SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI ÉS INFORMATIKAI KAR
MATEMATIKA- ÉS SZÁMÍTÁSTUDOMÁNYOK DOKTORI ISKOLA

MULTIKROMATIKUS SZÁMOKRA VONATKOZÓ TOPOLOGIKUS ALSÓKORLÁT TÉTELEK

Ph.D. értekezés
Osztényi József

Témavezető:
Dr. Kincses János
Bolyai Intézet

SZEGED
2010.

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Kincses Jánosnak, hogy színes előadásaival felkeltette az érdeklődésemet az algebrai topológia iránt. Ezeken az órákon, majd az ezt követő konzultációkon sokat tanultam Tőle. Továbbá köszönet illeti azért a rengeteg segítségért és tanácsért, amit az eddigi munkáimhoz adott.

Bevezetés

Lovász Lászlónak a Kneser sejtésre adott 1978-as [22] bizonyításával kezdődött a kombinatorikus topológia témakörén belül a gráfok kromatikus számaira vonatkozó topologikus alsókorlát tételek vizsgálata. Lovász egy tetszőleges G gráf kromatikus számára az általa bevezetett szomszédsági komplexus topologikus összefüggőségi számával adott alsó korlátot. Következő lépésként J.W. Walker 1983-as [35] cikkében definiálta a Lovász komplexust. Ezt a szomszédsági komplexusról a nem lényeges szimplexek lefejtésével kapta meg. Ezen komplexuson a "közös szomszéd" leképezés egy $\mathbb{Z}_2$-hatást adott. Ezt kihasználva egy elegáns bizonyítását adta Lovász tételének, ugyanis definiált egy a gráfok és gráfhomomorfizmusok, és a $\mathbb{Z}_2$-terek és $\mathbb{Z}_2$-leképezések kategóriái közti funktort. 2003-ban J. Matoušek és G.M. Ziegler a Lovász komplexussal homotóp ekvivalens box komplexust vizsgálták, amely $\mathbb{Z}_2$-indexével adtak alsó korlátot a kromatikus számra [24]-ben. Napjainkban a box komplexus általánosításaként kapott gráfhomomorfizmus komplexussal kapcsolatos vizsgálatok folynak [3]. E. Babson és D.N. Kozlov [2]-ben ezen komplexus topologikus invariánsával, a Stiefel-Whitney osztállyal, fogalmazott meg topologikus alsó korlátot a kromatikus számra.

Ezzel párhuzamosan a posetek topologikus tulajdonságaival kapcsolatos kutatások indultak meg (lásd [6]). Ezt követte a komplexuson értelmezett topologikus eljárások posetekre való átültetése. Ilyen például a komplexusok átfejthetőségére vonatkozó parciális párosítási technika [5], illetve a R. Forman [14] által kidolgozott diszkrét Morse elmélet.

A gráfok s-szeres színezését ugyancsak az 1970-es években vezették be számos gyakorlati probléma által vezérelve [27]-ben. Ezzel kapcsolatos legelső eredményeket Saul Stahl 1978-as [32] cikke tartalmazza. Stahl a Kneser sejtés által motiválva, valamint a Kneser gráfoknak a s-szeres színezésekben betöltött központi szerepet kapcsán megfogalmazta a Kneser sejtés általánosítását, a Kneser gráfok multikromatikus számaira vonatkozó sejtését. A Stahl [32] által adott, ezen multikromatikus számokra vonatkozó, felőkorlát megegyezik a sejtett értékkel. Az eddig ismert alsó korlátok (Stahl [32] és [33]) viszont kevés esetben élesek. Azaz a sejtés csak speciális esetekre igazolt.

Eddigi kutatásaim során a Stahl sejtés által motiválva a fent említett, gráfok kromatikus számára vonatkozó topologikus alsókorlát tételek multikromatikus számokra való átvitelét vizsgáltuk. A Walker-féle, illetve Babson-Kozlov-féle tételek általánosítását meg is adtuk [29]. Mindeközben, önmagukban is érdekes, komplexusok homotópia típusát határoztuk meg. A Lovász-féle, valamint a Babson-Kozlov-féle tételeket alkalmazva a G gráf teljes gráffal vett lexikografikus szorzatára, újabb topologikus alsókorlát tételeket kaptunk a multikromatikus számokra [12]. Ehhez a $G[K_s]$ lexikografikus szorzat szomszédsági, illetve gráfhomomorfizmus komplexusának topologikus invariánsait határoztuk meg. Ezeket a topologikus alsókorlát tételeket alkalmazva a Kneser gráfokra, néhány, már ismert esetekben tudtuk igazolni a Stahl sejtést, valamint bizonyos esetekben jobb alsó korlátot kaptunk a multikromatikus számokra. A [28] cikkben a topologikus akadályok mellett az ortokörök szimpliciális méretét is vizsgálva a sejtést újabb, eddig nem ismert, esetekben igazoltuk.

1. Előkészületek

Ezen fejezetben összegyűjtjük az alapvető fogalmakat, jelöléseket és tételeket. Mivel ezek legtöbbje jól ismert, így csak rövid ismertetését adjuk ezeknek, az állítások bizonyításait elhagyjuk. A fogalmak és eljárások részletes ismertetését, valamint az állítások bizonyítását megtaláljuk Maunder [26], Bredon[8], Matoušek [23] és Kozlov [20] könyveiben.

1.1. Gráfelméleti elemek

Valamennyi, a dolgozatban vizsgált G gráfról feltesszük, hogy véges, egyszerű és összefüggő. A csúcsok halmazát $V(G)$-vel, az élek halmazát pedig $E(G)$-vel jelöljük. Példaként vegyük az m-csúcsú teljes gráfot, K_m-et, melyre $V(K_m) = \{1, \ldots, m\} = [m]$ és $E(K_m) = \binom{[m]}{2}$. A dolgozatban többször indukált részgráffal dolgozunk majd, melyek közül a legegyszerűbb a csúcsok egy $A \subseteq V(G)$ részhalmaza által indukált részgráf, amit G_A-val jelölünk. Továbbá az $A_1, A_2 \subseteq V(G)$ csúcshalmazokra $G_{(A_1,A_2)}$ legyen G azon részgráfja, melynek csúcshalmaza $A_1 \cup A_2$ és uv akkor és csak akkor él $G_{(A_1,A_2)}$-ben, ha uv éle G-nek és $u \in A_1$ és $v \in A_2$, vagy fordítva.

Két tetszőleges gráfból újabb gráfot kapunk a következő konstrukciók segítségével. G és H *join szorzata* az a $G * H$ gráf, melynek csúcshalmaza $V(G) \cup V(H)$, és $G*H$ két csúcsa, u és v, akkor és csak akkor van éllel összekötve, ha uv éle G-nek vagy H-nak, vagy u csúcsa G-nek és v csúcsa H-nak vagy fordítva. A $G[H]$ *lexikografikus szorzatnak* a csúcshalmaza $V(G) \times V(H)$, és két csúcsa (u_1, u_2) és (v_1, v_2) akkor és csak akkor van éllel összekötve, ha u_1v_1 éle G-nek vagy $u_1 = v_1$ és u_2v_2 éle H-nak.

A gráfok, mint objektumok, az alábbi morfizmusokkal, kategóriát alkotnak. Egy $\gamma : G \to H$ *gráfhomomorfizmuson*, egy olyan $\gamma : V(G) \to V(H)$ leképezést értünk, mely élet élbe visz, azaz ha $uv \in E(G)$, akkor $\gamma(u)\gamma(v) \in E(H)$.

Egy G gráf t *színnel való (csúcs)színezésén* egy $\gamma : G \to K_t$ gráfhomomorfizmust értünk, ha létezik ilyen leképezés. A $\chi(G)$ *kromatikus szám* pedig az a legkisebb t egész, melyre létezik $\gamma : G \to K_t$ gráfhomomorfizmus.

1.2. Algebrai topológiai eszközök

Homotópia és homotópia típus

Legyen X_1, X_2 két topologikus tér. Az $f_1, f_2 : X_1 \to X_2$ leképezések *homotóp ekvivalensek* ($f_1 \sim f_2$), ha létezik $F : X_1 \times [0,1] \to X_2$ folytonos leképezés (homotópia) úgy, hogy $F(x,0) = f_1(x)$ és $F(x,1) = f_2(x)$ minden $x \in X_1$ esetén. Két topologikus tér, X_1, X_2 *homotóp ekvivalens*, illetve ugyanaz a *homotópia típusuk*, ha léteznek $f_1 : X_1 \to X_2$ és $f_2 : X_2 \to X_1$ leképezések úgy, hogy

$$f_2 \circ f_1 \sim id_{X_1} \quad \text{és} \quad f_1 \circ f_2 \sim id_{X_2},$$

jelben $X_1 \sim X_2$. Az egy pontú topologikus térrel homotóp ekvivalens teret *pontra összehúzhatónak* hívjuk. Előfordul, hogy egy X topologikus tér egy A alterével homotóp ekvivalens. Speciálisan az A altér *deformációs retraktuma* X-nek, ha létezik $r : X \to A$ folytonos leképezés, melyre $i \circ r : X \to X$ homotóp ekvivalens az id_X identikus leképezéssel, ahol $i : A \to X$ az A altér természetes beágyazása X-be. Az $r : X \to A$ leképezést *deformációs retrakciónak* nevezzük.

Legyen X egy tetszőleges összefüggő topologikus tér és i pozitív egész. Jelölje $\pi_i(X)$ az $f : S^i \to X$ leképezések homotópia osztályainak halmazát. Ezen halmazok felruházhatók csoportstruktúrával (lásd Maunder [26]), mely csoportok az X tér *homotópia csoportjai*, jelben ugyancsak $\pi_i(X)$. Természetesen homotóp ekvivalens terek homotópia csoportjai izomorfak.

Topologikus összefüggőség

Két topologikus tér homotópia típusának különbözőségét gyakran egyszerűen megállapíthatjuk a terekben található "lyukak" méretének segítségével. Ezen lyukak dimenzióját méri a topologikus összefüggőség.

Az $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ *n-dimenziós gömböt* jelölje B^n, a határát $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$, azaz az $(n-1)$-*dimenziós gömbfelületet* pedig S^{n-1}.

Az X topologikus tér *k-összefüggő*, ha tetszőleges $f: S^j \to X$ folytonos leképezés kiterjeszthető egy $B^{j+1} \to X$ folytonos leképezéssé, minden $0 \leq j \leq k$-ra. Azaz az X topologikus tér pontosan akkor k-összefüggő, ha minden $f: S^j \to X$ folytonos leképezés homotóp ekvivalens egy $c: S^j \to X$ konstans leképezéssel $0 \leq j \leq k$-ra. Az X topologikus tér *összefüggőségi száma*, $\mathrm{conn}(X)$ az a legnagyobb k, melyre X k-összefüggő.

Topologikus konstrukciók

Az X és Y topologikus terekből az alábbi konstrukciókkal újabb topologikus tereket kapunk. Az egyik legegyszerűbb ilyen eljárás, amikor a két teret két, kitüntetett pontjuknál "összeragasztjuk". Azaz az $X \vee Y$ *wedge szorzat* legyen az $X \cup Y$ diszjunkt unió $\{x_0, y_0\}$-lal való faktorizáltja, ahol $x_0 \in X$ és $y_0 \in Y$ a kitüntetett pontok. Természetesen tetszőleges számú $\{X_i\}_{i \in I}$ térnek vehetjük a fentinek megfelelő $\bigvee_{i \in I} X_i$ wedge szorzatát. A későbbiekben abban a speciális esetben találkozunk a $\bigvee_{i \in I} X_i$ térrel, amikor valamennyi X_i egy gömbfelület lesz, ezen teret *gömbcsokornak* nevezzük. A későbbiekben az egy pontú teret 0 darab gömbfelület csokrának tekintjük. Egy másik, ugyancsak hasznos konstrukció a két tér *join szorzata* $X * Y$, ami az $X \times Y \times [0,1]/\approx$ faktortér, ahol a $\approx$ a következő ekvivalencia reláció: $(x, y, 0) \approx (x', y, 0)$ minden $x, x' \in X$ és $y \in Y$ esetén, és $(x, y, 1) \approx (x, y', 1)$ minden $x \in X$ és $y, y' \in Y$ esetén. Egy X tér és egy egypontú tér joinszorzata: $cX = X * \{x_0\}$ az X feletti *kúp*. Egy X tér és egy kétpontú tér joinszorzatát, $X * S^0$, X *szuszpenziójának* nevezzük és sX-szel jelöljük. Topologikus terek join szorzatának topologikus tulajdonságát Milnor vizsgálta a [25] cikkében. Ezen cikk következő állítását fogjuk többször használni a dolgozatban.

1. Állítás. (Milnor [25]) *Legyen X k-összefüggő és Y l-összefüggő topologikus tér. Ekkor $X * Y$ $(k + l + 2)$-összefüggő.*

$\mathbb{Z}_2$-tér és $\mathbb{Z}_2$-index

A dolgozatban vizsgált legtöbb X topologikus téren adott lesz egy $\nu: X \to X$ homeomorfizmus, mely idempotens és fixpontmentes leképezés. Az ilyen ν leképezéseket *$\mathbb{Z}_2$-hatásnak*, az X teret pedig *$\mathbb{Z}_2$-térnek* nevezzük. Standard példa az S^d gömbfelületet a $\nu(x) = -x$ $\mathbb{Z}_2$-hatással. Az (X, ν) és (Y, μ) $\mathbb{Z}_2$-terek közti f folytonos leképezés *$\mathbb{Z}_2$-leképezés*, ha f felcserélhető a $\mathbb{Z}_2$-hatásokkal. Az (X, ν) és (Y, μ) $\mathbb{Z}_2$-terek *$\mathbb{Z}_2$-homotóp ekvivalensek*, ha léteznek $f_1: X_1 \to X_2$ és $f_2: X_2 \to X_1$ $\mathbb{Z}_2$-leképezések úgy, hogy

$$f_2 \circ f_1 \sim id_{X_1} \quad \text{és} \quad f_1 \circ f_2 \sim id_{X_2}.$$

Az algebrai topológia egyik legeredményesebb eszköze a Borsuk-Ulam tétel. Matoušek [23] könyvében és Steinlein [34] cikkében számos kiterjesztését és általánosítását, valamint érdekes alkalmazását találjuk. Borsuk 1933-as antipodális tételének öt ekvivalens verziója:

2. Tétel. (Borsuk-Ulam tétel [7] [23])
(i) Bármely $f : S^d \to \mathbb{R}^d$ *folytonos leképezés esetén létezik* $x \in S^d$*, hogy* $f(x) = f(-x)$*.*
(ii) Bármely $f : S^d \to \mathbb{R}^d$ $\mathbb{Z}_2$*-leképezésre létezik* $x \in S^d$*, hogy* $f(x) = 0$*.*
(iii) Nem létezik $f : S^n \to S^d$ $\mathbb{Z}_2$*-leképezés, ha* $n > d$*.*
(iv) Tetszőleges X d*-összefüggő* $\mathbb{Z}_2$*-tér esetén, nem létezik* $f : X \to S^d$ $\mathbb{Z}_2$*-leképezés.*
(v) S^d *minden olyan* $d+1$ *elemű lefedése esetén, melyre a lefedésben szereplő részhalmazok mind nyíltak vagy mind zártak, létezik egy részhalmaz, mely antipodális pontokat tartalmaz. (Borsuk-Liusternik-Schnirelman)*

Az S^d gömbfelület kitüntetett szerepe folytán került bevezetésre az X $\mathbb{Z}_2$-tér $\mathbb{Z}_2$-*indexe*, mely az a legkisebb d egész, melyre létezik $f : X \to S^d$ $\mathbb{Z}_2$-leképezés. Jelben: $\mathrm{ind}(X)$. A $\mathbb{Z}_2$-index tulajdonságait a következő állításban összegezzük.

3. Állítás. ([23])
(i) Ha létezik $f : X \to Y$ $\mathbb{Z}_2$*-leképezés, akkor* $ind(X) \leq ind(Y)$*.*
(ii) $ind(S^d) = d$*, minden* $d \geq 0$*-ra.*
(iii) Ha X $(d-1)$*-összefüggő, akkor* $ind(X) \geq d$*.*

Amint ezen állítás is mutatja, míg a $\mathrm{conn}(X)$ összefüggőségi szám az X térben található legkisebb "lyuk" dimenzióját adja, addig az $\mathrm{ind}(X)$ index az X $\mathbb{Z}_2$-térben található legnagyobb $\mathbb{Z}_2$-"lyuk" dimenzióját.

Geometriai szimpliciális komplexus

A szimpliciális komplexusok jelentik a kapcsolatot a kombinatorika és a topológia közt, ugyanis egyszerre hordozzák egy diszkrét objektum és egy topologikus tér tulajdonságait. Ennek következtében számos topologikus tulajdonság kombinatorikus eszközökkel meghatározható, illetve a topologikus tulajdonságokból az eredeti komplexus egyéb kombinatorikus tulajdonságaira következtethetünk vissza.

Az $\mathbb{R}^n$ n-dimenziós valós tér $a^0, a^1, \ldots, a^n$ affin független pont $(n+1)$-esének konvex burkát, $conv\{a^0, a^1, \ldots, a^n\}$-et, *geometriai* n*-szimplexnek* nevezzük. Az $a^0, a^1, \ldots, a^n$ pontokat a szimplex *csúcsainak*, a csúcsok tetszőleges l-elemű részhalmazának konvex burkát pedig a szimplex *lapjának* nevezzük ($l \leq n+1$).

Egy Λ *geometriai szimpliciális komplexuson* véges sok geometriai szimplex halmazát értjük, mindegyik ugyanazon $\mathbb{R}^m$-beli, úgy, hogy

(i) ha $\sigma \in \Lambda$ és τ lapja σ-nak, akkor $\tau \in \Lambda$,

(ii) ha $\sigma, \tau \in \Lambda$, akkor $\sigma \cap \tau$ vagy üres halmaz, vagy lapja mind σ-nak, mind τ-nak.

Két Λ_1 és Λ_2 szimpliciális komplexus közti $\phi : \Lambda_1 \to \Lambda_2$ *szimpliciális leképezésen* egy a csúcsaik közti olyan $\phi : \Lambda_1^0 \to \Lambda_2^0$ megfeleltetést értünk, melyre $conv\{\phi(v) : v \text{ csúcsa } \sigma\text{-nak}\}$ szimplex Λ_2-ben, minden $\sigma \in \Lambda_1$-re.

Fontos megjegyezni, hogy egy Λ szimpliciális komplexus nem topologikus tér, csupán egy halmaz, melynek elemei geometriai szimplexek. Azonban $\mathbb{R}^m$ azon pontjainak halmaza, melyeket Λ legalább egyik szimplexe tartalmaz, az öröklött topológiával felruházva egy topologikus tér, melyet Λ *poliéderének* hívjuk és $|\Lambda|$-val jelöljük. Egy $\phi : \Lambda_1 \to \Lambda_2$ szimpliciális leképezés $|\Lambda_1|$-re való affin kiterjesztése, $|\phi| : |\Lambda_1| \to |\Lambda_2|$ folytonos leképezés. Ha a Λ szimpliciális komplexusnak valamilyen topologikus tulajdonságot adunk, akkor mindig $|\Lambda|$-ra gondolunk.

Tetszőleges X_1, X_2 homotóp ekvivalens topologikus terek homotópia csoportjai izomorfak. Ez Λ_1, Λ_2 szimpliciális komplexusokra fordítva is igaz.

4. Tétel. (Whitehead tétel [26]) *Ha a Λ_1, Λ_2 szimpliciális komplexusokra $\pi_i(\Lambda_1) \cong \pi_i(\Lambda_2)$ minden $i \in \mathbb{N}$-re, akkor $\Lambda_1 \simeq \Lambda_2$.*

A következő állítás egy d-dimenziós Λ szimpliciális komplexus homotópia típusát adja meg abban az esetben, ha Λ $(d-1)$-összefüggő.

5. Állítás. (Björner [6]) *Legyen Λ egy d-dimenziós szimpliciális komplexus. Ekkor Λ akkor és csakis akkor $(d-1)$-összefüggő ha Λ homotóp ekvivalens egy d-dimenziós gömbcsokorral.*

Egy Λ szimpliciális komplexus *szimpliciális $\mathbb{Z}_2$-komplexus*, ha adott rajta egy olyan $\nu : \Lambda \to \Lambda$ szimpliciális leképezés, melyre $|\nu|$ $\mathbb{Z}_2$-hatás $|\Lambda|$-n. Ekkor ν-t *szimpliciális $\mathbb{Z}_2$-hatásnak* nevezzük. Két szimpliciális $\mathbb{Z}_2$-tér közötti f szimpliciális leképezés *szimpliciális $\mathbb{Z}_2$-leképezés*, ha f kommutál a $\mathbb{Z}_2$-hatásokkal. Egy Λ szimpliciális $\mathbb{Z}_2$-komplexus topologikus tulajdonságainak ismeretében a $\mathbb{Z}_2$-indexére a 3. állítás pontjain túl további ismereteink vannak.

6. Állítás. ([23]) *Ha Λ d-dimenziós szimpliciális $\mathbb{Z}_2$-komplexus, akkor bármely Y $(d-1)$-összefüggő $\mathbb{Z}_2$-tér esetén létezik $f : |\Lambda| \to Y$ $\mathbb{Z}_2$-leképezés, és így $ind(\Lambda) \leq d$.*

CW-komplexus

A dolgozatban javarészt szimpliciális komplexusokon fogunk dolgozni, CW-komplexust csak néhány esetben, adott szimpliciális komplexusok topologikus struktúrájának meghatározása során fogunk kapni. Ezért itt csak a véges dimenziós CW-komplexus definícióját adjuk meg, az általános leírását lásd a fenti könyvek valamelyikében. Egy m-dimenziós *CW-komplexuson* egy Δ topologikus teret és a $\Delta^0 \subset \Delta^1 \subset \cdots \subset \Delta^m = \Delta$ alterek sorozatát értjük, melyre az alábbi tulajdonságok teljesülnek.

(i) Δ^0 diszkrét tér.

(ii) Minden $1 \leq k \leq m$-re létezik A_k indexhalmaz és léteznek $\phi_\alpha^k : S_\alpha^{k-1} \to \Delta^{k-1}$ folytonos leképezések $\alpha \in A_k$-ra. A Δ^k tér pedig éppen egyenlő azzal a topologikus térrel, amit úgy kapunk, hogy a ϕ_α^k leképezésekkel a Δ^{k-1} térhez ragasztjuk a B_α^k cellákat.

Homológia

A homotópiánál könnyebben kezelhető a homológia, mely ugyancsak számos topologikus információt hordoz. Egy X topologikus tér $H_i(X)$ homológia csoportjának elemei az $f : \Delta_i \to X$ leképezések formális összegeinek homológia osztályai. Ezen formális összegek homológ ekvivalenciájának definiálását [26]-ban megtaláljuk, mi most ezt elhagyjuk. Az X tér redukált homológia csoportjait jelöle $\widetilde{H}_i(X)$ [26]. Azt mondjuk, hogy X *k-aciklikus*, ha $\widetilde{H}_i(X) = 0$ minden $i \leq k$-ra. A (-1)-aciklikus X tér nemüres, a 0-aciklikus X tér nemüres és összefüggő. Továbbá X *aciklikus*, ha $\widetilde{H}_i(X) = 0$ minden $i \in \mathbb{Z}$-re.

Az alábbi állítás egy Λ szimpliciális komplexus homotopikus tulajdonsága és homológiája közötti kapcsolatról szól.

7. Állítás. ([8]) *Legyen Λ egy szimpliciális komplexus.*
(i) Λ akkor és csakis akkor pontra összehúzható, ha aciklikus és egyszeresen összefüggő.
(ii) Λ akkor és csakis akkor k-összefüggő, ha k-aciklikus és egyszeresen összefüggő.

Egy Λ aciklikus szimpliciális komplexus az alábbi fixpont tulajdonsággal rendelkezik.

8. Állítás. ([8]) *Ha a* Λ *szimpliciális komplexus aciklikus, akkor minden* $f : |\Lambda| \to |\Lambda|$ *folytonos leképezésnek van fixpontja.*

1.3. Kombinatorikus topológiai módszerek

Absztrakt szimpliciális komplexus

Egy szimpliciális komplexust megadhatunk olymódon is, hogy felsoroljuk a szimplexeit és megadjuk a köztük levő tartalmazás relációt. Az általunk vizsgált szimpliciális komplexusokat ilymódon nyerjük. Egy ilyen komplexushoz minden esetben találunk egy megfelelő dimenziós valós térbeli geometriai szimpliciális komplexust.

Absztrakt szimpliciális komplexuson egy $\mathcal{K} = (V, \mathcal{K})$ párt értünk, ahol V (*absztrakt*) *csúcsok* egy véges halmaza, $\mathcal{K}$ pedig V nem üres véges részhalmazainak, (*absztrakt*) *szimplexek* halmaza úgy, hogy $\emptyset \neq \sigma \subseteq \tau \in \mathcal{K}$ akkor $\sigma \in \mathcal{K}$. A későbbiekben szimpliciális komplexuson mindig absztrakt szimpliciális komplexust értünk.

Egy $\sigma \in \mathcal{K}$ szimplex *dimenzióján* a $\dim \sigma = \operatorname{card} \sigma - 1$ számot értjük, a $\mathcal{K}$ szimpliciális komplexus *dimenzióján* pedig a $\dim \mathcal{K} = \max_{\sigma \in K} \dim \sigma$ számot értjük.

Legyen Λ egy geometriai szimpliciális komplexus. Ekkor legyen $\mathcal{K}$ az az absztrakt szimpliciális komplexus, melynek csúcsai és Λ csúcsai között bijektív megfeleltetés van, valamint a csúcsok egy részhalmaza akkor és csakis akkor szimplex $\mathcal{K}$-ban, ha a neki megfelelő csúcsok Λ valamely szimplexének a csúcsai. A $\mathcal{K}$ absztrakt szimpliciális komplexust Λ *absztrakciójának* hívjuk. Egy olyan geometriai szimpliciális komplexust, melynek $\mathcal{K}$ az absztrakciója, $\mathcal{K}$ *geometriai realizáltjának* nevezzük. Ezután valahányszor egy $\mathcal{K}$ szimpliciális komplexusnak valamilyen topologikus tulajdonságot adunk, akkor mindig egy geometriai realizáltjának poliéderére gondolunk.

Poset és lapposet

Szimpliciális komplexusból természetes módon kapunk posetet, azaz részbenrendezett halmazt, illetve posetből szimpliciális komplexust. Egy $\mathcal{K}$ szimpliciális komplexus *lap posetje* legyen az a $P(\mathcal{K}) = (\mathcal{K}, \subseteq)$ poset, melynek alaphalmazát a $\mathcal{K}$ szimplexei alkotják és a tartalmazás a részbenrendezés. Egy P poset *rendezés komplexusa* pedig az a $\mathcal{K}(P)$ szimpliciális komplexus, melynek csúcsai a P poset elemei és a k-szimplexei pedig az $x_0 < x_1 < \cdots < x_k$ P-beli k-láncok. Ha egy P posetnek topologikus tulajdonságot adunk, mindig a $|\mathcal{K}(P)|$ poliéderre gondolunk. Egy $\mathcal{L}$ szimpliciális komplexus *baricentrikus felbontásán* az $sd(\mathcal{L}) = \mathcal{K}(P(\mathcal{L}))$ szimpliciális komplexust értjük. Ismert, hogy $|sd(\mathcal{L})| \cong |\mathcal{L}|$. Hasonlóan egy P poset rendezés komplexusának lapposetjét $sd(P)$-vel jelöljük.

Példaként tekintsük egy σ geometriai $(m-1)$-szimplex absztrakcióját, azaz azt a $K(\sigma)$ szimpliciális komplexust, mely alaphalmaza $V = \{1, \ldots, m\}$ és V összes részhalmaza szimplexe $\mathcal{K}(\sigma)$-nak. Ekkor $\mathcal{K}(\sigma)$ lapposetje éppen B_m az $[m] = \{1, \ldots, m\}$ halmaz összes részhalmazának tartalmazásra nézve vett posetje. A későbbiekben ezen posetek következő részposetjei fogjuk vizsgálni: $C^k_{m,n}$ pontjai legyenek az $[m]$ halmaz legalább n és legfeljebb $n+k$ elemű részhalmazai, ahol m, n és k pozitív egészek, melyekre $n + k \leq m$. Az $m = 2n + k$ speciális esetben a $C^k_{m,n}$ posetet $B_{m,n}$-nel jelöljük, azaz a B_m poset középső szeletét.

Legyen P összefüggő poset és p, p' két tetszőleges pontja P-nek. Az $F = \{f_0, \ldots, f_q\} \subseteq P$ részposet *P-beli q-út* p és p' között, ha $f_0 = p$, $f_q = p'$ és $f_i < f_{i+1} > f_{i+2}$, vagy $f_i > f_{i+1} < f_{i+2}$ minden $i = 0, \ldots, q-2$-re, és nincs más egyéb reláció bármely két különböző elem közt. Az (f_i, f_{i+1}) pár *felfelé lépés*, ha $f_i < f_{i+1}$, és *lefelé lépés*, ha $f_i > f_{i+1}$. Egy q-út *hossza* q. P két különbözö p és p' pontjai közti *$d(p, p')$ távolság* a p és p' közti legrövidebb út hossza.

Az $f : P_1 \to P_2$ posetleképezés *monoton*, ha vagy rendezéstartó ($p \leq q \Rightarrow f(p) \leq f(q)$) vagy rendezésfordító ($p \leq q \Rightarrow f(q) \leq f(p)$). Világos, hogy egy $f : P_1 \to P_2$ monoton leképezés esetén

$$d(p, p') \geq d(f(p), f(p'))$$

minden $p, p' \in P_1$-re.

Ortoposet és ortoleképezés

Egy σ geometriai $(m-1)$-szimplex határának absztrakciója, a $K(\dot{\sigma})$ nem szimpliciális $\mathbb{Z}_2$-komplexus, holott $\dot{\sigma} \cong S^{m-1}$. Ám a $P(\mathcal{K}(\dot{\sigma}))$ poseten, $B_{m,1}$-en a komplementer képzés egy szimpliciális $\mathbb{Z}_2$-hatást indukál $sd(\dot{\sigma})$-on. Ennek mintájára egy P posetet *ortoposetnek* hívunk, ha van rajta egy $\nu : P \to P$ poset leképezés, mely:
(i) rendezésfordító,
(ii) idempotens,
(iii) p és $\nu(p)$ nem összehasonlítható bármely $p \in P$-re.

Azt mondjuk, hogy p és q *ortogonálisak*, ha $q \leq \nu(p)$, és ekkor természetesen

$p \leq \nu(q)$. Amint láttuk, a B_m és $B_{m,n}$ posetek mindegyike ortoposet a komplementer képzéssel. Tehát két $B_{m,n}$-beli halmaz pontosan akkor ortogonális, ha diszjunkt.

Két ortoposet közötti leképezést *ortoleképezésnek* hívunk, ha monoton és megőrzi az ortogonalitást. Egy ortoposeten az identikus leképezés ortoleképezés, valamint ortoleképezések kompozíciója is mindig ortoleképezés lesz.

Komplexusok szimpliciális átfejtése

Legyen $\mathcal{K}$ egy szimpliciális komplexus, $\tau \subset \sigma$ két lapja $\mathcal{K}$-nak, melyre $\dim \tau < \dim \sigma$ és σ-án kívül nincs más maximális lapja $\mathcal{K}$-nak, melynek τ lapja. A $\mathcal{K}$ komplexus $\mathcal{K}_1$ komplexusra való *szimpliciális lefejtése* $\mathcal{K}$ azon γ lapjainak törlése, melyekre $\tau \subseteq \gamma \subseteq \sigma$. Jelben $\mathcal{K} \searrow \mathcal{K}_1$. A $\mathcal{K}$ komplexus $\mathcal{L}$ komplexusra való *szimpliciális átfejtése* egy $\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}, \mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_q = \mathcal{L}$ komplexus sorozat, melyre $\mathcal{K}_{i-1} \searrow \mathcal{K}_i$ vagy $\mathcal{K}_i \searrow \mathcal{K}_{i-1}$ minden $1 \leq i \leq q$-ra. Ezen átfejtés során $\mathcal{K}$ homotópia típusa nem változik.

9. Állítás. ([6]) *Legyen $\mathcal{K}$ és $\mathcal{L}$ két egymásba átfejthető szimpliciális komplexus. Ekkor $\mathcal{K}$ és $\mathcal{L}$ homotóp ekvivalens.*

Egy $\mathcal{K}$ szimpliciális $\mathbb{Z}_2$-komplexus esetén legyen $\tau \subset \sigma$ két olyan lapja $\mathcal{K}$-nak, melyre $\dim \tau < \dim \sigma$ és σ-án kívül nincs más maximális lapja $\mathcal{K}$-nak, melynek τ lapja, valamint $\nu(\tau) \subset \nu(\sigma)$-ra is teljesül ugyanez. Ekkor a $\mathcal{K}$ $\mathbb{Z}_2$-komplexus $\mathcal{K}_1$ $\mathbb{Z}_2$-komplexusra való *szimpliciális $\mathbb{Z}_2$-lefejtése* $\mathcal{K}$ azon γ lapjainak törlése, melyekre $\tau \subseteq \gamma \subseteq \sigma$ vagy $\nu(\tau) \subseteq \gamma \subseteq \nu(\sigma)$. Ennek megfelelően definiált egy $\mathcal{K}$ $\mathbb{Z}_2$-komplexus egy $\mathcal{L}$ $\mathbb{Z}_2$-komplexusra való *szimpliciális $\mathbb{Z}_2$-átfejtése.*

Ideg tétel

A későbbiekben többször alkalmazzuk a következő kombinatorikus topológiai tételt egy szimpliciális komplexus topologikus összefüggőségének meghatározására. Legyen $\mathcal{K}$ egy szimpliciális komplexus és $\{\mathcal{K}_i\}_{i=1}^n$ részkomplexusok családja, melyre $\mathcal{K} = \cup_{i=1}^n \mathcal{K}_i$. A $\{\mathcal{K}_i\}_{i=1}^n$ részkomplexus rendszer *idegén* azt a $\mathcal{N}(\mathcal{K}_i)$ szimpliciális komplexust értjük, melynek csúcshalmaza $[n]$, és egy $\sigma \subseteq [n]$ halmaz szimplex, ha $\cap_{i\in\sigma}\mathcal{K}_i \neq \emptyset$. Ez valóban egy szimpliciális komplexus, ugyanis ha $\emptyset \neq \tau \subseteq \sigma \in \mathcal{N}(\mathcal{K}_i)$, akkor $\cap_{i\in\tau}\mathcal{K}_i \supseteq \cap_{i\in\sigma}\mathcal{K}_i \neq \emptyset$. Mi az Ideg tétel következő verzióját fogjuk alkalmazni.

10. Tétel. (Ideg tétel [6]) *Legyen $\mathcal{K}$ egy szimpliciális komplexus és $\{\mathcal{K}_i\}_{i=1}^n$ részkomplexusok rendszere, melyre $\mathcal{K} = \cup_{i=1}^n \mathcal{K}_i$. Tegyük fel, hogy minden nemüres metszet, $\mathcal{K}_{i_1} \cap \mathcal{K}_{i_2} \cap \dots \cap \mathcal{K}_{i_t}$ $(k-t+1)$-összefüggő. Ekkor $\mathcal{K}$ akkor és csakis akkor k-összefüggő, ha $\mathcal{N}(\mathcal{K}_i)$ k-összefüggő.*

Lezárásoperátor

Egy P poset (geometriai realizáltjának) struktúráját egyszerűbbé tehetjük anélkül, hogy a homotópia típusát megváltoztatnánk, ha egy alkalmas $\varphi : P \to P$ posetleképezés képterére térünk át. Ilyen leképezés a $\varphi : P \to P$ *felszálló lezárásoperátor*, mely rendezéstartó, $\varphi^2 = \varphi$ és $\varphi(x) \geq x$, minden $x \in P$-re, ugyanis:

11. Tétel. (Björner [6]) *Legyen $\varphi : P \to P$ egy felszálló lezárásoperátor. Ekkor $\varphi(P)$ deformációs retraktuma P-nek.*

Diszkrét Morse elmélet

Ugyancsak egyszerűsíthetjük egy P lapposet (geometriai realizáltjának) felépítését, a homotópia típus megváltoztatása nélkül, ha egy a P lapposeten értelmezett, alábbi tulajdonságú μ leképezés által meghatározott részposetre térünk át. A P poset egy Σ részposetjén értelmezett injektív $\mu : \Sigma \to P \setminus \Sigma$ leképezését *parciális párosításnak* nevezzük, ha bármely $x \in \Sigma$-ra $x \leq \mu(x)$, és bármely $x \leq y \leq \mu(x)$-re $y = x$ vagy $y = \mu(x)$. A $P \setminus (\Sigma \cup \mu(\Sigma))$ pontjait *kritikus pontoknak* (P lapposet volta folytán *kritikus szimplexeknek*) nevezzük. Továbbá egy μ parciális párosítás *körmentes*, ha nem létezik Σ-beli $x_1, \ldots, x_q$ pontsorozat, $q \geq 2$-re, hogy $\mu(x_1) \geq x_2, \mu(x_2) \geq x_3, \ldots, \mu(x_q) \geq x_1$.

12. Tétel. (Kozlov [20]) *Legyen $\mathcal{K}$ szimpliciális komplexus és legyen μ egy körmentes parciális párosítás $\mathcal{K}$ lapposetjén. Jelölje c_i a $\mathcal{K}$ komplexus i-dimenziós kritikus szimplexekeinek számát.*
(i) Ha a kritikus szimplexek $\mathcal{K}$-nak egy $\mathcal{K}_c$ részkomplexusát alkotják, akkor $\mathcal{K}_c$ és $\mathcal{K}$ homotóp ekvivalensek.
(ii) A $\mathcal{K}$ szimpliciális komplexus homotóp ekvivalens egy Δ_c CW-komplexussal, melynek c_i darab i-dimenziós cellája van.

Ennek a tételnek a $\mathbb{Z}_2$-vezióját is alkalmazni fogjuk.

13. Tétel. (Csorba [11]) *Legyen $\mathcal{K}$ egy szimpliciális $\mathbb{Z}_2$-komplexus a ν szimplicilális $\mathbb{Z}_2$-hatással és μ egy körmentes parciális párosítás $\mathcal{K}$ lapposetjén, mely felcserélhető a $\mathbb{Z}_2$-hatással (azaz ha $x \in \Sigma$, akkor $\nu(x) \in \Sigma$, és $\nu(\mu(x)) = \mu(\nu(x))$). Ha a kritikus szimplexek egy $\mathcal{K}_c$ $\mathbb{Z}_2$-részkomplexusát alkotják a $\mathcal{K}$ komplexusnak, akkor $\mathcal{K}_c$ és $\mathcal{K}$ $\mathbb{Z}_2$-homotóp ekvivalensek.*

2. Topologikus alsókorlát tételek a kromatikus számra

Az első topologikus gráfszínezhetőségi tételt Lovász László bizonyította M. Kneser 1955-ös feladatának megválaszolása során.

Feladat. (Kneser [19]) *Tekintsük egy m-elemű halmaz n-elemű részhalmazainak a rendszerét, $1 \leq n$ és $2n \leq m$. Ezen részhalmazokat könnyen elhelyezhetjük $m-2n+2$ osztályba úgy, hogy bármely két halmazt véve egy osztályból, akkor azok metszete nem üres. Vajon megtehető ez $m-2n+1$ osztállyal is?*

Kneser negatív választ sejtett, amit 1978-ban Lovász László be is bizonyított [22]-ben. Közel egy időben Bárány Imre is belátta a sejtést egy rövid, ötletes bizonyítással [4]-ben.

14. Tétel. (Lovász-Kneser [22]) *Ha egy m-elemű halmaz n-elemű részhalmazait $m-2n+1$ osztályba soroljuk, akkor lesz olyan osztály, melyben van két diszjunkt halmaz.*

Lovász László átfogalmazta a feladatot egy gráfszínezhetőségi feladattá azzal, hogy definiálta a $KG_{m,n}$ Kneser gráfot. Tetszőleges $1 \leq n$ és $2n \leq m$ egészekre, a $KG_{m,n}$ *Kneser gráf* csúcsai az $[m] = \{1, 2, \ldots, m\}$ halmaz n-elemű részhalmazai, és két csúcs éllel van összekötve, ha azok mint halmazok diszjunktak. Ilymódon a feladat a $KG_{m,n}$ gráf kromatikus számának meghatározására vezet.

14'. Tétel. (Lovász-Kneser [22]) *A $KG_{m,n}$ Kneser gráf nem színezhető $m-2n+1$ színnel.*

Az így kapott kérdés megválaszolásához az alábbi általános, topologikus gráfszínezhetőségi tételt igazolta.

15. Tétel. (Lovász [22]) *Ha a G gráf szomszédsági komplexusa $(k-1)$-összefüggő, akkor a G gráf nem színezhető $k+1$ színnel.*

A Lovász tételt számos gráfszínezhetőségre vonatkozó topologikus akadály tétel követte, melyek mindegyikében az alábbi eljárást alkalmazták.

$$\begin{array}{ccc} G \text{ gráf} & \longrightarrow & \mathcal{K}(G) \text{ gráfkomplexus} \\ & & \downarrow \\ \text{alsó korlát } \chi(G)\text{-re} & \longleftarrow & \mathcal{K}(G) \text{ topologikus tulajdonsága} \end{array}$$

Azaz valamennyi esetben a G gráfhoz egy $\mathcal{K}(G)$ gráfkomplexust rendeltek: J.W. Walker [35]-ben a Lovász komplexust használta, J. Matoušek és G.M. Ziegler a Lovász komplexussal homotóp ekvivalens Box komplexust vizsgálták [24]-ben. Babson és Kozlov [2] cikkükben a szomszédsági komplexus Lovász László által definiált általánosításával, a gráfhomomorfizmus komplexussal dolgoztak. Ezen gráfkomplexusok topologikus tulajdonságaiból $\chi(G)$-re vonatkozó alsókorlát tételeket nyertek.

2.1. Gráfkomplexusok

Ezen alfejezetben a fent említett gráfkomplexusokat definiáljuk. Az elsőt, a szomszédsági komplexust Lovász László definiálta a már említett cikkében. A többit ezen komplexus különböző általánosításaként kapták.

Szomszédsági komplexus

Egy tetszőleges G gráf esetén a Lovász által [22]-ben bevezetett $\mathcal{N}\mathcal{K}(G)$ *szomszédsági komplexus* az az absztrakt szimpliciális komplexus, melynek csúcshalmaza $V(G)$, és a csúcsok egy A részhalmaza szimplex, ha van közös szomszédjuk G-ben. Jelölje $2^{V(G)}$ a $V(G)$ összes részhalmazának posetjét. Az ugyancsak [22]-ben definiált $cn_G : 2^{V(G)} \to 2^{V(G)}$ szomszédsági leképezés egy A csúcshalmazhoz a közös szomszédjaik halmazát rendeli, azaz

$$cn_G(A) := \{v \in V(G) : (v, a) \in E(G) \text{ minden } a \in A\text{-ra}\}.$$

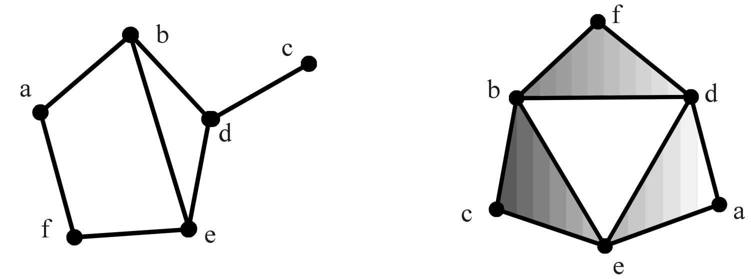
Ekkor $\mathcal{N}\mathcal{K}(G) = \{A \subseteq V(G) : \text{ létezik } v \in V(G) \text{ hogy } A \subseteq cn_G(v)\}$.

Az világos, hogy cn_G rendezésfordító leképezés, továbbá az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik

$$A \cap cn_G(A) = \emptyset, \quad A \subseteq cn_G^2(A), \quad cn_G(A) = cn_G^3(A)$$

tetszőleges $A \subseteq V(G)$ részhalmazra, ahol $cn_G^2 = cn_G \circ cn_G$, $cn_G^3 = cn_G \circ cn_G \circ cn_G$. Tehát cn_G^2 lezárásoperátor (idempotens, monoton leképezés) $2^{V(G)}$-n, ezért azt mondjuk, hogy $A \subseteq V(G)$ *zárt*, ha $cn_G^2(A) = A$.

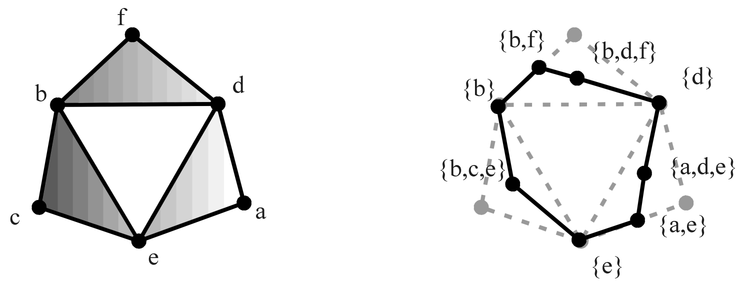
Példaként tekintsük az alábbi G_0 gráfot. Ennek a gráfnak megnézzük több gráfkomplexusát is, ezen az ábrán a szomszédsági komplexusa látható.



1. ábra: A G_0 gráf és szomszédsági komplexusa.

Lovász komplexus

Legyen $LP(G)$ az $\mathcal{NK}(G)$ szomszédsági komplexus lapposetjének a zárt elemei által indukált részposetje, melyet a G gráf *Lovász posetjének* nevezünk. A cn_G leképezést megszorítva az $LP(G)$ posetre az $(LP(G), cn_G)$ *ortoposetet* kapjuk. Az $(LP(G), cn_G)$ ortoposetet J. Walker definiálta az általa konstruált, gráfok és $\mathbb{Z}_2$-terek kategóriái közti funktor köztes lépéseként [35]-ben.



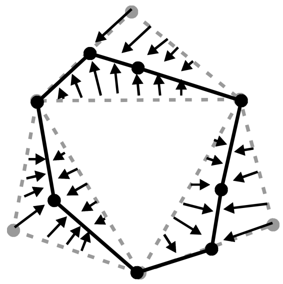
2. ábra: A G_0 gráf szomszédsági komplexusa és Lovász komplexusa.

Walker az $LP(G)$ Lovász poset rendezés komplexusaként definiálta a G gráf *Lovász komplexusát*, melyet mi $\mathcal{LK}(G)$-vel jelölünk. Belátta, hogy $\mathcal{LK}(G)$ szimpliciális $\mathbb{Z}_2$-komplexus. Ugyanis, míg $\mathcal{NK}(G)$ általában nem $\mathbb{Z}_2$-komplexus, addig $\mathcal{LK}(G)$-n cn_G indukál egy szimplicális $\mathbb{Z}_2$-hatást. Az világos, hogy cn_G indukál egy szimpliciális leképezést, mely idempotens. Másrészt fixpontmentes, mivel $\mathcal{LK}(G)$ tetszőleges $\mathcal{A}$ szimplexére, azaz egy $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n$ láncra, $\mathcal{A} \cap cn_G(\mathcal{A}) = \emptyset$. Ami pedig mindig teljesül, ugyanis ha $A_i \subset A_j$, akkor sem $cn_G(A_i) = A_j$, sem $cn_G(A_j) = A_i$ nem lehetséges. Így $\mathcal{LK}(G)$ szimpliciális $\mathbb{Z}_2$-komplexus.

Jólismert az $\mathcal{LK}(G)$ és $\mathcal{NK}(G)$ komplexusok homotóp ekvivalenciája, ugyanis $LP(G)$ nem más mint a $cn_G^2 : P(\mathcal{NK}(G)) \to P(\mathcal{NK}(G))$ lezárásoperátor kép posetje, így a 11. tétel szerint $\Delta(cn_G^2(P(\mathcal{NK}(G)))) = \mathcal{LK}(G)$ deformációs retraktuma $sd(\mathcal{NK}(G))$-nek.

16. Tétel. (Björner [6]) *Tetszőleges G gráf esetén $\mathcal{LK}(G)$ deformációs retraktuma $\mathcal{NK}(G)$-nek.*

Az alábbi ábrán a fenti G_0 gráf szomszédsági komplexusának a Lovász komplexusára való deformációs retrakciója látható.



3. ábra: Az $\mathcal{NK}(G_0)$ komplexus deformációs retrakciója $\mathcal{LK}(G_0)$-re.

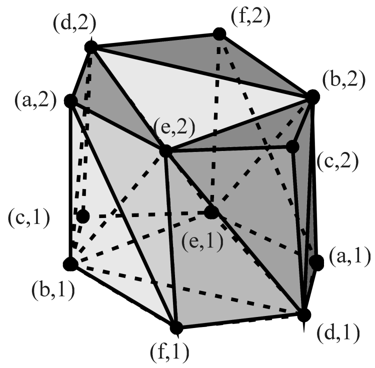
Walker [35]-ben adott topologikus alsókorlát tétele azon alapul, hogy a K_t teljes gráf Lovász komplexusa homeomorf az S^{t-2} gömbfelülettel. Ezt az azonosságot most mi is megmutatjuk. Legyen a K_t gráf csúcshalmaza $\{1,\ldots,t\}$. Ha $\{a_1,\ldots,a_l\}$ csúcsok egy nemüres halmaza, akkor a közös szomszédok halmaza $\{1,\ldots,t\}\setminus\{a_1,\ldots,a_l\}$. Vagyis a csúcsok bámely nemüres halmazának van közös szomszédja, kivéve ha az egész csúcshalmazt vesszük. Tehát az $\mathcal{NK}(K_t)$ szomszédsági komplexus geometriai realizáltja éppen a $(t-1)$-dimenziós szimplex határkomplexusa. A $V(K_t)$ csúcshalmaz bámely valódi részhalmaza zárt, ugyanis $cn_{K_t}^2(\{a_1,\ldots,a_l\}) = \{a_1,\ldots,a_l\}$ bármely $\{a_1,\ldots,a_l\} \subset V(K_t)$-re. Tehát az $LP(K_t)$ ortoposet megegyezik $P(\mathcal{NK}(K_t))$-vel, ami izomorf az $\{1,\ldots,t\}$ valódi részhalmazainak posetjével, azaz $B_{1,t-2}$-vel. Amint láttuk, $B_{1,t-2}$-ben két elem pontosan akkor ortogonális, ha a két halmaz diszjunkt. A K_t gráf $\mathcal{LK}(K_t)$ Lovász komplexusa megegyezik a $\mathcal{K}(P(\mathcal{NK}(K_t)))$-vel, azaz $sd(\mathcal{NK}(K_t))$-vel.

A Walker-féle topologikus alsókorlát tétel multikromatikus számokra való általánosítása soránban a K_t teljes gráf helyett a $KG_{t,s}$ Kneser gráf fog szerepelni. Most ezért leírjuk ezen gráfok Lovász posetjét. $KG_{t,s}$ csúcshalmaza a $[t] = \{1,\ldots,t\}$ halmaz s-elemű részhalmazainak a halmaza. Ha $\{a_1,\ldots,a_l\}$ csúcsok egy nem üres részhalmaza, akkor a közös szomszédaik halmaza az $[t] \setminus \bigcup a_i$ halmaz s-elemű részhalmazainak a halmaza. Megjegyezzük, hogy az $[t] \setminus \bigcup a_i$ halmaznak nincs s-elemű részhalmaza, ha az $\bigcup a_i$-nek több mint $t-s$ eleme van. Tehát az $\{a_1,\ldots,a_l\}$ csúcshalmaz akkor és csakis akkor zárt, ha megegyezik az $\bigcup a_i$ halmaz s-elemű részhalmazainak halmazával és $s \leq |\bigcup a_i| \leq t-s$. Ha A_1 és A_2 két legalább s elemű halmaz, akkor az A_1 összes s-elemű részhalmazát tartalmazó halmazt pontosan akkor tartalmazza az A_2 összes s-elemű részhalmazát tartalmazó halmaz, ha A_1 részhalmaza A_2-nek. Vagyis az $LP(KG_{t,s})$ Lovász poset izomorf $B_{t,s}$-sel, a $[t]$ halmaz legalább s és legfeljebb $t-s$ elemű részhalmazainak a posetjével.

Box komplexus

A box komplexus különböző verzióit találjuk Alon, Frankl és Lovász [1], Sarkaria [31], Kříž [21], Matoušek és Ziegler [24] cikkekben. Mi itt a Matoušek és Ziegler által is vizsgált verziót vesszük. Tetszőleges G gráf esetén a $\mathcal{B}(G)$ *box komplexus* csúcshalmaza a $V(G) \uplus V(G) = V(G) \times \{1,2\}$, a szimplexek halmaza pedig

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(G) := \{A_1 \uplus A_2 : A_1, A_2 \subseteq V(G),\ A_1 \cap A_2 = \emptyset,\\ G_{(A_1,A_2)} \text{ teljes páros, és } cn_G(A_1) \neq \emptyset \neq cn_G(A_2)\}.\end{aligned}$$



4. ábra: A G_0 gráf $\mathcal{B}(G_0)$ box komplexusa.

A csúcsok halmazát két diszjunkt részre oszthatjuk $V_1 := \{v \uplus \emptyset : v \in V(G)\}$ és $V_2 := \{\emptyset \uplus v : v \in V(G)\}$. A V_1 és V_2 csúcshalmazok által indukált részkomplexusokat, melyek mindegyike izomorf a szomszédsági komplexussal, $B(G)$ *partjainak* nevezzük. A G gráf box komplexusának a szomszédsági komplexusára való lefejtését Csorba Péter [11]-ben mutatta meg.

17. Tétel. (Csorba [11]) *Tetszőleges G gráf esetén $\mathcal{B}(G)$ lefejthető $\mathcal{NK}(G)$-re.*

A box komplexuson a $\nu((v,i)) := (v, 3-i)$ egy szimpliciális $\mathbb{Z}_2$-hatás. Ehhez elég megmutatni, hogy $A_1 \uplus A_2 \cap \nu(A_1 \uplus A_2) = \emptyset$. Ami pedig nyilvánvaló, ugyanis $\nu(A_1 \uplus A_2) = A_2 \uplus A_1$ és $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Tehát $\mathcal{B}(G)$ is szimpliciális $\mathbb{Z}_2$-komplexus. Továbbá Csorba [11]-ben azt is megmutatta, hogy $ssd(B(G))$ $\mathbb{Z}_2$-lefejthető $L(G)$-

re, ahol $ssd(B(G))$ az ő és szerzőtársai által [10]-ben definiált part felbontása a box komplexusnak.

$$ssd(\mathcal{B}(G)) := \{sd(\sigma \cap V_1) * sd(\sigma \cap V_2) : \sigma \in \mathcal{B}(G)\}.$$

Gráfhomomorfizmus komplexus

A box komplexus általánosítása a $\mathcal{H}om(H,G)$ gráfhomomorfizmus komplexus, melynek konstrukciója ugyancsak Lovász Lászlóhoz fűződik. Tetszőleges G és H gráfokra tekintsük az összes olyan $\eta : V(H) \to 2^{V(G)} \setminus \{\emptyset\}$ leképezést, melyre $G_{(\eta(u),\eta(v))}$ teljes páros gráf minden $uv \in E(H)$ élre. Vegyük ezen η leképezések $P_{hom}(H,G)$ posetjét, melyben $\eta_1 \leq \eta_2$ akkor és csakis akkor, ha $\eta_1(v) \subseteq \eta_2(v)$ minden $v \in V(H)$-ra. A $\mathcal{H}om(H,G)$ *gráfhomomorfizmus komplexust* a $P_{hom}(H,G)$ poset rendezés komplexusaként definiáljuk. Ezen komplexusosztály topologikus tulajdonságainak tanulmányozását Babson és Kozlov [2] cikkében találhatjuk.

$\mathcal{H}om(H,G)$ gráfhomomorfizmus komplexus ugyancsak szimpliciális $\mathbb{Z}_2$-komp- lexussá tehető abban az esetben, ha létezik $xy \in E(H)$ él, hogy $cn_H(x) \setminus \{y\} = cn_H(y) \setminus \{x\}$. Ekkor legyen $\nu_H : H \to H$ a következő gráfhomomorfizmus:

$$\nu_H(u) := \begin{cases} y, & \text{ha } u = x; \\ x, & \text{ha } u = y; \\ u & \text{különben.} \end{cases}$$

Legyen $\nu : P_{hom}(H,G) \to P_{hom}(H,G)$ poset leképezés

$$\nu(\eta) := \eta \circ \nu_H,$$

minden $\eta \in P_{hom}(H,G)$-ra. Az világos, hogy ν egy idempotens szimpliciális leképezést indukál, ugyanis tetszőleges $\eta_1 \subset \eta_2 \subset \cdots \subset \eta_l$ láncra $\nu(\eta_1) \subset \nu(\eta_2) \subset \cdots \subset \nu(\eta_l)$ lánc lesz. Másrészt fixpontmentes is, mivel $\mathcal{H}om(H,G)$ tetszőleges Ω szimplexére, azaz egy $\Omega = \eta_1 \subset \eta_2 \subset \cdots \subset \eta_l$ láncra, $\Omega \cap \nu(\Omega) = \emptyset$, ahol ugyancsak ν-vel jelöljük az indukált leképezést is. Ez pedig mindig teljesül, ugyanis ha $\eta_i \subseteq \eta_j$, akkor sem $\nu(\eta_i) = \eta_j$, sem $\nu(\eta_j) = \eta_i$ nem lehetséges.

Speciálisan a $H = K_m$ esetben a $\mathcal{H}om(K_m,G)$ szimpliciális komplexus csúcsai az olyan $A_1 \uplus A_2 \uplus \cdots \uplus A_m$ rendezett parciális partíciói a $V(G)$ csúcshalmaznak, melyekre $G_{(A_i,A_j)}$ teljes páros gráf minden $i \neq j$-re. A $\mathcal{H}om(K_m,G)$ szimplexei pedig az

$$(A_{11} \uplus A_{12} \uplus \cdots \uplus A_{1m}) \subset \cdots \subset (A_{n1} \uplus A_{n2} \uplus \cdots \uplus A_{nm})$$

láncoknak felelnek meg. Továbbá a standard szimpliciális $\mathbb{Z}_2$-hatás a következőképpen hat $\mathcal{H}om(K_m, G)$ csúcsain:

$$\nu(A_1 \uplus A_2 \uplus \cdots \uplus A_m) = A_2 \uplus A_1 \uplus \cdots \uplus A_m.$$

Ismert a $\mathcal{B}(G)$ és a $\mathcal{H}om(K_2, G)$ komplexusok $\mathbb{Z}_2$-homotóp ekvivalenciája.

18. Tétel. (Csorba [11]) *Tetszőleges G gráf esetén $sd(\mathcal{B}(G))$ $\mathbb{Z}_2$-lefejthető $\mathcal{H}om(K_2, G)$-re.*

A $\mathcal{H}om(K_n, KG_{t,s})$ komplexus homotópia típusának meghatározásához a $P_{hom}(K_n, KG_{t,s})$ poset lezártját vizsgáltam [29]-ben. A $P_{hom}(H, G)$ poset lezártját a következő $\Psi \colon P_{hom}(H, G) \to P_{hom}(H, G)$ leképezés képhalmazaként definiáljuk

$$\Psi(\eta)(v) = cn_G^2(\eta(v))$$

minden $v \in V(H)$-ra és $\eta \in P_{hom}(H, G)$-re. Ψ egy jóldefiniált leképezés, ugyanis $\Psi(\eta)(v) \in 2^{V(G)} \setminus \emptyset$ és ha $(u, v) \in E(H)$, akkor

$$(\tilde{u}, \tilde{v}) \in E(G) \text{ minden } \tilde{u} \in \eta(u) \text{ és } \tilde{v} \in \eta(v) \text{ esetén } \Leftrightarrow$$

$$(\tilde{u}, \tilde{v}) \in E(G) \text{ minden } \tilde{u} \in cn_G^2(\eta(u)) \text{ és } \tilde{v} \in cn_G^2(\eta(v)) \text{ esetén } \Leftrightarrow$$

$$(\tilde{u}, \tilde{v}) \in E(G) \text{ minden } \tilde{u} \in \Psi(\eta(u)) \text{ és } \tilde{v} \in \Psi(\eta(v)) \text{ esetén.}$$

Azaz $\Psi(\eta) \in P_{hom}(H, G)$. Ψ egy leszálló lezárásoperátor $P_{hom}(H, G)$-n:

(*i*) rendezéstartó: $\eta_1 \leq \eta_2 \quad \Leftrightarrow \quad \eta_1(v) \subseteq \eta_2(v) \quad \text{minden } v \in V(H)\text{-ra} \quad \Rightarrow$

$$cn_G^2(\eta_1(v)) \subseteq cn_G^2(\eta_2(v)) \quad \text{minden } v \in V(H)\text{-ra} \quad \Leftrightarrow \quad \Psi(\eta_1) \leq \Psi(\eta_2),$$

minden $\eta_1, \eta_2 \in P_{hom}(H, G)$-re.

(*ii*) leszálló: $cn_G^2(\eta(v)) \supseteq \eta(v) \quad \text{minden } v \in V(H)\text{-ra} \quad \Leftrightarrow$

$$\Psi(\eta)(v) \supseteq \eta(v) \quad \text{minden } v \in V(H)\text{-ra} \quad \Leftrightarrow \quad \Psi(\eta) \geq \eta,$$

minden $\eta \in P_{hom}(H, G)$-re.

(*iii*) idempotens: $cn_G^2 \circ cn_G^2(\eta(v)) = cn_G^2(\eta(v)) \quad \text{minden } v \in V(H)\text{-ra} \quad \Leftrightarrow$

$$\Psi \circ \Psi(\eta)(v) = \Psi(\eta)(v) \quad \text{minden } v \in V(H)\text{-ra} \quad \Leftrightarrow \quad \Psi \circ \Psi(\eta) = \Psi(\eta),$$

minden $\eta \in P_{hom}(H, G)$-re.

Így $\overline{P}_{hom}(H, G) := \Psi(P_{hom}(H, G))$ erős deformációs retraktuma $P_{hom}(H, G)$-nek a 11. tétel szerint.

2.2. TOPOLOGIKUS ALSÓKORLÁT TÉTELEK

Valamennyi általunk tanulmányozott topologikus alsókorlát tétel a $\mathbb{Z}_2$-terekre vonatkozó Borsuk-Ulam típusú tételen alapszik. Ugyanis egy G gráf t színnel való színezése, azaz egy $\gamma : G \to K_t$ gráfhomomorfizmus, valamennyi $\mathbb{Z}_2$-gráfkomplexus esetén indukál egy $c : \mathcal{K}(G) \to \mathcal{K}(K_t)$ szimpliciális $\mathbb{Z}_2$-leképezést. Ezen $\mathbb{Z}_2$-leképezések a $\mathcal{K}(K_t)$ komplexusok ismert homotópia típusa folytán csak bizonyos t-kre léteznek majd.

A Walker-féle tételek

Adott $\varphi : G \to H$ gráfhomomorfizmus indukál egy $L(\varphi) : LP(G) \to LP(H)$ leképezést: az $LP(G)$ Lovász poset egy A pontjára ($V(G)$ egy zárt részhalmazára) $L(\varphi)(A)$ legyen a $\varphi(A)$ csúcshalmaz $P(\mathcal{N}\mathcal{K}(H))$-beli lezártja (Walker [35]):

$$L(\varphi)(A) := cn_H^2(\varphi(A)).$$

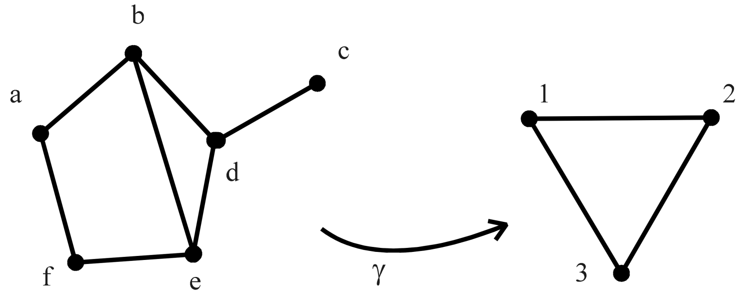
Világos, hogy $L(\varphi)$ megőrzi a részbenrendezést, viszont $L(\varphi)$ mint $(LP(G), cn_G)$ és $(LP(H), cn_H)$ ortoposetek közti leképezés általában nem felcserélhető a cn leképezésekkel, csak az egyik irányú tartalmazás áll fenn minden esetben. Tetszőleges $A \in LP(G)$ pontra $G_{(A, cn_G(A))}$ teljes páros gráf, így $H_{(\varphi(A), \varphi(cn_G(A)))}$ is egy teljes páros gráf, tehát

$$\varphi(cn_G(A)) \subseteq cn_H(\varphi(A)),$$

$$cn_H^2 \varphi(cn_G(A)) \subseteq cn_H^3(\varphi(A)),$$

$$L(\varphi)(cn_G(A)) \subseteq cn_H(L(\varphi)(A)). \qquad \langle * \rangle$$

Már az alábbi egyszerű példa esetén is valódi tartalmazást kapunk. Vegyük a G_0 gráf alábbi színezését, a $\gamma : G_0 \to K_3$ gráfhomomorfizmust.



$$\gamma(a) = \gamma(c) = \gamma(e) = 1; \qquad \gamma(b) = \gamma(f) = 2; \qquad \gamma(d) = 3$$

5. ábra: A $\gamma : G_0 \to K_3$ gráfhomomorfizmus.

Ekkor az $A = \{a, e\}$ csúcshalmazra $L(\gamma)(cn_G(\{a, e\})) = L(\gamma)(\{b, f\}) = \{2\}$, míg $cn_{K_3}(L(\gamma)(\{a, e\})) = cn_{K_3}(\{1\}) = \{2, 3\}$, azaz az $LP(G)$ poset $\{a, e\}$ pontja esetén

$$L(\gamma)(cn_G(\{a, e\})) \subset cn_{K_3}(L(\gamma)(\{a, e\})).$$

Tehát az $L(\varphi)$ leképezés csak ezt a bővebb $\langle * \rangle$, Walker által bevezetett ortogonalitás relációt őrzi meg: legyen A és B az $LP(G)$ ortoposet ortogonális elemei, azaz $A \subseteq cn_G(B)$ (és ekkor $B \subseteq cn_G(A)$). Ekkor az összes A-beli csúcs össze van kötve az összes B-beli csúccsal. Mivel φ egy gráfhomomorfizmus a $\varphi(A)$-beli összes csúcs össze van kötve az összes $\varphi(B)$-beli csúccsal. Vagyis $\varphi(A) \subseteq cn_H(\varphi(B))$. A cn_H^2 lezárásoperátort alkalmazva a következőt kapjuk

$$cn_H^2(\varphi(A)) \subseteq cn_H^2(cn_H(\varphi(B))) = cn_H(cn_H^2(\varphi(B))),$$

azaz $L(\varphi)$ tényleg megőrzi az ortogonalitást

$$L(\varphi)(A) \subseteq cn_H(L(\varphi)(B)).$$

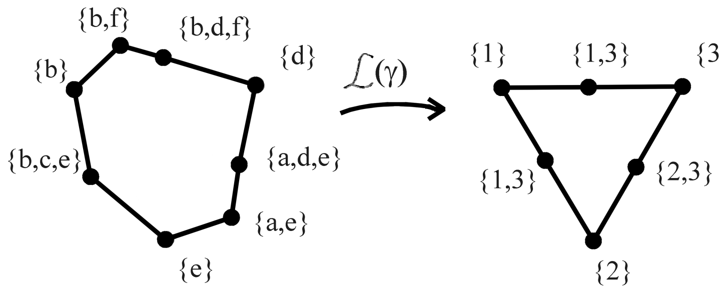
Ezzel Walker következő állítását kaptuk meg.

19. Állítás. (Walker [35]) *Tetszőleges G és H gráfok esetén, ha létezik $G \to H$ gráfhomomorfizmus, akkor létezik $LP(G) \to LP(H)$ ortoleképezés.*

Egy $\varphi : G \to H$ gráfhomomorfizmus esetén az $L(\varphi) : LP(G) \to LP(H)$ ortoleképezés természetes módon indukál egy

$$\mathcal{L}(\varphi) : \mathcal{LK}(G) \to \mathcal{LK}(H)$$

szimpliciális leképezést a Lovász komplexusok között, ami általában nem lesz szimpliciális $\mathbb{Z}_2$-leképezés ($L(\varphi)$ általában nem cserélhető fel a cn-ekkel).



6. ábra: Az $\mathcal{L}(\gamma) : \mathcal{LK}(G_0) \to \mathcal{LK}(K_3)$ szimpliciális leképezés.

Az $|\mathcal{LK}(G)|$ és $|\mathcal{LK}(H)|$ $\mathbb{Z}_2$-terek között viszont lehet definiálni, ugyancsak az $L(\varphi)$ ortoleképezést használva, egy

$$f : |\mathcal{LK}(G)| \to |\mathcal{LK}(H)|$$

$\mathbb{Z}_2$-leképezést. Ezt Walker [35]-ben az alábbi eljárással konstruálta meg. Legyen az $\hat{L}(\varphi) : LP(G) \times B_{1,0} \to LP(H)$ rendezéstartó leképezés következőképpen definiálva egy tetszőleges $A \in LP(G)$ elemre

$$\hat{L}(\varphi)(A, \emptyset) := L(\varphi)(A),$$

$$\hat{L}(\varphi)(A, \{1\}) := cn_H(L(\varphi)(cn_G(A))),$$

ahol $B_{1,0}$ a $\emptyset \subset \{1\}$ lánccal egyezik meg. Ez indukál egy $|\hat{L}(\varphi)| : |\mathcal{LK}(G) \times B_{1,0}| \to |\mathcal{LK}(H)|$ folytonos leképezést. Az $|\mathcal{LK}(G) \times B_{1,0}|$ poliéder homeomorf az $|\mathcal{LK}(G)| \times |B_{1,0}|$ poliéderrel (lásd [13]), jelölje ennek inverzét τ, azaz

$$\tau : |\mathcal{LK}(G)| \times |B_{1,0}| \to |\mathcal{LK}(G) \times B_{1,0}|.$$

A $\gamma : |\mathcal{LK}(G)| \to |\mathcal{LK}(G)| \times |B_{1,0}|$ leképezést pedig definiáljuk a következőképpen egy $x \in |\mathcal{LK}(G)|$ pontra $\gamma(x) := (x, \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b)$, ahol a az $\emptyset$ realizáltja, a b pedig az $\{1\}$ realizáltja. Ezekután definiáljuk az f leképezést az $|\hat{L}(\varphi)| \circ \tau \circ \gamma$ szorzatleképezésként, mely $\mathbb{Z}_2$ invarianciáját az alábbi kommutatív diagramm mutatja.

$$\begin{tikzcd}
|\mathcal{LK}(G)| \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "|cn_G|"] & |\mathcal{LK}(G)| \times |B_{1,0}| \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "|cn_G| \times |r|"] & |\mathcal{LK}(G) \times B_{1,0}| \arrow[r, "|\hat{L}(\varphi)|"] \arrow[d, "|cn_G \times r|"] & |\mathcal{LK}(H)| \arrow[d, "|cn_H|"] \\
|\mathcal{LK}(G)| \arrow[r, "\gamma"] & |\mathcal{LK}(G)| \times |B_{1,0}| \arrow[r, "\tau"] & |\mathcal{LK}(G) \times B_{1,0}| \arrow[r, "|\hat{L}(\varphi)|"] & |\mathcal{LK}(H)|
\end{tikzcd}$$

Itt $r : B_{1,0} \to B_{1,0}$ felcseréli $B_{1,0}$ két elemét. Ezzel a következő állítást kaptuk.

20. Állítás. (Walker [35]) *Tetszőleges G és H gráfok esetén, ha létezik $\gamma : G \to H$ gráfhomomorfizmus, akkor létezik a Lovász komplexusaik közti $c : |\mathcal{LK}(G)| \to |\mathcal{LK}(H)|$ $\mathbb{Z}_2$-leképezés.*

Ezen állítást felhasználva a következő topologikus alsókorlát tételt kapjuk. Tegyük fel, hogy a G gráf színezhető t színnel, vagyis létezik $G \to K_t$ gráfhomomorfizmus. Ekkor létezik $|\mathcal{LK}(G)| \to |\mathcal{LK}(K_t)|$ $\mathbb{Z}_2$-leképezés. A K_t teljes gráf Lovász komplexusa $\mathcal{LK}(K_t)$ megegyezik $\mathcal{K}(P(\mathcal{NK}(K_t)))$-vel, azaz $sd(\mathcal{NK}(K_t))$-vel. Mivel

$$|sd(\mathcal{NK}(K_t)| \simeq |\mathcal{NK}(K_t)| \simeq S^{t-2},$$

így azt kaptuk, hogy $G \to K_t$ gráfhomomorfizmus esetén létezik $|\mathcal{LK}(G)| \to S^{t-2}$ $\mathbb{Z}_2$-leképezés, azaz

$$ind(\mathcal{LK}(G)) \leq ind(S^{t-2}) = t - 2.$$

Ezzel bebizonyítottuk a következő topologikus alsókorlát tételt.

21. Tétel. (Walker [35]) *Tetszőleges G gráfra*

$$ind(\mathcal{LK}(G)) + 2 \leq \chi(G),$$

A Lovász-féle tétel

Walker fenti tételét használva Matoušek [23]-ban egyszerű bizonyítását adta az eredeti Lovász-féle topologikus alsókorlát tételnek.

15. Tétel. (Lovász [22]) *Ha a G gráf szomszédsági komplexusa $(t-2)$-összefüggő, akkor a G gráf nem színezhető t színnel.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a G szomszédsági komplexus $(t-2)$-összefüggő, ekkor a deformációs retraktuma, $\mathcal{LK}(G)$ is $(t-2)$-összefüggő. A 3. állítás (iii) része szerint ekkor $ind(\mathcal{LK}(G)) \geq t - 1$. Így az előbbi 21. tétel szerint a $\chi(G) \geq t + 1$.

■

A Babson-Kozlov-féle tétel

Adott $\varphi : G_1 \to G_2$ gráfhomomorfizmus indukál egy $\varphi^H : P_{hom}(H, G_1) \to P_{hom}(H, G_2)$ poset leképezést. A $P_{hom}(H, G_1)$ poset egy η pontjára $\varphi^H(\eta)$ legyen a $\varphi \circ \eta$ leképezés, mely nyilván pontja $P_{hom}(H, G_2)$-nek. Az is világos, hogy φ^H megőrzi a részbenrendezést, így indukál egy, a gráfhomomorfizmus komplexusok közti $\varphi^H : \mathcal{H}om(H, G_1) \to \mathcal{H}om(H, G_2)$ szimpliciális leképezést. Ha $\mathcal{H}om(H, G_1)$ és $\mathcal{H}om(H, G_2)$ $\mathbb{Z}_2$-komplexusok a standard ν_1 és ν_2 $\mathbb{Z}_2$-hatásokkal, akkor φ^H : $\mathcal{H}om(H, G_1) \to \mathcal{H}om(H, G_2)$ szimpliciális $\mathbb{Z}_2$-leképezés:

$$\varphi^H \circ \nu_1(\eta) = \varphi^H(\eta \circ \nu_H) = \varphi \circ \eta \circ \nu_H =$$

$$\nu_2(\varphi \circ \eta) = \nu_2 \circ \varphi^H(\eta).$$

Tegyük fel, hogy létezik t színnel való színezése a G gráfnak, azaz $G \to K_t$ gráfhomomorfizmus, ekkor létezik $\mathcal{H}om(K_n, G) \to \mathcal{H}om(K_n, K_t)$ $\mathbb{Z}_2$-leképezés. Az utóbbi komplexust homotóp ekvivalencia erejéig Babson és Kozlov határozta meg [2]-ben. A bizonyításban a diszkrét Morse elmélet és az Ideg tétel kombinált alkalmazására láthatunk példát.

22. Tétel. (Babson és Kozlov [2]) *A $\mathcal{H}om(K_n, K_t)$ komplexus homotóp ekvivalens egy $(t-n)$-dimenziós gömbcsokorral.*

Bizonyítás. Az állítást n és $t-n$ szerinti indukcióval látjuk be. Az indukció elindul, ugyanis a $\mathcal{H}om(K_1, K_t)$ komplexus egy t csúcsú szimplex baricentrikus felbontása, azaz pontra összehúzható. Míg $\mathcal{H}om(K_t, K_t)$ $t!$ pontból áll, azaz $t! - 1$ darab 0-dimenziós gömbfelületből álló gömbcsokor. Ezek után tegyük fel, hogy $2 \leq n$-nél és $n + 1 \leq t$-nél kisebb pozitív egészekre igaz az állítás.

Vegyük a $P_{hom}(K_n, K_t)$ poset pontjainak alábbi részposetjeit

$$P_i := \{\eta : V(K_n) \to 2^{V(K_t)} \setminus \emptyset | t \notin \eta(j) \text{ minden } j \in \{1, \ldots, n\}, j \neq i\}.$$

A K_n teljes gráf bármely két csúcsa éllel van összekötve, így tetszőleges η esetén t nem lehet eleme a $\eta(i_1) \cap \eta(i_2)$-nek. Ebből következik, hogy $P_{hom}(K_n, K_t) = \cup_{i=1}^n P_i$, és hogy a $\mathcal{H}om(K_n, K_t)$ komplexus egy a P_i posetek által indukált $\mathcal{H}_i$ részkomplexusokra való felosztását kapjuk. Ugyanis $P_{hom}(K_n, K_t)$ poset tetszőleges $\eta_1 \subset \eta_2 \subset \cdots \subset \eta_l$ láncára létezik i, hogy $t \notin \eta_l(j)$ minden $j \neq i$-re, s ekkor $\eta_1 \subset \eta_2 \subset \cdots \subset \eta_l$ lánc lesz P_i-ben.

Az Ideg tételt fogjuk alkalmazni a $\mathcal{H}om(K_n, K_t) = \cup_{i=1}^n \mathcal{H}_i$ felosztására. Ehhez vizsgáljuk ezen részkomplexusok véges metszeteit. Az $i_1 \neq i_2$, $i_1, i_2 \in \{1, \ldots, n\}$ indexekre

$$P_{i_1} \cap P_{i_2} = \{\eta : V(K_n) \to 2^{V(K_t)} \setminus \emptyset \mid t \notin \eta(j) \text{ minden } j \in \{1, \ldots, n\}\},$$

így $P_{i_1} \cap P_{i_2}$ izomorf $P_{hom}(K_n, K_{t-1})$-gyel. Hasonlóan bármely véges metszet izomorf $P_{hom}(K_n, K_{t-1})$-gyel. Így a $\mathcal{H}_i$ részkomplexusok bármely véges metszete indukció szerint $(t-n-2)$-összefüggő.

Ezek után megmutatjuk, hogy a $\mathcal{H}_i$ részkomplexusok mindegyike $(t-n-1)$-összefüggő. Elegendő a $\mathcal{H}_1$ komplexust vizsgálni, ugyanis a $\mathcal{H}_i$-k izomorfak egymással. Vegyük a következő μ parciális párosítást a $P(\mathcal{H}_1)$ laphálón, mely az alábbi μ_1 és μ_2 parciális párosítások uniója. A $P(\mathcal{H}_1)$ lapháló minden olyan $\mathcal{A} = \langle \eta_1 \subset \eta_2 \subset \cdots \subset \eta_l \rangle$ pontjára, melyre $t \notin \eta_1(1)$, legyen $m_1 := max\{i \ : \ t \notin \eta_i(1)\}$. Ekkor definiáljuk a következő η leképezést

$$\eta(1) = \eta_{m_1}(1) \cup \{t\} \quad \text{és} \quad \eta(j) = \eta_{m_1}(j) \quad \text{minden} \quad 1 < j \leq n.$$

Ha $\eta \neq \eta_{m_1+1}$, akkor $\mathcal{A} \in \Sigma_1$ és

$$\mu_1(\mathcal{A}) := \langle \eta_1 \subset \cdots \subset \eta_{m_1} \subset \eta \subset \eta_{m_1+1} \subset \cdots \subset \eta_l \rangle.$$

Minden olyan $\mathcal{A} = \langle \eta_1 \subset \eta_2 \subset \cdots \subset \eta_l \rangle$ pontra, melyre $t \in \eta_1(1)$ és $\eta_l(1) \neq \{t\}$, legyen $m_2 := min\{i \ : \ \eta_i(1) \neq \{t\}\}$. Ekkor definiáljuk a következő η leképezést

$$\eta(1) = \{t\} \quad \text{és} \quad \eta(j) = \eta_{m_2}(j) \quad \text{minden} \quad 1 < j \leq n.$$

Ha $\eta \neq \eta_{m_2-1}$, akkor $\mathcal{A} \in \Sigma_2$ és

$$\mu_2(\mathcal{A}) := \langle \eta_1 \subset \cdots \subset \eta_{m_2-1} \subset \eta \subset \eta_{m_2} \subset \cdots \subset \eta_l \rangle.$$

A μ_1 és μ_2 parciális párosítások diszjunktak, így uniójuk μ is egy parciális párosítás.

A μ parciális párosítás körmentes. Indirekt tegyük fel, hogy létezik $\mu(\mathcal{A}_1) \succ \mathcal{A}_2, \mu(\mathcal{A}_2) \succ \mathcal{A}_3, \ldots, \mu(\mathcal{A}_m) \succ \mathcal{A}_1$ kör. Az ellentmondáshoz elegendő megmutatni, hogy bármely j-re a $\mu(\mathcal{A}_j) \succ \mathcal{A}_{j+1}$ lépésben nem változik a $t \in \eta_i(1)$, illetve az $\eta_i(1) = \{t\}$ részláncok hossza. Ugyanis az $\mathcal{A}_j \prec \mu(\mathcal{A}_j)$ lépésekben eggyel nő a $t \in \eta_i(1)$, illetve az $\eta_i(1) = \{t\}$ részláncok hossza. Ha az $\mathcal{A}_j$ pontra létezik i, hogy $t \notin \eta_i(1)$, akkor a $\mu(\mathcal{A}_j) = \langle \eta_1 \subset \cdots \subset \eta_{m_1} \subset \eta \subset \eta_{m_1+1} \subset \cdots \subset \eta_l \rangle$ láncból úgy kapjuk $\mathcal{A}_{j+1}$-et, hogy η_{m_1}-et töröljük, különben nem lenne párja vagy $\mathcal{A}_j$-t kapnánk vissza. Azaz az $\mu(\mathcal{A}_j) \succ \mathcal{A}_{j+1}$ lépésben nem változik a $t \in \eta_i(1)$ részlánc hossza. Ha az $\mathcal{A}_j$ pontra $t \in \eta_1(1)$ és létezik i, hogy $\eta_i(1) \neq \{t\}$, akkor a $\mu(\mathcal{A}_j) = \langle \eta_1 \subset \cdots \subset \eta_{m_2-1} \subset \eta \subset \eta_{m_2} \subset \cdots \subset \eta_l \rangle$ láncból úgy kapjuk $\mathcal{A}_{j+1}$-et, hogy η_{m_2}-öt töröljük, különben nem lenne párja vagy $\mathcal{A}_j$-t kapnánk vissza. Azaz az $\mu(\mathcal{A}_j) \succ \mathcal{A}_{j+1}$ lépésben nem változik a $\eta_i(1) = \{t\}$ részlánc hossza. Azaz ellentmondásra jutottunk.

A μ parciális párosításhoz tartozó kritikus pontok azon $\mathcal{A} = \langle \eta_1 \subset \eta_2 \subset \cdots \subset \eta_l \rangle$ láncok, melyekre $\eta_l(1) = \{t\}$. Azaz a kritikus pontoknak megfelelő szimplexek által alkotott komplexus izomorf $\mathcal{H}om(K_{n-1}, K_{t-1})$-gyel, ami indukció szerint $(t-n-1)$-összefüggő. A 12. tétel szerint $\mathcal{H}_1$, és így a $\mathcal{H}_i$ komplexusok mindegyike, $(t-n-1)$-összefüggő.

Ezután az Ideg tételt alkalmazva a $\mathcal{H}om(K_n, K_t) = \cup_{i=1}^{n} \mathcal{H}_i$ felosztására kapjuk, hogy $\mathcal{H}om(K_n, K_t)$ $(t-n-1)$-összefüggő, ugyanis ezen felosztáshoz tartozó ideg komplexus az n csúcsú szimplex. Így az 5. állítás szerint $\mathcal{H}om(K_n, K_t)$ egy $(t-n)$-dimenziós gömbcsokorral homotóp ekvivalens, hiszen $\dim\mathcal{H}om(K_n, K_t) = t - n$.

■

Ezen eredmény segítségével Babson és Kozlov [2]-ben egy a G gráf kromatikus számára vonatkozó topologikus alsókorlát tételt adtak a $\mathcal{H}om(K_n, G)$ komplexus topologikus invariánsával, a $\varpi(\mathcal{H}om(K_n, G))$ Stiefel-Whitney osztállyal. Mi most ennek az alsókorlát tételnek az eddigiekkel összevethető, a $\mathcal{H}om(K_n, G)$ $\mathbb{Z}_2$-indexével megfogalmazott, változatát adjuk meg. Az előző alfejezetben megmutattuk, hogy $\mathcal{H}om(K_n, K_t)$ egy szimpliciális $\mathbb{Z}_2$-komplexus, így a 6. állítás szerint $ind(\mathcal{H}om(K_n, K_t)) \leq t - n$, ugyanis $\dim\mathcal{H}om(K_n, K_t) = t - n$. Másrészt most láttuk, hogy a $\mathcal{H}om(K_n, K_t)$ komplexus $(t-n-1)$-összefüggő, így a 3. állítás (*iii*) része szerint $t - n \leq ind(\mathcal{H}om(K_n, K_t))$. Tehát $ind(\mathcal{H}om(K_n, K_t)) = t - n$. Egy $\mathcal{H}om(K_n, G) \to \mathcal{H}om(K_n, K_t)$ $\mathbb{Z}_2$-leképezés létezése esetén a 3. tétel (*i*) része szerint

$$ind(\mathcal{H}om(K_n, G)) \leq ind(\mathcal{H}om(K_n, K_t)),$$

azaz

$$ind(\mathcal{H}om(K_n, G)) \leq t - n.$$

Ezzel a következő tételt kaptuk.

23. Tétel. (Babson és Kozlov [2]) *Tetszőleges $n \geq 2$ egész és G gráf esetén*

$$ind(\mathcal{H}om(K_n, G)) + n \leq \chi(G).$$

2.3. A Lovász-Kneser tétel bizonyítása

A 14'. tétel legtöbb bizonyításának alapja a $KG_{m,n}$ Kneser gráf $\mathcal{LK}(KG_{m,n})$ Lovász komplexusának egy $(m-2n)$-dimenziós gömbcsokorral való homotóp ekvivalenciája. Ezt Lovász [22]-ben az $\mathcal{NK}(KG_{m,n})$ szomszédsági komplexus $(m-2n-1)$-összefüggőségének megmutatásával bizonyította. Most ezen eredmény egy, már a 22.

tétel bizonyításában is alkalmazott, diszkrét Morse elméleten alapuló bizonyítását adjuk. Ebből pluszként az $\mathcal{LK}(KG_{m,n})$ Lovász komplexusbeli gömbfelületek számát is megkapjuk.

Definiálunk egy parciális párosítást a $LP(KG_{m,n})$ Lovász poseten. Amint láttuk a $KG_{m,n}$ Kneser gráf $LP(KG_{m,n})$ Lovász posetje éppen a $B_{m,n}$ posettel izomorf. Az alábbi állítás bizonyítása m szerinti indukcióval megy, ezért a $B_{m,n}$ posetosztálynál bővebb $C^k_{m,n}$ posetosztályban dolgozunk, azaz az $[m]$ halmazok legalább n és legfeljebb $n+k$ elemű részhalmazainak a tartalmazásra nézve vett posetjeiben.

24. Állítás. *Az m, n és k nemnegatív egészekre, melyekre $n + k \leq m$ teljesül, a $\mathcal{K}(C^k_{m,n})$ komplexus homotóp ekvivalens egy k-dimenziós gömbcsokorral.*

Bizonyítás. Az állítás bizonyításához m szerinti indukcióval megadunk a $\mathcal{K}(C^k_{m,n})$ komplexus lapposetjén, $sd(C^k_{m,n})$-en egy körmentes parciális párosítást, melynek egyetlen 0-lánc és valahány k-lánc lesz a kritikus pontja. Megjegyezzük, hogy az $sd(C^k_{m,n})$ poset egy pontja egy

$$\mathcal{A} = \langle A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_l \rangle$$

$(l-1)$-lánc, ahol $A_i \subseteq [m]$ és $n \leq |A_i| \leq n+k$ minden i-re.

Először tekintsük a peremeseteket, azaz a $\mathcal{K}(C^k_{m,0})$, a $\mathcal{K}(C^0_{m,n})$ és a $\mathcal{K}(C^k_{n+k,n})$ komplexusokat. Az $sd(C^k_{m,0})$ poseten definiáljuk a parciális párosítást a következőképpen: egy $\mathcal{A} \in sd(C^k_{m,0})$ lánc legyen Σ-ban, ha $A_1 \neq \emptyset$, és minden $\mathcal{A} \in \Sigma$-ra

$$\mu(\mathcal{A}) := \langle \emptyset \subset A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_l \rangle.$$

Ekkor $\mu(\Sigma)$ éppen azon $\mathcal{A} \in sd(C^k_{m,0})$ láncokat tartalmazza, melyekre $A_1 = \emptyset$. Világos, hogy μ egy körmentes parciális párosítás. μ egyetlen kritikus pontja az $\mathcal{A} = \emptyset$ 0-lánc.

A $sd(C^0_{m,n})$ poseten μ legyen az üres leképezés, ugyanis $sd(C^0_{m,n})$ poset egy darab 0-láncból és $\binom{m}{n} - 1$ darab k-láncból áll ($k = 0$).

Az $m = n + k$ esetben definiáljuk a parciális párosítást a következőképpen: egy $\mathcal{A} \in sd(C^k_{m,n})$ lánc legyen Σ-ban, ha $A_l \neq [m]$, és minden $\mathcal{A} \in \Sigma$-ra

$$\mu(\mathcal{A}) := \langle A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_l \subset [m] \rangle.$$

Ekkor $\mu(\Sigma)$ éppen azon $\mathcal{A} \in sd(C^k_{m,n})$ láncokat tartalmazza, melyekre $A_l = [m]$. Világos, hogy μ egy körmentes parciális párosítás. μ egyetlen kritikus pontja az $\mathcal{A} = [m]$ 0-lánc.

Az állítás m szerinti indukcióval való bizonyítása elindul, ugyanis az $m = 1$ eseteket tartalmazzák a fentiek. Ezek után legyen az $sd(C^k_{m,n})$ poset olyan, hogy $n, k > 0$ és $m > n + k > 1$. Ekkor a μ parciális párosítást a következő parciális párosítások uniójaként kapjuk. 1). Először vegyük az $sd(C^k_{m,n})$ poset azon $\mathcal{A}$ pontjai által indukált P_1 részposetjét, melyekre $m \notin A_l$. Ekkor $P_1 \cong sd(C^k_{m-1,n})$ a

$$\Psi_1(\mathcal{A}) := \mathcal{A}$$

izomorfizmussal. Indukció szerint $sd(C^k_{m-1,n})$-n létezik egy μ_1 körmentes parciális párosítás, melynek egyetlen 0-lánc és valahány k-lánc a kritikus pontja. Ez megad egy, ugyancsak μ_1-gyel jelölt, körmentes parciális párosítást P_1-en, mely valamely Σ_1 részposetjén van értelmezve. μ_1 kritikus pontjai egyetlen P_1-beli 0-lánc és valahány P_1-beli k-lánc.

2). Másodszor vegyük az $sd(C^k_{m,n})$ poset azon $\mathcal{A}$ pontjai által indukált P_2 részposetjét, melyekre $m \in A_1$. Ekkor $P_2 \cong sd(C^k_{m-1,n-1})$ a

$$\Psi_2(\mathcal{A}) := \langle A_1 \setminus \{m\} \subset A_2 \setminus \{m\} \subset \cdots \subset A_l \setminus \{m\}\rangle$$

izomorfizmussal. Így indukció szerint létezik P_2-n egy μ_2 körmentes parciális párosítás, mely P_2 valamely Σ_2 részposetjén van értelmezve. μ_2 kritikus pontjai egyetlen P_2-beli 0-lánc és valahány P_2-beli k-lánc.

3). Harmadszor vegyük az $sd(C^k_{m,n})$ poset azon $\mathcal{A}$ pontjai által indukált P_3 részposetjét, melyekre $m \notin A_1$ és $m \in A_l$. Egy $\mathcal{A} \in P_3$-ra legyen $j = \min\{i : m \in A_i\}$, és ha $A_{j-1} \neq A_j \setminus \{m\}$, akkor legyen $\mathcal{A} \in \Sigma_3$. Definiáljuk a μ_3 parciális párosítást egy $\mathcal{A} \in \Sigma_3$-ra a következőképpen:

$$\mu_3(\mathcal{A}) := \langle A_1 \subset \cdots \subset A_{j-1} \subset A_j \setminus \{m\} \subset A_j \subset \cdots \subset A_l\rangle,$$

minden $\mathcal{A} \in \Sigma_3$. Az világos, hogy μ_3 egy körmentes parciális párosítás P_3-on. Kritikus pontjai P_3 azon $\mathcal{A}$ pontjai, melyekre $A_1 = A_2 \setminus \{m\}$.

4). μ_3 ezen $\mathcal{A}$ kritikus pontjai által indukált P_4 részposetre $P_4 \cong sd(C^{k-1}_{m-1,n})$ a

$$\Psi_4(\mathcal{A}) := \langle A_2 \setminus \{m\} \subset A_3 \setminus \{m\} \subset \cdots \subset A_l \setminus \{m\}\rangle$$

izomorfizmussal. Így indukció szerint létezik P_4-en egy μ_4 körmentes parciális párosítás, mely P_4 valamely Σ_4 részposetjén van értelmezve. μ_4 kritikus pontjai egyetlen P_4-beli 1-lánc és valahány P_4-beli k-lánc.

Tehát μ legyen ezen parciális párosítások uniója

$$\mu = \mu_1 \cup \mu_2 \cup \mu_3 \cup \mu_4,$$

valamint

$$\mu(\mathcal{A}_0) := \langle B \subset B \cup \{m\} \rangle,$$

ahol az $\mathcal{A}_0 = A$ a μ_1 parciális párosítás P_1-beli kritikus 0-lánca , és $\mathcal{B} = \langle B \subset B \cup \{m\} \rangle$ a μ_4 parciális párosítás P_4-beli kritikus 1-lánca. Ugyanis azt feltehetjük, hogy $A = B$: $[m-1]$-nek egy permutációjával el tudjuk érni, hogy μ_1 kritikus 0-láncára $A \subseteq B$ vagy $B \subseteq A$. Ezután ha $A \neq B$, akkor μ_1-et újradefiniáljuk úgy, hogy $\mathcal{B}_0 = B$ legyen az egyetlen P_1-beli kritikus 0-lánca μ_1'-nek. Induljunk el az $\mathcal{A}_0 \subset \mu_1(\mathcal{A}_0) = \mathcal{A}_1 \supset \mathcal{A}_2 \subset \mu_1(\mathcal{A}_2) = \mathcal{A}_3 \supset \cdots$ úton P_1-ben. Mivel μ_1 körmentes és $m \notin B$, így létezik $\mathcal{A}_{2j}$ pont az úton, hogy $B \in \mu_1(\mathcal{A}_{2j})$. Ekkor definiáljuk μ_1'-et a $\mathcal{A}_{2i}$ pontokon a következőképpen

$$\mu_1'(\mathcal{A}_{2i}) := \mathcal{A}_{2i-1}$$

minden $0 < i \leq j$-re, és $\mu_1'(\mathcal{B}_0) := \mathcal{A}_{2j}$, valamint Σ_1 összes, a fenti úthoz nem tartozó $\mathcal{A}$ pontjára $\mu_1'(\mathcal{A}) := \mu_1(\mathcal{A})$. Az így kapott μ_1' ugyancsak egy körmentes parciális párosítás $sd(C^k_{m,n})$-n: az világos, hogy parciális párosítás, valamint hogy μ_1' Σ_1' értelmezési tartományára

$$\Sigma_1' = (\Sigma_1 \setminus \{\mathcal{A}_0\}) \cup \{\mathcal{B}_0\} \quad \text{és} \quad \mu_1'(\Sigma_1') = \mu_1(\Sigma_1).$$

Indirekt tegyük fel, hogy létezik P_1-beli

$$\mathcal{B}_1 \subset \mu_1'(\mathcal{B}_1) \supset \mathcal{B}_2 \subset \mu_1'(\mathcal{B}_2) \supset \cdots \mathcal{B}_t \subset \mu_1'(\mathcal{B}_t) \supset \mathcal{B}_1$$

kör. Ekkor nyilván $\mathcal{B}_i$-k 0-láncok, hiszen μ_1 körmentes volt. Valamint a fenti útnak és a körnek van közös pontja, azaz $\mathcal{B}_i$ 0-lánc, melyre $\mu_1'(\mathcal{B}_i) \neq \mu_1(\mathcal{B}_i)$. Mivel $\mu_1'(\mathcal{B}_i)$ 1-láncnak pontosan két 0-lánc a részlánca és $\mu_1'(\Sigma_1') = \mu_1(\Sigma_1)$, így $\mathcal{B}_{i+1}$ 0-láncnak volt a párja $\mu_1'(\mathcal{B}_i)$-nek μ_1 mellett. Ekkor viszont $\mu_1'(\mathcal{B}_{i+1})$ 1-lánc $\mathcal{B}_{i+2}$-nek volt a párja μ_1 mellett, és így tovább. Azt kapjuk, hogy a fenti $\mathcal{B}_0$ pontja a láncnak, de akkor $\mathcal{A}_0$ is, ami ellentmond a kör létezésének, vagy pedig létezik

$$\mathcal{B}_1 \subset \mu_1(\mathcal{B}_1) \supset \mathcal{B}_2 \subset \mu_1(\mathcal{B}_2) \supset \cdots \mathcal{B}_t \subset \mu_1(\mathcal{B}_t) \supset \mathcal{B}_1$$

kör P_1-ben, ami megint csak ellentmondás. Tehát feltehetjük, hogy a μ_1 P_1-beli kritikus 0-lánca azon $\mathcal{A}_0 = B$, melyre a μ_4 P_4-beli kritikus 1-lánca $\mathcal{B} = \langle B \subset B \cup \{m\} \rangle$.

μ körmentességének igazolásához indirekt tegyük fel, hogy létezik $sd(C^k_{m,n})$-beli

$$\mathcal{A}_1 \subset \mu(\mathcal{A}_1) \supset \mathcal{A}_2 \subset \mu(\mathcal{A}_2) \supset \cdots \mathcal{A}_t \subset \mu(\mathcal{A}_t) \supset \mathcal{A}_1$$

kör. Az világos $\mathcal{A}_1 \in \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \cup \Sigma_4 \cup \{\mathcal{A}_0\}$. Ha $\mathcal{A}_1 \in \Sigma_2$, akkor az összes A_i eleme Σ_2-nek, ami ellentmond a kör létezésének. Ha $\mathcal{A}_1 \in \Sigma_4$, akkor az összes A_i eleme Σ_4-nek, ami megint csak ellentmondás. Ha $\mathcal{A}_1 \in \Sigma_1$, akkor az összes A_i eleme Σ_1-nek, ami ellentmondás, vagy valamelyik $\mathcal{A}_j = \mathcal{A}_0$ μ_1 kritikus 0-lánca. Ehhez μ a $\mu(\mathcal{A}_0) = \langle A \subset A \cup \{m\}\rangle$-et rendeli, de ekkor $\mathcal{A}_{j+1} = A \cup \{m\}$, ami Σ_2-beli, így az összes többi $\mathcal{A}_i$ is Σ_2-beli lesz. Tehát nem lehetséges hogy $\mu(\mathcal{A}_t) \supset \mathcal{A}_1$, ismét ellentmondásra jutottunk. Ha $\mathcal{A}_1 \in \Sigma_3$, akkor a kör létezése miatt van olyan $\mathcal{A}_j$, mely Σ_1-beli, de akkor az összes többi A_i is Σ_1-beli, ami ellentmondás, vagy valamelyik $\mathcal{A}_{j'} = \mathcal{A}_0$ a μ_1 kritikus 0-lánca. Ekkor ismét ellentmondásra jutottunk az előbbi meggondolás alapján. Hasonlóan, ha $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_0$ a μ_1 kritikus 0-lánca. Ekkor az összes többi $\mathcal{A}_i$ Σ_2-beli lesz. Tehát nem lehetséges hogy $\mu(\mathcal{A}_t) \supset \mathcal{A}_1$, ismét ellentmondásra jutottunk. Ezzel beláttunk, hogy μ egy körmentes parciális párosítás.

A μ parciális párosításnak egyetlen 0-lánc és valahány k-lánc a kritikus pontja. A 12. tétel második része szerint az $\mathcal{K}(C^k_{m,n})$ komplexus homotóp ekvivalens egy $\mathcal{K}$ CW-komplexussal, melynek egyetlen 0-dimenziós és valahány k-dinemziós cellája van, azaz $\mathcal{K}(C^k_{m,n})$ komplexus homotóp ekvivalens egy k-dimenziós gömbcsokorral.

■

Legyen a $\mathcal{K}(C^k_{m,n})$ komplexus homotóp ekvivalens $w(m,n,k)$ darab gömbfelület csokrával homotóp ekvivalens. Ekkor a fenti bizonyításból kapjuk, hogy a $w(m,n,k)$ számokra az alábbi rekurzív formula teljesül

$$w(m,n,k) = w(m-1,n,k) + w(m-1,n-1,k) + w(m-1,n,k-1),$$

minden $m \geq n+k$ pozitív egészkre. A peremesetekben pedig a

$$w(m,0,k) = 0; \qquad w(m,n,0) = \binom{m}{n} - 1; \qquad w(n+k,n,k) = 0$$

értékeket veszi fel.

Az előbbi állítást felhasználva már egyszerűen beláthatjuk a Lovász-Kneser tételt.

14'. Tétel. (Lovász-Kneser [22]) *A $KG_{m,n}$ Kneser gráf nem színezhető $m-2n+1$ színnel.*

Bizonyítás. A tétel bizonyításához elég megmutatni, hogy az $\mathcal{NK}(KG_{m,n})$ szomszédsági komplexus $(m-2n-1)$-összefüggő. Ehhez vizsgáljuk az $\mathcal{LK}(KG_{m,n})$ Lovász komplexust, $\mathcal{NK}(KG_{m,n})$ deformációs retraktumát. Az előző állítás szerint $\mathcal{LK}(KG_{m,n})$ komplexus homotóp ekvivalens egy $(m-2n)$-dimenziós gömbcsokorral, így $(m-2n-1)$-összefüggő. Ezzel bebizonyítottuk a Lovász-Kneser tételt.

■

3. Gráfok s-szeres színezése

Gráfok s-szeres színezését 1972-ben Gilbert vezette be [18]-ban a rádiófrekvencia kiosztási problémával kapcsolatban. További gyakorlati problémák, úgymint flotta-szervízelés, munkafeladatok ütemezése vagy forgalomszinkronizálás tanulmányozása is a gráfok s-szeres színezésének feladatára vezetnek [27]. Ugyanis ezen problémák matematikai modelljében a következő feladatot kell megoldanunk: egy megfelelő gráf csúcsaihoz egy bizonyos színhalmaz s elemű részhalmazainak egy olyan hozzárendelését adjuk meg, mely éllel összekötött csúcsokhoz diszjunkt részhalmazokat rendel. Ezen problémák jelentős mértékben motiválták a gráfok s-szeres színezésének további vizsgálatát.

Az s-szeres színezéssel kapcsolatos legalapvetőbb eredményeket Saul Stahl 1978-as [32] cikke tartalmazza. Amint látni fogjuk a $KG_{m,n}$ Kneser gráf központi szerepet tölt be az s-szeres színezésekben. Stahl [32]-ben a Kneser gráfok multikromatikus számainak számos tulajdonságát fogalmazta meg, több esetben kiszámolta ezeket. Ezek alapján megfogalmazta a Kneser sejtés általánosítását, amely megadná az összes multikromatikus számot. Ezt ma Stahl sejtésnek nevezzük.

3.1. Gráfok s-szeres színezése

A gráfok s-szeres színezésének első precíz, matematikai megfogalmazását Stahl [32] cikkébben találjuk. Tetszőleges s pozitív egész esetén, egy G gráf *s-szeres színezése* során a gráf minden csúcsához s darab színt rendelük úgy, hogy szomszédos csúcsokhoz diszjunkt szín s-es tartozik. Világos, hogy a G gráf s-szeres színezése a hagyományos színezés általánosítása, amikor minden csúcshoz egy színt rendelünk. Tegyük fel, hogy a G gráf s-szeres színezése során összesen t színt használtunk fel. Ekkor egy G gráf s-szeres színezésére különböző nézőpontokból tekinthetünk. Először a gráfhomomorfizmus fogalmát használva:

Egy G gráf s-szeres színezése t színnel egy $\gamma : G \to KG_{t,s}$ gráfhomomorfizmus.

A második nézőpontból a G gráf független csúcshalmazait tekintjük. A $V(G)$ egy részhalmaza *független csúcshalmaz*, ha nem tartalmaz éllel összekötött csúcsokat. Legyen C_i az i színű csúcsok halmaza, tehát:

Egy G gráf s-szeres színezése t színnel egy olyan $\{C_i\}_{i=1}^t$ független csúcshalmaz rendszer, hogy minden csúcs a C_i-k közül pontosan s-ben van benne.

Az s-szeres színezés egy, a hagyományos színezésen keresztül való értelmezését is adhatjuk a $G[K_s]$ gráf segítségével, a G gráf K_s teljes gráffal vett lexikografikus szorzatát használva.

Egy G gráf s-szeres színezése t színnel pontosan a $G[K_s]$ gráf hagyományos színezése t színnel.

Legyen $\chi_s(G)$ az a legkisebb t szám, melyre létezik G-nek s-szeres színezése t színnel. A $\chi_s(G)$ számot a G gráf s-edik multikromatikus számának nevezzük, $s = 1, 2, \ldots$. Megjegyezzük, hogy ez a definíció a gráf hagyományos kromatikus számának egy általánosítása, ugyanis a G gráf hagyományos kromatikus száma éppen a $\chi_1(G)$. A $G[K_s]$ lexikografikus szorzat kromatikus számát Geller és Stahl [16]-ban vizsgálta, melyben a következő észrevételt tették

$$\chi_s(G) = \chi(G[K_s]).$$

3.2. Gyakorlati problémák

A fent említett négy gyakorlati probléma részletes tanulmányozását Opsut és Roberts [27] cikkében találjuk. Mi most csak megfogalmazzuk a feladatokat, valamint azok matematikai modelljét adjuk meg.

I. Rádiófrekvencia kiosztási probléma: Egy országot, egy nagyobb régiót kisebb zónákra osztunk fel, és minden egyes zónában az ott működő rádió szolgáltatóknak egy megengedett rádiófrekvencia halmazt akarunk kijelölni. Földrajzi, meterológiai, vagy egyéb más okokból bizonyos zónák ütköznek, így ezen területeknek csak diszjunkt megengedett rádiófrekvencia halmazokat jelölhetünk ki. *Feladat:* Adjuk meg egy adott régió zónáinak megengedett rádiófrekvencia kiosztását.

II. Flottaszervizelési probléma: Egy szervíz egy adott, különböző méretű járművekből (autók, repülők, hajók) álló gépjárműpark rendszeres szervizelését végzi.

Mindegyik jármű előre, bizonyos időperiódusra van betáblázva. *Feladat:* Foglaljunk le minden egyes járműnek egy munkaterületet, ahol a szervizelést elvégzik, úgy, hogy azon járművek, melyek időperiódusa átfedi egymást, különböző területet kapjanak.

III. Munkafeladatok ütemezése: Egy nagy és komplikált munkafeladatot részfeladatokra osztunk. Ezek közzül bizonyos részfeladatok összeegyeztethetetlenek és nem lehet ugyanabban az időben elvégezni őket (például, mert ugyanazon eszközöket, munkadarabokat, vagy munkaterületet használják). *Feladat:* Adjuk meg a részfeladatok egy ütemezését, mely minden időperiódusra csak összeegyeztethető részfeladatok tervez be.

IV. Forgalomszinkronizálási probléma: Adott bizonyos eszköz, úgymint laboratórium, számítógép, vagy közlekedési kereszteződés, részegységeinek használatára vonatkozó kéréseknek halmaza. Minden egyes elfogadott kérésnek ki kell jelölni egy időperiódust, amely alatt használhatja az eszközt. A közlekedési forgalmat vagy a használati forgalmat szinkronizálni kell, bizonyos kérések nem teljesíthetők egyszerre. *Feladat:* Adjuk meg a zöld periódusok egy olyan kiosztását, melyben csak kompatibilis kéréseket szerepelnek minden egyes időperiódusban.

Ezen problémák gráfelméleti megfogalmazásában definiálunk egy G gráfot, melyen adott $\mathcal{I}$ tulajdonságot teljesítő $\gamma : G \to S$ leképezést keresünk. A rádiófrekvencia kiosztási problémában a G gráf csúcsai az egyes zónák, két zóna éllel van összekötve, ha valamilyen okból ütköznek. Egy $v \in V(G)$ zónára $\gamma(v)$ legyen a zóna megengedett rádiófrekvencia halmaza. A flottaszervizelési problémában a $V(G)$ csúcshalmaz legyen a járművek halmaza, és két jármű éllel van összekötve, ha szervizelésük időperiódusa átfedi egymást. Egy v járműre $\gamma(v)$ legyen a lefoglalt munkaterületet, ahol a szervizelést elvégzik. A munkafeladatok ütemezésénél a G csúcshalmaza a részfeladatok halmaza, két részfeladat éllel van összekötve, ha azok összeegyeztethetetlenek. Legyen $\gamma(v)$ a v részfeladatra kijelölt időperiódus. A forgalomszinkronizálási problémában pedig $V(G)$ legyen a kérések halmaza, két kérés éllel van összekötve, ha azok nem teljesíthetők egyszerre. Legyen $\gamma(v)$ a v kérésre kijelölt zöld időperiódus. Valamennyi feladatban a keresendő $\gamma : G \to S$ leképezésre a következő $\mathcal{I}$ tulajdonságnak kell teljesülnie: bármely $uv \in E(G)$ él esetén $\gamma(u) \cap \gamma(v) = \emptyset$.

3.3. χ_s ÁLTALÁNOS TULAJDONSÁGAI

Stahl [32]-ben a χ_s multikromatikus számok tulajdonságaira vonatkozó számos tételt bizonyított. A következő három tulajdonságból képet kapunk a χ_s multikromatikus számok általános viselkedéséről, melyek általa adott bizonyítását nézzük meg. Az első tétel a multikromatikus számok alsó indexben való szubadditívitására vonatkozik, azaz:

25. Tétel. (Stahl [32]) *Tetszőleges G gráf és s_1, s_2 egészek esetén*

$$\chi_{s_1+s_2}(G) \leq \chi_{s_1}(G) + \chi_{s_2}(G).$$

Bizonyítás. Legyenek a $\{C_i\}$ és a $\{C'_j\}$ független csúcshalmaz rendszerek s_1-szeres és s_2-szeres színezései a G gráfnak. Ekkor a $\{C_i\} \cup \{C'_j\}$ független csúcshalmaz rendszer egy $(s_1 + s_2)$-szeres színezése G-nek. Tehát

$$\chi_{s_1+s_2}(G) \leq \chi_{s_1}(G) + \chi_{s_2}(G).$$

■

Továbbá egy G gráf multikromatikus számainak sorozata szigorúan monoton nővekvő. Abban a triviális esetben, ha G-nek nincs éle, akkor világos hogy:

$$\chi_s(G) = s > s - 1 = \chi_{s-1}(G).$$

Abban az esetben, ha G-nek van éle:

26. Tétel. (Stahl [32]) *Ha a G gráfnak van éle, akkor $\chi_s(G) \geq \chi_{s-1}(G) + 2$.*

Stahl bizonyítása a következő lemmán alapul.

27. Lemma. (Stahl [32]) *Tetszőleges $n > 1$ és $m \geq 2n$ pozitív egészek esetén létezik $KG_{m,n} \to KG_{m-2,n-1}$ gráfhomomorfizmus.*

Bizonyítás. Legyen $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ egy tetszőleges csúcsa $KG_{m,n}$-nek, ekkor azt mondjuk, hogy A *l-reguláris* csúcs, ha $a_i = i$ minden $i = 1, \ldots, l$-re és $a_{l+1} > l + 1$. A 0-reguláris csúcsokat *irreguláris* csúcsoknak nevezzük. Most definiáljuk a $\lambda : V(KG_{m,n}) \to V(KG_{m-2,n-1})$ leképezést egy A l-reguláris csúcsra a következőképpen

$$\lambda(A) := \{a_2 - 1, a_3 - 1, \ldots, a_l - 1, a_{l+1} - 2, \ldots, a_n - 2\},$$

egy A irreguláris csúcsra pedig

$$\lambda(A) := \{a_2 - 2, a_3 - 2, \ldots, a_n - 2\}.$$

Megmutatjuk, hogy λ egy $KG_{m,n} \to KG_{m-2,n-1}$ gráfhomomorfizmus. Azaz tetsző-leges $A, B \in V(KG_{m,n})$ csúcsokra $\lambda(A) \cap \lambda(B) = \emptyset$, ha $A \cap B = \emptyset$. Indirekt tegyük fel, hogy létezik két diszjunkt csúcs, A és B, hogy $\lambda(A) \cap \lambda(B) \neq \emptyset$. Az nem lehetséges, hogy mindkettő reguláris, ugyanis akkor mindkettő szükségképpen tartalmazza az 1-et. Tehát két eset lehetséges:

1. Ha A és B is irreguláris. Ekkor $\lambda(A) = \{a_2 - 2, a_3 - 2, \dots, a_n - 2\}$ és $\lambda(B) = \{b_2 - 2, b_3 - 2, \dots, b_n - 2\}$. Így, ha $\lambda(A) \cap \lambda(B) \neq \emptyset$, akkor létezik a_i és b_j, hogy $a_i - 2 = b_j - 2$, azaz $a_i = b_j$, ami ellentmond A és B diszjunktságának.

2. Ha A l-reguláris és B irreguláris. Ekkor

$$\lambda(A) = \{a_2 - 1, a_3 - 1, \dots, a_l - 1, a_{l+1} - 2, \dots, a_n - 2\},$$

   és

$$\lambda(B) = \{b_2 - 2, b_3 - 2, \dots, b_n - 2\}.$$

   Ha $\lambda(A) \cap \lambda(B) \neq \emptyset$, akkor létzik $j > 1$, hogy $b_j - 2 \in \lambda(A)$. Ha $b_j - 2 = a_i - 2$ valamely $i > l$-re, akkor ismét ellentmondásra jutunk A és B diszjunktsága miatt. Tehát $b_j - 2 = a_i - 1$ valamely $2 \leq i \leq l$-re. Ekkor

$$b_j = a_i + 1 \leq l + 1.$$

   Másrészt A és B diszjunktsága miatt $l + 1 \leq b_j$. Vagyis azt kapjuk, hogy $b_j = l + 1$. Ami azt jelenti, hogy b_j a B legkisebb eleme, azaz $j = 1$. Tehát ismét ellentmondásra jutottunk.

   Ezzel a lemmát beláttuk.

■

A 26. tétel bizonyítása. Tegyük fel, hogy a G gráfnak van éle, ekkor nyílván $\chi_s(G) = t \geq 2s$. Azaz létezik $\gamma : G \to KG_{t,s}$ gráfhomomorfizmus. Az előző lemma szerint létezik $\eta : KG_{t,s} \to KG_{t-2,s-1}$ gráfhomomorfizmus. Mivel két gráfhomomorfizmus kompozíciószorzata is gráfhomomorfizmus, így ekkor létezik egy $G \to KG_{t-2,s-1}$ gráfhomomorfizmus. Tehát

$$\chi_{s-1}(G) \leq t - 2 = \chi_s(G) - 2.$$

■

28. Következmény. (Stahl [32]) *Ha a G gráfnak van éle, akkor*

$$\chi_s(G) \geq \chi_{s'}(G) + 2s - 2s'$$

tetszőleges $s \geq s'$ pozitív egészekre.

A harmadik tulajdonság általánosítása a jól ismert, hagyományos kromatikus számra vonatkozó tulajdonságnak.

29. Tétel. (Stahl [32]) *Ha létezik $\varphi : G \to H$ gráfhomomorfizmus, akkor*

$$\chi_s(G) \leq \chi_s(H).$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy létezik $\varphi : G \to H$ gráfhomomorfizmus, és hogy $\chi_s(H) = t$, azaz létzik $\gamma : H \to KG_{s,t-2s}$ gráfhomomorfizmus. Ekkor létezik $\varphi \circ \gamma : G \to KG_{s,t-2s}$ gráfhomomorfizmus és így $\chi_s(G) \leq t$.

■

3.4. A STAHL SEJTÉS

Stahl a Kneser gráfok multikromatikus számaira vonatkozó sejtését az alábbi ismert esetekből kiindulva fogalmazta meg. Tetszőleges n és $m \geq 2n$ pozitív egészekre a $\chi_1(KG_{m,n})$ kromatikus szám $m - 2n + 2$ a Lovász-Kneser tétel szerint. Továbbá a 26. tételt alkalmazva, azaz a χ_s multikromatikus számok közti legalább 2-es ugrás miatt

$$m - 2n + 2s \leq \chi_s(KG_{m,n}),$$

minden $s = 1, \ldots, n$-re. Így a $\chi_n(KG_{m,n})$ multikromatikus számra a következő alsó korlátot kapjuk

$$m - 2n + 2n = m \leq \chi_n(KG_{m,n}).$$

Másrészt az identikus $KG_{m,n} \to KG_{m,n}$ gráfhomomorfizmus egy n-szeres színezését adja a $KG_{m,n}$ Kneser gráfnak, vagyis

$$\chi_n(KG_{m,n}) \leq m.$$

Tehát

$$\chi_n(KG_{m,n}) = m,$$

sőt ekkor a 26. tétel és a 28. következmény miatt

$$m - 2n + 2s \leq \chi_r(KG_{m,n}) \leq m - 2n + 2s,$$

tehát

$$\chi_s(KG_{m,n}) = m - 2n + 2s,$$

minden $s = 1, \ldots, n$-re. Az világos, hogy a $KG_{m,n}$ Kneser gráfot ki tudjuk színezni $2m - 2n + 2$ színnel $n + 1$-szeresen, ugyanis

$$\chi_{n+1}(KG_{m,n}) \leq \chi_n(KG_{m,n}) + \chi_1(KG_{m,n}) = m + m - 2n + 2 = 2m - 2(n-1)$$

a 25. tétel miatt. Ám Stahl számításaira hivatkozva azt sejtette, hogy ennél kevesebbel nem is lehet, aminek következtében

$$\chi_{2n-r}(KG_{m,n}) = 2m - 2r$$

minden $r = 0, \ldots, n-1$-re, ahol ugyancsak a 28. következmény miatt, valamint az általa [32]-ben meghatározott qn-edik multikromatikus számok,

$$\chi_{qn}(KG_{m,n}) = qm$$

következtében. Az $m = 2n + 1$-es esetben ezt sikerült igazolnia, sőt teszőleges n, q pozitív egészekre és $0 \leq r \leq n - 1$-re megmutatta [32]-ben, hogy

$$\chi_{qn-r}(KG_{2n+1,n}) = q(2n+1) - 2r.$$

Ezen eredményekből számára úgy tűnt, hogy az $s = qn + 1$ esetek a kritikusak, ugyanis hasonlóan a $q = 1$-es esethez, tetszőleges q esetén, a $\chi_{qn}(KG_{m,n})$ és $\chi_{qn+1}(KG_{m,n})$ multikromatikus számok közti $m - 2(n-1)$-es ugrás következtében az összes többi multikromatikus számra

$$\chi_{qn-r}(KG_{m,n}) = qm - 2r$$

már adódik a 28. következmény miatt, amit sejtésként meg is fogalmaztott az 1978-as [32] cikkében.

30. Sejtés. (Stahl [32]) *Tetszőleges n és $m \geq 2n$ esetén legyen $s = qn - r$, ahol $0 < q$ és $0 \leq r < n$ egészek, ekkor*

$$\chi_s(KG_{m,n}) = qm - 2r.$$

A $KG_{m,n}$ Kneser gráf $n = 1$ esetén éppen a m csúcsú teljes gráf, így ebben az esetben a sejtés triviálisan igaz. Továbbá a sejtés igaz a kritikus $s = 4$ esetben a $KG_{m,3}$ Kneser gráfokra, amit Garey és Johnson mutatott meg egy 1976-os [15] cikkükben. Majd második, s-szeres színezéssel kapcsolatos 1978-as [9] cikkükben Chvátal, Garey és Johnson igazolták, hogy tetszőleges $n > 1$-re létezik $c = c(n)$ konstans, hogy elég nagy m-re

$$\chi_{n+1}(KG_{m,n}) \geq 2m - 2(n-1) - c.$$

Stahl következő 1998-as [33] cikkében az Erdős-Chao Ko-Rado és a Hilton-Milner tételeket használva alsó korlátot adott $KG_{m,n}$-beli s-szeresen fedő független csúcshalmazok számára, s ezzel a $KG_{m,2}$ és $KG_{m,3}$ Kneser gráfokra igazolta a sejtést. Továbbá Chvátal, Garey és Johnson fenti alsó korlátját élesítette:

31. Tétel. (Stahl [33]) *Tetszőleges n és $m \geq 2n$ esetén legyen $s = qn - r$, ahol $0 \leq q$ és $0 \leq r < n$ egészek, ekkor*

$$\chi_s(KG_{m,n}) \geq qm - 2r - (n^2 - 3n + 4).$$

Ez az alsó korlát $s = qn + 1$ esetén,

$$\chi_{qn+1}(KG_{m,n}) \geq \chi_{qn}(KG_{m,n}) + m - 2(n-1) - (n^2 - 3n + 4),$$

éppen azt mutatja, hogy a $\chi_{qn}(KG_{m,n})$ és $\chi_{qn+1}(KG_{m,n})$ multikromatikus számok között, rögzített n esetén, akármilyen nagy ugrás lehet. Ám az $m - 2n \leq n^2 - 3n + 4$ esetén még mindig csak a 28. következményből következő

$$\chi_{qn-r}(KG_{m,n}) \geq (q-1)m + 2(n-r)$$

alsó korlát volt ismert.

4. Topologikus alsókorlát tételek a multikromatikus számokra

A 2. fejezetben számos, a hagyományos kromatikus számra vonatkozó topologikus alsókorlát tételt tekintettünk. A Stahl sejtés által motiválva ezen tételek általánosításáit vizsgáltam. Amint láttuk, egy G gráf s-szeres színezése t színnel, egyenértékű egy $\gamma : G \to KG_{t,s}$ gráfhomomorfizmus megadásával. A korábban definiált valamennyi $\mathbb{Z}_2$-gráfkomplexus esetén a γ indukál egy $c : |\mathcal{K}(G)| \to |\mathcal{K}(KG_{t,s})|$ $\mathbb{Z}_2$-leképezést. A $\mathcal{K}(KG_{t,s})$ komplexusok homotópia típusa miatt ezen leképezések létezése csak bizonyos t-kre lehetséges.

4.1. A Walker-féle tétel általánosítása

Tegyük fel, hogy a G gráf s-szeresen színezhető t színnel, azaz létezik $\gamma : G \to KG_{t,s}$ gráfhomomorfizmus. Ekkor a 19. állítás szerint létezik $c : LP(G) \to LP(KG_{t,s})$ ortoleképezés. Felhasználva, hogy az $LP(KG_{t,s})$ ortoposet izomorf a $B_{t,s}$ posettel, kapjuk a következő s-szeres színezhetőségi állítást.

32. Állítás. (Walker [35]) *Tetszőleges G gráf esetén, ha létezik $G \to KG_{t,s}$ gráfhomomorfizmus, akkor létezik $LP(G) \to B_{t,s}$ ortoleképezés.*

Ezen állítást felhasználva meghatározzuk a K_n teljes gráf multikromatikus számait. Megjegyezzük, hogy a $\chi_s(K_n)$ multikromatikus szám az s-szeres színezés definíciójából következően sn minden s-re. Mi a most kapott s-szeres színezhetőségi állítás egyszerű alkalmazására szeretnénk példát mutatni. Az világos, hogy ha a K_n teljes gráfot s-szeresen színezzük, akkor sn szín biztosan elég lesz, ugyanis a 25. tétel szerint

$$\chi_s(K_n) \leq s\chi_1(K_n) = sn.$$

Másrészt a 32. állítás szerint annak a szükséges feltétele, hogy a K_n gráfnak létezzen s-szeres színezése t színnel, az hogy létezik $LP(K_n) \to B_{t,s}$ ortoleképezés. Az

$L(K_n)$ Lovász poset izomorf a $B_{n,1}$ ortoposettel, aminek n darab minimális pontja van, melyek páronként ortogonálisak (diszjunktak). Egy ortoleképezés megőrzi az ortogonalitást, tehát ha létezik $B_{n,1} \to B_{t,s}$ ortoleképezés, akkor a $B_{t,s}$-ben van n darab páronként ortogonális (diszjunkt) pont. Ez csak akkor igaz, ha $t \geq ns$. Tehát azt kaptuk, hogy

$$\chi_s(K_n) = sn.$$

A hagyományos kromatikus számra vonatkozó Walker-féle topologikus alsókorlát tételnek a multikromatikus számokra vonatkozó általánosítását a 20. állítás felhasználásával vezethetjük le. Ezen állítás szerint valamennyi $\gamma : G \to KG_{t,s}$ gráfhomomorfizmus indukál egy $c : |\mathcal{L}(G)| \to |\mathcal{L}(KG_{t,s})|$ $\mathbb{Z}_2$-leképezés, így

$$ind(\mathcal{L}(G)) \leq ind(\mathcal{L}(KG_{t,s})).$$

A $KG_{t,s}$ Kneser gráf Lovász komplexusáról a Lovász-Kneser tétel bizonyítása során megmutattuk, hogy $(t-2s-1)$-összefüggő, így a 3. tétel (iii) állítása szerint $ind(\mathcal{L}(KG_{t,s})) \geq t-2s$. Másrészt $\mathcal{L}(KG_{t,s})$ $(t-2s)$-dimenziós szimpliciális $\mathbb{Z}_2$-komplexus, így $ind(\mathcal{L}(KG_{t,s})) \leq t-2s$. Tehát azt kaptuk, hogy

$$ind(\mathcal{L}(G)) \leq ind(\mathcal{L}(KG_{t,s})) = t-2s,$$

vagyis

$$ind(\mathcal{L}(G)) + 2s \leq t.$$

Ezzel a Walker-féle topologikus alsókorlát tétel általánosítását kaptuk a $\chi_s(G)$ multikromatikus számokra:

33. Tétel. (Osztényi) *Tetszőleges G gráf esetén és $s \geq 1$-re*

$$ind(\mathcal{L}(G)) + 2s \leq \chi_s(G).$$

Most pedig vegyünk példaként egy G páros gráfot. A G gráf s-szeres színezéséhez $2s$ szín elegendő, ugyanis a 25. tétel szerint

$$\chi_s(G) \leq s\chi_1(K_n) = 2s.$$

Másrészt, ha G páros gráfnak van éle, akkor $\mathcal{NK}(G)$ szomszédsági komplexus nem üres és így az $\mathcal{L}(G)$ Lovász komplexus -1-összefüggő. Tehát a 3. tétel (iii) állítása szerint $0 \leq ind(\mathcal{L}(G))$, így a 33. tétel szerint

$$2s \leq \chi_s(G).$$

Azaz azt kaptuk, hogy

$$\chi_s(G) = 2s.$$

Mivel a páros hosszú körök mind páros gráfok, így ezek multikromatikus számait ismerjük. A páros gráfok és páros hosszú körök multikromatikus számait is meghatározta Stahl [32]-ben. Egy páratlan hosszú kör multikromatikus számainak meghatározása már nem ilyen egyszerű, erre az 5. fejezetben térünk vissza.

4.2. A Babson-Kozlov-féle tétel általánosítása

A Babson-Kozlov-féle topologikus alsókorlát tétel általánosításához tegyük fel, hogy létezik t színnel való s-szeres színezése a G gráfnak, azaz $G \to KG_{t,s}$ gráfhomomorfizmus. Ekkor létezik $\mathcal{H}om(K_n, G) \to \mathcal{H}om(K_n, KG_{t,s})$ $\mathbb{Z}_2$-leképezés. A $\mathcal{H}om(K_n, KG_{t,s})$ komplexus homotópia típusát [29]-ben határoztam meg. Ezzel a 22. tétel általánosítását kaptam, ugyanis a $KG_{t,s}$ Kneser gráf az $s = 1$ esetben éppen a K_t teljes gráf.

34. Tétel. (Osztényi [29]) *A $\mathcal{H}om(K_n, KG_{t,s})$ komplexus homotóp ekvivalens egy $(t - ns)$-dimenziós gömbcsokorral.*

A $\mathcal{H}om(K_n, KG_{t,s})$ komplexus homotópia típusát a következő eljárással határozzuk meg. Először a $P_{hom}(K_n, KG_{t,s})$ posetről áttérünk a $\overline{P}_{hom}(K_n, KG_{t,s})$ posetre. Ezzel a homotópia típus nem változik, ugyanis láttuk fent, hogy a $P_{hom}(K_n, KG_{t,s})$ poset homotóp ekvivalens a $\overline{P}_{hom}(K_n, KG_{t,s})$ posettel. Most ehhez leírjuk a $\overline{P}_{hom}(K_n, KG_{t,s})$ poset elemeit. Legyen $\eta \in P_{hom}(K_n, KG_{t,s})$ egy tetszőleges elem. Ha $\eta(i) = \{a_1, \dots, a_m\} \subseteq V(KG_{t,s})$, akkor $\Psi(\eta)(i) = cn^2_{KG_{t,s}}(\eta(i))$ az $\bigcup_{j=1}^m a_j$ halmaz összes s-elemű részhalmazának halmaza minden $i \in V(K_n)$-re. Tetszőleges $i_1, i_2 \in V(K_n)$ esetén $\left(\bigcup_{a_j \in \eta(i_1)} a_j\right) \bigcap \left(\bigcup_{b_j \in \eta(i_2)} b_j\right) = \emptyset$, mivel $\eta \in P_{hom}(K_n, KG_{t,s})$. Tehát $\overline{P}_{hom}(K_n, KG_{t,s})$ izomorf a következő posettel

$$P([t], n, s) := \{A_1 \uplus \cdots \uplus A_n \colon \cup_{i=1}^n A_i \subseteq [t] \;\&\; A_i \cap A_j = \emptyset \text{ ha } i \neq j \;\&\; |A_i| \geq s \;\forall\, 1 \leq i \leq n\}.$$

A $P([t], n, s)$ poset elemeit a $[t]$ halmaz *rendezett parciális (n, s)-partícióinak* nevezzük. A $P([t], n, s)$ poseten a részbenrendezés pedig a követlező: legyen $\uplus A_i$ és $\uplus B_i$ két rendezett parciális (n, s)-partíció, ekkor $\uplus A_i \leq \uplus B_i$, ha $A_i \subseteq B_i$ minden i-re.

Ezután meghatározzuk a $\mathcal{K}(P([t], n, s))$ (és ezzel a $\mathcal{H}om(K_n, KG_{t,s})$) komplexus összefüggőségét, amihez a különböző részkomplexusait vezetjük be. A $\mathcal{K}(P([t], n, s))$

komplexus egy tetszőleges szimplexe egy $\mathcal{A} = \langle \biguplus_{i=1}^{n} A_{1,i} \subset \ldots \subset \biguplus_{i=1}^{n} A_{l,i} \rangle$ lánca $P([t], n, s)$-nek. Legyen $\xi = F_1 \uplus \cdots \uplus F_n$ egy rendezett $(n, 0)$-partíciója az $F \subseteq [t]$ halmaznak, ahol $F = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$. A $\mathcal{K}(P([t], n, s))$ komplexus ξ-rögzített elemek által indukált részkomplexusa

$$\mathcal{K}[\xi] := \{\langle \biguplus_{i=1}^{n} A_{1,i} \subset \ldots \subset \biguplus_{i=1}^{n} A_{l,i} \rangle \in \mathcal{K} : F_i \subseteq A_{1,i} \ \forall\ 1 \leq i \leq n\}.$$

35. Állítás. (Oszténi [29]) *Tetszőleges s, n és t pozitív egészek esetén, ahol $\max\{2s, ns\} \leq t$, legyen $\mathcal{K}[\xi]$ a $\mathcal{K}(P([t], n, s))$ komplexus ξ-rögzített elemek által indukált részkomplexusa, melyre $|F_i| \leq s$ minden $1 \leq i \leq n$-re. Ekkor $\mathcal{K}[\xi]$ $(t - ns - 1)$-összefüggő.*

Bizonyítás. A bizonyítás $s + n + (t - ns)$ szerinti indukcióval megy. Az indukció elindul, ugyanis az állítás igaz az $s + n + (t - ns) = 3$ esetben. Ez csak akkor áll fenn, ha $s = 1, n = 1, t = 2$ vagy $s = 1, n = 2, t = 2$, mely esetekben $\mathcal{K}[\xi]$ pontra összehúzható, illetve nem üres. Tehát tegyük fel, hogy $s + n + (t - ns) > 3$. Két eset lehetséges:

1. eset: Ha létezik $k \in [n]$ index, hogy $|F_k| = s$. Ebben az esetben megadunk egy parciális párosítást a $P = P(\mathcal{K}[\xi])$ lapposeten. Legyen Σ a P poset azon $\mathcal{A} = \langle \biguplus_{i=1}^{n} A_{1,i} \subset \ldots \subset \biguplus_{i=1}^{n} A_{l,i} \rangle$ elemeiből álló részposetje, melyekre $A_{l,k} \setminus F_k \neq \emptyset$ és a $h = h(\mathcal{A}) = \min\{j : F_k \neq A_{j,k}\}$ indexre

$$(\bigcup_{i=1}^{n} A_{h,i}) \setminus (\bigcup_{i=1}^{n} A_{h-1,i}) \neq A_{h,k} \setminus F_k.$$

Ekkor egy $\mathcal{A} \in \Sigma$-ra

$$\mu(\mathcal{A}) := \langle \biguplus_{i=1}^{n} A_{1,i} \subset \ldots \subset \biguplus_{i=1}^{n} A_{h-1,i} \subset \biguplus_{i=1}^{n} B_i \subset \biguplus_{i=1}^{n} A_{h,i} \subset \ldots \subset \biguplus_{i=1}^{n} A_{l,i} \rangle,$$

ahol $B_k = F_k$ és $B_i = A_{h,i}$ minden $i \neq k$-ra. Ez valóban egy parciális párosítás, ugyanis $\Sigma \cap \mu(\Sigma) = \emptyset$ és μ injektív.

Megmutatjuk, hogy μ egy körmentes parciális párosítás. Indirekt tegyük fel, hogy $\mathcal{A}_1, \mu(\mathcal{A}_1), \ldots, \mathcal{A}_q, \mu(\mathcal{A}_q)$ egy kör P-ben ($q > 1$). Minden egyes $\mathcal{A}_j, \mu(\mathcal{A}_j)$ felugrás esetén mi egy új rendezett (n, s)-parciális partíciót adunk az $\mathcal{A}_j$ lánchoz, melynek k-adik komponense F_k. Ha pedig $\mu(\mathcal{A}_j)$-ből $\mathcal{A}_{j+1}$-be ugrunk, akkor $\mathcal{A}_{j+1}$-et úgy kapjuk, hogy a $\mu(\mathcal{A}_j)$ lánc $\biguplus_{i=1}^{n} A_{h_j,i}$ elemét töröljük, ahol $h_j = h(\mathcal{A}_j)$, különben $\mathcal{A}_{j+1} \notin \Sigma$ vagy

$\mathcal{A}_{j+1} = \mathcal{A}_j$. Azaz nem olyan rendezett (n, s)-parciális partíciót töröltünk a $\mu(\mathcal{A}_j)$ láncból, melynek k-adik komponense F_k. Vagyis a körben haladva az $\mathcal{A}_j$ láncok ilyen partícióinak száma monoton nő, ez pedig ellentmond a kör létezésének.

A kritikus pontok, mint szimplexek, egy $\mathcal{K}_c \subset \mathcal{K}[\xi]$ részkomplexust alkotnak, ugyanis a kritikus pontok azon $\mathcal{A} = \langle \biguplus_{i=1}^{n} A_{1,i} \subset \ldots \subset \biguplus_{i=1}^{n} A_{l,i}\rangle$ pontjai P-nek, melyekre $F_i \subseteq A_{1,i}$ és $A_{l,k} = F_k$. A 12. tétel szerint $\mathcal{K}[\xi]$ homotóp ekvivalens $\mathcal{K}_c$-vel. Ha $n = 1$, akkor $\mathcal{K}_c$ egyetlen pont, így az állítás igaz. Ha $n > 1$, akkor $\mathcal{K}_c$ izomorf a $K(P([t]\setminus F_k, n-1, s))$ komplexus ξ'-rögzített elemek által indukált részkomplexusával, ahol $\xi' = F_1 \uplus \cdots \uplus F_{k-1} \uplus F_{k+1} \uplus \cdots \uplus F_n$ rendezett $(n-1, 0)$-partíciója az $F \setminus F_k$ halmaznak. Így indukció szerint a $\mathcal{K}_c$ komplexus $(t - s - (n-1)s - 1) = (t - ns - 1)$-összefüggő. Tehát $\mathcal{K}[\xi] \sim \mathcal{K}_c$ $(t - ns - 1)$-összefüggő.

2. eset: Ha minden $k \in [n]$ indexre $|F_k| < s$, akkor a következő eljárást hajtsuk végre.

Legyen f_0 a legkisebb eleme az $[t] \setminus F$ halmaznak. A $k \in [n]$ indexre legyen $\mathcal{K}_k$ a $\mathcal{K}[\xi]$ komplexus következő részkomplexusa

$$\mathcal{K}_k = \{\langle \biguplus_{i=1}^{n} A_{1,i} \subset \ldots \subset \biguplus_{i=1}^{n} A_{l,i}\rangle \in \mathcal{K}[\xi] : \, f_0 \notin A_{li} \;\; i \neq k-\text{ra}\}.$$

$\mathcal{K}[\xi]$ tetszőleges $\mathcal{A} = \langle \biguplus_{i=1}^{n} A_{1,i} \subset \ldots \subset \biguplus_{i=1}^{n} A_{l,i}\rangle$ szimplexére létezik k, hogy $f_0 \notin A_{li}$ minden $i \neq k$-ra, így $\mathcal{K}_k$ tartalmazza az $\mathcal{A}$ szimplexet, vagyis

$$\mathcal{K}[\xi] = \bigcup_{k=1}^{n} \mathcal{K}_k.$$

A $\{\mathcal{K}_k\}_{k\in[n]}$ részkomplexus rendszere az Ideg tételt fogjuk alkalmazni, ezért vizsgáljuk a véges metszetek összefüggőségét. Tetszőleges $k_1, \ldots, k_m \in [n]$ indexekre, ahol $m \geq 2$,

$$\mathcal{K}_{k_1} \cap \ldots \cap \mathcal{K}_{k_m} = \{\langle \biguplus_{i=1}^{n} A_{1,i} \subset \ldots \subset \biguplus_{i=1}^{n} A_{l,i}\rangle \in \mathcal{K}[\xi] : \, f_0 \notin A_{l,i} \;\; \forall\, i \in [n]\}.$$

Ha $t = ns$, akkor $\mathcal{K}_{k_1} \cap \ldots \cap \mathcal{K}_{k_m} = \emptyset$. Egyébként $\mathcal{K}_{k_1} \cap \ldots \cap \mathcal{K}_{k_m}$ izomorf a $\mathcal{K}(P([t] \setminus \{f_0\}, n, s))$ komplexus ξ-rögzített elemek által indukált részkomplexusával, melyre $|F_k| < s$ minden $k \in [n]$-re, így indukció szerint $(t - 1 - ns - 1) = (t - ns - 2)$-összefüggő.

Most megmutatjuk, hogy mindegyik $\mathcal{K}_k$ $(t - ns - 1)$-összefüggő. Megadunk egy μ_k parciális párosítást a $P_k = P(\mathcal{K}_k)$ lapposeten. Legyen Σ_k a P_k poset azon $\mathcal{A} =$

$\langle \biguplus_{i=1}^{n} A_{1,i} \subset \ldots \subset \biguplus_{i=1}^{n} A_{l,i} \rangle$ elemeiből álló részposetje, melyekre $f_0 \notin A_{1,k}$ és az $r = r(\mathcal{A}) = \max\{j\colon f_0 \notin A_{j,k}\}$ indexre $(\bigcup_{i=1}^{n} A_{r+1,i}) \setminus (\bigcup_{i=1}^{n} A_{r,i}) \neq \{f_0\}$. Ekkor egy $\mathcal{A} \in \Sigma_k$-ra

$$\mu_k(\mathcal{A}) := \biguplus_{i=1}^{n} A_{1,i} \subset \ldots \subset \biguplus_{i=1}^{n} A_{r,i} \subset \biguplus_{i=1}^{n} B_i \subset \biguplus_{i=1}^{n} A_{r+1,i} \subset \ldots \subset \biguplus_{i=1}^{n} A_{l,i},$$

ahol $B_k = A_{r,k} \cup \{f_0\}$ és $B_i = A_{ri}$ minden $i \neq k$-ra. Ez valóban egy parciális párosítás, ugyanis $\Sigma_k \cap \mu_k(\Sigma_k) = \emptyset$ és μ_k injektív.

Megmutatjuk, hogy μ_k egy körmentes parciális párosítás. Indirekt tegyük fel, hogy $\mathcal{A}_1, \mu_k(\mathcal{A}_1), \ldots, \mathcal{A}_q, \mu_k(\mathcal{A}_q)$ egy kör P_k-ban $(q > 1)$. Minden egyes $\mathcal{A}_j, \mu_k(\mathcal{A}_j)$ felugrás esetén mi egy új rendezett (n, s)-parciális partíciót adunk az $\mathcal{A}_j$ lánchoz, mely k. komponense tartalmazza f_0-t. Ha pedig $\mu_k(\mathcal{A}_j)$-ből $\mathcal{A}_{j+1}$-be ugrunk, akkor $\mathcal{A}_{j+1}$-et úgy kapjuk, hogy a $\mu_k(\mathcal{A}_j)$ lánc $\biguplus_{i=1}^{n} A_{r_j,i}$ elemét töröljük, ahol $r_j = r(\mathcal{A}_j)$, különben $\mathcal{A}_{j+1} \notin \Sigma_k$ vagy $\mathcal{A}_{j+1} = \mathcal{A}_j$. Azaz nem olyan rendezett (n, s)-parciális partíciót töröltük a $\mu(\mathcal{A}_j)$ láncból, melynek k-adik komponense tartalmazza f_0-t. Tehát a körben haladva az $\mathcal{A}_j$ láncok ilyen partícióinak száma monoton nő, ez pedig ellentmond a kör létezésének.

A kritikus pontok azon $\mathcal{A} = \langle \biguplus_{i=1}^{n} A_{1,i} \subset \ldots \subset \biguplus_{i=1}^{n} A_{l,i} \rangle$ elemei P_k-nak, melyekre $F_i \subseteq A_{1,i}$ és $f_0 \in A_{1k}$. Így a kritikus pontok, mint szimplexek egy $\mathcal{K}_{kc} \subset \mathcal{K}_k$ részkomplexust alkotnak, mely részkomplexus izomorf a $\mathcal{K}(P([t], n, s))$ komplexus ξ''-rögzített elemek által indukált részkomplexusával, ahol $\xi'' = F_1 \uplus \cdots \uplus F_{k-1} \uplus (F_k \cup \{f_0\}) \uplus F_{k+1} \uplus \cdots \uplus F_n$ rendezett $(n, 0)$-partíciója az $F \setminus \{f_0\}$ halmaznak. A 12. tétel (i) része szerint $\mathcal{K}_k$ homotóp ekvivalens a $\mathcal{K}_{kc}$-val.

Abban az esetben, ha $|F_k \cup \{f_0\}| = s$, az első eset szerint kész vagyunk. Azaz $\mathcal{K}_{kc}$ $(t - ns - 1)$-összefüggő, és így $\mathcal{K}_k$ is $(t - ns - 1)$-összefüggő. Az Ideg tételt alkalmazva a $\{\mathcal{K}_k\}_{k \in [n]}$ részkomplexus rendszerre azt kapjuk, hogy $\mathcal{K}[\xi]$ $(t - ns - 1)$-összefüggő, mivel az $\mathcal{NK}(\{\mathcal{K}_i\}_{i \in [n]})$ ideg komplexus egy $(n - 1)$-szimplex.

Egyébként, ha $|F_k \cup \{f_0\}| < s$, hajtsuk végre a fenti eljárást a $\mathcal{K}[\xi'']$ komplexusra. ∎

Ezek után már meg tudjuk mutatani, hogy a $\mathcal{H}om(K_n, KG_{t,s})$ komplexus egy $(t - ns)$-dimenziós gömbcsokorral homotóp ekvivalens.

A 34. Tétel bizonyítása. Az előző állítás szerint a $\mathcal{H}om(K_n, KG_{t,s})$ komplexus $(t - ns - 1)$-összefüggő. Mivel a $\mathcal{H}om(K_n, KG_{t,s})$ komplexus dimenziója $t - ns$, így

5. állítás szerint $\mathcal{H}om(K_n, KG_{t,s})$ egy $(t-ns)$-dimenziós gömbcsokorral homotóp ekvivalens.

■

Ekkor, amint azt a 2.2. alfejezetben megmutattuk $ind(\mathcal{H}om(K_l, KG_{t,s})) = t-sl$. Így ha létezik $G \to KG_{t,s}$ gráfhomomorfizmus, akkor

$$ind(\mathcal{H}om(K_l, G)) \leq ind(\mathcal{H}om(K_l, KG_{t,s})) = t - sl.$$

Ezzel a következő topologikus alsókorlát tételt kaptuk a multikromatikus számokra.

36. Tétel. (Osztényi [29]) *Tetszőleges G gráfra, s és $l \geq 2$ pozitív egész számokra*

$$ind(\mathcal{H}om(K_l, G)) + sl \leq \chi_s(G).$$

4.3. Topologikus alsókorlát tételek gráfok lexikografikus szorzatának kromatikus számára

A G gráf s-szeres színezése ekvivalens a $G[K_s]$ lexikografikus szorzat egyszeres színezésével, így ebben az esetben a Lovász-féle alsókorlát tétel a következő

$$\chi_s(G) \geq conn(\mathcal{NK}(G[K_s])) + 3,$$

míg a Babson-Kozlov-féle alsókorlát tétel pedig a

$$\chi_s(G) \geq ind(\mathcal{H}om(K_2, G[K_s])) + 2$$

alsó korlátot adja. Ebben az alfejezetben ezen komplexusok összefüggőségét, illetve $\mathbb{Z}_2$-indexét vizsgáljuk.

A Lovász-féle alsókorlát tétel a lexikografikus szorzatra

Amint látni fogjuk a $G[K_s]$ lexikografikus szorzat szomszédsági komplexusának összefüggőségét meghatározza a G gráf úgynevezett kiegészített szomszédsági komplexusának összefüggősége. Egy tetszőleges G gráf esetén az $\mathcal{EN}(G)$ *kiegészített szomszédsági komplexus* legyen azon szimpliciális komplexus, melynek csúcshalmaza $V(G)$, és a csúcsok egy A részhalmaza szimplex, ha van olyan v csúcsa G-nek, melyre $A \subseteq cn_G(v) \cup \{v\}$. A szomszédsági leképezés kigészítettjeként definiáljuk a $cn_G^* : 2^{V(G)} \to 2^{V(G)}$ leképezést:

$$cn_G^*(A) := cn_G(A) \cup A$$

Ekkor

$$\mathcal{EN}(G) = \{B \subseteq V(G) : \exists v \in V(G) \text{ hogy } B \subseteq cn_G^*(v)\}.$$

Az $\mathcal{NK}(G[K_s])$ szomszédsági komplexus egy jó felbontására fogjuk alkalmazni az Ideg tételt. Legyen $p : V(G[K_s]) \to V(G)$ projekciós leképezés, azaz $p(w) = v$ minden $w = (v, l)$ csúcsra. A G gráf egy v csúcsára legyen N_v^s a $G[K_s]_{cn^*_{G[K_s]}(w)}$ részgráf szomszédsági komplexusa, ahol $v = p(w)$. Ez jóldefiniált részkomplexusa $\mathcal{NK}(G[K_s])$-nek, ugyanis ha $p(w_1) = p(w_2)$, akkor $G[K_s]_{cn^*_{G[K_s]}(w_1)}$ megegyezik $G[K_s]_{cn^*_{G[K_s]}(w_2)}$-vel. Az $\{N_v^s\}_{v \in V(G)}$ részkomplexus rendszerre

$$\mathcal{NK}(G[K_s]) = \bigcup_{v \in V(G)} N_v^s.$$

Ezek után vizsgáljuk meg az $\{N_v^s\}_{v \in V(G)}$ fedőrendszer nemüres, véges metszeteinek összefüggőségét. Ehhez az N_v^s komplexus egy join felbontását vesszük. A $G[K_s]_{cn^*_{G[K_s]}(w)}$ részgráf izomorf a $K_s * G_{cn_G(v)}[K_s]$ join szorzattal, ahol $p(w) = v$. A következő állítás szerint ezen join szorzat szomszédsági komplexusát homotópia erejéig majdnem meghatározza a $G_{cn_G(v)}[K_s]$ részgráf szomszédsági komplexusa.

37. Állítás. (Osztényi [12]) *Legyen H egy tetszőleges gráf és $0 < s$, ekkor*

$$\|\mathcal{NK}(H * K_s)\| \sim \|\mathcal{NK}(H)\| * S^{s-1}.$$

Bizonyítás. A $H * K_s$ gráf izomorf a $(H * K_{s-1}) * K_1$ gráffal. Így felhasználva azt a tényt, hogy $\underbrace{S^0 * \ldots * S^0}_{s\times} \cong S^{s-1}$, elég azt bizonyítani, hogy $\|\mathcal{NK}(K_1 * H)\| \simeq \|\mathcal{NK}(H)\| * S^0$. Ezt pedig Gyárfás és társai [17]-ben megmutatták.

∎

Tehát

$$\|N_v^s\| \sim \|N(G_{cn_G(v)}[K_s])\| * S^{s-1}. \qquad \langle ** \rangle$$

Ezt felhasználva alsó becslést adhatunk az $\{N_v^s\}_{v\in V(G)}$ fedőrendszer nemüres, véges metszeteinek összefüggőségére.

38. Lemma. (Osztényi [12])
(i) Az N_v^s *részkomplexus legalább* $(s-1)$*-összefüggő.*
(ii) Az $N_{v_1}^s \cap N_{v_2}^s \cap \ldots \cap N_{v_t}^s$ *részkomplexus legalább* $(ts-3)$*-összefüggő, ha nem üres.*

Bizonyítás. (i) A G gráf bármely v csúcsára $\|N_v^s\|$ homotóp ekvivalens $\|N(G_{cn_G(v)}[K_s])\| * S^{s-1}$-gyel, $\langle **\rangle$ szerint. Így az N_v^s részkomplexus $(conn(N(G_{cn_G(v)}[K_s])) + s)$-összefüggő az 1. állítás szerint, azaz legalább $(s-1)$-összefüggő.

(ii) Tegyük fel, hogy $U = \{v_1, v_2, \ldots, v_t\}$ a $V(G)$ csúcshalmaz egy részhalmaza, melyre $N_{v_1}^s \cap N_{v_2}^s \cap \ldots \cap N_{v_t}^s \neq \emptyset$ és $t \geq 2$. Legyen $U' = p(V(N_{v_1}^s \cap N_{v_2}^s \cap \ldots \cap N_{v_t}^s))$. Vegyük észre, hogy $U' = \cap_{i=1}^t cn_G^*(v_i)$. Két eset lehetséges:

1. Ha létezik $v_{i_1}, v_{i_2} \in U$, hogy $v_{i_1} \notin cn_G^*(v_{i_2})$, azaz $(v_{i_1}, v_{i_2}) \notin E(G)$. Ekkor legyen $U_1 = \{v_i \in U : U' \subseteq cn_G(v_i)\}$ és $U_2 = U \setminus U_1$. Nyílván $U_1 \neq \emptyset$, hiszen $v_{i_1} \in U_1$. A $\sigma_{p^{-1}(U')}$ szimplex eleme $N_{v_i}^s$ részkomplexusnak minden $v_i \in U_1$-re. A v_{i_1} csúcs pedig eleme $V(G_{cn_G^*(v_j)})$-nek minden $v_j \in U_2$-re és $U' \subseteq cn_{G_{cn_G^*(v_j)}}(v_{i_1})$, így $\sigma_{p^{-1}(U')}$ eleme $N_{v_j}^s$-nak is. Azaz $N_{v_1}^s \cap N_{v_2}^s \cap \ldots \cap N_{v_t}^s = \sigma_{p^{-1}(U')}$ és így pontra összehúzható.

2. Ha $v_{i_1} \in cn_G^*(v_{i_2})$ az összes $v_{i_1}, v_{i_2} \in U$ csúcspárra, ekkor G_U egy teljes gráf és $U' = U \cup cn_G(U)$. Így $N_{v_1}^s \cap N_{v_2}^s \cap \ldots \cap N_{v_t}^s \cong N(G_{U'}[K_s])$. A $G_{U'}$ gráf izomorf a $G_U * G_{cn_G(U)} = K_t * G_{cn_G(U)}$ gráffal. Tehát ha $cn_G(U) \neq \emptyset$, akkor

$$\|N_{v_1}^s \cap N_{v_2}^s \cap \ldots \cap N_{v_t}^s\| \cong \|N((K_t * G_{cn_G(U)})[K_s])\| \cong$$

$$\|N(K_{ts} * G_{cn_G(U)}[K_s])\| \sim \|N(G_{cn_G(U)}[K_s])\| * S^{ts-1},$$

   $\langle **\rangle$ szerint. Vagyis $(conn(N(G_{cn_G(U)}[K_s]))+ts)$-összefüggő, ami lealább $(ts-1)$. Ha pedig $cn_G(U) = \emptyset$, akkor $N_{v_1}^s \cap N_{v_2}^s \cap \ldots \cap N_{v_t}^s \cong N(G_U[K_s]) \cong N(K_{ts})$. Így $N_{v_1}^s \cap N_{v_2}^s \cap \ldots \cap N_{v_t}^s$ $(ts-3)$-összefüggő.

Összegezve, $conn(N_{v_1}^s \cap N_{v_2}^s \cap \ldots \cap N_{v_t}^s) \geq ts-3$, bármely $N_{v_1}^s \cap N_{v_2}^s \cap \ldots \cap N_{v_t}^s \neq \emptyset$ és $t \geq 2$ esetén.

■

Ha $l < s$, akkor az előző lemma szerint

$$conn(N^s_{v_1} \cap N^s_{v_2} \cap \ldots \cap N^s_{v_t}) \geq ts - 3 \geq s - 1 - t + 1 \geq l - t + 1.$$

Így az $\{N^s_v\}$ fedőrendszerre teljesülnek az Ideg tétel feltételei $l < s$ esetén, tehát:

39. Állítás. (Osztényi [12]) *Tetszőleges $s > l \geq 2$ egészek és G gráf esetén az $\mathcal{NK}(G[K_s])$ komplexus akkor és csakis akkor l-összefüggő, ha az $\mathcal{N}(\{N^s_v\})$ komplexus l-összefüggő.*

Most pedig meghatározzuk az $\{N^s_v\}_{v\in V(G)}$ fedőrendszer ideg komplexusát:

40. Lemma. (Osztényi [12]) *Az $\{N^s_v\}_{v\in V(G)}$ fedőrendszer ideg komplexusa megegyezik a G kiegészített szomszédsági komplexusával.*

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy $\mathcal{EN}(G) \subseteq \mathcal{N}(\{N^s_v\}_{v\in V(G)})$: legyen $B \subseteq V(G)$ egy szimplexe $\mathcal{EN}(G)$-nek. Ekkor van G-nek egy v csúcsa, hogy $B \subseteq cn^*_G(v)$. Ebben az esetben a $\cap_{v_i\in B} N^s_{v_i}$ metszet nem üres, mivel $(v, 1)$ eleme $\cap_{v_i\in B} N^s_{v_i}$-nek. Most pedig belátjuk, hogy $\mathcal{N}(\{N^s_v\}_{v\in V(G)}) \subseteq \mathcal{EN}(G)$: tegyük fel, hogy $U = \{v_1, v_2, \ldots, v_t\}$ olyan részhalmaza $V(G)$-nek, melyre $N^s_{v_1} \cap N^s_{v_2} \cap \ldots \cap N^s_{v_t} \neq \emptyset$. Legyen w egy csúcsa $N^s_{v_1} \cap N^s_{v_2} \cap \ldots \cap N^s_{v_t}$-nek. Ekkor $p(w) = v_i$ vagy $p(w) \in cn_G(v_i)$ minden $1 \leq i \leq t$-re. Legyen $p(w) = v$, ekkor $U \subseteq cn^*_G(v)$, azaz U egy szimplex $\mathcal{EN}(G)$-ben. ■

Ezekután a 39. állítást a következőképpen írhatjuk át:

41. Tétel. (Osztényi [12]) *Tetszőleges $s > l \geq 2$ egészek és G gráf esetén az $\mathcal{NK}(G[K_s])$ komplexus akkor és csakis akkor l-összefüggő, ha az $\mathcal{EN}(G)$ komplexus l-összefüggő.*

Speciálisan $conn(\mathcal{EN}(G))$ végessége esetén $conn(\mathcal{NK}(G[K_s])) = conn(\mathcal{EN}(G))$ minden $s \geq conn(\mathcal{EN}(G)) + 2$-re. Így a Lovász-féle alsó korlát ebben az esetben

$$\chi_s(G) \geq conn(\mathcal{EN}(G)) + 3,$$

minden $s \geq conn(\mathcal{EN}(G)) + 2$-re. A 26. tétel szerint $\chi_s(G)$ szigorúan monoton nő s-ben, így $conn(\mathcal{EN}(G))$ végessége esetén a Lovász-féle alsó korlát és G adott multikromatikus száma közti különbség akármilyen nagy lehet.

A Babson-Kozlov-féle alsókorlát tétel a lexikografikus szorzatra

Ebben az alfejezetben a $\mathcal{H}om(K_2, G[K_s])$ gráfhomomorfizmus komplexus $\mathbb{Z}_2$-indexe és a G gráfban található legnagyobb teljes részgráf mérete, $\omega(G)$ közti kapcsolatot mutatjuk meg.

42. Tétel. (Csorba [12]) *Tetszőleges G gráf és $s \geq |V(G)|$ egész esetén*

$$ind(\mathcal{H}om(K_2, G[K_s])) + 2 = s \cdot \omega(G).$$

Bizonyítás. Ismeretes, hogy $ind(\mathcal{H}om(K_2, G)) + 2 \geq \omega(G)$. Mivel $\omega(G[K_s]) = s \cdot \omega(G)$, így $ind(\mathcal{H}om(K_2, G[K_s])) + 2 \geq s \cdot \omega(G)$. Ezért még azt kell bizonyítani, hogy $ind(\mathcal{H}om(K_2, G[K_s])) + 2 \leq s \cdot \omega(G)$. Ehhez megadunk egy μ parciális párosítást a $P(\mathcal{H}om(K_2, G[K_s]))$ lapposeten.

μ definiálásához vegyük a G gráf komplementer irányított gráfját, a $\overrightarrow{G^c}$ gráfot. $\overrightarrow{G^c}$ élei az $\overrightarrow{uv}$ és $\overrightarrow{vu}$ irányított élek lesznek az összes olyan u, v csúcspárra, melyre $uv \notin E(G)$. Válasszunk egy tetszőleges lineáris rendezést ezen irányított élek halmazán. Egy $A \uplus B \in \mathcal{H}om(K_2, G[K_s])$ csúcsra tekintsük $\overrightarrow{G^c}$ azon, nem feltétlenül diszjunkt irányított részgráfjait, melyeket a $p(A)$ és $p(B)$ csúcsok indukálnak, ezeket jelölje $\overrightarrow{p(A)}$ és $\overrightarrow{p(B)}$. A $\overrightarrow{p(A)}$ részgráf egy $\overrightarrow{uv}$ irányított éle rossz, ha A tartalmaz egy olyan (u, i) csúcsot, melyre $i > 1$. Hasonlóan a $\overrightarrow{p(B)}$ részgráf egy $\overrightarrow{uv}$ irányított éle rossz, ha B tartalmaz egy olyan (u, i) csúcsot, melyre $i > 1$. Egy rossz él nem lehet egyszerre $\overrightarrow{p(A)}$-ban és $\overrightarrow{p(B)}$-ben, mivel A összes csúcsa B összes csúcsával össze van kötve. A $\mathcal{H}om(K_2, G[K_s])$ komplexus egy σ szimplexére, egy $A_1 \uplus B_1 \subset \ldots \subset A_n \uplus B_n$ láncra, jelölje $\rho(\sigma)$ a $\overrightarrow{p(A_n)}$ és $\overrightarrow{p(B_n)}$ részgráfok rossz élei közzül a legkisebbiket, ha van ilyen.

Most már készen vagyunk a μ párosítás definiálására. Legyen $\sigma = \langle A_1 \uplus B_1 \subset \ldots \subset A_n \uplus B_n \rangle$ egy szimplexe a $\mathcal{H}om(K_2, G[K_s])$ komplexusnak. Ha $\overrightarrow{p(A_n)}$ vagy $\overrightarrow{p(B_n)}$ tartalmaz rossz irányított élet, akkor az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\overrightarrow{p(A_n)}$ tartalmazza az $\overrightarrow{uv}$ legkisebb rossz élet. Először tegyük fel, hogy $(u, 1) \notin A_1$. Legyen $m = \max\{i \colon (u, 1) \notin A_i\}$. Ha $A_{m+1} \neq A_m \cup (u, 1)$ vagy $B_{m+1} \neq B_m$ (vagy $m = n$), akkor legyen $X := A_m \cup (u, 1)$ és $Y := B_m$. Mivel $(v, i) \in A_n$ nincs összekötve $(u, 1)$-gyel $G[K_s]$-ben, így $(u, 1) \notin B_n$, tehát $X \cap Y = \emptyset$. Legyen $\sigma \in \Sigma$ és

$$\mu(\sigma) := \langle A_1 \uplus B_1 \subset \ldots \subset A_m \uplus B_m \subset X \uplus Y \subset A_{m+1} \uplus B_{m+1} \subset \ldots \subset A_n \uplus B_n \rangle.$$

Ekkor $\sigma \in \mu(\Sigma)$, ha $A_{m+1} = A_m \cup (u,1)$ vagy $B_{m+1} = B_m$. A μ párosítás jól definiált az u választása miatt. Könnyű ellenőrízni, hogy $\rho(\sigma) = \rho(\mu(\sigma))$.

Most nézzük azt az esetet, amikor $(u,1) \in A_1$. Legyen $q = \max\{i\colon (u,i) \in A_n\}$. A rossz élek definiciójából következik, hogy $q > 1$. Legyen $l = \min\{i\colon (u,q) \in A_i\}$. Definiáljuk $X := A_l \setminus (u,q)$ és $Y := B_l$. Ha $l = 1$, akkor legyen $\sigma \in \Sigma$ és

$$\mu(\sigma) := \langle X \uplus Y \subset A_1 \uplus B_1 \subset \ldots \subset A_n \uplus B_n \rangle.$$

Ha $l > 1$ és $A_{l-1} \uplus B_{l-1} \neq X \uplus Y$, akkor legyen $\sigma \in \Sigma$ és definiáljuk

$$\mu(\sigma) := \langle A_1 \uplus B_1 \subset \ldots \subset A_{l-1} \uplus B_{l-1} \subset X \uplus Y \subset A_l \uplus B_l \subset \ldots \subset A_n \uplus B_n \rangle.$$

Ebben az esetben, $(u,1) \in A_1$, $\sigma \in \mu(\Sigma)$ pontosan akkor, ha $A_l = A_{l-1} \cup (u,q)$ vagy $B_l = B_{l-1}$. A párosítás ezen kitertjesztése jóldefiniált, ugyanis $X \neq \emptyset$ mivel tartalmazza $(u,1)$-et. Ezzel a kiterjesztésel is a σ és $\mu(\sigma)$ szimplexeknek ugyanúgy $A_n \uplus B_n$ a legnagyobb csúcsa, így $\rho(\sigma) = \rho(\mu(\sigma))$.

Megmutatjuk, hogy μ egy körmentes parciális párosítás. Indirekt tegyük fel, hogy $\sigma_1, \mu(\sigma_1), \ldots, \sigma_q, \mu(\sigma_q)$ egy kör $P(\mathcal{H}om(K_2, G[K_s]))$-ben ($q > 1$), melyben μ mindig egy új csúcsot ad az σ_j lánchoz. A $\sigma_j, \mu(\sigma_j)$ lépésben nem változik a legkisebb rossz él. Ha a $\mu(\sigma_j), \sigma_{j+1}$ lépésben a $\mu(\sigma_j)$-nek megfelelő lánc maximális elemét töröljük, akkor mivel $A_i \uplus B_i \subset A_{i+1} \uplus B_{i+1}$, a megfelelő legkisebb rossz él csak nőhet. Így a kör létezése miatt a legkisebb rossz él végig ugyanaz marad.

Először tegyük fel, hogy a σ_1-nek megfelelő lánc összes pontja tartalmazza $(u,1)$-et. Ez azt jelenti, hogy a kör összes szimplexének összes pontja rendelkezik ezzel a tulajdonsággal, ugyanis μ mindig egy olyan pontot ad a lánchoz, mely tartalmazza $(u,1)$-et, és nem tartalmazza (u,q)-t. Így amikor $\mu(\sigma_j)$-ből σ_{j+1}-be megyük nem törölhetünk olyan pontot, mely tartalmazza (u,q)-t. Különben a körben haladva az σ_j láncok (u,q)-t tartalmazó pontjainak száma monoton csökkenne, ez pedig ellentmond a kör létezésének. Így $\mu(\sigma_j)$-ből egy (u,q)-t nem tartalmazó pontot törlünk. Ebben az esetben viszont, mivel $\sigma_j \neq \sigma_{j+1}$, könnyen látható, hogy $\sigma_{j+1} \notin \Sigma$.

Másodjára tegyük fel, hogy a σ_1-nek megfelelő láncnak van olyan pontja mely nem tartalmazza $(u,1)$-et. Ebben az estben is μ mindig olyan pontot ad a lánchoz, mely tartalmazza $(u,1)$-et. Így amikor $\mu(\sigma_j)$-ből σ_{j+1}-be megyük csak olyan pontot törlhetünk, mely $(u,1)$-et tartalmazza. Különben a körben haladva az σ_j láncok $(u,1)$-et nem tartalmazó pontjainak száma monoton csökkenne, ami ellentmond a kör létezésének. Tehát $\mu(\sigma_j)$-ből egy $(u,1)$-et tartalmazó pontot törlünk. Ami viszont azt jelenti, hogy $\sigma_{j+1} \notin \Sigma$, mivel $\sigma_{j+1} \neq \sigma_j$. Vagyis μ egy körmentes parciális párosítás.

A kritikus pontok azon szimplexek, melyekre ρ értelmezve van. Így egy $\mathcal{H}_c \subset \mathcal{H}om(K_2, G[K_s])$ $\mathbb{Z}_2$-részkomplexust alkotnak. A 13. tétel szerint $\mathcal{H}om(K_2, G[K_s])$ $\mathbb{Z}_2$-homotóp ekvivalens $\mathcal{H}_c$-vel, ugyanis μ felcserélhető a $\mathcal{H}om(K_2, G[K_s])$ lévő standard ν $\mathbb{Z}_2$-hatással.

Ezekután a $\mathcal{H}_c$ részkomplexus dimenziójának egy felső korlátját adjuk meg. Legyen $\sigma = \langle A_1 \uplus B_1 \subset \ldots \subset A_n \uplus B_n \rangle$ egy kritikus szimplex, ennek dimenziója legfeljebb $|A_n| + |B_n| - 2$, ugyanis A_1 és B_1 sem üres. Legyen K_a és K_b egy-egy legnagyobb teljes részgráf $p(A_n)$-ben és $p(B_n)$-ben. Ha $p(A_n)$ és $p(B_n)$ teljes gráf, akkor, mivel A_n és B_n csúcsai $G[K_s]$-ben össze vannak kötve, $A_n \cup B_n$ is egy teljes gráf. Így $|A_n| + |B_n| \leq s \cdot \omega(G)$. Ha $p(A_n)$ vagy $p(B_n)$ nem teljes gráf, akkor az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy létezik egy $u \in p(A_n)$ csúcs, melyre $u \notin K_a$. Mivel K_a egy legnagyobb teljes részgráf, így létezik egy $v \in K_a$ csúcs, melyre $uv \notin E(G)$. σ egy kritikus szimplex, így $p^{-1}(u, v) \subset A_n$ csak $(u, 1)$ és $(v, 1)$-et tartalmazhatja. De így B_n nem tartalmazza (v, i)-t, mivel $(u, 1) \in A_n$. Hasonlóan ez az eset $p(A_n)$ vagy $p(B_n)$ minden olyan csúcsára, mely nem csúcsa K_a vagy K_b-nek. Így

$$|A_n| + |B_n| \leq s \cdot (\omega(G) - 1) + (|V(G)| - \omega(G) + 1) = s \cdot \omega(G) + |V(G)| - s - \omega(G) + 1.$$

Kihasználva, hogy $s \geq |V(G)|$ és $\omega(G) \geq 1$, kapjuk, hogy $|A_n| + |B_n| \leq s \cdot \omega(G)$. Így a 6. állításból kapjuk, hogy

$$ind(\mathcal{H}_c) \leq s \cdot \omega(G) - 2.$$

Ez a $\mathcal{H}_c$ és $\mathcal{H}om(K_2, G[K_s])$ komplexusok $\mathbb{Z}_2$-homotóp ekvivalenciája miatt azt jelenti, hogy

$$ind(\mathcal{H}om(K_2, G[K_s])) \leq s \cdot \omega(G) - 2.$$

■

Ez a következő triviális alsó korlátot adja a multikromatikus számokra.

43. Tétel. (Csorba [12]) *Tetszőleges G gráf és $s \geq |V(G)|$ egész esetén*

$$\chi_s(G) \geq s \cdot \omega(G).$$

5. A STAHL SEJTÉS VIZSGÁLATA

Ebben a fejezetben először a multikromatikus számokra adott topologikus alsókorlát tételeket alkalmazzuk a Kneser gráfokra. Ezután a Walker-féle s-szeres színezhetőségi poset állításból (32. állításból) adódóan az $LP(KG_{m,n}) \to LP(KG_{t,s})$ Lovász posetek közti ortoleképezések létezését vizsgáljuk. Az $LP(KG_{m,n})$ ortoposeteket tanulmányozva azt kapjuk, hogy míg $|\mathcal{LK}(KG_{m,n})| \to |\mathcal{LK}(KG_{t,s})|$ $\mathbb{Z}_2$-leképezés létezik, ha $m-2n \leq t-2s$, addig egy $L(\gamma) : LP(KG_{m,n}) \to LP(KG_{t,s})$ ortoleképezés nem létezik, ha az $LP(KG_{m,n})$-beli "ortogömbfelületek" szimpliciális mérete kisebb, mint az $LP(KG_{t,s})$-belieké.

5.1. TOPOLOGIKUS ALSÓ KORLÁTOK A KNESER GRÁFOK MULTIKROMATIKUS SZÁMAIRA

Először a 4.1. alfejezetben adott Walker-féle topologikus alsó korlát általánosítását alkalmazzuk a $KG_{m,n}$ Kneser gráfra. A 33. tétel szerint

$$\chi_s(KG_{m,n}) \geq ind(\mathcal{LK}(KG_{m,n})) + 2s.$$

Amint azt már meghatároztuk, $ind(\mathcal{LK}(KG_{m,n})) = m - 2n$, így a

$$\chi_s(KG_{m,n}) \geq m - 2n + 2s$$

alsó korlátot kapjuk. Ez az $s = 1, \ldots, n$ esetekben megadja a multikromatikus számokat, ám $n < s$ esetén már nem éles.

Másodjára azt nézzük meg, hogy mit kapunk, ha a Babson-Kozlov-féle topologikus alsókorlát tétel általánosítását alkalmazzuk a $KG_{m,n}$ Kneser gráfra. A 36. tétel szerint minden $l \leq \lfloor \frac{m}{n} \rfloor$-re

$$\chi_s(KG_{m,n}) \geq ind(\mathcal{H}om(K_l, KG_{m,n})) + sl.$$

A 34. tételben meghatároztuk a $\mathcal{H}om(K_l, KG_{m,n})$ komplexus homotópia típusát, ami szerint $ind(\mathcal{H}om(K_l, KG_{m,n})) = m - nl$, így

$$\chi_s(KG_{m,n}) \geq m - nl + sl. \qquad \langle * * * \rangle$$

Ez úgyszintén, az $l = 2$ választással, megadja az igazságot $s = 1, \ldots, n$-re. Továbbá tekintsük $\langle * * * \rangle$-ot az $l = \lfloor \frac{m}{n} \rfloor$ és $s = n + r$, $1 \leq r < n$ esetekben

$$\chi_{n+r}(KG_{m,n}) \geq m + \lfloor \frac{m}{n} \rfloor r.$$

Ekkor már nem éles, ám a Stahl-féle alsó korlátnál,

$$\chi_{n+r}(KG_{m,n}) \geq 2m - 2n + 2r - (n^2 - 3n + 4),$$

élesebb az $m \leq n^2 - n + 4 + \lfloor \frac{m-2n}{n} \rfloor r$ esetekben. Általában, az $s \geq 2n$ esetekben, már nem használható, némi hozadéka van még $n|m$ esetén.

5.2. Topologikus alsó korlátok a Kneser gráfok lexikografikus szorzatának kromatikus számára

A Lovász-féle alsó korlát a $KG_{m,n}[K_s]$ gráf kromatikus számára

A $KG_{m,n}[K_s]$ gráfra alkalmazva a Lovász-féle alsó korlátot a következőt kapjuk a $KG_{m,n}$ Kneser gráf multikormatikus számaira:

$$\chi_s(KG_{m,n}) = \chi(KG_{m,n}[K_s]) \geq conn(\mathcal{NK}(G[K_s])) + 3. \qquad \langle \star \rangle$$

Stahl sejtése szerint a $\chi_s(KG_{m,n})$ multikromatikus számok egy szigorú monoton növekvő sorozatot alkotnak s-ben, így $\langle \star \rangle$ akkor használható a Stahl sejtés megoldására, ha a $conn(\mathcal{NK}(KG_{m,n}[K_s]))$ összefüggőségi számok is egy szigorú monoton növekvő sorozatot adnak s-ben. A 41. tétel szerint az $\mathcal{NK}(KG_{m,n}[K_s])$ komplexus összefüggőségét meghatározza az $\mathcal{EN}(KG_{m,n})$ komplexus összefüggősége. Így, $\mathcal{EN}(KG_{m,n})$ s-től való függetlensége miatt, $\mathcal{EN}(KG_{m,n})$ l-összefüggő kell legyen minden $l \in \mathbb{N}$-re. Ez azt jelenti a Whitehead tétel szerint, hogy $\mathcal{EN}(KG_{m,n})$ pontra összehúzható. Ha viszont pontra összehúzható, akkor a 7. állítás szerint aciklikus és így a 8. állítás szerint bármely $|\mathcal{EN}(KG_{m,n})| \to |\mathcal{EN}(KG_{m,n})|$ folytonos leképezésének van fixpontja. Ám mi most megadunk egy $\mathcal{EN}(KG_{m,n}) \to \mathcal{EN}(KG_{m,n})$ szimpliciális leképezést, melynek nincs fixpontja, ami $conn(\mathcal{EN}(KG_{m,n}))$ végességét adja.

Legyen $\pi_{m,n}$ a következő permutációja az $[m]$ halmaznak:

$$\pi_{m,n} = \begin{cases} (12\dots m) & \text{, ha } m > 2n \text{ és } n \not| m \\ (12\dots m-1) & \text{különben.} \end{cases}$$

Az $\mathcal{EN}(KG_{m,n})$ komplexus egy tetszőleges $v \subset [m]$ csúcsára $\pi_{m,n}(v) = \{\pi_{m,n}(i) : i \in v\}$ csúcsa $\mathcal{EN}(KG_{m,n})$-nek. Megmutatjuk, hogy a $\tilde{\pi}_{m,n} : \mathcal{EN}(KG_{m,n}) \to \mathcal{EN}(KG_{m,n})$ indukált leképezés szimpliciális. Bármely $\sigma \in \mathcal{EN}(KG_{m,n})$ szimplex esetén létezik egy v csúcs, hogy $V(\sigma) \subseteq cn^*_{KG_{m,n}}(v)$. Vagyis minden $u \in V(\sigma) \setminus \{v\}$-re $u \cap v = \emptyset$ és így $\pi_{m,n}(u) \cap \pi_{m,n}(v) = \emptyset$. Ezért $\tilde{\pi}_{m,n}(u) \in cn_{KG_{m,n}}(\tilde{\pi}_{m,n}(v))$ és $\tilde{\pi}_{m,n}(\sigma) \subseteq cn^*_{KG_{m,n}}(\tilde{\pi}_{m,n}(v))$. Azaz $\tilde{\pi}_{m,n}(\sigma)$ szimplex $\mathcal{EN}(KG_{m,n})$-ban.

44. Állítás. (Osztényi [12]) *Tetszőleges m és $n > 1$ pozitív egészek esetén a $\tilde{\pi}_{m,n} : \mathcal{EN}(KG_{m,n}) \to \mathcal{EN}(KG_{m,n})$ szimpliciális leképezésnek nincs fixpontja.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy $\tilde{\pi}_{m,n}$ szimpliciális leképezésnek van fixpontja. Ekkor létezik egy $\sigma \in \mathcal{EN}(KG_{m,n})$ invariáns szimplexe $\tilde{\pi}_{m,n}$-nek. Azaz $\tilde{\pi}_{m,n}$ egy permutáció $V(\sigma)$-án. Két eset lehetséges:

1. Létezik $v \in V(KG_{m,n})$ csúcs, hogy $V(\sigma) \subseteq cn_{KG_{m,n}}(v)$. Ebben az esetben $v \cap u = \emptyset$ minden $u \in V(\sigma)$-ra. A $\pi_{m,n}$ permutáció által generált részcsoport tranzitívan hat $[m]$-en vagy $[m-1]$-en, így minden $u \in V(\sigma)$ csúcs esetén létezik egy minimális $l_u \in \mathbb{N}^+$, hogy $\tilde{\pi}^{l_u}_{m,n}(u) \cap v \neq \emptyset$, ami ellentmondás.

2. Létezik $v \in V(\sigma)$ csúcs, hogy $V(\sigma) \subseteq cn^*_{KG_{m,n}}(v)$. Ebben az esetben $v \cap u = \emptyset$ minden $u \in V(\sigma) \setminus \{v\}$-re. Legyen $v = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subseteq [m]$, ahol $v_1, v_2, \dots, v_n$ monoton növő sorozat. Mint az előbb most is létezik minimális $l_v \in \mathbb{N}^+$, hogy $\tilde{\pi}^{l_v}_{m,n}(v) \cap v \neq \emptyset$, ekkor $\tilde{\pi}^{l_v}_{m,n}(v) = v$. Tegyük fel, hogy $m > 2n$ és $n \not| m$, ekkor $\pi^{l_v}_{m,n}(v_i) = v_i + l_v$ moduló m. l_v minimalitása miatt $v_{i+1} = v_i + l_v$, és ekkor $v_1 + nl_v = v_1 + m$, ami azt jelenti, hogy $m = 2n$ vagy $n \mid m$. Tehát megint ellentmondásra jutottunk. Most tegyük fel, hogy $m = 2n$ vagy $n \mid m$. Ebben az esetben $v = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subseteq [m-1]$ és $\pi^{l_v}_{m,n}(v_i) = v_i + l_v$ moduló $m-1$. Így $v_{i+1} = v_i + l_v$, és ekkor $v_1 + nl_v = v_1 + m - 1$, ami csak akkor lehetséges, ha $n = 1$. Vagyis ebben az esetben is ellentmondásra jutottunk.

■

45. Következmény. (Osztényi [12]) *Az $\mathcal{EN}(KG_{m,n})$ komplexus összefüggősége véges minden m és $n > 1$ pozitív egészek esetén.*

Ez azt jelenti, hogy $conn(\mathcal{NK}(KG_{m,n}[K_s]))$ sorozat konstans a 41. tétel szerint, ha $s > conn(\mathcal{EN}(KG_{m,n})) + 2$. Tehát a Lovász-féle alsó korlátot alkalmazva a $KG_{m,n}[K_s]$ gráfra, nem kapjuk meg a $KG_{m,n}$ Kneser gráf multikromatikus számait.

A Babson-Kozlov-féle alsó korlát a $KG_{m,n}[K_s]$ gráf kromatikus számára

A Babson-Kozlov-féle alsó korlátot (23. tételt) alkalmazva a $KG_{m,n}[K_s]$ gráfra a

$$\chi_s(KG_{m,n}) = \chi(KG_{m,n}[K_s]) \geq ind(Hom(K_2, KG_{m,n}[K_s])) + 2$$

alsó korlátot kapjuk a $KG_{m,n}$ Kneser gráf multikromatikus számaira. Amint azt a 42. tételben meghatároztuk

$$ind(Hom(K_2, KG_{m,n}[K_s])) + 2 = s \cdot \omega(KG_{m,n}),$$

így felhasználva, hogy $\omega(KG_{m,n}) = \lfloor \frac{m}{n} \rfloor$, a

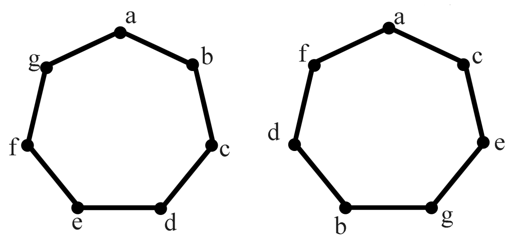
$$\chi_s(KG_{m,n}) \geq s\lfloor \frac{m}{n} \rfloor$$

alsó korlátot kapjuk. Ám ez a Babson-Kozlov-féle alsó korlát általánosításával adott korlátnál ($\langle * * * \rangle$-nál) gyengébb, az $n|m$ eseteket kivéve, amikor azzal megegyezik.

5.3. Walker-féle alsó korlát a Kneser gráfok multikromatikus számaira

Definíció szerint egy $KG_{m,n}$ Kneser gráf s-szeres színezése t színnel egy $\gamma : KG_{m,n} \to KG_{t,s}$ gráfhomomorfizmus. Ezen γ leképezés indukál mind a Lovász posetek, mind a Lovász komplexusok közti 2.2. alfejezetben szereplő $L(\gamma)$ orto-, illetve c $\mathbb{Z}_2$-leképezéseket. Amint az 5.1.-es alfejezetben láttuk ilyen c nem létezik, ha $m - 2n > t - 2s$. Ugyanis az $\mathcal{LK}(KG_{m,n})$ Lovász komplexus homotóp ekvivalens egy $(m - 2n)$-dimenziós gömbcsokorral a 24. állítás szerint, hasonlóan az $\mathcal{LK}(KG_{t,s})$ Lovász komplexus egy $(t - 2s)$-dimenziós gömbcsokorral homotóp ekvivalens, így a 3. állítás szerint nem létezik c $\mathbb{Z}_2$-leképezés, ha $m - 2n > t - 2s$. Az általunk vizsgált topologikus alsó korlátok életlensége abból adódik, hogy a vizsgált esetek nagy részében ez éppen fordítva van. Azaz ha $m - 2n < t - 2s$, akkor $|\mathcal{K}(KG_{t,s})|$-ben nagyobb dimenziós $\mathbb{Z}_2$-gömbfelületek vannak, mint $|\mathcal{K}(KG_{m,n})|$-ben. Tehát $|\mathcal{LK}(KG_{m,n})| \to |\mathcal{LK}(KG_{t,s})|$ $\mathbb{Z}_2$-leképezés létezhet, ha $m-2n \leq t-2s$, viszont egy $L(\gamma) : LP(KG_{m,n}) \to LP(KG_{t,s})$ ortoleképezés létezése már akadályba ütközhet, ugyanis ezen leképezések érzékenyek a "gömbfelületek" szimpliciális méretére is.

Először a C_{2p+1} páratlan hosszú körök multikromatikus számait határozzuk meg az $LP(C_{2p+1}) \to LP(KG_{t,s})$ ortoleképezéseket vizsgálva. Az itt szerzett tapasztalatokat felhasználva vizsgáljuk majd az $L(\gamma) : LP(KG_{m,n}) \to LP(KG_{t,s})$ ortoleképezések létezését.



7. ábra: A C_7 gráf és szomszédsági komplexusa.

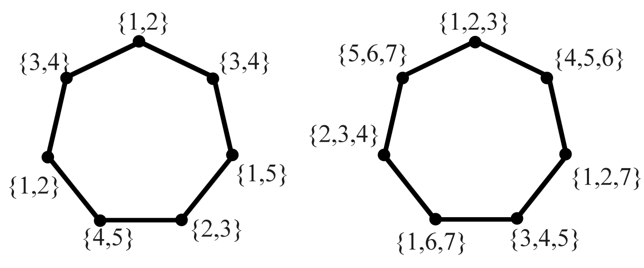
Egy C_{2p+1} páratlan kör csúcsainak egy A részhalmazára a $cn_{C_{2p+1}}(A)$ akkor és csakis akkor nem üres, ha A egyelemű vagy A egy csúcs két szomszédja. Tehát az $\mathcal{NK}(C_{2p+1})$ szomszédsági komplexus egy 1-dimenziós komplexus, melynek geometriai realizáltja egy $2p+1$ csúcsú poligon. A $P(\mathcal{NK}(C_{2p+1}))$ poset összes csúcsa zárt, így $LP(C_{2p+1})$ Lovász poset egy $4p+2$ csúcsú *ortokör* lesz. Az $\mathcal{LK}(C_{2p+1}) = \mathcal{NK}'(C_{2p+1})$ Lovász komplexus poliédere homeomorf S^1-gyel. A Walker-féle topologikus alsó korlát általánosítása (33. tétel) a C_{2p+1} kör esetén a következő alsó korlátot adja

$$ind_{Z_2}(\mathcal{LK}(C_{2p+1})) + 2s \leq \chi_s(C_{2p+1}),$$

ami az $|\mathcal{LK}(C_{2p+1})| \cong S^1$ miatt a

$$2s + 1 \leq \chi_s(C_{2p+1}). \qquad \langle\star\star\rangle$$

Az jól ismert, hogy $\chi_1(C_{2p+1}) = 3$, így a 26. tételből is ez adódik.



8. ábra: A C_7 gráf 2-szeres és 3-szoros színezése.

Példaként tekintsük a 7. ábrán szereplő C_7 kört, melyre tehát $\chi_1(C_7) = 3$. A fenti 8. ábra alapján $\chi_2(C_7) \leq 5$ és $\chi_3(C_7) \leq 7$, $\langle\star\star\rangle$ szerint ennyi szín kell is, azaz

$\chi_2(C_7) = 5$ és $\chi_3(C_7) = 7$. Ám 4-szeresen csak 10 színnel tudjuk kiszínezni. Tehát $\langle\star\star\rangle$ nem ad éles alsó korlátot.

Ezért a C_{2p+1} körök multikromatikus számainak meghatározásához vizsgáljuk a $L(\gamma) : LP(C_{2p+1}) \to LP(KG_{t,s})$ ortoleképezéseket, ahol mint tudjuk, $LP(KG_{t,s}) \cong B_{t,s}$. Legyen $x, x' \in V(C_{2p+1})$ ortogonális pontjai $LP(C_{2p+1})$-nek, azaz $x \subset cn_{C_{2p+1}}(x')$. Tehát x és x' szomszédosak C_{2p+1}-ben, feltehetjük, hogy $x' = x - 1 \bmod 2p + 1$. Ekkor létezik köztük $2p$ hosszú út $LP(C_{2p+1})$-ben: $x_0 = x, x_1, \ldots, x_{2p-1}, x_{2p} = x'$, ahol $x_i = x + i \bmod 2p + 1$, ha i páros, és $x_i = \{x_{i-1}, x_{i+1}\}$, ha i páratlan. Tehát $d(x, x') \leq 2p$. Legyen $y_i \in B_{t,s}$ az x_i pont képe $L(\gamma)$ mellett. Ekkor y és y' olyan diszjunkt (ortogonális) pontjai $B_{t,s}$-nek, melyek távolsága legfeljebb $2p$.

Két tetszőleges $B_{t,s}$-beli pont távolsága alulról becsülhető a következő értékkel.

46. Állítás. (Osztényi [28]) *Tetszőleges $y, y' \in B_{t,s}$-re*

$$\lceil \frac{|y \setminus y'|}{t - 2s} \rceil + \lceil \frac{|y' \setminus y|}{t - 2s} \rceil \leq d(y, y').$$

Bizonyítás. Legyen $y = y_0, y_1, \ldots, y_t = y'$ a legrövidebb út y és y' között $B_{t,s}$-ben. Vegyük észre, hogy ahhoz hogy y-ből y'-be eljussunk egy úton az $y' \setminus y$ halmaz minden elemét be kell vennünk valamely felfelé lépés során. Egy (y_i, y_{i+1}) felfelé lépés esetén az $y_{i+1} \setminus y_i$-beli elemek száma legfeljebb $t - 2s$. Így legfeljebb $t - 2s$ darab y'-beli elemet adhatunk y_i-hez ebben a felfelé lépésben. Vagyis legalább $\lceil \frac{|y' \setminus y|}{t-2s} \rceil$ felfelé lépés van a fenti útban. Hasonlóan a lefelé lépések száma legalább $\lceil \frac{|y \setminus y'|}{t-2s} \rceil$. Így

$$\lceil \frac{|y \setminus y'|}{t - 2s} \rceil + \lceil \frac{|y' \setminus y|}{t - 2s} \rceil \leq d(y, y').$$

■

Vagyis ha y és y' diszjunkt pontjai $B_{t,s}$-nek, akkor

$$d(y, y') \geq \lceil \frac{|y|}{t - 2s} \rceil + \lceil \frac{|y'|}{t - 2s} \rceil \geq 2\lceil \frac{s}{t - 2s} \rceil.$$

Tehát ha létezik s-szeres színezése a C_{2p+1} körnek t színnel, akkor léteznek y és y' diszjunkt pontjai $B_{t,s}$-nek, melyekre $d(y, y') \leq 2p$, és így

$$2\lceil \frac{s}{t - 2s} \rceil \leq 2p. \qquad \langle\diamond\rangle$$

Ezen egyenlőtlenséget felhasználva megkapjuk a $\chi_s(C_{2p+1})$ multikromatikus számokat.

47. Tétel. (Stahl [32]) *Tetszőleges p és s pozitív egészekre legyen $s = qp + r$, ahol $0 \leq q$ és $0 < r \leq p$ egészek. Ekkor*

$$\chi_s(C_{2p+1}) = 2s + 1 + q.$$

Bizonyítás. A bizonyítás q szerinti indukcióval megy. Először tekintsük a $q = 0$ esetet. Az ismert, hogy $\chi_1(C_{2p+1}) = 3$ minden p-re, és így $2s+1 \leq \chi_s(C_{2p+1})$ minden $s \leq p$-re a 26. tétel szerint. Valamint tekintsük a következő $\gamma : C_{2p+1} \rightarrow KG_{2s+1,s}$ leképezést $s \leq p$-re

$$\gamma(i) := \begin{cases} \{((i-1)s + j \bmod 2s+1) + 1 : 0 \leq j \leq s-1\}, & \text{ha } i \leq 2s+1 \\ \{j : 1 \leq j \leq s\}, & \text{ha } 2s+1 < i \text{ és páros} \\ \{s + j : 1 \leq j \leq s\}, & \text{ha } 2s+1 < i \text{ és páratlan} \end{cases}$$

Mivel $\gamma(i) \cap \gamma(i+1) = \emptyset$ minden $i \in [2p]$ és $\gamma(1) \cap \gamma(2p+1) = \emptyset$, így γ egy gráfhomomorfizmus. Tehát $\chi_s(C_{2p+1}) \leq 2s+1$ minden $s \leq p$-re, és így

$$\chi_s(C_{2p+1}) = 2s + 1$$

minden $s \leq p$-re. Azaz az indukció elindul.

Most pedig legyen q egy tetszőleges pozitív egész és tegyük fel, hogy minden $q' < q$-ra igaz az állítás. Ekkor egyrészt

$$\chi_{qp+r}(C_{2p+1}) \leq \chi_{(q-1)p+r}(C_{2p+1}) + \chi_p(C_{2p+1}) =$$

$$2((q-1)p + r) + 1 + (q-1) + 2p + 1 = 2(qp + r) + 1 + q$$

az indukció és a 25. tétel szerint. Másrészt

$$2(qp + r) + 1 + q \leq \chi_{qp+r}(C_{2p+1}),$$

ugyanis indirekt tegyük fel, hogy a C_{2p+1} körnek létezik $s = qp + r$-szeres színezése $t = 2(qp+r)+q$ színnel. Ekkor a 32. tétel szerint létezik $L(C_{2p+1}) \rightarrow B_{2(qp+r)+q,pq+r}$ ortoleképezés, ami a fenti $\langle\diamond\rangle$ egyenlőtlenség miatt

$$\lceil \frac{qp + r}{q} \rceil \leq p,$$

ami ellentmondás.

■

Most vegyünk egy tetszőleges $KG_{m,n}$ Kneser gráfot és tegyük fel, hogy s-szeresen színezhető t színnel, azaz létezik $\gamma : KG_{m,n} \to KG_{t,s}$ gráfhomomorfizmus. Ekkor a 32. tétel szerint létezik

$$L(\gamma) : B_{m,n} \to B_{t,s}$$

ortoleképezés. A Stahl sejtés szerint, ha $s = qn - r$, ahol $0 < q$ és $0 \leq r < n$, akkor $qm - 2r \leq t$. A C_{2p+1} esethez hasonlóan legyen x, x' $KG_{m,n}$ olyan csúcsai, melyek diszjunkt (ortogonális) pontjai $B_{m,n}$-nek, azaz $x \cap x' = \emptyset$. Feltehetjük, hogy $x = \{1, 2, \ldots, n\}$ és $x' = \{n+1, n+2, \ldots, 2n\}$. Létezik köztük $2\lceil n/m - 2n \rceil$ hosszú út $B_{m,n}$-ben: $x_0 = x, x_1, \ldots, x_{2\lceil n/m-2n\rceil -1}, x_{2\lceil n/m-2n\rceil} = x'$, ahol

$$x_{2i} = \{i(m-2n)+1, i(m-2n)+2, \ldots, i(m-2n)+n\}$$

és

$$x_{2i+1} = \{i(m-2n)+1, i(m-2n)+2, \ldots, (i+1)(m-2n)+n\}.$$

Tehát $d(x, x') \leq 2\lceil n/m - 2n \rceil$. Legyen $y_i \in B_{t,s}$ az x_i pont képe $L(\gamma)$ mellett. Ekkor y és y' olyan diszjunkt pontjai $B_{t,s}$-nek, melyek távolsága legfeljebb $2\lceil n/m - 2n \rceil$. Másrészt a 46. állítás szerint

$$d(y, y') \geq \lceil \frac{|y|}{t-2s} \rceil + \lceil \frac{|y'|}{t-2s} \rceil \geq 2\lceil \frac{s}{t-2s} \rceil.$$

Tehát

$$2\lceil \frac{s}{t-2s} \rceil \leq d(y, y') \leq 2\lceil \frac{n}{m-2n} \rceil,$$

melybe behelyettesítve az $s = qn - r$ és $t = qm - 2r - 1$ értékeket a

$$2\lceil \frac{qn - r}{q(m-2n) - 1} \rceil \leq d(y, y') \leq 2\lceil \frac{n}{m-2n} \rceil,$$

egyenlőtlenséget kapjuk, mely triviálisan teljesül, ha $\lceil n/m - 2n \rceil \leq r$. Azaz a $m > 2n + 1$ esetén összetettebb vizsgálatra van szükség. A $B_{m,n}$ poset általánosításaként kapott $C^k_{m,n}$ posetekben is igaz marad a 46. állításban kapott alsó korlát.

48. Állítás. (Osztényi [28]) *Tetszőleges $p, p' \in C^k_{m,n}$-re*

$$\lceil \frac{|p \setminus p'|}{k} \rceil + \lceil \frac{|p' \setminus p|}{k} \rceil \leq d(p, p').$$

A bizonyítás teljesen megegyezik a 46. állítás bizonyításával. Vizsgáljuk meg inkább az olyan ortogonális p és p' pontok elhelyezkedését $C^k_{m,n}$-ben, melyek minimális távolságra vannak egymástól. Az előző állítás szerint

$$d(p,p') \geq \lceil \frac{|p|}{k} \rceil + \lceil \frac{|p'|}{k} \rceil,$$

mivel ebben az esetben $p \setminus p' = p$ és $p' \setminus p = p'$. Legyen $n = uk + v$, ahol $0 \leq u$ és $0 < v \leq k$, így

$$d(p,p') \geq \lceil \frac{uk+v}{k} \rceil + \lceil \frac{uk+v}{k} \rceil = 2u + 2$$

bármely p és p' $C^k_{m,n}$-beli diszjunt elemekre.

A következő állításban karakterizáljuk azon p és p' $C^k_{m,n}$-beli diszjunkt pontpárokat, melyekre $d(p,p')$ minimális.

49. Állítás. (Osztényi [28]) *Legyen p és p' $C^k_{m,n}$-beli diszjunt pontpár, és legyen $n = uk + v$, ahol $0 \leq u$ és $0 < v \leq k$. Ekkor az alábbi két állítás ekvivalens*

1. $d(p,p') = 2u + 2$.
2. $p, p' \in C^{k-v}_{m,n}$ *és* $|p| + |p'| \leq (2u+1)k + v$.

Bizonyítás. 1. $\Rightarrow$ 2.
Ez az irány bizonyításához legyen $|p| = uk + v_p$ és $|p'| = uk + v_{p'}$ valamely $v_p, v_{p'} \geq v$-re. Ekkor

$$2u + 2 = d(p,p') \geq \lceil \frac{|p|}{k} \rceil + \lceil \frac{|p'|}{k} \rceil = 2u + \lceil \frac{v_p}{k} \rceil + \lceil \frac{v_{p'}}{k} \rceil.$$

Így $v_p, v_{p'} \leq k$, tehát $p, p' \in C^{k-v}_{m,n}$.

Legyen $p = p_0, p_1, \ldots, p_{2u+2} = p'$ egy út, mely összeköti p-t és p'-t $C^k_{m,n}$-ben. Ha (p_0, p_1) egy felfelé lépés, akkor $p_1 \setminus p_0$ elemeinek a száma legfeljebb $n + k - |p|$. Minden egyes további u darab felfelé lépés során legfeljebb k elemet veszünk be p'-ből. Ahhoz hogy eljussunk p-ből p'-be p' összes elemét be kell vennünk valamely felfelé lépés során, így

$$|p'| \leq n + k - |p| + uk \quad \text{és így} \quad |p| + |p'| \leq (2u+1)k + v.$$

Ha (p_0, p_1) lefelé lépés volt, akkor a fenti gondolatmenethez hasonlóan

$$|p'| \leq ku + |p'| - n \quad \text{és így} \quad n \leq ku,$$

kellene hogy teljesüljön, ami ellentmond az n-re és v-re tett feltetételeinknek.

2. $\Rightarrow$ 1.

Tegyük fel, hogy $p, p' \in C^{k-v}_{m,n}$ és $|p| + |p'| \leq (2u+1)k + v$. Megadunk egy $(2u+2)$ hosszú utat p-ből p'-be. Legyen $|p| = n_1$ és $|p'| = n_2$. Az általánosság megszorítás nélkül feltehetjük, hogy $p = p_0$ az első n_1 pozitív egészet tartalmazza, és hogy $p' = p_{2u+2} = \{n_1+1, \ldots, n_1+n_2\}$. Ha $n \leq k$, akkor $u = 0$ és $p_1 = p \cup p' \in C^k_{m,n}$, mivel $|p \cup p'| \leq k + v$. Így $p = p_0 \subset p_1 \supset p_2 = p'$ egy 2 hosszú út p-ből p'-be $C^k_{m,n}$-ben. Egyébként legyen $p_{2i} = \{ik + j : 1 \leq j \leq n\}$ minden $1 \leq i \leq u$-ra. Ekkor $p_{2i} \subset \{1, 2, \ldots, 2n+k\}$, mivel $uk + n = 2uk + v \leq 2uk + 2v + k$. Valamint legyen $p_{2i+1} = p_{2i} \cup p_{2i+2}$ minden $0 \leq i \leq u$-ra. Nyilvánvalóan $|p_{2i+1}| \leq n + k$ minden $0 \leq i \leq u-1$-re, és még megmutatjuk, hogy $|p_{2u+1}| \leq n + k$. Definíció szerint

$$p_{2u} = \{uk+1, \ldots, 2uk+v\}.$$

Mivel $n_1 + n_2 \leq (2u+1)k + v$, így

$$p_{2u+2} \subseteq \{n_1+1, \ldots, (2u+1)k+v\}.$$

Továbbá $uk + 1 < n_1 + 1$ miatt

$$p_{2u+1} = p_{2u} \cup p_{2u+2} \subseteq \{uk+1, \ldots, (2u+1)k+v\}.$$

Tehát $|p_{2u+1}| \leq n + k$. Vagyis

$$p = p_0 \subset p_1 \supset p_2 \subset \ldots \supset p_{2u+2} = p'$$

egy $(2u+2)$ hosszú út p-ből p'-be $C^k_{m,n}$-ben.

■

Ezen előkészületek után a következő alsó korlátot adhatjuk a $KG_{m,n}$ Kneser gráf multikromatikus számaira.

50. Tétel. (Osztényi [28]) *Tetszőleges* $0 < m, n, q$ *és* $0 \leq r < n$ *egészek esetén legyen* l *egész olyan, hogy* $1 \leq l \leq m - 2n$, $0 \leq r < ln/(m-2n)$. *Ekkor*

$$\chi_{nq-r}(KG_{m,n}) > mq - 2r - l.$$

A tétel bizonyítása a következő két lemmán alapszik.

51. Lemma. (Osztényi [28]) *Tegyük fel, hogy létezik* $L : C^k_{m,n} \to C^{qk-l}_{qm-2r-l,qn-r}$ *ortoleképezés, ahol* $0 < m, n, k$ *és* q *tetszőleges egészek. Az* r *és* l *pedig olyan egészek, melyekre* $0 \le r < n$, *és* $1 \le l \le k$, $0 \le r < ln/k$. *Továbbá legyen* $n = uk + v$, *ahol* $0 \le u$ *és* $0 < v \le k$. *Ha* $v < k$, *akkor*

$$L(C^{k-v}_{m,n}) \subseteq C^{q(k-v)-l}_{qm-2r-l,qn-r}.$$

Bizonyítás. Legyen p, p' két olyan diszjunkt pontja $C^{k-v}_{m,n}$-nek, melyre $|p'| = n = uk + v$. Ekkor $|p| + |p'| \le (2u+1)k + v$, így a 49. állítás szerint $d(p, p') = 2u + 2$. Az L leképezés rendezérstartó, ezért $d(L(p), L(p')) \le 2u + 2$. Másrészt a 48. állítás szerint

$$d(L(p), L(p')) \ge \lceil \frac{|L(p)|}{qk-l} \rceil + \lceil \frac{|L(p')|}{qk-l} \rceil,$$

ugyanis $L(p)$ és $L(p')$ diszjunkt pontjai $C^{qk-l}_{qm-2r-l,qn-r}$-nek. Így

$$2u + 2 \ge \lceil \frac{|L(p)|}{qk-l} \rceil + \lceil \frac{|L(p')|}{qk-l} \rceil,$$

Továbbá vegyük észre, hogy $qn - r = q(uk + v) - r \ge q(uk + v) - \lceil \frac{ln}{k} \rceil + 1 = (qk - l)u + qv - \lceil \frac{lv}{k} \rceil + 1$, ahol $0 < qv - \lceil \frac{lv}{k} \rceil + 1$. Így

$$\lceil \frac{|L(p)|}{qk-l} \rceil \ge \lceil \frac{(qk-l)u + qv - \lceil \frac{lv}{k} \rceil + 1}{qk-l} \rceil \ge u + 1$$

Tehát $\lceil \frac{|L(p)|}{qk-l} \rceil = u + 1$, hasonlóan $\lceil \frac{|L(p)|}{qk-l} \rceil = u + 1$. Ami azt jelenti, hogy

$$|L(p)| \le (u+1)(qk-l) = (qn-r) - ul - qv + r + qk - l \le (qn-r) + q(k-v) - l,$$

ugyanis $r < ln/k = lu + lv/k$. Vagyis tetszőleges $p \in C^{k-v}_{m,n}$ pont esetén $L(p)$ eleme $C^{q(k-v)-l}_{qm-2r-l,qn-r}$-nek.

■

52. Következmény. (Osztényi [28]) *Tegyük fel, hogy létezik* $L : C^k_{m,n} \to C^{qk-l}_{qm,qn-r}$ *ortoleképezés, ekkor létezik* $L_t : C^{k_t}_{m,n} \to C^{qk_t-lqm}_{qm,qn-r}$ *megszorítása, hogy* $1 \le k_t \le k$ *és* $n = (u_t + 1)k_t$.

53. Lemma. (Osztényi [28]) *Tetszőleges* $0 < m, n, q$ *és* $0 \le r < n$ *egészek esetén legyen* l *egész olyan, hogy* $1 \le l \le m - 2n$, $0 \le r < ln/(m-2n)$. *Ekkor nem létezik* $B_{m,n} \to B_{qm-2r-l,qn-r}$ *ortoleképezés.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy létezik $L : B_{m,n} \to B_{qm-2r-l,qn-r}$ ortoleképezés valamely q és $0 \le r \le ln/(m-2n)$ pozitív egészekre, azaz létezik $L : C^k_{m,n} \to C^{qk-l}_{qm-2r-l,qn-r}$ ortoleképezés, ahol $k = m - 2n$.

Az 52. következmény miatt feltehetjük, hogy $k \mid n$. Legyen p és p' két pontja $C^k_{m,n}$-nak, melyekre $p \cap p' = \emptyset$ és $|p|, |p'| = n$. A 49. állítás szerint $d(p, p') = 2u + 2$, ahol $n = (u + 1)k$. Ezt felhasználva

$$2u + 2 = d(p, p') \ge d(L(p), L(p')).$$

Mivel $qn - r = (qk - l)(u + 1) + l(u + 1) - r$

$$d(L(p), L(p')) \ge \lceil \frac{|L(p)|}{qk - l} \rceil + \lceil \frac{|L(p')|}{qk - l} \rceil \ge$$

$$\lceil \frac{(qk - l)(u + 1) + l(u + 1) - r}{qk - l} \rceil + \lceil \frac{(qk - l)(u + 1) + l(u + 1) - r}{qk - l} \rceil = 2u + 4,$$

ami ellentmondás.

■

Az előző lemma és a 19. állítást felhasználva a $KG_{m,n}$ Kneser gráf nem színezhető $(qn - r)$-szeresen $qm - 2r - l$ színnel, azaz

$$\chi_{nq-r}(KG_{m,n}) > qm - 2r - l.$$

Ez, tetszőleges m, n esetén, megadja a $\chi_s(KG_{m,n})$ multikromatikus számokat a $qn - \lfloor \frac{n}{m-2n} \rfloor \le s \le qn$ indexekre, az összes q pozitív egészekre. Ez $m < 3n$ esetén újabb, eddig nem ismert s-ekre igazolja a sejtést. Ezeken kívül, $m < 3n$ esetén, a többi indexre élesebb alsó korlátot ad, mint ami eddig ismert volt.

Összefoglaló

A dolgozat a gráfok multikromatikus számaira vonatkozó topologikus alsókorlát tételek vizsgálatával foglalkozik. Az 1970-es években Gilbert [18] definiálta a gráfok s-szeres színezését, ami számos gyakorlati probléma matematikai modelljét adta [27]. Az ezzel kapcsolatos első eredményeket Saul Stahl 1978-as [32] cikke tartalmazza. Ebben a cikkében Stahl megfogalmazta a Kneser sejtés általánosítását, a Kneser gráfok multikromatikus számaira vonatkozó sejtését. Ezt ma Stahl sejtésnek nevezzük. A hagyományos kromatikus számra vonatkozó legelső topologikus alsókorlát tételt Lovász László bizonyította 1978-as, a Kneser sejtést megoldását tartalmazó [22] cikkében. A Lovász által bevezetett topologikus módszerrel további alsókorlát tételek születtek, illetve az ez irányú kutatások még napjainkban is folynak. Eddigi cikkeimben a Stahl sejtés által motiválva a gráfok kromatikus számára vonatkozó alsókorlát tételek multikromatikus számokra való általánosítását vizsgáltam, valamint ezen tételeket alkalmazva alsó korlátot adtam a Kneser gráfok multikromatikus számaira.

A téma több területre terjed ki. A gráfelmélet, az algebrai toplógia és a kombinatorika fogalmait, eszközeit és módszereit is használja. Az 1. fejezetben összegyűjtjük a legalapvetőbb gráfelméleti és algebrai topológiai fogalmakat, jelöléseket. Itt tárgyaljuk azokat a kombinatorikus topológiai módszereket, melyek hatékony eszközként szolgálnak a komplexusok homotópia típusának, illetve topologikus összefüggőségének meghatározásában.

A következő két fejezetben a történeti hátteret tekintjük át. Először, a 2. fejezetben, a hagyományos kromatikus számra vonatkozó topologikus alsókorlát tételeket nézünk meg. Ezek mindegyikének a vázát az alábbi eljárás adja.

$$\begin{array}{ccc} G \text{ gráf} & \longrightarrow & \mathcal{K}(G) \text{ gráfkomplexus} \\ & & \downarrow \\ \text{alsó korlát } \chi(G)\text{-re} & \longleftarrow & \mathcal{K}(G) \text{ topologikus tulajdonsága} \end{array}$$

Lovász [22] egy tetszőleges G gráfhoz az $\mathcal{NK}(G)$ szomszédsági komplexust rendeli. J.W. Walker [35] az $\mathcal{LK}(G)$ Lovász komplexussal dolgozik. Babson és Kozlov [2] a szomszédsági komplexus Lovász László által definiált általánosításával, a $\mathcal{H}om(H,G)$ gráfhomomorfizmus komplexussal dolgoznak.

Az általunk tanulmányozott topologikus alsókorlát tételek bizonyításai a $\mathbb{Z}_2$-terekre vonatkozó Borsuk-Ulam típusú tételen alapulnak. Ugyanis egy G gráf t színnel való színezése, azaz egy $\gamma : G \to K_t$ gráfhomomorfizmus, valamennyi $\mathbb{Z}_2$-gráfkomplexus esetén indukál egy $c : |\mathcal{K}(G)| \to |\mathcal{K}(K_t)|$ $\mathbb{Z}_2$-leképezést. Az $\mathcal{NK}(K_t)$ szomszédsági, illetve $\mathcal{LK}(K_t)$ Lovász komplexus homotóp ekvivalens az $S^{(t-2)}$ gömbfelülettel, míg a $\mathcal{H}om(K_l, K_t)$ komplexus homotóp ekvivalens egy $(t-l)$-dimenziós gömbcsokorral minden $2 \leq l \leq t$-re. Így ezen ismert homotópia típusok folytán a $c : |\mathcal{K}(G)| \to |\mathcal{K}(K_t)|$ $\mathbb{Z}_2$-leképezések csak bizonyos t-kre léteznek.

A Kneser sejtés legtöbb bizonyításának alapját a $KG_{m,n}$ Kneser gráf $\mathcal{NK}(KG_{m,n})$ szomszédsági komplexusának egy $(m-2n)$-dimenziós gömbcsokorral való homotóp ekvivalenciája adja. A fejezet végén ezen eredmény egy új bizonyítását adjuk, a dolgozatban többször alkalmazott diszkrét Morse elméletet használva.

A 3. fejezetben a gráfok s-szeres színezésének előzményeit tárgyaljuk. A fogalmat 1972-ben Gilbert vezette be [18]-ban a rádiófrekvencia kiosztási problémával kapcsolatban. További gyakorlati problémák, úgymint flottaszervízelés, munkafeladatok ütemezése vagy forgalomszinkronizálás tanulmányozása is a gráfok s-szeres színezésének feladatára vezettek [27]. Ezen problémák matematikai modelljében a következő feladatot kell megoldanunk: egy megfelelő gráf csúcsaihoz egy bizonyos színhalmaz s elemű részhalmazainak egy olyan hozzárendelését adjuk meg, mely éllel összekötött csúcsokhoz diszjunkt részhalmazokat rendel.

Az s-szeres színezéssel kapcsolatos legalapvetőbb eredményeket Saul Stahl 1978-as [32] cikke tartalmazza. Ebben a multikromatikus számok számos tulajdonságát bizonyította, valamint azokat több gráfosztályra kiszámolta. Egy G gráf s-szeres színezése t színnel, egyenértékű egy $\gamma : G \to KG_{t,s}$ gráfhomomorfizmus megadásával. A $KG_{t,s}$ Kneser gráfok e központi szerepe kapcsán Stahl vizsgálta a multikromatikus számaikat, melyeket több esetben kiszámolt. Ezek alapján megfogalmazta a Kneser sejtés általánosítását, amely megadná az összes multikromatikus számot.

30. Sejtés. (Stahl [32]) *Tetszőleges n és $m \geq 2n$ pozitív egészek esetén legyen $s = qn - r$, ahol $0 < q$ és $0 \leq r < n$ egészek, ekkor*

$$\chi_s(KG_{m,n}) = qm - 2r.$$

Stahl következő [33] cikkében újabb speciális esetekben igazolta a sejtést, illetve az alábbi alsó korlátot adta.

31. Tétel. (Stahl [33]) *Tetszőleges n és $m \geq 2n$ pozitív egészek esetén legyen $s = qn - r$, ahol $0 < q$ és $0 \leq r < n$ egészek, ekkor*

$$\chi_s(KG_{m,n}) \geq qm - 2r - (n^2 - 3n + 4).$$

A sejtést igazolná a $\chi_{qn}(KG_{m,n})$ és $\chi_{qn+1}(KG_{m,n})$ multikromatikus számok közti $m - 2n + 2$-es ugrás bizonyítása, ugyanis Stahl megmutatta [32]-ben, hogy $\chi_{s+1} \geq \chi_s + 2$ minden s pozitív egészre. Az előbbi tételben szereplő alsó korlát $s = qn + 1$ esetén,

$$\chi_{qn+1}(KG_{m,n}) \geq \chi_{qn}(KG_{m,n}) + m - 2n - (n^2 - 3n + 4),$$

éppen azt mutatja, hogy a $\chi_{qn}(KG_{m,n})$ és $\chi_{qn+1}(KG_{m,n})$ multikromatikus számok között rögzıtett n esetén akármilyen nagy ugrás lehet.

Ebben a témában elért eddigi eredményeimet az utolsó két fejezetben fejtettem ki. A 4. fejezetben a 2. fejezetbeli, hagyományos kromatikus számra vonatkozó, topologikus alsókorlát tételek általánosításait adjuk meg a multikromatikus számokra. Amint láttuk, egy G gráf s-szeres színezése t színnel, azonos egy $\gamma : G \to KG_{t,s}$ gráfhomomorfizmussal. A 2. fejezetben definiált valamennyi $\mathbb{Z}_2$-gráfkomplexus esetén a γ indukál egy $c : |\mathcal{K}(G)| \to |\mathcal{K}(KG_{t,s})|$ $\mathbb{Z}_2$-leképezést. Így a $\mathcal{K}(KG_{t,s})$ komplexusok homotópia típusát meghatározva a G gráf multikromatikus számaira vonatkozó topologikus alsókorlát tételeket kapunk.

Az $\mathcal{LK}(KG_{t,s})$ Lovász komplexus már ismert homotópia típusából egyszerű meggondolással adódik a Walker-féle tétel általánosítása.

33. Tétel. (Osztényi) *Tetszőleges G gráf esetén és $s \geq 1$-re*

$$\chi_s(G) \geq ind(\mathcal{L}(G)) + 2s.$$

A Babson-Kozlov-féle tétel általánosításához a $\mathcal{H}om(K_n, KG_{t,s})$ komplexus homotópia típusát határozzuk meg.

34. Tétel. (Osztényi [29]) *Tetszőleges n, s és $t \geq 2s$ pozitív egészek esetén a $\mathcal{H}om(K_n, KG_{t,s})$ komplexus homotóp ekvivalens egy $(t - ns)$-dimenziós gömbcsokorral.*

Ezt felhasználva a következő topologikus alsókorlát tételt kapjuk.

36. Tétel. (Osztényi [29]) *Tetszőleges G gráfra, s és $l \geq 2$ pozitív egész számokra*

$$\chi_s(G) \geq ind(\mathcal{H}om(K_l, G)) + sl.$$

A 4. fejezet második felében a $G[K_s]$ lexikografikus szorzat $\mathcal{NK}(G[K_s])$ szomszédsági, illetve $\mathcal{H}om(K_2, G[K_s])$ gráfhomomorfizmus komplexusát vizsgáljuk. Mivel egy G gráf s-szeres színezése ekvivalens a $G[K_s]$ gráf egyszeres színezésével, így a $G[K_s]$ gráf hagyományos kromatikus számára adott alsó korlát a G gráf multikromatikus számára ad alsó korlátot. Először a $G[K_s]$ gráf szomszédsági komplexusa és a G gráf úgynevezett kiegészített szomszédsági komplexusa közötti összefüggést mutatjuk meg.

41. Tétel. (Osztényi [12]) *Tetszőleges $s > l \geq 2$ egészek és G gráf esetén az $\mathcal{NK}(G[K_s])$ komplexus akkor és csakis akkor l-összefüggő, ha az $\mathcal{EN}(G)$ komplexus l-összefüggő.*

Ez azt is jelenti, hogy az $\mathcal{EN}(G)$ komplexus véges összefüggősége esetén a Lovász-féle tételből kapott

$$\chi_s(G) \geq conn(\mathcal{NK}(G[K_s])) + 3$$

alsó korlát akármilyen rossz lehet.

Ezután a $\mathcal{H}om(K_2, G[K_s])$ gráfhomomorfizmus komplexus $\mathbb{Z}_2$-indexe és a G gráfban található legnagyobb teljes részgráf mérete közti kapcsolatra mutatunk rá.

42. Tétel. (Csorba [12]) *Tetszőleges G gráf és $s \geq |V(G)|$ egész esetén*

$$ind(\mathcal{H}om(K_2, G[K_s])) + 2 = s \cdot \omega(G).$$

Ez a Babson-Kozlov-féle tétellel együtt a következő topologikus alsókorlát tételt adja a multikromatikus számokra.

43. Tétel. (Csorba [12]) *Tetszőleges G gráf és $s \geq |V(G)|$ egész esetén*

$$\chi_s(G) \geq s \cdot \omega(G).$$

Az 5. fejezetben a Stahl sejtés vizsgálatával foglalkozunk. A Walker-féle, illetve Babson-Kozlov-féle tételek általánosításai csak bizonyos, már eddig is ismert, esetekben oldják meg a sejtést, a többi esetben nem adnak éles alsó korlátot a $KG_{m,n}$

Kneser gráf multikromatikus számaira. Az $\mathcal{EN}(KG_{m,n})$ komplexus összefüggőségéről megmutatjuk, hogy véges. Ebből az derült ki, hogy a Lovász-féle alsó korlátot alkalmazva $KG_{m,n}[K_s]$ gráfra az nem oldja meg a Stahl sejtést. Az 43. tételt alkalmazva a $KG_{m,n}$ Kneser gráfra csak a Babson-Kozlov-féle tétel általánosításával (36. tétel) adott alsó korláttal megegyező vagy annál gyengébb alsó korlátot kapunk.

A $KG_{m,n}$ Kneser gráf s-szeres színezése t színnel megegyezik egy $KG_{m,n} \to KG_{t,s}$ gráfhomomorfizmussal. A Stahl sejtés éppen azt mondja meg, hogy mely indexekre léteznek ilyen gráfhomomorfizmusok. Egy $\gamma : KG_{m,n} \to KG_{t,s}$ gráfhomomorfizmus létezése esetén valamennyi $\mathcal{K}(\cdot)$ $\mathbb{Z}_2$-gráfkomplexusra létezik egy $c : |\mathcal{K}(KG_{m,n})| \to |\mathcal{K}(KG_{t,s})|$ $\mathbb{Z}_2$-leképezés. Egy ilyen c leképezés létezésének akadálya a Borsuk-Ulam tétel szerint, ha $|\mathcal{K}(KG_{m,n})|$-ben nagyobb dimenziós $\mathbb{Z}_2$-gömbfelület van, mint $|\mathcal{K}(KG_{t,s})|$-ben. Az általunk vizsgált topologikus alsó korlátok életlensége abból adódik, hogy a vizsgált esetek nagy részében ez éppen fordítva van. Azaz ha $m - 2n < t - 2s$, akkor $|\mathcal{K}(KG_{t,s})|$-ben nagyobb dimenziós $\mathbb{Z}_2$-gömbfelületek vannak, mint $|\mathcal{K}(KG_{m,n})|$-ben. Tehát $|\mathcal{LK}(KG_{m,n})| \to |\mathcal{LK}(KG_{t,s})|$ $\mathbb{Z}_2$-leképezés létezhet, ha $m - 2n \leq t - 2s$. Ezért a Walker által [35]-ben definiált, a Lovász posetek közti, $LP(KG_{m,n}) \to LP(KG_{t,s})$ ortoleképezés létezését vizsgáljuk, mely leképezés érzékeny a gömbfelületek "szimpliciális méretére" is. Az $LP(KG_{m,n})$ ortoposetbeli szimpliciális ortokörök méretét vizsgálva a következő alsó korlátot kapjuk.

50. Tétel. (Osztényi [28]) *Tetszőleges* $0 < m, n, q$ *és* $0 \leq r < n$ *egészek esetén legyen* l *egész olyan, hogy* $1 \leq l \leq m - 2n$, $0 \leq r < ln/(m - 2n)$. *Ekkor*

$$\chi_{qn-r}(KG_{m,n}) > qm - 2r - l.$$

Ez megadja a $\chi_s(KG_{m,n})$ multikromatikus számokat a $qn - \lfloor \frac{n}{m-2n} \rfloor \leq s \leq qn$ esetekben, tetszőleges m, n és q pozitív egészekre. Ami $m < 3n$ esetén újabb, eddig nem bizonyított, részesetekben igazolja a sejtést.

Amint azt a fenti tétel is mutatja az $LP(KG_{m,n})$ ortoposetbeli a gömbfelületek "szimpliciális méretét" vizsgálva újabb $\chi_s(KG_{m,n})$ multikromatikus számokat határozhatunk meg. Ám az egy dimenziós esethez képeset a magasabb dimenziós esetekben további nehézségek adódnak, melyek leküzdése a további kutatások tárgya lehet.

Summary

In this dissertation we study topological lower bounds for the multichromatic number of graphs. In the early $1970'$s Gilbert [18] introduced s-tuple colorings of graphs motivated by practical problems. Saul Stahl studied the properties of this colorings in [32]. In this paper he formulated the conjecture on the multichromatic number of the Kneser graphs. The first topological lower bound was given by László Lovász, when he settled the famous Kneser conjecture in [22]. Lovász's method produced further lower bounds for the chromatic number (see [35,24,3]). Motivated by Stahl's conjecture we generalize these bounds for the multichromatic number of G in [12,29], and we apply these bounds for the Kneser graph $KG_{m,n}$ in [28].

The topic of the dissertation is ranging over three fields. We apply the tools of graph theory, algebraic topology and combinatorics. In Chapter 1 we recall some basic facts about graph theory and algebraic topology and give a short introduction to combinatorial topology.

In Chapter 2 we describe some topological lower bounds for the chromatic number. The general idea for obtaining a lower bound on the chromatic number of a graph G is first associating a graph complex $\mathcal{K}(G)$ to G and then bound the chromatic number of G by a certain topological invariant of the complex $\mathcal{K}(G)$. This is summarized by the following scheme.

$$\begin{array}{ccc} \text{Graph } G & \longrightarrow & \text{Graph complex } \mathcal{K}(G) \\ & & \downarrow \\ \text{Lower bound for } \chi(G) & \longleftarrow & \text{Topological invariant of } \mathcal{K}(G) \end{array}$$

We study various graph complexes: the neighborhood complex $\mathcal{NK}(G)$ (introduced by L. Lovász [22]), the Lovász complex $\mathcal{LK}(G)$ (defined by J.W. Walker [35]) and the graph homomorphism complex $\mathcal{H}om(H, G)$ (constructed by Babson and Kozlov [2]).

In Chapter 2 we describe the method for obtaining lower bounds for $\chi(G)$ coming from a topological invariant of $\mathcal{K}(G)$ in detail. A coloring of G with t colors is a

$\gamma : G \to K_t$ graph homomorphism. This induces a $\mathbb{Z}_2$-map $c : |\mathcal{K}(G)| \to |\mathcal{K}(K_t)|$ for all $\mathbb{Z}_2$-graph complexes $\mathcal{K}(\cdot)$. The complex $\mathcal{NK}(K_t)$, respectively $\mathcal{LK}(K_t)$ is homotopy equivalent to the sphere $S^{(t-2)}$, and $\mathcal{H}om(K_l, K_t)$ is homotopy equivalent to a wedge of $(t-l)$-dimensional spheres. So the $\mathbb{Z}_2$-map $c : |\mathcal{K}(G)| \to |\mathcal{K}(K_t)|$ exists only for certain t according to a Borsuk-Ulam type theorem. This gives a topological lower bound for the chromatic number of G.

Most of the proofs of the Kneser conjecture rely on the fact that the Lovász complex $\mathcal{LK}(KG_{m,n})$ is homotopy equivalent to a wedge of $(m-2n)$-dimensional spheres. This was first verified by Lovász in [22]. We give a new proof of this fact in this chapter. The advantage of our proof is that it also provides a recursive formula for the number of the spheres.

Chapter 3 summarizes the previous results on the s-tuple colorings of graphs. The idea of s-tuple colorings was introduced by Gilbert [18] in connection with the mobile radio frequency assignment problem. Other applications of s-tuple colorings include fleet maintance, task assignment, and traffic phasing discussed in [27]. The graph-theoretical formulation of these problems is the following: There is a graph G. Make an assignment on G which assigns a set of s colors to each vertex of G so that the sets of colors assigned to adjacent vertices are disjoint.

In the early $1970'$s S. Stahl formulated the following conjecture on the multichromatic number of the Kneser graph in [32].

Conjecture 30. (Stahl [32]) *If $s = qn - r$ where $0 < q$ and $0 \leq r < n$, then*

$$\chi_s(KG_{m,n}) = qm - 2r.$$

The case $s = 1$ is the famous Kneser conjecture, which was settled by Lovász in [22]. Further, Stahl confirmed his conjecture for the case $s = qn$ in [32] by showing that $\chi_{qn}(KG_{m,n}) = qm$ for any positive integers n, m and q where $2n \leq m$. He also proved that $\chi_{s+1} \geq \chi_s + 2$ for any positive integer s. Since $\chi_n(KG_{m,n}) = m$, this yields

$$\chi_s(KG_{m,n}) = \chi_{s-1}(KG_{m,n}) + 2 \quad \text{for} \quad 1 < s \leq n.$$

In general, the inequality

$$\chi_{qn+1}(KG_{m,n}) \geq \chi_{qn}(KG_{m,n}) + \chi_1(KG_{m,n})$$

would imply the conjecture.

The multichromatic numbers of the Kneser graph $KG_{m,n}$ are trivial for $n = 1$ and S. Stahl computed them for $n = 2$, $n = 3$ and $m = 2n + 1$ in [32] and [33]. Moreover, he proved the following inequality in [33].

Theorem 31. (Stahl [33]) *For any positive integers $2n \leq m$, and s*

$$qm - 2r - (n^2 - 3n + 4) \leq \chi_s(KG_{m,n}) \leq qm - 2r,$$

where $s = qn - r$, $0 \leq r < n$ and $0 < q$.

This proposition gives that $\chi_{qn}(KG_{m,n}) + \chi_1(KG_{m,n}) - f(n) \leq \chi_{qn+1}(KG_{m,n})$, where $f(n) = n^2 - 3n + 4$. Since f doesn't depend on m, for a fixed n and $c \in (0, 1)$ we have $\chi_{qn}(KG_{m,n}) + c\chi_1(KG_{m,n}) \leq \chi_{qn+1}(KG_{m,n})$ for m large enough. But if $m \leq n^2 - n + 4$, then Stahl's result implies only that $\chi_{qn}(KG_{m,n}) + 2 \leq \chi_{qn+1}(KG_{m,n})$.

Our own results are discussed in the last two chapters, Chapter 4 contains results on topological lower bounds for multichromatic numbers and Chapter 5 describes applications of these bounds for the Kneser graph.

In Chapter 4 we use two methods for obtaining lower bounds on multichromatic numbers. First, we generalize the lower bounds described in Chapter 2 to the multichromatic number of G. An s-tuple coloring of G with t colors is a $\gamma : G \to KG_{t,s}$ graph homomorphism. This induces a $c : |\mathcal{K}(G)| \to |\mathcal{K}(KG_{t,s})|$ $\mathbb{Z}_2$-map for all $\mathbb{Z}_2$-graph complexes $\mathcal{K}(\cdot)$. By computing the homotopy type of the complex $\mathcal{K}(KG_{t,s})$ we obtain topological lower bounds for the multichromatic number of G. We apply this idea first to the Lovász complex then to the graph homomorphism complex.

We have seen in Chapter 2 that the Lovász complex $\mathcal{LK}(KG_{t,s})$ is homotopy equivalent to a wedge of $(t - 2s)$-dimensional spheres. Using this fact, it is easy to deduce the generalization of the Walker's Theorem for the multichromatic number.

Theorem 33. (Osztényi) *Let G be a graph and s positive integer, then*

$$\chi_s(G) \geq ind(\mathcal{LK}(G)) + 2s.$$

After obtaining this lower bound we determine the homotopy type of the graph homomorphism complex $\mathcal{H}om(K_n, KG_{t,s})$ as a generalization of the Theorem of Babson and Kozlov.

Theorem 34. (Osztényi [29]) *For any positive integers n, l and m with $\max\{2n, ln\} \leq m$, $\mathcal{H}om(K_l, KG_{m,n})$ is homotopy equivalent to a wedge of $(m - ln)$-dimensional spheres.*

Using this theorem, we give a topological lower bound on the multichromatic number.

Theorem 36. (Osztényi [29]) *Let G be a graph and l, n positive integers, then* $\chi_n(G) \geq \mathrm{ind}(\mathcal{H}om(K_l, G)) + ln$.

In the second part of chapter 4 we study the neighborhood complex $\mathcal{NK}(G[K_s])$ and graph homomorphism complex $\mathcal{H}om(K_2, G[K_s])$ of the lexicographical product $G[K_s]$. An s-tuple coloring of G is equivalent to an ordinary coloring of the lexicographical product $G[K_s]$. Therefore, the topological lower bounds for the ordinary chromatic number of $G[K_s]$ give another lower bound for the multichromatic number of G. First, Lovász's Theorem yields the following lower bound for the multichromatic number of a graph G:

$$\chi_s(G) \geq conn(\mathcal{NK}(G[K_s])) + 3.$$

Investigating the neighborhood complex $\mathcal{NK}(G[K_s])$ we find a connection between the topological connectivity of $\mathcal{NK}(G[K_s])$ and the topological connectivity of the so-called extended neighborhood complex of G described by the following theorem.

Theorem 41. (Osztényi [12]) *For any positive integers $s > l \geq 2$ and any graph G, the simplicial complex $\mathcal{NK}(G[K_s])$ is l-connected if and only if the extended neighborhood complex $\mathcal{EN}(G)$ is l-connected.*

The theorem implies that if $conn(EN(G))$ is finite, then $conn(N(G[K_m])) = conn(EN(G))$ for all $m \geq conn(EN(G)) + 2$. Consequently, in this case the gaps between the multichromatic number and this lower bound can be arbitrarily large.

Examining further, the graph homomorphism complex $\mathcal{H}om(K_2, G[K_s])$ provides us a connection between the $\mathbb{Z}_2$-index of $\mathcal{H}om(K_2, G[K_s])$ and the size of the largest clique (complete subgraph) of G described by Theorem 42.

Theorem 42. (Csorba [12]) *Let G be a graph and $s \geq |V(G)|$ positive integer, then*

$$ind(\mathcal{H}om(K_2, G[K_s])) + 2 = s \cdot \omega(G).$$

The great advantage of this result is that the expression $ind(\mathcal{H}om(K_2, G[K_s]))+2$ is exactly the same as the lower bound for the multichromatic number asserted by the Theorem of Babson and Kozlov. This can be summarized as follows:

Theorem 43. (Csorba [12]) *Let G be a graph and $s \geq |V(G)|$ positive integer, then*

$$\chi_s(G) \geq s \cdot \omega(G).$$

In Chapter 5 we study Stahl's conjecture. The generalization of Walker's and Babson-Kozlov's theorems seems to be a good idea, however this method does not lead to sharper bounds for the multichromatic number of $KG_{m,n}$ than those already known. On the other hand we show in the chapter that the topological connectivity number of the complex $\mathcal{EN}(KG_{m,n})$ is finite, thus applying Lovász's theorem to the lexicographical product $KG_{m,n}[K_s]$ remains also fruitless in proving Stahl's conjecture. Another trial for proving the conjecture is using Csorba's result (Theorem 43). Unfortunately this does not improve the previously obtained lower bound. These subsequent unsuccessfull trials indicate that the applied toplogical methods alone are not sufficient for dealing with the problem. To overcome this difficulty we use the Lovász poset. An s-tuple coloring of the Kneser graph $KG_{m,n}$ with t color is a graph homomorphism $KG_{m,n} \to KG_{t,s}$, which induces an orthomap between the Lovász posets $LP(KG_{m,n}) \to LP(KG_{t,s})$. The advantage of this poset method is that this orthomap is sensitive for the "simplicial size" of ortospheres. In the case of the poset $LP(KG_{m,n})$ we describe the lenght of the shortest orthocircle, which leads to the following lower bound.

Theorem 50. (Osztényi [28]) *For positive integers m, n, q and $0 \leq r < n$ let l be an integer such that $1 \leq l \leq m - 2n$ and $0 \leq r < ln/(m - 2n)$, then*

$$\chi_{qn-r}(KG_{m,n}) > qm - 2r - l.$$

This gives the multichromatic number $\chi_s(KG_{m,n})$ for the indices $qn - \lfloor \frac{n}{m-2n} \rfloor \leq s \leq qn$. If $m < 3n$ then Theorem 50 proves the Stahl conjecture for previously unknown cases.

Theorem 50 indicates that studying the "simplicial size" of ortospheres in $LP(KG_{m,n})$ we can find further multichromatic numbers $\chi_s(KG_{m,n})$ by more and more sharpening the lower bound for $\chi_s(KG_{m,n})$. To determine the "simplicial size" of ortosphere presents difficulty in the higher dimensional cases.

Hivatkozások

[1] N. Alon, P. Frankl and L. Lovász, The chromatic number of Kneser hypergraphs, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **298**, (1986), 359-370.

[2] E. Babson and D.N. Kozlov, Complex of graph homomorphisms, *Israel J. Math.*, **152**, (2006), 285-312.

[3] E. Babson and D.N. Kozlov, Proof of the Lovász conjecture, *Ann. of Math. (2)*, **165**, (2007), 965-1007.

[4] I. Bárány, A short proof of Kneser's conjecture, *J.Combin. Theory Ser. A*, 25, **(1978)**, 325-326.

[5] A. Björner, Shellable and Cohen-Macaulay partially ordered sets, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **260**, (1980), 159-183.

[6] A. Björner, Topologycal methods, in Handbook of Combinatorics (R. Graham, M. Grötschel, and L. Lovász, Eds.), North-Holland, Amsterdam, 1995.

[7] K. Borsuk, Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre, *Fund Math.*, **20**, (1933), 177-190.

[8] G. Bredon, Topology and geometry, Graduate Texts in Mathematics, 139, Springer-Verlag, New York, 1997.

[9] V. Chvátal, M.R. Garey, D.S. Johnson, Two results concerning multicoloring *Ann. Discrete Math.*, **2**, (1978), 151-154.

[10] P. Csorba, C. Lange, I. Schurr, A. Wassmer, Box complexes, neighborhood complexes, and the chromatic number, *J. Combin. Theory Ser. A*, **108**, (2004), 159-168.

[11] P. Csorba, On the simple $\mathbb{Z}_2$-homotopy types of graph complexes ond their simple $\mathbb{Z}_2$-universality, *Canadian Mathematical Bulletin*, **51**, (2008), 535-544.

[12] P. Csorba and J. Osztényi, On the topological lower bound for the multichromatic number, *Discrete Math.*, **310**, (2010), 1334-1339.

[13] S. Eilenberg and N. Steenrod, Foundations of algebraic topology. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1952.

[14] R. Forman, Morse theory for cell complexes, *Advances in Mathematics*, **134**, (1998), 90-145.

[15] M.R. Garey and D.S. Johnson, The complexity of near optimal graph coloring, *J. Assoc. Comput. Mach.*, **23**, (1955), 43-49.

[16] D. Geller and S. Stahl, The chromatic number and other parameters of the lexicographic product, *J. Combin. Theory Ser. B*, **19**, (1975), 87-95.

[17] A. Gyárfás, T. Jensen and M. Stiebitz, On graphs with strongly independent colour-classes, *J. Graph Theory*, **46**, (2004), 1-14.

[18] E.N. Gilbert, Unpublished technical memorandum, Bell Telephone Labs, Murray Hill, N.J., 1972.

[19] M. Kneser, Aufgabe 300, *Jber. Deutsch. Math. Verein.*, **58**, (1955).

[20] D. N. Kozlov, Combinatorial algebraic topology, Algorithms and Computation in Mathematics, 21. Springer, Berlin 2008.

[21] I. Kříž, Equivariant cohomology and lower bounds for chromatic numbers, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **333**, (1992), 567-577.

[22] L. Lovász, Kneser's conjecture, chromatic number and homotopy, *J. Combin. Theory Ser. A*, **25**, (1978), 319-324.

[23] J. Matoušek, Using the Borsuk-Ulam Theorem: Lectures on Topological Methods in Combinatorics and Geometry, Universitext, Springer, Heidelberg 2003.

[24] J. Matoušek and G. M. Ziegler, Topological lower bounds for the chromatic number: A hierarchy, *Jahresbericht der DMV*, **106**, (2004), 71-90.

[25] J. Milnor, Construction of universal bundles, II, *Annals of Math.*, **63**, (1956), 430-436.

[26] C.R.F Maunder, Algebraic Topology, Dover Publications, Mineola, New York 1996.

[27] R.J. Opsut and F.S. Roberts, On the fleet maintenance, mobile radio frequency, task assignment, and traffic phasing problems, in Theory of Applications of Graphs. (G. Chartrand, et al. eds.), Wiley, New York 1981, 479-492.

[28] J. Osztényi, A lower bound on the multichromatic number of the Kneser graphs, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **74**, (2008), 289-296.

[29] J. Osztényi, The homotopy type of complexes of homomorphisms from a complete graph to a Kneser graph, *Acta Sci. Math. (Szeged)* (2010), elfogadva.

[30] S. Poljak and F.S. Roberts, An application of Stahl's conjecture about the multichromatic numbers of Kneser graphs, (2007), preprint.

[31] K. S. Sarkaria, A generalized Kneser conjecture, *J. Combin. Theory Ser. B*, **49**, (1990), 236-240.

[32] S. Stahl, n-tuple colorings and associated graphs, *J. Combin. Theory Ser. B*, **20**, (1976), 185-203.

[33] S. Stahl, The multichromatic numbers of some Kneser graphs, *Discrete Math.*, **185**, (1998), 287-291.

[34] H. Steinlein, Borsuk's antipodal theorem and its generalizations and applications: a survey, Topological methods in nonlinear analysis, Sm. Math. Sup. 95, Presses Univ Montreal, Monteral, OC, (1985), 166-235.

[35] J.W. Walker, From graphs to ortholattices and equivariant maps. *J. Combin. Theory Ser. B*, **35**, (1983), 171-192.