Konvex testek közelítése politópokkal

Doktori értekezés

Vígh Viktor

Témavezető: dr. Fodor Ferenc

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
SZTE TTIK, Bolyai Intézet, Geometria Tanszék

2010
Szeged

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani mindenkinek, aki segített a dolgozat elkészítésében. Kiemelném közülük témavezetőmet, dr. Fodor Ferencet, aki nem csak a disszertáció megírásához nyújtott mindenre kiterjedő segítséget, de egész eddigi akadémiai pályámat egyengette, mind szakmailag, mind emberileg mindenben támogatott. Köszönettel tartozom társszerzőimnek, név szerint dr. Bárány Imrének, dr. ifj. Böröczky Károlynak és dr. Matthias Reitznernek az inspiráló és eredményes közös munkáért. Nagy megtiszteltetés volt mindannyiukkal együtt dolgozni. Hálás vagyok édesapámnak, Vígh Viktornak és barátomnak, dr. Kruzslicz Péternek a kézirat gondos átolvasásáért, és a hozzáfűzött értékes megjegyzésekért, javaslatokért.

Köszönetet szeretnék mondani egykori tanáraimnak, akiktől matematikát tanultam. Kiemelném közülük nagymamámat, néhai Vígh Sándornét és édesapámat, Vígh Viktort, valamint középiskolai tanáraimat, Konfárné Nagy Klárát és dr. Dobi Jánost. Az ő hatásukra szerettem meg és választottam hivatásomnak a matematikát. Köszönettel tartozom az SZTE Bolyai Intézet minden oktatójának, különösen a Geometria Tanszéken dolgozó kollégáimnak, akiktől nemcsak a szakma alapjait tanultam meg, de későbbi munkám során is mindenben támogattak.

Végül, de nem utolsó sorban, hálás vagyok családomnak és barátaimnak, közülük is elsősorban feleségemnek, Vígh-Mácsai Zsanettnek és édesanyámnak, Vígné Szenti Katalinnak az eredményes munkához szükséges nyugodt háttér megteremtéséért és a sok bíztatásért, jó szóért.

A dolgozat elkészítése során az Országos Tudományos Kutatási Alapprogramok T75016 pályázata támogatott.

Szeged, 2010. január

Tartalomjegyzék

Ábrák jegyzéke

1. fejezet

Bevezetés

Az értekezés központi témája konvex testek közelítése (idegen szóval approximációja) politópokkal. A probléma röviden, dióhéjban a következő. Adott egy K konvex test a d-dimenziós Euklideszi térben. A közelítést kétféleképpen végezzük. Az első probléma, hogy politópok egy adott $\mathcal{P}$ családjából válasszuk ki azt a P politópot, ami K-hoz (bizonyos értelemben) a legközelebb van, és értsük meg P geometriai viselkedését. A második megközelítés, hogy a közelítő politópot véletlenszerűen konstruáljuk, valamilyen modellt követve. Az így kapott véletlen politóp geometriai jellemzőinek (például lapok száma, kevert térfogatok) megértése a központi kérdés.

Ezek a problémák mind elméleti szempontból, mind gyakorlati alkalmazások szempontjából alapvető jelentőségűek. A matematika egyik "legnagyobb" gondolata volt, hogy végtelen természetű problémákat oly módon kezeljünk, mint véges problémák határesetei. A konvex testek elméletében a végesítés nyilvánvalóan politópokon keresztül történik. Gyakorlati alkalmazásokhoz pedig elegendő a számítógép felületábrázolására gondolni. A komputer –nyilvánvaló okok miatt– minden felületet poliedrális felületként ábrázol. Az elméleti és gyakorlati alkalmazások bemutatása nem témája a dolgozatnak, az érdeklődő olvasónak javasoljuk a [43] és a [30] cikkeket, valamint a [39] monográfia 11.2. szakaszát.

1.1. A dolgozat felépítése

Az értekezés öt logikai egységbe szerveződik. Az első, bevezető fejezetben a dolgozat tartalmáról, felépítéséről írunk. Ennek a fejezetnek a végén található a használt jelölések bevezetése is. A második és harmadik fejezetek a dolgozat legfontosabb részei. Ezekben a politópapproximációk elméletének két fő területét tárgyaljuk: történeti áttekintést adunk, illetve új eredményeket bizonyítunk. A negyedik fejezetben az alkalmazott konvex geometriai ismereteket röviden, pontokba rendezve összefoglaljuk. Végül az utolsó, ötödik fejezetben a dolgozat tartalmi kivonata található angol és magyar nyelven.

Törekedtünk arra, hogy a két fő rész, vagyis a második és a harmadik fejezet külön–külön is jól olvasható, kerek egészet alkosson, ezért bizonyos jelölések, definíciók és fogalmak tekintetében a dolgozat többszörösen redundáns. A negyedik fejezetben leírt matematikai alapismeretekkel is a dolgozat olvashatóságát szerettük volna növelni. Legjobb tudomásunk szerint néhány felhasznált fogalomról, tételről nincs könnyen hozzáférhető magyar nyelvű referencia, ezért is éreztük fontosnak, hogy az egyetemi törzsanyagban nem szereplő ismereteket legalább vázlatosan összegyűjtsük.

A dolgozat a szerző következő négy cikkjén alapszik:

- I. Bárány, F. Fodor, V. Vígh: Intrinsic volumes of inscribed random polytopes in smooth convex bodies, (2009), 1–17, közlésre benyújtva, elektronikusan elérhető arXiv:0906.0309v1.

- K. J. Böröczky, F. Fodor, M. Reitzner, V. Vígh: Mean width of random polytopes in a reasonable smooth convex body, *J. Multivariate Anal.*, **100** (2009), 2287–2295.

- K. J. Böröczky, F. Fodor, V. Vígh: Approximating 3-dimensional convex bodies by polytopes with a restricted number of edges, *Beiträge Algebra Geom.*, **49** (2008), no. 1, 177–193.

- V. Vígh: Typical faces of best approximating polytopes with a restricted number of edges, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **75** (2009), no. 1-2, 313–327.

A dolgozat fő eredményeit adó tételek és bizonyításaik tartalmilag lényegében megegyeznek az ezekben leírtakkal.

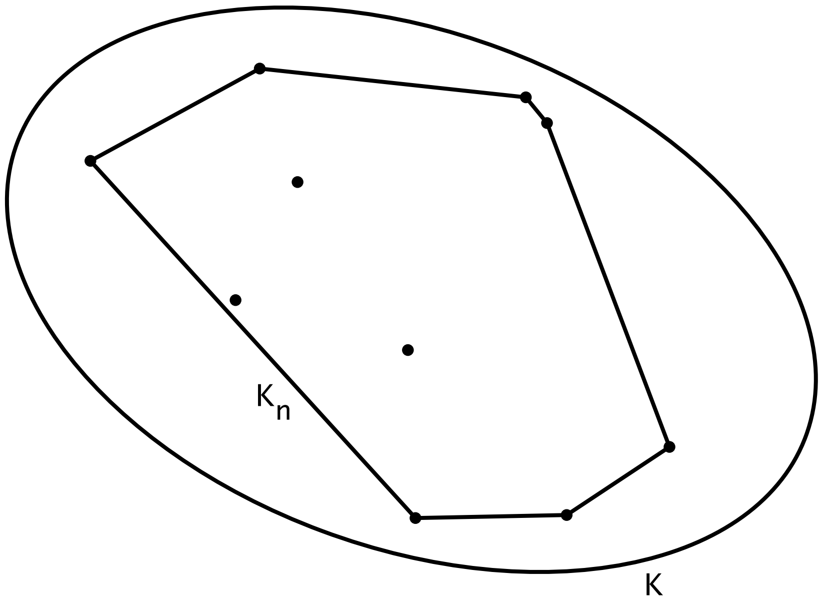
1.2. Témamegjelölés

A dolgozat témája sima határú konvex testek approximációja politópokkal. Az eredményeink a politópapproximációk elméletnek két nagy területére esnek, bizonyítunk új eredményeket legjobban közelítő politópokra vonatkozóan, illetve konvex testbe írt uniform véletlen politópokra vonatkozóan. A legjobban közelítő politópok és a véletlen politópok elmélete bár különböző módszereket használ, a két terület között nyilvánvaló a kapcsolat, erről P. M. Gruber [35] 1997-es összehasonlító cikkében olvashatunk részletesen.

Mindkét területen alapvető célunk, hogy meghatározzuk egy rögzített konvex test és egy hozzá konstruált politóp valamilyen matematikai értelemben vett távolságát. Legjobban közelítő politópról akkor beszélünk, ha politópot úgy definiáljuk, hogy a vizsgált távolság az elérhető legkisebb legyen. Például megkérdezhetjük, hogy egy adott K konvex testbe legfeljebb mekkora térfogatú, 2010 csúcsú politóp írható. Itt a politóp és a K konvex test távolságát a térfogatuk különbsége méri. Ez a távolság nyilván beírt politóp esetén akkor a legkisebb, ha a politóp térfogata a legnagyobb. Az ilyen típusú kérdések megválaszolása azonban általában reménytelen. Fejes Tóth László [28] észrevette, hogy ha a fenti példában a csúcsok számát egyre nagyobbra választjuk, akkor a legjobban közelítő politóp térfogata aszimptotikusan szabályos viselkedést mutat. Érdekes probléma továbbá a legjobban közelítő politóp egyéb geometrai tulajdonságainak aszimptotikus vizsgálata is. Összefoglalava, röviden azt mondhatjuk, hogy a legjobban közelítő politópok geometriai viselkedésének aszimptotikus leírása a központi kérdés a több mint 30 éves múltra visszatekintő elméletben. A dolgozat 2. fejezetében egy 3-dimenziós approximációs problémát fogunk megoldani.

Véletlen politóppal történő közelítés esetén a politópunkat valamilyen véletlen modell szerint konstruáljuk. Ebben a dolgozatban a történetileg legelőször kialakult modellel foglalkozunk részletesen: adott egy K konvex test, a belsejéből egymástól függetlenül választunk n véletlen pontot az egyenletes eloszlás szerint. A pontok konvex burkát a K-ba írt uniform véletlen politópnak nevezzük és K_n-nel jelöljük (1.1 ábra). A legelső felmerülő kérdések a K_n geometriai jellemzői (kevert térfogatok, k-dimenziós lapok száma) várható értékének kiszámítása. Rögzített n esetén az előzőekhez hasonlóan itt sem remélhetünk választ, ezért elsősorban aszimptotikus eredményeket várunk, amint n tart a végtelenbe. További érdekes probléma a várható érték helyett a szórás, illetve egyéb magasabb rendű momentumok vizsgálata, valamint a kapcsolódó nagy szám törvények és centrális határeloszlás tételek igazolása. A dolgozat 3. fejezetében az uniform véletlen politópok elméletébe illeszkedő eredményeket bizonyítunk, főként K_n kevert térfogatainak szórására koncentrálva.

A bizonyításokban használt eszközök elsősorban geometriai, analitikus és kombinatorikus természetűek. A szakirodalomban is több helyen megtalálható kijelentés, amely szerint „minden érdekesség, ami egy konvex testtel történhet, a határa közelében történik”, a mi esetünkben is hatványozottan igaz. Mind a legjobban közelítő politópok, mind a véletlen politópok esetében kulcsfontosságú a konvex test határának kezelése. Ebben a disszertációban csak megfelelően sima határú konvex testekkel dolgozunk. Az egyik fő gondolatunk lesz, hogy a konvex test határát lokálisan másodrendben közelítjük, és ezen közelítés segítségével becsülünk tovább.



1.1. ábra. Véletlen politóp

1.3. Jelölések

A d-dimenziós Euklideszi teret $\mathbb{E}^d$ jelöli. Általában feltesszük, hogy rögzítve van egy koordinátarendszer, az origót o jelöli, a szokásos skalárszorzatot $\langle \cdot, \cdot \rangle$, az általa indukált normát pedig $|| \cdot ||$. Az $x, y \in \mathbb{E}^d$ pontok távolságát $|xy|$ vagy $d(x, y)$ jelölheti, ez utóbbit két halmaz távolságára is használjuk: $d(A, B) = \inf\{d(a, b) \,|\, a \in A, b \in B\}$. Egy $H \subset \mathbb{E}^d$ ponthalmaz átmérőjén pontpárjai távolságának szuprémumát értjük, $\operatorname{diam} H$-val jelöljük, konvex burkára $[H]$-t vagy $\operatorname{conv} H$-t írunk. Általában nem különböztetjük meg az Euklideszi teret és a "mögötte" levő vektorteret, hacsak ezt külön nem említjük. A pont és vektor fogalmak közül a környezetbe jobban illőt fogjuk használni. A tér pontjara latin kisbetűket használunk, ezek egy halmazára nagybetűket. Speciálisan K mindig kompakt, konvex halmazt jelöl, melynek $\operatorname{int} K$ belseje nem üres. Az ilyen halmazokat konvex testeknek nevezzük. Kalligrafikus nagybetűkkel általában ponthalmazok egy halmazát jelöljük, speciálisan $\mathcal{K}^d$ a d-dimenziós konvex testek halmazát jelöli.

Egy K kompakt, konvex halmaz affin burkát aff K, relatív belsejét relint K fogja jelölni. K támaszfüggvényének a $h_K(x) := \sup\{\langle x, y\rangle | y \in K\}$ függvényt nevezzük. A lemez vagy síkidom kifejezés mindig 2-dimenziós objektumra utal, egységkörnek a 2-dimenziós, 1 sugarú körlemezt hívjuk. A d-dimenziós, o középpontú egységgömbre B^d-vel hivatkozunk, térfogatát κ_d-vel, míg határát S^{d-1}-gyel jelöljük. Általában a térfogatfüggvény jele $\lambda_d(\cdot)$ lesz. $V_i(K)$-t az K test i-edik kevert téfogatára fogjuk használni. (Bővebben a kevert térfogatokról a 4.2 szakaszban olvashatunk.) $\mathcal{K}^d$-n többféle metrika is bevezethető, rendre δ_H és δ_S jelöli a Hausdorff-távolságot és a szimmetrikus differencia metrikát. Ezekről, és egyéb metrikákról bővebb információt a 4.1 részben találhatunk. Ha $\mathcal{K}^d$-n topológiára van szükségünk, akkor mindig a δ_H által indukált topológiát használjuk.

Egy $K \in \mathcal{K}^d$ konvex testnek ∂K jelöli a határát. Ezen mindig a $(d-1)$-dimenziós Hausdorff-mérték, $\mathcal{H}^{d-1}(\,\cdot\,)$ szerint integrálunk. (A Hausdorff-mértékről bővebben a 4.3 szakaszban írunk.) Azt mondjuk, hogy K C^2 sima határú, ha ∂K C^2 sokaság, azaz ha minden $x \in \partial K$ pontnak van egy olyan (gömb)környezete, amire az az f függvény, ami az x-beli σ_x érintősíkból képez $\mathbb{E}^d$-be, és leírja K határát, az ebben a környezetben kétszer folytonosan differenciálható. A második alapformát x-ben Q_x jelöli, ez C^2 simaság esetén megegyezik az adott pontban az f függvény második deriváltjából származó kvadratikus alakkal (továbbiakban q_x). Ez az alak a konvexitás miatt pozitív szemi-definit. Sajátértékei a főgörbületek, determinánsa (a megfelelő mátrix determinánsa) pedig a felület adott pontbeli Gauss-görbülete, $\kappa(x)$. Az előbbiekből világos, hogy minden $x \in \partial K$ esetén $\kappa(x) \geq 0$. Megjegyezzük, hogy ha minden $x \in \partial K$-re $\kappa(x) > 0$ is áll, akkor azt mondjuk ∂K C^2_+-beli.

Végezetül néhány jelölés sorozatok, függvények nagyságrendi és aszimptotikus viselkedésének jellemzéséhez. Ha $f(t)$ és $g(t)$ $H \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények, akkor azt mondjuk, hogy $f(t) \ll g(t)$, ha létezik egy olyan c konstans, hogy $|f(t)| \leq c \cdot g(t)$ minden $t \in H$ esetén. A c konstans többnyire a dimenziótól, a rögzített konvex testtől, illetve a probléma egyéb paramétereitől függhet, ezt a szövegben mindig jelezzük. A H halmazt konkrét esetekben mindig alkalmasan választjuk, tipikusan a pozitív egészeknek (így sorozatokról szól az állítás), vagy a $(0, \delta)$ intervallumnak. Ha $f \ll g$ és $g \ll f$, akkor röviden $f \approx g$-t írunk, és azt mondjuk, hogy f és g azonos nagyságrendű. Két sorozatot aszimptotikusan egyenlőnek hívunk, ha $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$, és ezt $f(n) \sim g(n)$ $(n \to \infty)$-nel jelöljük. Gyakran használjuk továbbá a standard n-elemű halmazra a $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ jelölést. A valószínűségszámításban bevett jelölésekkel is dolgozunk: $P(\,\cdot\,)$

a valószínűséget, $\mathbb{E}(\,\cdot\,)$ a várható értéket, $\mathrm{Var}\,(\,\cdot\,)$ a szórásnégyzetet jelöli majd, $\mathbf{1}(\,\cdot\,)$ pedig indikátor függvényt jelent.

2. fejezet

Legjobban közelítő politópok

2.1. Történeti áttekintés

Sima határú konvex testek legjobban közelítő politópjainak geometriáját körülbelül 30 éve vizsgálják részletesebben, azonban az első eredmények több mint 70 éve születtek. A politópapproximációk elmélete – mint annyi más elmélet – Fejes Tóth László munkásságából ered. Az első vizsgálatok körre illetve gömbre vonatkoztak. Klasszikus eredmény például, hogy az egységkör köré írt minimális területű, illetve az egységkörbe írt maximális területű n-szög is a szabályos n-szög. A Jensen-egyenlőtlenséget felhasználva bizonyítható, hogy 2-dimenzióban a (megfelelő) szabályos n-szög közelíti legjobban az egységkört lényegében minden matematikailag érdekes értelemben.

3-dimenzióban rokon probléma, hogy az egységgömb köré írt n-lapú politópok közül melyiknek legkisebb a térfogata. Az első eredmények $n = 4$ illetve $n = 6$ esetekben válaszolták meg a kérdést, a megoldás szabályos tetraéder illetve kocka. Forradalmi eredmény volt Fejes Tóth László 1948-as cikke, amelyben a híres Momentum tételt bizonyította gömbfelületen. Ezzel egyszerűen kezelhető az $n = 4$ és $n = 6$ esetek mellett az $n = 12$ eset is, azaz belátható, hogy az egységgömb köré írt 12 lapú politópok közül a dodekaéder térfogata a minimális. Továbbá a Momentum tétel tetszőleges n-re jó alsó becslést ad bármely körülírt politóp minimális téfogatára, sőt a gömböt legjobban közelítő körülírt, legfeljebb n lapú politóp térfogatának aszimptotikus viselkedése is levezethető belőle, amint $n \to \infty$.

Később Fejes Tóth László a Momentum tétel síkváltozatát is belátta (lásd [28]). Ez lényegében azt mondja ki, hogy ha egy konvex hatszögben kijelölünk n bázispontot, majd tekintjük a hozzájuk tartozó Dirichlet-Voronoi cellákat, és ezeken a cellákon integráljuk a bázisponttól vett távolság négyzetét, akkor ezen integrálok összege legalább akkora, mint ha a cellák szabályos hatszögek lennének. Ennek az állításnak később számos általánosítása, illetve variánsa született, ezek a politópapproximációk elméletében fontos szerepet játszanak (lásd például [23]). A dolgozat ezen fejezetének egyik fő eszköze is két, a Momentum tételhez hasonló geometriai egyenlőtlenség lesz (lásd a 2.5.5. és a 2.5.6. lemmákat).

Itt jegyezzük meg, hogy Sas Ernő [58] munkájában bizonyította, hogy egy π területű konvex síkidomba mindig írható n-szög, amelynek területe legalább akkora, mint az egységkörbe írható szabályos n-szögé. Továbbá Fejes Tóth László azt is belátta, hogy ha a síkidom nem ellipszis, akkor szigorú egyenlőtlenség is elérhető. Az eredményt A. M. Macbeath [49] általánosította magasabb dimenziókra. Tekintve, hogy egy affin transzformáció ugyanazzal a szorzóval változtatja meg bármely test térfogatát, a térfogatapproximáció affin invariáns, azaz a fenti tétel azt is mondja, hogy síkban az ellipszis a beírt sokszögekkel "legrosszabbul közelíthető" konvex síkidom, ha a közelítés "jóságát" a területkülönbséggel mérjük. Az analóg állítás, azaz, hogy bármely π területű konvex lemez köré írható olyan n-szög, amelynek területe legfeljebb akkora, mint az egységkör köré írt szabályos n-szögé nem teljesül, ahogy azt Fejes Tóth László példával is igazolta [28].

Rögzített n esetén a fenti eredményeknél több valószínűleg nem várható. Szintén Fejes Tóth László vetette fel azonban a következő problémát: legyen adott egy K d-dimenziós konvex test. Legyen P_n a legkisebb térfogatú K köré írt politóp, amelynek legfeljebb n lapja van. Az a kérdés, hogy aszimptotikusan hogyan viselkedik K és P_n térfogatkülönbsége, amint n tart a végtelenbe. Ez a korábban vizsgáltak jelentős általánosítása. A kérdést nem csak a fenti, nagyon speciális formában fogalmazta meg Fejes Tóth László. Érdekes megvizsgálni a problémát egyéb metrikákra is, vagyis a cél a térfogatkülönbség helyett K és P_n valamely egyéb távolságának minimalizálása. (A d-dimenziós konvex testek $\mathcal{K}^d$ terén értelmezett metrikákról a 4.1 szakaszban írunk részletesebben.) Ezen kívül Fejes Tóth László a kérdést feltette K köré írt politópok helyett K-ba írt, illetve K-hoz hozzáírt politópok esetén is (utóbbi azt jelenti, hogy a politóp és K kölcsönös helyzetére nem teszünk semmilyen megszorítást). Itt jegyezzük meg, hogy a dolgozatban a beírt és körülírt terminológiát a következő, szokásostól némileg eltérő értelemben használjuk: a P politóp a K konvex testbe van írva, ha K tartalmazza P-t ($K \supseteq P$); a P politóp a K konvex test köré írt, ha P tartalmazza K-t ($K \subseteq P$). Bizonyos esetekben matematikailag indokolt feltenni, hogy egy beírt politóp csúcsai a K határán vannak (például ha a beírt politóp csúcsainak száma korlátozott), illetve hogy egy körülírt politóp hiperlapjai érintik K-t (ha a körülírt politóp hiperlapjainak száma korlátozott), azonban további általánosításként a hiperlapok vagy csúcsok számára tett korlátozás helyett valamely k-dimenziós lapok számára is tehetünk megszorítást ($0 \leq k \leq d-1$). Általában, például ha egy 3-dimenziós politóp éleinek számára teszünk megszorítást, nem teljesül az, hogy a legjobban közelítő beírt politóp csúcsai K határára esnek, illetve hogy a legjobban közelítő körülírt politóp hiperlapjai érintik K-t. A négy leggyakrabban tárgyalt eset, amikor beírt politópot tekintünk n csúccsal, körülírt politópot n hiperlappal, valamint hozzáírt politópot n csúccsal vagy hiperlappal. Ezen problémakörben az utóbbi 30 évben számtalan publikáció született, és még számos megválaszolatlan kérdés van, ezek közül néhányat a fejezet végén, a 2.9 szakaszban gyűjtöttünk csokorba.

A probléma megfogalmazása után azonnal világos, hogy a kérdés nem érdekes abban az esetben például, ha K politóp. Ebben az esetben ugyanis, ha n elég nagy, akkor a legjobban közelítő politóp megegyezik K-val. Már Fejes Tóth László is "sima" határú konvex testekre fogalmazta meg a kérdéseket. Azt mondjuk, hogy egy $K \in \mathcal{K}^d$ konvex test ∂K határa C^k sima, ha ∂K egy k-szor folytonosan differenciálható $(d-1)$-dimenziós sokaság, vagyis bármely $x \in \partial K$ határpontnak van egy környezete, melyben ∂K egy k-szor folytonosan differenciálható függvény grafikonja. (Tipikusan ezt a paraméterezést az x-ben k-hoz húzott σ_x érintősíkon értelmezettnek tekintjük majd.) Továbbá, ha ∂K C^k sima ($k \geq 2$), és a Gauss-féle szorzatgörbület minden pontban szigorúan pozitív, akkor C^k_+ simaságról beszélünk. Az elmélet fejlődésének egyik mozgatója, hogy a simasági feltételt a lehető legtovább gyengítsük. Megjegyezzük, hogy a megszokottól eltérően a "sima határ", ha egyéb módon nem tesszük világossá, akkor mindig C^2 simaságot jelent. A következőkben röviden áttekintjük a sima határú konvex testek aszimptotikus approximációjáról ismert eddigi eredményeket.

Adott sima határú K-ra Fejes Tóth László [28] munkájában nem csak felvetette a problémákat, de több 2- és 3-dimenziós probléma esetén le is írta a megsejtett aszimptotikus formulákat. Ezen sejtések nagy többségét igazolta a síkban D. E. McClure és R. A. Vitale [50]-ben, abban az esetben, ha a konvex lemez határa C^2_+ sima. Ezen síkbeli problémáknál a közelítés nagyságrendje minden esetben $1/n^2$-nek bizonyult. Áttörő eredményt ért el R. Schneider [59] munkájában C^3_+ sima határú testekre, Hausdorff-metrikában való közelítés esetén tetszőleges dimenzióban bizonyított aszimptotikus formulákat. A pontos eredmény megfogalmazása előtt felelevenítjük, hogy mit értünk két sorozat aszimptotikus egyenlőségén. Legyen $f(n)$ és $g(n)$ két sorozat, és tegyük fel, hogy $g(n) \neq 0$ minden n-re fennáll. Az f és g sorozatokat aszimptotikusan egyenlőnek hívjuk, ha $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$, és ezt $f(n) \sim g(n)$ $(n \to \infty)$-nel jelöljük. Ezzel a jelöléssel R. Schneider 1981-es eredménye a következőképpen írható le: legyen P_n az a K köré írt politóp, melynek legfeljebb n hiperlapja van, és K-tól vett Hausdorff-távolsága minimális. Ekkor

$$\delta_H(K, P_n) \sim c \cdot \left(\int_{\partial K} \kappa(x)^{\frac{1}{2}}\, \mathrm{d}x \right)^{\frac{2}{d-1}} \cdot n^{\frac{-2}{d-1}} \text{, ha } n \to \infty. \tag{2.1}$$

Itt $\delta_H(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ kompakt, konvex halmazok Hausdorff távolságát jelöli, vagyis ha $K, L \in \mathcal{K}^d$ két kompakt, konvex halmaz, amelyeknek belseje nem üres, B^d a d-dimenziós egységgömb, akkor $\delta_H(K, L) = \inf\{\lambda \geq 0 \mid K \subset L + \lambda B^d, L \subset K + \lambda B^d\}$. A (2.1) formulában szereplő c konstans csak d-től függ (tehát K-tól nem), K határán a Hausdorff-mérték szerint integrálunk (lásd 4.3 szakasz), $\kappa(x)$ pedig az $x \in \partial K$ pontbeli Gauss-görbület. A továbbiakban adott k-dimenziós konvex test határán mindig a megfelelő $(k-1)$-dimenziós Hausdorff-mérték szerint integrálunk, akkor is, ha ezt külön nem jelezzük. A (2.1) formulát R. Schneider mind a négy alapprobléma esetére belátta, tehát a (2.1) formula érvényben marad akkor is, ha a P_n K-ba beírt legjobban közelítő politóp legfeljebb n csúccsal, vagy a P_n K-hoz hozzáírt legjobban közelítő politóp legfeljebb n csúccsal vagy hiperlappal rendelkezik. Egyedül a (2.1) jobb oldalán szereplő c konstans változik attól függően, hogy a négy esetből melyiket vizsgáljuk.

A későbbi aszimptotikus formulák mindegyikének szerkezete lényegében megegyezik a (2.1) formuláéval. Egy ilyen aszimptotikus formula bal oldalán a rögzített K konvex test és a P_n legjobban közelítő politóp valamilyen metrikában vett távolsága áll. Itt n mindig a politópra tett mennyiségi megszorításra utal, vagyis P_n-nek legfeljebb n k-dimenziós lapja van $(0 \leq k \leq d-1)$, tipikusan $k = 0$ vagy $k = d-1$. Az aszimptotikus formula jobb oldalán lévő mennyiség három részből áll. A c konstans minden esetben csak a problémától (tehát a dimenziótól, k-tól, a használt metrikától és a politóp K-hoz viszonyított elhelyezkedésétől) függ. A második tényező a konstans K-tól függő része, ennek szerkezete a következő: a K test határán integráljuk a Gauss-görbület megfelelő hatványát, majd az integrálnak vesszük valamilyen hatványát. Mindkét hatványozás esetén a kitevők a problémától függnek. A harmadik a nagyságrendet meghatározó tényező, amely minden esetben $n^{-\frac{2}{d-1}}$. Itt jegyezzük meg, hogy az aszimptotikus formula jobb oldalának K-tól függő része térfogatapproximáció esetén éppen K affin felszínének a megfelelő hatványa. Ez a probléma – korábban már említett – affin függetlensége miatt nem meglepő, másrészt talán rámutat az első sejtések lehetséges eredetére (lásd [28]).

A szimmetrikus differencia metrikában (ez a két test halmazelméleti értelemben vett szimmetrikus differenciájának a térfogatát méri) történő közelítés, vagyis térfogatapproximáció esetén, 3-dimenzióban P. M. Gruber bizonyított először aszimptotikus formulákat [31] (beírt politóp, n csúccsal) és [32] (körülírt politóp, n lappal) munkáiban. Ezután 1993-ban sikerült neki az eddigi eredményeket kiterjeszteni tetszőleges dimenzióba C^2_+ határú testek esetén ([33], [34]). Ezen munkáiban Hausdorff-metrikában, Banach-Mazur távolság szerint és szimmetrikus differencia metrikában közelített. Az átlagszélességek különbsége, vagyis az L_1-metrika esete sokáig nyitott maradt, míg [29] cikkben S. Glasauer és P. M. Gruber ezt is megoldotta polaritás segítségével. A korábban még nem tárgyalt eseteket pedig M. Ludwig [46] oldotta meg. Ezzel lényegében teljessé vált a kép a négy alapprobléma esetén, minden közismert metrikára, abban az esetben, ha K határa C^2_+ sima. Jegyezzük meg, hogy (2.1)-ben szereplő c konstans meghatározása nehéz feladat. A $d = 2$ és $d = 3$ esetekben az általunk tárgyalt összes metrikára ismert a pontos értékük, míg a $d > 3$ esetekben lényegében mind a négy alapproblémára ismert az aszimptotikus viselkedés, amint a dimenzió tart a végtelenbe. (A c konstansról bővebben lásd például [23]-t és [59]-t.)

Logikusan merül fel a kérdés, hogy a K határára megkövetelt C^2_+ simasági feltevés szükséges-e. Szintén P. M. Gruber valamint P. Kenderov [40] munkája nyomán az már a kezdetektől fogva ismert volt, hogy C^1 simaság feltevése nem elegendő általában egy (2.1) típusú aszimptotikus formula létezéséhez. Ifj. Böröczky Károlynak [16] cikkében sikerült kezelni a 0 görbületű részeket, és bizonyította, hogy minden korábbi aszimptotikus eredmény érvényes marad, ha K határáról csupán C^2 simaságot tételezünk fel.

Itt csak röviden megemlítjük a "másik irányba" tett lépéseket, vagyis azt, hogy a K konvex test határára tett erősebb differenciálhatósági feltétel esetén mit tudunk mondani a (2.1) típusú aszimptotikus formula hibatagjáról, adható-e magasabb rendű sorfejtés a konvex test és a legjobban közelítő politóp távolságára $1/n$ hatványai szerint? M. Ludwig bizonyította ([44] és [45]), hogy ha a K síklemez határa C^5_+, akkor a legjobban közelítő n-szög K-tól mért távolságára (szimmetrikus differencia metrikában és Hausdorff-metrikában) olyan sorfejtés adható, melynek főtagja $1/n^2$, második tagja $1/n^4$ rendű, hibatagja pedig $1/n^5$ nagyságrendű. K köré írt, minimális területű n-szög esetén, ha K határa C^∞_+ akkor S. Tabachnikov [71] tétele szerint a területkülönbségre végtelen sorfejtés adható $1/n^2$ függvényeként. A magasabb dimenziókban ismert eredményekről ifj. Böröczky Károly [18] és P. M. Gruber [38] munkáiban olvashatunk bővebben.

Az utóbbi időben a politópapproximációs problémakör két újabb aspektusa felé fordult az érdeklődés. Egyrészről, régóta az egyik legfontosabb nyitott probléma volt e területen az, hogy adjunk aszimptotikus formulát abban az esetben, ha nem a legjobban közelítő politóp csúcsainak vagy hiperlapjainak száma, hanem valamilyen k-dimenziós lapjainak száma ($0 < k < d-1$) korlátozott. Másrészről, P. M. Gruber munkásságából eredeztethető az úgynevezett tipikus lapok vizsgálata. Ezt a kérdéskört egyelőre csak 3-dimenzióban tekintették, lényege, hogy ∂K lokális metrikája szerint a legjobban közelítő politópok lapjai aszimptotikusan szabályosságot mutatnak.

A $1 \leq k \leq d-2$ ($d \geq 3$) esetben általában (2.1) típusú aszimptotikus formula nem ismert a legjobban közelítő politóp és a K test távolságára. Ifj. Böröczky Károly [17] munkájában arra a részeredményre jutott, hogy ha K határa C^2 sima és n elegendően nagy, akkor léteznek olyan c_1 és c_2 pozitív konstansok, amelyek csak k-tól és d-től függenek, és Hausdorff-metrikában való közelítés esetén:

$$c_1 \cdot \left(\int_{\partial K} \kappa(x)^{\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{2}{d-1}} \cdot n^{\frac{-2}{d-1}} < \delta_H(K, P_n) < c_2 \cdot \left(\int_{\partial K} \kappa(x)^{\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{2}{d-1}} \cdot n^{\frac{-2}{d-1}}. \quad (2.2)$$

Ifj. Böröczky Károly [17] cikkében hasonló eredményeket igazol minden korábban tárgyalt metrikát használva. Az első eset, amikor megfelelő, "köztes dimenziós" lap létezik, ha $d = 3$ és $k = 1$. A dolgozat egyik fő eredménye (2.2.1. tétel) ennek a problémának a megoldása, vagyis aszimptotikus formulát bizonyítunk egy C^2 sima határú, 3-dimenziós K konvex test, valamint olyan K köré és K-ba írt legjobban közelítő politópok Hausdorff-távolságaira, melyeknek élszáma korlátozott. A szimmetrikus differencia metrikára megfogalmazott analóg problémára ifj. Böröczky Károly, S. Gomez és Tick Péter talált megoldást [22].

A tipikus lapok vizsgálata P. M. Gruber [36] munkájával kezdődött. (A "tipikus lapok" pontos definícióját csak az eredmény pontos megfogalmazásánál, a 2.2 fejeztben adjuk majd meg.) P. M. Gruber [36] és [37] cikkeiben bizonyította, hogy egy C^2_+ sima határú, 3-dimenziós K konvex testet legfeljebb n-csúcsú beírt politópokkal közelítve, a legjobban közelítő politópok tipikus lapjai aszimptotikusan szabályos háromszögek, ahogy n tart a végtelenbe. Hasonló állítás teljesül legfeljebb n lapú körülírt politópokkal való közelítés esetén, itt a tipikus lapok aszimptotikusan szabályos hatszögek lesznek. P. M. Gruber a közelítésre a Hausdorff-metrikát, a Banach-Mazur távolságot és a Schneider-féle távolságot használta. Ifj. Böröczky Károly, Tick Péter és Wintsche Gergely [24] folytatta ezt a munkát, kiterjesztették a fenti eredményeket C^2 sima határú

3-dimenziós testekre, valamint megmutatták, hogy a beírt eset szimmetrikus differencia metrika esetén is igaz. A dolgozat ezen fejezetének második fő eredménye (2.2.2. tétel), hogy bizonyos geometriai egyenlőtlenségek stabilitását használva megmutatjuk, hogy egy C^2 sima határú K 3-dimenziós konvex test korlátozott élszámú, Hausdorff-metrikában legjobban közelítő politópjainak tipikus lapjai aszimptotikusan bizonyos értelemben vett négyzetek, azokban az esetekben, amikor K-ba beírt, vagy amikor K köré írt politópokat vizsgálunk.

2.2. A fejezet fő eredményei

Ebben a szakaszban kimondjuk a fejezet két fő eredményét. Ezen eredmények a szerző ifj. Böröczky Károllyal és Fodor Ferenccel közös [21] cikkében, valamint a szerző [72] munkájában találhatók meg.

Legyen $K \in \mathcal{K}^3$ kompakt, konvex halmaz, amelynek belseje nem üres, határa C^2 sima. Jelölje $\mathcal{P}_n^c(K)$ ($\mathcal{P}_n^i(K)$) a K köré írt (K-ba beleírt) olyan politópok halmazát, amiknek legfeljebb n éle van. Emlékeztetünk rá, hogy P politóp K-ba írt, illetve K köré írt, ha rendre $P \subseteq K$, illetve $P \supseteq K$ teljesül. Válasszuk $P_n^c \in \mathcal{P}_n^c$-t úgy, hogy

$$\delta_H(K, P_n^c) = \inf\{\delta_H(K, P) : P \in \mathcal{P}_n^c(K)\}.$$

Ilyen P_n^c létezik K kompaktsága miatt (de nem feltétlenül csak egy ilyen van). Hasonlóan definiáljuk a beírt esetre a P_n^i politópokat. Ezzekkel a jelölésekkel és feltételekkel a következő aszimptotikus formula teljesül:

2.2.1. Tétel ([21] Böröczky, Fodor, Vígh)**.**

$$\delta_H(K, P_n^c), \delta_H(K, P_n^i) \sim \frac{1}{2} \int_{\partial K} \kappa^{1/2}(x)\,\mathrm{d}x \cdot \frac{1}{n}, \quad \text{ha } n \to \infty. \tag{2.3}$$

Második fő tételünk megfogalmazásához további előkészítésre van szükség.

Ha C és D két konvex lemez a síkon, akkor azt mondjuk, hogy C ε-közel van D-hez, ha létezik $x \in C$ és $y \in D$ úgy, hogy

$$(1+\varepsilon)^{-1} \cdot (C - x) \subset D - y \subset (1+\varepsilon) \cdot (C - x).$$

Legyen Q egy pozitív definit, nem elfajuló kvadratikus alak az Euklideszi síkon, a hozzá tartozó pozitív definit, szimmetrikus mátrixot jelöljük C-vel. Jól ismert, hogy $C = A^T A$ alakban írható, ahol A alkalmas, nem szinguláris mátrix (ez a felírás általában nem egyértelmű). Jelölje az A-hoz tartozó lineáris transzformációt φ_A. Egy P

poligont Q-szerint szabályosnak mondunk, ha $\varphi_A(P)$ euklideszi értelemben szabályos, azaz minden szöge és oldala egyenlő. Az "egységnyi" jelzőt mindig abban az értelemben használjuk, hogy $\varphi_A(P)$ egységnyi területű (a szokásos területértelmezés szerint). A Q-szerint szabályos négyszöget egyszerűen Q-négyzetnek hívjuk. Ez a definíció független A megválasztásától.

Általában egy $x \in \partial K$ pontban a felület második alapformáját Q_x-szel fogjuk jelölni. A következő egyszerűsítő konvenciót fogjuk használni. Adott $x \in \partial K$ pont esetén a K-hoz x-ben húzott σ_x érintősíkot azonosítjuk $\mathbb{R}^2$-tel, és feltesszük, hogy az x egy megfelelő környezetében ∂K a σ_x síkon értelmezett f függvény grafikonja. Így az első alapforma megegyezik a szokásos skalárszorzással, ami miatt a Q_x kvadratikus alakhoz tartozó mátrix $\kappa(x)$ determinánsa éppen a Gauss-féle szorzatgörbületet adja.

Most már definiálhatjuk mit értünk tipikus lapokon. Megjegyezzük, hogy a definíció megegyezik [24] definíciójával. Legyen $\rho : \partial K \to \mathbb{R}$ egy olyan nem negatív függvény ∂K-n, hogy ha $\kappa(x) > 0$, akkor $\rho(x) > 0$. Legyen $\{R_n\}$ 3-dimenziós politópok egy sorozata, és jelölje $f(n)$ az R_n 3-dimenziós politóp (2-dimenziós) lapjainak számát. Tegyük fel, hogy $o \in \operatorname{int} R_n$ és $f(n) \to \infty$ amint $n \to \infty$. Tegyük fel továbbá, hogy létezik egy $\nu(n)$ pozitív tagú nullsorozat a következő tulajdonságokkal. Legfeljebb $\nu(n)$ rész kivételével minden R_n minden F lapjára teljesül, hogy F egy k-szög; egyértelműen létezik egy olyan $x_F \in \partial K$ pont, hogy $u(x_F)$ merőleges F-re; Q_{x_F} pozitív definit, és F $\nu(n)$-közel van egy Q_{x_F}-szabályos k-szöghöz, amelynek területe

$$\frac{\int_{\partial K} \rho(x)\,\mathrm{d}x}{f(n)\rho(x_F)}.$$

Mindenezen feltevések együttes teljesülése mellett azt mondjuk, hogy az $\{R_n\}$ politóp-sorozat tipikus lapjai a ρ sűrűségfüggvényre nézve aszimptotikusan szabályos k-szögek, amint $n \to \infty$. Jegyezzük meg, hogy a ρ függvénytől csak a lapok területe függ, az alakjukat kizárólag K határozza meg.

A 2.2.1. tétel jelöléseit használva a következő tételt mondhatjuk ki.

2.2.2. Tétel ([72] Vígh)**.** *Legyen $K \in \mathcal{K}^3$ egy konvex test C^2 sima határral. A $\{P_n^c\}$ és $\{P_n^i\}$ legjobban közelítő politópsorozatok tipikus lapjai a $\kappa^{1/2}(x)$ sűrűségfüggvény szerinti négyzetek, amint $n \to \infty$.*

A két tétel bizonyítása közös lemmákon nyugszik. A következő szakaszban leírjuk a bizonyítások vázlatos menetét segítve ezzel a bizonyítások könnyebb megértését.

2.3. A bizonyítások előkészületei

Megjegyezzük, hogy a fejezetben közölt bizonyítások lényegében megegyeznek a [21] és [72] cikkekben leírtakkal.

A 2.2.1. tétel belátását két lépésben végezzük. Egyrészt megkonstruáljuk a K konvex testet "jól közelítő" politópok egy sorozatát, amivel aszimptotikusan helyes felső becslést adunk a legjobban közelítő politópsorozat és K Hausdorff-távolságára, másrészt geometriai és algebrai egyenlőtlenségeket használva a távolságra aszimptotikusan pontos alsó becslést is adunk. A 2.2.2. tételhez az alsó korláthoz használt egyenlőtlenségek stabilitására lesz szükségünk, hogy aztán egy indirekt bizonyítással célba érjünk.

A bizonyítások mögötti fő gondolatok a következők. Először is K határát két részre vágjuk szét, az úgy nevezett "görbülő" és "lapos" darabokra. Ezekre úgy gondolunk, hogy a görbülő részben vannak a szigorúan pozitív görbeletű pontok, a lapos részben pedig a nulla görbületűek. A lapos rész feletti becslések kezelésénél ifj. Böröczky Károly [16] munkájára támaszkodunk, látni fogjuk, hogy a korábbi eredményekből következik, hogy itt a legjobban közelítő politópnak csak kevés éle van.

A görbülő rész több munkát igényel. Az ötlet az lesz, hogy a határt kicsi, megfelelő méretű foltokra osztjuk fel. A 2.5.7. lemma, az úgynevezett Transzfer lemma segítségével megmutatjuk, hogy a határ ezen kis foltjai (lokálisan) jól közelíthetők speciális oszkuláló paraboloidokkal. Ezzel a problémát lefordítjuk a síkba. Az utolsó lépésben pedig a 2.5.5. és 2.5.6. lemmák segítségével síkbeli geometriai becsléseket alkalmazunk.

A bizonyításokat csak a körülírt esetben fogjuk teljes részletességgel elvégezni, mivel a beírt eset belátása analóg módon történik. Az egyes fejezetek végén csak vázolni fogjuk, hogy a beírt eset igazolásához milyen kisebb módosítások szükségesek.

A (2.3) formulát a következő (ekvivalens) formában bizonyítjuk. Elegendő belátni, hogy léteznek $\tau > 0$ és $\varepsilon_0 > 0$ abszolút konstansok úgy, hogy minden $\varepsilon_0 > \varepsilon > 0$ esetén létezik $n_0 = n_0(\varepsilon)$ küszöbindex, melyre ha $n > n_0$, akkor

$$\frac{1-\tau\varepsilon}{2n}\int_{\partial K}\kappa^{1/2}(x)\,\mathrm{d}x \le \delta_H(K, P_n^c) \le \frac{1+\tau\varepsilon}{2n}\int_{\partial K}\kappa^{1/2}(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

Hasonló átfogalmazás adható a 2.2.2. tétel esetén. Elég megmutatni, hogy létezik olyan $\varepsilon_0 > 0$, amelyre bármely $\varepsilon_0 > \varepsilon > 0$ esetén létezik $n_0 = n_0(\varepsilon)$ küszöbindex, hogy minden $n > n_0$-ra legfeljebb ε rész kivételével P_n^c minden F lapja F egy négyszög; továbbá minden F-hez egyértelműen létezik egy $x_F \in \partial K$ pont, amelyhez tartozó $u(x_F)$ külső normális merőleges F-re is, valamint Q_{x_F} pozitív definit, és F ε-közel van egy Q_{x_f}-szabályos négyzethez, melynek területe

$$\frac{\int_{\partial K} \kappa^{1/2}(x)\,\mathrm{d}x}{f(n)\kappa^{1/2}(x_F)},$$

ahol $f(n)$ jelöli P_n^c lapjainak a számát.

Ezek után az átfogalmazások bevezetjük a $O(\,\cdot\,)$ jelölést, mivel ezzel kényelmesebben és rövidebben fogalmazhatjuk meg a későbbi állításainkat. Azt mondjuk, hogy $f(x) = O(g(x))$, ha létezik c konstans, ami csak a K testtől függ, hogy $|f(x)| < c \cdot g(x)$ minden szóbajövő x-re. f és g általános függyvények lehetnek, de a jelölést tipikusan $O(\varepsilon)$ formában használjuk majd, ami azt jelenti, hogy a becsült "hiba" legfeljebb konstansszor ε. A továbbiakban mindig feltesszük, hogy $\varepsilon > 0$ rögzített valós szám, amely elegendően kicsi.

2.4. A "görbülő" és "lapos" részek

Ebben a szakaszban megkezdjük a bizonyítást. Első lépésként szétvágjuk ∂K-t a már említett lapos és görbülő részekre, ez a vágás függ az előző szakaszban rögzített ε-tól. Ehhez szükségünk lesz [16] fő eredményeire. Ezen álítások lényegében megoldják majd a lapos részek feletti konstrukciót.

A következő eredmények [16]-ból származnak. Egy P konvex politóp határának egy Jordan-mérhető darabját poliedrikus hiperfelületnek nevezzük. Legyen $Z \subset \partial K$ Jordan-mérhető, nyílt halmaz, ekkor definiáljuk $Y = Y(Z)$-t a következőképpen. $Y \subset \partial P$ azon y pontokból áll, melyekre létezik olyan u külső normálisa P-nek y-ban, hogy u szintén külső normálisa K-nak valamilyen $z \in Z$ pontban. Ilyenkor azt mondjuk, hogy az Y poliedrikus hiperfelület approximálja Z-t. Adott $\beta > 0$ esetén legyen $\Sigma(\beta)$ azon pontok halmaza ∂K-ból, ahol a minimális főgörbület kisebb mint β.

2.4.1. Lemma ([16]). *Rögzítsük $\varepsilon > 0$. Ekkor minden olyan elegendően kicsi β-ra, melyre $\Sigma(\beta)$ Jordan-mérhető, $\Sigma(\beta)$-ra teljesülnek a következők: Elég nagy m esetén létezik $Y_m \subset K$ poliedrális hiperfelület, amelynek legfeljebb m csúcsa van, approximálja $\Sigma(\beta)$-t, és*

$$\delta_H(\Sigma(\beta), Y_m) \leq \frac{\varepsilon^2}{m}\,.$$

A 2.4.1. lemmát ε helyett $\varepsilon/2$vel alkalmazva, és Y_m-t egy rögzített int$K$-beli pontból egy kicsi, alkalmas konstanszorosára felnagyítva nyerjük az alábbi következményt.

2.4.2. Következmény. *A 2.4.1. lemma állítása igaz marad a $Y_m \subset K$ feltételt $Y_m \cap \text{int}K = \emptyset$-re cserélve.*

Ezek után már szétvághatjuk a határt a megfelelő, ε-tól függő módon. Jegyezzük meg, hogy $\varepsilon > 0$ rögzítve van. Válasszuk $\beta > 0$-t úgy, hogy $\Sigma(\beta)$ elég kicsi legyen, és így kielégítse a 2.4.1. lemma és 2.4.2. következmény feltételeit, valamint teljesüljön rá a következő összefüggés:

$$\int_{\Sigma(\beta)} \kappa^{1/2}(x)\,\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2} \int_{\partial K} \kappa^{1/2}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Definiáljuk a következő részeket ∂K-n.

$$X' = \partial K \backslash \text{cl}\Sigma(\beta). \tag{2.4}$$

Ekkor léteznek ∂K relatív nyílt, Jordan-mérhető X és X_0 részhalmazai ∂K-nak, melyek teljesítik a következő három feltételt.

i) cl $X \subset$ relint X' és cl $X' \subset$ relint X_0;

ii) Létezik $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ úgy, hogy minden $x \in$ cl X_0 pontban minden főgörbület legalább η;

iii) $\int_X \kappa^{1/2}(x)\,\mathrm{d}x > (1-\varepsilon)\int_{\partial K} \kappa^{1/2}(x)\,\mathrm{d}x$.

Az $X \subset \partial K$ halmazt fogjuk a határ görbülő részének nevezni.

A következő szakaszban a bizonyításokhoz használt legfontosabb lemmákat gyűjtjük ki és bizonyítjuk.

2.5. A bizonyításokhoz használt állítások és lemmák

Mielőtt a fejezet fő lemmáit bizonyítanánk, kimondunk három állítást, melyeket többször alkalmazunk a továbbiakban. Ezek mindegyike elemi számolással igazolható, ezért a biznyításuktól eltekintünk.

2.5.1. Állítás. *Ha C, D és E három konvex lemez, $0 < \varepsilon < 1$ pedig egy pozitív valós, és C ε-közel van D-hez, valamint D ε-közel van E-hez, akkor C 3ε-közel van E-hez.*

2.5.2. Állítás. *Legyen Σ_1 és Σ_2 kettő (2-dimenziós) sík $\mathbb{E}^3$-ban úgy, hogy a bezárt szögük kisebb mint ε, és tegyük fel, hogy D egy konvex lemez a Σ_1 síkban. Jelölje ρ azt a tengely körüli forgatást, ami Σ_2-t Σ_1-be viszi. Ekkor $\rho(p_{\Sigma_2}(D))$ ε-közel van D-hez, ahol p_{Σ_2} a Σ_2-re történő merőleges vetítés.*

2.5.3. Állítás. *Legyen q_1 és q_2 két olyan pozitív definit kvadratikus alak az Euklideszi síkon, amelyekre*

$$(1+\varepsilon^2)^{-1}q_1(x) \leq q_2(x) \leq (1+\varepsilon^2)q_1(x).$$

Ekkor létezik q_1-szerinti egység négyzet, amely ε-közel van egy q_2-szerinti egység négyzethez.

2.5.1. Univerzális delta létezése

Az egyik fő ötletünk az lesz, hogy a problémát lokalizáljuk, vagyis ∂K-n kis foltokat jelölünk ki, ahol a felület már jól közelíthető lesz speciális paraboloidokkal. Ebben lesz kulcs az alábbi technikai lemma.

Jelölje $u(z)$ a külső normálist egy $z \in \partial K$ pontban. Legyen továbbá C egy konvex poligon mely az $x \in \operatorname{relint} C$ pontban érinti K-t, és tegyük fel, hogy $\operatorname{int} K$ merőleges vetülete $\operatorname{aff} C$-re lefedi C-t. Egy $f : C \to \mathbb{R}$ függvényre

$$\Gamma(f) = \{z - f(z)u(x) : z \in C\}$$

jelöli az f grafikonját. Legyen $f_C : C \to \mathbb{R}$ az a konvex, C^2 sima függvény, melyre $\Gamma(f_C) \subset \partial K$.

q_y jelöli azt a kvadratikus alakot, mely f_C függvény második deriváltjából származik az $y \in C$ pontban, speciálisan $q_x = Q_x$. (q_y függ C-től is.) Továbbá, $p_C : \mathbb{E}^3 \to \operatorname{aff} C$ jelöli az $\operatorname{aff} C$-re történő merőleges vetítést, míg $\Pi_{\partial K} : C \to \partial K$ a ∂K-ra történő legközelebbi pont leképezés, más néven a metrikus projekció.

2.5.4. Lemma. *Minden $\varepsilon > 0$-ra, létezik egy $\delta(K, \varepsilon) = \delta > 0$ úgy, hogy ha $C \subset x + \delta B^3$ egy konvex poligon, mely az $x \in X' \cap \operatorname{relint} C$ pontban érinti K-t, akkor a következők teljesülnek. $\Gamma(f_C) \subset X_0$, és*

$$\textit{minden } y \in C,\ (1+\varepsilon^3)^{-1}Q_x \leq q_y \leq (1+\varepsilon^3)Q_x, \tag{2.5}$$

$$\textit{bármely } z \in \Gamma(f_C),\ \langle u(z), u(x)\rangle \geqq (1+\varepsilon)^{-1} \tag{2.6}$$

$$p_C(\Pi_{\partial K}(C)) \supseteq (1-\varepsilon)(C - x) + x. \tag{2.7}$$

Bizonyítás. Minden $x \in \operatorname{cl} X'$-re létezik egy ($x$-től függő) $\delta_x(K, \varepsilon^3/10) > 0$ úgy hogy (2.5), (2.6) és (2.7) mind teljesül ε helyett $\varepsilon^3/10$-t írva. Ez egyszerűen f kétszeresen folytonos differenciálhatóságából adódik. Legyen $B_x = x + (\delta_x/2)B^3$.

$$\bigcup_{x \in \mathrm{cl}\, X'} B_x \supseteq \mathrm{cl}\, X' \,.$$

Mivel cl X' kompakt, azért a fentiből kiválasztható egy véges fedés, vagyis létezik egy véges $V \subset \mathrm{cl}\, X'$ úgy hogy

$$\bigcup_{x \in V} B_x \supseteq \mathrm{cl}\, X' \,.$$

Legyen

$$\delta = \frac{\min_{x \in V} \delta_x}{4} \,.$$

Válasszunk egy tetszőleges $x \in \mathrm{cl}\, X'$ pontot, legyen $B = x + \delta B^3$, $y \in B \cap C$, valamint $z = (y, f(y))$. Világos, hogy van egy megfelelő $\widetilde{x} \in V$ amelyre $x \in B_{\widetilde{x}}$, amelyből a definíciók miatt $z \in 2B_{\widetilde{x}}$ is adódik.

$B_{\widetilde{x}}$ definíciója miatt nyilván $\langle u(x), u(\widetilde{x})\rangle \geqq 1 - \varepsilon^3/10$ és $\langle u(z), u(\widetilde{x})\rangle \geqq 1 - \varepsilon^3/10$ fennáll, amiből (2.6) következik. (2.6)-ből (2.7) is azonnal adódik. Ehhez elég meggondolni, hogy mi történik a vetítésekkor.

(2.5) bizonyításában néhány hosszadalmasabb rutinszerű számolást mellőzünk.

Legyen $\widetilde{f}$ az a C^2_+ függvény, amit a $\sigma_{\widetilde{x}}$ érintősíkon értelmezünk, és ami –hasonlóan f-hez– leírja ∂K-t $\widetilde{x}$ egy megfelelő környezetében.

Megjegyezzük, hogy

$$(1 - \varepsilon^3/10) Q_{\widetilde{x}} \leqq \widetilde{q}_{x^*} \leqq (1 + \varepsilon^3/10) Q_{\widetilde{x}},$$

és

$$(1 - \varepsilon^3/10) Q_{\widetilde{x}} \leqq \widetilde{q}_{y^*} \leqq (1 + \varepsilon^3/10) Q_{\widetilde{x}}$$

teljesül, ahol $y^* = p_{\sigma_{\widetilde{x}}}(z)$ és $x^* = p_{\sigma_{\widetilde{x}}}(x)$. Továbbá a már bizonyított (2.6)-ből következik, hogy tetszőleges w-re

$$(1 - \varepsilon^3/10)^3 \widetilde{q}_{w^*} \leqq q_w \leqq (1 + \varepsilon^3/10)^3 \widetilde{q}_{w^*}.$$

Mivel $Q_x = q_x$, azért (2.5)-t is beláttuk. □

2.5.2. A Momentum lemmák

Ebben a szakaszban két geometriai egyenlőtlenséget, illetve azoknak a stabilitását fogjuk bizonyítani. Ezeket az önmagukban is érdekes állításokat többször is alkalmazni fogjuk később. Itt különválik a beírt és a körülírt eset. A körülírt esethez a 2.5.5. lemmát, míg a beírt esethez a 2.5.6. lemmát használjuk.

2.5.5. Lemma (Momentum lemma). *Legyen $q(x)$ egy pozitív definit kvadratikus alak $\mathbb{R}^2$-n és $\alpha \leq 0$ valós szám. Legyen továbbá $G = [p_1, p_2, \ldots, p_k]$ egy k-szög $\{p_i\}$ csúcsokkal. Ekkor*

$$\max_{x \in G}(q(x) - \alpha) \geqq \frac{2}{k} \cdot A(G)\sqrt{\det q}. \tag{2.8}$$

Továbbá, ha $k \neq 4$, akkor

$$\max_{x \in G}(q(x) - \alpha) > 1,04 \cdot \frac{2}{k} \cdot A(G)\sqrt{\det q}. \tag{2.9}$$

Valamint, ha $\varepsilon < 0,01$ és

$$\max_{x \in G}(q(x) - \alpha) \leq (1 + \varepsilon) \cdot \frac{2}{k} \cdot A(G)\sqrt{\det q}, \tag{2.10}$$

akkor G $O(\sqrt[4]{\varepsilon})$-közel van egy q-négyzethez.

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy $\alpha = 0$, hiszen ezzel a bal oldalt csökkentettük. Ezután egy lineáris transzformáció alkalmazásával elérhető, hogy $q(x) = x^2$. Ettől a bizonyítandó nem módosul, mivel mindkét oldal ugyanannyiszorosára változik. A továbbiakban ezen feltevések mellett bizonyítunk.

Először (2.8) és (2.9) egyenlőtlenségeket igazoljuk. Mivel az x^2 egy konvex függvény, ezért

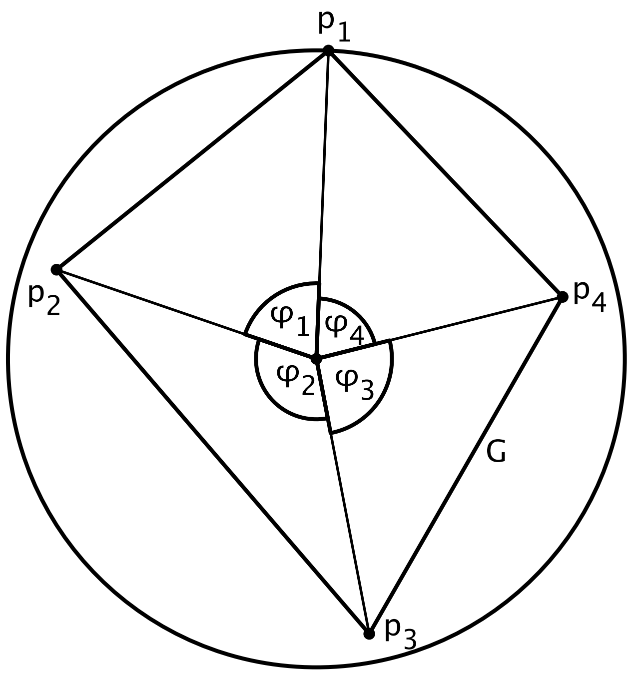
$$\max_{x \in G} x^2 = \max_{x \in \{p_i\}} x^2.$$

Legyen p_1 az egyik olyan csúcs, ahol a jobb oldali maximum realizálódik. Így tudjuk, hogy G-t tartalmazza egy $R = d(o, p_1)$ sugarú, o középpontú kör. Közismert, hogy egy adott körbe írt k-szögek közül a szabályosnak van a legnagyobb területe. Ebből azonnal következik, hogy

$$A(G) \leq \frac{R^2 \cdot \sin\frac{2\pi}{k} \cdot k}{2}.$$

Kihasználva, hogy $0 < \sin\frac{2\pi}{k} \leq 1$, átrendezés után (2.8)-t kapjuk. Másrészről, ha $k \neq 4$, akkor $\sin(2\pi/k) \leq 0,96$, ebből pedig kapjuk (2.9)-t.

Rátérünk (2.10) bizonyítására. (2.9) miatt feltehetjük, hogy G négyszög. G csúcsai pozitív körüljárás szerint legyenek p_1, p_2, p_3, p_4, úgy választva meg az indexelést, hogy $|p_1|$ legyen (az egyik) maximális. A $p_i o p_{i+1}\angle$-t jelöljük φ_i-vel ($p_5 \equiv p_1$).



2.1. ábra. A G négyszög

Első lépésben tegyük fel továbbá azt is, hogy $o \in G$. Ekkor egyrészt nyilvánvalóan

$$\max_{x \in G} x^2 = {p_1}^2.$$

Másrészről, felírhatjuk G területét négy háromszög területének összegeként:

$$A(G) = \frac{\sum_1^4 |p_i||p_{i+1}| \sin \varphi_i}{2} \leq {p_1}^2 \cdot \frac{\sum_1^4 \sin \varphi_i}{2}.$$

Ezt beírva a feltételbe azt kapjuk, hogy

$$(1+\varepsilon)^{-1} \leq \frac{\sum_1^4 \sin \varphi_i}{4}.$$

Ebből azonnal következik, hogy minden i-re $|\varphi_i - \pi/2| \leq O(\sqrt{\varepsilon})$ teljesül.

Másrészről,

$$A(G) = \frac{\sum_1^4 |p_i||p_{i+1}| \sin \varphi_i}{2} \leq \frac{\sum_1^4 |p_i||p_{i+1}|}{2},$$

ebből a feltételt kihasználva adódik, hogy

$$4p_1^2 \leq (1+\varepsilon) \sum_1^4 |p_i||p_{i+1}|.$$

Ebből rendezés után, kihasználva, hogy $1 - \varepsilon \leq (1 + \varepsilon)^{-1}$:

$$1 - \varepsilon \leq \frac{1}{4} \sum_{1}^{4} \frac{|p_i|}{|p_1|},$$

ebből pedig közvetlenül következik, hogy

$$|p_i| \geq (1 - 4\varepsilon)|p_1|.$$

Kaptuk tehát, hogy a középponti szögek $O(\sqrt{\varepsilon})$-közel vannak a derékszöghöz, míg a csúcsokba mutató vektorok hosszainak aránya 4ε-közel van 1-hez. Ezekből (2.10) elemi számolással adódik.

Ha $o \notin G$, akkor alkalmazzuk az állítást $G - p$ sokszögre, ahol p G-nek az origóhoz legközelebbi pontja. Ehhez elég azt belátni, hogy $\max_{x \in G - p} x^2 \leq \max_{x \in G} x^2$. Válasszuk ki G-nek azt az oldalát, amelyikre p illeszkedik (ha p éppen csúcs, akkor valamelyiket a kettő közül), és húzzunk párhuzamost o-n keresztül ezzel az oldallal. Ez az egyenes két félkörre vágja az o középpontú, $|op_1|$ sugarú kört, ezek közül az egyik tartalmazza a teljes G-t. Vegyük észre, hogy ennek a félkörnek az $\overrightarrow{op}$-vel vett eltolja is tartalmazza G-t. Ebből az állítás következik, és a bizonyítás teljes. □

2.5.6. Lemma (Momentum lemma)**.** *Legyen $q(x)$ egy pozitív definit kvadratikus alak $\mathbb{R}^2$-n, és α olyan valós szám, hogy $\alpha \geq q(x)$ minden $x \in G$ esetén teljesüljön. Legyen továbbá $G = [p_1, p_2, \ldots, p_k]$ egy k-szög $\{p_i\}$ csúcsokkal. Ekkor*

$$\max_{x \in G}(\alpha - q(x)) \geqq \frac{2}{k} \cdot A(G)\sqrt{\det q}.$$

Továbbá, ha $k \neq 4$, akkor

$$\max_{x \in G}(\alpha - q(x)) > 1,04 \cdot \frac{2}{k} \cdot A(G)\sqrt{\det q}.$$

Valamint, ha $\varepsilon < 0,01$ és

$$\max_{x \in G}(\alpha - q(x)) \leq (1 + \varepsilon) \cdot \frac{2}{k} \cdot A(G)\sqrt{\det q},$$

akkor G $O(\sqrt[4]{\varepsilon})$-közel van egy q-négyzethez.

Bizonyítás. Az előbb bizonyított 2.5.5. lemmát szeretnénk felhasználni. Először ismét tegyük fel, hogy $o \in G$. Mivel $q(o) = 0$, ezért következik, hogy $\max_{x \in G}(\alpha - q(x)) = \alpha \geq \max_{x \in G} q(x)$, ahol az egyenlőtlenségnél kihasználtuk a lemma azon feltételét, hogy $\alpha \geq q(x)$ minden $x \in G$ esetén. Tovább becsülhetjük a jobb oldalt a 2.5.5. lemma szerint és az állítás első két része azonnal következik. A harmadik rész igazolásához pedig elég azt meggondolni, hogy $\max_{x\in G}(\alpha - q(x)) \geq \max_{x\in G} q(x)$ miatt alkalmazható a 2.5.5. lemma harmadik állítása.

Hátra van még az $o \notin G$ eset. Hasonlóan az előző bizonyításhoz, itt is feltehetjük, hogy $q(x) = x^2$ (α változhat).

Először legyen $k \geqq 4$. Jelölje p G-nek az origóhoz legközelebbi pontját, és legyen $d = |op|$. Mivel az origó középponttú $\sqrt{\alpha}$ sugarú kör tartalmazza G-t a lemma feltétele szerint, ezért a p középpontú $\sqrt{\alpha - d^2}$ sugarú kör is tartalmazza G-t. Továbbá a p-re illeszkedő, op-re merőleges egyenes szeparálja G-t az origótól. Ezekből adódik, hogy egy $\sqrt{\alpha - d^2}$ sugarú félkör tartalmazza G-t, amelyből

$$\max_{x\in G}(\alpha - q(x)) = \alpha - d^2 \geq 1,04 \cdot \frac{2}{k} \cdot \frac{\pi}{2}(\alpha - d^2) \geqq 1,04 \cdot \frac{2}{k} \cdot A(G).$$

Végül legyen G egy háromszög, $o \notin G$. Hasonlóan az előbbihez látható, hogy G p-re illeszkedő oldala legfeljebb $2\sqrt{\alpha - d^2}$, a hozzá tartozó magasság legfeljebb $\sqrt{\alpha - d^2}$, így $A(G) \leq \frac{\sqrt{\alpha - d^2}\cdot 2\sqrt{\alpha - d^2}}{2} = \alpha - d^2$, amelyből

$$\max_{x\in G}(\alpha - q(x)) = \alpha - d^2 \geq A(G) > 1,04 \cdot \frac{2}{3}A(G).$$

Ezzel a lemmát bizonyítottuk. □

2.5.3. A Transzfer lemma

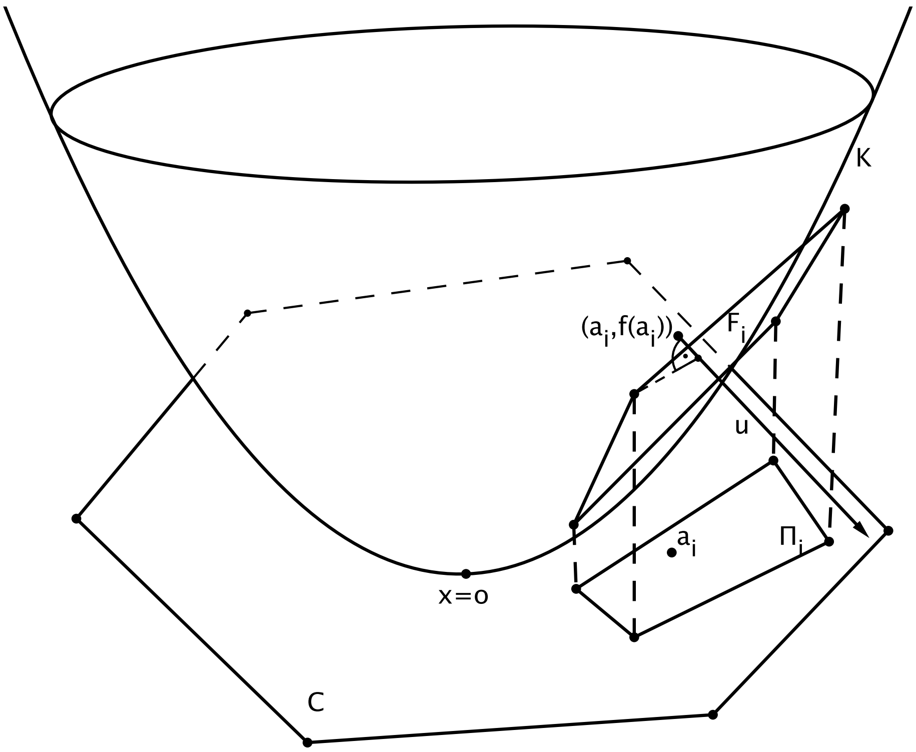
Ebben a részben egy technikai jellegű állítást mondunk ki, aminek segítségével az alsó korlátot látjuk majd be. Ehhez elöljáróban teszünk néhány megjegyzést, valamint emlékeztetünk néhány jelölésre.

Legyen $x \in \partial K$, valamint legyen C egy x-ben érintő (konvex) lemez, és legyen f az a kétszer folytonosan differenciálható függvény, ami leírja ∂K-t C felett (vagyis ∂K f gráfja C felett). Azonosítsuk aff C-t $\mathbb{R}^2$-tel, az origó legyen x (vagyis $x = (o, f(o))$. Jelölje l_y f első deriváltját egy $y \in C$ pontban, valamint q_y a második deriváltból származó kvadratikus alakot ugyanebben a pontban. Ismét megjegyezzük, hogy a C^2 simaság miatt $Q_x = q_x$. Alkalmazzuk a Taylor-tételt; legyenek $a, y \in C$, ekkor létezik $t \in (0, 1)$ úgy hogy

$$f(y) = f(a) + l_a(y)(y - a) + \frac{1}{2}q_{a+t(y-a)}(y - a).$$

Legyenek C' és $\widetilde{C}$ olyan konvex lemezek, hogy $C' \subset \operatorname{relint} C \subset \operatorname{relint} \widetilde{C}$. Továbbá legyen P olyan K köré írt politóp, amire $\widetilde{C} \subset p_{\mathbb{R}^2}(P)$. φ fogja jelölni azt a darabonként lineáris, C feletti függvényt, aminek grafikonja ∂P. P azon lapjait $F_1, \ldots, F_k$-val jelöljük, amelyekre teljesül, hogy a relatív belsejük φ grafikonját C felett metszi. Továbbá feltesszük azt is, hogy relint F_i pontosan akkor metszi φ grafikonját C' felett, ha $i \leq k' \leq k$. Végül legyen

$$\Pi_i = C \cap p_{\mathbb{R}^2}(F_i), \text{ ha } i = 1, \ldots, k.$$



2.2. ábra. Egy F_i lap és Π_i merőleges vetülete

Feltesszük, hogy minden F_i-hez, létezik egy $a_i \in \widetilde{C}$, úgy hogy F_i normálvektora párhuzamos f gráfjának $(a_i, f(a_i))$ pontbeli külső normálvektorával. Ekkor aff F_i egyenlete a következőképpen alakul:

$$f(a_i) + l_{a_i}(y - a_i) + \alpha_i = 0$$

valamilyen alkalmas $\alpha_i \in \mathbb{R}$ számokkal.

Vegyük észre, hogy a Taylor-formula szerint létezik olyan folytonos $g_i(y - a_i)$ függvény $\widetilde{C}$-n, hogy

$$f(y) = f(a_i) + l_{a_i}(y - a_i) + g_i(y - a_i),$$

és minden $y \in \widetilde{C}$ esetén van olyan $z \in \widetilde{C}$, amelyre

$$g_i(y - a_i) = \frac{1}{2} q_z(y - a_i)$$

teljesül. Megjegyezzük, hogy $i, j = 1, \dots k$ és $y \in \Pi_i$ esetén,

$$g_i(y - a_i) - \alpha_i \le g_j(y - a_j) - \alpha_j$$

teljesül (karakterizáljuk a lapokat).

Ennyi előzetes megjegyzés után kimondhatjuk a lemmánkat.

2.5.7. Lemma (Transzfer lemma)**.** *Legyen $\varepsilon \in (0, 1/4)$. A bevezetett jelöléseket használva tegyük fel, hogy Q_x pozitív deinfit minden $z \in C$ esetén, valamint $(1 + \varepsilon)^{-1} Q_x \leqq q_z \leqq (1 + \varepsilon) Q_x$ és $\langle u(x), u(w) \rangle \ge (1 + \varepsilon)^{-1}$ teljesül $w = z - f(z)u(x)$-re.*

(i) Ha $K \subset P$, akkor minden $\alpha_i \le 0$, és

$$\delta_H(P, K) \geqq (1 - 2\varepsilon) \max_{i=1,\dots,k} \max_{y \in \Pi_i} \left(\tfrac{1}{2} Q_x(y - a_i) - \alpha_i \right).$$

(ii) Ha $P \subset K$, akkor minden $\alpha_i > 0$. Bevezetve az $\alpha_i' = (1 + \varepsilon)\alpha_i$ $(i = 1, \dots, k)$ jelölést, azt kapjuk, hogy $\frac{1}{2} Q_x(y - a_i) \le \alpha_i'$ $(y \in \Pi_i,\ i = 1, \dots, k)$, és

$$\delta_H(P, K) \geqq (1 - 4\varepsilon) \max_{i=1,\dots,k} \max_{y \in \Pi_i} \left(\alpha_i' - \tfrac{1}{2} Q_x(y - a_i) \right).$$

Bizonyítás. Minden $i = 1, \dots, k$ esetén vezessük be a $\Pi_i' = [\Pi_i, \{a_i\}]$ jelölést.

Először legyen $K \subset P$. Ekkor $f(y) \ge \varphi_i(y)$ minden $y \in C$ és $i = 1, \dots, k$ esetén. Meg fogjuk mutatni, hogy

$$(1 + \varepsilon)\delta_H(P, K) \geqq \max_{i=1,\dots,k} \max_{y \in \Pi_i'} (f(y) - \varphi_i(y)). \tag{2.11}$$

Mivel a $f(y) - \varphi_i(y)$ függvény konvex, ezért feltehetjük, hogy y a Π_i' egyik csúcsa, valamint mivel $f(y) - \varphi_i(y)$ éppen a_i-nél minimális, így feletehető az is, hogy $y \in \Pi_i$. Legyen $w = y - \varphi_i(y)u(x) \in F_i$, és jelölje T az érintő síkot $v = y - f(y)u(x) \in \partial K$ pontban. Mivel T szeparálja K-tól a w-t, és mivel $u(v)$ külső normálisra $\langle u(x), u(v) \rangle \ge (1 + \varepsilon)^{-1}$ teljesül, ezért

$$\delta_H(P, K) \ge d(w, T) \ge (1 + \varepsilon)^{-1}(f(y) - \varphi_i(y)),$$

ahol $d(w, T)$ a w pont és T sík távolsága. A fenti egyenlőtlenségből (2.11) következik.

Minden $y \in \Pi_i$ esetén, a Taylor-formula szerint létezik olyan $z \in \Pi_i' \subset C$, amelyre $f(y) - \varphi_i(y) = \frac{1}{2} q_z(y - a_i) - \alpha_i$, ahol $q_z(y - a_i) - 2\alpha_i \le 2(1 + \varepsilon)\delta_H(P, K)$ (2.11) miatt. Így

$$\begin{aligned}
(1 + \varepsilon)\delta_H(P, K) &\geqq \tfrac{1}{2} q_z(y - a_i) - \alpha_i \\
&\ge \tfrac{1}{2} Q_x(y - a_i) - \alpha_i - \tfrac{1}{2} |q_z(y - a_i) - Q_x(y - a_i)| \\
&\ge \tfrac{1}{2} Q_x(y - a_i) - \alpha_i - \varepsilon\, \delta_H(P, K).
\end{aligned}$$

Ezzel az i) pontot igazoltuk.

Rátérünk az $P \subset K$ esetre, ekkor $\varphi_i(y) \geq f(y)$ minden $y \in C$ és $i = 1, \ldots, k$ esetén. Belátjuk a következőt:

$$(1+\varepsilon)\delta_H(P,K) \geqq \max_{i=1,\ldots,k} \alpha_i \geq \max_{i=1,\ldots,k} \max_{y\in\Pi'_i}(\varphi_i(y) - f(y)). \tag{2.12}$$

A második egyenlőtlenség azon tényből adódik, hogy a $\varphi_i(y) - f(y)$ függvény konkáv és $\varphi_i(a_i) - f(a_i) = \alpha_i$. (2.12) első egyenlőtlenségének belátásához legyen $w = a_i - \varphi_i(a_i)u(x) \in \operatorname{aff} F_i$ és $v = a_i - f(a_i)u(x) \in \partial K$. Mivel aff F_i szeparálja P-t és v-t, és az $u(a_i)$ külső normálisra teljesül, hogy $\langle u(x), u(a_i)\rangle \geq (1+\varepsilon)^{-1}$, így

$$\delta_H(P,K) \geq d(v, \operatorname{aff} F_i) \geq (1+\varepsilon)^{-1}(\varphi_i(a_i) - f(a_i)) = (1+\varepsilon)^{-1}\alpha_i,$$

ebből (2.12) adódik.

Minden $y \in \Pi_i$ esetén, a Taylor-formula szerint létezik olyan $z \in \Pi'_i \subset C$, amelyre $\varphi_i(y) - f(y) = \alpha_i - \frac{1}{2}\, q_z(y-a_i)$, ahol $\alpha_i, q_z(y-a_i) \leq 2\delta_H(P,K)$ (2.12) miatt. Innen kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
(1+\varepsilon)\delta_H(P,K) &\geqq \alpha_i - \tfrac{1}{2}\, q_z(y-a_i)\\
&\geq \alpha'_i - \tfrac{1}{2}\, Q_x(y-a_i) - \tfrac{1}{2}|q_z(y-a_i) - Q_x(y-a_i)| - (\alpha'_i - \alpha_i)\\
&\geq \alpha'_i - \tfrac{1}{2}\, Q_x(y-a_i) - 3\varepsilon\, \delta_H(P,K).
\end{aligned}$$

Ezzel a 2.5.7. lemma bizonyítása teljes. □

2.6. Jól közelítő politóp konstruálása

Ebben a fejezetben tehát konstruálni szeretnénk egy Hausdorff-metrikában "jól" közelítő, K köré írt R_n politópot, aminek legfeljebb n éle van. Itt két dologra kell ügyelnünk. Egyrészt, hogy a kapott politóp elég közel legyen K-hoz, másrészt, hogy ne legyen túl sok éle. Először megmutatjuk, hogy egy pont környezetében hogyan kell jól közelítő felületet konstruálni. Utána választunk egy ügyesen definiált halmazt, amelynek pontjai körül a lokális konstrukciót végrehajtjuk, majd ezeket összeillesztjük. Belátjuk a következő lemmát.

2.6.1. Lemma. *Léteznek ε_0 és c csak K-tól függő konstansok úgy, hogy ha $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ és $n > N$, ahol N függ ε-tól és K-tól is, akkor létezik R_n K köré írt politóp, amelynek legfeljebb $(1+c\varepsilon)n$ éle van, és*

$$\frac{\delta_H(K, R_n^c)}{\frac{1}{2n}\int_{\partial K} \kappa^{1/2}(x)\,\mathrm{d}x} \leqq 1 + c\cdot\varepsilon. \tag{2.13}$$

Bizonyítás. Az egyszerűbb jelölés kedvéért legyen

$$I = \int_{\partial K} \kappa^{1/2}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Minden $x \in X'$ és $\varrho > 0$, legyen σ_x a K-hoz x-ben húzott érintősík, és legyen

$$\mathcal{E}(x,\varrho) = \{z \in T_x : \tfrac{1}{2}\,Q_x(z-x) \le \varrho^2\}.$$

Vegyük észre, hogy $\mathcal{E}(x,\varrho)$ egy ellipszis, amelyre gondolhatunk úgy, mint egy ϱ sugarú $\frac{1}{2}\,Q_x$-szerinti körre. Az X definíciója miatt Q_x mindkét főgörbülete legalább $\eta > 0$ (ami függ ε-tól). Ezért, ha $\varrho \le \frac{1}{4}\,\delta\sqrt{\eta}$, akkor $\mathcal{E}(x,\varrho)$ Euklideszi értelemben vett átmérője legfeljebb δ, ahol δ-t a 2.5.4. lemma definiálja.

Rögzítsünk egy megfelelő $\varepsilon > 0$-t. Legyen $y \in \partial K$ egy tetszőleges pont K határán. Első lépésként megkonstruáljuk R_n y-hoz közeli részét. Emlékeztetőül, legyen σ_y az érintősíkja ∂K-nak az y pontban. Tekintsük az $S_y(z) = \frac{1-\varepsilon^3}{2} \cdot Q_y(z)$ kvadratikus alakot ($z \in \sigma_y$). Ezen $S_y(z-y)$ kvadratikus alak gráfja σ_y felett egy paraboloid felület lesz (továbbiakban ezt Ω jelöli), amelyre teljesül, hogy nem metszi $\mathrm{int}K$-t y egy megfelelően kicsi környzetében. Vegyünk fel egy Q_y-szerinti négyzethálót σ_y-n, úgy hogy ezen négyzetek területe

$$2I/(n\kappa(y)^{1/2})$$

legyen. T_y természetesen függ n-től. Ez a négyzetháló Euklideszi értelemben paralelogrammaháló, de mi a továbbiakban is négyzethálónak hívjuk, elemeit pedig négyzeteknek. Tehát ezt a σ_y-n levő négyztehálót Λ-val fogjuk jelölni, minden benne levő N négyzet középpontja pedig legyen a_N. Vegyük észre, hogy minden N méretét éppen úgy válaszottuk, hogy

$$\max_{z\in N} \tfrac{1}{2}\,Q_y(z-a_N) = \frac{I}{2n} = \int_{\partial K} \kappa^{1/2}(x)\,\mathrm{d}x \cdot \frac{1}{2n}. \tag{2.14}$$

(Vesd össze 2.5.5. lemmával.)

Legyen $\nu = \frac{\sqrt{I}}{\sqrt{n\cdot\varepsilon}}$, így teljesül, hogy

$$N - a_N \subset \mathcal{E}(y,\varepsilon\nu). \tag{2.15}$$

Feltehetjük, hogy n olyan nagy, hogy $\mathcal{E}(y,12\nu)$ Euklideszi átmérője legfeljebb δ.

Jelölje $\widetilde{\Lambda}'$ a négyzetháló azon négyzeteinek halmazát, amelyek teljesen $\mathcal{E}(y,12\nu)$-ban vannak. Legyenek ω és f konvex függvények $\cup\widetilde{\Lambda}'$-n úgy, hogy $\omega(z) = S_y(z-y)$, és $\Gamma(f) \subset \partial K$. Létezik egy darabonként lineáris, konvex φ függvény $\cup\widetilde{\Lambda}'$-n úgy, hogy φ minden $N \in \widetilde{\Lambda}'$ négyzeten lineáris és $\varphi(a_N) = \omega(a_N)$, vagyis minden négyzet középpontjában érinti Ω-t. Legyen $\widetilde{\Lambda}_y = \Gamma(\varphi)$ az így kapott poliedrális felület. Vegyük észre, hogy a lapjai merőleges vetületei σ_y-n épp $\widetilde{\Lambda}'$ négyzetei. Adunk egy felső korlátot $\Gamma(f)$ és $\widetilde{\Lambda}_y$ Hausdorff-távolságára.

(2.14)-ből és a Taylor-tételből következik, hogy

$$\delta_H(\widetilde{\Lambda}_y, \Gamma(\omega)) \leq \max_{N\in\widetilde{\Lambda}'} \max_{z\in N} (\omega(z) - \varphi(z)) = \max_{N\in\widetilde{\Lambda}'} \max_{z\in N} S_y(z - a_N) \leq \frac{\int_{\partial K} \kappa^{1/2}(x)\,\mathrm{d}x}{2n}. \tag{2.16}$$

Most nézzük a paraboloid és ∂K távolságát, használjuk a 2.5.4. lemmát és ismét a Taylor-tételt:

$$\begin{aligned} \delta_H(\Gamma(f), \Gamma(\omega)) &\leq \max_{z\in\mathcal{E}(x,12\nu)} (f(z) - \omega(z)) \leq \max_{z\in\mathcal{E}(x,12\nu)} (\tfrac{1+\varepsilon^3}{2} Q_y(z-y) - S_y(z-y)) \\ &= \max_{z\in\mathcal{E}(x,12\nu)} \varepsilon^3 Q_y(z-y) = 2\cdot 12^2\nu^2\varepsilon^3 = \frac{288I\varepsilon}{n}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

A két egyenlőtlenségből kapjuk, hogy

$$\delta_H(\widetilde{\Lambda}_y, \Gamma(f)) \leq (1 + O(\varepsilon)) \cdot \frac{\int_{\partial K} \kappa^{1/2}(x)\,\mathrm{d}x}{2n}. \tag{2.18}$$

Most már megkonstruálhatjuk a megfelelő R_n^c politópot. Legyen $y_1, \dots y_k$ pontok egy maximális halmaza X'-ből úgy, hogy a $\Pi_{\partial K}(\mathrm{relint}\mathcal{E}(y_i, \nu))$ halmazok páronként diszjunktak. Definiáljuk az M (esetleg nem korlátos) poliédert, amelyet a $\sigma_{y_1}, \dots, \sigma_{y_k}$ érintősíkok határoznak meg. Az M poliéder y_i-ben érintő minden C_i' lapjára legyen $C_i = C_i' \cap \mathcal{E}(y_i, 4\nu)$. Ha n elég nagy, akkor a $\Pi_{\partial K}(C_1), \dots, \Pi_{\partial K}(C_k)$ halmazok nem fednek át, és lefedik X'-t. Minden $i = 1, \dots, k$-re legyen Λ_i az összes $\widetilde{\Lambda}_{y_i}$-beli olyan F lap uniója, amelyre $\Pi_{\partial K} F \cap \Pi_{\partial K} C_i \neq \emptyset$, vagyis $p_{C_i}\Lambda_i \subset \mathcal{E}(x, 5\nu)$. Végül, a lapos rész feletti konstrukcióhoz, legyen $m = \varepsilon n$, és tekintsük az Y_m poliedrális hiperfelületet, amely approximálja $\Sigma(\beta) = \partial K \backslash \mathrm{cl}X'$-t, lásd 2.4.2. következményt. Legyen továbbá Λ_0 azon F lapok uniója, amelyekre $\Pi_{\partial K} F \cap \Sigma(\beta) \neq \emptyset$. Az R_n^c politópot a következőképp definiáljuk:

$$R_n^c = [\Lambda_0, \Lambda_1, \dots, \Lambda_k]. \tag{2.19}$$

A $\Lambda_0, \Lambda_1, \dots, \Lambda_k$ halmazok konstrukciója, valamint a 2.4.2. következmény és (2.18) miatt azonnal azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} K &\subset R_n^c, \text{ és} \\ \delta_H(K, R_n^c) &\leq (1 + O(\varepsilon)) \cdot \frac{\int_{\partial K} \kappa^{1/2}(x)\,\mathrm{d}x}{2n}. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Így már csak R_n^c éleinek számát kell megbecsülnünk.

Legyen G az R_n^c azon élei által definiált gráf, amelyek két Λ_i-ben lévő lap metszeteiként adódnak (valamilyen $i \geq 1$-re), G' pedig az R_n^c maradék élei által definiált gráf.

Először a G gráf $e(G)$ élszámát becsüljük. Legyen $i = 1, \ldots, k$, m_i pedig jelölje a Λ_i halmaz elemeinek számát. Vegyük észre, hogy

$$\mathcal{E}(y_i, \tfrac{1}{2}\,\nu) \subset C_i \subset \mathcal{E}(y_i, 4\nu). \tag{2.21}$$

A 2.5.4. lemmából és (2.15)-ból következik, hogy

$$p_{C_i}\Lambda_i \subset y_i + (1 + 4\varepsilon)(C_i - y_i). \tag{2.22}$$

Felhasználva , hogy $A(p_{C_i}F) = 2I/(n\kappa(y_i)^{1/2})$ minden Λ_i-beli F lapra teljesül, valamint a 2.5.4. lemmából azt kapjuk, hogy

$$m_i \leq (1 + O(\varepsilon)) \cdot \frac{n\kappa(y_i)^{1/2}A(C_i)}{2I} = (1 + O(\varepsilon)) \cdot \frac{n}{2} \cdot \frac{\int_{\Pi_{\partial K} C_i} \kappa(x)^{1/2}\,\mathrm{d}x}{\int_{\partial K} \kappa(x)^{1/2}\,\mathrm{d}x}. \tag{2.23}$$

Mivel Λ_i minden lapja négyszög, azonnal adódik, hogy

$$e(G) \leq \sum_{i=1}^{k} 2m_i \leq (1 + O(\varepsilon)) \cdot n. \tag{2.24}$$

Rátérünk G'-re, először G' csúcsainak számát becsüljük. Minden $i = 1, \ldots, k$-re legyen μ_i Λ_i és G' azon közös v csúcsainak száma, amelyekre létezik egy olyan $[v, w]$ éle G'-nek, amelyben w valamilyen Λ_j egy csúcsa ($j \geq 1$, esetleg $j = i$). Továbbá μ_0 legyen G' azon v csúcsainak száma, melyekre vagy v a Λ_0 egy csúcsa, vagy van olyan $[v, w]$ éle G'-nek, amire w a Λ_0 csúcsa.

Tekintsük G' egy olyan $[v, w]$ élét, ahol v a Λ_i csúcsa ($i \geq 1$). A $v' = p_{C_i}v$ és $w' = p_{C_i}w$ pontokra (2.20)-ból következik, hogy

$$0 \leq g(t) = S_{y_i}(tw' + (1 - t)v' - y_i) \leq I/n \quad \text{for } t \in [0, 1].$$

Mivel $g(t) = \frac{1-\varepsilon^3}{2}Q_{y_i}(t(w'-v'))+at+b$ alkalmas $a, b \in \mathbb{R}$ számokkal, ezért a $g(0) \leq I/n$ és $g(1) - 2g(1/2) \leq I/n$ egyenlőtlenségekből adódik, hogy

$$Q_{y_i}(w' - v') \leq \tfrac{2}{1-\varepsilon^3} \cdot \tfrac{8I}{n} \leq \tfrac{32I}{n}. \tag{2.25}$$

Először tegyük fel, hogy w valamilyen Λ_j csúcsa ($j \geq 1$), míg v a Λ_i F lapjának csúcsa. A (2.21)-ből következik, hogy alkalmazva (2.22)-t C_j-re ($j \neq i$) azt nyerjük, hogy

$$p_{C_i}F \cap (y_i + (1 - \gamma\varepsilon)(C_i - y_i)) = \emptyset,$$

valamilyen $\gamma > 0$ abszolút konstanssal. Felhasználva, hogy $A(p_{C_i}F) = 2I/(n\kappa(y_i)^{1/2})$ és (2.22)-t az következik, hogy

$$\mu_i \leq O(\varepsilon) \cdot \frac{n\kappa(y_i)^{1/2} A(C_i)}{2I} = O(\varepsilon) \cdot n \cdot \int_{\Pi_{\partial K} C_i} \kappa(x)^{1/2} \, \mathrm{d}x. \tag{2.26}$$

Most megbecsüljük még μ_0-t. Ha $[v, w]$ olyan éle G'-nek, hogy v egy Λ_i csúcsa ($i \geq 1$) és w pedig Λ_0 csúcsa, akkor Λ_0 definíciója és (2.25) miatt $\Pi_{\partial K} C_i \cap X = \emptyset$. Mivel Λ_0-nak legfeljebb εn csúcsa van, míg Λ_i-nek legfeljebb $4m_i$ ($i \geq 1$), ezért, felhasználva (2.23)-t és X tulajdonságait, azt kapjuk, hogy

$$\mu_0 \leq \varepsilon n + \sum_{\Pi_{\partial K} C_i \cap X = \emptyset} 4m_i \leq \varepsilon n + \frac{n \cdot \int_{\partial K \setminus X} \kappa(x)^{1/2} \, \mathrm{d}x}{\int_{\partial K} \kappa(x)^{1/2} \, \mathrm{d}x} \leq 2\varepsilon n.$$

Ezt a becslést és a (2.26) becsléseket minden $i = 1, \ldots, k$-ra összerakva azt nyerjük, hogy G'-nek legfeljebb $O(\varepsilon)n$ csúcsa lehet. Mivel G' síkgráf, ezért éleinek $e(G')$ száma legfeljebb csúcsai számának háromszorosa lehet, vagyis beláttuk, hogy $e(G') = O(\varepsilon)n$. Végül emiatt, és (2.24) miatt következik, hogy R_n^c-nek legfeljebb $(1 + O(\varepsilon))n$ éle lehet, amivel a 2.6.1. lemma bizonyítása teljes. $\square$

A fenti bizonyításból a következő állítás is adódik:

2.6.2. Következmény. *Legyen K konvex test $\mathbb{R}^3$-ben C^2 sima határral, P_n pedig a Hausdorff-metrikában K legjobban közelítő körülírt politópja, amelynek legfeljebb n éle van. Ekkor*

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{\delta_H(K, R_n)}{\frac{1}{2n} \cdot \int_{\partial K} \kappa^{1/2}(x) \, \mathrm{d}x} \leqq 1.$$

Ezzel a felső korlátot a körülírt esetben beláttuk.

A beírt esethez szükséges módosítások

Minden eddigi jelölést megtartunk. Egy $y \in X'$ pont esetén az S_y kvadratikus alakot most $S_y = \frac{1+\varepsilon^3}{2} Q_y$-nal definiáljuk. Így, az $S_y(z - y)$ (mint $z \in \sigma_y$ egy függvénye) grafinkonja σ_y felett egy Ω paraboloid, amelynek $\sigma_y \cap (y + \delta B^3)$ feletti része teljesen K-ban van a 2.5.4. lemma szerint. A Q_y-szerinti négyzetrácsot ugyanúgy definiáljuk mint a körülírt esetben, az α értéke pedig legyen $\alpha = \frac{(1+\varepsilon^3)I}{2n}$-vel adva. Ebben az esetben (vesd össze a 2.5.6. lemmával)

$$\max_{z \in N} S_y(z - a_N) = \alpha, \tag{2.27}$$

$$\max_{z \in N} (\alpha - S_y(z - a_N)) = \alpha = \frac{1 + \varepsilon^3}{2n} \cdot \int_{\partial K} \kappa^{1/2}(x) \, \mathrm{d}x. \tag{2.28}$$

Hasonlóan a korábbihoz, legyen $\widetilde{\Lambda}'$ azon négyzetek halmaza, amelyek $\mathcal{E}(x, 12\nu)$-ben vannak. Legyenek ω és f azok a konvex függvények $\cup\widetilde{\Lambda}'$-n, amelyekre $\omega(z) = S_y(z - y)$ és $\Gamma(f) \subset \partial K$. A Taylor-tétel szerint létezik egy konvex, darabonként lineáris φ függvény $\cup\widetilde{\Lambda}'$-n úgy, hogy φ lineáris minden $N \in \widetilde{\Lambda}'$ négyzeten, $\varphi(a_N) = \omega(a_N) + \alpha$, valamint $\widetilde{\Lambda}_y = \Gamma(\varphi)$ grafikon $\Gamma(\omega)$-ba van írva, azaz $\widetilde{\Lambda}_y$ csúcsai rajta vannak $\Gamma(\omega)$-n. Ezekkel a definíciókkal (2.18) ismét következik.

A bizonyítás hátralevő része teljesen analóg a körülírt esettel, csak most a 2.4.1. lemmát kell használnunk a 2.4.2. következmény helyett a lapos részek kezeléséhez.

2.7. Alsó korlát

Rátérünk az alsó korlát bizonyítására. Már beláttuk, hogy

$$\limsup_{n\to\infty}[2n \cdot (\delta_H(K, P_n))] \leqq \int_{\partial K} \kappa^{1/2}(x)\,\mathrm{d}x\ . \tag{2.29}$$

Elég megmutatni, hogy létezik $\varepsilon_0 > 0$ (amely csak K-tól függ), hogy minden $\varepsilon_0 > \varepsilon > 0$ esetén van egy olyan pozitív egész N_ε, hogy bármely $n > N_\varepsilon$-re

$$\delta_H(K, P_n) \geqq (1 - \gamma\varepsilon) \int_{\partial K} (\kappa(x))^{1/2}\,\mathrm{d}x \cdot \frac{1}{2n}, \tag{2.30}$$

ahol γ egy abszolút konstans.

Rögzítsünk egy $\varepsilon > 0$-t. Konstruálunk egy K köré írt $M = M(\varepsilon)$ segédpolitópot úgy, hogy M a következő tulajdonságokat teljesíti. Ha C olyan lapja M-nek, amelyre $\Pi_{\partial K} C \subset X'$, akkor diam $C < \delta$, ahol δ-t a 2.5.4. lemmából kapjuk. Jelölje $\widehat{\mathcal{C}}$ M összes olyan C lapjának halmazát, amelyre $\Pi_{\partial K} C \cap X \neq \emptyset$ teljesül. Ekkor minden $C \in \widehat{\mathcal{C}}$ esetén egyértelműen létezik $x_C \in X'$ úgy, hogy $u(x_C)$ C-nek is külső normálisa. Legyen

$$\mathcal{C} = \{x_C + (1 - 2\varepsilon)(C - x_C) \mid C \in \widehat{\mathcal{C}},\ \Pi_{\partial K}(x_C + (1 - 2\varepsilon)(C - x_C)) \cap X \neq \emptyset\}.$$

Az X definíciójából és a 2.5.4. lemmából közvetlenül adódik, hogy

2.7.1. Lemma.

$$\sum_{C\in\mathcal{C}} \kappa^{1/2}(x_C) \cdot A(C) \geq (1 - O(\varepsilon)) \int_{\partial K} \kappa^{1/2}(x)\,\mathrm{d}x.$$

(2.29)-ból következik, hogy létezik $\omega = \omega(K) > 0$ úgy, hogy ha F P_n egy lapja, és $\exists C \in \mathcal{C}$ amire $\Pi_{\partial K}(C) \cap \Pi_{\partial K}(F) \neq \emptyset$, akkor diam $F \leqq \frac{\omega}{\sqrt[4]{n}}$. Ha n elég nagy, akkor minden F-re legfeljebb egy olyan C létezik, hogy $\Pi_{\partial K}(F) \cap \Pi_{\partial K}(C) \neq \emptyset$. (Megjegyezzük, hogy N_ε nem függ n-től.) Jelöljük $\mathcal{C}_C$-vel P_n azon lapjait, amelyek C felett vannak.

$\mathcal{C}$, f és φ definíciójából következik, hogy

$$\delta_H(P_n^C, K) \geqq (1 - O(\varepsilon)) \cdot \max_{C \in \mathcal{C}} \max_{F \in \mathcal{C}_C} \max_{y \in \Pi_F} (f(y) - \varphi(y)).$$

A 2.5.5. lemmából (Momentum lemma) és a 2.5.7. lemmából (Transzfer lemma) egy C feletti lokális becslés adódik:

$$\begin{aligned} \max_{F \in \mathcal{C}_C} \max_{y \in \Pi_F} (f(y) - \varphi(y)) &= \max_{F \in \mathcal{C}_C} \max_{y \in \Pi_F} \frac{1}{2}(g_F(y - a_F) - \alpha_F) \geqq \\ &\geqq (1 - O(\varepsilon)) \cdot \max_{F \in \mathcal{C}_C} \max_{y \in \Pi_F} \frac{1}{2}(Q_{y_C}(y - a_F) - \alpha_F) \geqq \\ &\geqq (1 - O(\varepsilon)) \cdot \max_{F \in \mathcal{C}_C} \frac{1}{k_F} \cdot A(F) \cdot (\det Q_{y_C})^{1/2} = \\ &= (1 - O(\varepsilon)) \cdot \kappa^{1/2}(y_C) \cdot \max_{F \in \mathcal{C}_C} \frac{A(F)}{k_F} \end{aligned} \tag{2.31}$$

A további becsléshez a következő elemi egyenlőtlenséget használjuk.

2.7.2. Lemma. *Legyen $a_i, b_i \in \mathbb{R}_+$ minden $i = 1, 2, \ldots, m$-re. Ha létezik egy λ valós, amelyre minden $i = 1, 2, \ldots, m$ esetén $a_i/b_i \leqq \lambda$ teljesül, akkor $\sum_{i=1}^m a_i / \sum_{i=1}^m b_i \leqq \lambda$.*

Bizonyítás. Ha összegezzük az $a_i \leqq \lambda b_i$ egyenlőtlenségeket, akkor $\sum a_i \leqq \sum \lambda b_i$ adódik, amelyből $\sum b_i$-vel való osztással nyerjük az állítást. □

Mivel $A(F)/k_F \leqq \max_{F \in \mathcal{C}_C} A(F)/k_F$ bármely $F \in \mathcal{C}_C$ esetén, ezért

$$\max_{F \in \mathcal{C}_C} A(F)/k_F \geqq (\sum_{F \in \mathcal{C}_C} A(F))/(\sum_{F \in \mathcal{C}_C} k_F).$$

Jelölje n_C a C felett elhasznált élek számát. Ekkor

$$\begin{aligned} \max_{F \in \mathcal{C}_C} \max_{y \in \Pi_F} \frac{1}{2}(g_F(y - a_F) - \alpha_F) &\geqq (1 - O(\varepsilon)) \cdot \kappa^{1/2}(y_C) \frac{\sum_{F \in \mathcal{C}_C} A(F)}{\sum_{F \in \mathcal{C}_C} k_F} \geqq \\ &\geqq (1 - O(\varepsilon)) \cdot \frac{1}{2} \cdot \kappa^{1/2}(y_C) \frac{A(C)}{n_C}. \end{aligned}$$

Alkalmazzuk a 2.7.1. és a 2.7.2. lemmát ismét. A következő egyenlőtlenségláncot kapjuk:

$$\max_{C \in \mathcal{C}} \max_{F \in \mathcal{C}_C} \max_{y \in \Pi_F} f(y) - \varphi(y) \geqq (1 - O(\varepsilon)) \cdot \frac{1}{2} \cdot \max_{C \in \mathcal{C}} \left(\frac{\kappa^{1/2}(x_C) \cdot A(C)}{n_C} \right) \geqq$$

$$\geqq (1 - O(\varepsilon)) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sum_{C \in \mathcal{C}} (\kappa^{1/2}(x_C) \cdot A(C))}{\sum_{C \in \mathcal{C}} n_C} \geqq (1 - O(\varepsilon)) \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_{\partial K} \kappa^{1/2}(x) \, \mathrm{d}x \cdot \frac{1}{n}.$$

Mivel ε tetszőleges volt, ezért (2.3) bizonyítását befejeztük. □

A beírt esethez szükséges módosítások

Ismét a körülírt esethez használt M politópot használjuk, valamint a 2.5.7. és a 2.5.6. lemmákat alkalmazzuk. Ugyanazokat a jelöléseket használjuk mint a körülírt esetben: α_F, stb. minden $F \in \mathcal{C}_C$ lapjára P_n^i-nek. Ebben az esetben $\alpha_F > 0$, és (a 2.5.7., Tanszfer lemmával összhangban) bevezetjük az $\alpha'_F = (1+\varepsilon)\alpha_F$ jelölést. A (2.31) becslések helyett, 2.5.7. és 2.5.6. lemmákból a következőket kapjuk:

$$\begin{aligned} \delta_H(P_n^c, K) &\geqq (1 - O(\varepsilon)) \max_{C \in \widehat{\mathcal{C}}} \max_{F \in \mathcal{C}_C} \max_{y \in \Pi_F} (\alpha'_F - \tfrac{1}{2} Q_{x_C}(y - a_F)) \\ &\geqq (1 - O(\varepsilon)) \cdot \max_{C \in \widehat{\mathcal{C}}} \max_{F \in \mathcal{C}_C} \frac{\kappa^{1/2}(x_C) \cdot A(\Pi_F)}{k_F}. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Innen a körülírt eset számolása lépésről lépésre követhető.

2.8. A 2.2.2. tétel bizonyítása

Itt is csak a körülírt esetet bizonyítjuk részletesen, a beírt eset nagyon hasonlóan kezelhető, a szakasz végén röviden rámutatunk az eltérésekre. A bizonyítás során lépésenként igazoljuk az állítást indirekt érveléséket használva.

A tétel következő, ekvivalens átfogalmazását igazoljuk. Létezik olyan $\varepsilon_0 > 0$, amelyre bármely $\varepsilon_0 > \varepsilon > 0$ esetén létezik $n_0 = n_0(\varepsilon)$ küszöbindex, hogy minden $n > n_0$-ra legfeljebb ε rész kivételével P_n^c minden F lapja F egy négyszög; továbbá minden F-hez egyértelműen létezik egy $x_F \in \partial K$ pont, amelyhez tartozó $u(x_F)$ külső normális merőleges F-re is, valamint Q_{x_F} pozitív definit, és F ε-közel van egy Q_{x_f}-szabályos négyzethez, melynek területe

$$\frac{\int_{\partial K} \kappa^{1/2}(x)\,\mathrm{d}x}{f(n)\kappa^{1/2}(x_F)},$$

ahol $f(n)$ jelöli P_n^c lapjainak a számát.

A már bizonyított(2.3) aszimptotikus formulából következik, hogy létezik egy $b_n > 0$ pozitív nullsorozat ($\lim b_n = 0$) amelyre a következő teljesül

$$\delta_H(K, P_n^c) \leq (1 + b_n) \cdot \frac{1}{2} \int_{\partial K} \kappa^{1/2}(x)\,\mathrm{d}x \cdot \frac{1}{n}. \tag{2.33}$$

Rögzítsük $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen. Ismét megkonstruáljuk $M = M(\varepsilon)$ segédpolitópunkat a K körül. Felelevenítjük a jelöléseket, illetve azt, hogy M mely tulajdonságait használjuk majd ki. Ha C olyan lapja M-nek, amelyre $\Pi_{\partial K} C \subset X'$, akkor diam $C < \delta$, ahol δ-t a 2.5.4. lemmából kapjuk. Jelölje $\widehat{\mathcal{C}}$ M összes olyan C lapjának halmazát melyre $\Pi_{\partial K}C \cap X \neq \emptyset$ teljesül. Ekkor minden $C \in \widehat{\mathcal{C}}$, esetén egyértelműen létezik $x_C \in X'$ úgy, hogy $u(x_C)$ C-nek is külső normálisa. Legyen

$$\mathcal{C} = \{x_C + (1-2\varepsilon)(C - x_C) \mid C \in \widehat{\mathcal{C}},\ \Pi_{\partial K}(x_C + (1-2\varepsilon)(C - x_C)) \cap X \neq \emptyset\}.$$

A 2.2.1. tételben igazolt aszimptotikus formulából következik, hogy létezik $\omega = \omega(K, \varepsilon) > 0$ úgy, hogy ha F P_n^c egy lapja, és létezik olyan $C \in \widehat{\mathcal{C}}$, amelyre $\Pi_{\partial K}(C) \cap \Pi_{\partial K}(F) \neq \emptyset$, akkor diam $F \leqq \omega/\sqrt{n}$. Ebből adódik, hogy ha $n > N_\varepsilon$, akkor P_n^c minden F lapjához legfeljebb egy olyan $C \in \mathcal{C}$ létezik, amelyre $\Pi_{\partial K}(F) \cap \Pi_{\partial K}(C) \neq \emptyset$. (Ne feledjük, hogy $\mathcal{C}$-ben a lapokat ε-tól függően kicsinyítettük, így a projekciók nem fedik teljesen ∂K-t, köztük kis "rések" vannak.) Jelöljük $\mathcal{C}_C$-vel P_n^c azon lapjainak halmazát, amelyek C "felett" vannak; vagyis, az aff$C$-re vett merőleges vetületük metszi C-t, és amelyeknek külső normálisa hegyesszöget zár be $u(x_C)$-vel. Minden $F \in \mathcal{C}_C$ esetén jelöljük ezt a merőleges vetületet $\Pi_F = p_C(F)$-fel, és legyen $x_F \in \partial K$ az a pont a K határán, amelyre az $u(x_F)$ külső normális F lapnak is külső normálisa; k_F pedig legyen F oldalszáma. Jegyezzük meg, hogy ha n elég nagy, akkor $a_F = p_C(x_F)$ benne van C-ben. Definiáljuk az α_F értéket úgy, hogy $x_F - \alpha_F u(x_C) \in$ aff$F$ teljesüljön. Ezek az α_F konstansok lényegében az F lap és ∂K távolságát mérik, azért kell őket bevezetni, mert általában nem tehetjük fel, hogy P_n^c lapjai értintik K-t. Vegyük észre, hogy a definíciók miatt $\alpha_F \leq 0$. Jelöljük $\mathcal{F}$-fel a P_n^c politóp lapjainak halmazát, valamint legyen $\mathcal{F}_+ := \{F \in \mathcal{F} : \Pi_{\partial K}F \cap X \neq \emptyset\}$ és $\mathcal{F}_0 := \mathcal{F} \backslash \mathcal{F}_+$. Szemléletesen $\mathcal{F}_+$ a görbülő rész feletti lapokat jelenti, $\mathcal{F}_0$ pedig a maradékot.

Első lépésként megmutatjuk, hogy ∂K lapos része felett nagyon kevés él van a görbülő részhez képest. A következő egyenlőtlenségsorozatot a 2.5.7. és a 2.5.5. lemmák alkalmazásával kaphatjuk.

$$\begin{aligned} \delta_H(P_n^c, K) &\geq (1 - O(\varepsilon)) \max_{C \in \widehat{\mathcal{C}}} \max_{F \in \mathcal{C}_C} \max_{y \in \Pi_F} (\tfrac{1}{2}\, Q_{x_C}(y - a_F) - \alpha_F) \\ &\geq (1 - O(\varepsilon)) \cdot \max_{C \in \widehat{\mathcal{C}}} \max_{F \in \mathcal{C}_C} \frac{\kappa^{1/2}(x_C) \cdot A(\Pi_F)}{k_F} \\ &\geq (1 - O(\varepsilon)) \cdot \left(\max_{C \in \widehat{\mathcal{C}}} \max_{F \in \mathcal{C}_C \cap F_+} \frac{\kappa^{1/2}(x_C) \cdot A(\Pi_F)}{k_F} \right). \end{aligned} \tag{2.34}$$

Most először használjuk fel a korábban bizonyított 2.7.2. lemmát, majd alkalmazzuk a 2.7.1. lemmát, mely szerint az inetgrál közelítő összegünk ε pontosságú:

$$\max_{C\in\widehat{\mathcal{C}}}\max_{F\in\mathcal{C}_C\cap F_+}\frac{\kappa^{1/2}(x_C)\cdot A(\Pi_F)}{k_F}\geq$$
$$\geq (1-O(\varepsilon))\cdot\frac{\sum_{C\in\widehat{\mathcal{C}}}\sum_{F\in\mathcal{C}_C\cap\mathcal{F}_+}(\kappa^{1/2}(x_C)\cdot A(\Pi_F))}{\sum_{C\in\widehat{\mathcal{C}}}\sum_{F\in\mathcal{C}_C\cap\mathcal{F}_+}k_F}\geq$$
$$\geq (1-O(\varepsilon))\int_{\partial K}\kappa^{1/2}(x)\,\mathrm{d}x\cdot\frac{1}{2n_+},$$

ahol n_+ éppen az $\mathcal{F}_+$-ban lévő élek száma. (Vegyük észre, hogy a nevezőben lévő szummában az éleket valóban kétszer számoljuk, kivéve néhány esetet, de ezektől a becslés helyes marad.) A kapott eredményt (2.33)-tal összevetve nyerjük, hogy ha $b_n<\varepsilon$, akkor $n_+>(1-O(\varepsilon))n$.

Jegyezzük meg, hogy minden $F\in\mathcal{F}_+$ lapra, egyértelműen létezik $x_F\in\partial K$ pont úgy, hogy $u(x_F)$ külső normális az F lapnak is külső normálisa, és Q_{x_F} pozitív definit.

A következő becslés tartalmazza a bizonyítás legfontosabb ötletét. Már láttuk, hogy $n_+>(1-O(\varepsilon))n$, ha n elég nagy. Ebből és a 2.2.1. tételben kimondott, már többször hivatkozott, (2.3) aszimptotikus formulából következően "körbemehetünk" a becslésünkkel. Ha n elég nagy, akkor a következő teljesül:

$$\max_{C\in\widehat{\mathcal{C}}}\max_{F\in\mathcal{C}_C\cap F_+}\frac{\kappa^{1/2}(x_C)\cdot A(\Pi_F)}{k_F}\geq (1-O(\varepsilon))\int_{\partial K}\kappa^{1/2}(x)\,\mathrm{d}x\cdot\frac{1}{2n_+}\geq$$
$$\geq (1-O(\varepsilon))\max_{C\in\widehat{\mathcal{C}}}\max_{F\in\mathcal{C}_C\cap\mathcal{F}_+}\max_{y\in\Pi_F}\left(\tfrac{1}{2}\,Q_{x_C}(y-a_F)-\alpha_F\right). \tag{2.35}$$

Osszuk tovább a $\mathcal{F}_+$-ben lévő lapokat két újabb osztályba. Tartalmazza $\mathcal{F}_{nsq}\subseteq\mathcal{F}_+$ azokat az $F\in\mathcal{F}_+$ elemeket, amelyekre

$$\max_{y\in\Pi_F}(\tfrac{1}{2}\,Q_{x_C}(y-a_F)-\alpha_F)\geq(1+\sqrt[3]{\varepsilon})\cdot\frac{1}{k_F}\cdot A(\Pi_F)\kappa^{1/2}(x_C),$$

és legyen $\mathcal{F}_{sq}=\mathcal{F}_+\setminus\mathcal{F}_{nsq}$, a másik osztály. A 2.5.5. lemma (2.10) pontjával összevetve láthatjuk, hogy az $\mathcal{F}_{sq}$-beli elemek már $O(\sqrt[12]{\varepsilon})$-közel vannak egy Q_{x_C}-négyzethez. (Végig éltünk a feltevéssel, hogy F C "felett" van.)

Folytassuk (2.35) becsléseit! Alkalmazzuk ismét 2.5.5. lemmát, valamint használjuk fel $\mathcal{F}_{sq}$ és $\mathcal{F}_{nsq}$ definícióit:

$$\max_{C\in\widehat{\mathcal{C}}}\max_{F\in\mathcal{C}_C\cap\mathcal{F}_+}\max_{y\in\Pi_F}(\tfrac{1}{2}\,Q_{x_C}(y-a_F)-\alpha_F)\geq$$
$$\geq\max(\max_{C\in\widehat{\mathcal{C}}}\max_{F\in\mathcal{C}_C\cap\mathcal{F}_{sq}}\frac{\kappa^{1/2}(x_C)\cdot A(\Pi_F)}{k_F},$$
$$,\max_{C\in\widehat{\mathcal{C}}}\max_{F\in\mathcal{C}_C\cap\mathcal{F}_{nsq}}(1+\sqrt[3]{\varepsilon})\cdot\frac{\kappa^{1/2}(x_C)\cdot A(\Pi_F)}{k_F})$$

Ezt összevetve (2.35)-val, a 2.7.2. lemma kétszeri alkalmazásával a következőket nyerjük:

$$\max_{C\in\widehat{\mathcal{C}}}\max_{F\in\mathcal{C}_C\cap F_+}\frac{\kappa^{1/2}(x_C)\cdot A(\Pi_F)}{k_F}\geq$$

$$\geq(1-O(\varepsilon))\max\Big(\frac{\sum_{C\in\widehat{\mathcal{C}}}\sum_{F\in\mathcal{C}_C\cap\mathcal{F}_{sq}}(\kappa^{1/2}(x_C)\cdot A(\Pi_F))}{\sum_{C\in\widehat{\mathcal{C}}}\sum_{F\in\mathcal{C}_C\cap\mathcal{F}_{sq}}k_F},$$

$$,\frac{\sum_{C\in\widehat{\mathcal{C}}}\sum_{F\in\mathcal{C}_C\cap\mathcal{F}_{nsq}}(\kappa^{1/2}(x_C)\cdot A(\Pi_F))}{(1-\sqrt[4]{\varepsilon})\sum_{C\in\widehat{\mathcal{C}}}\sum_{F\in\mathcal{C}_C\cap\mathcal{F}_{nsq}}k_F}\Big).$$

Indirekt tegyük fel, hogy

$$2n_{nsq}:=\sum_{C\in\widehat{\mathcal{C}}}\sum_{F\in\mathcal{C}_C\cap\mathcal{F}_{nsq}}k_F>2n_+\sqrt[4]{\varepsilon}.$$

Újból a 2.7.2. lemmát használva következik, hogy

$$\max_{C\in\widehat{\mathcal{C}}}\max_{F\in\mathcal{C}_C\cap F_+}\frac{\kappa^{1/2}(x_C)\cdot A(\Pi_F)}{k_F}\geq$$

$$(1-O(\varepsilon))\frac{\sum_{C\in\widehat{\mathcal{C}}}\sum_{F\in\mathcal{C}_C\cap\mathcal{F}_+}(\kappa^{1/2}(x_C)\cdot A(\Pi_F))}{2n_{sq}+(1-\sqrt[4]{\varepsilon})2n_{nsq}}$$

$$\geq(1+\sqrt[3]{\varepsilon})(1-O(\varepsilon))\frac{\sum_{C\in\widehat{\mathcal{C}}}\sum_{F\in\mathcal{F}_+}A(\Pi_F)}{2n_+}$$

Ez pedig nyilvánvaló ellentmondás, hiszen $(1+\sqrt[3]{\varepsilon})(1-O(\varepsilon))>1$, ha ε elég kicsi. Ezért beláttuk, hogy $n_{nsq}<\sqrt[4]{\varepsilon}n_+$, ebből pedig $|\mathcal{F}_{nsq}|<\sqrt[4]{\varepsilon}|\mathcal{F}_+|$ azonnal adódik.

Az $\mathcal{F}_{sq}$ halmaz definíciója szerint tudjuk, hogy minden $F\in\mathcal{F}_{sq}$ esetén

$$\max_{y\in\Pi_F}(\tfrac{1}{2}\,Q_{x_C}(y-a_F)-\alpha_F)\leq(1+\sqrt[3]{\varepsilon})\cdot\frac{1}{k_F}\cdot A(\Pi_F)\kappa^{1/2}(x_C).$$

Vagyis a 2.5.5. lemma (2.10) pontjának feltételei teljesülnek, és így minden $F\in\mathcal{F}_{sq}$-ra Π_F $\sqrt[12]{\varepsilon}$-közel van egy Q_{x_C}-négyzethez. Továbbá, ha ε elég kicsi, akkor a 2.5.5. lemma (2.9) egyenlőtlenségéből következik, hogy $\mathcal{F}_{sq}$-ban csak négyszögek vannak, vagyis minden $F\in\mathcal{F}_{sq}$ esetén $k_F=4$.

Megmutatjuk, hogy minden $F\in\mathcal{F}_{sq}$ egy Q_{x_F}-négyzethez is közel van. Ehhez elég utalnunk (2.5) és (2.6) pontokra a 2.5.4. lemmában, és a 2.5.1., 2.5.2. és 2.5.3. állításokra. Ezekből az eredmény rögtön következik.

Végül rátérünk a területekre. Már beláttuk, hogy majdnem minden lap $\mathcal{F}_{sq}$-ban van. $\mathcal{F}_{sq}$-t tovább bontjuk két részhalmazára. Az egyszerűség kedvéért vezessük be a

$$T=\max_{C\in\widehat{\mathcal{C}}}\max_{F\in\mathcal{C}_C\cap\mathcal{F}_{sq}}\kappa^{1/2}(x_C)A(\Pi_F)$$

jelölést. Legyen tehát

$$\mathcal{F}_M = \{F \in \mathcal{F}_{sq} : \kappa^{1/2}(x_C)A(\Pi_F) > (1-\sqrt[4]{\varepsilon})T, F \in \mathcal{C}_C\}$$

és $\mathcal{F}_N = \mathcal{F}_{sq} \backslash \mathcal{F}_M$. Indirekt tegyük fel, hogy $|\mathcal{F}_N| > (1-\sqrt[4]{\varepsilon})|\mathcal{F}_{sq}|$.

Egyrészt vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned}\frac{\sum_{C\in\widehat{\mathcal{C}}}\sum_{F\in\mathcal{C}_C\cap\mathcal{F}_{sq}}(\kappa^{1/2}(x_C)\cdot A(\Pi_F))}{|\mathcal{F}_{sq}|} &\leqq \frac{|\mathcal{F}_M|T+|\mathcal{F}_N|(1-\sqrt[4]{\varepsilon})T}{|\mathcal{F}_{sq}|} = \\ = T - \frac{|\mathcal{F}_N|}{|\mathcal{F}_{sq}|}T\sqrt[4]{\varepsilon} &\leqq (1-\sqrt{\varepsilon})T.\end{aligned}$$

Másrészről

$$\begin{aligned}&\frac{\sum_{C\in\widehat{\mathcal{C}}}\sum_{F\in\mathcal{C}_C\cap\mathcal{F}_{sq}}(\kappa^{1/2}(x_C)\cdot A(\Pi_F))}{4|\mathcal{F}_{sq}|} = \\ &= \frac{\sum_{C\in\widehat{\mathcal{C}}}\sum_{F\in\mathcal{C}_C\cap\mathcal{F}_{sq}}(\kappa^{1/2}(x_C)\cdot A(\Pi_F))}{\sum_{C\in\widehat{\mathcal{C}}}\sum_{F\in\mathcal{C}_C\cap\mathcal{F}_{sq}}k_F} \geqq \\ &\geqq (1-O(\varepsilon))\int_{\partial K}\kappa^{1/2}(x)\,\mathrm{d}x\cdot\frac{1}{2n} \geqq \\ \geqq (1-O(\varepsilon))\max_{C\in\widehat{\mathcal{C}}}\max_{F\in\mathcal{C}_C\cap\mathcal{F}_{sq}}&\frac{\kappa^{1/2}(x_C)\cdot A(\Pi_F)}{k_F} = \frac{(1-O(\varepsilon))}{4}T.\end{aligned}$$

Ezen két becslés ellentmondó, ha ε elég kicsi. Továbbá a becsléseket rendezve azt kapjuk, hogy

$$\frac{T}{4} \geqq (1-O(\varepsilon))\int_{\partial K}\kappa^{1/2}(x)\,\mathrm{d}x\cdot\frac{1}{2n} \geqq \frac{(1-O(\varepsilon))}{4}T.$$

A 2.5.4. lemmából következik végül, hogy ha $F \in \mathcal{F}_M$, akkor

$$(1+O(\sqrt[4]{\varepsilon}))\cdot\frac{2\int_{\mathcal{K}}\kappa^{1/2}(x)\,\mathrm{d}x}{n\kappa^{1/2}(x_F)} \geq A(F) \geq (1-O(\sqrt[4]{\varepsilon}))\cdot\frac{2\int_{\mathcal{K}}\kappa^{1/2}(x)\,\mathrm{d}x}{n\kappa^{1/2}(x_F)}.$$

Itt kihasználtuk, hogy $\kappa(x_F)$ és $\kappa(x_C)$, valamint $A(F)$ és $A(\Pi_F)$ egymáshoz ε-közel vannak.

Összefoglalva a következőt láttuk be: $\exists\varepsilon_0 : \forall 0 < \varepsilon < \varepsilon_0 : \exists N(\varepsilon) > 0$ úgy hogy, ha $n > N(\varepsilon)$, akkor $\sqrt[4]{\varepsilon}$ rész kivételével a P_n^c politóp minden F lapjára teljesül, hogy egyértelműen létezik egy $x_F \in \partial K$ pont úgy, hogy $u(x_F)$ az F lapnak is külső normálisa; továbbá Q_{x_F} pozitív definit; F $\sqrt[16]{\varepsilon}$-közel van egy Q_{x_F}-szerinti négyzethez, és területe $\sqrt[4]{\varepsilon}$-nyi pontossággal

$$\frac{2\int_{\mathcal{K}}\kappa^{1/2}(x)\,\mathrm{d}x}{n\kappa^{1/2}(x_F)}.$$

Ezzel a tételt a körülírt esetben megmutattuk.

A beírt eset bizonyítása teljesen analóg a fentiekkel. Két apróbb eltérés mutatkozik, egyrészt a 2.5.7. lemma második részét használjuk az első helyett, másrészt a 2.5.6. lemmát alkalmazzuk a 2.5.5. lemma helyett.

2.9. Nyitott problémák

Ebben a szakaszban néhány nyitott problémát gyűjtöttünk össze, melyek eredményeinkhez szorosan kötődnek.

A simasági feltételek gyengítése, mint azt a bevezetőben is említettük, az egyik központi probléma. Itt természetesen vetődik fel, hogy az eredményeink igazak-e még általánosabb feltételek mellett? P. M. Gruber és P. Kenderov [40] már megmutatta, hogy általában a C^1 simaság nem elegendő. Azt mondjuk, hogy a K konvex testnek létezik gördülő gömbje, ha létezik egy $\varrho > 0$ szám, hogy minden $x \in \partial K$ pontot tartalmaz egy olyan ϱ sugarú gömb, amely teljesen K-ban van. D. Hug [41]-ben belátta, hogy K-nak pontosan akkor van gördülő gömbje, ha ∂K C^1 sima, és az u_x, $x \in \partial K$-ban húzott külső normális, x Lipschitz-folytonos függvénye. Speciálisan, ha ∂K C^2 sima, akkor K-nak van gördülő gömbje - ahogy azt már W. Blaschke is észrvette.

2.9.1. nyitott probléma. *Érvényesek-e 2.2.1. és 2.2.2. tételek abban az esetben, ha K határáról nem tesszük fel, hogy C^2 sima, csak annyit, hogy K-nak létezik gördülő gömbje? Általánosabban, igazak maradnak-e a korábban igazolt aszimptotikus eredmények, ha K-ról csak a gördülő gömb létezését tesszük fel?*

Megjegyezzük, hogy az eddig használt bizonyítási technikák nem látszanak alkalmasnak a kérdés megválaszolására.

Tudjuk, hogy aszimptotikus formula létezését nem várhatjuk teljes általánosságban, mégis a következő probléma különösen érdekes.

2.9.2. nyitott probléma. *Igaz-e tetszőleges K 3-dimenziós, konvex testre, hogy*

$$\limsup_{n\to\infty} n \cdot \delta_H(K, P_n^c) \leqq \frac{1}{2} \cdot \int_{\partial K} \kappa^{1/2}(x)\,\mathrm{d}x.$$

A kérdést természetesen bármilyen "approximáció-típusra" felvethetjük. Az ismert pozitív eredmény M. Ludwig [47] nevéhez fűződik, aki a síkban, területapproximáció esetén bizonyított a fentihez hasonló becslést. A bizonyítás egy Hadwiger-típusú tételen múlik. Ezt az eredményt M. Ludwig és M. Reitzner [48]-ben kiterjesztette tetszőleges dimenzióba, azonban ezzel csak a szimmetrikus differencia metrika esetét oldották meg, a fenti probléma a többi metrikában a szerző legjobb tudomása szerint nyitott.

További fontos probléma, amely jelen munkához nagyon szorosan kapcsolódik, hogy folytassuk a "köztes dimenziós" esetek tárgyalását, tehát bizonyítsunk magasabb ($d \geq 4$) dimenziókban is hasonló aszimptotikus formulákat a $1 \leq k \leq d-2$ esetekben. Habár az általunk is használt technika alkalmazásának látszólag nincs akadálya, mégis a probléma geometriája és kombinatorikája meglehetősen nehéznek tűnik.

2.9.3. nyitott probléma. *Bizonyítsunk aszimptotikus formulát $d \geq 4$ dimenzióban, ahol a legjobban közelítő politóp k lapjainak száma korlátozott, valamilyen $1 \leq k \leq d-2$ esetén!*

A tipikus lapok vizsgálatáról magasabb dimenzióban nincs általunk ismert eredmény. A kérdés ettől függetlenül mindenképpen érdeklődésre tarthat számot. Mi most egy más típusú, geometriai jellegű problémát vetünk fel, amelyet már több korábbi munkában is megfogalmaztak. A kitűzés szándékosan nem pontos, minden ebben az irányban tett lépés üdvözlendő lenne.

2.9.4. nyitott probléma. *Értsük meg a legjobban közelítő politópok kevert térfogatainak (lásd 4.2. szakaszt) aszimptotikus viselkedését!*

3. fejezet

Véletlen politópok

3.1. Bevezetés és eredmények

Ebben a szakaszban a fejezet fő eredményeit fogjuk elhelyezni a véletlen poitópok elméletében. A szakasz első felében kiemeltük az elmélet fejlődése szempontjából általunk legfontosabbnak tartott mérföldköveket. A véletlen politópok témakörben több száz tudományos publikáció született, részletesebb történeti áttekintést kaphatunk a [74], [64] és [7] cikkeből valamint a [65] könyvből. A szakasz második részében a fejezet fő eredményeit tárgyaljuk, itt adjuk meg az eredményekhez szorosabban kapcsolódó történeti áttekintést is.

3.1.1. Az elmélet fejlődése

Sylvester négy pont problémája

A véletlen politópok elmélete kialakulásának kezdeteként J. J. Sylvester 1864-ben, a londoni Educational Timesban kitűzött 1941. problémáját ([69]) szokás megjelölni. Mai nyelvezetre körülbelül a következőképp fordítható le a feladat:
Mutassuk meg, hogy annak a valószínűsége, hogy négy, az Euklideszi síkon véletlenül választott pont konvex burka egy háromszög éppen $1/4$*!*
A feladatra számos megoldás érkezett, köztük alig-alig akadt két egyforma. J. J. Sylvester a feladatról írt [70] cikkében megállapította, hogy a kérdés így nem pontos, nincs egyértelmű megoldása. A fenti kitűzéssel a gond az, hogy a síkon nincs természetes valószínűségi mérték, ami szerint a pontokat választhatjuk. J. J. Sylvester újrafogalmazta a kérdést a következőképpen: *Rögzítsünk a síkon egy* K *konvex lemezt. Mi a valószínűsége, hogy négy, a* K*-ból egyenletesen és függetlenül választott véletlen*

pont konvex helyzetben van? Továbbá milyen K esetén lesz ez a valószínűség minimális illetve maximális? Ez a feladat *Sylvester négy pont problémájaként* híresült el, a megoldása már önmagában is nehéz, arra több mint 50 évet kellett várni. W. Blaschke [14] és [15] munkáiban megmutatta, hogy a tárgyalt valószínűség háromszög esetén a legnagyobb, míg körre (illetve tetszőleges ellipszisre) a legkisebb.

Az azóta eltelt másfél évszázad során Sylvester négy pont problémája rendkívül gyümölcsöző kiindulásnak bizonyult, hosszú időre meghatározta a fő kutatási irányokat. (Bárány Imre 2000-es [5] és 2001-es [6] cikkeiben adott aszimptotikus formulát a valószínűségre sima határú K esetén. Legjobb tudomásunk szerint a kérdés abban az esetben, ha K politóp még nyitott.) Sylvester négy pont problémájának természetes általánosítása, hogy 4 pont helyett n pontot tekintünk, illetve tekinthetjük a problémát magasabb dimenzióban is. Így el is jutottunk a véletlen politóp következő fogalmához: Legyen K egy konvex test a d-dimenziós Euklideszi térben. (Konvex test alatt egy konvex, kompakt halmazt értünk, melynek belseje nem üres.) Legyen $x_1, x_2, \ldots, x_n \in K$ n db egymástól függetlenül, az egyenletes eloszlás szerint választott pont K-ból. Az $X_n = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ rendezett halmazt véletlen mintának, a minta $K_n = [X_n]$ konvex burkát a K-ba írt uniform véletlen politópnak nevezzük. A K konvex testet szokás a K_n véletlen politóphoz tartozó anyatestnek is nevezni. A definícióban szereplő egyenletes eloszlás éppen a K-ra megszorított Lebesgue-mérték azon konstansszorosához tartozik, ami K-t 1-gyel méri; így K-n egy valószínűségi mértéket kapunk.
Itt jegyezzük meg, hogy véletlen politópot számos egyéb módon is definiálhatunk, ezeket ebben a dolgozatban nem tárgyaljuk. A más modellek iránt érdeklődő olvasónak ajánljuk R. Schneider 2007-es [64] áttekintő cikkét, valamint R. Schneider és W. Weil [65] nagyszerű könyvét.

A Rényi-Sulanke-féle eredmények

1963-ban Rényi Alfréd és R. Sulanke munkásságának köszönhetően a véletlen politópok kutatásában új, azóta is rohamosan fejlődő fejezet kezdődött. [55], [56] és [57] munkáikban a síkban bizonyítottak K_n viselkedéséről aszimptotikus eredményeket, amint $n \to \infty$. Első, 1963-ban megjelent [55] cikkükben egy K konvex lemezbe írt véletlen poligon csúcsai számának várható értékére adtak aszimptotikus formulát, amint $n \to \infty$, abban az esetben, ha K poligon, illetve ha K határa C^2 sima. Jegyezzük meg, hogy a két esetben, vagyis amikor K poligon, illetve amikor K határa C^2 sima a kapott nagyságrendek eltérnek, és a bizonyításokban használt gondolatmenetek is lényegesen különböznek. Megismételjük, hogy egy $K \in \mathcal{K}^d$ konvex test ∂K határa C^k sima, ha ∂K egy k-szor folytonosan differenciálható $(d-1)$-dimenziós sokaság, vagyis bármely $x \in \partial K$ határpontnak van egy környezete, melyben ∂K egy k-szor folytonosan differenciálható függvény grafikonja. Továbbá, ha ∂K C^k sima ($k \geq 2$), és a Gauss-féle szorzatgörbület minden pontban szigorúan pozitív, akkor C^k_+ simaságról beszélünk. Már ennél a legelső eredménynél világossá vált, hogy lényeges eltérés mutatkozik a két eset közt, amikor K politóp, illetve amikor K határa sima.

Egy évvel később, [56]-ben Rényi Alfréd és R. Sulanke megoldott egy rokon problémát, meghatározták az uniform véletlen poligon területe várható értékének aszimptotikus viselkedését ($n \to \infty$) akkor, ha K egy négyzet, illetve ha K határa C^2_+ sima. Belátták, hogy ha a K síklemez határa C^2_+ sima, és K_n jelöli a bele írt uniform véletlen poligont, akkor

$$A(K) - \mathbb{E}(A(K_n)) \sim \frac{\Gamma(8/3)}{10} \cdot (12A(K))^{2/3} \cdot \int_{\partial K} \kappa^{1/3}(x)\,\mathrm{d}x \frac{1}{n^{2/3}},$$

ahol $A(\,\cdot\,)$ a területet jelöli, és két sorozatot aszimptotikusan egyenlőnek hívunk, ha $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$, és ezt $f(n) \sim g(n)$ ($n \to \infty$)-nel jelöljük. K határán az ívhossz (1-dimenziós Hausdorff-mérték) szerint inegráltunk, $\Gamma(\,\cdot\,)$ pedig a gamma függvény. Ha K négyzet, akkor a vonatkozó formula így alakul:

$$A(K) - A(K_n) \sim \frac{8}{3} \cdot A(K) \cdot \frac{\ln n}{n}.$$

Láthatjuk, hogy a két viselkedés közt nagyságrendi eltérés van.

Utolsó cikkükben, [57]-ban már a körülírt esettel, vagyis nem az általunk tárgyalt modellel foglalkoztak. Érdekességként megjegyezzük, hogy később kiderült, hogy Rényi Alfréd és R. Sulanke nem tudott Sylvester kérdéséről, illetve a kapcsolódó eredményekről, kutatásaikat inkább egyéb, integrálgeometriai eredmények motiválták. A két problémakör szoros kapcsolatára csak később derült fény.

Rényi Alfréd és R. Sulanke fenti három cikke ([55], [56] és [57]) számtalan további munkát motivált, az elsődleges cél a K_n-t leíró geometriai mennyiségek, főként K_n k-dimenziós lapjai számának ($0 \leq k \leq d-1$), a K anyatesttől vett Hausdorff-távolságnak és a kevert térfogatainak várható értékének meghatározása volt, precízebben szólva, azok aszimptotikus nagyságrendi viselkedésének leírása. Részletes áttekintésre javasoljuk a [35], [64] és [65] munkákat. Jegyezzük meg, hogy a nagyságrendi viselkedések minden probléma esetén lényegesen különböznek sima határú K esetén és abban az esetben, ha K politóp. A következő szakasz erre a jelenségre mélyebb, geometriai magyarázatot ad.

A gazdaságos sapkafedési tétel és az úszótest

1988-ban Bárány Imre és D. G. Larman eredményei az elmélet fejlődésének újabb lökést adtak, ezek pontos megfogalmazásához előbb néhány fogalmat definiálnunk kell. Ha $f(t)$ és $g(t)$ $H \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények, akkor azt mondjuk, hogy $f(t) \ll g(t)$, ha létezik egy olyan c konstans, hogy $|f(t)| \leq c \cdot g(t)$ minden $t \in H$ esetén. A c konstans a mi esetünkben mindig a dimenziótól és a rögzített K konvex testtől függ, hacsak a szövegkörnyezetben másképp nem jelezzük. Ha $f \ll g$ és $g \ll f$, akkor röviden $f \approx g$-t írunk, és azt mondjuk, hogy f és g azonos nagyságrendű. A K d-dimenziós konvex test sapkájának nevezzük a $C = K \cap H_+$ halmazt, ahol H_+ a H hipersíkhoz tartozó zárt féltér. Minden $x \in K$ ponthoz hozzárendelhetjük az őt tartalmazó sapkák közül a minimális térfogatú térfogatát: $v(x) = \min\{\lambda_d(C) \,|\, x \in C \text{ és } C \text{ sapkája } K\text{-nak}\}$. Legyen $t > 0$ valós szám, ekkor a K konvex test t paraméterhez tartozó $K(v(x) \geq t)$ *úszótestjét* úgy kapjuk, hogy "K-ról levágjuk az összes t térfogatú sapkáját", vagyis

$$K(v \geq t) = \{x \in K \,|\, v(x) \geq t\,\}.$$

A K test t paraméterhez tartozó $K(t)$ *vizes része* pedig

$$\begin{aligned} K(t) &= \{x \in K \,|\, \text{létezik } C \text{ sapkája } K\text{-nak, amire } x \in C \text{ és } \lambda_d(C) = t\} \\ &= \{x \in K \,|\, v(x) \leq t\,\}. \end{aligned}$$

Ezen elnevezés hátterében az a szemléletes tény áll, hogy ha az egység térfogatú K testbe beletöltünk t egységnyi vizet, akkor éppen a vizes rész pontjai kerülhetnek víz alá, ha K-t megfelelő helyzetben tartjuk.

Bárány Imre és D. G. Larman [11] azt igazolta, hogy minden K egységnyi térfogatú konvex test esetén

$$\mathbb{E}(\lambda_d(K \backslash K_n)) \approx \lambda_d(K(1/n)), \tag{3.1}$$

ahol mindkét oldalt az n pozitív egész függvényeként tekintjük, $\mathbb{E}(\,\cdot\,)$ pedig a várható értéket jelöli. A tétel azt állítja tehát, hogy a K_n által K-ból nem fedett rész térfogatának (ami éppen K és K_n testek szimmetrikus differencia távolsága) várható értéke nagyságrendileg úgy viselkedik, mint az $1/n$-hez tartozó vizes rész térfogata. Ezen tétel ereje abban rejlik, hogy minden konvex testre igaz, így a bal oldalon szereplő mennyiség nagyságrendjének kiszámítását visszavezettük egy determinisztikus, geometriai problémára.

A fenti eredmény Bárány Imre és D. G. Larman [11] és Bárány Imre [2] gazdaságos sapkafedési tételén múlik. A gazdaságos sapkafedési tétel lényegében azt állítja, hogy tetszőleges K konvex test vizes részét le lehet fedni nem túl nagy sapkákkal, úgy hogy nem használunk el sok sapkát.

3.1.1. Tétel (Gazdaságos sapkafedési tétel, [11] Bárány, Larman). *Legyen $K \in \mathcal{K}^d$ egységnyi térfogatú konvex test és $0 < \varepsilon < (2d)^{-2d}$ pozitív valós szám. Ekkor léteznek K-nak $C_1, C_2, \ldots, C_m$ sapkái, és $C'_1, C'_2, \ldots, C'_m$ konvex halmazok úgy, hogy a következők mindegyike teljesül:*

i) minden $i = 1, \ldots, m$ esetén $C'_i \subset C_i$,

ii) $\cup_1^m C'_i \subset K(\varepsilon) \subset \cup_1^m C_i$,

iii) minden $i = 1, \ldots, m$ esetén $\lambda_d(C_i) \ll \varepsilon$ és $\lambda_d(C'_i) \gg \varepsilon$,

iv) minden ε térfogatú C sapkát tartalmaz egy alkalmas C_i sapka.

A gazdaságos sapkafedési tétel a 3. fejezet egyik főeredményének, a 3.1.5. tételnek a bizonyításában kulcsfontosságú.

3.1.2. Új eredmények és a kapcsolodó történeti előzmények

Véletlen politópok átlagszélességének várható értékéről

Legyen L egy d-dimenziós konvex test, és tegyük fel, hogy az origó L belsejében van: $o \in L$. Az L test $u \in S^{d-1}$ irányú szélességén az $w_L(u) = h_L(u) + h_L(-u)$ mennyiséget értjük. Jelöljük továbbá $W(\cdot)$-vel az átlagszélességet, vagyis

$$W(L) = \frac{2}{d\kappa_d} \int_{S^{d-1}} h_L(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{d\kappa_d} \int_{S^{d-1}} w_L(u)\,\mathrm{d}u.$$

Itt κ_d a d-dimenziós B^d egységgömb térfogatát, míg S^{d-1} a határát, vagyis a $(d-1)$-dimenziós szférát jelöli; h_L az L test támaszfüggvénye. (Bővebben a kevert térfogatokról, speciálisan az átlagszélességről is 4.2. szakaszban írunk.) Az átlagszélesség tehát valóban nem más, mint az L összes irányú szélességeinek átlaga. Itt jegyezzük meg, hogy egy adott k-dimenziós konvex test határán mindig a megfelelő, $(k-1)$-dimenziós Hausdorff-mérték szerint integrálunk, ezt külön sehol nem jelöljük. (A Hausdorff-mértékről a 4.3. szakaszban írunk bővebben.)

Legyen $K \in \mathcal{K}^d$ egységnyi térfogatú konvex test. Jelöljük K_n-nel a K-ba írt uniform véletlen politópot, vagyis legyenek $x_1, x_2, \ldots, x_n \in K$ egymástól függetlenül, az egyenletes eloszlás szerint választott véletlen pontok K-ban, $K_n = [x_1, \ldots, x_n]$ pedig ezen pontok konvex burka. R. Schneider 1987-ben [60] cikkében bizonyította, hogy

$$n^{\frac{-2}{d+1}} \ll W(K) - \mathbb{E}(W(K_n)) \ll n^{\frac{-1}{d}}. \tag{3.2}$$

Emlékeztetünk rá, hogy a $\ll$ jelölésben lévő konstansok K-tól és d-től függenek. A (3.2) formulában a felső korlát akkor optimális, ha K politóp. Sima határú konvex testekre a (3.2) formulában szereplő becsléseknél lényegesen többet állíthatunk. Ha a K test határa C^3_+ sima, akkor R. Schneider és W. Weil [66] munkájában igazolta a következő aszimptotikus formulát:

$$W(K) - \mathbb{E}W(K_n) \sim \frac{2\Gamma(\frac{2}{d+1})}{d(d+1)^{\frac{d-1}{d+1}}\kappa_d\kappa_{d-1}^{\frac{2}{d+1}}} \int_{\partial K} \kappa(x)^{\frac{d+2}{d+1}}\,\mathrm{d}x \cdot \frac{1}{n^{\frac{2}{d+1}}}, \tag{3.3}$$

ahol $\kappa(\,\cdot\,)$ az adott pontbeli Gauss-görbületet jelöli, ∂K-n a $(d-1)$-dimenziós Hausdorff-mérték szerint integrálunk. Két sorozatot aszimptotikusan egyenlőnek hívunk, ha $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$, és ezt $f(n) \sim g(n)$ $(n \to \infty)$-nel jelöljük.

M. Reitzner [53] munkájában igazolta, hogy (3.3) aszimptotikus formula abban az esetben is teljesül ha K határáról csak C^2_+ simaságot tételezünk fel. A 3.1.2. tételünkben tovább bővitjük (3.3) aszimptotikus formula érvényességi körét, kiterjesztve ezzel M. Reitzer korábbi tételét. Ehhez előkészületként definiáljuk a gördülő gömb fogalmát. Azt mondjuk, hogy a K konvex testnek létezik *gördülő gömbje*, ha létezik egy $\varrho > 0$ szám, hogy minden $x \in \partial K$ pontot tartalmaz egy olyan ϱ sugarú gömb, mely teljesen K-ban van. D. Hug [41]-ben belátta, hogy K-nak pontosan akkor van gördülő gömbje, ha ∂K C^1 sima, és az $u(x)$, $x \in \partial K$-hez tartozó külső normális, x Lipschitz-folytonos függvénye. Speciálisan, ha ∂K C^2 sima, akkor K-nak van gördülő gömbje - ahogy azt már W. Blaschke is észrevette.

A következő tétel a szerző ifj. Böröczky Károllyal, Fodor Ferenccel és Matthias Reitznerrel közös [20] cikkének egyik eredménye.

3.1.2. Tétel ([20] Böröczky, Fodor, Reitzner, Vígh)**.** *A (3.3) aszimptotikus formula tetszőleges olyan K egységnyi térfogatú konvex testre teljesül, melynek létezik gördülő gömbje:*

$$W(K) - \mathbb{E}W(K_n) \sim \frac{2\Gamma(\frac{2}{d+1})}{d(d+1)^{\frac{d-1}{d+1}}\kappa_d\kappa_{d-1}^{\frac{2}{d+1}}} \int_{\partial K} \kappa(x)^{\frac{d+2}{d+1}}\,\mathrm{d}x \cdot \frac{1}{n^{\frac{2}{d+1}}}. \tag{3.4}$$

A 3.1.2. tétel állítása optimális abban az értelemben, hogy a ∂K-ra tett simasági feltétel már lényegesen nem gyengíthető. A következő [20]-ből származó példában megadunk egy K konvex testet, melynek határa mindenütt C^1 sima és egyetlen pont kivételével C^∞_+ is, de a (3.3) formula nem teljesül K-ra.

3.1.3. Példa ([20] Böröczky, Fodor, Reitzner, Vígh). *Legyen $K \in \mathcal{K}^d$ d-dimenziós konvex test amire a következők teljesülnek: $o \in \partial K$, ∂K C^∞_+ sima minden $\partial K \backslash o$ pontban, valamint az $f(x) = \|x\|^{\frac{3d+1}{3d}}$ függvény $\mathbb{R}^{d-1} \cap B^d$ halmazon vett grafikonja része ∂K-nak. Ekkor $\mathbb{E}(W(K) - W(K_n)) \geq \gamma\, n^{\frac{-4d}{3d^2+1}}$ ahol $\gamma > 0$ csak d-től függ, és $\frac{4d}{3d^2+1} < \frac{2}{d+1}$.*

Összehasonlításképpen néhány példát adunk arra, hogy mi ismert K_n térfogatának ill. tetszőleges kevert térfogatának várható értékéről. Bárány Imre és D. G. Larman [11] cikkükben igazolták K_n térfogatának várható értékéről, hogy léteznek $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ K-tól függő konstansok úgy, hogy minden K-ra teljesül, hogy

$$\gamma_1 n^{-1} (\log n)^{d-1} < \lambda_d(K) - \mathbb{E}\lambda_d(K_n) < \gamma_2 n^{-2/(d+1)}. \tag{3.5}$$

Itt, (3.2) formulával ellentétben, az alsó korlát politópokra optimális, míg a felső korlát sima határú konvex testekre. 1993-ban Bárány Imre és Ch. Buchta [8] munkájukban aszimptotikus formulát igazolt a térfogatkülönbség várható értékére, abban az esetben, ha az anyatest K politóp.

Sima határú konvex testekre először Bárány Imre [3] igazolta a vonatkozó aszimptotikus formulát K_n minden kevert térfogatára (lásd 4.2. szakasz), abban az esetben ha K határa C^3_+. Ezt az eredményt M. Reitzner [53] cikkében kiterjesztette C^2_+ határú konvex testekre:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{\lambda_d(K)}\right)^{\frac{2}{d+1}} [V_s(K) - \mathbb{E}\, V_s(K_n)] = c_{d,s} \int_{\partial K} \tau_{d-1}(x)^{\frac{1}{d+1}} \tau_{d-s}(x)\, \mathrm{d}x. \tag{3.6}$$

Itt $V_s(\,\cdot\,)$ az s-edik kevert térfogatot jelöli (lásd 4.2. szakasz), $\tau_j(\,\cdot\,)$ pedig a j-edik normált, elemi szimmetrikus függvénye az adott pontbeli főgörbületeknek. A $c_{d,s} > 0$ konstans csak d-től és s-től függ.

C. Schütt [68] ezt az eredményt a térfogat esetén tovább általánosította, és belátta, hogy (3.6) teljesül, ha azon $x \in \partial K$ pontok $(d-1)$-dimenziós Hausdorff-mértéke pozitív, melyekre $\kappa(x) > 0$.

Véletlen politópok kevert térfogatainak szórásáról

Egészen a legutóbbi időkig a K_n uniform véletlen politópot jellemző geometriai mennyiségek szórását egyáltalán nem sikerült kezelni. W. Weil és J. A. Wieacker 1993-as [74] összefoglaló cikkében azt írta, hogy az egyik fő nyitott probléma a szórások meghatározása. Az első ilyen jellegű eredmény K.-H. Küfer [42] nevéhez fűződik,

$O(n^{-(d+3)/(d+1)})$ felső becslést bizonyított a d-dimenziós egységgömbbe írt uniform véletlen politóp térfogatának szórására.

2003-ban M. Reitzner [52] munkájában áttörést ért el, C^2_+ határú K konvex testbe írt K_n uniform véletlen politóp térfogatának szórására adott aszimptotikus felső becslést:

$$\text{Var } \lambda_d(K_n) \leq c(K)n^{-(d+3)/(d+1)}, \tag{3.7}$$

ahol a $c(K)$ konstans K-tól és a dimenziótól függ, Var $(\,\cdot\,)$ pedig a szórásnégyzetet. Itt jegyezzük meg, hogy az egyszerűség kedvéért formuláinkat mindig a szórásnégyzettel írjuk fel a továbbiakban is, ennek ellenére a szövegben általában egyszerűen a szórást használjuk. (3.7.) bizonyításának alapötlete az Efron-Stein egyenlőtlenség (lásd [27] és [26]) alkalmazása. Jegyezzük meg, hogy ebből a felső becslésből és (3.6) formulából együtt következik a nagy számok erős törvénye K_n térfogatára (lásd 3.1.7. tételt és bizonyítását).

Bárány Imre és M. Reitzner [12] cikkükben bizonyították a (3.7)-tal analóg becslést, ha K politóp. Pontosabban azt, hogy:

$$\text{Var } \lambda_d(K_n) \leq c(K)\frac{1}{n^2}(\log n)^{d-1}, \tag{3.8}$$

ahol a $c(K)$ konstans ismét csak K-tól és a dimenziótól függ.

[54] cikkében M. Reitznernek sikerült illeszkedő alsó becslést is adni K_n térfogatának szórására, abban az esetben, ha K határa C^2_+ sima, vagyis belátta, hogy

$$\text{Var } \lambda_d(K_n) \geq c(K)n^{-(d+3)/(d+1)}. \tag{3.9}$$

Ezt az alsó becslést Bárány Imre és M. Reitzner [12]-ben kiterjesztette tetszőleges K konvex testre a következő formában:

$$\text{Var } \lambda_d(K_n) \gg \frac{1}{n}\lambda_d(K(1/n)). \tag{3.10}$$

Itt $K(1/n)$ a K test $1/n$ paraméterű vizes része.

Az $f_s(K_n)$ véletlen változó, ami éppen a K_n uniform véletlen politóp s-dimenziós lapjainak száma ($s = 0, 1, \ldots, d-1$), szórását a [52]-ben és [12]-ben található módszerekkel szintén lehet becsülni. T. Schreiber és J. E. Yukich [67] figyelemre méltó cikkében pontos aszimptotikus formulát adott Var $f_0(K_n)$-ra abban az esetben, ha K az egységgömb. A módszer a korábbiaktól teljesen eltér. Az eljárást módosítva P. Calka, T. Schreiber és J. E. Yukich [25] minden $V_s(K_n)$ változó szórására aszimptotikus formulát bizonyított, ha az anyatest gömb. A módszer tetszőleges sima határú konvex testre való kiterjesztése egyelőre nem megoldott.

A következő tételekben, melyek ezen fejezet fő eredményei, meghatározzuk K_n tetszőleges kevert térfogata szórásának nagyságrendjét abban az esetben, ha K anyatest határa C^2_+ sima. A bizonyítást részletesen csak abban az esetben végezzük el, ha K az egységgömb, az általános esethez szükséges módosításokat csak vázoljuk. A tételek a szerző ifj. Böröczky Károllyal, Fodor Ferenccel és Matthias Reitznerrel közös [20], valamint Bárány Imrével és Fodor Ferenccel közös [10] munkáiból származnak.

3.1.4. Tétel ([10] Bárány, Fodor, Vígh). *Legyen $B^d \subset \mathbb{E}^d$ a d-dimenziós egységgömb. Legyen továbbá B^d_n a B^d-ből egymástól függetlenül, az egyenletes eloszlás szerint választott n véletlen pont konvex burka. Ekkor minden $s = 1, \ldots, d$ esetén*

$$\operatorname{Var} V_s(B^d_n) \approx n^{-\frac{d+3}{d+1}}, \textit{ amint } n \to \infty. \tag{3.11}$$

3.1.5. Tétel ([10] Bárány, Fodor, Vígh). *Legyen $K \in \mathcal{K}^d$ egy d-dimenziós konvex test, melynek határa C^2_+ sima. Legyen továbbá K_n a K-ból egymástól függetlenül, az egyenletes eloszlás szerint választott n véletlen pont konvex burka. Ekkor minden $s = 1, \ldots, d$ esetén*

$$\operatorname{Var} V_s(K_n) \approx n^{-\frac{d+3}{d+1}}, \textit{ amint } n \to \infty. \tag{3.12}$$

A fenti tételt általánosíthatjuk az átlagszélesség esetére. (Emlékeztetünk rá, hogy a $W(\,\cdot\,)$ átlagszélesség a $V_1(\,\cdot\,)$ kevert térfogat konstansszorosa.) A 3.1.2. tétellel összhangban elegendő feltennünk, hogy K-nak létezik gördülő gömbje.

3.1.6. Tétel ([20] Böröczky, Fodor, Reitzner, Vígh). *Ha $K \in \mathcal{K}^d$ olyan egységnyi térfogatú, d-dimenziós konvex test, melynek létezik gördülő gömbje, akkor a 3.1.5. tételben bevezetett K_n véletlen politóp átlagszélességének szórásnégyzetére*

$$\operatorname{Var} W(K_n) \approx n^{-\frac{d+3}{d+1}}, \textit{ amint } n \to \infty. \tag{3.13}$$

A 3.1.4., a 3.1.5. és a 3.1.6. tételek mindegyikének igazolása két részből áll, igazolnunk kell illeszkedő alsó és felső becsléseket a szórásra. Mint már jeleztük, a 3.1.4. és a 3.1.5. tételek igazolása nagyon hasonló, ezért csak előbbit végezzük el részletesen. A 3.1.6. tételben az alsó korlát megmutatása szintén a 3.1.4. tétel bizonyításával analóg módon történik, ezért ezt ebben a dolgozatban egyáltalán nem fogjuk belátni. A felső korlátok igazolása viszont a 3.1.4. és a 3.1.5. tételek esetén a gazdaságos sapkafedési tételen múlik, míg 3.1.6. tétel esetén integrálgeometriai eszközöket alkalmazunk, ezért ezt mindkét esetben részletezni fogjuk.

A 3.1.5. tételben igazolt felső korlátból és (3.6) formulából következik a nagy számok erős törvénye a K_n uniform véletlen politóp kevert térfogataira:

3.1.7. Tétel ([10] Bárány, Fodor, Vígh). *Legyen $K \in \mathcal{K}^d$ d-dimenziós konvex test, melynek határa C^2_+ sima. Legyen továbbá K_n a konvex burka n K-ból egymástól függetlenül, az egyenletes eloszlás szerint választott véletlen pontnak. Ekkor minden $s = 1, \dots, d$ esetén 1 valószínűséggel teljesül, hogy*

$$\lim_{n\to\infty} (V_s(K) - V_s(K_n)) \cdot n^{\frac{2}{d+1}} = c_{d,s} \cdot \lambda_d(K)^{\frac{2}{d+1}} \int_{\partial K} \tau_{d-1}(x)^{\frac{1}{d+1}} \tau_{d-s}(x)\, \mathrm{d}x. \tag{3.14}$$

Megjegyezzük, hogy a szórásra adott alsó becslések fontos szerepet játszanak az ismert centrális határeloszlás tételek bizonyításában. Bővebb információért javasoljuk [54],[13] és [73] cikkeket.

Felhívnánk a figyelmet arra is, hogy a 3.1.2. és 3.1.6. tételekben szerepel az a feltevés, hogy K egységnyi térfogatú. Ez nem jelent lényeges megszorítást, de sokszor egyszerűsíti a formulákat, mert így K a Lebesgue-mérték és az uniform valószínűségi mérték egybeesik. Ezt a számolásoknál további utalások nélkül ki fogjuk használni. A 3.1.4., 3.1.5 és 3.1.7. tételek esetében ezzel a feltevéssel nem éltünk.

A fejezet hátralevő részében a kimondott tételeinket fogjuk igazolni illetve a fejezet végén csokorba gyűjtöttünk néhány nyitott problémát. A bizonyítások lényegében megegyeznek a [20] és [10] cikkekben leírtakkal.

3.2. A 3.1.2. tétel és a 3.1.3. példa bizonyítása

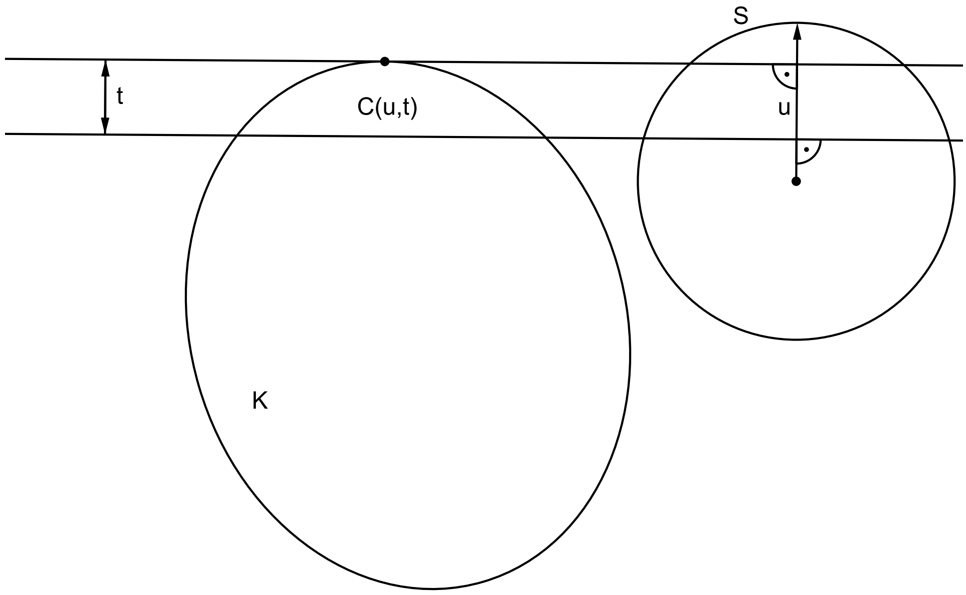
A 3.1.2. tétel és a 3.1.3. példa helyességének igazolásához először R. Schneider és J. A. Wieacker [66] ötletei alapján, integrálgeometriai eszközöket használva a K_n uniform véletlen politóp átlagszélességére egy formulát adunk.

Vezessük be a következő jelölést: $t \geq 0$ és $u \in S^{d-1}$ esetén legyen $C(u,t) = \{x \in K : \langle u, x\rangle \geq h_K(u) - t\}$, vagyis $C(u,t)$ a K testből levágott t mélységű, u normálisú sapkát jelenti. Egy sapka normálisán mindig a definiáló hipersík azon normálisát értjük, amelyik a "sapkába" mutat. A sapka mélységén a definiáló hipersík és a K testhez húzott, u külsőnormálisú támaszhipersík távolságát értjük.

Emlékeztetünk rá, hogy az $x_1, \dots, x_n \in K$ véletlen pontok átal alkotott rendezett mintát $X_n = (x_1, \dots, x_n)$-nel jelöljük. Vezessük be a következő indikátorfüggvényt:

$$\varphi(t, u, X_n) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 \leq t < h_K(u) - h_{K_n}(u) \\ 0, & \text{egyébként .} \end{cases}$$

Másképpen definiálva, rögzített t és u esetén $\varphi(t, u, X_n) = 1$ pontosan akkor teljesül, ha az $x_1, \dots, x_n$ pontok egyike sem esik $C(u,t)$-be, egyébként $\varphi(t, u, X_n) = 0$.



3.1. ábra. $C(u,t)$ sapka

A várható érték definícóját beírva, majd a Fubini tételt alkalmazva nyerjük, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(W(K)-W(K_n)) &= \frac{2}{d\kappa_d}\int_{K^n}\int_{S^{d-1}} h_K(u)-h_{K_n}(u)\;\mathrm{d}u\;\mathrm{d}X_n \\ &= \frac{2}{d\kappa_d}\int_{K^n}\int_{S^{d-1}}\int_0^{w_K(u)} \varphi(t,u,X_n)\;\mathrm{d}t\;\mathrm{d}u\;\mathrm{d}X_n \\ &= \frac{2}{d\kappa_d}\int_{S^{d-1}}\int_0^{w_K(u)} (1-V(C(u,t)))^n\;\mathrm{d}t\;\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Léteznek $\gamma_0, n_0 > 0$ K-tól függő konstansok úgy, hogy $V(C(u,t)) > \frac{3\ln n}{n}$ teljesül minden $n > n_0$, $u \in S^{d-1}$ és $t > \gamma_0(\frac{\ln n}{n})^{\frac{1}{d}}$ esetén. Ezért ha $n > n_0$, akkor

$$\mathbb{E}(W(K)-W(K_n)) = \frac{2}{d\kappa_d}\int_{S^{d-1}}\int_0^{\gamma_0(\frac{\ln n}{n})^{\frac{1}{d}}} (1-V(C(u,t)))^n\;\mathrm{d}t\;\mathrm{d}u + O(n^{-3}). \quad (3.15)$$

A 3.1.3. példa helyességének igazolása

Az eddigiek alapján beláthatjuk, hogy a 3.1.3. példában konstruált konvex testre valóban más nagyságrendű lesz az átlagszélességek különbségének várható értéke.

Legyen u_0 a d. bázis vektor ellentettje. $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ mindegyike csupán d-től függő pozitív konstanst fog jelölni. Legyen $f(x) = \|x\|^{1+\alpha}$, ahol $\alpha = \frac{1}{3d}$. Tekintsük a határ $x - f(x)u_0$ pontját, ahol $x \in \mathbb{R}^{d-1} \cap (B^d \backslash o)$, a külső normális az $x - f(x)u_0$ pontban pedig legyen u. Számolással igazolható, hogy $\gamma_1\|x\|^\alpha \leq \|u-u_0\| \leq \gamma_2\|x\|^\alpha$, és ebben a pontban minden főgörbület legalább $\gamma_3\|x\|^{-1+\alpha} \geq \gamma_4\|u-u_0\|^{\frac{-1+\alpha}{\alpha}}$. Legyen $\Xi(n) =$

$S^{d-1} \cap (u_0 + n^{\frac{-\alpha}{d+\alpha}} B^d)$. Ekkor ha n elég nagy, $u \in \Xi(n)$ és $t \leq n^{-\frac{1+\alpha}{d+\alpha}}$, akkor

$$V(C(u,t)) \leq \gamma_5 t^{\frac{d+1}{2}} n^{-\frac{1-\alpha}{d+\alpha} \cdot \frac{d-1}{2}} \leq \gamma_5 n^{-1}.$$

Ebből pedig (a 3.15) alkalmazásával nyerjük, hogy

$$\mathbb{E}(W(K) - W(K_n)) \geq \gamma_6 \int_{\Xi(n)} n^{-\frac{1+\alpha}{d+\alpha}} \, \mathrm{d}u \geq \gamma_7 n^{-\frac{d\alpha+1}{d+\alpha}}$$

. □

A 3.1.2. tétel bizonyítása

A 3.1.2. tétel igazolásához először felelevenítünk néhány definíciót és tételt. A K konvex test ∂K határa általánosított értelemben kétszer differenciálható az $x \in \partial K$ pontban, ha létezik egy Q kvadratikus alak $\mathbb{R}^{d-1}$-n a következő tulajdonságokkal: helyezzük el K-t a térben úgy, hogy $x = o$ pontban érintse $\mathbb{R}^{d-1}$. Ekkor ∂K o egy gömbkörnyezetében egy $\mathbb{R}^{d-1}$-n értelmezett f konvex függvény grafikonja, amelyre

$$f(z) = \tfrac{1}{2} Q(z) + o(||z||^2), \tag{3.16}$$

amint z tart a nullához. Az általánosított Gauss görbületet az x pontban $\kappa(x) = \det Q$ összefüggéssel definiáljuk. Az Alexandrov-tétel (lásd például R. Schneider [61] vagy P. M. Gruber [39]) szerint ∂K az általánosított értelmeben kétszer differenciálható $\mathcal{H}^{d-1}$-majdnem mindenütt.

Legyen tehát K konvex test $\varrho > 0$ sugarú gördülő gömbbel. Emlékeztetünk rá, hogy $u(x)$ jelöli a K-hoz húzott külső normálist egy $x \in \partial K$ pontban. Ha f egy mérhető függvény S^{d-1}-n, akkor [61] monográfia (2.5.30) állítása szerint

$$\int_{S^{d-1}} f(u) \, \mathrm{d}u = \int_{\partial K} f(u(x))\kappa(x) \, \mathrm{d}x. \tag{3.17}$$

Legyen $x \in \partial K$ tetszőleges, ekkor a gördülő gömb létezése miatt teljesül, hogy

$$V(C(u(x),t)) \geq \frac{2\kappa_{d-1}\varrho^{\frac{d-1}{2}} t^{\frac{d+1}{2}}}{d+1} \quad \text{ha } t \in [0,\varrho]. \tag{3.18}$$

Továbbá ha $\kappa(x)$ létezik és pozitív, akkor (3.16)-ből következik, hogy

$$\lim_{t \to 0} t^{-\frac{d+1}{2}} V(C(u(x),t)) = \frac{2^{\frac{d+1}{2}} \kappa_{d-1}}{(d+1)\kappa(x)^{\frac{1}{2}}}. \tag{3.19}$$

A gamma függvénnyel kapcsolatos aszimptotikus formulákra lesz szükségünk, ezeket idézzük most fel E. Artin [1] munkájából. Ha $\alpha > 0$, akkor a béta függvény gamma függvénnyel való előállításából és a Stirling formulából következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha} \int_0^1 \tau^{\alpha-1}(1-\tau)^n \,\mathrm{d}\tau = \lim_{n\to\infty} n^{\alpha} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(n+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)} = \Gamma(\alpha).$$

Valamint ha $\frac{(\alpha+1)\ln n}{n} \leq \tau < 1$, akkor $(1-\tau)^n < e^{-n\tau} \leq n^{-(\alpha+1)}$. Ezért ha $f(n) \in (0,1)$-ra teljesül $f(n) \geq \frac{(\alpha+1)\ln n}{n}$ minden elég nagy n-re, akkor

$$\int_0^{f(n)} \tau^{\alpha-1}(1-\tau)^n \,\mathrm{d}\tau \sim \Gamma(\alpha) n^{-\alpha},$$

amint $n \to \infty$. Legyen $\beta \geq 0$ és $\omega > 0$, ekkor a $\tau = \omega t^{\frac{d+1}{2}}$ helyettesítés után nyerjük, hogy

$$\int_0^{g(n)} t^{\beta}(1-\omega t^{\frac{d+1}{2}})^n \,\mathrm{d}t \sim \frac{2}{(d+1)\omega^{\frac{2(\beta+1)}{d+1}}} \cdot \Gamma\left(\frac{2(\beta+1)}{d+1}\right) n^{-\frac{2(\beta+1)}{d+1}}, \tag{3.20}$$

feltéve, hogy $g(n) \in (0, \omega^{-\frac{2}{d+1}})$ minden n esetén, és $g(n) \geq (\frac{(\alpha+1)\ln n}{\omega n})^{\frac{2}{d+1}}$ minden elég nagy n-re, ahol $\alpha = \frac{2(\beta+1)}{d+1}$.

Rátérünk a 3.1.2. tétel bizonyítására. Válasszuk n_0-t úgy, hogy (3.15) teljesüljön, valamint legyen

$$\theta_n(u) = n^{\frac{2}{d+1}} \frac{2}{d\kappa_d} \int_0^{\gamma_0(\frac{\ln n}{n})^{\frac{1}{d}}} (1 - V(C(u,t)))^n \,\mathrm{d}t,$$

ahol $n > n_0$ és $u \in S^{d-1}$. Ekkor (3.15) szerint kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{2}{d+1}} \mathbb{E}(W(K) - W(K_n)) = \lim_{n\to\infty} \int_{\partial K} \theta_n(u(x))\kappa(x) \,\mathrm{d}x. \tag{3.21}$$

(3.18) és (3.20) ($\beta = 0$ választással) miatt minden $u \in S^{d-1}$ esetén $\theta_n(u) < \gamma$ teljesül alkalmas γ csak K-tól függő konstanssal. Továbbá $\kappa(x) \leq \varrho^{-(d-1)}$ minden $x \in \partial K$ esetén, így alkalmazhatjuk Lebesgue majoráns konvergencia tételét.

Legyen $x \in \partial K$, amelyre $\kappa(x)$ létezik és pozitív. Ekkor minden $\varepsilon \in (0,1)$ esetén (3.19)-ból következik, hogy létezik $t_\varepsilon > 0$ úgy, hogy

$$(1-\varepsilon) \cdot \frac{2^{\frac{d+1}{2}}\kappa_{d-1}}{(d+1)\kappa(x)^{\frac{1}{2}}} \cdot t^{\frac{d+1}{2}} \leq V(C(u(x),t)) \leq (1+\varepsilon) \cdot \frac{2^{\frac{d+1}{2}}\kappa_{d-1}}{(d+1)\kappa(x)^{\frac{1}{2}}} \cdot t^{\frac{d+1}{2}},$$

ha $t \in (0, t_\varepsilon)$. Így (3.20) formulából, $\beta = 0$ választással következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \theta_n(u(x)) = \frac{2\kappa(x)^{\frac{1}{d+1}}\Gamma(\frac{2}{d+1})}{(d+1)^{\frac{d-1}{d+1}} d\kappa_d \kappa_{d-1}^{\frac{2}{d+1}}}.$$

Ebből pedig 3.1.2. tétel a (3.21) alkalmazása után következik.

3.3. A 3.1.6. tétel bizonyítása

Ebben a részben a 3.1.6. tétellel foglalkozunk. Amint már korábban jeleztük, a bizonyításból csak a felső becslést végezzük el. Az alsó becslés a 3.4. szakaszban mutatotthoz hasonlóan történik.

Első eszközünk a becslésben az Efron-Stein egyenlőtlenség (lásd M. Reitzner [52]), ezt a következő formában használjuk:

$$\mathrm{Var} W(K_n) \leq (n+1)\mathbb{E}(W(K_{n+1}) - W(K_n))^2. \tag{3.22}$$

Előre bocsájtjuk még a következő elemi egyenlőtlenséget, amely minden $a \in (0,1)$ esetén fennáll:

$$a(1-a)^n < \frac{2}{n}\left(1-\frac{a}{2}\right)^n. \tag{3.23}$$

A fenti (3.23) formula átszorzással adódik a következő nyilvánvaló egyenlőtlenségekből:

$$\frac{(1-\frac{a}{2})^n}{(1-a)^n} > \left(1+\frac{a}{2}\right)^n > \frac{an}{2}.$$

Valamilyen $t \geq 0$, $u \in S^{d-1}$ és $x_1, \ldots, x_{n+1} \in K$ esetén, legyen $X_{n+1} = (x_1, \ldots, x_{n+1})$, $K_{n+1} = [x_1, \ldots, x_{n+1}]$ és $K_n = [x_1, \ldots, x_n]$. Definiáljuk a következő függvényt:

$$\bar{\varphi}(t, u, X_{n+1}) = \begin{cases} 1, & \text{ha } h_{K_n}(u) \leq t \leq h_{K_{n+1}}(u) \\ 0, & \text{egyébként .} \end{cases}$$

A (3.22) Efron-Stein egyenlőtlenség és a Fubini tétel alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var} W(K_n) &\ll n \int_{K^{n+1}} \left(\int_{S^{d-1}} h_{K_{n+1}}(u) - h_{K_n}(u) \,\mathrm{d}u \right)^2 \mathrm{d}X_{n+1} \\
&= n \int_{K^{n+1}} \int_{S^{d-1}} \int_{S^{d-1}} (h_{K_{n+1}}(u) - h_{K_n}(u)) \\
&\quad \times (h_{K_{n+1}}(v) - h_{K_n}(v)) \,\mathrm{d}v \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}X_{n+1} \\
&= n \int_{K^{n+1}} \int_{S^{d-1}} \int_{S^{d-1}} \int_0^{w_K(v)} \int_0^{w_K(u)} \bar{\varphi}(t, u, X_{n+1}) \\
&\quad \times \bar{\varphi}(s, v, X_{n+1}) \,\mathrm{d}s \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}v \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}X_{n+1} \\
&= n \int_{S^{d-1}} \int_{S^{d-1}} \int_0^{w_K(v)} \int_0^{w_K(u)} V(C(u,t) \cap C(v,s)) \\
&\quad \times (1 - V(C(u,t) \cup C(v,s)))^n \,\mathrm{d}s \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}v \,\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

Rögzített $u \in S^{d-1}$ és $s, t \geq 0$ esetén legyen

$$\Sigma(u, t; s) = \{v \in S^{d-1} : C(u,t) \cap C(v,s) \neq \emptyset\},$$

továbbá ha $v \in \Sigma(u,t;s)$, akkor

$$V_+(u,t;v,s) = \max\{V(C(u,t), V(C(v,s)).$$

Az eddigiekből elég nagy n esetén következik, hogy

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}W(K_n) &\ll n \int_{S^{d-1}} \int_0^{\gamma_0(\frac{\ln n}{n})^{\frac{1}{d}}} \int_0^t \int_{\Sigma(u,t;s)} V_+(u,t;v,s) \\ &\quad \times (1 - V_+(u,t;v,s))^n \,\mathrm{d}v \,\mathrm{d}s \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}u + O(n^{-2}). \end{aligned} \tag{3.24}$$

A (3.24) formula jobb oldalának további becsléséhez szükségünk lesz $\Sigma(u,t;s)$ méretére rögzített $u \in S^{d-1}$-re. Abból, hogy létezik ϱ sugarú gördülő gömb az $x \in C(u,t) \cap \partial K$ pontban következik, hogy $\|u(x) - u\| \leq \sqrt{\frac{2t}{\varrho}}$, ha $t \leq \varrho$. Legyen most $0 < s \leq t \leq \varrho$. Ha $v \in \Sigma(u,t;s)$, akkor $\|v - u\| < 4\varrho^{-\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}}$, és ezért a $(d-1)$-simenziós Hausdorff-mértéke a $\Sigma(u,t;s)$ halmaznak legfeljebb $\gamma t^{\frac{d-1}{2}}$, alkalmas d-től függő $\gamma > 0$ konstanssal. Legyen $\gamma^* = \frac{\kappa_{d-1}\varrho^{\frac{d-1}{2}}}{d+1}$, és becsüljük (3.24)-t. Az első lépésben (3.18)-t majd (3.23)-t alkalmazzuk, második lépésben pedig (3.20) segítségével nyerjük, hogy

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}W(K_n) &\ll n \int_{S^{d-1}} \int_0^{\gamma_0(\frac{\ln n}{n})^{\frac{1}{d}}} \int_0^t \frac{t^{\frac{d-1}{2}}}{n} \left(1 - \gamma^* t^{\frac{d+1}{2}}\right)^n \mathrm{d}s \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}u + O(n^{-2}) \\ &\ll \int_0^{\gamma_0(\frac{\ln n}{n})^{\frac{1}{d}}} t^{\frac{d+1}{2}} \left(1 - \gamma^* t^{\frac{d+1}{2}}\right)^n \mathrm{d}t + O(n^{-2}) \ll n^{-\frac{d+3}{d+1}}. \end{aligned}$$

Ezzel az állítást beláttuk.

3.4. Alsó becslés a kevert térfogatok szórására

Ebben a szakaszban a 3.1.4. tétel egyik felét mutatjuk meg, alsó becslést adunk a B^d egységgömbe írt $K_n = B^d_n$ uniform véletlen politóp s-edik kevert térfogatának szórására. A bizonyítás ötlete a [54] cikkben leírthoz hasonló lesz, vagyis kicsi, független sapkákat adunk meg, és belátjuk, hogy a szórás minden ilyen sapkában nagy. A becslést végül a szórás speciális tulajdonságaiból kapjuk.

Először egy technikai jellegű lemmát igazolunk. $G(d,s)$ a d-dimenziós tér s-dimenziós Grassmann sokaságát jelöli, ν_s a megfelelő Haar-mértéket. (Bővebben lásd a függelék 4.4. szakaszát.)

3.4.1. Lemma. *Rögzített $z \in S^{d-1}$ és elegendően kicsi $\alpha > 0$ esetén*

$$\nu_s\{A \in G(d,s) \,|\, \angle(z,A) \leq \alpha\} \approx \alpha^{d-s}.$$

Bizonyítás. Legyen $L \in G(d, s-1)$ lineáris altér a z vektor $z^{\perp}$ ortogonális komplementerében. Ekkor minden $e \in L^{\perp} \cap S^{d-1}$ esetén, amelyre $\angle(e, z) \leq \alpha$ teljesül, az $A = \operatorname{linspan}(L \cup \{e\})$ altér z-vel bezárt szöge legfeljebb α. Fordítva is világos módon igaz: minden $A \in G(d, s)$ altér írható egy alkalmas L altér és e vektor lineáris burkaként. Elemi számolással igazolható, hogy a ν_s-mértéke ennek a halmaznak $\approx \alpha^{d-s}$. □

Szükségünk lesz a Kubota formulára is (lásd 4.4. szakaszt, vagy [65]-t), amelynek segítségével a kevert térfogatok speciális vetületek térfogataiból kifejezhetők.

$$V_s(K) = c(d, s) \int_{G(d,s)} \lambda_s(K|L) \nu_s(\,\mathrm{d}L), \tag{3.25}$$

ahol $c(d, s)$ konstans csak d-től és s-től függ, $K|L$ pedig a K test L altérre való merőleges vetülete.

Minden $x \in S^{d-1}$ és $t \in (0, 1)$ esetén definiáljuk a $H(x, t) = \{z \mid \langle z, x \rangle = 1 - t\}$ hipersíkot és bevezetjük az $x_t = (1-t)x$ jelölést. Jegyezzük meg, hogy mivel az o középpontú B^d egységgömbbel dolgozunk, ezért minden $x \in S^{d-1}$ pont egyszerre tekinthető B^d egy határpontjának és az abba a pontba húzott egységnyi külső normálisnak. Ezzel a kényelmes egyszerűsítéssel a továbbiakban is élni fogunk. Legyen $C(x, t)$ azon $H(x, t)$ által levágott sapkája B^d-nek, ami a kettő közül kisebb térfogatú. Az x pontot a $C(x, t)$ sapka középpontjának fogjuk nevezni. Világos, hogy $B(x, t) = H(x, t) \cap B^d$ egy $(d-1)$-dimenziós, x_t középpontú gömb. A $B(x, t)$ gömb sugara pedig $\sqrt{t(2-t)}$, amiből következik, hogy

$$(x_t + \sqrt{t}B^d) \cap H(x, t) \subset H(x, t) \cap B^d \subset (x_t + \sqrt{2t}B^d) \cap H(x, t). \tag{3.26}$$

Ebből pedig minden $t \in (0, 1)$ esetén kapjuk, hogy

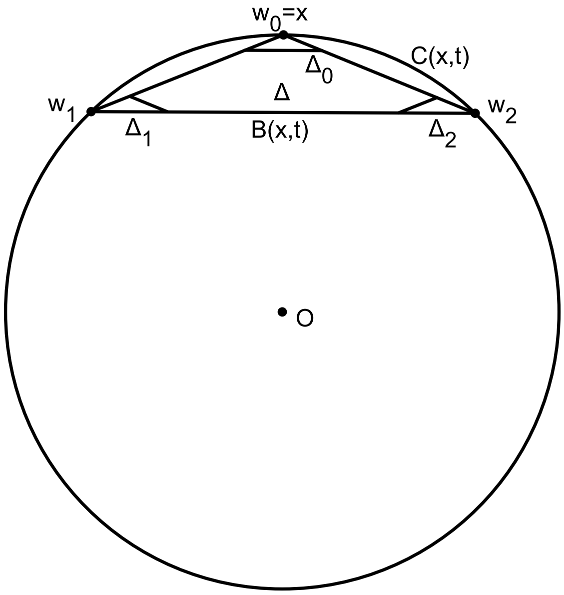
$$C(x, t) \subset x + 2\sqrt{t}B^d. \tag{3.27}$$

A továbbiakban nagyon kicsi t értékekkel fogunk dolgozni (lásd (3.32) később), így minden $\ll$ típusú egyenlőtlenség $t \to 0$ feltevéssel értendő.

Írjunk egy szabályos $(d-1)$-szimplexet $B(x, t)$-be, csúcsait jelöljük $w_1, w_2, \ldots, w_d \in \partial B(x, t)$-vel. A (3.26) összefüggésből következik, hogy a $[w_1, \ldots, w_d]$ szimplex tartalmazza azt a $(d-1)$-dimenziós, $\sqrt{t}/d$ sugarú gömböt, amelynek középpontja x_t. Vezessük be a $w_0 = x$ jelölést is. Így $\Delta = [w_0, w_1, \ldots, w_d]$ egy d-dimenziós szimplex, amelyet tartalmaz a $C(x, t)$ sapka.

Minden $j = 0, 1, \ldots, d$-re definiáljuk a

$$\Delta_j = \Delta_j(x, t) = w_j + \frac{1}{4d}([w_0, w_1, \ldots, w_d] - w_j)$$



3.2. ábra. A Δ_j szimplexek

kis szimplexeket. Δ_j tehát a Δ szimplex w_j-ből, $1/(4d)$ arányban kicsinyített képe.

A (3.26) összefüggésből azonnal adódik, hogy $\lambda_d(\Delta_j(x,t)) \approx t^{\frac{d+1}{2}}$. Válasszunk egy z_j pontot minden $\Delta_j(x,t)$-ből, és legyen

$$\Sigma_1(x,t) = S^{d-1} \cap \left(x + \frac{\sqrt{t}}{8} B^d\right)$$

valamint

$$\Sigma_2(x,t) = S^{d-1} \cap \left(x + 2d\sqrt{t} B^d\right).$$

Legyen $\Delta(z) = [z_0, \ldots, z_d]$ és N pedig a $\Delta(z)$ szimplex z_0 csúcsához tartozó külső normálisainak halmaza (vagyis a z_0 pontbeli normálkúp). A következő állítást fogjuk belátni:

$$\Sigma_1(x,t) \subset S^{d-1} \cap N \subset \Sigma_2(x,t). \tag{3.28}$$

(3.28). bizonyítása. Válasszunk egy tetszőleges $v \in S^{d-1}$-t úgy, hogy $\langle v, x\rangle = 0$ teljesüljön. A Δ_j definíciójából és (3.26) összefüggésből azt kapjuk, hogy

$$\frac{\sqrt{t}}{2d} \le h_{\Delta(z)}(v) - \langle z_0, v\rangle \le 2\sqrt{t},$$

ahol $h_{\Delta(z)}(\,\cdot\,)$ a $\Delta(z)$ támaszfüggvénye. Hasonlóan

$$\frac{t}{2} \le \langle z_0, x\rangle - h_{\Delta(z)}(x) \le t.$$

Ezekből következik, hogy egy extremális u eleme az N normálkúpnak a v irányban ($u = \langle u, x\rangle x + \langle u, v\rangle v$) teljesíti, hogy

$$\frac{\sqrt{t}}{4} \leq \tan(\angle(u, x)) \leq 2d\sqrt{t}.$$

Ebből a (3.28) állítás következik. $\square$

A (3.28) formulából dualizálással kapjuk, hogy :

$$\Sigma_2^*(x,t) \subset \{\lambda(y - z_0) \mid \lambda \geq 0, y \in [z_0, z_1, \ldots, z_d]\} \subset \Sigma_1^*(x,t), \tag{3.29}$$

ahol $\Sigma_j^*(x,t) = \{y \mid \langle y, u\rangle \leq 0, \forall u \in \Sigma_j(x,t)\}$ a szokásos duális kúpja Σ_j-nek. Jegyezzük meg, hogy (3.28) állításból az is következik, hogy létezik egy γ abszolút konstans úgy, hogy

$$B^d \backslash C(x, \gamma t) \subset z_0 + \Sigma_2^*(x,t). \tag{3.30}$$

Rögzítsük x-t, t-t és $z_j \in \Delta_j(x,t)$-t minden $j = 1, \ldots, d$-re. Legyen $F = [z_1, \ldots, z_d]$. Vezessük be a $\hat{V}_s : \Delta_0(x,t) \to \mathbb{R}$ függvényt a következőképpen:

$$\hat{V}_s(z_0) = \int_{L \in G(d,s), L \cap \Sigma_2 \neq \emptyset} \lambda_s([z_0, F]|L)\nu_s(\,\mathrm{d}L).$$

$\hat{V}_s$ természetesen függ F-től, ha ezt a függést külön jelezni szeretnénk, akkor $\hat{V}_s(z_0; F)$-t írunk.

3.4.2. Lemma. *Ha Z a $\Delta_0(x,t)$-ből az egyenletes eloszlás szerint választott véletlen pont, akkor*

$$\mathrm{Var}\,\hat{V}_s(Z) \gg t^{d+1}.$$

Bizonyítás. Legyen w a $\Delta_0(x,t)$ x-szel szemközti lapjának súlypontja, továbbá legyen $w_1 = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}w$ és $w_2 = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}w$. Vezessük be a

$$\begin{aligned}\Psi_1 &= (w_1 - \Sigma_2^*(x,t)) \cap \Delta_0(x,t),\\ \Psi_2 &= (w_2 + \Sigma_2^*(x,t)) \cap \Delta_0(x,t)\end{aligned}$$

jelöléseket. Ekkor létezik egy olyan $\gamma_0 > 0$ konstans, hogy

$$\lambda_d(\Psi_j) \geq \gamma_0 \lambda_d(\Delta_0(x,t)), \tag{3.31}$$

teljesül, és minden $Z_1 \in \Psi_1$ és $Z_2 \in \Psi_2$ esetén $[Z_2, z_1, \ldots, z_d] \subset [Z_1, z_1, \ldots, z_d]$.

Rögzítsünk egy $L \in G(d,s)$ alteret, amelyre $L \cap \Sigma_2 \neq \emptyset$, majd válasszuk ki egy $e_1, \dots, e_s$ ortonormált bázisát a rögzített L alterünknek úgy, hogy $e_1 \in L \cap \Sigma_2$ teljesüljön.

Tekintsük a következő, w_2 és e_1 által adott, zárt félteret : $H_1^+ = \{y \mid \langle y, e_1 \rangle \geq \langle w_2, e_1 \rangle\}$, valamint a $G = H_1^+ \cap (Z_1 + \Sigma_2^*(x,t))$ halmazt. Ekkor $G \subset [F, Z_1]$ és $G \cap [F, Z_2] \subset \{w_2\}$. Ezekből következik, hogy

$$\lambda_s([F,Z_1]|L) - \lambda_s([F,Z_2]|L) \geq \lambda_s(G|L).$$

Mivel

$$\lambda_s(G|L) \gg t \cdot \sqrt{t}^{(s-1)} = t^{\frac{s+1}{2}},$$

ezért

$$\hat{V}_s(Z_1) - \hat{V}_s(Z_2) \gg t^{\frac{s+1}{2}} \cdot \nu_s(\{L \mid L \cap \Sigma_2 \neq \emptyset\}).$$

A Σ_2 halmaz definíciója miatt a $L \cap \Sigma_2 \neq \emptyset$ feltétel ekvivalens azzal, hogy $L \cap (x + 2d\sqrt{t}B) \neq \emptyset$. A 3.4.1. lemmából így következik, hogy

$$\hat{V}_s(Z_1) - \hat{V}_s(Z_2) \gg t^{\frac{d+1}{2}}.$$

Az eddigiek alkalmazásával pedig adódik, hogy

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var} \hat{V}_s(Z) &= \frac{1}{2}\mathbb{E}(\hat{V}_s(Z_1) - \hat{V}_s(Z_2))^2 \geq \\
&\geq \frac{1}{2}\mathbb{E}[(\hat{V}_s(Z_1) - \hat{V}_s(Z_2))^2 \mathbf{1}(Z_1 \in \Psi_1, Z_2 \in \Psi_2)] \gg \\
&\gg t^{d+1}\mathbb{E}[\mathbf{1}(Z_1 \in \Psi_1, Z_2 \in \Psi_2)] \gg t^{d+1},
\end{aligned}$$

ahol az utolsó becslésnél (3.31)-t használtuk. Ezt akartuk bizonyítani. □

Az alsó korlátot elég nagy n-ekre belátni. Legyen

$$t_n = n^{-\frac{2}{d+1}}, \tag{3.32}$$

így $V(C(x,t_n)) \approx 1/n$ minden $x \in S^{d-1}$ esetén. Válasszuk ki $y_1, \dots, y_m \in S^{d-1}$ pontok egy olyan halmazát, ami maximális (telített) a következő tulajdonságra nézve: ha $i \neq j$, akkor

$$\|y_i - y_j\| \geq 2\sqrt{\gamma}\sqrt{t_n}.$$

Ebből következik, hogy a $C(y_j, \gamma t_n)$ sapkák ($j \in [m]$) páronként diszjunktak. A maximalitás miatt

$$m \gg n^{\frac{d-1}{d+1}}. \tag{3.33}$$

Minden $j \in [m]$ esetén jelölje $\Delta(y_j, t_n)$ a már definiált szimplexet a $C(y_j, t_n)$ sapkában, és minden $i = 0, 1, \ldots, d$-re tekintsük a hozzá tartozó kis $\Delta_i(y_j, t_n)$ szimplexeket is. Jelölje A_j $(j \in [m])$ azt az eseményt, hogy minden $\Delta_i(y_j, t_n)$, $i = 0, \ldots, d$ kis szimplex pontosan egy pontot tartalmaz $x_1, \ldots, x_n$ pontok közül, továbbá $C(y_j, \gamma t_n)$ sapka ezeken kívül már nem tartalmaz másik véletlen pontot. Jegyezzük meg, hogy a Δ_i halmazok megadásából, valamint (3.27) és (3.30) tulajdonságokból következik, hogy minden $i = 0, \ldots, d$ esetén

$$V(\Delta_i(y_j, t_n)) \gg 1/n \quad \text{és} \quad V(C(y_j, \gamma t_n)) \ll 1/n.$$

Ebből minden $j = 1, \ldots, m$-re

$$\mathbb{P}(A_j) \gg \binom{n}{d+1} \left(\frac{1}{n}\right)^{d+1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-d-1} \gg 1. \tag{3.34}$$

Ha A_j esemény bekövetkezik, akkor legyen Z_j a $\Delta_0(y_j, t_n)$-be eső véletlen pont, és jelölje F_j azon pontok konvex burkát, amelyek valamilyen $\Delta_i(y_j, t_n)$-be esnek, ahol $i = 1, \ldots, d$. Ha $J \subset [m]$ és A_j bekövetkezik, minden $j \in J$-re, akkor $\hat{V}_s(Z_j; F_j)$ $(j \in J)$ véletlen változók (3.30) miatt egymástól függetlenül járulnak hozzá a szóráshoz.

Vezessük be azt a diszkrét $\mathcal{F}$ szigma algebrát, amit a fenti A_j események generálnak. Tekintsük a $\mathcal{F}$-re vett feltételes szórásnégyzetet, és használjuk ki az ismert tulajdonságait:

$$\begin{aligned} \operatorname{Var} V_s(K_n) &= \mathbb{E} \operatorname{Var}(V_s(K_n) \mid \mathcal{F}) + \operatorname{Var} \mathbb{E}(V_s(K_n) | \mathcal{F}) \\ &\geq \mathbb{E}(\operatorname{Var} V_s(K_n) \mid \mathcal{F}). \end{aligned}$$

Legyen $J \subseteq [m]$ indexhalmaz, és jelölje $A(J)$ azt az eseményt, hogy az A_j események közül pontosan azok következtek be, amelyekre $j \in J$, a többi pedig nem. Ekkor $\operatorname{Var}(V_s(K_n)|\mathcal{F})$ szétbontható a következő összegre:

$$\operatorname{Var}(V_s(K_n)|\mathcal{F}) = \sum_{J \subseteq [m]} \operatorname{Var}((V_s(K_n)|A(J)) \cdot \mathbf{1}(A(J)). \tag{3.35}$$

A fent említett független hozzájárulás miatt, a szórásnégyzetet csak a megfelelő Z_j változóra számolva kapjuk, hogy

$$\operatorname{Var}((V_s(K_n)|A(J)) \gg \sum_{j \in J} \operatorname{Var}_{Z_j} V_s(K_n).$$

Ezt írjuk vissza (3.35)-ba

$$\sum_{J \subseteq [m]} \operatorname{Var}((V_s(K_n)|A(J)) \cdot \mathbf{1}(A(J)) \gg \sum_{J \subseteq [m]} \mathbf{1}(A(J))(\sum_{j \in J} \operatorname{Var}_{Z_j} V_s(K_n)),$$

és rendezzük át úgy, hogy $\mathrm{Var}_{Z_j} V_s(K_n)$ együtthatóját figyeljük:

$$\begin{aligned}\sum_{J\subseteq[m]} \mathbf{1}(A(J))(\sum_{j\in J}\mathrm{Var}_{Z_j} V_s(K_n)) &= \sum_{i=1}^{m}\mathrm{Var}_{Z_i} V_s(K_n)(\sum_{i\in J}\mathbf{1}(A(J)) = \\ &= \sum_{i=1}^{m}\mathrm{Var}_{Z_i} V_s(K_n)\cdot\mathbf{1}(A_i).\end{aligned}$$

Így nyertük, hogy

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\,(V_s(K_n)\,|\,\mathcal{F}) &\gg \sum_{\mathbf{1}(A_j)=1}\mathrm{Var}_{Z_j} V_s(K_n) \\ &\gg \sum_{\mathbf{1}(A_j)=1}\mathrm{Var}_{Z_j} \hat{V}_s(Z_j;F_j).\end{aligned}$$

ahol a szórást a $Z_j \in \Delta_0(y_j,t_n)$ véletlen változóra nézve számoljuk. Felhasználva a 3.4.2. lemmát, valamint a (3.32), (3.33) és (3.34) állításokat azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\,V_s(K_n) &\gg \mathbb{E}\left(\sum_{\mathbf{1}(A_j)=1} t_n^{d+1}\right) \gg n^{-2}\mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{m} I(A_j)\right) \\ &\gg n^{-2}m \gg n^{-\frac{d+3}{d+1}}.\end{aligned}$$

Ezzel az alsó becslést beláttuk.

3.5. Felső becslés a kevert térfogatok szórására

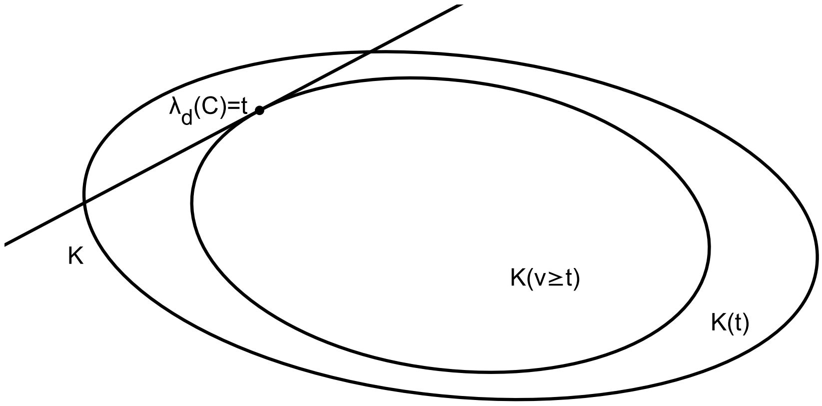
Ebben a szakaszban a 3.1.4. tétel bizonyításának második részét végezzük el, felső korlátot bizonyítunk a $K_n = B_n^d$ egységgömbbe írt uniform véletlen politóp kevert térfogatainak szórására. Emlékezetetünk néhány korábban bevezetett jelölésre, illetve felidézzük a gazdaságos sapkafedési tételt is.

A K d-dimenziós konvex test sapkájának nevezzük a $C = K \cap H_+$ halmazt, ahol H_+ a H hipersíkhoz tartozó zárt féltér. Minden $x \in K$ ponthoz hozzárendelhetjük az őt tartalmazó sapkák közül a minimális térfogatú térfogatát: $v(x) = \min\{\lambda_d(C)\,|\,x \in C$ és C sapkája K-nak$\}$. Legyen $t > 0$ valós szám, ekkor a K konvex test t paraméterhez tartozó $K(v(x) \geq t)$ *úszótestjét* úgy kapjuk, hogy "K-ról levágjuk az összes t térfogatú sapkáját", vagyis

$$\begin{aligned}K(v \geq t) &= \{x \in K\,|\,\text{létezik } C \text{ sapkája } K\text{-nak, amire } x \in C \text{ és } \lambda_d(C) = t\} \\ &= \{x \in K\,|\,v(x) \geq t\}.\end{aligned}$$

A K test t paraméterhez tartozó $K(t)$ *vizes része* pedig

$$K(t) = \{x \in K \,|\, v(x) \le t\,\}.$$



3.3. ábra. Az úszó test és a vizes rész

3.5.1. Tétel (Gazdaságos sapkafedési tétel)**.** *Legyen $K \in \mathcal{K}^d$ egységnyi térfogatú konvex test és $0 < \varepsilon < (2d)^{-2d}$ pozitív valós szám. Ekkor léteznek K-nak $C_1, C_2, \ldots, C_m$ sapkái, és $C'_1, C'_2, \ldots, C'_m$ konvex halmazok úgy, hogy a következők mindegyike teljesül:*

i) minden $i = 1, \ldots, m$ esetén $C'_i \subset C_i$,

ii) $\cup_1^m C'_i \subset K(\varepsilon) \subset \cup_1^m C_i$,

iii) minden $i = 1, \ldots, m$ esetén $\lambda_d(C_i) \ll \varepsilon$ és $\lambda_d(C'_i) \gg \varepsilon$,

iv) minden ε térfogatú C sapkát tartalmaz egy alkalmas C_i sapka.

A gazdaságos sapkafedési tétel egy nyilvánvaló következménye, hogy

$$m \cdot \varepsilon \ll \lambda_d(K(\varepsilon)) \ll m \cdot \varepsilon.$$

Kiszámítható a B^d d-dimenziós egységgömb vizes részének térfogata is:

$$\lambda_d(B^d(\varepsilon)) \approx \varepsilon^{\frac{d+1}{2}}.$$

Legyen tehát $K = B^d$ az egységgömb és K_n a bele írt uniform véletlen politóp. Legyen T_n az az esemény, hogy a $K(v \ge (c \log n)/nV(K))$ úszotestet tartalmazza K_n. Itt $c = c_d$ egy nagy konstans, amelyet később választunk meg. T_n^c a T_n esemény komplementerét jelöli. A [9] cikk fő eredményére hivatkozunk, amely szerint létezik egy

δ konstans, amely csak a d dimenziótól függ úgy, hogy T_n^c esemény bekövetkezésének valószínűsége legfeljebb $n^{-\delta c}$.

Az Efron-Stein egyenlőtlenség (3.22) és a Kubota formula (3.25) alkalmazásával kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\,(V_s(K_n)) &\ll n\cdot\mathbb{E}(V_s(K_{n+1})-V_s(K_n))^2\\ &= n\cdot\mathbb{E}[(V_s(K_{n+1})-V_s(K_n))^2\mathbf{1}(T_n)]\\ &+ n\cdot\mathbb{E}[(V_s(K_{n+1})-V_s(K_n))^2\mathbf{1}(T_n^c)].\end{aligned}$$

A második tag ebben az összegben tetszőlegesen kicsi, ha a c konstanst elegendően nagyra választjuk, mivel $(V_s(K_{n+1})-V_s(K_n))^2\le V_s(K_{n+1})^2\le V_s(K)^2$ és $\mathbb{E}(\mathbf{1}(T_n^c))\le n^{-\delta c}$. Válasszuk tehát a $c=c_d$ konstanst olyan nagyra, hogy a második tag nagyságrendje a 3.1.4. tétel 3.4. szakaszban már bizonyított alsó korlátjánál kisebb legyen. Ezek után elegendő az első taggal foglalkoznunk:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\,(V_s(K_n)) &\ll n\cdot\mathbb{E}[(V_s(K_{n+1})-V_s(K_n))^2\mathbf{1}(T_n)]\\ &\ll n\cdot\mathbb{E}\left[\left(\int_{G(d,s)}\lambda_s(K_{n+1}\backslash K_n|A)\nu_s(\,\mathrm{d}A)\right)\times\right.\\ &\qquad\left.\times\left(\int_{G(d,s)}\lambda_s(K_{n+1}\backslash K_n|B)\nu_s(\,\mathrm{d}B)\mathbf{1}(T_n)\right)\right]\\ &\ll n\cdot\mathbb{E}\int_{G(d,s)}\int_{G(d,s)}\lambda_s(K_{n+1}\backslash K_n|A)\times\\ &\qquad\times\lambda_s(K_{n+1}\backslash K_n|B)\mathbf{1}(T_n)\nu_s(\,\mathrm{d}A)\nu_s(\,\mathrm{d}B).\end{aligned}\tag{3.36}$$

Emlékeztetünk rá, hogy itt $G(d,s)$ a Grassmann sokaság, $\nu(\,\cdot\,)$ a megfelelő Haar mérték, $K|A$ pedig a K A-ra vett merőleges vetülete.

Jegyezzük meg, hogy a $(K_{n+1}\backslash K_n)|A$ halmaz vagy üres (ha $x_{n+1}|A\in K_n|A$), vagy olyan szimplexek uniója, amelyek belsejei páronként diszjunktak, és úgy állnak elő, mint a konvex burka az $x_{n+1}|A$ pontnak és a $K_n|A$ azon lapjainak, amelyek látszanak $x_{n+1}|A$ pontból. Az $I=\{i_1,\dots,i_s\}\subset\{1,\dots,n\}$ indexhalmazra legyen $F_I=[x_{i_1},\dots,x_{i_s}]$, ami egy $(s-1)$-dimenziós szimplex 1 valószínűséggel. Világos, hogy $F_I|A$ is egy $(s-1)$-dimenziós szimplex 1 valószínűséggel. Az F_I halmaz affin burkát $\mathrm{aff}\,F_I$ jelöli, hasonlóan az $F_I|A$ affin burkát pedig $\mathrm{aff}\,(F_I|A)$. Továbbá legyen $H_0(F_I,A)$ az a zárt féltér ($\mathbb{R}^d$-ben), amelyet az $A^\perp+\mathrm{aff}\,F_I$ hipersík határol, és amely tartalmazza o-t, $H_+(F_I,A)$ pedig jelölje a komplementerének lezártját. Hasonlóan használjuk a $H_0(F_I|A)$ és $H_+(F_I|A)$ jelöléseket a megfelelő s-dimenziós A-ban levő félterekre. További jelölést vezetünk be, álljon $\mathcal{F}(A)$ $K_n|A$ azon $(s-1)$-dimenziós lapjaiból, amelyek láthatóak $x_{n+1}|A$ pontból.

$$\mathcal{F}(A) = \{F_I|A \ : \ K_n|A \subset H_0(F_I|A), x_{n+1}|A \in H_+(F_I|A),$$
$$I = \{i_1, \dots, i_s\} \subset \{1, \dots, n\}\}.$$

Az $\mathcal{F}(A)$ halmaz természetesen függ az $x_1, \dots, x_n$ és x_{n+1} pontoktól, de ezt a függést nem jelöljük. Folytatjuk (3.36) formula jobb oldalának becslését.

$$(3.36) \leq n \cdot \mathbb{E}\left[\int_{G(d,s)} \int_{G(d,s)} \lambda_s(K_{n+1} \backslash K_n|A) \lambda_s(K_{n+1} \backslash K_n|B) \nu_s(\,\mathrm{d}A) \nu_s(\,\mathrm{d}B) \mathbf{1}(T_n)\right]$$
$$\ll \frac{n}{\kappa_d^{n+1}} \int_K \cdots \int_K \int_{G(d,s)} \int_{G(d,s)} \left(\sum_{F \in \mathcal{F}(A)} \lambda_s([x_{n+1}|A, F])\right) \times$$
$$\times \left(\sum_{F' \in \mathcal{F}(B)} \lambda_s([x_{n+1}|B, F']) \mathbf{1}(T_n)\right) \nu_s(\,\mathrm{d}A) \nu_s(\,\mathrm{d}B) \,\mathrm{d}x_1 \cdots \,\mathrm{d}x_{n+1}. \qquad (3.37)$$

Felcserélve az integrálások sorrendjét, és kiterjesztve az integrálást minden $I, J \in \binom{[n]}{s}$ indexhalmazra, a következőket nyerjük:

$$(3.37) \leq \frac{n}{\kappa_d^{n+1}} \int_{G(d,s)} \int_{G(d,s)} \int_{K^{n+1}} \left(\sum_I \mathbf{1}(F_I|A \in \mathcal{F}(A)) \lambda_s([F_I, x_{n+1}]|A)\right) \times$$
$$\times \left(\sum_J \mathbf{1}(F_J|B \in \mathcal{F}(B)) \lambda_s([F_J, x_{n+1}]|B) \mathbf{1}(T_n)\right) \,\mathrm{d}x_1 \cdots \,\mathrm{d}x_{n+1} \nu_s(\,\mathrm{d}A) \nu_s(\,\mathrm{d}B). \qquad (3.38)$$

Legyen most

$$C_s(I, A) = H_+(F_I|A) \cap B^d,$$

amely valójában az egységgömb egy részhalmaza az A altérben, valamint legyen

$$C_d(I, A) = (H_+(F_I|A) + A^\perp) \cap B^d.$$

Ezen sapkák térfogatára bevezetjük a $V_s(I, A) = \lambda_s(C_s(I, A))$ és $V_d(I, A) = \lambda_d(C_d(I, A))$ jelöléseket. Folytatjuk a fenti integrálok becslését azt kihasználva, hogy az $[F_I, x_{n+1}]|A$ és $[F_J, x_{n+1}]|B$ szimplexeket tartalmazzák a hozzájuk tartozó $C_s(I, A)$ és $C_s(J, B)$ sapkák.

$$(3.38) \ll \frac{n}{\kappa_d^{n+1}} \int_{G(d,s)} \int_{G(d,s)} \sum_I \sum_J \int_{(B^d)^{n+1}} \mathbf{1}(F_I|A \in \mathcal{F}(A)) V_s(I, A) \times$$
$$\times \mathbf{1}(F_J|B \in \mathcal{F}(B)) V_s(J, B) \mathbf{1}(T_n) \,\mathrm{d}x_1 \cdots \,\mathrm{d}x_{n+1} \nu_s(\,\mathrm{d}A) \nu_s(\,\mathrm{d}B). \qquad (3.39)$$

Az összegzés minden s elemű I és J indexhalmazon végigfut, így előfordulhat, hogy I és J metszete nem üres. Rögzítsük az $I \cap J$ halmaz elemszámát, és jelöljük k-val. Ekkor a szumma megfelelő tagjai nyilvánvalóan függetlenek attól, hogy konkrétan melyik $i_1, \dots, i_s$ illetve $j_1, \dots, j_s$ indexeket választottuk ki. Feltehetjük tehát rögzített $k \in \{0, 1, \dots, s\}$ esetén, hogy $I = \{1, \dots, s\}$ és $J = \{s - k + 1, \dots 2s - k\}$, továbbá legyen $F = \operatorname{conv}\{x_i : i \in I\}$ és $G = \operatorname{conv}\{x_j : j \in J\}$. Így I és J, valamint ebből adódóan F és G is függ k-tól, ezt a függést szintén nem jelöljük. Folytatjuk (3.39) formula felső becsléseit:

$$\leq \frac{n}{\kappa_d^{n+1}} \sum_{k=0}^{s} \binom{n}{s}\binom{s}{k}\binom{n-s}{s-k} \int_{G(d,s)} \int_{G(d,s)} \int_{(B^d)^{n+1}} \mathbf{1}(F|A \in \mathcal{F}(A)) \times$$
$$\times V_s(I, A)\mathbf{1}(G|B \in \mathcal{F}(B))V_s(J, B)\mathbf{1}(T_n)\, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_{n+1}\nu_s(\mathrm{d}A)\nu_s(\mathrm{d}B). \tag{3.40}$$

Mivel az integrandus szimmetrikus, ezért szorítkozhatunk olyan F és G párokra, amelyekre $V_s(I, A) \geq V_s(J, B)$, vagy ekvivalens módon $V_d(I, A) \geq V_d(J, B)$. Ez a (3.40) jobb oldalának becslésében egy 2-es faktort eredményez:

$$\leq \sum_{k=0}^{s} \frac{2n}{\kappa_d^{n+1}} \binom{n}{s}\binom{s}{k}\binom{n-s}{s-k} \int_{G(d,s)} \int_{G(d,s)} \int_{(B^d)^{n+1}} \mathbf{1}(F|A \in \mathcal{F}(A)) \times$$
$$\times V_s(I, A)\mathbf{1}(G|B \in \mathcal{F}(B))V_s(J, B)\mathbf{1}(V_s(I, A) \geq V_s(J, B)) \times$$
$$\times \mathbf{1}(T_n)\, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_{n+1}\nu_s(\mathrm{d}A)\nu_s(\mathrm{d}B). \tag{3.41}$$

Jelölje Σ_k ezen összeg k-adik tagját, $k = 0, \dots, s$. A következő lépésekben a Σ_k tagokat fogjuk külön-külön becsülni. Rögzítsük k-t tetszőlegesen.

Világos, hogy az integrandusból az $\mathbf{1}(G|B \in \mathcal{F}(B))$ tényezőt elhagyva az integrál Σ_k értéke nem csökken. Ezután szorozzuk meg az integrandust az $\mathbf{1}(C_d(I, A) \cap C_d(J, B) \neq \emptyset)$ indikátorral. Ettől az integrál értéke nem változik, mivel a $C_d(I, A)$ és $C_d(J, B)$ halmazoknak az x_{n+1} mindenképp közös pontja. Ezek után a következőkez kapjuk:

$$\Sigma_k \ll \frac{n^{2s-k+1}}{\kappa_d^{n+1}} \int_{G(d,s)} \int_{G(d,s)} \int_{(B^d)^{n+1}} \mathbf{1}(F|A \in \mathcal{F}(A))V_s(I, A) \times$$
$$\times \mathbf{1}(C_d(I, A) \cap C_d(J, B) \neq \emptyset)V_s(J, B)\mathbf{1}(V_s(I, A) \geq V_s(J, B)) \times$$
$$\times \mathbf{1}(T_n)\, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_{n+1}\nu_s(\mathrm{d}A)\nu_s(\mathrm{d}B). \tag{3.42}$$

Most ha $F|A \in \mathcal{F}(A)$, akkor $x_{2s-k+1}, \dots, x_n$ pontok mindegyikét tartalmazza $H_0(F, A)$, valamint x_{n+1} pontot tartalmazza $H_+(F, A)$ féltér, mivel a T_n feltétel teljesülése miatt $C_d(I, A)$ a kisebb sapka, amelyet B^d-ből a $A^\perp + \operatorname{aff} F$ hipersík levág, és $o \in K_n$ teljesül. Ezután az $x_{2s-k+1}, \dots, x_n, x_{n+1}$ pontok szerint integrálhatunk. Ezen kívül a T_n feltételt a következő W_n feltételre cseréljük: $V_d(I,A) \leq (c\log n)/n\lambda_d(B^d)$. Így nyerjük, hogy

$$\begin{aligned}\Sigma_k \ll& \frac{n^{2s-k+1}}{\kappa_d^{n+1}} \int_{G(d,s)} \int_{G(d,s)} \int_{(B^d)^{2s-k}} (\kappa_d - V_+(F,A))^{n-2s+k} V_d(I,A) \times \\ &\times V_s(I,A)\mathbf{1}(C_d(I,A) \cap C_d(J,B) \neq \emptyset) V_s(J,B) \times \\ &\times \mathbf{1}(V_d(I,A) \geq V_d(J,B))\mathbf{1}(W_n)\,\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_{2s-k}\nu_s(\,\mathrm{d}A)\nu_s(\,\mathrm{d}B) \\ \ll& n^{2s-k+1} \int_{G(d,s)} \int_{G(d,s)} \int_{(B^d)^{2s-k}} (1 - V_d(I,A)/\kappa_d)^{n-2s+k} \times \\ &\times V_d(I,A)V_s(I,A)\mathbf{1}(C_d(I,A) \cap C_d(J,B) \neq \emptyset) V_s(J,B) \times \\ &\times \mathbf{1}(V_d(I,A) \geq V_d(J,B))\mathbf{1}(W_n)\,\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_{2s-k}\nu_s(\,\mathrm{d}A)\nu_s(\,\mathrm{d}B). \qquad (3.43)\end{aligned}$$

A következő lépésben az x_i, $i \in J$ pontok szerint integrálunk.

$$\begin{aligned}\int_{(B^d)^{s-k}} \mathbf{1}(C_d(I,A) \cap C_d(J,B) \neq \emptyset)\mathbf{1}(V_d(I,A) \geq V_d(J,B)) \times \\ \times V_+(2,B,s)\mathbf{1}(W_n)\,\mathrm{d}x_{s+1} \ldots \mathrm{d}x_{2s-k}. \qquad (3.44)\end{aligned}$$

Mivel feltesszük, hogy $V_d(I,A) \geq V_d(J,B)$, így a $C_d(I,A)$ sapka magassága (más szóval mélysége) legalább akkora, mint a $C_d(J,B)$ sapkáé. A $C_d(I,A) \cap C_d(J,B) \neq \emptyset$ feltételből adódik, hogy létezik egy β konstans, amelyre $C_d(J,B)$-t tartalmazza $\beta C_d(I,A)$, ahol $\beta C_d(I,A)$ a $C_d(I,A)$ halmaz β-szoros nagyítottja a $z \in \partial B^d$ pontból, a $C_d(I,A)$ sapka középpontjából (bővebben lásd [7]). Így,

$$(3.44) \leq \beta^{d(s-k)} V_d(I,A)^{s-k} V_s(J,B) \ll V_d(I,A)^{s-k} V_s(I,A). \qquad (3.45)$$

A $C_d(I,A) \cap C_d(J,B) \neq \emptyset$ és $V_d(I,A) \geq V_d(J,B)$ feltételek együttesen csak akkor teljesülhetnek, ha z vektor és B altér által bezárt $\angle(z,B)$ szög legfeljebb 2α, ahol α a $C_d(I,A)$ sapka középponti szöge. Kiszámítható, hogy

$$\alpha \leq b_d V_d(I,A)^{1/(d+1)}, \qquad (3.46)$$

ahol b_d egy d-től függő konstans. A z és B kölcsönös helyzetére kapott feltételt és (3.45) összefüggést használva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}(3.43) \ll& n^{2s-k+1} \int_{G(d,s)} \int_{G(d,s)} \int_{(B^d)^s} (1 - V_d(I,A)/\kappa_d)^{n-2s+k} V_d(I,A)^{s-k+1} \times \\ &\times V_s(I,A)^2 \mathbf{1}(\angle(z,B) \leq 2b_d V_d(I,A)^{1/(d+1)}) \times \\ &\times \mathbf{1}(W_n)\,\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_s \nu_s(\,\mathrm{d}A)\nu_s(\,\mathrm{d}B). \qquad (3.47)\end{aligned}$$

Rögzítsünk egy $A \in G(d,s)$ alteret, és becsüljük a következőt:

$$\int_{(B^d)^s} (1 - V_d(I,A)/\kappa_d)^{n-2s+k} V_d(I,A)^{s-k+1} V_s(I,A)^2 \mathbf{1}(W_n)\, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_s. \tag{3.48}$$

A gazdaságos sapkafedési tételt (lásd 3.1.1. tétel) fogjuk használni. A W_n feltétel miatt minden $C_d(I,A)$ sapka térfogata legfeljebb $(c \log n)/n\kappa_d$. Legyen h egy olyan pozitív egész szám, amelyre $2^{-h} \leq \frac{c \ln n}{n}$. Minden ilyen h-ra legyen $\mathcal{M}_h$ azon $\{C_1, \ldots, C_{m(h)}\}$ sapkák gyűjteménye, amelyek együtt a $B^s = B^d|A$ $t = (\kappa_d 2^{-h})^{\frac{s+1}{d+1}}$ paraméterű vizes részének gazdaságos sapkafedését adják. (Feltesszük, hogy n olyan nagy, hogy a tétel működik.) Minden ilyen C_i sapka egy d-dimenziós $C_i(A)$ vetülete a B^d-ből A-ra. Mivel a C_i és a $C_i(A)$ sapkák egyforma mélységűek, így a $C_i(A)$ térfogatára $\lambda_d(C_i(A)) \ll \kappa_d 2^{-h}$ adódik. Tekintsünk tetszőleges $(x_1, \ldots, x_s)$ pontokat, a hozzájuk tartozó $C_d(I,A)$ sapkát, amelyről tudjuk, hogy térfogata legfeljebb $(c \log n)/n\kappa_d$. Rendeljük hozzá a $(x_1, \ldots, x_s)$ pontokhoz a legnagyobb olyan h-t, amelyre valamilyen $C_i \in \mathcal{M}_h$ esetén $C_s(I,A) \subset C_i$. Ilyen h létezik. Ezekből következik, hogy

$$V_s(I,A) \leq \lambda_s(C_i) \ll 2^{-h\frac{s+1}{d+1}}$$

és

$$V_d(I,A) \leq \lambda_d(C_i(A)) \ll 2^{-h}.$$

Másrészt a h maximális választása miatt,

$$V_s(I,A) \geq (\kappa_d 2^{-(h-1)})^{\frac{s+1}{d+1}}$$

és

$$V_d(I,A)/\kappa_d \geq 2^{-(h-1)}.$$

Mostmár integrálhatunk $(B^d)^s$-n a W_n feltevés mellet úgy, hogy minden $(x_1, \ldots, x_s)$-t éppen a hozzá rendelt $C_i(A)$-n integráljuk, pontosabban szólva $(C_i(A))^s$-n. Így az integrandus (3.48) formulában a következőképpen becsülhető:

$$\begin{aligned}
&(1 - V_d(I,A)/\kappa_d)^{n-2s+k} V_d(I,A)^{s-k+1} V_s(I,A)^2 \\
&\quad \ll (1 - 2^{-(h-1)})^{n-2s+k} \cdot 2^{-h(s-k+1)} \cdot 2^{-2h\frac{s+1}{d+1}}.
\end{aligned}$$

Ennek a segítségével az integrál $(C_i(A))^s$-n $(C_i(A) \in \mathcal{M}_h)$ felülről korlátozható:

$$\begin{aligned}
&\exp(-(n-2s+k)2^{-h+1}))2^{-h(s+k-1)}2^{-2h\frac{s+1}{d+1}}(V_d(C_i(A)))^s \\
&\quad \ll \exp(-(n-2s+k)2^{-h+1}))2^{-h(s+k-1)}2^{-2h\frac{s+1}{d+1}}2^{-hs}.
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Térjünk vissza (3.47) becsléséhez. Ahhoz, hogy becsülni tudjuk az integrált, szükségünk van az $\mathcal{M}_h$ halmaz $|\mathcal{M}_h|$ elemszámára. A B^s gömb $2^{-h\frac{s+1}{d+1}}$ paraméterű vizes részének térfogata $\lambda_s(B^s(2^{-h\frac{s+1}{d+1}})) \approx 2^{\frac{-2h}{d+1}}$ (az $\approx$ jelölés értelmes, mert $h \to \infty$ ha $n \to \infty$). Ebből adódóan

$$|\mathcal{M}_h| \ll \frac{2^{-2h\frac{1}{d+1}}}{2^{-h\frac{s+1}{d+1}}} = 2^{\frac{h(s-1)}{d+1}}.$$

Kihasználva a $\angle(z, B) \leq 2b_d V_d(I, A)^{1/(d+1)}$ feltételt, alkalmazva a 3.4.1. lemmát, valamint (3.49) összefüggést, $h_0 = \left\lfloor \frac{c \ln n}{n} \right\rfloor$ választással kapjuk, hogy,

$$\begin{aligned}
& \int_{G(d,s)} \int_{(B^d)^s} (1 - V_d(I, A)/\kappa_d)^{n-2s+k} V_d(I, A)^{s-k+1} V_s(I, A)^2 \times \\
\times \quad & \mathbf{1}(\angle(z, B) \leq 2b_d V_d(I, A)^{1/(d+1)})\, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_s \nu_s(\mathrm{d}B) \\
\ll \quad & \sum_{h=h_0}^{\infty} \exp(-(n - 2s + k)2^{-h+1}))2^{-h(s+k-1)}2^{-2h\frac{s+1}{d+1}}2^{-hs} \times \\
\times \quad & |\mathcal{M}_h| \nu_s(\{B \,|\, \angle(z, B) < 2b_d 2^{\frac{-h}{d+1}}\}) \\
\ll \quad & \sum_{h=h_0}^{\infty} \exp(-(n - 2s + k)2^{-h+1}))2^{-h(s+k-1)}2^{-2h\frac{s+1}{d+1}}2^{-hs}2^{\frac{h(s-1)}{d+1}}2^{\frac{-h(d-s)}{d+1}} \\
= \quad & \sum_{h=h_0}^{\infty} \exp(-(n - 2s + k)2^{-h+1}))2^{-h[(2s-k+1)+\frac{d+3}{d+1}]}. \qquad (3.50)
\end{aligned}$$

A (3.49) formulában szereplő szummát két részre vágjuk, és darabonként becsüljük. Válasszuk h_1-t úgy, hogy

$$2^{-h_1} \leq \frac{1}{n} < 2^{-h_1+1}.$$

Mivel $h \geq h_1$ esetén $\exp(-(n - 2s + k)2^{-h+1}))$ kisebb, mint 1, így következik, hogy

$$\begin{aligned}
& \sum_{h=h_1}^{\infty} \exp(-(n - 2s + k)2^{-h+1}))2^{-h[(2s-k+1)+\frac{d+3}{d+1}]} \\
& \qquad \leq \sum_{h=h_1}^{\infty} 2^{-h[(2s-k+1)+\frac{d+3}{d+1}]} \ll n^{-2s+k-1}n^{-\frac{d+3}{d+1}}. \qquad (3.51)
\end{aligned}$$

A másik rész esetén, amikor $h_0 \leq h < h_1$, helyettesítsünk $\ell = h_1 - h$-t. Így ℓ 1-től megy $\ell_1 = h_1 - h_0$-ig.

$$\begin{aligned}
&\sum_{h=h_0}^{h_1-1} \exp(-(n-2s+k)2^{-h+1}))2^{-h[(2s-k+1)+\frac{d+3}{d+1}]} \\
\leq &\sum_{\ell=1}^{\ell_1} \exp(-(n-2s+k)2^{-h_1+\ell+1}))2^{-(h_1-\ell)[(2s-k+1)+\frac{d+3}{d+1}]} \\
\ll &\sum_{\ell=1}^{\ell_1} \exp(-(n-2s+k)2^{-h_1+\ell+1}))n^{-(2s-k+1)}2^{\ell(2s-k+1)}n^{-\frac{d+3}{d+1}}2^{\ell\frac{d+3}{d+1}} \\
\ll &\; n^{-(2s-k+1)}n^{-\frac{d+3}{d+1}}\sum_{\ell=1}^{\infty} \exp(-2^{\ell}) \cdot 2^{\ell[(2s-k+1)+\frac{d+3}{d+1}]} \\
\ll &\; n^{-(2s-k+1)}n^{-\frac{d+3}{d+1}}\sum_{j=1}^{\infty} \exp(-j)j^{4d} \ll n^{-(2s-k+1)}n^{-\frac{d+3}{d+1}}.
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Visszahelyettesítve a (3.51) és a (3.52) becsléseket (3.47)-be, azt kapjuk, hogy

$$\Sigma_k \ll n^{2s-k+1}\int_{G(d,s)} n^{-(2s-k+1)}n^{-\frac{d+3}{d+1}}\nu_s(\,\mathrm{d}A) \ll n^{-\frac{d+3}{d+1}}.$$

Ezeket minden $k = 0, \dots, s$-ra összegezve épp a 3.1.4. tétel felső becsléséhez jutunk. Ezzel a 3.1.4. tétel bizonyítása teljes.

3.6. A 3.1.5. tétel igazolásához szükséges módosítások, megjegyzések

Ebben a részben vázlatosan bemutatjuk, hogyan írható át a 3.1.4. tétel bizonyítása tetszőleges C^2_+ sima határú konvex testek esetére, ahogyan a 3.1.5. tételben állítottuk. A részletes bizonyítást azért csak a gömb esetében végeztük el, mert a fő gondolatok már ott is előjönnek, és a számolásokat lényegesen könnyebb követni. C^2_+ sima határú testek esetén a bizonyítás teljessé tételéhez néhány konvex testekről szóló jól ismert tételt kell használni, a részletek kidolgozását az érdeklődő olvasóra bízzuk.

Tegyük tehát fel, hogy K d-dimenziós konvex test, amelynek határa C^2_+ sima, K_n pedig a beleírt uniform véletlen politóp. Mivel K kompakt, ezért létezik ∂K főgörbületeire egy globális γ felső és egy globális Γ alsó korlát. Ismert, hogy minden $x \in \partial K$ esetén egyértelműen létezik $u(x)$ külső normálisa K-nak az x pontban. A $C(x,t)$ sapkát úgy definiáljuk, hogy a $H(x,t) := \{y \,|\, \langle y, u_x\rangle = \langle x, u_x\rangle - t\}$ metszi ki K-ból. Belátható, hogy (3.26) a következő formában marad érvényes:

$$(x_t + \gamma_1\sqrt{t}B^d) \cap H(x,t) \subset H(x,t) \cap K \subset (x_t + \gamma_2 \cdot \sqrt{t}B^d) \cap H(x,t), \tag{3.53}$$

ahol a γ_1 és γ_2 kostansok γ-tól és Γ-tól függenek. Ezekből a becslésekből adódóan a gömb esetén használt szimplexek analóg módón definiálhatóak, és térfogatuk $\approx t^{\frac{d+1}{2}}$ marad. Kicsit módosítanunk kell a Σ_1 és Σ_2 halmazok definícióját is:

$$\Sigma_1(x,t) = S^{d-1} \cap \left(u_x + \frac{\sqrt{\gamma t}}{8} B^d \right)$$

és

$$\Sigma_2(x,t) = S \cap \left(u_x + 2d\sqrt{\Gamma t} B^d \right).$$

Ettől a ponttól kezdve az alsó korlát bizonyításának lépései nagyobb nehézségek nélkül követhetők, hasonló gondolatmenet található [12]-ben.

A felső korlát igazolásához először megjegyezzük, hogy K minden merőleges vetületének határa C^2_+, továbbá γ és Γ úgy is választható, hogy azok nem csak K főgörbületeire adnak univerzális felső és alsó korlátot, hanem K minden s-dimenziós vetülete esetén is. Ezekből következik, hogy egy t mélységű sapka térfogata $\approx t^{\frac{i+1}{2}}$, ahol i a sapka dimenzióját jelöli (a bizonyításban konkrétan d vagy s). A (3.53) összefüggésből következik, hogy (3.46) igaz marad változatlanul. Itt jegyezzük meg, hogy a gömb esetén valójában nem volt szükségünk a gazdaságos sapkafedési tételre, ebben az általános esetben azonban valóban ki kell használjuk. Természetesen a korábban állított, sapkák térfogataira vonatkozó egyenlőségek nem maradnak érvényben, de a γ és Γ konstansok létezése miatt érvényesek $\approx$ értelemben. A bizonyítást befejező számítások teljesen megegyeznek a gömb esetén bemutatottakkal.

3.7. A 3.1.7. tétel bizonyítása

Ebben a fejezetben megmutatjuk, hogy a (3.6) formulából és a 3.1.5. tétel felső becsléséből a közismert módszerrel levezethető a nagy számok erős törvénye, vagyis a 3.1.7. tétel.

A Csebisev egyenlőtlenségből következik, hogy

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(|V_s(K) - V_s(K_n) - \mathbb{E}(V_s(K) - V_s(K_n))| \, n^{\frac{2}{d+1}} \geq \varepsilon \right) &\leq \varepsilon^{-2} n^{\frac{4}{d+1}} \mathrm{Var} V_s(K_n) \\ &\ll n^{-\frac{d-1}{d+1}}. \end{aligned}$$

Mivel a $\sum_{k=2}^{\infty} n_k^{-\frac{d-1}{d+1}}$ összeg véges, ha $n_k = k^4$, a következő valószínűségek

$$\mathbb{P}\left(|V_s(K) - V_s(K_{n_k}) - \mathbb{E}(V_s(K) - V_s(K_{n_k}))| \, n_k^{\frac{2}{d+1}} \geq \varepsilon \right)$$

összege is véges ($k \geq 2$). Így a Borel-Cantelli lemmából és a (3.6) aszimptotikus formulából következik, hogy

$$\lim_{k\to\infty}(V_s(K)-V_s(K_{n_k}))n_k^{\frac{2}{d+1}} = c_{d,j}\int_S (\tau_{d-1}(x))^{\frac{1}{d+1}}\tau_{d-j}(x)\,\mathrm{d}x \tag{3.54}$$

1 valószínűséggel teljesül. Mivel a $V_s(K)-V_s(K_n)$ sorozat nem növő, így

$$(V_s(K)-(V_s(K_{n_{k-1}}))n_{k-1}^{\frac{2}{d+1}} \leq (V_s(K)-V_s(K_n))n^{\frac{2}{d+1}} \leq (V_s(K)-V_s(K_{n_k}))n_k^{\frac{2}{d+1}}$$

teljesül, ha $n_{k-1} \leq n \leq n_k$. Mivel $\lim_{k\to\infty}\frac{n_k}{n_{k-1}} = 1$, ezért a részsorozat határértéke megegyezik a sorozatéval, amiből a 3.1.7. tétel azonnal következik.

3.8. Nyitott problémák

A korábban idézett [25] munkában pontos aszimptotikus formula található minden $V_s(K_n)$ szórására, abban az esetben, ha az anyatest gömb.

3.8.1. nyitott probléma. *Adjunk pontos aszimptotikus formulát $V_s(K_n)$ szórására tetszőleges sima határú K test esetén.*

Ifj. Böröczky Károly, Fodor Ferenc és D. Hug [19] cikkében körülírt véletlen politópokkal is foglalkozik. Érdekes észrevenni, hogy ezek kezeléséhez a beírt modell esetében ismert állításokat általánosították.

3.8.2. nyitott probléma. *Igazoljunk aszimptotikus eredményeket a K_n véletlen politóp geometriai mennyiségeinek várható értékére és szórására abban az esetben, ha K_n-t definiáló $x_1, x_2, \ldots, x_n$ véletlen pontokat egy f sűrűségfüggvény által adott valószínűségi eloszlás szerint választjuk.*

3.8.3. nyitott probléma. *Igazoljunk a beírt esethez analóg állításokat körülírt véletlen politópokra.*

Ezen problémák tanulmányozása előtt mindenképp javasoljuk [19] cikk elolvasását, amely tartalmazza a már ismert eredményeket is.

4. fejezet

Appendix

4.1. Kompakt, konvex halmazok távolsága

Ebben a szakaszban kompakt, konvex testek terén használt leggyakoribb távolságok definícióit gyűjtöttük össze. Legyenek K és L $\mathcal{K}^d$-beli elemek.

- **Hausdorff-távolság**

  $$\delta_H(K, L) = \inf\{\lambda \geq 0 \mid K \subset L + \lambda B^d, L \subset K + \lambda B^d\} = \|h_K - h_L\|_\infty$$

  Ez geometriailag azzal ekvivalens, hogy vesszük K pontjainak L-től vett távolságának maximumát, majd L pontjainak K-tól vett távolságainak maximumát; a Hausdorff távolság a kettő közül a nem kisebb.

- **Szimmetrikus differencia metrika**
  K és L szimmetrikus differenciájának térfogata.

  $$\delta_S(K, L) = \lambda_d(K \triangle L).$$

- **L_p-metrika ($p \geq 1$)**

  $$\delta_p(K, L) = \|h_K - h_L\|_p = \left(\int_{S^{d-1}} |h_K(u) - h_L(u)|^p \,\mathrm{d}u \right)^{\frac{1}{p}}.$$

  Itt $\|\cdot\|_p$ a szokásos L_p norma.

- **Eggleston metrika**

  $$\delta_E(K, L) := \max_{x \in K} d(x, L) + \max_{x \in L} d(x, K).$$

Vesszük K pontjainak L-től vett távolságának maximumát, majd L pontjainak K-tól vett távolságainak maximumát; az Eggleston távolság a kettő összege.

- **Banach-Mazur-távolság**
  Tetszőleges olyan T affin transzformációra, amelyre $T(K) \subseteq L$ meghatározzuk a legkisebb λ-t, hogy $\lambda \cdot T(K)$ egy eltoltja tartalmazza L-t; a Banach-Mazur távolság az ilyen lambdák minimuma. Amennyiben K és L szimmetrikus az origora, úgy elég lineáris transzformációkat tekinteni, és eltolásra sincs szükség. (Gyakran ez utóbbi esetben definiálják csak a távolságot.) Az így definiált távolság azonban nem metrika $\mathcal{K}^d$-n. A Banach-Mazur távolság logaritmusa metrika azon téren, melyet az affin ekvivalens konvex testek azonosításával kapunk.

Bővebb információért hivatkozunk [39] és [61] monográfiákra.

4.2. Steiner-formula, kevert térfogatok

Steiner-tétele azt állítja, hogy egy $K \in \mathcal{K}^d$ test $\varrho > 0$ sugarú (külső) paralel tartományának térfogata kifejezhető mint ϱ egy d-edfokú polinomja. Ebben a polinomban az együtthatók csak K-tól és d-től függenek. Ezeket az együtthatókat (egészen pontosan ezek megfelelő normalizáltjait) nevezzük a K test kevert térfogatainak.

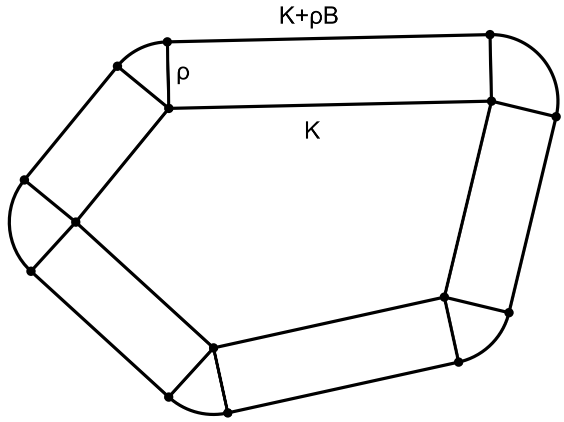
A K test $\rho > 0$ sugarú (külső) paralel tartományának azon pontok halmazát nevezzük, melyek távolsága K-tól legfeljebb ρ. Ez éppen K és egy ρ sugarú gömb Minkowski-összege:

$$K_\rho := \{x \in \mathbb{E}^d \,|\, d(x, K) \leq \rho\} = K + \rho B^d.$$

Steiner-formulája a következő alakban írható:

$$\lambda_d(K_\rho) = \sum_{j=0}^{d} \rho^{d-j} \kappa_{d-j} V_j(K) = \sum_{i=0}^{d} \rho^i \binom{d}{i} W_i(K). \tag{4.1}$$

A formulában $\kappa_{d-j} = \lambda_{d-j}(B^{d-j})$ a $(d-j)$-dimenziós gömb térfogatát jelöli. A $V_j(K)$ mennyiségeket a K test j-edik kevert térfogatainak nevezzük $(0 \leq j \leq d)$. A κ_{d-j} normáló faktorok azért szükségesek, mert így elértük, hogy a K test kevert térfogatai valóban csak K-tól függenek, attól nem, hogy milyen dimenziós Euklideszi-térben dolgozunk. A $W_i(K)$ mennyiségek számunkra most csak történeti szempontból érdekesek, ezeket Minkowski-funkcionáloknak vagy alapmértékeknek nevezzük. Vegyük észre, hogy ezek az kevert térfogatoktól csak indexelésben és normalizálásban különböznek.



4.1. ábra. Sokszög külső paralel tartománya

Bármilyen eredmény könnyen átírható az egyikről a másikra. Kényelmi okok miatt mi a V_i kevert térfogatokat fogjuk használni.

Néhány példát is mutatunk a kevert térfogatokra. $V_d(\cdot)$ megegyezik a térfogattal, ezt könnyen láthatjuk, ha (4.1)-nek vesszük a határértékét, ahogy $\varrho \to 0$. A következő kevert térfogatra $2V_{d-1}(K) = \mathcal{H}^{d-1}(\partial K)$ teljesül, ahol $\mathcal{H}^{d-1}(\cdot)$ a $(d-1)$-dimenziós Hausdorff-mértéket jelöli (lásd 4.3 szakasz). Ez mutatja, hogy $V_{d-1}(K)$ éppen K felszínének a fele. $V_1(K)$ az átlagszélesség konstansszorosa, ahogy azt a következő egyenlőségekből is kiolvashatjuk:

$$V_1(K) = \frac{1}{\kappa_{d-1}} \int_{S^{d-1}} h_K(u)\,\mathrm{d}u = \frac{d\kappa_d}{2\kappa_{d-1}} W(K).$$

Itt $W(K)$ a szokásos átlagszélességet jelöli. Vegyük észre, hogy $V_0(K) \equiv 1$ is teljesül, a definíció szerint.
Végül példaként megemlítjük, hogy definíció alapján kiszámolhatjuk az egységgömb kevert térfogatait:

$$V_i(B^d) = \binom{d}{i} \frac{\kappa_d}{\kappa_{d-i}}. \tag{4.2}$$

További információ a 4.4 szakaszban található a kevert térfogatok analitikus előállításáról. Az érdeklődő olvasóknak ajánljuk [61] monográfiát.

4.3. Hausdorff-mérték

Ebben a szakaszban definiáljuk a Hausdorff-mértéket, illetve a fogalomhoz szorosan kapcsolódó Hausdorff-dimenziót. A Hausdorff-dimenzió definíciója azon a tényen alapszik, hogy ha egy d-dimenziós testet λ-szorosára nagyítunk, akkor térfogata (d-dimenziós Lebesgue-mértéke) a λ^d-szeresére változik.

Az m-dimenziós ($m \geq 0$ nem feltétlen egész számot jelöl) Hausdorff-mértéket $\mathcal{H}^m(\,\cdot\,)$ jelöli, és definíciója a következő. Legyen $H \subset \mathbb{E}^d$ halmaz és legyen adva megszámlálható sok S_j halmaz, amelyek a H halmaz egy δ-fedését alkotják, vagyis $\cup S_j \supset H$, és minden j-re $\operatorname{diam} S_j < \delta$. Ekkor H Hausdorff-mértéke

$$\mathcal{H}^m(H) = \lim_{\delta \to 0} \inf_{H \subset \cup S_j, \operatorname{diam} S_j < \delta} \sum \kappa_m \left(\frac{\operatorname{diam} S_j}{2} \right)^m,$$

ahol $\kappa_m = \pi^{\frac{m}{2}} / \Gamma(m/2+1)$, ami pozitív egész m esetén éppen az m-dimenziós egységgömb térfogatával egyezik meg.

Belátható, hogy bármely H esetén létezik egy m_0 érték úgy, hogy ha $m < m_0$, akkor $\mathcal{H}^m(H) = \infty$, és ha $m > m_0$, akkor $\mathcal{H}^m(H) = 0$. Ezt az m_0 értéket nevezzük H Hausdorff-dimenziójának.

A Hausdorff-mérték és Hausdorff-dimenzió további tulajdonságairól érdeklődő olvasónak ajánljuk [51] könyvet.

4.4. Haar-mérték, Grassmann sokaság

Ebben a szakaszban vázlatosan bevezetjük a dolgozatban felhasznált integrálgeometriai fogalmakat.

Topológikus csoportnak nevezünk egy olyan Hausdorff tulajdonságú topológikus teret, amin adva van egy szorzás művelet, amivel az csoportot alkot, és a szorzás művelet, valamint az inverzképzés folytonosak.

Ismert a következő eremény. Legyen G kompakt topológikus csoport. Ekkor létezik egy egyértelműen meghatározott μ valószínűségi Borel-mérték G-n amely balinvariáns, vagyis bármely mérhető $S \subset G$ és $a \in G$ esetén $\mu(aS) = \mu(S)$ teljesül. Továbbá ez a μ mérték jobbinvariáns és az inverzképzéssel szemben is invariáns. Ezt a μ mértéket a G csoport Haar-mértékének hívjuk.

A fenti eredménynek számos általánosítása született. Számunkra a legfontosabb, hogy lokálisan kompakt csoportokon is hasonló állítás fogalmazható meg: létezik a csoporton egy balinvariáns Borel-mérték. Itt természetesen nem várhatjuk el, hogy valószínűségi mértéket kapjunk, és az unicitás is csak konstans szorzó erejéig teljesül.

Geometriai szempontból érdekes topológikus csoport az $\mathbb{R}^d$ tér forgatásainak és mozgásainak csoportja. A forgatások

$$SO_d = \{\, A \in \mathbb{R}^{d\times d} \,|\, A \text{ ortogonális },\ \det A = 1 \,\}$$

csoportja kompakt, ezért létezik rajta ν Haar-mérték. Legyen $G(d,s)$ az $\mathbb{R}^d$ tér s-dimenziós lineáris altereinek összessége, az úgynevezett Grassmann sokaság. Vegyük észre, hogy SO_d tranzitívan hat $G(d,s)$-n, így a ν mérték áthúzható $G(d,s)$-re, így kapjuk a ν_s mértéket. Legyen $\mathcal{X} \subset G(d,s)$ és rögzítsünk valamilyen $A \in G(d,s)$ alteret. Ekkor

$$\nu_s(\mathcal{X}) = \nu\{\, \varphi \in SO_d \,|\, \varphi(A) \in \mathcal{X} \,\},$$

minden olyan $\mathcal{X}$ esetén, amire a jobb oldal ν-mérhető.

Az $\mathbb{R}^d$ tér (irányítástartó) mozgásainak csoportján is definiálhatunk invariáns mértéket, amit aztán a fentihez hasonló módon áthúzhatunk egyéb geometriai struktúrákra, részletekért hivatkozunk [65] könyvre.

Végül adunk egy példát, melyet többször alkalmazunk a dolgozatban. Ez az összefüggés lehetőséget teremt arra, hogy a kevert térfogatokat (lásd 4.2 szakaszt) tisztán analitikus, integrálgeometriai eszközökkel kezeljük. Az alábbi összefüggést Kubota formulának is szokás hívni.

$$V_s(K) = c(d,s) \int_{G(d,s)} \lambda_s(K|L)\nu_s(\,\mathrm{d}L),$$

Ahol $1 \le s \le d$, és $c(d,s)$ ismert konstans, ami csak s-től és d-től függ. Megkaphatjuk tehát a K konvex test s-edik kevert térfogatát úgy, mint az összes s-dimenziós lineáris altérre vett vetületeinek átlagát.

Az integrálgeometria egy modern, sztochasztikus geometriai alkalmazásokra kihegyezett összefogalalását találhatjuk [62]-ben, továbbá ajánljuk még a témában [65] könyvet.

5. fejezet

Összefoglalás

5.1. Summary

The research problems considered in the thesis originate from the area of polytopal approximation of convex bodies. The results fall into two broad categories, one is the best approximation of convex bodies by polytopes, the other is approximation of convex bodies by random polytopes.

The dissertation is based on the following papers of the author.

- I. Bárány, F. Fodor, V. Vígh: Intrinsic volumes of inscribed random polytopes in smooth convex bodies, (2009), 1–17, submitted, available at arXiv:0906.0309v1.
- K. J. Böröczky, F. Fodor, M. Reitzner, V. Vígh: Mean width of random polytopes in a reasonable smooth convex body, *J. Multivariate Anal.*, **100** (2009), 2287–2295.
- K. J. Böröczky, F. Fodor, V. Vígh: Approximating 3-dimensional convex bodies by polytopes with a restricted number of edges, *Beiträge Algebra Geom.*, **49** (2008), no. 1, 177–193.
- V. Vígh: Typical faces of best approximating polytopes with a restricted number of edges, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **75** (2009), no. 1-2, 313–327.

5.1.1. Best approximaton of convex bodies by polytopes

In this section we summarize the results of Chapter 2.

Let K be a convex body in $\mathbb{E}^d$ and let $0 \leq k \leq d-1$ be an integer. One of the most often studied questions is how well one can approximate K with polytopes that have a restricted number of k-faces. These problems have become well understood in the last 30 years in the case if $k = 0$ or $k = d-1$, that is, when the number of vertices or facets is restricted. Almost all results are asymptotic in nature. There is a lack of results for the case when the number of intermediate dimensional faces is prescribed. In Theorem 2.2.1. we solved the first interesting case, when $d = 3$ and $k = 1$. Let K be a 3-dimensional convex body with C^2 smooth boundary and let $\mathcal{P}_n^c$ be the set of 3-polytopes with at most n edges that contain K, similary, let $\mathcal{P}_n^i$ be the set of 3-polytopes with at most n edges contained in K.

There exist (not necessarily unique in general) polytopes $P_n^c \in \mathcal{P}_n^c$ and $P_n^i \in \mathcal{P}_n^i$ such that their Hausdorff distances $\delta_H(P_n^c, K)$ and $\delta_H(P_n^i, K)$ from K are minimal. The first major result of Chapter 2 is Theorem 2.2.1.

Theorem 2.2.1 (page 13, [21] Böröczky, Fodor, Vígh)

$$\delta_H(K, P_n^c), \delta_H(K, P_n^i) \sim \frac{1}{2} \int_{\partial K} \kappa^{1/2}(x)\, \mathrm{d}x \cdot \frac{1}{n}, \quad \text{as } n \to \infty. \tag{5.1}$$

Here $\kappa(x)$ denotes the Gauss-curvature of ∂K at x and we integrate with respect to the 2-dimensional Hausdorff-measure on ∂K.

The following natural question arises here following the work of Gruber [36], [37]. Can we say something more about the geometry of the best approximating polytopes? The answer is yes, we can determine the approximate shape and size of almost all of its faces. The second major result of Chapter 2 is Theorem 2.2.2.

Theorem 2.2.2 (page 14, [72] Vígh)
The typical faces of both P_n^i and P_n^c are squares with respect to the density function $\kappa^{1/2}(x)$ as $n \to \infty$.

The meaning of this theorem is the following. Let F be a face of P_n and $x_F \in \partial K$ a point where the outer normal is also a normal of the affine hull of F. Almost every face F of P_n is such a quadrilateral that is very close to a square with respect to the second fundamental form of ∂K at x_f, and that has area

$$\frac{\int_{\partial K} \kappa^{1/2}(x) dx}{f(n) \kappa^{1/2}(x_F)},$$

where $f(n)$ stands for the number of the faces of P_n.

The proof of Theorem 2.2.1 consists of two parts, we established matching upper and lower bounds on $\delta_H(K, P_n^c)$. In the course of the proof of the upper bound, we constructed a polyhedral surface with a prescribed number of edges, which approximates ∂K well. To obtain the lower bound we applied various algebraic and geometric inequlaties. In both parts the main idea was to divide the boundary of K into small enough pieces, and over each piece we used the osculating paraboloid of the surface to approximate ∂K locally. To prove Theorem 2.2.2 we needed the stability version of the inequalities we used to obtain the lower bound in (5.1). Chapter 2 concludes with some major open problems.

5.1.2. Random polytopes

In Chapter 3 we consider another aspect of polytopal approximation of convex bodies, that is we considered random polytopes. The most widely used model is the following. Let K be a convex body in E^d with volume 1, so the uniform probability measure and the Lebesgue-measure coincide in K. Choose n random points $x_1, x_2, \dots, x_n$ from K independently and according to the uniform distribution. The convex hull $\operatorname{conv}(x_1, \dots, x_n)$ of these points is called a random polytope in K, and we denote it by K_n. One of the central problems in stochastic geometry is to understand the behavior of K_n. The main goals are to obtain information on the distribution of key geometric functionals of K_n.

It is clear, that the behavior of K_n strongly depends on the boundary structure of the mother body K, which implies, that the cases when K is a polytope or K has smooth boundary are quite different. For the case when ∂K is C^3_+, and hence $\kappa(x) > 0$ for all $x \in \partial K$, R. Schneider, J.A. Wieacker [66] proved that

$$W(K) - \mathbb{E}W(K_n) \sim \frac{2\Gamma(\frac{2}{d+1})}{d(d+1)^{\frac{d-1}{d+1}}\kappa_d \kappa_{d-1}^{\frac{2}{d+1}}} \int_{\partial K} \kappa(x)^{\frac{d+2}{d+1}}\,\mathrm{d}x \cdot \frac{1}{n^{\frac{2}{d+1}}}, \tag{5.2}$$

where $W(\,\cdot\,)$ denotes the mean width, κ_d is the volume of the Euclidean d-dimensional unit ball and $\mathbb{E}(\,\cdot\,)$ is the expectation. Recently, the smoothness condition was relaxed to C^2_+ by M. Reitzner [53].

Our first goal is to prove a further generalization of (5.2). We say that a convex body K has a rolling ball if there exists a $\varrho > 0$ such that any $x \in \partial K$ lies in some ball of radius ϱ contained in K. According to D. Hug [41], the existence of a rolling ball is equivalent saying that the exterior unit normal at $x \in \partial K$ is a Lipschitz function of x. The first major result of Chapter 3 extends (5.2) in the following way.

Theorem 3.1.2 (page 45, [20] Böröczky, Fodor, Reitzner, Vígh)
The asymptotic formula (5.2) holds for any convex body K of volume one which has a rolling ball.

Furhermore, Example 3.1.3 on page 46 states that there exists a K which has C^∞_+ boundary except at one point where it is only C^1 and (5.2) does not hold for K. This shows that Theorem 3.1.2 is essentially optimal.

Asymptotic upper and lower bounds for the variance are needed to prove the strong law of large numbers and central limit theorems, see [12] and [13]. As a second major result of Chapter 3, we estimate the variance of all intrinsic volumes of K_n, if the body K has a C^2_+ smooth boundary.

Theorem 3.1.5 (page 48, [10] Bárány, Fodor, Vígh)
Let K be a convex body in $\mathbb{E}^d$ with a C^2_+ smooth boundary. For all $s = 1, \ldots, d$ there exist positive constants γ_1 and γ_2 depending only on d,s and K such that

$$\gamma_1 n^{-\frac{d+3}{d+1}} \leq \operatorname{Var} V_s(K_n) \leq \gamma_2 n^{-\frac{d+3}{d+1}} \tag{5.3}$$

as $n \to \infty$, where $V_s(\,\cdot\,)$ stands for the sth intrinsic volume.

In addition, in the case of mean width we relaxed the smoothness condition on K, similarly to Theorem 3.1.2.

Theorem 3.1.6 (page 48, [20] Böröczky, Fodor, Reitzner, Vígh)
If K is a d-dimensional convex body of volume one with a rolling ball then

$$\gamma_1\, n^{-\frac{d+3}{d+1}} < \operatorname{Var} W(K_n) < \gamma_2\, n^{-\frac{d+3}{d+1}},$$

where the positive constants γ_1, γ_2 depend on K and d.

We note that for Theorem 3.1.5 we gave a detailed proof only if K is the unit ball, and only sketched the proof for the general case. The proofs of the lower bounds in Theorem 3.1.5 and in Theorem 3.1.6 are very similar, hence we a gave a proof only for Theorem 3.1.5. The proofs of the upper bounds are however completely different. In the case of Theorem 3.1.5 the key idea is to use the Economical Cap Covering Theorem of Bárány and Larman [11]. To obtain the upper bound in Theorem 3.1.6 we applied integral geometric tools.

The upper bound in (5.3) combined with the main results of [3] and [53] implies the strong law of large numbers by standard arguments, as it is stated in Theorem 3.1.7.

Theorem 3.1.7 (page 49, [10] Bárány, Fodor, Vígh)
If K is a convex body with C^2_+ boundary and K_n is the random polytope inscribed in K, then

$$\lim_{n\to\infty}(V_s(K)-V_s(K_n))\cdot n^{\frac{2}{d+1}} = c_{d,j}\cdot \kappa_d^{\frac{2}{d+1}}\int_S(\tau_{d-1}(x))^{\frac{1}{d+1}}\tau_{d-j}(x)\,\mathrm{d}x.$$

with probability 1.

Chapter 3 concludes with a couple of open problems.

5.2. Tartalmi összefoglalás

A disszertációban vizsgált kutatási problémák mindegyike a konvex testek politópokkal történő közelítéséről szól. Az eredményeink két nagy területre esnek, a legjobban közelítő politópok elméletébe, illetve a véletlen politópok elméletébe.

Az értekezés a szerző következő négy publikációján alapszik:

- I. Bárány, F. Fodor, V. Vígh: Intrinsic volumes of inscribed random polytopes in smooth convex bodies, (2009), 1–17, közlésre benyújtva, elektronikusan elérhető arXiv:0906.0309v1.
- K. J. Böröczky, F. Fodor, M. Reitzner, V. Vígh: Mean width of random polytopes in a reasonable smooth convex body, *J. Multivariate Anal.*, **100** (2009), 2287–2295.
- K. J. Böröczky, F. Fodor, V. Vígh: Approximating 3-dimensional convex bodies by polytopes with a restricted number of edges, *Beiträge Algebra Geom.*, **49** (2008), no. 1, 177–193.
- V. Vígh: Typical faces of best approximating polytopes with a restricted number of edges, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **75** (2009), no. 1-2, 313–327.

5.2.1. Legjobban közelítő politópok

Ebben a szakaszban a 2. fejezet eredményeit foglaljuk össze.

Legyen K egy konvex test az $\mathbb{E}^d$ térben, továbbá rögzítsünk egy $0 \leq k \leq d-1$ pozitív egész számot. Az egyik leggyakrabban tárgyalt kérdés, hogy milyen jól lehet K-t közelíeni olyan politópokkal, amelyeknek k-dimenziós lapjainak számát előírjuk. Ezt a problémakört az utóbbi 30 évben alaposan körüljárták, és a legfontosabb kérdéseket meg is válaszolták abban az esetben, ha $k = 0$ vagy $k = d - 1$, azaz a csúcsok vagy lapok száma korlátozott. A kapott eredmények nagyrészt aszimptotikus természetűek. Azonban csak néhány eredmény ismert azokban az esetekben, ha valamilyen köztes dimenziós lapok számát szorítjuk meg, vagyis $1 \leq k \leq d-2$. A 2.2.1. tételben az egyik első felmerülő kérdést válaszoljuk meg, aszimptotikus formulát bizonyítunk abban az esetben, ha $d = 3$ és $k = 1$. Legyen K egy 3-dimenziós konvex test, aminek a határa C^2 sima, és legyen $\mathcal{P}_n^c$ azon 3-dimenziós politópok halmaza, amelyeknek legfeljebb n éle van és tartalmazzák K-t. Hasonlóan legyen $\mathcal{P}_n^i$ azon 3-dimenziós politópok halmaza, amelyeknek legfeljebb n élük van és benne vannak K-ban.

Ekkor létezik egy (nem feltétlenül egyértelmű) $P_n^c \in \mathcal{P}_n^c$ politóp, és egy $P_n^i \in \mathcal{P}_n^i$ politóp úgy, hogy a a K-tól vett $\delta_H(P_n^c, K)$ és $\delta_H(P_n^i, K)$ Hausdorff távolságuk minimális. A 2. fejezet első fő eredménye a 2.2.1. tétel.

2.2.1. Tétel (13. old., [21] Böröczky, Fodor, Vígh)

$$\delta_H(K, P_n^c), \delta_H(K, P_n^i) \sim \frac{1}{2}\int_{\partial K} \kappa^{1/2}(x)\,\mathrm{d}x \cdot \frac{1}{n}, \quad \text{amint } n \to \infty. \tag{5.4}$$

A formulában $\kappa(x)$ az $x \in \partial K$ pontban vett Gauss-görbületet jelöli, és ∂K-n a 2-dimenziós Hausdorff-mérték szerint integrálunk.

P. M. Gruber [36], [37] munkái nyomán természetesen merül fel a kérdés, hogy mondhatunk-e többet a legjobban közelítő politópok geometriájáról? A kérdésre pozitív választ adhatunk abban az értelemben, hogy aszimptotikusan meghatározhatjuk a legjobban közelítő politópok lapjainak alakját és méretét is. Ezt fogalmaztuk meg a 2. fejezet második fő eredményében, a 2.2.2. tételben.

2.2.2. Tétel (14. old., [72] Vígh)
A 2.2.1. tételben tárgyalt P_n^i és P_n^c politópsorozatok tipikus lapjai a $\kappa^{1/2}(x)$ sűrűségfüggvény szerinti négyzetek, amint $n \to \infty$.

A tétel lényegi jelentése a következő. Legyen F a P_n politóp egy lapja és $x_F \in \partial K$ olyan pont K határán, ahol a K-hoz húzott külső normális merőleges F lap síkjára. P_n majdnem minden F lapja egy olyan négyszög, ami nagyon közel van egy az $x_F \in \partial K$ pontban tekintett második alapforma szerinti négyzethez, aminek a területe

$$\frac{\int_{\partial K} \kappa^{1/2}(x)dx}{f(n)\kappa^{1/2}(x_F)}.$$

Itt $f(n)$ a P_n politóp lapjainak számát jelenti.

A 2.2.1. tétel bizonyítása két részből áll, azonos nagyságú felső és alsó becslést adtunk a $\delta_H(K, P_n^c)$ távolságra. A felső korlát esetében ehhez megkonstruáltunk olyan K-t jól közelítő politópokat, amelyeknek előre megadott számú éle van. Az alsó becsléshez különböző algebrai és geometriai egyenlőtlenségeket használtunk. Mindkét részben az egyik fő gondolat az volt, hogy osszuk fel K határát elég kis foltokra, és minden ilyen foltot közelítsünk a felület egy oszkuláló paraboloidjával. A 2.2.2. tételhez a (5.4) alsó becsléséhez használt egyenlőtlenségek stabilitására volt szükség. A 2. fejezetet néhány nyitott kérdéssel zártuk.

5.2.2. Véletlen politópok

A 3. fejezetben a politópapproximációk másik aspektusáról írunk, vagyis véletlen politópokkal történő közelítést vizsgálunk. A leggyakrabban használt modell, amellyel véletlen politópot definiálhatunk a következő.

Legyen K olyan konvex test az E^d térben, amelynek térfogata egységnyi, így az egyenletes eloszláshoz tartozó valószínűségi mérték K-n megegyezik a Lebesgue-mértékkel. Válasszuk az $x_1, x_2, \dots, x_n$ véletlen pontokat K-ból egymástól függetlenül, az egyenletes eloszlás szerint. A pontok $\operatorname{conv}(x_1, \dots, x_n)$ konvex burkát a K-ba írt uniform véletlen politópnak hívjuk és K_n-nel jelöljük. A sztochasztikus geometria egyik központi problémája a K_n test viselkedésének megértése. A legfontosabb kérdés a K_n-t leíró geometriai funkcionálok meghatározása.

A kezdetektől fogva világos, hogy K_n uniform véletlen politóp viselkedése erősen függ a K anyatest határának szerkezetétől, az eddigi eredmények és a használt technikák is mutatják, hogy a két eset, amikor K határa sima, illetve amikor K politóp lényegesen eltér. Abban az esetben ha a K test ∂K határa C_+^3 sima, és így $\kappa(x) > 0$ minden $x \in \partial K$ esetén, R. Schneider és J.A. Wieacker [66]-ben bizonyította, hogy

$$W(K) - \mathbb{E}W(K_n) \sim \frac{2\Gamma(\frac{2}{d+1})}{d(d+1)^{\frac{d-1}{d+1}}\kappa_d \kappa_{d-1}^{\frac{2}{d+1}}} \int_{\partial K} \kappa(x)^{\frac{d+2}{d+1}}\, \mathrm{d}x \cdot \frac{1}{n^{\frac{2}{d+1}}}, \tag{5.5}$$

ahol $W(\,\cdot\,)$ az átlagszélességet jelöli, κ_d a d-dimenziós egységgömb térfogata, $\mathbb{E}(\,\cdot\,)$ pedig a várható értéket jelenti. 2004-ben a simasági feltételt M. Reitzner [53] C_+^2-ra gyengítette.

Az első célunk a (5.5) formulához szükséges simasági feltétel további általánosítása. Azt mondjuk, hogy a K konvex testnek van gördülő gömbje, ha létezik egy $\varrho > 0$ pozitív valós szám úgy, hogy minden $x \in \partial K$ pontot tartalmaz egy olyan ϱ sugarú gömb, amit tartalmaz K. D. Hug [41] megmutatta, hogy a gördülő gömb létezése ekvivalens azzal, hogy az $x \in \partial K$ pontban húzott külső normális vektor az x Lipschitz-folytonos függvénye. A 3. fejezet első fő eredményében tovább bővíttettük (5.5) formula érvényességi körét.

3.1.2. Tétel (45. old., [20] Böröczky, Fodor, Reitzner, Vígh)
Az (5.5) aszimptotikus formula minden olyan K konvex testre érvényes, amelynek létezik gördülő gömbje.

Továbbá a 46. oldalon található 3.1.3. példa mutatja, hogy létezik egy olyan K konvex test, amelynek határa egy pont kivételével C^∞_+ sima, és abban az egy pontban is C^1, de a (5.5) formula nem teljesül K testre. Ez a példa mutatja, hogy a 3.1.2. tétel állítása lényegében optimális.

A nagy számok erős törvényének igazolásához, valamint centrális határeloszlás tételekhez szükségünk van a szórásra adott aszimptotikus alsó és felső becslésekre. A 3. fejezet második fő eredményében nagyságrendileg helyes alsó és felső becslést adtunk a K_n uniform véletlen politóp minden kevert térfogatának szórására abban az esetben, ha a K anyatest határa C^2_+ sima.

3.1.5. Tétel (48. old., [10] Bárány, Fodor, Vígh)
Legyen K olyan konvex test az $\mathbb{E}^d$ térben, amelynek határa C^2_+ sima. Ekkor minden $s = 1, \ldots, d$ esetén léteznek γ_1 és γ_2 d-től, s-től és K-tól függő konstansok úgy, hogy

$$\gamma_1 n^{-\frac{d+3}{d+1}} \leq \operatorname{Var} V_s(K_n) \leq \gamma_2 n^{-\frac{d+3}{d+1}} \tag{5.6}$$

amint $n \to \infty$. $V_s(\,\cdot\,)$ az s-edik kevert térfogatot jelüli.

Továbbá, a 3.1.2. tételhez hasonlóan, a 3.1.6. tételben megmutattuk, hogy az átlagszélesség esetén a szorásra adott becslések a K-ra tett gyengébb simasági feltétel mellett is érvényesek.

3.1.6. Tétel (48. old., [20] Böröczky, Fodor, Reitzner, Vígh)
Ha K egységnyi térfogatú, d-dimenziós konvex test, amelynek létezik gördülő gömbje, akkor

$$\gamma_1\, n^{-\frac{d+3}{d+1}} < \operatorname{Var} W(K_n) < \gamma_2\, n^{-\frac{d+3}{d+1}},$$

ahol a γ_1, γ_2 konstansok d-től és K-tól függenek.

Megjegyezzük, hogy a 3.1.5. tétel bizonyítását teljes részletességgel csak abban az esetben végeztük el, amikor K az egységgömb, az általános esethez szükséges módosításokat csak vázoltuk. A 3.1.5. tételben és a 3.1.6. tételben az alsó korlátok igazolása nagyon hasonlóan történik, ezért csak a 3.1.5. tétel esetén igazoltuk az állítást. A felső becslések bizonyítása viszont teljesen eltérő. Egyrészről a 3.1.5. tételben a kulcslépés Bárány és Larman [11] gazdaságos sapkafedési tételének alkalmazása. Másrészt a 3.1.6. tétel bizonyításában integrálgeometriai eszközöket használtunk.

A (5.6) formula felső becsléséből, felhasználva a [3] és [53] cikkek fő eredményeit, levezethető a nagy számok erős törvénye. Ezt a 3.1.7. tételben fogalmaztuk meg.

3.1.7. Tétel (49. old, [10] Bárány, Fodor, Vígh)
Ha K egy konvex test, amelynek határa C^2_+ sima, K_n pedig a K-ba írt uniform véletlen politóp, akkor

$$\lim_{n\to\infty}(V_s(K)-V_s(K_n))\cdot n^{\frac{2}{d+1}} = c_{d,j}\cdot \kappa_d^{\frac{2}{d+1}}\int_S (\tau_{d-1}(x))^{\frac{1}{d+1}}\tau_{d-j}(x)\,\mathrm{d}x.$$

1 *valószínűséggel teljesül.*

A 3. fejezetet néhány nyitott probléma felsorolásával zártuk.

Irodalomjegyzék

[1] E. Artin: The gamma function, Holt, Rinehart and Winston, 1964.

[2] I. Bárány: Intrinsic volumes and f-vectors of random polytopes, *Math. Ann.*, **285** (1989), 671–699.

[3] I. Bárány: Random polytopes in smooth convex bodies, *Mathematika*, **39** (1992), no. 1, 81–92.

[4] I. Bárány: The technique of M-regions and cap-covering: a survey, *Supplemento Rend. Circ. Mat. Palermo*, **65** (1999), 21–38.

[5] I. Bárány: Sylvester's question: the probability that n points are in convex position, *Annals. of Prob.*, **27** (2000), 2020–2034.

[6] I. Bárány: A note on Sylvester's four-point problem, *Studia Math. Hung.*, **38** (2001), 73–77.

[7] I. Bárány: Random polytopes, convex bodies, and approximation, In: A. Baddeley, I. Bárány, R. Schneider, W. Weil, Stochastic Geometry (C.I.M.E. Course, Martina Franca, 2004), Lecture Notes Math., Springer.

[8] I. Bárány, C. Buchta: Random polytopes in a convex polytope, independence of shape, and concentration of vertices, *Math. Ann.*, **297** (1993), 467–497.

[9] I. Bárány, L. Dalla: Few points to generate a random polytope, *Mathematika*, **44** (1997), 325–331.

[10] I. Bárány, F. Fodor, V. Vígh: Intrinsic volumes of inscribed random polytopes in smooth convex bodies, (2009), 1–17, közlésre benyújtva, elektronikusan elérhető arXiv:0906.0309v1.

[11] I. Bárány, D. G. Larman: Convex bodies, economic cap coverings, random polytopes, *Mathematika*, **35** (1988), 274–291.

[12] I. Bárány, M. Reitzner: On the variance of random polytopes, *Adv. Math.*, (2010), 1–17, közlésre elfogadva.

[13] I. Bárány, M. Reitzner: Poisson polytopes, *Ann. Probab.*, (2010), 1–27, közlésre elfogadva.

[14] W. Blaschke: Über affine Geometrie XI: Lösung des "Vierpunktproblem" von Sylvester aus der Theorie der geometrischen Wahrscheinlichkeiten, *Leipziger Berichte*, **69** (1917), 436–453.

[15] W. Blaschke: Affine Differentialgeometrie. Springer, Berlin, 1923.

[16] K. J. Böröczky: Approximation of General Smooth Convex Bodies, *Adv. Math.* **153** (2000), 325–341.

[17] K. J. Böröczky: Polytopal approximation bounding the number of k-faces, *J. Approximation Th.*, **102** (2000), 263–285.

[18] K. J. Böröczky: About the error term for best approximation with respect to the Huasdorff related metrics, *Disc. Comp. Geom.*, **25** (2001), 293–309.

[19] K. J. Böröczky, F. Fodor, D. Hug: The mean width of random polytopes circumscribed around a convex body, (2009), 1–30, közlésre benyújtva, elektronikusan elérhető: arXiv:0901.3419v1.

[20] K. J. Böröczky, F. Fodor, M. Reitzner, V. Vígh: Mean width of random polytopes in a reasonable smooth convex body, *J. Multivariate Anal.*, **100** (2009), 2287–2295.

[21] K. J. Böröczky, F. Fodor, V. Vígh: Approximating 3-dimensional convex bodies by polytopes with a restricted number of edges, *Beiträge Algebra Geom.*, **49** (2008), no. 1, 177–193.

[22] K. J. Böröczky, S. S. Gomez, P. Tick: Volume approximation of smooth convex bodies by three-polytopes of restircted number of edges, *Monatsh. Math.*, **153** (2008), 23–48.

[23] K. J. Böröczky, M. Ludwig: Approximation of convex bodies and a momentum lemma for power diagrams, *Monats. Math.* **127** (1999), 101–110.

[24] K. J. Böröczky, P. Tick, G. Wintsche: Typical faces of best approximating three-polytopes, *Beit. Alg. Geom.*, **48** (2007), 521–545.

[25] P. Calka, T. Schreiber, J. E. Yukich: Brownian limits, local limits, extreme value and variance asymptotics for convex hulls in the ball, (2009), 1–65, közlésre benyújtva, elektronikusan elérhető arXiv:0912.4339v1.

[26] B. Efron: The convex hull of random set of points, *Biometrika*, **52** (1965), 331–343.

[27] B. Efron, C. Stein: The jackknife estimate of variance, *Ann. Statist.*, **9** (1981), no. 3., 586–596.

[28] L. Fejes Tóth: Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum, Springer, Berlin, 2nd ed., 1972.

[29] S. Glasauer, P. M. Gruber: Asymtoptic estimates for best and stepwise approximation of convex bodies III, *Forum Math.*, **9** (1997), 383–404.

[30] Y. Gordon, M. Meyer, S. Reisner: Volume approximation of convex bodies by polytopes – a constructive method, *Stud. Math.*, **111** (1994), 81–95.

[31] P. M. Gruber: Volume approximation of convex bodies by inscribed polytopes, *Math. Ann.*, **281** (1988), 229–245.

[32] P. M. Gruber: Volume approximation of convex bodies by circumscribed polytopes, In: Applied geometry and discrete mathematics, DIMACS Ser.Discrete Math. Theoret. Comput. Sci., **4**, Amer. Math. Soc., 1991, 309–317.

[33] P. M. Gruber: Asymtoptic estimates for best ans stepwise approximating convex bodies I., *Forum Math.*, **5** (1993), 281–297.

[34] P. M. Gruber: Asymtoptic estimates for best ans stepwise approximating convex bodies II., *Forum Math.*, **5** (1993), 521–538.

[35] P. M. Gruber: Comparisons of best and random approximation of convex bodies by polytopes, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **50** (1997), 189–216.

[36] P. M. Gruber: Asymtoptic estimates for best ans stepwise approximating convex bodies IV, *Forum Math.*, **10** (1998), 665–686.

[37] P. M. Gruber: Optimal configurations of finite sets in Riemannian 2-manifolds, *Geom. Dedicata*, **84** (2001), 271–320.

[38] P. M. Gruber: Error of asymptotic formulae for volume approximation of convex bodies in $\mathbb{E}^d$, *Monatsh. Math.*, **135** (2002), 279–304.

[39] P. M. Gruber: Convex and discrete geometry, Springer, Berlin, 2007.

[40] P. M. Gruber, P. Kenderov: Approximation of convex bodies by polytopes, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **31** (1982), 195–225.

[41] D. Hug: Measures, curvatures and currents in convex geometry, Habilitationsschrift, Univ. Freiburg, 2000.

[42] K.-H. Küfer: On the approximation of the ball by random polytopes, *Adv. Applied Prob.*, **26** (1994), 876–892.

[43] M. A. Lopez, S. Reisner: Linear time approximation of 3D convex polytopes, *Computational Geometry*, **23** (2002), 291–301.

[44] M. Ludwig: Asymtotic approximation of convex curves, *Arch. Math.*, **63** (1994), 377–384.

[45] M. Ludwig: Asymtotic approximation of convex curves: the Hausdorff metric case, *Arch. Math.*, **70** (1998), 331–336.

[46] M. Ludwig: Asymptotic approximation of smooth convex bodies by general polytopes, *Mathematika*, **46** (1999), 103–125.

[47] M. Ludwig: A characterization of affine length and asymptotic approximation of convex discs, *Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg*, **69** (1999), 75–88.

[48] M. Ludwig, M. Reitzner: A characterization of affine surface area, *Adv. Math.*, **147** (1999), no. 1, 138–172.

[49] A. M. Macbeath: An extremal property of the hypersphere, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **47** (1951), 245–247.

[50] D. E. McClure, R. A. Vitale: Polygonal approximation of plane convex bodies, *J. Math. Anal. Appl.*, **55** (1975) 326–358

[51] F. Morgan: Geometric Measure Theory, A Beginner's Guide, Academic Press, London, 1988.

[52] M. Reitzner: Random polytopes and the Efron-Stein jackknife inequality, *Ann. Probab.*, **31** (2003), 2136–2166.

[53] M. Reitzner: Stochastic approximation of smooth convex bodies, *Mathematika*, **51** (2004), 11–29.

[54] M. Reitzner: Central limit theorems for random polytopes, *Probab. Theory Relat. Fields*, **133** (2005), 483–507.

[55] A. Rényi, R. Sulanke: Über die konvexe Hülle von n zufällig gewählten Punkten, *Z. Wahrscheinlichkeitsth. verw. Geb.*, **2** (1963), 75–84.

[56] A. Rényi, R. Sulanke: Über die konvexe Hülle von n zufällig gewählten Punkten II., *Z. Wahrscheinlichkeitsth. verw. Geb.*, **3** (1964), 138–147.

[57] A. Rényi, R. Sulanke: Zufällige konvexe Polygone in einem Ringgebiet. *Z. Wahrscheinlichkeitsth. verw. Geb.*, **9** (1968), 146–157.

[58] E. Sas: On a certain extremum-property of the ellipse, *Compositio Math.*, **6** (1939), 468–470.

[59] R. Schneider: Zur optimalen Approximation konvexer Hyperflächen durch Polyeder, *Math. Ann.*, **256** (1981), 289–301.

[60] R. Schneider: Approximation of convex bodies by random polytopes, *Aequationes Math.*, **32** (1987), 304–310.

[61] R. Schneider: Convex Bodies: the Brunn-Minkowski Theory, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[62] R. Schneider: Integral Geometric Tools for Stochastic Geometry, In: A. Baddeley, I. Bárány, R. Schneider, W. Weil, Stochastic Geometry (C.I.M.E. Course, Martina Franca, 2004), Lecture Notes Math., Springer.

[63] R. Schneider: Discrete aspects of Stochastic Geometry, In: J.E. Goodman, J. O'Rourke (eds.), Handbook of Discrete and Computational Geometry, 2nd ed., CRC Press, Boca Raton 2004, pp. 255–278.

[64] R. Schneider: Recent Results on Random Polytopes, *Boll. Unione Mat. Ital. (9)*, **1** (2008), no. 1., 17–39.

[65] R. Schneider, W. Weil: Stochastic and Integral Geometry, Springer, Berlin, 2008.

[66] R. Schneider, J.A. Wieacker: Random polytopes in a convex body, *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, **52** (1980), 69–73.

[67] T. Schreiber, J. E. Yukich: Variance asymptotics and central limit theorems for generalized growth processes with applications to convex hulls and maximal points, *Ann. Probab.*, **36** (2008), no. 1, 363–396.

[68] C. Schütt: Random polytopes and affine surface area, *Math. Nachr.*, **170** (1994), 227–249.

[69] J. J. Sylvester: Question 1491., *Educational Times*, London, 1864.

[70] J. J. Sylvester: Report of the British Association, **35** (1865), 8–9.

[71] S. Tabachnikov: On dual billiard problem, *Adv. Math.*, **115** (1995), 221–249.

[72] V. Vígh: Typical faces of best approximating polytopes with a restricted number of edges, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **75** (2009), no. 1-2, 313–327.

[73] V. Vu: Central limit theorems for random polytopes in a smooth convex set, *Adv. Math.*, **207** (2006), 221–243.

[74] W. Weil, J. A. Wieacker: Stochastic geometry, In: P.M. Gruber, J.M. Wills (eds.), Handbook of Convex Geometry, North-Holland, Amsterdam 1993, pp. 1391–1438.