

A trendek levonásához első lépésben egyedileg kiválasztott ún. „co-trending bázisvektorok” (co-trending base vectors, CBV) által meghatározott trend került meghatározásra, néhány bázisvektor kiválasztásával. A trendmentesítés az űrtávcsöves mérésekben óhatatlanul előforduló, műszer és egyéb külső körülmények okozta alapszint-elmozgásokat hivatott korrigálni. Ezeket a vektorokat az adatok előkészítése során minden Kepler-méréshez kiszámolták és közzétették, külön-külön minden egyes mérési negyed (Q) minden egyes szenzorára (az űrtávcső a látómezőt 42 CCD-vel fedte le). A korrekciót a pyKE csomag rutinjaival végeztem; azok a FITS-fejléc információi alapján minden méréshez a megfelelő bázisvektorkészletet választják ki. Ezután egy alacsony fokszámú (harmadrendű) polinomot illesztettem a fénygörbe fedésen kívüli burkolójára egy erre a célra írt Python rutinnal, amely különböző szektorok fedésen kívüli átlagos fluxusait közös szintre hozta. A fénygörbe szegmenseit ezután a fedéseken kívüli fluxus szintjére normalizáltam. Ezeket az eljárásokat külön-külön minden negyedévre elvégeztem. Az ily módon előkészített fénygörbék egy szemelvénye a 4.1. ábrán látható.



4.1. ábra KIC 3858884 adatsorának egy szemelvénye a trendmentesítés után. A szemléltetés kedvéért keringési fázisra feltekertem, és az egyes keringések vertikálisan toltam el. Az első három megfigyelt keringést szemléltettem, és minden 12. adatpontot ábrázoltam a jobb láthatóság kedvéért.

4.3. Vizsgálati módszerek

4.3.1. Fedési és pulzációs modell szétválasztása

Pulzáló csillagokat tartalmazó fedési kettős rendszerek fotometriai adatsorának elemzése eltér a szokványos fedési kettős vagy pulzáló csillagokétól. Egy ilyen rendszerben a változás geometriai és asztrofizikai oka nemcsak együttesen van jelen, hanem csatolódik is a pulzáló csillag elfedődésének idejére, hiszen ilyenkor a fedés okán bekövetkező modulációt is kezelni kell. Ugyan léteznek olyan kettősrendszer-modellt illesztő programok, amelyek az előző fejezetben bemutatott TLCM mintájára a pulzációkat elméletileg képesek vörös zajként, Gauss-eloszlással jellemezhető folyamatként kezelni és leválasztani a fedési modelltől, de nem garantálható, hogy ezzel a pulzációk fedés alatt történő modulációja helyesen választható-e le a fedési fénygörbéről. Ilyen irányú vizsgálatokat tudomásom szerint még nem végeztek. Ezért inkább a hagyományos utat követtem, amelyben egy iteratív eljárással választom el egymástól a két komponenszt. Az iterációt addig kell folytatni, amíg a kettősrendszer-modell paraméterei nem konvergálnak.

Habár Maceroni és tsai. (2014) és Manzoori (2020) egyaránt végeztek már korábban ilyen elemzést a KIC 3858884-re, azért döntöttem az ismétlés mellett, mert nekem egy további

eszköz is rendelkezésemre állt: a *pulzem* programcsomag, amely segítségével már a köztes iterációk alatt *elfedett* pulzációkat lehetett illeszteni, és azokat a modulált jeleket levonni az egyszerű, fényességcsökkenéssel arányos jelek helyett. Ettől a modellben és a pulzációk szétválasztásában is javulás várható, ami, még ha kis mértékű is, a végső elemzést elvégző Eclipse Mapping és Direct Fitting módszereknél lényeges lehet, mivel azok nemcsak pontos, de helyes adatokat is igényelnek.

Az első iterációhoz szükséges kezdőértékeket Maceroni és tsai. (2014) munkájából adoptáltam. A szétválasztás az alábbi lépésekből állt.

- Átlagos fedési fénygörbe előállítás: fedések szakaszainak elhagyásával egy kezdeti periódusanalízis, a szokásos $\text{jel/zaj}=4$ -nél relaxáltabb megállási kritériummal; az azonosított frekvenciák jelének *egyszerű* levonása; a teljes adatsor feltekerése egyetlen keringési ciklusra; majd átlagolás binneléssel. Ehhez egy kezdeti efemeriszre (periódus, epocha) is szükség volt.
- Fedési kettős-modell illesztése az átlagolt fénygörbére.
- Szintetikus fedési fénygörbe levonása a teljes adatsorból, amely után csak a pulzációk jele marad.
- Pulzációs adatsor teljes periódusanalízise.
- Szintetikus pulzációs fénygörbe levonása a teljes adatsorból, amely után csak a fedések jele marad.

Az utolsó pontban a pulzációk levonása már az aktuálisan érvényes fedési modell figyelembe vételével történt. Az első iterációban még csak a pulzációk a másodfedés során történő amplitúdócsökkenését vettem figyelembe, az összes pulzációt radiálisnak feltételezve, amikor is a fényesség a teljes csillagfelszínen azonos fázisban változik. Ehhez a szintetikus pulzációs jelet a levonása előtt beszoroztam a másodkomponens kettősmodellből származó, normalizált járulékával. A második iterációtól kezdve, amikor már jobb modell állt rendelkezésre, az első nyolc domináns csúcshoz tartozó frekvenciára egy köztes fedési rekonstrukciót (Eclipse Mapping, EM) végeztem a *pulzem* csomag *pulsmemplus* programjával, aminek célja e módusok modulációjának a radiális jellegnél pontosabb modellezése. (Ebben a fázisban az EM képi eredményei természetesen nem mérvadóak). A többi, kisebb amplitúdójú jelet továbbra is radiális módusként kezeltem.

A fedésikettős-modell illesztése

A kettősmodell illesztéséhez a PHOEBE (Prša és Zwitter, 2005) programot használtam, amely lényegében a nagypontosságú űrtávcsöves (többek között *Kepler*- és *TESS*-) mérésekre

is felkészített grafikus illesztőprogram a kettősök modellezésére széles körben használt Wilson-Devinney kódhoz (Robert E. Wilson és Devinney, 1971). Egyúttal lehetővé teszi az eredményeim összehasonlítását a korábbi munkákkal, mivel azok is ugyanezt a programot használták. Ez a program fotometriai, valamint kedvező esetben színképelemzésből kinyert radiálissebesség-görbék felhasználásával határozza meg a kettőscsillag fizikai és geometriai paramétereit.

Mivel Maceroni és tsai. (2014) a megállapított keringési periódust az adatok tartományára stabilnak találta, nem volt szükség periódusváltozások illesztésére, ezért közvetlenül a keringési fázisra feltekert adatsorral dolgoztam. A fényességadatokat fedésen kívülre normált fluxus formájában használtam. Ugyanezt a formátumot használják a módusazonosítást célzó programok is. Fontos még az alkalmas sávszűrő beállítása, amelyen keresztül a fényességadatokat készült; esetünkben ez a `Kepler:mean` volt.

A program iteratív optimalizációt végez az ún. *differenciális korrekciók* módszerével. Minden egyes lépésben kiszámolja az illeszkedési költségfüggvény (praktikusan: a maradványok négyzetösszege) paraméterek szerinti parciális deriváltjait, majd azok alapján felajánl egy következő megoldást. Ezért van szükség egy, a jó megoldáshoz közeli kiinduló paramétergyűtesre. Erre első alkalommal a Maceroni és tsai. (2014) eredményeit használtam fel; a későbbi szétválasztásos iterációkban mindig a korábbi kettősmodell volt a kiindulópont.

A program nem tudja leellenőrizni, hogy a felajánlott lépés a paramétertartomány fizikailag érvényes pontjába esik-e, ezért erősen ajánlott minden lépést ellenőrizni, és csak utána elfogadni. Az illesztendő paraméterek halmaza is a felhasználón múlik, és lépésről lépésre változatható.

A modellezés során rögzítettem azokat a paramétereket, amelyeket Maceroni és tsai. (2014) a színképelemzésből határozott meg. Ezek a két komponens hőmérséklete, a fél nagytengely, valamint a tömegarány. Az albedókat és a gravitációs fényesedési együttthatókat is rögzítettem, mivel azok itt irrelevánsak: előbbieket egymást erősen besugárzó, utóbbiak pedig gyorsan forgó, illetve torzult csillagokra lennének fontosak.

Az következő paramétereket illesztettem:

- Excentricitás (e) és a pericentrum argumentuma (ω): mivel a fénygörbe jellemzői ezek $e \cos \omega$ és $e \sin \omega$ kombinációitól függenek, e két paramétert együtt kell illeszteni.
- Fázistolás, $\Delta\phi$: a kettősmodell saját nullfázisa, ami különbözik mind a fotometriai, mind pedig a kepleri mozgáshoz kötött fázisok zéruspontjától. A fotometriai fázis az elsődleges fedés közepétől, a kepleri keringési fázis pedig a periasztrontól indul, ám apszisvonal-vándorlás esetén mindkettő változik; ezért konvenció szerint a nullfázist ahhoz a ponthoz rögzítik, ahol a megfigyelőnek a mindenkori ellipszispálya *középpontján* áthaladó vetített irány az ellipszispályát annak távolabbi pontjában metszi.

Praktikusan ezzel az értékkel kell fázisban eltolni a szintetikus fénygörbét, hogy az adatokra maradéktalanul illeszkedjen.

- Felszíni potenciálok ($\Omega_{1,2}$): ezek határozzák meg pillanatról pillanatra a csillagok alakját, a *Roche-potenciálfüggvény* szerint.
- Pályahajlás szöge (i).
- Szűrőbeli luminozítások ($L_{1,2}$): elnevezésük ellenére ezek egyszerű skálafaktorok, amelyek a két csillag fluxusjárulékát jelentik. Segítségükkel az adatsor és a fizikai kettősmodell szintetikus adatsora hozható azonos skálára (tekintettel arra, hogy a rendszer távolsága általában nem ismert). Közülük pedig igazából csak az egyik független: a hőmérsékletek és sugarak ismeretében egyikükből kiszámítható a másik.
- Szélsőtétedési együtthatók ($x_{1,2}, y_{1,2}$): a beállított szélsőtétedési törvényben megadható koefficiensek közül a lineáris együtthatója illeszthető.

A felsorolt paramétereket a közöttük fennálló kisebb-nagyobb korrelációk miatt külön-külön, illetve kis csoportokban lehet csak illeszteni, így sokszor ciklikusan kellett lépésről lépésre illeszteni az adatsorokat, míg a változás minimálissá nem vált, azaz az adatokra való illeszkedés nem javult tovább. A legvégén az összes paraméter együttes használatával egy utolsó, „nagy” illesztés elvégzésével zártam le az optimalizációt. Az így elfogadott modellel történt a szintetikus fénygörbe előállítás, amelyet a következő lépésekben használtam fel.

Idősor-analízis a pulzációk meghatározására

Ha egy adatsorban periodikus jelek találhatóak, akkor annak Fourier-spektrumában a megfelelő frekvenciáknál ideális esetben csúcsok, valós esetben az adatsorban található úrök jelenléte miatt a csúcsok és az adatsort jellemző ún. ablakfüggvény konvolúciója jelenik meg. Emiatt a csúcsok mellett további hamis csúcsokkal is számolni kell. A helyes frekvenciák megállapításához az úgynevezett fehérítési eljárást használják. Első lépésben a Fourier-spektrumban a legnagyobb amplitúdójú csúcsot kell megkeresni, majd arra egy harmonikus függvényt illeszteni az amplitúdó és kezdőfázis (időnként pedig még a frekvencia) szerint. Az illesztett harmonikus jelet levonjuk, a fehérített adatsorra új Fourier-spektrumot készítünk, amelyben kiválasztjuk a legerősebb csúcsot, azt illesztjük, levonjuk, és ezt a folyamatot ismétljük mindaddig, amíg a talált legerősebb frekvenciacsúcs amplitúdója egy alkalmasan meghatározott jel/zaj érték alá nem csökken.

Az idősor-analízis elvégzésére számos program áll rendelkezésre. Én a SigSpec (Reegen, 2007) nevű programot használtam, amely automatikus fehérítési eljárással keresi meg

a csúcsokat a Fourier-spektrumban, hamisjel-valószínűségen alapuló, ún. *szignifikancia* kiszámításával – szemben a `Period04`-el (Lenz és Breger, 2005), amely viszont a legnagyobb amplitúdójúakat keresi.

A pulzációs adatsorok modellezésénél figyelembe vettem azt a fényességcsökkenést, amit a kérdéses csillag egyszerű elfedése okozna. Másképpen fogalmazva egy-egy pulzációt radiális módusként kezeltem mindaddig, amíg nem keletkezett rá valamilyen megoldás a módusazonosítási eljárásból.

4.3.2. Pulzáció forrásának meghatározása

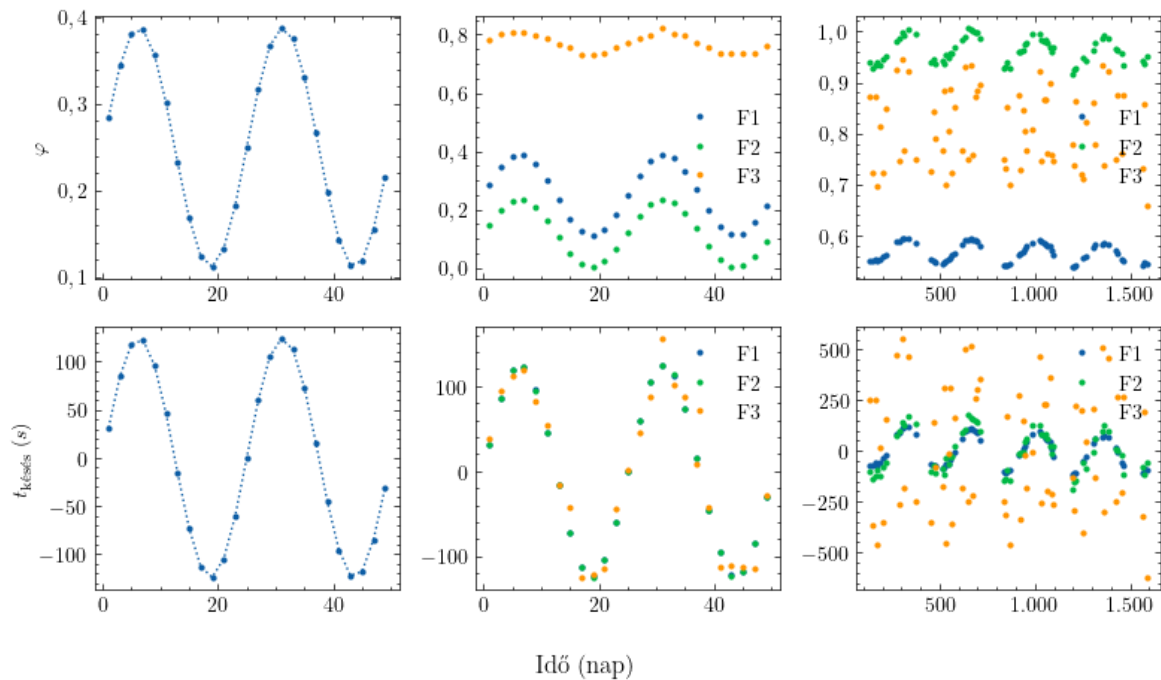
A módusazonosításhoz kiemelten fontos az, hogy az adott frekvencia a megfelelő csillagkomponensen legyen modellezve. E tekintetben van némi ellentmondás a szakirodalomban. A Maceroni és tsai. (2014) megállapításai szerint a legnagyobb amplitúdójú pulzációk valószínűleg a másodkomponensről származnak, amelyre a Rossiter-McLaughlin effektus maradványainak jellegéből, illetve az őáltaluk elvégzett kettős-illesztés maradványaiból következtetett. Ugyanakkor Manzoori (2020) érvelése alapján a két legnagyobb amplitúdójú frekvenciák radiális módusok, és a rendszer két különböző csillagáról származnak, amelyet Murphy, Bedding, Shibahashi és tsai. (2014) fázis modulációs módszerével igazolt, melynek eredménye alapján fázisaik ellentétes irányban változnak. Amennyiben ezek valóban radiálisak, logikus feltételezés, hogy a két hasonló fizikai tulajdonságú csillagról eredjen. Először ezeknek a módusoknak a forrás eredetét vizsgáltam több módszer alkalmazásával, majd ezt az elemzést a többi frekvenciára is kiterjesztettem, hogy ezzel a fontos kérdéssel kapcsolatban választ kaphassunk.

Első lépésben egy viszonylag primitív megközelítéssel a maradványokat vizsgáltam. Ennek lényege, hogy az előző lépésben nyert pulzációs adatsorból a `Sigspec` által azonosított frekvenciákat különböző módon modellezem. Praktikusan ez a főkomponensen, illetve a másodkomponensen való modellezést jelentette, és ezek levonásával a kinyert reziduálokat elemeztem. Amelyik modell levonásával javult a legjobban a kinyert modell, az a modell tekinthető megoldásnak.

Természetesen kísérletet tettem a Manzoori által kapott eredmény reprodukálására, és elemzésére. A Murphy, Bedding, Shibahashi és tsai. (2014) szerint egy periodikus fényességváltozást mutató csillag a nagy sugarú – vagy $e \neq 0$ esetén nagy a félnagy tengelyű – pályamenti keringés következtében a kérdéses csillag felől érkező fény fényidő effektust szenved. Ennek következtében a keringés periódusával megegyező mértékben változik φ kezdőfázis, amelynek amplitúdója a pálya méretétől és a kérdéses pulzáció periódusától függ, amit az alábbi összefüggés segítségével lehet kiszámolni.

$$\Delta\varphi = \frac{d}{cP} \quad (4.1)$$

ahol d a látóirányban mérhető legnagyobb távolság a pulzáló csillag pályáján, c a fénysebesség és P a kérdéses csillagpulzáció periódusa. Ez a gyakorlatban azt jelenti, hogy a mérési adatsort olyan méretű szakaszokra kell osztani, hogy egy keringési perióduson belül kellően sok számú mintavételezést hajtsunk végre, de az új φ_i kezdőfázisokat újra tudjuk illeszteni. Ezt követően ki kell számolni a $\Delta\varphi_i$ értékeket az átlagos kezdőfázis levonásával ($\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi$), majd a pulzációs periódus alapján a kiszámolható az időkéésés.



4.2. ábra A fázismodulációs módszer alkalmazásának bemutatása. A felső panelek az adott oszlopokban szemléltetett alkalmazásban kapott fázis késések időbeli lefutása egy, illetve három frekvenciára. Az alsó panelek pedig az ebből számolt időkééséseket mutatják be. Jobbról balra haladva egy egyfrekvenciás pulzáló csillag modellezett adatsorára, egy három frekvenciás pulzáló csillag modellezett adatsorára, illetve a (Murphy, Bedding, Shibahashi és tsai., 2014) munkájában is bemutatott KIC 11754974 csillag adatsorára elvégzett analízis eredményei.

Erre az egyszerű eljárásra saját programot készítettem, amelyet mesterséges, illetve a Murphy, Bedding, Shibahashi és tsai. (2014) által közölt cikk egyik rendszerére is elvégeztem tesztelésképpen. A teszt sikeresnek bizonyult, amit a 4.2. ábra jobb oldali panelein szemléltettek.

A további elemzéshez kísérletképpen megkíséreltem a teljes adatsor wavelet-transzformációját és annak részletes vizsgálatát. Ehhez a pulzem programcsomag részét képező egyik programot használtam fel, ami a Foster (1996) által ismertetett algoritmust alkalmazza a probléma megoldásához. Ez az ismert wavelet-transzformációk közül ez alkalmas az időben nem egyenletesen mintavételezett, mért adatsorokra, amely a csillagászatban jellemző. Az idő szerinti transzformáció mellett van lehetőség a transzformáció feltekerésére is, amelynek segítségével könnyebben tetten érhető az a jelerősödés, vagy gyengülés, amelyet keresünk az adatsorban. Az olyan ismert amplitúdójú, frekvenciájú és fáziskésésű periodikus jelek esetén, mint a pulzáció, előnyös lehet az ismert jel levonása a transzformáció előtt. Ez különösen igaz az olyan rendszerek esetén is, mint a KIC 3858884, amelyben több száz frekvencia található.

Végül végrehajtottam egy általam dupla eclipse mappingnek nevezett eljárást az első nyolc frekvenciára. Ebben a módszerben a pulzációkat szimultán mind a két csillagra helyeztem el, és illesztettem a képrekonstrukciós programmal, mindkét fedést felhasználva. Abban az esetben, hogy ha az egyik pulzáció pont a másik csillagon helyezkedik el, csak annak elfedésekor jelentkeznek a modulációk, a másikonál nem. Ennek következtében a másik csillagra feltételezett azonos frekvenciájú pulzációt úgy fogja modellezni, hogy annak amplitúdóját lecsökkenti, míg a helyes csillagon lévő amplitúdó közel azonos lesz a harmonikus analízisből kapottal.

4.3.3. Módusazonosítási módszerek fedésmodulált pulzációkra

Az 1.3. alfejezetben röviden foglalkoztam már a fedések pulzációkra gyakorolt, pusztán geometriai hatásával. Ezzel a témakörrel témavezetőm (I. B. Bíró és Nuspl, 2011) foglalkozott bővebben, az ott megfogalmazott matematikai leírást ismertetem itt röviden.

Egy egymódusú pulzáló csillag felszíni intenzitástérképe egy időben állandó, nyugalmi intenzitástérkép és egy időben periodikusan változó pulzációs mintázat összegeként írható fel. A felszínt véges számú kis elemre felbontva (numerikus számolásoknál ez elkerülhetetlen), egy ilyen kis elem intenzitása:

$$I_k(t) = I_{k,0} + A_k \cdot \cos(\omega t - F_k), \quad (4.2)$$

ahol ω a pulzációs (kör)frekvencia, az A_k amplitúdó és F_k kezdőfázis pedig a helyi pulzációs mintázatot írják le. Minden felületem intenzitása egy helyről helyre változó amplitúdóval és kezdőfázissal meghatározott módon, de a teljes felületen azonos frekvenciával változik a helyi nyugalmi intenzitásérték körül. Az I_0 nyugalmi intenzitás a fedésikettős-modellekből számolható. Gömb alakú csillagok és elhanyagolható forgás esetén a teljes felszínen állandó.

Az A és F mintázatok helyett két másik, úgynevezett *koszinuszos* és *szinuszos* amplitúdót vezethetünk be, amelyekkel az időfüggés jobban különválik, és a mértékegységek is azonosává válnak a két új mintázatra:

$$I_k(t) = I_{k,0} + (A_k \cos F_k) \cos \omega t + (A_k \sin F_k) \sin \omega t = I_{k,0} + C_k \cos \omega t + S_k \sin \omega t \quad (4.3)$$

A teljes mintázat nyugalmi összetevőjének elfedéséből adódik a fedési fénygörbe, amelyre rárakódik az időfüggő tagok elfedésének hatása mint modulált pulzáció. A fedés miatti változást egy \mathbf{D} *fedési kernellel* lehet leírni, amely minden t_ϕ időpontban megadja, hogy a k -adik felületelem milyen szorzófaktorral járul hozzá a integrált fluxushoz. Diszkrétén felbontott felszínre:

$$y_\phi = \sum_{k=1}^N D_{\phi,k} \cdot I_k(t_\phi) = \underbrace{\sum_k D_{\phi,k} \cdot I_{k,0}}_{y_\phi^{\text{eq}}} + \underbrace{\sum_{k=1}^N D_{\phi,k} \cos \omega t_\phi \cdot C_k + \sum_{k=1}^N D_{\phi,k} \sin \omega t_\phi \cdot S_k}_{y_\phi^{\text{puls}}} \quad (4.4)$$

$\phi = 1 \dots M$ a fénygörbét jelentő idősor pontjain fut végig. A kernel egyes elemei pedig

$$D_{\phi,k} = dA_k \cdot \cos \gamma_k \cdot \text{ld}(\cos \gamma_k) \cdot E_{\phi,k}$$

ahol $dA_k \cos \gamma_k$ a felületelem vetített területe, γ_k a rálátási szög, ld a szélsőtétedési tényező, $E_{\phi,k}$ pedig a felületelem láthatósága, egy 0 és 1 között szám; 0 a teljes fedettséget, 1 a teljes láthatóságot jelenti¹.

Ezzel az átalakítással a pulzáció időfüggése beolvasztható a kernelbe, a pulzációs mintázatot pedig *két*, időben állandó felszíni mintázat reprezentálja. Kompaktabb, vektoros jelölésben, és a nyugalmi fedési fénygörbét jelentő első tag elhagyásával (amelyet a gyakorlatban külön kell modellezni, majd levonni az adatokból):

$$\mathbf{y}_{\text{puls}} = \mathbf{D}_c \cdot \mathbf{C} + \mathbf{D}_s \cdot \mathbf{S}, \quad (4.5)$$

ahol a két, aláhúzással jelölt, $M \times N$ méretű \mathbf{D} mátrix a fedési geometriától függ.

A pulzációs mintázatok adatokból való kinyerésére két lehetőség adódik.

1. Kezelhetjük őket tetszőleges eloszlású térképekként. Akkor a fenti mátrixegyenlet megoldása ismert \mathbf{y} adatok és ismert \mathbf{D} fedési geometria mellett az adatokra legjobban illeszkedő \mathbf{C} és \mathbf{S} mintázatokat eredményezheti. De mivel a konvolúció kétdimenziós intenzitáseloszlásokból egydimenziós adatsort generál, ami óriási információvesztést

¹Szigorúan véve a W/m^2 -ben mért fluxushoz még a rendszer távolságának négyzetével is le kellene osztani.

jelent, annak megfordítása egy erősen elfajult probléma. Mindazonáltal bizonyos *képrekonstrukciós, regularizációs* eljárások alkalmazásával lehetséges a pulzációs mintázatok részleges visszanyerése, olyan mértékig, amely lehetővé teszi a módusszámok meghatározását. Ezt az általános megközelítést valósítja meg a **Dynamic Eclipse Mapping** (dinamikus fedési leképezés).

2. Az 1.1 fejezetben említettek szerint feltételezhetjük, hogy a pulzációs mintázatok gömbfüggvények. Akkor a mintázatok alakjai:

$$\begin{aligned} C_k &= A_k \cos F_k = C \cdot \operatorname{Re} Y_\ell^m(\vartheta_k, \varphi_k) = C \cdot N_{\ell m} \cdot P_\ell^m(\cos \vartheta_k) \cdot \cos m\phi_k, \\ S_k &= A_k \sin F_k = S \cdot \operatorname{Im} Y_\ell^m(\vartheta_k, \varphi_k) = S \cdot N_{\ell m} \cdot P_\ell^m(\cos \vartheta_k) \cdot \sin m\phi_k, \end{aligned}$$

vagy vektorosan

$$\mathbf{C} = C \cdot (\mathbf{Y}_c)_\ell^m, \quad \mathbf{S} = S \cdot (\mathbf{Y}_s)_\ell^m,$$

ahol $N_{\ell m}$ a gömbfelületi függvények normalizációs faktora. Egy-egy pulzációt az (ℓ, m) módusszámok, valamint két szorzótényező: $C = A \cos F$ és $S = A \sin F$ határoznak meg. Ezzel a választással a pulzációs adatsor így alakul:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{\text{puls}} &= C \cdot (\mathbf{D}_c \cdot (\mathbf{Y}_c)_\ell^m) + S \cdot (\mathbf{D}_s \cdot (\mathbf{Y}_s)_\ell^m) \\ &= C \cdot \mathbf{c}_{\ell m} + S \cdot \mathbf{s}_{\ell m}, \end{aligned} \tag{4.6}$$

ahol a $\mathbf{c}_{\ell m}$ és $\mathbf{s}_{\ell m}$ *bázisfüggvények* ismert gömbfüggvény-mintázatok fedési kernellel való konvolúciói. Ebben az alakban egy lineáris modellillesztés-feladattal van dolgunk, amelyben a modellfüggvények a bázisfüggvények, a C és S egyszerű skalárok pedig a modellparaméterek. Ennek a lehetőségnek a kiaknázása a **Direct Fitting**, azaz közvetlen modellillesztés módszere.

A pulzációk elemzésének hallgatólagos alapfeltételezése, hogy több pulzációs módus együttes jelenlétekor az egyes pulzációk járuléka lineáris szuperpozícióként jelenik meg a fenti egyenletekben, módusonként egy-egy térképpárral vagy amplitúdópárral. Ez mindaddig érvényes, amíg az egyes módusok okozta hőmérséklet-ingadozások annyira kicsik, hogy az azok összege által okozott intenzitásváltozás az egyes módusok okozta intenzitásváltozások összegével közelíthető. Az általam vizsgált kis amplitúdókra e feltétel általában teljesül.

A Dynamic Eclipse Mapping módszere

Az Eclipse Mapping, fedési leképezés módszer első csillagászati alkalmazása Horne (1985) munkájában található katakliztikus csillagokra. Később közönségesebb (értsd: nem érintkező) rendszerekre is kiterjesztették (Collier Cameron, 1997), majd ezt fejlesztette tovább (I. B. Bíró és Nuspl, 2011) pulzáló változók időfüggő felszíni mintázatainak rekonstrukciójára. A módszerek matematikai és algoritmikus háttere a fenti három közleményben található. Értekezésemben azokra a részletekre fogok kitérni, amelyek az elvégzett munkám szempontjából relevánsak voltak.

Az elfajultságot feloldani hivatott regularizáció olyan megoldást keres, amely maximalizál egy úgynevezett regularizációs függvényt, miközben a megfigyelt adatokat (pulzációs modulációs fénygörbét) egy a felhasználó által rögzített szinten magyarázza. Ebben a formában a feladat egy kényszeres optimalizációt jelent, egyszerűsített jelölésben

$$S(\mathbf{f}, \mathbf{A}) = \max. | C(\mathbf{R} \cdot \mathbf{f}, \mathbf{d}) = \text{fix},$$

ahol \mathbf{d} a fluxusok vektora, $\mathbf{R} \cdot \mathbf{f}$ a modell-fluxusok vektora, C pedig a szokásos maradvány-négyzetösszeg (χ^2). A dinamikus fedési leképezésnél a regularizációs függvény egyszerű kvadratikus alakkal bír, és az aktuális \mathbf{f} térképnek egy \mathbf{A} , úgynevezett *referencia-térképtől* való távolságát méri:

$$S(\mathbf{f}, \mathbf{A}) = -\|\mathbf{f} - \mathbf{A}\|^2$$

A referencia-térkép hivatott a felszíni pulzációs mintázatokra vonatkozó előzetes, a priori elvárásainkat érvényesíteni. Az általánostól a szigorúbb elvárások felé haladva a következő lehetőségek állnak rendelkezésre:

- Egyenletes: ez a legáltalánosabb, amikor a pulzáció mintázatáról nincs semmilyen feltételezésünk, azon kívül, hogy a lehető legkevesebb struktúrát tartalmazzon (minél közelebb álljon az egyenletes térképhez). Értelmezése korlátozottan lehetséges.
- Tengelyszimmetrikus: a pulzációról általában elvárható követelmény a kitüntetett pulzációs tengely megléte és az ehhez köthető, úgynevezett *rozetta*-szerű tengelyszimmetria: a szimmetriatengelyhez tartozó gömbi koordináta-rendszerben a rekonstruálandó pulzációs módus A amplitúdója csak a csillagrajzi szélességtől, az F kezdőfázisa pedig a csillagrajzi hosszúságtól függ. Egyéb megkötés egyikükre sincs.
- Tengelyszimmetrikus, lineáris fázisprofil: az előbbihez képest a kezdőfázis a csillagrajzi hosszúság lineáris függvénye.

- Tengelyszimmetrikus, egész számú meredekséggel leírható lineáris fázisprofil: természetesen tudható, hogy ahhoz, hogy a pulzációs mintázat folytonosan és simán záródjon a csillag felületén, a lineáris kezdőfázis-profilnak egész számnak kell lennie (a kezdőfázis egy körbejárás alatt a 360 fok egész számú többszöröse kell hogy legyen.) Ilyenkor az eljárás rendre kipróbálja a megengedett legkisebb és legnagyobb meredekségek közötti értékeket, majd a legjobb illeszkedésűt fogadja el.

A munkálatok során ezt a feladatot ellátó *pulsmemplus* program alapvető változásokon ment keresztül, hogy a megalkotója által a rekonstrukciók során tapasztalt korlátok áthidalhatóak legyenek. A legfontosabb az ún. *belső korrelációs függvény* (ICF, Intrinsic Correlation Function) bevezetése Skilling és Gull (1985) nyomán. Ennek során a rekonstrukció egy kis felbontású *rejtett képtér*ben történik, a modellezés pedig a szokásos nagyfelbontású *valós képtér*ben. A referencia-térkép érvényesítése is a valós térben történik, majd arra a rejtett képtérbeli megfelelő illesztődik. A kettő között egy *fuzzy pixel* interpolációs eljárással lehet átjárni (Sivia, 2006). E kettéválasztás lényege, hogy a rejtett képtér pontjai között nincsenek korrelációk, azokat az interpolációs eljárás a valós képtérbe delegálja. Gyakorlatilag pedig azt jelenti, hogy a rekonstruált valódi képek simák maradnak, az adatok zaja nem (illetve kevésbé) befolyásolja azokat. Jellemzően 35-55 rácspontból álló rejtett képből 2700 valódi képtérbeli pixel társításával a legtöbb gömbfüggvény-szerű mintázat sikeresen modellezhető $l_{\max} = 6$ -al bezárólag – esetünkben ez több mint elégséges. A fejlesztések során a program nemcsak gyorsabb lett, hanem a kapott képekre is egyértelműbb eredmények jöttek ki.

A rekonstrukciót elvégző *pulsmemplus* programnak két fontos kontrollparamétere van. Az egyik a klasszikus redukált χ^2 értéke, amivel az adatok illeszkedésének kívánt mértékét határozzuk meg. A másik egy TEST megállási kritérium, ami a megoldás konvergenciáját (pontosabban: két gradiens-vektor párhuzamosságát) méri. Ennek ideális értéke tipikusan 0,1.

A kvantitatív jellemzéshez a programcsomag segédprogramjait használtam fel a képek alapján meghatározható amplitúdó- és fázisprofil meghatározásához.

Fontos kiemelni, hogy ez az algoritmus független mindenféle asztroszeizmológiai modelltől. A rekonstrukcióhoz egyedül a fedési geometriát és az egyszerű légkört modellező szélsőtétedést kell ismerni. Dőlt tengelyű pulzáció esetén ismerni kell annak szimmetriatengelyének az irányát. Bár megjegyzendő, hogy az egyenletes referencia-térkép választásával szimmetriatengelyre sincs szükség – viszont ilyenkor az eredmények értelmezési lehetőségei értelemszerűen korlátozottak.

Gömbharmonikusok közvetlen illesztése

Ez a módszer (Direct Fitting, a továbbiakban DF) az előzőekben ismertettekhez képest specifikusabb pulzációs mintázatot tételez fel a megoldásról. A pulzációk elméleti vizsgálata által is talált $Y_\ell^m(\vartheta, \varphi)$ gömbfüggvények közül azt keresi, ami a legjobban illeszkedik az adatokra. A keresendő ℓ módusfokszám 3-nál nagyobb értékének nincs értelme, mert az olyan magas rendű módusok eleve nem detektálhatóak a felszíni mintázat ellenfázisban pulzáló szomszédos részeinek kölcsönös kioltása miatt. Bár ezt a szimmetriát a fedések megtörik, de egy fedéseken kívül nem detektálható pulzációt illeszteni sem lehet.

Az eljárás előnye, hogy gyorsabban fut le a lineáris illesztés következtében, viszont a legtöbbet tételezi fel a pulzációs mintázatról, így nem annyira modellfüggetlen. Ahogy a 2.1. fejezetben is említettem, a másik hátrány a lehetséges kombinációk számának hatványfüggvény szerinti növekedése a frekvenciák számától függően. Ugyanott szintén megemlítettem, hogy lehetséges az algoritmus frekvenciánként vagy frekvenciacsoportonként történő, ismételt, fehérítéses alkalmazása is, amikor a többi pulzációt rögzített értéken tartjuk – a nem ismert megoldásút (0,0)-ként feltételezve, míg a már meghatározottakat az adott (ℓ, m) -ként modellezve. Ezt a megközelítést is használtam a módusmeghatározásoknál, erre a módszerre DFCLEAN-ként fogok majd hivatkozni az eredményeknél.

A teljes paraméterter idő- és erőforrás-igényes végigpásztázásának áthidalására készült az az MCMC algoritmus, amit a 2.2. fejezetben ismertettem. Az ott említett MH-algoritmust használtam, az abból leszűrt eredmények ismeretében kategóriaváltozóként alkalmazva az egyes (ℓ, m) módusokat. Erre a módszerre a továbbiakban YLMCMC-ként hivatkozom.

A gömbfüggvények rendszerének feltételezése a pulzációs tengely legvalószínűbb is lehetőség ad, legalábbis elméleti szinten. A pulzációs tengely annak a koordináta-rendszernek a polártengelye, amelyben a pulzációs mintázat gömbfüggvényekkel írható le. Az előzőekben bemutatott módusrekonstrukciós módszerek, az EM és a DF ugyanis igényli a forgástengely dőlésszögének ismeretét. De a gömbharmonikusok egyik transzformációs tulajdonságát felhasználva, egy gömbharmonikus függvény egy elforgatott koordináta-rendszerben az azonos ℓ módus fokszámú gömbharmonikusok lineáris kombinációjaként írható le:

$$Y_\ell^m(\theta, \phi) = \sum_{m'} D_{m', m}^{(\ell)}(\alpha, \beta, \gamma) Y_\ell^{m'}(\theta, \phi) \quad (4.7)$$

ahol a lineáris kombináció $D(\alpha, \beta, \gamma)$ együtthatói az ún. *Wigner-féle forgatási mátrixszal* állnak kapcsolatban, és az elforgatott koordináta-rendszer (α, β, γ) Euler-szögeitől függenek. Az α az *azimuttszög*, amelyet a pálya tengelye körül óramutató járásával megegyező irányban mérünk a megfigyelő iránya által kijelölt meridiántól; a β a *dőlésszög*, a pulzációs tengely és a keringés tengelye által bezárt szöget; a γ szög pedig egy közös fázistolási tag, ami

nem játszik szerepet az általam végzett analízisben. A pulzációs tengely állása két lépésben kerül megbecsülésre. Először meg kell határozni a legjobb $Y_\ell(\theta, \phi) = \sum_{m'} c_{\ell m'} Y_\ell^{m'}(\theta, \phi)$ ℓ -multipletet minden egyes frekvenciára. Majd a Wigner-forgatási mátrix elemeit illesztjük α és β szerint az előző eljárás által meghatározott multipliett-együtthatókra.

4.4. Eredmények

4.4.1. A fénygörbe szétválasztása

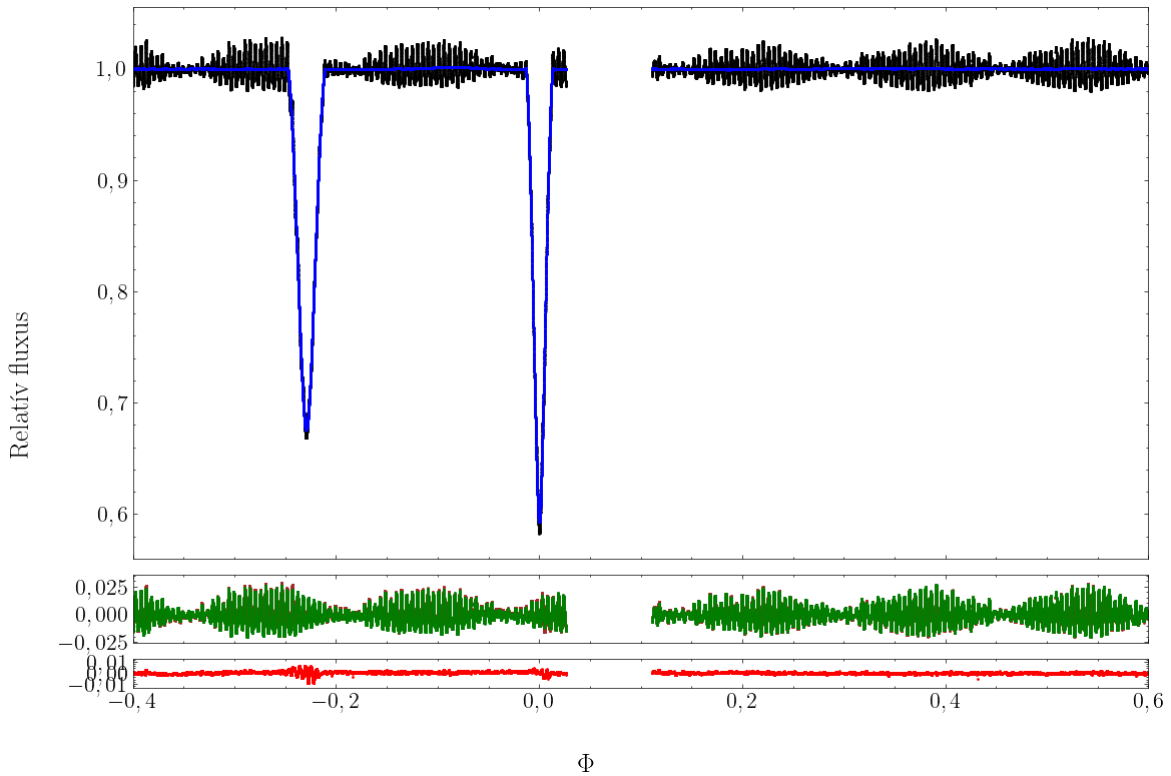
A sikeres szétválasztáshoz 4-5 iterációra volt szükség, amelyet az illesztési paraméterek konvergálása is mutat. Ahogy a 4.2. táblázat is mutatja, a relatív sugarak módosultak a legtöbbet, kb 3 %-kal nőttek és csökkent a fő és mellékkomponens sugara. A pálya excentricitása és pericentrum argumentuma minimálisan változott, de elegendő volt ahhoz, hogy a Maceroni és tsai. (2014) által kapott aszimmetria megszűnjön a végső reziduálban. A 4.3. ábrán mutatjuk az utolsó iterációban kapott végső modelleket a mellék- és főminimum fázisaira koncentráltan, míg a 4.4. ábrán a reziduálok fejlődése követhető nyomon felülről lefelé haladva.

Parameter	Maceroni és tsai. (2014)	Utolsó iteráció
i	88,176	88,1942
e	0,465	0,46502
ω [$^\circ$]	21,61	21,4000
R_1 [R_\odot]	3,45	3,465
R_2 [R_\odot]	3,05	3,000

4.2. Táblázat A Maceroni és tsai. (2014) és saját eredményeim összehasonlító táblázata.

A SigSpec által azonosított frekvenciák közül az első 10 legnagyobb amplitúdójút (dominánsat) ismerteti a 4.3. táblázat. Az azonosítással párhuzamosan a kombinációs frekvenciák válogatását is elvégeztem, a fenti 10 frekvenciából kettőt találtam kombinációsnak, az F4 ($F3+f_{\text{orb}}$) és F7 ($F1+F2+f_{\text{orb}}$) személyében. Megjegyzem, hogy a további frekvenciák között nagy számban találtam kombinációs frekvenciákat ugyanazzal az eljárással, de mivel közöttük egyes szorzótényezők felettébb magasak voltak, ezeket némi fenntartással kezeltem. Ezeket az eredeti Fourier-spektrumot tartalmazó a 4.6. ábra felső részén is mutatom a kék háromszögekkel és piros kereszttel, alatta pedig annak a maradék jelnek a Fourier-spektruma és zajspektrumának a négyszeresét, amit a 140 frekvencia levonása után kaptam.

Az első iterációban kapott reziduál a vártnak megfelelően megegyezik a Maceroni és tsai. (2014) által közölt reziduálokkal, ami mutatja a jó kiindulási alapot. A bemutatott iteratív

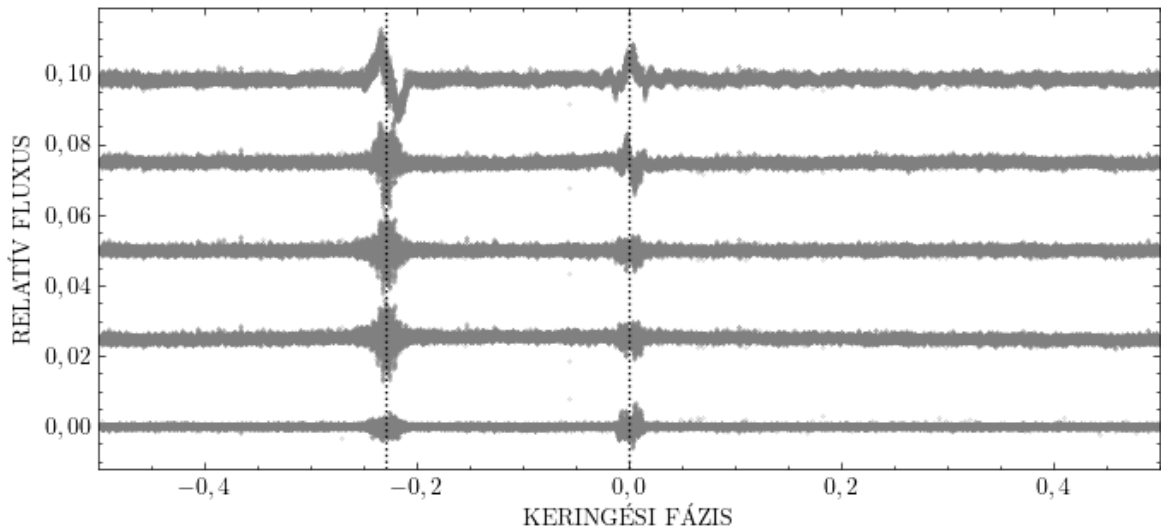


4.3. ábra Az utolsó illesztési iterációban kapott eredmények összefoglaló ábrája. **Felső panel:** az első keringési ciklusban mért normált Kepler fénygörbe fekete telített körökkel, kék telített körökkel a Phoebe által kapott kettős modell. **Középső panel:** barna színnel a felső panelen bemutatott adat és modell különbsége barna színű telített körökkel, zöld színnel szinte teljes fedésben a Sigspec analízis során kapott modell. **Alsó panel:** piros színnel a végső reziduál.

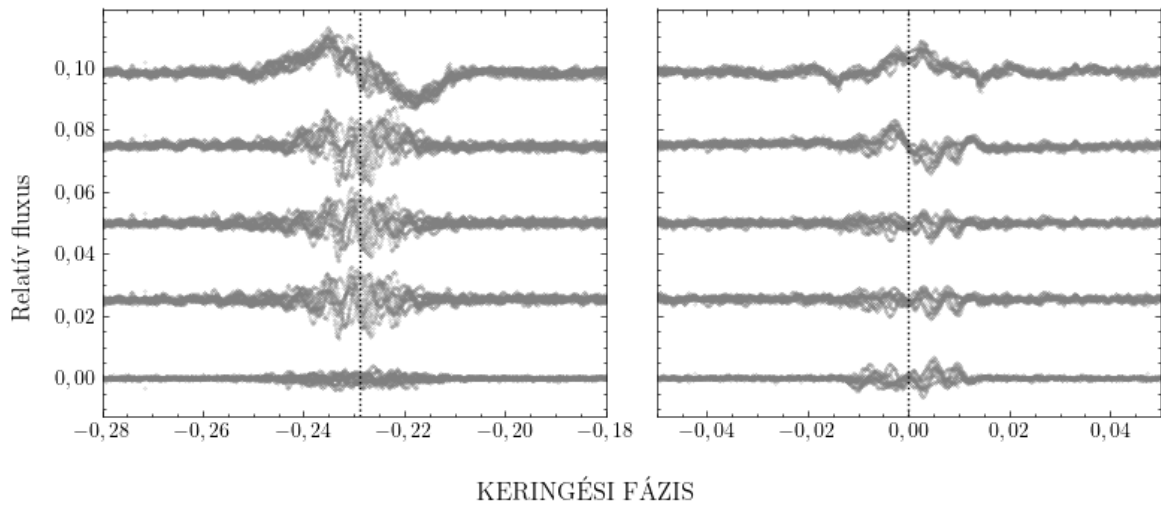
	f	A	φ	Megjegyzés
F1	187,65	0,009821	0,8317	
F2	193,95	0,009052	0,4854	
F3	255,30	0,001868	0,2143	
F4	194,96	0,001801	0,8719	F2 + f_{orb}
F5	174,81	0,001550	0,8263	
F6	247,04	0,001243	0,7678	
F7	381,60	0,001182	0,1293	F1 + F2
F8	304,31	0,001009	0,3794	
F9	382,15	0,000593	0,1502	
F10	191,08	0,000539	0,6828	

4.3. Táblázat A fehérítés során azonosított frekvenciák közül a 10 legnagyobb amplitudójú.

eljárás hosszadalmasnak tűnik, de ez hozta el a kívánt eredményt, a pontos modellt a későbbi móduszonosításokhoz. Az elfogadott paramétereket a 4.2. táblázat foglalja össze.



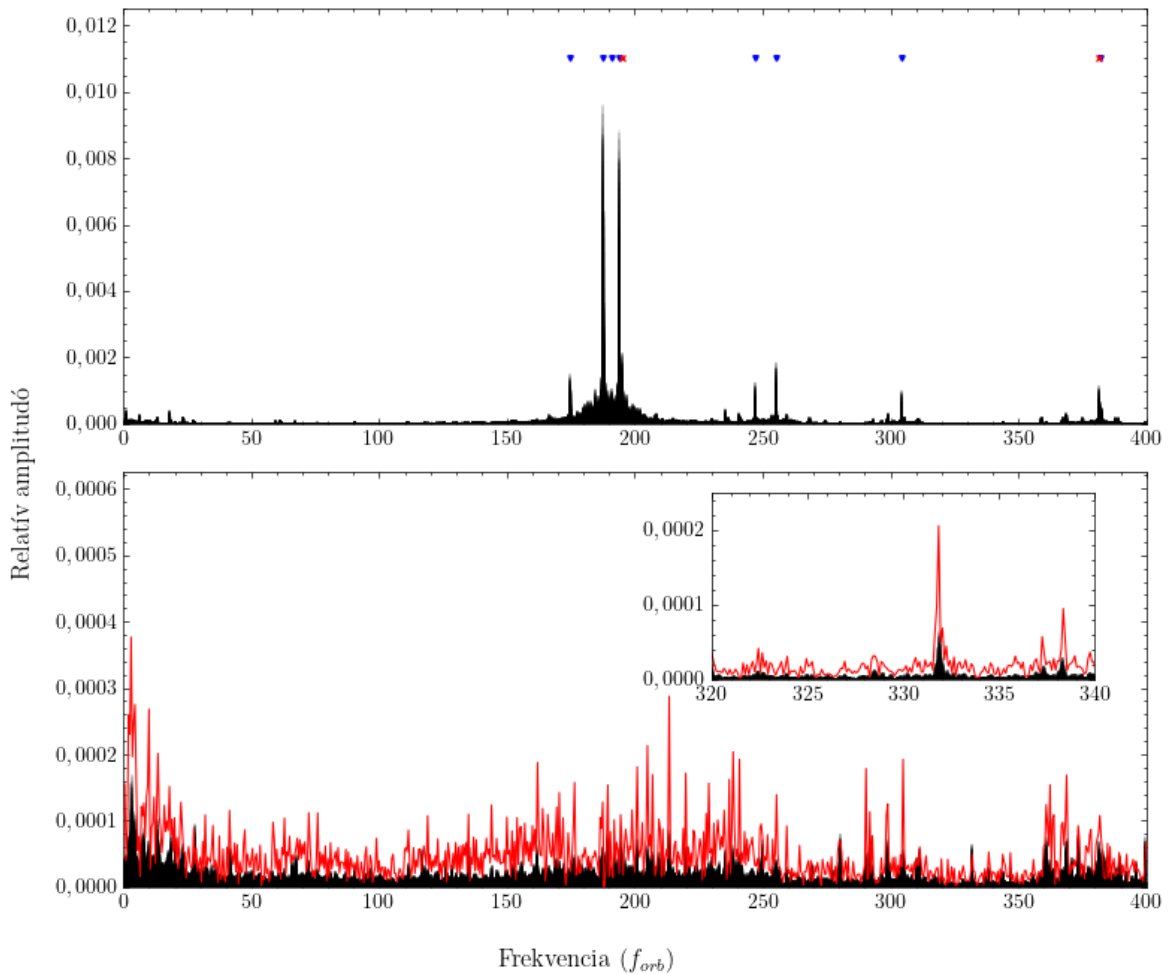
4.4. ábra Az illesztések reziduáljai az egyes iterációkban. A keringési időre feltekerve, a Φ keringési fázis függvényében van ábrázolva a relatív fluxus egységeiben. A jobb láthatóság végett minden negyedik adatpont van megjelenítve, illetve az egyes iterációk 0,025 relatív fluxussal vannak eltolva egymáshoz képest.



4.5. ábra Az illesztések felnagyított reziduáljai az egyes iterációkban. Bal panelen a másodlagos, jobb panelen az elsődleges fedés van feltüntetve. A 4.4. ábrával egyenértékű a feltüntetési mód.

4.4.2. A pulzációk forrásának a kérdése

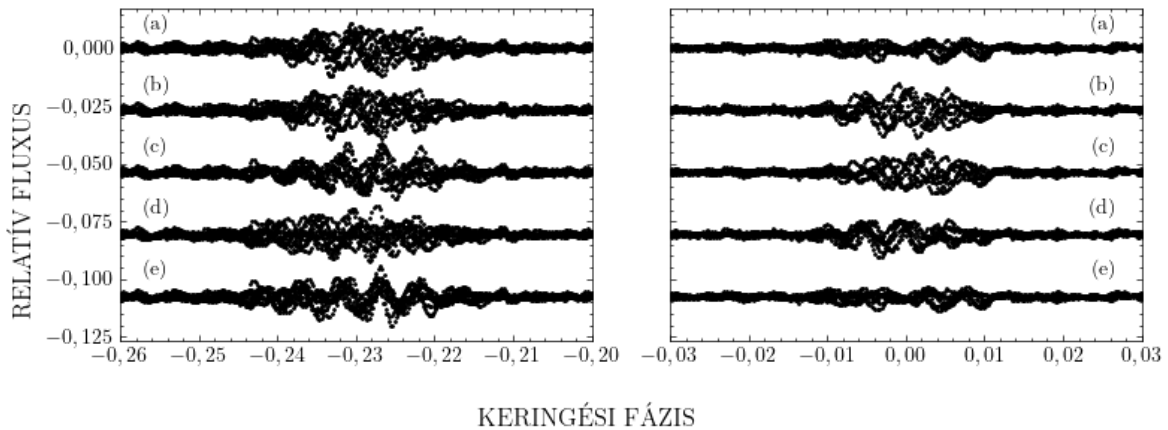
Az általam maradványok módszerének hívott eljárással kapott eredményt foglalja össze a 4.7. ábra. Ahogy a feliratból is kikövetkeztethető, a két kérdéses frekvencia két lehetséges forráscsillagának összes kombinációja kipróbálásra került. Annak eredménye alapján vizuáli-



4.6. ábra A KIC 3858884 adatsorának Fourier-spektruma a fehérítési eljárás előtt és után. **Felső panel:** fedések kizárásával nyert Fourier-spektrum a fehérítési folyamat előtt. A 4.3. táblázattal való összhang érdekében a Fourier-csúcsok energiái a keringési frekvencia egységében vannak feltüntetve. Kék háromszögekkel és piros keresztekkel jelöltem a módusazonosításra kijelölt csúcsokat, illetve az első 10 frekvenciában jelenlévő kombinációs frekvenciákat. **Alsó panel:** A fehérítés után kapott Fourier-spektrum fekete színnel, illetve a kiszámított zajspektrum négyszerese piros vonallal. A jobb láthatóság miatt utóbbi esetén minden ötödik került csak ábrázolásra, de az $f \sim 332f_{orb}$ -nál látszólagos kilógó fekete csúcs tisztázása érdekében a panelen belül egy felnagyított ábrát is feltüntettem, amelyen minden zajspektrum pont ábrázolva van.

san is egyértelműnek látszik, hogy a maradványok akkor a legkisebbek, amikor mindkét jel a másodkomponensen van és a másodfedések alatt modulálódik.

A Murphy, Bedding, Shibahashi és tsai. (2014) fázis modulációs módszerével csupán az első kettő frekvenciára volt a legegyszerűbb, hogy mely csillagtagtól származik. Mivel az eredeti ábrán olyan trendek is megfigyelhetőek voltak, amelyek eredete kétséges volt, az



4.7. ábra A maradványok vizsgálata az F1 és F2 forrásának azonosítása céljából. Minden más frekvencia harmonikus jelként került levonásra. Fentről lefelé haladva: (a) – mindkettő frekvencia harmonikus jelként levonva; (b) – mindkettő a főkomponensen; (c) – F1 a fő-, F2 mellékkomponensen; (d) – (c) fordítottja; (e) – mindkettő a mellékkomponensen.

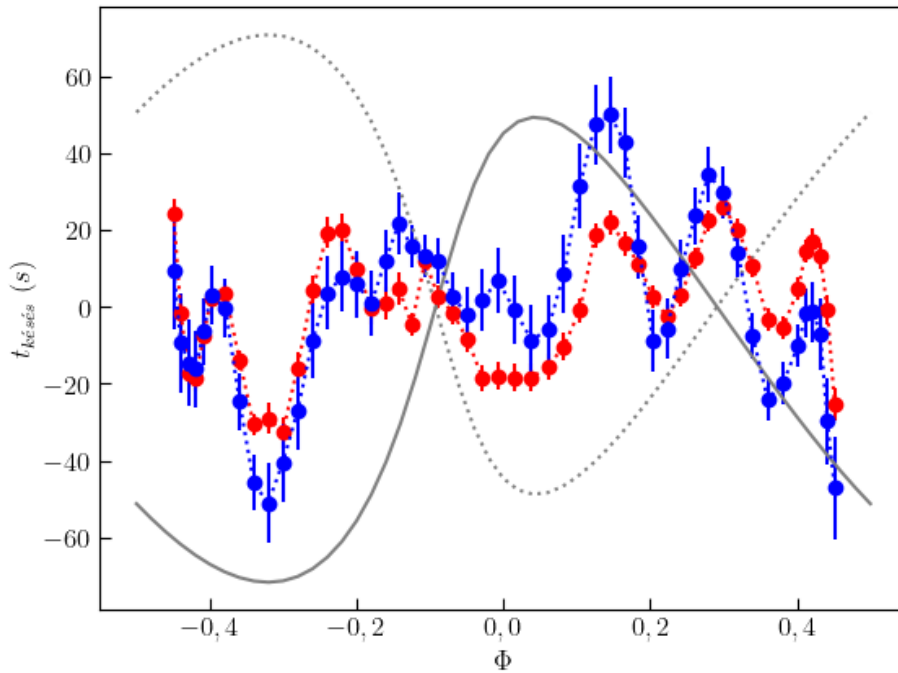
általam írt eljárást úgy módosítottam, hogy a keringési fázistartományokhoz tartozó időben mért jelekre végezze el. Ezáltal egyértelművé vált a válasz az első kettő frekvenciára, ahogy az a 4.8. ábrán is látható. Ezzel megcáfolásra került a Manzoori (2020) által közölt állítás. A többi frekvenciára viszont nagyobb szórással mutatkoznak a kérdéses értékek, így azok bemutatását mellőzöm.

A kettős Eclipse Mapping eljárás segítségével a 4.4. táblázatban összefoglalt eredményeket kaptam. Ennek alapján elmondható, hogy a domináns módusok többsége, köztük az eddig vizsgált két legnagyobb amplitúdójú is, a másodkomponensről eredeztethető. Az is jól látszik, hogy minél kisebb az amplitúdó, annál kevésbé megbízhatóbb az ezzel a módszerrel történő forrásazonosítás. F9 és F10 esetén előfordulhat, hogy a főkomponensen van, az F10-ről legalábbis biztosan elmondható. Ugyanakkor az egyik frekvenciája a másik kétszerese, így feltételezhető, hogy mindkettő a főkomponensről származik.

A sikeres azonosításokat a 4.5. táblázatban foglaltam össze.

4.4.3. Módusazonosítás

Az előző alfejezetben bemutatott eredmények alapján a 4.5. táblázatban feltüntetett frekvenciák mindegyikére azt tételeztem fel – a kombinációs frekvenciák kihagyásával –, hogy a másodkomponensről származnak. A többi frekvenciát radiális módusként feltételeztem le az adatsorból. Ezzel a kitételrel végzett Direct Fitting, MCMC és Dynamic Eclipse Mapping analízisek közül az első kettőre ismertetem először a kapott eredményeket.



4.8. ábra F1-re és F2-re számolt időkésségek a módosított fázis modulációs módszerrel. A kék és piros telített körök az F1 ($f = 187.64969 f_{\text{orb}}$) és F2 ($f = 193.94944 f_{\text{orb}}$)-nek felel meg. A folytonos és szaggatott szürke vonalak az elméleti időkésségeket tartalmazzák, amelyet a PHOEBE második generációs programjának modellezéséből számoltam ki (<https://www.phoebe-project.org>).

Első lépésben a DF multiplett módjának futtatásából a szimmetriatengely irányszögeire $\alpha \sim 32^\circ$ és $\beta \sim 30^\circ$ értéket kaptam, ami alapvetően egy igazodott konfiguráció. Ugyanakkor mind az EM, mind pedig a DF futtatások sikertelennek bizonyultak, tekintet nélkül arra, hogy szimultán 8 frekvenciára vagy az amplitúdó nagyságrendje szerint 4+4 frekvenciára csoportosítva végeztem el azokat. Az elért illesztés lényegesen jobb volt ugyan a tisztán radiálshoz képest, de az EM esetén az illesztés szorosságának szigorításával (a χ^2 értelemben) csak növelte a képek értelmetlen voltát, de nem csökkentette az elvárt mértékben a maradványokat a fedés alatt. Ez arra engedett következtetni, hogy a program a zajt próbálja illeszteni.

A tapasztalatok alapján úgy határoztam, hogy részletesebben meg kell vizsgálni az egyes frekvenciák keringések alatti modulációját. Elképzelhető ugyanis olyan eset, hogy egy jóval kisebb amplitúdójú frekvencia valójában egy rejtett módus, amelynek a fedések során nagyon felerősödik a jele (a kölcsönös kioltódás fedések általi megzavarása miatt), és aminek a kezeletlen jele szennyezi be a maradványokat. Ezt a hipotézist alátámasztja az a tény, hogy a

ID	Frekvencia [f_{orb}]	Csillag	Amplitúdó	Fázis [deg]
F1	187,65	1	0,0012	-155,1
		2	0,0086	-150,4
F2	193,95	1	0,00122	53,5
		2	0,00802	89,0
F3	255,30	1	0,00027	-94,5
		2	0,00183	-4,1
F5	174,81	1	0,00033	-110,7
		2	0,00132	-162,6
F6	247,04	1	0,00052	-63,2
		2	0,00150	166,7
F8	304,31	1	0,00026	25,2
		2	0,00081	53,2
F9	382,15	1	0,00038	-107,8
		2	0,00058	0,3
F10	191,08	1	0,00362	102,5
		2	0,00326	-84,8

4.4. Táblázat A kettős Eclipse Mapping eljárás eredménye a KIC 3858884-re. A félkövér karakterek jelölik, hogy melyik csillagon helyezte el az algoritmus a nagyobb amplitúdót az egyes frekvenciák esetén.

ID	Frekvencia (f_{orb})	PM	DEM	MJ
F01	187,65	SEC	SEC	
F02	193,95	SEC	SEC	
F03	255,30	o	SEC	
F04	194,96	–	–	F01 + f_{orb}
F05	174,81	o	SEC	
F06	247,04	o	SEC	
F07	381,60	–	–	F01 + F02
F08	304,31	o	SEC	
F09	382,15	o	SEC	
F10	191,08	o	PRI	

4.5. Táblázat A vizsgált pulzációk forrás-azonosítás összefoglaló táblázata. PM és DEM a fázis modulációk illetve a kettős Eclipse Mapping módszernek felelt meg, amelyek egyértelműen sikeresek voltak a feladat elvégzése szempontjából.

DEM után is jelentős maradvány maradt a másodkomponens fedése alatt. Ehhez egy speciális eljárást alkalmaztam, amelyet a továbbiakban échelle analízisnek fogok hívni.

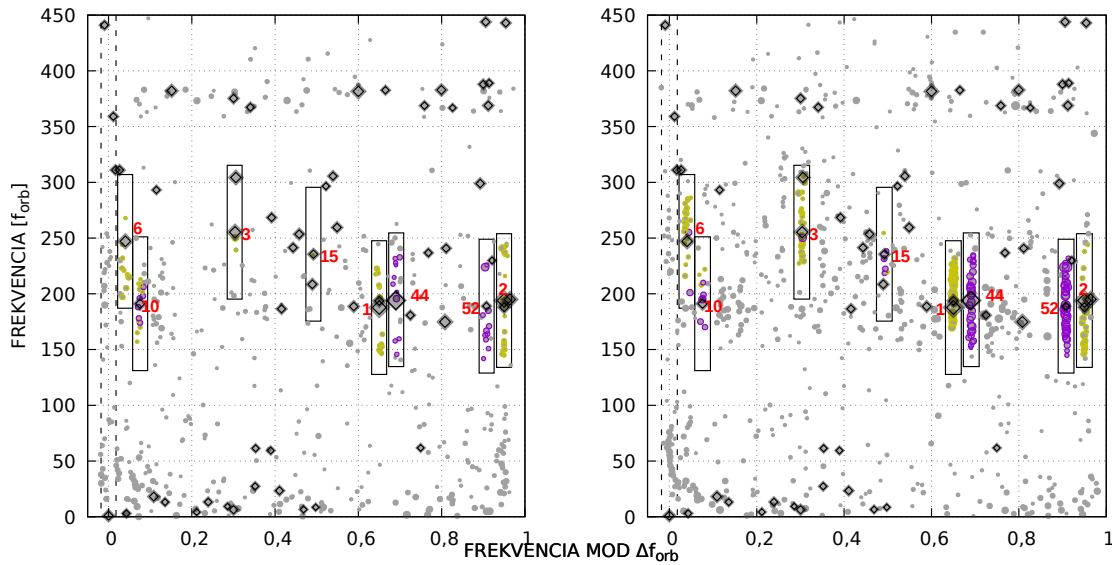
A KIC 3858884 rendszer SC adatsorai mennyisége és minősége lehetővé teszi a fedések alatt bekövetkező modulációk keresését a frekvenciaspektrumokban. A fedések a keringés periódusával modulálják a módusok fedésen kívül detektált amplitúdóit. Ennek követke-

tében az érintett főcsúcsok „felhasadnak”, oldalcsúcsok jelennek meg azok környezetében, amelyek egyenlő, f_{orb} távolságra helyezkednek el egymástól és a kérdéses csúcstól. Megjegyzendő, hogy az árapály-perturbációk szintén hasonló frekvenciafelhasadásokat idézhetnek elő, ugyanilyen csúcstávolsággal. Ebben az esetben viszont ezek a plusz oldalcsúcsok mindig jelen vannak, míg a fedés okozta modulációk csúcsai csak akkor, hogyha a fedés időtartamát is belevesszük az elemzésbe. Ezt a logikát követve az eddig a fogyatkozások teljes kizárása mellett végzett frekvenciaazonosítást ki lehet egészíteni két újjal, nevezetesen a fő-, illetve másodfedések megtartása mellettiekkel.

Így kaptam a SigSpec segítségével az új kettővel három frekvenciaspektrumot (frekvencia-csúcsokat a hozzájuk társított frekvencia, szignifikancia, amplitúdó és kezdőfázis értékekkel). A három spektrum között keresztazonosítást végeztem a csúcsokra, hogy megállapítsam, melyik esetre mely csúcsok a kizárólagosan jellemzők.

Az ennek keretében elvégzett SigSpec futtatásokból és keresztazonosításokból keletkezett a 4.9 ábra, amely két échelle-diagramot tartalmaz. Ezek a diagramok egyszerűen a frekvenciaspektrum valamilyen frekvencia szerint feltekert változatai – itt az f_{orb} keringési frekvenciával történt a feltekérés. Ily módon egy-egy frekvencia és oldalcsúcsai függőleges „gerincek” formájában jelennek meg. A bal oldalon a főkomponens elfedődésekor keletkező többlet-csúcsok láthatóak amplitúdótól függő szín- és méretskálán, a jobb oldalon pedig ugyanez a mellékkomponens elfedődésének esetére. A fedéseket mellőző adatsorokhoz tartozó csúcsokat mindkét ábrán halvány szürkével jelöltem. A továbbiakban 'noe' (nincs fedés), 'pri' és 'sec' fogja jelölni azokat a frekvencia-halmazokat, amelyeket a három adatsorban azonosított a SigSpec. Ezek rendre azok az adatsorok, amelyeknél nem szerepeltek egyáltalán fedések, illetve az elsődleges és másodlagos szerepelt az előbbin kívül. A keresztazonosításokból azt találtuk, hogy 70 csúcs található kizárólag a 'noe'-ben. Mivel ezek amplitúdói kisebbek voltak 5×10^{-5} -nél, valószínűsíthetően az adatsor pontosságából adódó korrelációkból származhatnak.

Elemzésemből kiderült, hogy az elsődleges fedések alatti modulációk igen csekély mértékűek. Csupán néhány csúcshoz tartozik gyenge oldalcsúcs-rendszer lelhető fel a 'pri' spektrumban; ezek közül F10 talán a legbiztosabb. Az F13 és F14 esetén is találhatóak oldalcsúcsok, de ezek oldalcsúcsai átfedésbe kerülnek az F1 és F2 frekvenciájával. Ezzel szemben a másodlagos fedések által okozott modulációk sokkal nagyobb számú főcsúcsnál jelentkeznek és nagyobb jelszinttel, ahogy várható is az eddigi elemzésem alapján. A legjelentősebb az F1 és F2 a várakozásaimnak megfelelően, ezt követi az F3, F6 és az F15. Meglepődésre adtak okot viszont az F44 és F52 csúcsaihoz társuló kiterjedt oldalcsúcs-rengetegek, ugyanis az egyes főcsúcsok és hozzájuk tartozó oldalcsúcsaik jellege alapján ezek egyértelműen rejtett módusokra utalnak. Ezek modellezett jelei közel azonos nagyságrendbe esnek az eddig



4.9. ábra Frekvenciák échelle diagramjai, amelyeket az elsődleges fedést is tartalmazó adatsorra végeztem el (*balra*), illetve a másodlagos fedésre (*jobbra*). A szürke feltöltött körök jelölik az egyedi frekvencia csúcsokat, amelyek az adott adatsorban megjelentek. A közös csúcsok (azaz jelen van mindkét adatsorban – fedésen kívüliek és az adott diagramnak megfelelő fedésében közös) vastagított gyémánttal vannak feltüntetve. Ezek közül számozottan vannak jelölve azok a csúcsok, amelyek jelentős számú oldalcsúcsokkal rendelkeznek valamely esetben. Az oldalcsúcsok amplitúdói szerint vannak színezve: az 5%-kal alattiak sárgával, a nagyobbak viola színnel. (A határ csak szemléltetési célból van megválasztva.) Minden szimbólum mérete az adott csúcs amplitúdójának logaritmusával arányos. A megjelölt téglalapok mutatják azokat a régiókat, ahol oldalcsúcsok jelentek meg. Szélességük megegyezik a Rayleigh frekvencia felbontás nagyságával ($\sim 0,036$), vertikálisan $50 f_{orb}$ terjednek ki mindkét irányban. A megjelöltek közül egyedül az F10 esetén találtam jelentősebb modulációt az elsődleges fedés esetén. A 0-ra centrált pontozott téglalap jelöli az orbitálisan rezonáns frekvenciákat, amelyek vagy a kettősillesztésből maradhattak még vissza, vagy az árapály keltette pulzációk lehetnek még.

legjobban elért EM analízisek eredményének maradványaival. Létezésük rögtön világossá is tette, hogy a korábbi, az első 8 frekvenciára összpontosító illesztések miatt vallottak kudarcot. Ennek megfelelően a 'sec' échelle-jén jelentős modulációt mutató frekvenciák kerültek kijelölésre a módusrekonstrukciókhoz. A frekvenciákat a 4.6. táblázatban soroltam fel.

A minél sikeresebb eredmények érdekében meg kellett vizsgálni azt is, hogy a talált oldalcsúcsok mennyisége mennyire elegendő a módusok rekonstrukciójához. Ehhez első lépésben minden (ℓ, m) módusra másodkomponensen moduláló fénygörbét lemodelleztem $\ell = 3$ értékéig bezárólag a rendszer általam pontosított paramétereire. Mindegyikük az F1=187,65

ID	Frekvencia (f_{orb})	Amplitúdó
F01	187,65	0,00982
F02	193,95	0,00905
F03	255,30	0,00186
F06	247,04	0,00124
F15	381,60	0,00033
F44	304,31	0,00014
F52	382,15	0,00018

4.6. Táblázat A móduszonosításra kijelölt végső frekvencialista. Mindegyik frekvencia a másodkomponensre volt feltételezve.

f_{orb} értékű frekvenciával és azonos amplitúdóval került modellezésre; zajt nem adtam hozzá. Ezeket a szintetizált, teljes, zajmentes adatsoron SigSpec analízissel meghatároztam a csúcsokat oly módon, hogy az első 100 csúcsot határozza meg 100 és 300 f_{orb} tartományon. A szimulált adatsorok és hozzájuk tartozó frekvenciaspektrum a Függelék az A.1. és A.2. ábrákon található. Jól látható az oldalcsúcsok szerkezete az egyes esetekben. Itt csupán a nemnegatív m -eket mutatom be annak okán, hogy a negatív m -ek esetén az oldalcsúcsok serege a fő csúcsra nézve tükrözve sorakozik fel. A modulált fénygörbék kellő pontosságú reprodukálásához viszont nagyon számú oldalcsúcsot kell azonosítani, tapasztalataim alapján legalább 80 szükséges ehhez.

Végül az előbb bemutatott échelle diagram segítségével azonosított főcsúcsokat és hozzájuk tartozó csúcssereget vizsgáltam meg. Ezek beazonosításához az egyes oldalcsúcsok azonosításához a tűréshatárt $1/4 f_{\text{Ray}}$ frekvencia alá csökkentettem, hogy kifejezetten a szempontról releváns csúcsok kerüljenek be a 'sec' spektrumából. Az oldalcsúcsok és a hozzájuk tartozó modulált fénygörbék a 4.10. ábrán találhatóak hasonló elrendezésben, mint a szintetizált adatsorok.

A valós adatokban levő zaj miatt az azokból kikövetkeztethető oldalcsúcsok száma sokkal kevesebb lett, mint a modellezetteknél. Az oldalcsúcsok egy része egyszerűen beleolvad a zajba. Emiatt sajnos az egyes modulációk oldalcsúcsok alapján történő elkülönítése nem lehetséges. Ezért fordítva jártam el: a fedési jeltől megszabadított adatsorból levontam a 'sec' spektrumban talált minden olyan csúcs jelét, amely nem az általam kiválasztott csúcsokhoz és oldalcsúcsaihoz tartozott.

Direct Fitting

Az első lépésben az újonnan kiválasztott csúcsokra is ℓ -multiplett illesztést végeztem el annak kiderítésére, hogy dőlt-e a forgástengely a másodkomponensen. Ehhez a 4.6 táblázat első öt frekvenciáját jelöltem illesztésre, a többi jel másodkomponensen lévő radiális módusként

került levonásra. (A hét frekvenciás illesztés esetén az ellenőrző-megerősítő DF-ek tartottak volna túlságosan hosszú ideig.) Az így elnyert illesztés eredménye alapján a legjobb ℓ -ek értéke az első két frekvenciára 1, míg a másik háromra 2-nek adódott, az ehhez tartozó $\chi^2 = 1,48$ mellett.

A kapott ℓ értékekre és együtthatókra a `wigfit` segítségével megkerestem a legvalószínűbb dőlésszöget és hozzátartozó (ℓ, m) módusszámokat. A futtatás alapján α szögére $21,9^\circ$, a β -ra $21,6^\circ$ értékeket kaptam, ami nagyon közel áll az igazodott tengelyhez. Ez arra utalhat, hogy talán nincsen megdőlvé a kérdéses forgástengely. A χ^2 -re 0,58 kielégítőnek tűnhet a többi lehetséges χ^2 értékhez képest, de nem szabad elfelejteni, hogy ezek a χ^2 értékek az ℓ -multipllett illesztés együtthatóira vonatkozik. az elméleti módusszámok pedig meglepő értékeket tartalmaznak, rendre (1, 0), (1, 0), (2,-1), (2, 0) és (2, 1) módusokkal. Mivel az (1,0) rejtett módusnak számít ebben a konfigurációban is, ezt az eredményt kételkedve fogadtam.

4.7. Táblázat Direct Fitting eredmények az $\alpha = 22^\circ$, $\beta = 22^\circ$ dőlt konfigurációra. A jelölések ugyanazok, mint az igazodott konfigurációra (4.8. táblázat).

	F1	F2	F3	F6	F15	χ^2
WF: jószolt	(1,0)	(1,0)	(2,-1)	(2,0)	(2,1)	0,58
DF	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(2,2)	22,42
DFCLEAN	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(2,2)	22,42
MCMC	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(2,0)	(2,-2)	
százalék	93.95	98.81	31.26	28.41	20.87	
arány	15.5	83.03	1.3	1.4	1.4	
medián-arány	15.5	83.03	2.7	2.2	2.8	

Erre a $(22^\circ, 22^\circ)$ -os konfigurációra DF, DFCLEAN és YLMCMC futtatásokat végeztem el annak kiderítésére, hogy a kapott módusszámokat visszanyerem-e. Az ebből kapott eredményeket a 4.7. táblázatban foglaltam össze, a `wigfit` által jószolt számokkal és χ^2 -ekkel együtt. YLMCMC esetén a hivatkozott táblázatban a jelöltek százalékos aránya, második jelölttel és többi jelölt mediánjának aránya ('odds') is szerepel. Megállapítható, hogy a `wigfit` által kapott módusszámok nem igazolódnak ebben a szögállásban, sőt, előrebocsájtom, hogy ezek az eredmények szinte megegyeznek az igazodott tengelyű futtatásokkal.

Az igazodott tengelyű futtatásokat már a 4.8. táblázat mind a hét frekvenciájára végeztem el, két csoportban. Az első négyre (F1, F2, F3, F6) a szokásos módon az másik három módus fő- és oldalcsúcsainak levonását követően hajtottam végre a DF, DFCLEAN és YLMCMC elemzés-sorozatát, majd a maradék háromra (F15, F44, F52) a már azonosított első négy módusnak megfelelő elfedett pulzációk levonása után került sor.

A 4.8. táblázatban feltüntetett eredmények nagyon hasonló eredményeket mutatnak. Az F1, F2 és F3 esetén radiális módusok jöttek ki, bár meg kell jegyezni, hogy a YLMCMC

4.8. Táblázat Módusrekonstrukciós és -azonosítási eredmények az igazodott konfigurációra. Az egyes sorok rendre a dinamikus EM, a teljes DF, DFCLEAN, valamint az YLMCMC eredményeit sorolják fel. Az utolsó három sor az YLMCMC kiegészítő eredményeit tartalmazza. A „százalék” a legjobb jelölt százalékos aránya; az „arány” a legjobb és a második legjobb jelölt százaléka; a „medián-arány” pedig a legjobb jelölt és az összes többi mediánjának százalékaránya.

	F1	F2	F3	F6	F15	F44	F52	χ^2
EM	(1,-1)	(1,1)	(0,0)	(1,-1)	(0,0)	(3,-1)	(2,1)	
DF	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(1,-1)	(3,1)	(2,-1)	5,99
DFCLEAN	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(1,1)	(1,-1)	(3,1)	(2,-1)	5,98
MCMC	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(2,0)	(2,-2)	(3,-1)	(2,1)	
százalék	92.5	99.4	27.8	17.7	13.2	18.1	25.0	
arány	12.4	168.5	1.2	1.7	1.1	1.01	1.05	
medián-arány	12.4	168.5	2.2	2.8	1.6	2.4	10.6	

esetén F1-re az (1,-1) eredmény jött ki második legjobb jelöltnek. Jelentősebb eltérés a három módszer között egyedül az F6-nál van. Az utolsó két frekvenciánál figyelemre méltó a (3, \pm 1), (2, \pm 1) rejtett módusok megoldása.

Dynamic Eclipse Mapping

Ahogy a DF esetén, az EM elemzést is két egymást követő lépésben folytattam, a frekvenciák amplitúdóinak hasonlósága alapján két csoportra osztva azokat.

A DF egyértelmű megoldásával ellentétben az EM eljárásánál az adatilleszkedés kívánt jóságát a felhasználó határozza meg χ^2 értéke formájában. Fehér zaj jelenléte és helyesen meghatározott hibák esetén $\chi^2 = 1$ vagy kicsivel nagyobb érték a tipikus. Ugyanakkor sok kísérletezést igényel az, hogy ennek értékét az EM esetén olyan kicsire állítsa be, hogy a rekonstruált térképekre jelentősen ne torzuljanak. Az EM első, I. B. Bíró és Nuspl (2011) cikkben bemutatott változata nagyon érzékeny volt a zajra, ami miatt még minimális szintű túlillesztés esetén is könnyen tovább terjedt zajos, a realitástól elrugaszkodott felszíni mintázatokba. A rejtett képek bevezetése megoldotta ezt a problémát, így ilyen értelemben vett simább térképek rekonstruálása vált lehetségessé, az extra zajra nézve ellenállóbb lett a program.

A rekonstruált térképeket és hozzájuk tartozó amplitúdó-, és fázisprofilokat a 4.11. ábra foglalja össze. Várakozással ellentétben nem a legnagyobb amplitúdók lettek radiálisak, hanem az F3 és F15. A kérdéses F1 és F2 frekvenciák ugyanis (2,-2) és (3,3) nemradiális (hanem szektorális) módust mutatnak a rekonstrukció alapján. Ezt némileg alátámasztják a 4.10. ábrán bemutatott frekvenciaspektrumok, nevezetesen, hogy az oldalcsúcsok a főcsúcsra

nézve aszimmetrikusan helyezkednek el. Ráadásul az aszimmetriák irányai megfelelnek az azimutális rend meghatározott előjelének is. Hasonló megállapítást lehet tenni az F3 és F15 radiális természetéről, habár kevesebb bizonyossággal. Érdeemes megjegyezni, hogy az F44 és F52 (3,-1) és (2,1) nemradiális módusként azonosítható. Ezek a várakozásnak megfelelően rejtett módusok. Az adatokra való illeszkedést és az egyes térképekhez (ti. frekvenciákhoz) tartozó egyedi fénygörbejárulékokat a 4.12. és 4.13. ábrákon mutatják be.

4.5. Diszkusszió

Megállapítható, hogy a fénygörbére való illeszkedés alapján valóban pontosabb lett a csillagrendszerrel alkotott geometriai kettősmodell. A fedésből és pulzációból származó jelek elkülönítése sikeres volt, amelyet a később elvégzett sikeres módusazonosítás is igazolt. Az is jól látható a végső reziduálokat mutató ábrapanelen, hogy a másodfedés mellett az elsődleges fedésnél is van egy kisebb mértékű maradvány, ami megerősíti Maceroni és tsai. (2014) azon eredményét, hogy mindkét csillagban gerjesztődhetnek p módusok. A két fedést összehasonlítva ugyanakkor megállapítható, hogy a másodkomponensen van több pulzációs frekvencia.

Az adott pulzációs jelek forrásának eldöntésénél közel azonos eredményeket kaptam. A fázismodulációs módszernél csupán a radiális módusokra, az F1 és F2-re sikerült egyértelműen megmutatni, hogy a másodkomponensen található. A PHOEBE-vel modellezett és számított időkéssel nagyrészt egyezést mutat (4.8. ábra). Az eltérések onnan származhatnak, hogy az eljárás során olyan adatsort illesztettem, amiben az egyes fedések kizárásra kerültek. Ez bizonyos mértékben torzíthatja az átlagolásnak tekinthető, keringési fázisok szerint elvégzett módszert. A többi frekvencia eredő csillaga ezzel az eljárással már kevésbé volt megállapítható. Ez várható, hiszen a sok nem illesztett frekvencia jelenléte torzíthatja az illesztést és az így nyert $\Delta\phi$ eltéréseket.

A kettős fedési tomográfias megközelítéssel az utolsó kivételével a kijelölt frekvenciák mindegyikére azt kaptam, hogy a második csillagtól származik (4.5. táblázat), így az fázis modulációs módszerhez képest sikeresebbnek bizonyult. Egyedül a legkisebb amplitúdójú F10-re talált túlnyomóan a főkomponensről érkező jelet.

A keringési frekvenciával feltekert échelle diagram-sorozat segítségével sikeresen azonosítottam 7 olyan frekvenciát, amely legjobban modulálódik annak fedése során. Ezek a modulációkról viszont megállapítottam, hogy nem a várt erősségűek a modellezettekkel összevetve. A tényleges rekonstrukció előtt megkíséreltem a szimmetriatengely irányszögeinek meghatározását, ami alatt feltételeztem annak forgástengellyel egybeesését. Ugyanakkor

az erre a szögre elvégzett rekonstrukciók nem erősítették meg, és mivel az közel esik az igazodott tengelyhez, ennek lehetőségét elvetettem.

Az F1 és F2-ről megállapíthattam, hogy a várakozásokkal ellentétben egyikük sem radiális; ellenkezőleg: szektorális módusok, (2,-2) illetve (3,3) számokkal. F3 és F15 bármely szimmetriatengelyű, bármely fedési tomográfias eljárással radiálisnak bizonyultak. F6 esetén az EM retrográd szektorális módust, (1,-1)-et ad. Az F44 és F52 frekvenciák az échelle diagram elemzéséből kerültek elő, ezek kezdeti figyelmen kívül hagyása akadályozta meg az első sorozat sikeres mappelését. Azonosításukat követően viszont az elemzés sikerrel járt, és valóban (3,-1) valamint (2,1) rejtett módusoknak bizonyultak.

Általánosságban elmondható, hogy a felhasznált módszerek segítségével az m abszolút értéke egyedileg megadható, de az előjele már nem. Az EM ugyanis következetesen ellenkező előjelet adott a DF „csoporthoz” képest. Ugyanakkor az utolsó két frekvencia esetén az YLMCMC megerősítette az EM által azonosított előjelét – de ez csak szerencsés véletlen is lehet. Az A.1. ábra bemutatja, hogy az egyes $(\ell, \pm m)$ esetben nagyon hasonlóak az ellenkező előjelű módusok modulációs fénygörbe tekintetében ebben a geometriai konfigurációban. Ezért ezek a módusok könnyen összetéveszthetők, mint ahogy ezt az EM és DF csoportok eredményei meg is erősítik. Ezekben a kérdéses esetekben segíthet a detektált oldalcsúcsok jellegének vizsgálata. A 4.10. ábra vizuális ellenőrzése rámutat arra, hogy az F1 központi csúcsa az oldalcsúcsok maximumától balra helyezkedik el, míg az F2 esetén az pont az ellenkező irányban áll. Ez a megállapítás inkább az EM állításait támasztja alá, mint a DF-ét. Sajnos ezekre az ábrákra való támaszkodás lehetősége az amplitúdó csökkenésével romlik. F3 esetére a centrális csúcs még megerősítheti a radiális természetet (legalábbis nincs ellentmondásban vele), az F6 esetén negatív m , az F15 szerkezete viszont túlságosan ritkás ennek eldöntésére. A két általam megtalált rejtett módusnál a hiányzó további csúcs-szigetek akadályozzák meg a végső következtetést.

Ugyanakkor a DF és EM eredményei közötti részleges eltérések oka nem világos. Főleg a két legerősebb módusra adtak eltérő – bár moduláció szempontjából igen közeli – eredményt. Erre két okot tudok elképzelni: vagy a legerősebb pulzációk felszíni mintázatai jobban eltérnek a gömbharmonikus függvényektől, mint a többi kisebb amplitúdójúé, vagy pedig a forgástengely irányát a fotometriai analízis nem tudta maradéktalanul visszaadni. A kérdés célirányos spektroszkópiai mérésekkel eldönthető lenne: a forgástengely iránya a Rossiter-McLaughlin effektus alapján elméletileg meghatározható. Jelenleg ez a továbblépés egyik legnagyobb akadálya.

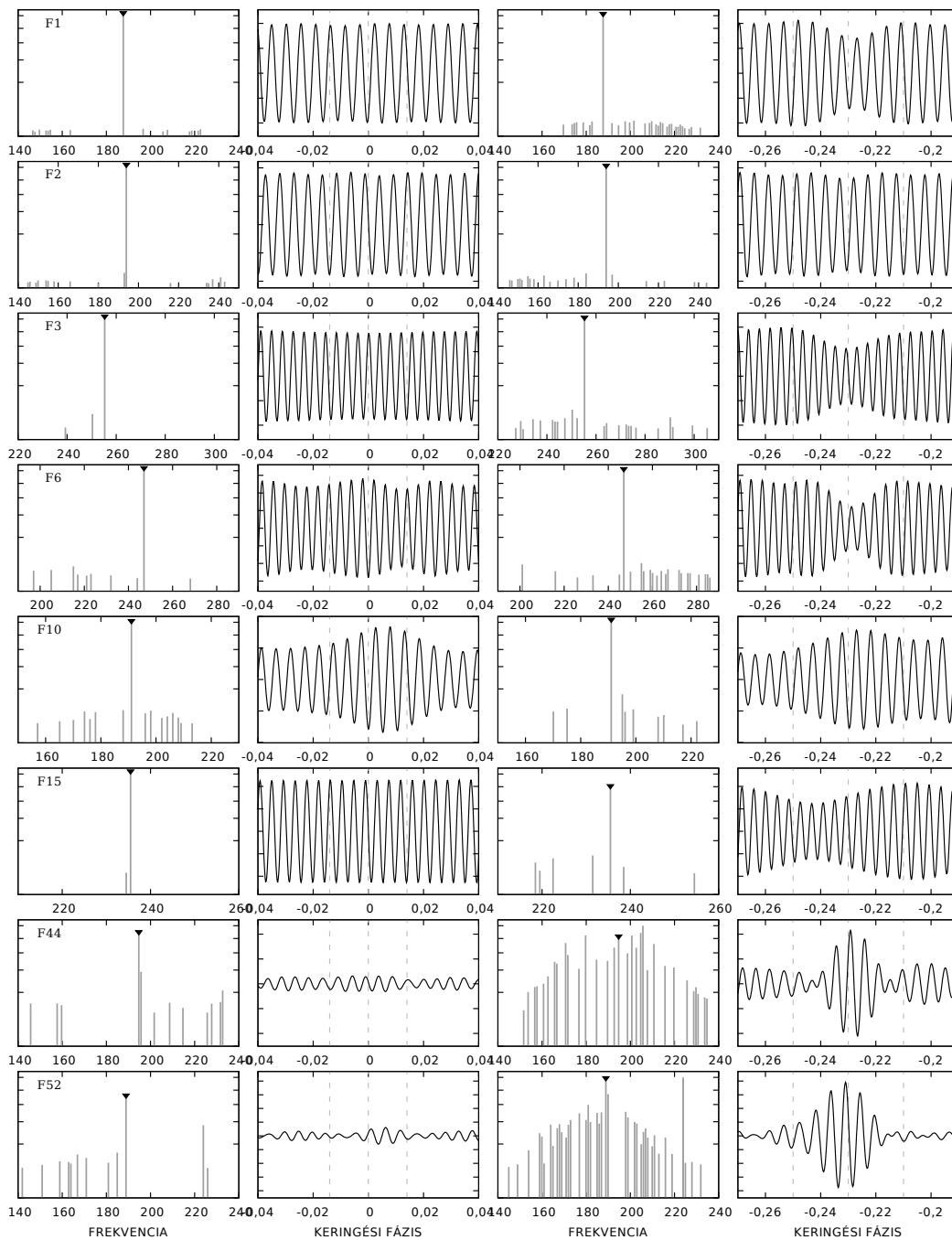
4.6. Összefoglalás

Ebben a fejezetben egy több éve tartó vizsgálataim eredményeit mutattam be a KIC 3858884 fedési kettősrendszerrel. Első lépésben a fotometriai adatsort fedésből és pulzációból származó fényességváltozásokra kellett szétválasztani. Ehhez egy olyan iteratív eljárást kellett kidolgozni és végrehajtani, amely két programmal való illesztés-sorozatokot ölelt fel. A PHOEBE és SigSpec által végzett elemzések során kezdeti fedési tomográfiás illesztéseket is végeztem abból a célból, hogy a fedések alatti erős modulációkat csökkentsem. Ki kell emelni, hogy az ezekben az iterációkban rekonstruált felszíni térképeket semmilyen módusazonosításra nem használtam fel; a hangsúly e lépésekben a modulált pulzációk rekonstruálásán volt.

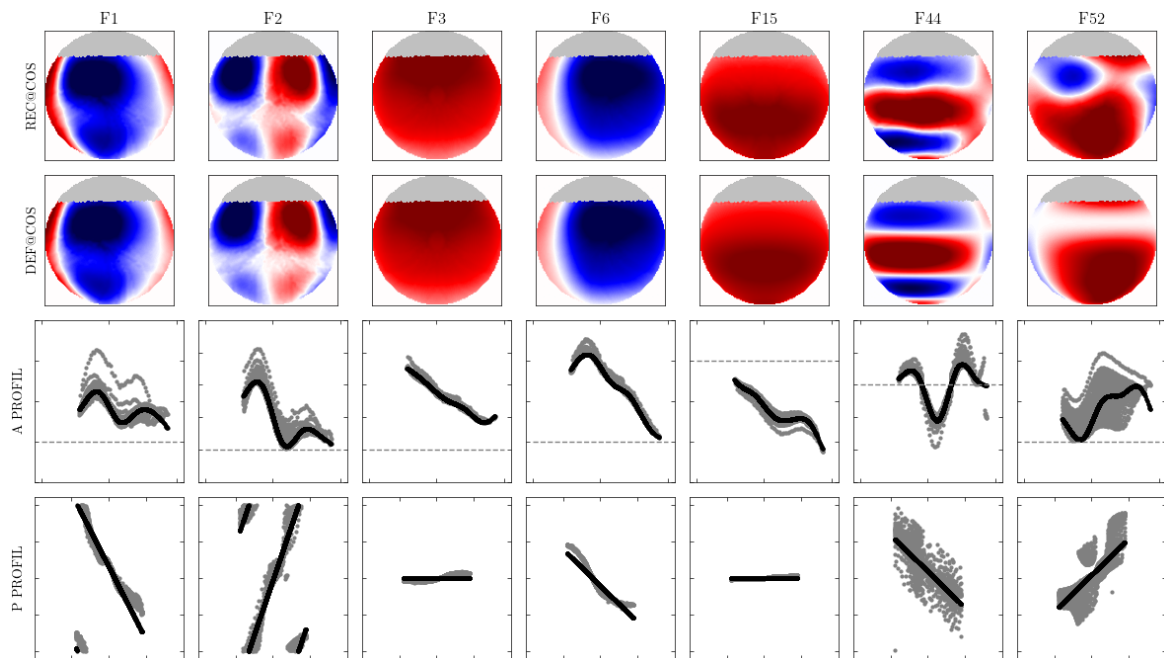
Ezt követően sikeresen hajtottam végre olyan eljárásokat, amelyekkel megvizsgáltam az egyes frekvenciák eredetét. A módosított fázismodulációs módszerrel cáfoltam Manzoori (2020) állítását a két legnagyobb amplitúdójú módusára vonatkozóan. Ezt megerősítette és további domináns frekvenciákra nézve folytatható lett a kettős fedési leképezés eljárása, amely az F10 frekvencia kivételével az összes domináns frekvenciát a másodkomponensen levőnek találta.

Az echelle-diagram eljárásának segítségével jelöltem ki azokat a frekvenciákat, amelyeket az általam használt módszerek szempontjából a legnagyobb eséllyel kecsgettettek módusazonosítás szempontjából. Ezek elemzésével egyrészt megállapítottam, hogy a legvalószínűbb pulzációs tengely közel áll az igazodotthoz, de adatokra illeszkedés szempontjából nem tudtam egyértelműen eldönteni az érvényességét. Az elvégzett módusazonosításokkal három kiemelkedő eredményre jutottam. Az egyik, hogy a két legnagyobb amplitúdójú frekvenciák nemradiálisak, ellenkező előjelű m -mel rendelkező, és esetlegesen torzult gömbfüggvénnyel írhatóak le. A másik, hogy a 3. és 16. frekvencia esetén egyértelmű radiális a természet. Pulzációs konstansa alapján az előbbi a másodkomponens radiális módusának első felharmonikusához áll közel. Végül az F44 és F52 esetén rejtett módust találtam, amelyre nézve az m előjeltől eltekintve azonos eredményeket mutattak.

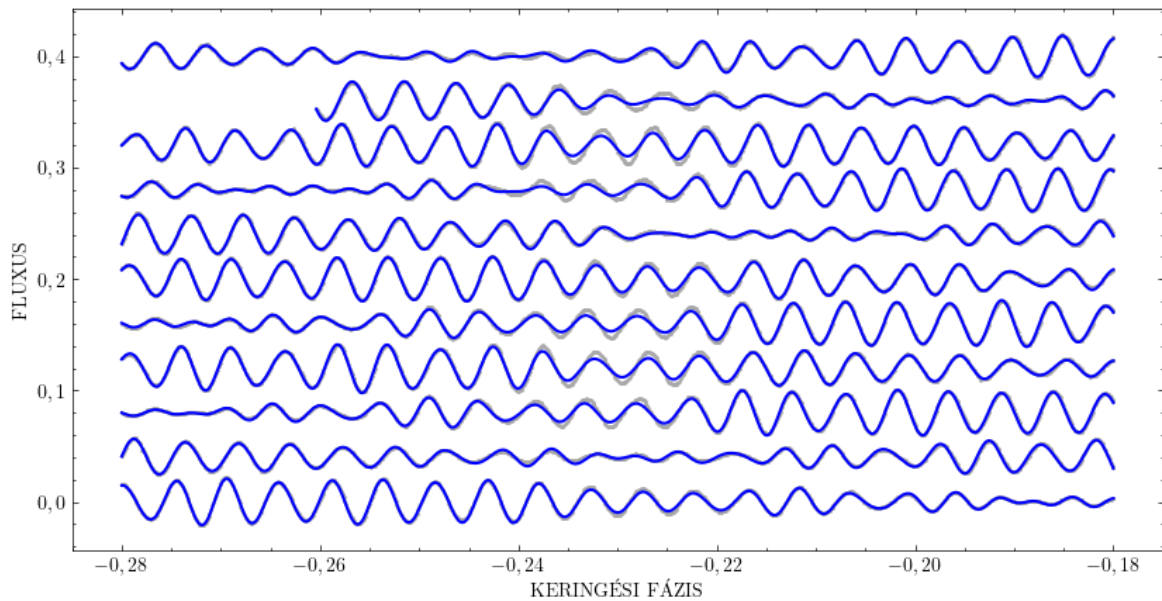
Összességében pedig úgy vélem, bebizonyosodott, hogy a különböző módusazonosítási módszerek összehangolt alkalmazása képes kihasználni a fedések moduláló hatását az elfedett pulzációk módusainak azonosítására.



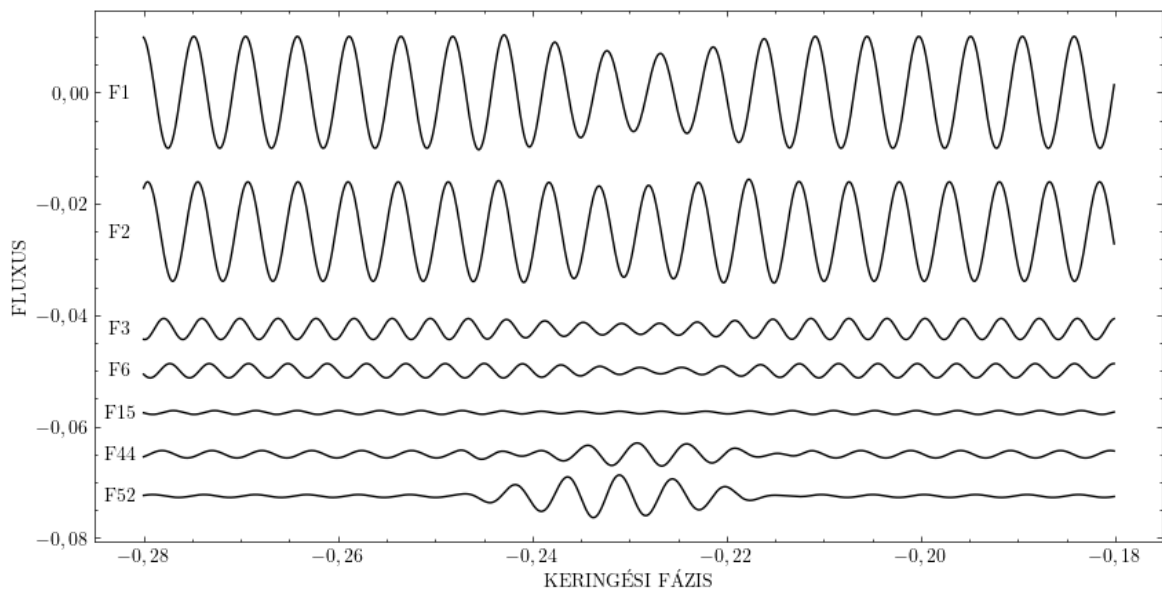
4.10. ábra A kiválasztott frekvenciák modulációi, amelyeket az adott frekvenciához tartozó oldalcsúcsai segítségével generáltam le a 'pri' (főkomponens fedése) és 'sec' (mellékkomponens fedéséből kapott) spektrumok alapján. Minden sor egyetlen frekvenciára vonatkozóan tartalmazza az egyes adatokat, amelyek azonosítója a balszélső panelen látható. Balról jobbra haladva: főkomponensre vonatkozó adatok (csúcsok és szintetizált adatsor), valamint a másodkomponensre vonatkozóak. Az amplitúdók nemlineáris, négyzetgyökös skálán vannak ábrázolva. A fekete háromszög jelöli a központi csúcsot. A függőleges szaggatott vonalak a fénygörbéken a fedéshatárokat jelölik ki.



4.11. ábra Az elvégzett EM-rekonstrukciók összefoglaló ábrája. Oszloponként tartalmazza az egyes frekvenciák rekonstruált térképeit és hozzá tartozó profiljukat, melynek azonosítóját az oszlop tetején tüntettem fel. Az 1. és 2. sor tartalmazza a tényleges rekonstruált valamint referenciaképet a megfigyelő szemszögéből. Ezekon a térképeken a szürke szín az elfedetlen, így a rekonstrukcióban részt nem vevő területeket ábrázolja; ezek integrált jeleit egy-egy virtuális pixellel veszi figyelembe a program. A 3. és 4. sor mutatja be az egyes amplitúdó- és fázisprofilokat. Előbbi esetben csillagrajzi szélesség – amplitúdó ábra, utóbbiban pedig a csillagrajzi hosszúság – fázis ábra. Az amplitúdó kivételével mindegyik beosztás 90 fokoskénti. Ezekon az ábrákon a szürke pontsereg a profilábrák számolásakor az csillagrajzi szélességek pixelein hosszúságain kapott pontokat sorakoztatja fel, fekete az ezek alapján elvégzett végleges illesztést mutatja be.



4.12. ábra Az EM-rekonstrukció által elért illeszkedések. Az egyedi fedési ciklusok lentől felfelé haladva függőlegesen eltolva szerepelnek. Az adatpontokat szürke körök, az illesztett modellt kék vonalak képviselik.



4.13. ábra A rekonstruált felszíni mintázatok egyedi járuléka az integrált fluxushoz. Az egyes görbék közös skálán, de függőleges irányban tetszőlegesen eltolva szerepelnek.

5. fejezet

Összefoglalás és kitekintés

Munkám során olyan fedési kettős csillagrendszerekkel foglalkoztam, amelyek pulzáló csillagot tartalmaznak. Ezek a rendszerek számos, jelenleg kiaknázatlan kutatási lehetőséget kínálnak a kettősség és pulzáció közötti szinergikus kapcsolat vizsgálatára. A határterület tanulmányozásához nagy pontosságú, folyamatos időbeli lefedettségű fotometriai adatsorokra van szükség, amelyet csak az olyan űrtávcsöves küldetések, mint például a *Kepler* vagy újabban a *TESS* képes nyújtani. Ugyanakkor a feladat összetettsége és kezdeti feltérképezetlensége esetenként új megközelítések kidolgozását vagy akár nem ismert paraméter-korrelációk feltárását követelheti meg. Az elemzés gördülékenysége sokszor még ezek megléte esetén sem garantált, amint azt az általam vizsgált és bemutatott rendszer is szemlélteti.

Ahogy a András Bókon és Imre Barna Bíró (2020) munkámban is ismertettem, egy saját fejlesztésű módusazonosítási eljárást dolgoztam ki fedési kettősben levő pulzációkra. Módusszámok megállapítása az Y_ℓ^m gömbharmonikus függvények közvetlen illesztésével időigényes a vizsgálandó esetek nagy száma miatt, illetve nem kapunk releváns információt az egyes (nem)radiális módus-jelöltek valószínűségi viszonyairól a legjobb jelölthöz képest. Ennek a feladatnak a megoldására kiválóan alkalmasak a sztochasztikus mintavételezési módszerek, amelyek közül az általános népszerűségnek örvendő Markov Lánchos Monte-Carlo módszert választottam, ezen belül is a Metropolis-Hastings és a Gibbs-mintavételezés algoritmusokat. Mindkét algoritmusra többféle paraméterezést dolgoztam és próbáltam ki, hogy megtaláljam az ideális megközelítést a pulzációs módusok terének sztochasztikus mintavételezésére. Az eredmények értelmezéséhez pedig elemző szkripteket készítettem elő.

Az algoritmusok és paraméterezések tesztelését egy, kettő, illetve három frekvenciával, különböző (ℓ, m) (nem)radiális módusban pulzáló csillagot tartalmazó, mesterséges fedési kettősrendszerek szintetikus fotometriai adatsorain végeztem el. Megállapíthattam, hogy a megkonstruált algoritmus-változatok többsége teljesíti a kívánalmakat, az eljárás megtartotta a szelektív módusokra való érzékenységét, a közel hasonló modulációt mutató módusokról

pedig a helyes valószínűségi jellegű információval szolgál. Rámutattam, hogy az (ℓ, m) nem-radiális módusok egyes számainak az illesztése helyett a módusok kategóriaváltozóként való kezelése az ideális megközelítés. Ugyanakkor az is kiderült, hogy a frekvenciák számának növekedésével és így az óhatatlanul különböző amplitúdójúak szimultán megjelenésével a kisebb amplitúdóra kapott eredmények alapján nehezebb lehet meghatározni egyértelműen a legjobb módusjelöltet, így csökkenhet a módusazonosítás hatékonysága. Ezt támasztotta alá a nyolc frekvenciás teszt is.

Bár egy közönséges MCMC felprogramozásának és alkalmazásának bemutatása nem lenne önmagában új tudományos eredmény, egy azon alapuló módusazonosítási módszer már igen. A modellválasztásszerű eljárás tesztadatsorokon végzett futtatások alapján teljesíti a kitűzött célt, a vizsgálandó módusok számának növekedésével már elérhetjük a korlátokat. Ugyanakkor megvan az a lehetőség, hogy a nagyobb amplitúdójú módusokra talált egyértelmű megoldással „fehérítünk”, és a többire megismételjük az elemzést. Az esetleges korlátok ellenére az új módszer a többi, korábban létező algoritmussal együtt jelentősen hozzájárul a tudományos kutatások előbbre viteléhez, mert mindig kellő alátámasztásnak számít, ha három független módszer is ugyanazt az eredményt (módusszámokat) adja.

A második bemutatott munkám az exobolygó-tranzitot mutató pulzáló csillagok köré összpontosult (A. Bókon, Kálmán és tsai., 2023). Ugyan ez esetben az elfedő test jóval kisebb egy csillagnál, de érdekes kérdéskörnek bizonyult a modulációk vizsgálata, nem utolsósorban az illesztésekre gyakorolt hatása tekintetében. Kedvelt eljárási mód az exobolygó-tranzit szempontjából nem releváns, de asztrofizikai jelek vörös zajként való kezelése és illesztése. E megközelítés pulzációkra való alkalmazhatóságát vizsgáltam. Fennállhat ugyanis annak a veszélye, hogy a pulzációk maradványjele olyan torzulásokat okoz a tranzitgörbén, amelyeket a modellezések döntött pályás megoldásként értelmeznek majd.

E célból egy több fázisból álló munkafolyamatot terveztem meg és hajtottam végre. Mesterséges rendszerekre három különböző program felhasználásával végeztem el a tranzit és a pulzációk modellezését, illetve azok illesztését. A gravitációs sötétedés nélküli tranziton felül többféle, egy- vagy többmódusú pulzációt adtam hozzá. Minden egyes adatsorra kétféle illesztést végeztem el, egyet gravitációs sötétedés feltételezése nélkül, egyet pedig azzal együtt, a pálya irányszögeinek szabad illesztésével. Megállapítottam, hogy a tranzit okozta amplitúdó- és fázismoduláció elhanyagolhatóan kicsi különbséggel rendelkezik az alapértelmezett $(0,0)$ radiális módushoz képest, így az nem folyásolja be az illesztés eredményét. Kiderült ugyanakkor, hogy a keringési frekvencia többszöröse, vagy ahhoz nagyon közel eső periodikus jel aszimmetrikussá teszi a tranzitot. Ez pedig megteveszti a vörös zaj kezelő algoritmust, így végeredményben egy, a csillag egyenlítőjére merőleges pályán keringő exobolygót képes jelezni az algoritmus rossz gravitációs sötétedés feltételezése ese-

tén. Megállapítottam, hogy a *BIC* információs mérőszám megfelelő használatával a jelenség tettenérhető és könnyedén orvosolható a kérdéses problémát okozó pulzáció levonásával, a fedés okozta pulzációs amplitúdócsökkenést is figyelembe véve.

A fenti eljárást tipikusabb δ Scuti pulzációkkal is megismételtem. Megállapítottam, hogy az már meghaladja a program vöröszaj-kezelési képességét. Valós scenáriót követve levontam a pulzációt, de ezúttal harmonikus jelként, azaz nem vettem figyelembe a tranzit okozta átmeneti amplitúdócsökkenést. A fedés alatti, kismértékű harmonikus változást könnyedén kezelte a vöröszaj-kezelő algoritmus, így – legalábbis exobolygó-tranzitok esetén – elegendő lehet a harmonikus jelként is kezelni a pulzációt.

Számos olyan exobolygórendszer van, amelynek gazdacsillaga pulzációval rendelkezik, jelenleg két olyat is ismerünk, amelynél δ Sct típusú (WASP-33, WASP-167). Ezek adatelemzésénél kiemelt fontosságú, hogy a pulzációt és a tranzitot helyén kezeljük, különösen azoknál a modellező programoknál, ahol az asztrofizikai jelet zajként kezelve szimultán végzik az illesztést. Az elvégzett munkám iránymutatást ad ezen rendszerekkel foglalkozók számára a jövőben.

A harmadik ismertetett vizsgálódás-sorozatam a KIC 3858884 pulzációs módusainak egyedi elemzéséről és annak elért eredményéről szólt (A. Bókon, I. B. Bíró és Derekas, 2024, beküldve). A kitűzött cél eléréséig számos kihívással szembesültem, amelyek áthidalása érdekében sokféle analízist kíséreltem meg. Ezek közül számos zsákutcába vezetett, amelyek közül bemutattam néhányat, de a kitartó munkámnak köszönhetően beért ezeknek a gyümölcse.

Első lépésben a Kepler űrtávcső eredeti missziója során mért adatsorán egy egyedileg kidolgozott ciklikus eljárással szétválasztottam a fényességváltozást eredete szerint. A fedés okozta fényességváltozás pontosabb modellezésével a szakirodalomhoz képest jobb geometriai kettősmodellt, a pulzációból származó fényességváltozás elemzésével pedig teljes frekvencialistát kaptam. Habár az előzetes modellezések során a pulzációkat a másodkomponensen tételeztem fel, de tisztáznom kellett a pulzációk forrását is, mert a vizsgált csillagrendszer mindkét csillaga hasonló tömegű és felszíni hőmérsékletű volt, így joggal tételezhető fel, hogy a főkomponens is pulzál. Ennek feltárásához három eljárást is bevettem, amelyek közül a keringés következtében létrejövő fázismodulációk vizsgálatával a két legnagyobb amplitúdójú frekvenciára, a kettős Eclipse Mapping speciális eljárással pedig a domináns frekvenciák döntő többségére sikerült meghatározni, hogy valóban a másodkomponensről származnak. Egy további, az elsődleges illetve másodlagos fedések kimaszkoló adatsorból számolt frekvenciacsúcsok és azok échelle-diagramjainak vizsgálatával kijelöltem azt a hét frekvenciát, amelyre a módusazonosítási eljárásokat el tudtam végezni. Ezekkel a frekvenciákkal ℓ multiplet illesztéssel és Wigner mátrix felhasználásával meghatároztam

a lehetséges dőlésszöget, amire ($\alpha \sim 22^\circ, \beta \sim 22^\circ$) révén igazodott tengelyhez közeliként elvettem a dőltség lehetőségét. Végül igazodott tengelyre elvégzett módusazonosításokból azt kaptam, hogy a legnagyobb amplitúdójú F1 és F2 torzult nemradiális, szektorális módusok ellentétes előjelű m azimutális renddel. F3 és F15 frekvencia esetén radiális módusokat azonosítottam, míg a várakozásoknak megfelelően az F44 és F52 esetén rejtett módusokat, rendre (3,-1) és (2,1)-et kaptam.

Bár a Kepler küldetése 2018-ban véget ért, a *TESS* űrtávcső továbbra is folyamatosan végzi méréseit, amelyek szintén tartalmaznak ahhoz hasonló rendszereket, mint az általam vizsgált KIC 3858884. Ugyan a két űrobszervatórium pontossága nem mérhető össze, ezt a kihívást elfogadva szeretném folytatni a fedési kettősökben található pulzáló csillagok elemzését. A jövőbeli PLATO misszió még jobb minőségű méréseket ígér, amelyek felbecsülhetetlen értékűek lesznek, főleg ha olyan nehéz rendszerek is célkeresztbe kerülnek, mint amilyen a bemutatott rendszerem, ahol mindkét csillag pulzál. Tervezem a jövőben az asztroszeizmológiai modellezések elsajátítását is, hogy minél mélyrehatóbb elemzéseket végezhessenek el.

Bízom abban, hogy az elvégzett munkám értékelhető hozzájárulással szolgál a jelenlegi kutatásokhoz, és hogy a jövőben az elért eredményeim felhasználásával még teljesebb elemzéseket végezhessenek el. A pulzáló csillagot vagy csillagokat tartalmazó fedési kettősrendszerek a Világegyetem egyik legkülönlegesebb objektumai, és ez a további nagy fotometriai felmérő és felfedező küldetések révén remélhetőleg a jövőben még inkább így lesz.

6. fejezet

Summary

The target of my research project was the study of eclipsing binary stars containing pulsating components. These systems offer numerous unexploited research opportunities to explore the synergic relationship between binarity and pulsation. Investigations in this borderline topic require photometric datasets of high precision, long time coverage and decent sampling, which is only provided by space missions like *Kepler* or, more recently, *TESS*. However, the complexity and initially uncharted nature of the area sometimes requires the construction of new, specialised approaches, or even the exploration of unknown parameter correlations. Even with the availability of such tools does not guarantee a comfortable road to success, as illustrated by the system studied and presented in this work.

As presented in András Bókon és Imre Barna Bíró (2020), I have developed a custom mode identification procedure for pulsators in eclipsing binaries. The determination of mode numbers by direct fitting of spherical harmonic functions Y_{ℓ}^m is time consuming due to the large number of cases, and no relevant information regarding the likelihood ratios of the individual (non)radial mode candidates with respect to the best candidate is obtained. Stochastic analysis methods are suitable for solving this problem, from which I have chosen the widely popular Markov Chain Monte Carlo method with the Metropolis-Hastings and Gibbs sampling algorithms. For both algorithms, I developed and tested various parametrization types in order to find the best approach of stochastically sampling the parameter space of pulsation modes. In addition, I have constructed analytical scripts to interpret the results of the sampling.

The constructed algorithms and parametrization variants were subjected to extensive tests on synthetic photometry time series generated from artificial eclipsing binary models containing one, two, or three simultaneous pulsations with different (ℓ, m) frequencies and the (non-)radial modes. It was found that the most variants did fulfil the requirements, the procedure retained its sensitivity to selective modes, and correct probabilistic information

was provided for modes with similar modulations. I have pointed out that treating the modes as category variables is the ideal approach, rather than treating ℓ and m as individual numeric variables. It was also found that the increase of the number of simultaneous pulsation modes has a negative impact on the reliability of mode identification for lower amplitudes; hence, the efficiency of mode identification may be reduced. This was confirmed using a test case with eight simultaneous modes.

Although the demonstration of the programming and application of a common MCMC does not count as a new scientific achievement, a method for mode identification based on it would be. Tests showed that the newly constructed, model selection-based method fulfils the objective; however, the limits are quickly reached with the increase of the number of simultaneous frequencies. A possible solution is to subtract the unambiguously identified solutions for larger amplitudes and repeat the analysis for the others. Despite the possible limitations, the new method, together with other existing algorithms, provides a significant contribution to the advancement of scientific research, because if three different methods obtain the same result, it can be considered as firmly supported.

The second presented work focuses on pulsating stars with exoplanetary transits (A. Bókon, Kálmán és tsai., 2023). Although in this case the occulting body is much smaller than a single star, it has proven to be an interesting area of interest to study the modulations, not least in terms of their impact on the fits. A favoured method is to treat and fit the astrophysical signals irrelevant for exoplanet transits as red noise. I studied the feasibility of this approach for the case of pulsations, for there could be the danger of interpreting the residuals of an improperly handled pulsation as signs of an oblique orbit configuration by the model fitting programs.

To this end, a workflow consisting of several phases was designed and implemented. Three different utilities were used to model transits and pulsations in artificial systems, and to fit models on them. In addition to the transit without gravitational darkening, I added several types of pulsations, single or multi-mode. For each dataset two fits were performed, one without gravitational darkening, and one assuming gravitationally darkened star with free fitting of the orbital angles. I found that the transit-induced amplitude and phase modulation have negligible differences compared to the default radial mode (0,0), and thus do not affect the fitting results. However, a periodic signal at or very close to a multiple of the orbital frequency causes an asymmetric transit curve. This, in turn, fools the red noise handling algorithm, so that ultimately an exoplanet orbiting perpendicularly to the equator of the star is derived by the algorithm under the wrong assumption of gravitational darkening. I found however that the proper use of the *BIC* information criteria captures the phenomenon. The

problem can be easily remedied by subtracting the troubling pulsation, taking into account the amplitude reduction of the pulsation caused by the occultation.

The above procedure was repeated for more typical δ Scuti pulsations. I found that this was beyond the red noise-handling capability of the program. Following a real scenario, I subtracted the pulsation, but this time as a harmonic signal, that is, without taking into account the transient amplitude drop caused by the transit. The small harmonic variation during occultation was easily handled by the red noise handling algorithm, so that, at least for exoplanet transits, it may be sufficient to treat the pulsation as a harmonic signal.

There are several exoplanetary systems whose host stars have pulsation, two of which are known to be of δ Scuti type (WASP-33, WASP-167). When analysing such data the proper treat of the pulsation and transit is of paramount importance, especially for modelling programs in which the fit is performed simultaneously by treating the astrophysical signal as noise. The work I have conducted provides guidance for those working with these systems in the future.

The third series of investigations presents a unique analysis of the pulsation modes of KIC 3858884 and the results obtained (A. Bókon, I. B. Bíró és Derekas, 2024, beküldve). During this project I have faced multiple challenges that required an extensive amount of analysis and pathfinding. Many of these led to dead ends, some of which I have presented, but in the end the fruit of my perseverant efforts could be reaped.

In the first step, the brightness variation was disentangled into eclipsing binary and pulsating parts using a unique, iterative procedure on the data series measured during the original mission of the *Kepler* space telescope. By accurate modelling of the brightness changes due to the eclipses, I obtained an improved binary model that allowed the analysis of modulated pulsations. A time series analysis provided a complete list of frequency peaks for the pulsations. Although it was assumed by default that the secondary component is the source of pulsations, this issue required a more elaborate analysis, given that the two stars in the system under study have similar masses and surface temperatures, so both of them could harbour pulsations. To investigate this, I carried out three procedures. An examination of the phase modulations due to the orbiting component was able to determine that the two strongest modes indeed take place on the secondary. A double eclipse mapping procedure was able to locate most of the dominant pulsations on the secondary. By examining frequency peaks and their échelle diagrams computed from datasets including or masking one of the eclipse types at a time, it was possible to identify the peaks showing the substantial modulations during the secondary eclipse, making them suitable for mode identification procedures. With these frequencies I determined the orientation of the pulsation axis via a fit of ℓ -multiplets and modelling the coefficients as Wigner rotation matrix elements. A nearly aligned axis was

found with azimuthal and tilt angles $\alpha \sim 22^\circ$ and $\beta \sim 22^\circ$, respectively. Finally I performed Direct Fitting and Eclipse Mapping procedures to reconstruct surface pulsation patterns for the frequencies and infer mode numbers for them. The two largest amplitudes F1 and F2 were found to be non-radial, sectoral modes with of opposite signs of m . Radial modes were found for two frequencies, with the note that one of them is probably a combination frequency related to the other one, and thus not real. For the first time ever, I could detect two hidden modes with mode numbers (3,-1) and (2,1), respectively. This demonstrates the usefulness of the developed method for empirical mode identifications in eclipsing binaries.

Although the *Kepler* mission came to an end in 2018, the TESS space telescope continues to actively observe the sky, measuring systems similar to KIC 3858884. Although the accuracy of the two space observatories is not comparable, I would like to take up this challenge and continue to analyse pulsating stars in eclipsing binaries. The future *PLATO* mission promises even better measurements, which will be invaluable, especially when targeting difficult systems, such as the one I presented, with both stars pulsating. In the future, I plan to master astroseismological modelling in order to perform more in-depth analyses.

I hope that the work presented here will contribute to the current research, and that I will be able to use my results to carry out more complete analyses in the future. Eclipsing binaries containing pulsating stars or stars are some of the most extraordinary objects in the universe, and with the help of further large photometric missions, they will remain even more so in the future.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, **Dr. Bíró Imre Barnának**, hogy kitartó munkájával, algoritmusfejlesztéseivel és útmutatásaival támogatta az elvégzett kutatómunkámat. Külön köszönöm, hogy hozzáférést biztosított a bajai informatikai struktúrájához, amely nélkül nem lett volna elképzelhető a napokig vagy akár hetekig tartó futtatások elvégzése. Szintén köszönettel tartozom konzulensemnek, **Dr. Szabó M. Gyulának**, akitől sokat tanultam a kutatói életpályáról, és akivel számos közös projektben dolgozhattam együtt kutatócsoportjához való csatlakozásával. Nagyon hálás vagyok amiatt is mindkettőjüknek, hogy bármilyen kérdéseim, problémáim merültek fel a kutatásaim során, türelemmel és készséggel nyújtottak segítséget.

Köszönettel tartozom **Dr. Szalai Tamásnak**, aki nyomon követte a doktori tanulmányaim előrehaladását, és útmutatást adott a nehezebb időkben. Köszönettel tartozom **Dr. Kovács Józsefnek**, aki témavezetőm mellett segítette az értekezésem minél magasabb minőségűre emelését, és rámutatott az egyes gyengébb pontjaira. Szeretnék köszönetet mondani **Dr. Derekas Aliznak**, hogy a közösen folytatott diskusziók során új nézőpontokat nyújtott a csillagpulzáció tág témakörében, és hogy a doktori tanulmányaim befejezésének irányában aktívan közreműködött.

Köszönöm még családomnak és barátaimnak is a folyamatos támogatásukat, nélkülük ez az értekezés nagy valószínűséggel nem jöhetett volna létre.

Köszönet illeti a Fizika Doktori Iskolát, a Fizikai Intézetet, az SZTE Bajai Observatóriumot és az ELTE Gothard Asztrofizikai Observatórium és Multidiszciplináris Kutatóközpontot, amiért a munkám elvégzéséhez szükséges körülményeket biztosították. A munkámat a HUN-REN Támogatott Kutatócsoportok Irodája által finanszírozott Exobolygó Kutatócsoport, a Nemzeti Kutatási és Fejlesztési Iroda által meghirdetett NKFIH/OTKA FK 134432 azonosítójú pályázata és UNKP-18-318-3-I-SZTE-13 ösztöndíja támogatta.

Hivatkozások

- Aerts, Conny, Jørgen Christensen-Dalsgaard és Donald W. Kurtz (2010). *Asteroseismology*. DOI: 10.1007/978-1-4020-5803-5.
- Baglin, A. és tsai. (2006. nov.). „Scientific Objectives for a Minisat: CoRoT”. *The CoRoT Mission Pre-Launch Status - Stellar Seismology and Planet Finding*. Szerk. M. Fridlund és tsai. 1306. köt. ESA Special Publication, 33. old.
- Balona, L. A., K. Krisciunas és A. W. J. Cousins (1994. okt.). „Gamma Doradus : evidence for a new class of pulsating star.” *MNRAS* 270, 905–913. old. DOI: 10.1093/mnras/270.4.905.
- Barnes, Jason W., Ethan Linscott és Avi Shporer (2011. nov.). „Measurement of the Spin-Orbit Misalignment of KOI-13.01 from Its Gravity-darkened Kepler Transit Lightcurve”. *ApJS* 197.1, 10, 10. old. DOI: 10.1088/0067-0049/197/1/10. arXiv: 1110.3514 [astro-ph.EP].
- Benz, W. és tsai. (2021. febr.). „The CHEOPS mission”. *Experimental Astronomy* 51.1, 109–151. old. DOI: 10.1007/s10686-020-09679-4. arXiv: 2009.11633 [astro-ph.IM].
- Bíró, I. B. (2013. febr.). „The Dynamic Eclipse Mapping method in pulsating binaries”. *EAS Publications Series*. Szerk. K. Pavlovski, A. Tkachenko és G. Torres. 64. köt. EAS Publications Series, 331–338. old. DOI: 10.1051/eas/1364046.
- Bíró, I. B. és J. Nuspl (2011. szept.). „Photometric mode identification methods of non-radial pulsations in eclipsing binaries - I. Dynamic eclipse mapping”. *MNRAS* 416.3, 1601–1615. old. DOI: 10.1111/j.1365-2966.2011.18400.x. arXiv: 1101.5162 [astro-ph.SR].
- Bókon, A., I. B. Bíró és A. Derekas (2024, beküldve). „Eclipse mapping study of the eclipsing binary KIC 3858884 with hybrid δ Sct/ γ Dor component”. *A&A*. beküldve. arXiv: 2408.14464 [astro-ph.SR]. URL: <https://arxiv.org/abs/2408.14464>.
- Bókon, A., Sz. Kálmán és tsai. (2023. jún.). „Stellar pulsations interfering with the transit light curve: Configurations with false positive misalignment”. *A&A* 674, A186, A186. DOI: 10.1051/0004-6361/202346078. arXiv: 2305.00440 [astro-ph.EP].
- Bókon, András és Imre Barna Bíró (2020. júl.). „A stochastic sampling method for the analysis of eclipsed pulsations”. *Bulgarian Astronomical Journal* 33, 47. old.
- Borucki, William J. és tsai. (2010. febr.). „Kepler Planet-Detection Mission: Introduction and First Results”. *Science* 327.5968, 977. old. DOI: 10.1126/science.1185402.
- Breger, M., P. Lenz és A. A. Pamyatnykh (2009. jún.). „Towards mode selection in δ Scuti stars: regularities in observed and theoretical frequency spectra”. *MNRAS* 396.1, 291–298. old. DOI: 10.1111/j.1365-2966.2008.14330.x. arXiv: 0812.0856 [astro-ph].
- Breger, M., J. Stich és tsai. (1993. ápr.). „Nonradial pulsation of the delta Scuti star BU CANCRI in the Praesepe cluster.” *A&A* 271, 482–486. old.
- Breger, M., W. Zima és tsai. (1998. márc.). „The delta Scuti star FG Vir. III. The 1995 multisite campaign and the detection of 24 pulsation frequencies”. *A&A* 331, 271–279. old.

- Carter, Joshua A. és Joshua N. Winn (2009. okt.). „Parameter Estimation from Time-series Data with Correlated Errors: A Wavelet-based Method and its Application to Transit Light Curves”. *ApJ* 704.1, 51–67. old. DOI: 10.1088/0004-637X/704/1/51. arXiv: 0909.0747 [astro-ph.EP].
- Cassan, A. és tsai. (2012. jan.). „One or more bound planets per Milky Way star from microlensing observations”. *Nature* 481.7380, 167–169. old. DOI: 10.1038/nature10684. arXiv: 1202.0903 [astro-ph.EP].
- Cavanaugh, Joseph E. és Andrew A. Neath (2019). „The Akaike information criterion: Background, derivation, properties, application, interpretation, and refinements”. *WIREs Computational Statistics* 11.3, e1460. DOI: <https://doi.org/10.1002/wics.1460>. eprint: <https://wires.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/wics.1460>. URL: <https://wires.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/wics.1460>.
- Charbonneau, David és tsai. (2000. jan.). „Detection of Planetary Transits Across a Sun-like Star”. *ApJ* 529.1, L45–L48. old. DOI: 10.1086/312457. arXiv: astro-ph/9911436 [astro-ph].
- Collier Cameron, A. (1997. máj.). „Eclipse mapping of late-type close binary stars”. *MNRAS* 287.3, 556–566. old. DOI: 10.1093/mnras/287.3.556.
- Collier Cameron, A. és tsai. (2010. szept.). „Line-profile tomography of exoplanet transits - II. A gas-giant planet transiting a rapidly rotating A5 star”. *MNRAS* 407.1, 507–514. old. DOI: 10.1111/j.1365-2966.2010.16922.x. arXiv: 1004.4551 [astro-ph.EP].
- Constantinou, Savvas, Nikku Madhusudhan és Siddharth Gandhi (2023. febr.). „Early Insights for Atmospheric Retrievals of Exoplanets Using JWST Transit Spectroscopy”. *ApJ* 943.2, L10, L10. old. DOI: 10.3847/2041-8213/acaead. arXiv: 2301.02564 [astro-ph.EP].
- Cousins, A. W. J., J. A. R. Caldwell és J. W. Menzies (1989. dec.). „The Period of gamma Doradus”. *Information Bulletin on Variable Stars* 3412, 1. old.
- Csizmadia, Sz (2020. aug.). „The Transit and Light Curve Modeller”. *MNRAS* 496.4, 4442–4467. old. DOI: 10.1093/mnras/staa349.
- Csizmadia, Sz. és tsai. (2021. aug.). „The power of wavelets in analysis of transit and phase curves in presence of stellar variability and instrumental noise I. Method and validation”. *arXiv e-prints*, arXiv:2108.11822, arXiv:2108.11822. arXiv: 2108.11822 [astro-ph.EP].
- Dholakia, Shashank, Rodrigo Luger és Shishir Dholakia (2022. febr.). „Efficient and Precise Transit Light Curves for Rapidly Rotating, Oblate Stars”. *ApJ* 925.2, 185, 185. old. DOI: 10.3847/1538-4357/ac33aa. arXiv: 2109.03250 [astro-ph.EP].
- Duchêne, Gaspard és Adam Kraus (2013. aug.). „Stellar Multiplicity”. *ARA&A* 51.1, 269–310. old. DOI: 10.1146/annurev-astro-081710-102602. arXiv: 1303.3028 [astro-ph.SR].
- Dupret, M. -A., J. De Ridder és tsai. (2003. febr.). „A photometric mode identification method, including an improved non-adiabatic treatment of the atmosphere”. *A&A* 398, 677–685. old. DOI: 10.1051/0004-6361:20021679. arXiv: astro-ph/0211395 [astro-ph].
- Dupret, M. -A., A. Grigahcène és tsai. (2005. jún.). „Convection-pulsation coupling. II. Excitation and stabilization mechanisms in δ Sct and γ Dor stars”. *A&A* 435.3, 927–939. old. DOI: 10.1051/0004-6361:20041817.
- Dziembowski, W. és M. Krolikowska (1990. jan.). „On the mechanism of mode selection in delta Scuti stars.” *Acta Astron.* 40, 19. old.
- Eyer, Laurent és Nami Mowlavi (2008. okt.). „Variable stars across the observational HR diagram”. *Journal of Physics Conference Series*. 118. köt. Journal of Physics Conference Series, 012010, 12010. old. DOI: 10.1088/1742-6596/118/1/012010. arXiv: 0712.3797 [astro-ph].

- Foster, Grant (1996. okt.). „Wavelets for period analysis of unevenly sampled time series”. *AJ* 112, 1709–1729. old. DOI: 10.1086/118137.
- Fuller, J. és tsai. (2020. nov.). „Tidally trapped pulsations in binary stars”. *MNRAS* 498.4, 5730–5744. old. DOI: 10.1093/mnras/staa2376. arXiv: 2008.02836 [astro-ph.SR].
- Gaia Collaboration és tsai. (2019. márc.). „Gaia Data Release 2. Variable stars in the colour-absolute magnitude diagram”. *A&A* 623, A110, A110. DOI: 10.1051/0004-6361/201833304. arXiv: 1804.09382 [astro-ph.SR].
- Gamarova, A. Yu. és tsai. (2003. márc.). „Application of the Spatial Filtration Method to RZ Cas”. *Interplay of Periodic, Cyclic and Stochastic Variability in Selected Areas of the H-R Diagram*. Szerk. C. Sterken. 292. köt. Astronomical Society of the Pacific Conference Series, 369. old.
- Garrido, R. (2000. jan.). „Photometric Modal Discrimination in δ Scuti and γ Doradus Stars”. *Delta Scuti and Related Stars*. Szerk. Michel Breger és Michael Montgomery. 210. köt. Astronomical Society of the Pacific Conference Series, 67. old. DOI: 10.48550/arXiv.astro-ph/0001064. arXiv: astro-ph/0001064 [astro-ph].
- Gaulme, Patrick és Joyce A. Guzik (2019. okt.). „Systematic search for stellar pulsators in the eclipsing binaries observed by Kepler”. *A&A* 630, A106, A106. DOI: 10.1051/0004-6361/201935821. arXiv: 1908.06773 [astro-ph.SR].
- Geman, Stuart és Donald Geman (1984. nov.). „Geman, D.: Stochastic relaxation, Gibbs distribution, and the Bayesian restoration of images. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.* PAMI-6(6), 721–741”. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.* 6, 721–741. old. DOI: 10.1109/TPAMI.1984.4767596.
- Gies, D. R. és A. Kullavanijaya (1988. márc.). „The Line Profile Variations of Epsilon Persei. I. Evidence for Multimode Nonradial Pulsations”. *ApJ* 326, 813. old. DOI: 10.1086/166140.
- Guo, Zhao és tsai. (2019. nov.). „KIC 4142768: An Evolved Gamma Doradus/Delta Scuti Hybrid Pulsating Eclipsing Binary with Tidally Excited Oscillations”. *ApJ* 885.1, 46, 46. old. DOI: 10.3847/1538-4357/ab41f6. arXiv: 1909.03908 [astro-ph.SR].
- Guszejnov, Dávid, Philip F. Hopkins és Mark R. Krumholz (2017. júl.). „Protostellar feedback in turbulent fragmentation: consequences for stellar clustering and multiplicity”. *MNRAS* 468.4, 4093–4106. old. DOI: 10.1093/mnras/stx725. arXiv: 1610.00772 [astro-ph.GA].
- Guzik, Joyce A. és tsai. (2000. okt.). „Driving the Gravity-Mode Pulsations in γ Doradus Variables”. *ApJ* 542.1, L57–L60. old. DOI: 10.1086/312908.
- Handler, G., L. A. Balona és tsai. (2002. jún.). „Discovery and analysis of p-mode and g-mode oscillations in the A-type primary of the eccentric binary HD 209295*”. *MNRAS* 333.2, 262–279. old. DOI: 10.1046/j.1365-8711.2002.05295.x. arXiv: astro-ph/0202214 [astro-ph].
- Handler, G., D. W. Kurtz és tsai. (2020. márc.). „Tidally trapped pulsations in a close binary star system discovered by TESS”. *Nature Astronomy* 4, 684–689. old. DOI: 10.1038/s41550-020-1035-1. arXiv: 2003.04071 [astro-ph.SR].
- Hastings, W. K. (1970. ápr.). „Monte Carlo Sampling Methods using Markov Chains and their Applications”. *Biometrika* 57.1, 97–109. old. DOI: 10.1093/biomet/57.1.97.
- Hendry, Paul D. és Stefan W. Mochnacki (1992. ápr.). „The GDDSYN Light Curve Synthesis Method”. *ApJ* 388, 603. old. DOI: 10.1086/171177.
- Henry, Gregory W. és Francis C. Fekel (2005. ápr.). „HD 8801: A Unique Single Am Star with γ Doradus and δ Scuti Pulsations”. *AJ* 129.4, 2026–2033. old. DOI: 10.1086/428373.
- Henry, Gregory W., Geoffrey W. Marcy és tsai. (2000. jan.). „A Transiting “51 Peg-like” Planet”. *ApJ* 529.1, L41–L44. old. DOI: 10.1086/312458.

- Herrero, E. és tsai. (2011. febr.). „WASP-33: the first δ Scuti exoplanet host star”. *A&A* 526, L10, L10. old. DOI: 10.1051/0004-6361/201015875. arXiv: 1010.1173 [astro-ph.EP].
- Horne, K. (1985. márc.). „Images of accretion discs -I. The eclipse mapping method.” *MNRAS* 213, 129–141. old. DOI: 10.1093/mnras/213.2.129.
- Johnston, C. és tsai. (2023. febr.). „Tidal perturbations and eclipse mapping in the pulsations in the hierarchical triple system U Gru”. *A&A* 670, A167, A167. DOI: 10.1051/0004-6361/202244808. arXiv: 2210.06491 [astro-ph.SR].
- Kálmán, Sz. és tsai. (2022. ápr.a). „Gravity darkening and tidally perturbed stellar pulsation in the misaligned exoplanet system WASP-33”. *A&A* 660, L2, L2. old. DOI: 10.1051/0004-6361/202243299. arXiv: 2203.09618 [astro-ph.EP].
- (2022. ápr.b). „Gravity darkening and tidally perturbed stellar pulsation in the misaligned exoplanet system WASP-33”. *A&A* 660, L2, L2. old. DOI: 10.1051/0004-6361/202243299. arXiv: 2203.09618 [astro-ph.EP].
- Kálmán, Sz., Szabó, Gy. M. és Csizmadia, Sz. (2023). „Power of wavelets in analyses of transit and phase curves in the presence of stellar variability and instrumental noise. II. Accuracy of the transit parameters”. *A&A*. DOI: 10.1051/0004-6361/202143017. URL: <https://doi.org/10.1051/0004-6361/202143017>.
- Konacki, Maciej és tsai. (2003. jan.). „An extrasolar planet that transits the disk of its parent star”. *Nature* 421.6922, 507–509. old. DOI: 10.1038/nature01379.
- Lendl, M. és tsai. (2020. nov.). „The hot dayside and asymmetric transit of WASP-189 b seen by CHEOPS”. *A&A* 643, A94, A94. DOI: 10.1051/0004-6361/202038677. arXiv: 2009.13403 [astro-ph.EP].
- Lenz, P. és M. Breger (2005. jún.). „Period04 User Guide”. *Communications in Asteroseismology* 146, 53–136. old. DOI: 10.1553/cia146s53.
- Liakos, Alexios és Panagiotis Niarchos (2017. febr.). „Catalogue and properties of δ Scuti stars in binaries”. *MNRAS* 465.1, 1181–1200. old. DOI: 10.1093/mnras/stw2756. arXiv: 1611.00200 [astro-ph.SR].
- Maceroni, C. és tsai. (2014. márc.). „KIC 3858884: a hybrid δ Scuti pulsator in a highly eccentric eclipsing binary”. *A&A* 563, A59, A59. DOI: 10.1051/0004-6361/201322871. arXiv: 1401.3130 [astro-ph.SR].
- Mandel, Kaisey és Eric Agol (2002. dec.). „Analytic Light Curves for Planetary Transit Searches”. *ApJ* 580.2, L171–L175. old. DOI: 10.1086/345520. arXiv: astro-ph/0210099 [astro-ph].
- Manzoori, Davood (2020. okt.). „Linear and non-linear tidal oscillations and mode identification in the eccentric binary system KIC 3858884”. *MNRAS* 498.2, 1871–1890. old. DOI: 10.1093/mnras/staa2207.
- Metropolis, Nicholas és tsai. (1953. jún.). „Equation of State Calculations by Fast Computing Machines”. *J. Chem. Phys.* 21.6, 1087–1092. old. DOI: 10.1063/1.1699114.
- Mkrtychian, D. E. és tsai. (2002. jan.). „Pulsating Components of Eclipsing Binaries: New Asteroseismic Methods of Studies and Prospects”. *IAU Colloq. 185: Radial and Nonradial Pulsations as Probes of Stellar Physics*. Szerk. Conny Aerts, Timothy R. Bedding és Jørgen Christensen-Dalsgaard. 259. köt. Astronomical Society of the Pacific Conference Series, 96. old.
- Müller, P. (1991). *A Generic Approach to Posterior Integration and Gibbs Sampling*. Purdue University, Department of Statistics. URL: https://books.google.hu/books?id=u8D_HAAACAAJ.
- Murphy, Simon J., Timothy R. Bedding, Ewa Niemczura és tsai. (2015. márc.). „A search for non-pulsating, chemically normal stars in the δ Scuti instability strip using Kepler

- data”. *MNRAS* 447.4, 3948–3959. old. DOI: 10.1093/mnras/stu2749. arXiv: 1412.7543 [astro-ph.SR].
- Murphy, Simon J., Timothy R. Bedding, Hiromoto Shibahashi és tsai. (2014. júl.). „Finding binaries among Kepler pulsating stars from phase modulation of their pulsations”. *MNRAS* 441.3, 2515–2527. old. DOI: 10.1093/mnras/stu765. arXiv: 1404.5649 [astro-ph.SR].
- Oshagh, M., S. Dreizler és tsai. (2016. aug.). „Can stellar activity make a planet seem misaligned?”. *A&A* 593, A25, A25. DOI: 10.1051/0004-6361/201628728. arXiv: 1607.03134 [astro-ph.EP].
- Oshagh, M., N. C. Santos és tsai. (2013. aug.). „Effect of stellar spots on high-precision transit light-curve”. *A&A* 556, A19, A19. DOI: 10.1051/0004-6361/201321309. arXiv: 1306.0739 [astro-ph.EP].
- Pál, András. (2012. ápr.). „FITSH- a software package for image processing”. *MNRAS* 421.3, 1825–1837. old. DOI: 10.1111/j.1365-2966.2011.19813.x. arXiv: 1111.1998 [astro-ph.IM].
- Perryman, Michael (2018). *The Exoplanet Handbook*.
- Petigura, Erik A., Andrew W. Howard és Geoffrey W. Marcy (2013. nov.). „Prevalence of Earth-size planets orbiting Sun-like stars”. *Proceedings of the National Academy of Science* 110.48, 19273–19278. old. DOI: 10.1073/pnas.1319909110. arXiv: 1311.6806 [astro-ph.EP].
- Prša, A. és T. Zwitter (2005. júl.). „A Computational Guide to Physics of Eclipsing Binaries. I. Demonstrations and Perspectives”. *ApJ* 628.1, 426–438. old. DOI: 10.1086/430591. arXiv: astro-ph/0503361 [astro-ph].
- Reegen, P. (2007. jún.). „SigSpec. I. Frequency- and phase-resolved significance in Fourier space”. *A&A* 467.3, 1353–1371. old. DOI: 10.1051/0004-6361:20066597. arXiv: physics/0703160 [physics.data-an].
- Reyniers, K. és P. Smeyers (2003. okt.a). „Tidal perturbations of linear, isentropic oscillations in components of circular-orbit close binaries . II. Validity of the perturbation method applied to equilibrium tides”. *A&A* 409, 677–688. old. DOI: 10.1051/0004-6361:20031098.
- (2003. jún.b). „Tidal perturbations of linear, isentropic oscillations in components of circular-orbit close binaries. I. Synchronously rotating components”. *A&A* 404, 1051–1065. old. DOI: 10.1051/0004-6361:20030501.
- Ricker, George R. és tsai. (2015. jan.). „Transiting Exoplanet Survey Satellite (TESS)”. *Journal of Astronomical Telescopes, Instruments, and Systems* 1, 014003, 14003. old. DOI: 10.1117/1.JATIS.1.1.014003.
- Rodríguez, E. és M. Breger (2001. jan.). „delta Scuti and related stars: Analysis of the R00 Catalogue”. *A&A* 366, 178–196. old. DOI: 10.1051/0004-6361:20000205.
- Rodríguez, E., M. J. López-González és P. López de Coca (2000. jún.). „A revised catalogue of delta Sct stars”. *A&AS* 144, 469–474. old. DOI: 10.1051/aas:2000221.
- Rodríguez Martínez, Romy és tsai. (2020. szept.). „KELT-25 b and KELT-26 b: A Hot Jupiter and a Substellar Companion Transiting Young A Stars Observed by TESS”. *AJ* 160.3, 111, 111. old. DOI: 10.3847/1538-3881/ab9f2d. arXiv: 1912.01017 [astro-ph.EP].
- Rowe, J. F. és tsai. (2006. dec.). „Discovery of hybrid γ Dor and δ Sct pulsations in BD+18 4914 through MOST spacebased photometry”. *Communications in Asteroseismology* 148, 34–43. old. DOI: 10.1553/cia148s34. arXiv: astro-ph/0610640 [astro-ph].
- Saio, Hideyuki és tsai. (2018. febr.). „Theory and evidence of global Rossby waves in upper main-sequence stars: r-mode oscillations in many Kepler stars”. *MNRAS* 474.2, 2774–2786. old. DOI: 10.1093/mnras/stx2962. arXiv: 1711.04908 [astro-ph.SR].

- Scuflaire, R. és tsai. (2008. aug.). „CLÉS, Code Liégeois d'Évolution Stellaire”. *Ap&SS* 316.1-4, 83–91. old. DOI: 10.1007/s10509-007-9650-1. arXiv: 0712.3471 [astro-ph].
- Shi, Xiang-dong és tsai. (2021. aug.). „HL Dra: an active Algol-like binary system with a pulsating component star and a cool third body”. *MNRAS* 505.4, 6166–6178. old. DOI: 10.1093/mnras/stab1657.
- Shibahashi, Hiromoto és Donald W. Kurtz (2012. máj.). „FM stars: a Fourier view of pulsating binary stars, a new technique for measuring radial velocities photometrically”. *MNRAS* 422.1, 738–752. old. DOI: 10.1111/j.1365-2966.2012.20654.x. arXiv: 1202.0105 [astro-ph.SR].
- Sivia, D S (2006. jún.). *Data Analysis: A Bayesian Tutorial*. Oxford University Press, Oxford. ISBN: 9781383029819. DOI: 10.1093/oso/9780198568315.001.0001. URL: <http://dx.doi.org/10.1093/oso/9780198568315.001.0001>.
- Skilling, John és S. F. Gull (1985). „Algorithms and Applications”. *Maximum-Entropy and Bayesian Methods in Inverse Problems*. Springer Netherlands, 83–132. old. ISBN: 9789401722216. DOI: 10.1007/978-94-017-2221-6_5. URL: http://dx.doi.org/10.1007/978-94-017-2221-6_5.
- Szabó, Gy. M., A. Pál és tsai. (2012. márc.). „Spin-orbit resonance, transit duration variation and possible secular perturbations in KOI-13”. *MNRAS* 421.1, L122–L126. old. DOI: 10.1111/j.1745-3933.2012.01219.x. arXiv: 1110.4231 [astro-ph.SR].
- Szabó, Gy. M., R. Szabó és tsai. (2011. júl.). „Asymmetric Transit Curves as Indication of Orbital Obliquity: Clues from the Late-type Dwarf Companion in KOI-13”. *ApJ* 736.1, L4, L4. old. DOI: 10.1088/2041-8205/736/1/L4. arXiv: 1105.2524 [astro-ph.EP].
- Szatmáry, Károly (1990. jún.). „Pulsating Variable Stars in Binary Systems”. *J. American Association of Variable Star Observers* 19.1, 52–56. old.
- Uytterhoeven, K. és tsai. (2011. okt.). „The Kepler characterization of the variability among A- and F-type stars. I. General overview”. *A&A* 534, A125, A125. DOI: 10.1051/0004-6361/201117368. arXiv: 1107.0335 [astro-ph.SR].
- von Essen, C. és tsai. (2014. jan.). „Pulsation analysis and its impact on primary transit modeling in WASP-33”. *A&A* 561, A48, A48. DOI: 10.1051/0004-6361/201322453. arXiv: 1311.3614 [astro-ph.EP].
- Walker, Gordon és tsai. (2003. szept.). „The MOST Asteroseismology Mission: Ultraprecise Photometry from Space”. *PASP* 115.811, 1023–1035. old. DOI: 10.1086/377358.
- Welsh, William F. és tsai. (2011. nov.). „KOI-54: The Kepler Discovery of Tidally Excited Pulsations and Brightenings in a Highly Eccentric Binary”. *ApJS* 197.1, 4, 4. old. DOI: 10.1088/0067-0049/197/1/4. arXiv: 1102.1730 [astro-ph.SR].
- Wilson, R. E. (1979. dec.). „Eccentric orbit generalization and simultaneous solution of binary star light and velocity curves.” *ApJ* 234, 1054–1066. old. DOI: 10.1086/157588.
- Wilson, Robert E. és Edward J. Devinney (1971. jún.). „Realization of Accurate Close-Binary Light Curves: Application to MR Cygni”. *ApJ* 166, 605. old. DOI: 10.1086/150986.
- Zhou, A. -Y. (2014). *Pulsating Components in Binary and Multiple Stellar Systems — A Catalog of Oscillating Binaries*. arXiv: 1002.2729 [astro-ph.SR].
- Zima, W. (1997. júl.). „The Campaigns of the Delta Scuti Network”. *Delta Scuti Star Newsletter* 11, 37. old.

A. függelék

Függelék

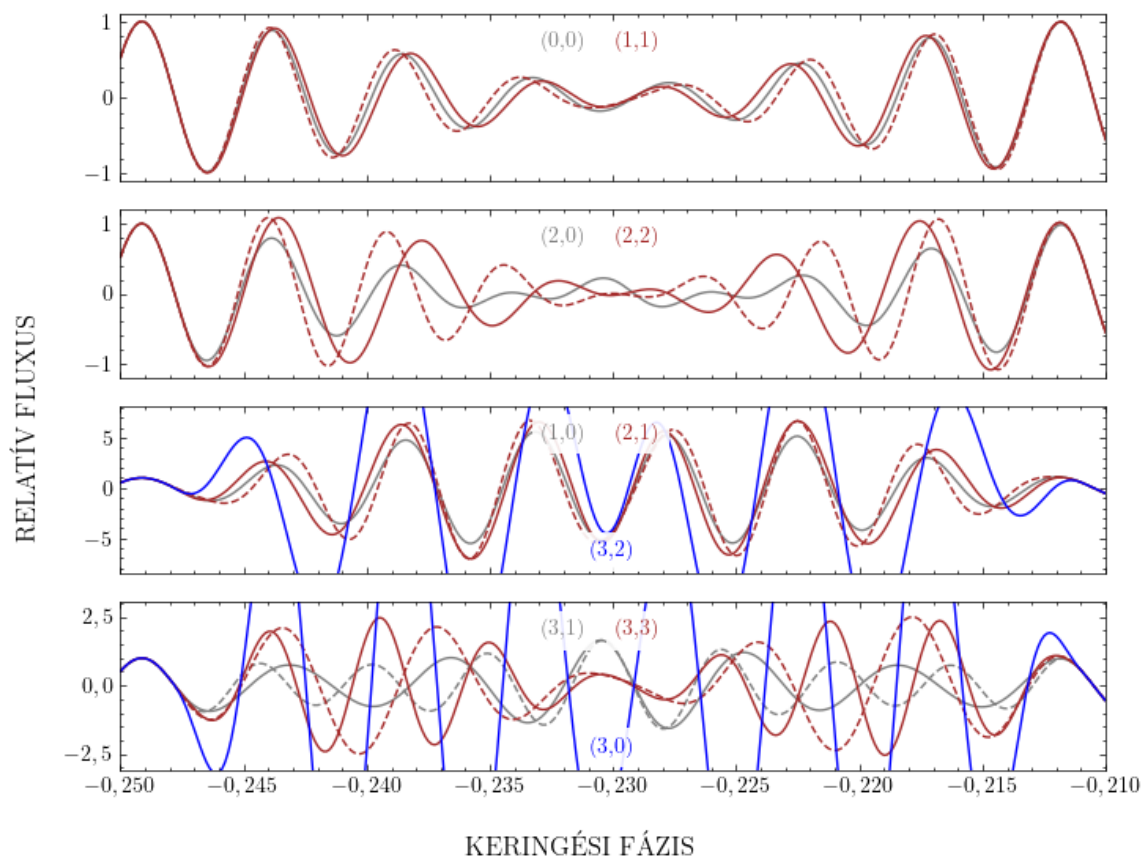
A.1. Táblázat Az első 55 legnagyobb amplitúdójú detektált frekvenciák táblázata. Az egyes frekvenciák mind keringési frekvencia, mind a hagyományosabbnak számító d^{-1} egyégben fel vannak tüntetve, az amplitúdókkal és kezdőfázisokkal együtt. Az utolsó oszlopban jelenítettem meg a lehetséges frekvencia kombinációkat is..

id	f (f_{orb})	f (d^{-1})	amp	φ (rad)	mj.
F1	187,65	7,2245	0,009821	2,69	
F2	193,95	7,4671	0,009052	4,87	
F3	255,30	9,8292	0,001868	0,30	
F4	194,96	7,5061	0,001801	2,45	F2 + f_{orb}
F5	174,81	6,7301	0,001550	2,72	
F6	247,04	9,5111	0,001243	3,10	
F7	381,60	14,6916	0,001182	0,88	F1 + F2
F8	304,31	11,7158	0,001009	5,56	
F9	382,15	14,7128	0,000593	0,71	
F10	191,08	7,3564	0,000539	3,59	
F11	193,65	7,4555	0,000485	2,34	
F12	382,80	14,7378	0,000458	6,13	
F13	187,95	7,2361	0,000512	2,02	
F14	1,00	0,0385	0,000432	2,60	f_{orb}
F15	235,49	9,0665	0,000335	5,02	3 · F12 – 3 · F8
F16	18,11	0,6972	0,000406	0,12	
F17	188,59	7,2607	0,000348	2,30	
F18	208,49	8,0268	0,000370	0,42	
F19	253,46	9,7581	0,000364	4,72	
F20	368,91	14,2031	0,000329	2,37	

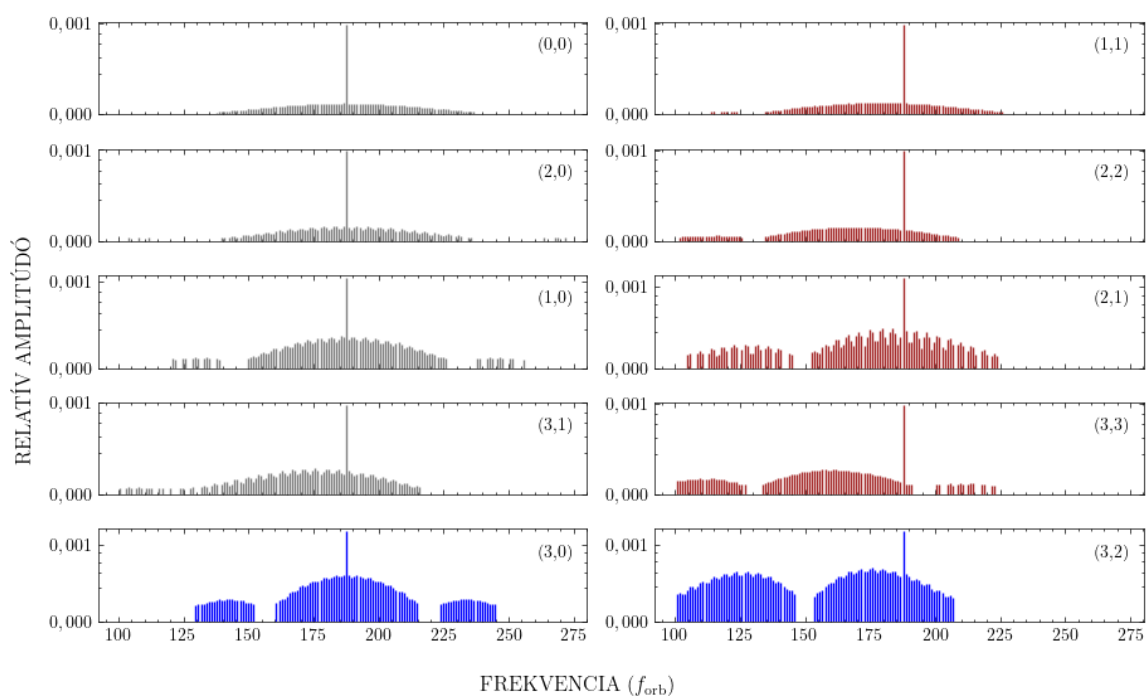
Következő oldalon folytatódik

A.1 táblázat – folytatás előző oldalról

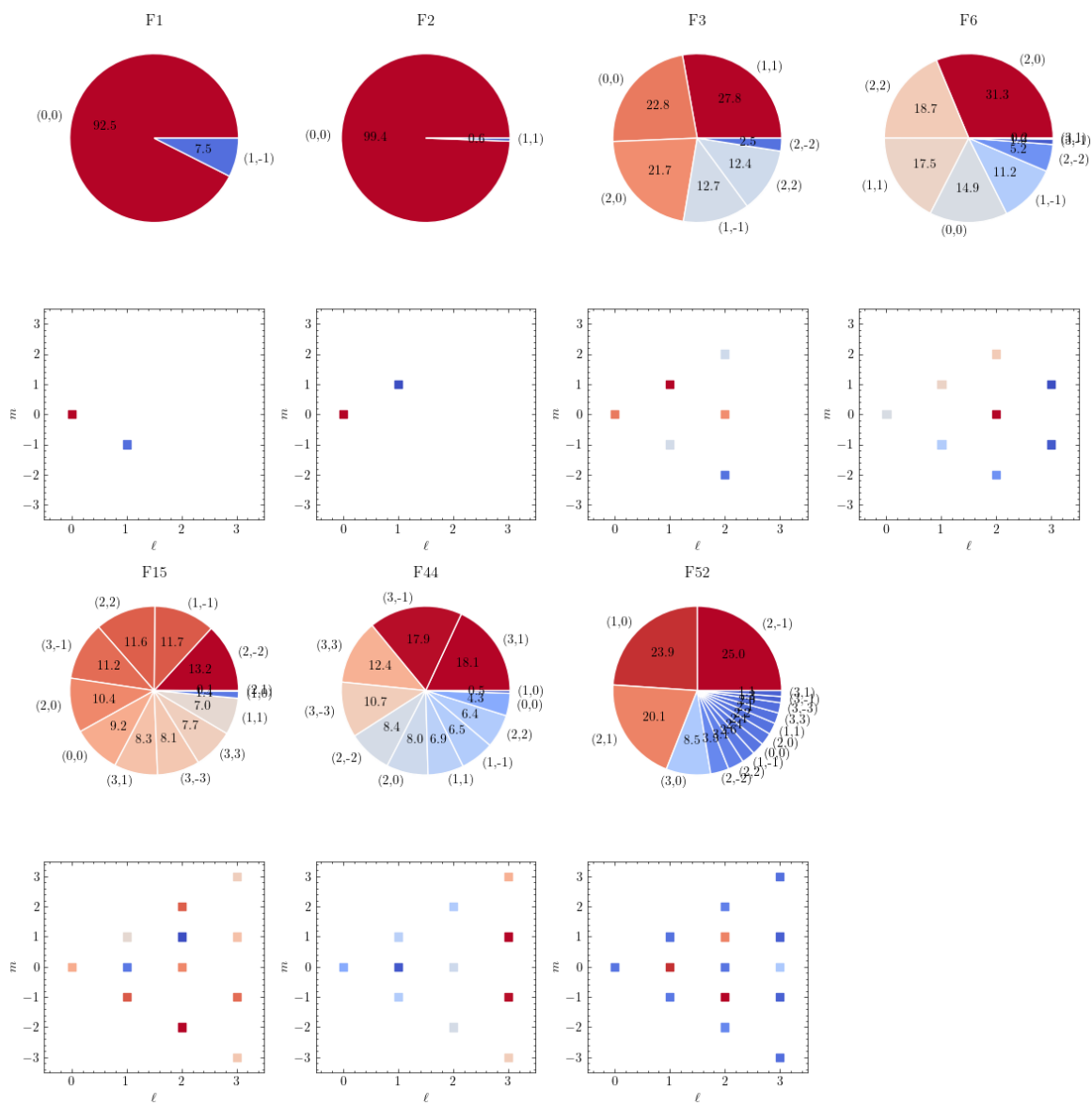
id	$f (f_{\text{orb}})$	$f (d^{-1})$	amp	φ (rad)	mj.
F21	298,89	11,5074	0,000317	3,96	
F22	259,55	9,9926	0,000323	3,85	$3 \cdot F13 - F8$
F23	6,30	0,2426	0,000291	2,14	$F2 - F1$
F24	241,44	9,2956	0,000271	2,29	
F25	186,42	7,1770	0,000258	4,14	
F26	442,95	17,0537	0,000262	2,61	$F1 + F3$
F27	375,30	14,4491	0,000279	4,92	$2 \cdot F1$
F28	387,90	14,9341	0,000241	3,00	$2 \cdot F2$
F29	23,41	0,9013	0,000230	1,07	
F30	268,39	10,3331	0,000238	5,66	
F31	240,81	9,2712	0,000245	2,97	
F32	359,01	13,8220	0,000220	0,82	
F33	440,99	16,9781	0,000213	1,38	$F2 + F6$
F34	368,76	14,1972	0,000203	1,53	$F2 + F5$
F35	13,24	0,5097	0,000186	1,85	$4 \cdot F17 - 3 \cdot F6$
F36	367,34	14,1426	0,000213	4,53	
F37	180,72	6,9579	0,000221	1,62	
F38	443,91	17,0904	0,000295	4,42	$F3 + F17$
F39	305,54	11,7633	0,000252	2,02	
F40	382,67	14,7326	0,000173	5,84	
F41	236,77	9,1156	0,000183	5,67	
F42	388,91	14,9732	0,000174	0,68	$2 \cdot F2 + f_{\text{orb}}$
F43	186,95	7,1976	0,000172	5,66	$F13 - f_{\text{orb}}$
F44	194,69	7,4956	0,000144	5,05	
F45	293,12	11,2849	0,000159	5,44	
F46	311,03	11,9745	0,000269	3,85	$3 \cdot F29 + F31$
F47	177,80	6,8452	0,000150	5,38	$F5 + 3 \cdot f_{\text{orb}}$
F48	161,82	6,2301	0,000147	2,54	
F49	3,04	0,1172	0,000148	0,64	
F50	27,35	1,0531	0,000147	5,47	
F51	311,02	11,9741	0,000226	5,38	
F52	188,91	7,2729	0,000182	1,37	
F53	296,52	11,4161	0,000142	1,55	
F54	13,14	0,5057	0,000140	0,30	$F13 - F5$
F55	61,35	2,3621	0,000138	1,92	$F3 - F2$



A.1. ábra A tekintett (ℓ, m) módusok modellezett modulációi a másodlagos fedés alatt. Minden módust ugyanazzal a frekvenciával és a fedésen kívüli amplitúdóval modelleztem. Az egyes nem negatív (ℓ, m) -ek az a grafikon ábrázoltaknak megfelelő színnel vannak jelölve a panelek közepén. A szaggatott nem nulla móduszpárok ugyanannak a módusznak a negatív m testvérét jelölik. A csoportosítás az egymáshoz való hasonlóságuk alapján történt.



A.2. ábra Az összes modellezett, nem-negatív (ℓ, m) módus SigSpec által számított Fourier-spektruma. Az első négy sorban az összes olyan módus látható, amelyek az A.1 ábrán látható, különböző családokon belül a legkevésbé megkülönböztethető párokat alkotnak. Az utolsó sorban a legnagyobb amplitúdóval rendelkező rejtett módusok Fourier-spektrumát szemlélteti. A móduszok számai minden panel jobb felső sarkában vannak felcímkézve, a színek segítséget jelentenek az A.1 ábra hozzátartozó „családtagjával” összevetésével. Vegyük észre, hogy az amplitúdók nemlineárisan, négyzetgyökös skálán szerepelnek.



A.3. ábra Az YLMCMC eredménye, igazodott tengelyen.