OPERÁTORFÉLCSOPORTOK STABILITÁSÁNAK FELTÉTELEI

Léka Zoltán

Témavezető: Dr. Kérchy László
Szeged, 2008

1. Bevezetés

1.1. ABLV típusú tételek. A lineáris operátorfélcsoportok elméletének fontos részét alkotják a stabilitási vizsgálatok. Vegyünk egy A sűrűn definiált, zárt operátort egy $\mathcal{X}$ komplex Banach téren, és tekintsük az

$$\text{(ACP)} \quad \begin{cases} \dot{u}(t) & = Au(t) \quad (0 \leq t), \\ u(0) & = x, \quad (x \in \mathcal{X}) \end{cases}$$

(jól-kitűzött) absztrakt Cauchy problémát. Ismert, hogy e probléma megoldásai egy $(T(t))_{t\geq 0}$ operátorfélcsoportból származtathatóak (ld. [11]). Az operátorfélcsoport stabilitásához elegendő spektrális feltételt ad az Arendt–Batty–Lyubich–Vũ tétel. Az A operátor spektrumát $\sigma(A)$, az A adjungáltjának pontspektrumát $\sigma_{\mathrm{p}}(A^*)$ jelöli.

1.1. Tétel. (ABLV) *Jelölje $(T(t))_{t\geq 0}$ az A operátor által generált C_0-félcsoportot és tegyük fel, hogy minden $x \in \mathcal{X}$-re $T(t)x$ korlátos. Ha $\sigma(A) \cap \mathrm{i}\mathbb{R}$ megszámlálható és $\sigma_{\mathrm{p}}(A^*) \cap \mathrm{i}\mathbb{R} = \emptyset$, akkor*

$$\lim_{t\to\infty} \|T(t)x\| = 0$$

minden $x \in \mathcal{X}$-re.

E tételnek számos általánosítása ismert lokálisan kompakt, kommutatív félcsoportok reprezentációira (ld. [1], [2], [5], [3], [19], [20]). A tétel első nemkorlátos kiterjesztését Vũ [41] adta meg, majd Batty és Yeates [3] tanulmányozta részletesen a nemkvázianalitikus reprezentációk spektrálelméletét és stabilitását. A diszszertációmban kiterjesztem Kérchy diszkrét kommutatív félcsoportokon alkalmazott módszerét ([19], [20]) általános, topologikus félcsoportokra. Ezáltal stabilitási tételeket bizonyíthatunk reguláris norma-viselkedésű reprezentációkra. Az így kapott stabilitási eredmények rokonságban állnak [3] eredményeivel, azonban a stabilitás leírása, illetve a reprezentációk norma-viselkedésére vonatkozó feltételek lényegesen eltérőek. Ezután a valós félegyenesen megadjuk egy karakterizációját azon C_0-félcsoportoknak, amelyek normafüggvénye topologikusan reguláris. Ezeket az eredményeket 2-4. fejezetekben mutatjuk be. A regularitás más irányultságú, általánosított Toeplitz operátokra és hasonlósági problémákban való alkalmazásáról a [23], [24], illetve a [7], [8] dolgozatokban olvashatunk.

1.2. Katznelson–Tzafriri típusú tételek. Disszertációmban foglalkozom egy más típusú stabilitási tétellel is, a Katznelson–Tzafriri tétellel (ld. [18]). Jelölje $A(\mathbb{T})$ azon folytonos függvények halmazát a $\mathbb{T}$ egységkörön, amelyek Fourier együtthatói abszolút konvergens sort alkotnak, s legyen $A^+(\mathbb{T})$ azon $A(\mathbb{T})$-beli függvények halmaza, amelyek negatív indexű Fourier együtthatói nullával egyenlőek. $A(\mathbb{T})$ Banach algebra az $\|f\| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)|$ normával ($f \in A(\mathbb{T}), \{\widehat{f}(n)\}_{n=1}^{\infty}$ az f Fourier együtthatói). Azt mondjuk, hogy az $f \in A^+(\mathbb{T})$ függvény spektrál szintézis egy zárt $E \subseteq \mathbb{T}$ halmazra nézve, ha létezik olyan $(f_n)_n \subset A(\mathbb{T})$ sorozat, hogy minden egyes f_n eltűnik E valamely környezetében, és $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\| = 0$. A Katznelson–Tzafriri tétel a következőképpen szól.

1.2. Tétel. *Legyen T egy hatványkorlátos operátor az $\mathcal{X}$ Banach téren, és legyen az $f \in A^+(\mathbb{T})$ függvény spektrál szintézis T periferális spketrumára, azaz $\sigma(T) \cap \mathbb{T}$-re nézve. Ekkor* $\lim_{n\to\infty} \|T^n f(T)\| = 0$.

Megjegyezzük, hogy Hilbert térbeli kontrakciókra egy gazdagabb függvénykalkulust definiálhatunk az $A(\mathbb{D})$ diszk algebra elemeit, azaz a $\mathbb{D}$ nyílt egységkörlapon analitikus és a zárt egységkörlapra folytonosan kiterjeszthető függvényeket használva. Bizonyítható, hogy $f \in A(\mathbb{D})$ pontosan akkor tűnik el T periferális spektrumán, ha $\lim_{n\to\infty} \|T^n f(T)\| = 0$ [13]. Ugyanakkor kontrakciókra egy még általánosabb H^∞ kalkulus is definiálható, nevezetesen az Sz.Nagy–Foias kalkulus. Vegyünk egy

T teljesen nemunitér Hilbert térbeli kontrakciót és legyen f egy korlátos holomorf függvény a nyílt egységkörlapon. Ekkor $\lim_{n\to\infty} \|T^n f(T)\| = 0$ teljesül, ha $\lim_{r\to 1} f(re^{i\theta}) = 0$ minden $e^{i\theta}$-ra T periferális spektrumán. Ismeretes, hogy az állítás fordítottja nem igaz (ld. [6]).

A disszertációban megmutatjuk, hogy a Katznelson–Tzafriri tétel feltétele gyengíthető Hilbert tereken, és teljes karakterizációját adjuk a $\lim_{n\to\infty} \|T^n Q\| = 0$ konvergenciának, ha a Q operátor kommutál T-vel. Erről az eredményről a 6. fejezetben számolunk be.

A Katznelson–Tzafriri tételnek számos általánosítása született diszkrét és folytonos reprezentációkra, ld. [5], [14], [17], [33], [34], [40] és [9], [2]. Megjegyezzük azonban, hogy ezek az általánosítások mind T egy függvénykalkulusához kapcsolódnak vagy a T által generált Banach algebrához.

2. Amenábilitás félcsoportokon

Legyen $(G;+)$ egy lokálisan kompakt, σ-kompakt, kommutatív csoport. Jelölje S egy olyan zárt részfélcsoportját G-nek, amelynek S° belseje nemüres, $S - S = G$ és $S \cap (-S) = \{0\}$ teljesülnek. Ekkor definiálhatunk egy induktív részbenrendezést S-en a következő módon: legyen $s_1 \preceq s_2$, ha $s_2 - s_1 \in S$ $(s_1, s_2 \in S)$. Legyen μ a G-n rögzített $\tilde{\mu}$ Haar-mérték megszorítása S-re. A μ-re nézve lényegében korlátos, S-en mérhető függvények Banach terét a továbbiakban $L^\infty(S)$ jelöli. Egy $f\colon S \to \mathbb{C}$ függvény $s' \in S$-vel való eltoltja az $f_{s'}(s) := f(s + s')$ $(s \in S)$ függvény.

Az $L^\infty(S)^*$ duális tér egy m funkcionálját invariáns középnek hívjuk, ha

- $\|m\| = m(\mathbf{1}) = 1$,
- $m(f_s) = m(f)$ minden $f \in L^\infty(S)$-re és $s \in S$-re.

(Itt $\mathbf{1}$ a konstans 1 függvényt jelöli.)

Igazolható, hogy az S-en értelmezett invariáns közepek halmaza nemüres. Ezt a halmazt $\mathcal{M}(S)$-sel jelöljük. Általában amenábilisnek nevezzük azokat a (nem szükségképpen kommutatív) félcsoportokat (csoportokat) amelyeken található invariáns közép. Az amenábilitás szükséges és elegendő feltételét (erős) Følner sorozatok segítségével adhatjuk meg.

2.1. Definíció. Egy G lokálisan kompakt csoport nemüres belsejű, kompakt halmazokból álló $\{K_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ irányított sorozatát erős Følner sorozatnak nevezzük, ha

(i) $K_{\lambda_1} \subseteq K_{\lambda_2}$ valahányszor $\lambda_1 \preceq \lambda_2$,
(ii) $G = \bigcup K_\lambda^\circ$,
(iii) $\tilde{\mu}((x+K_\lambda) \vartriangle K_\lambda)/\tilde{\mu}(K_\lambda) \to 0$ $(\lambda \to \infty)$ kompakt halmazokon átfutó x-re nézve egyenletesen ($\vartriangle$ két halmaz szimmetrikus különbségét jelöli).

Ha csak (iii) teljesülését tesszük fel, akkor a $\{K_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ sorozatot *Følner sorozatnak* hívjuk.

Például $G = \mathbb{R}$ esetén a $K_n := [-n, n]$ $(n \in \mathbb{N})$ halmazok egy Følner sorozat alkotnak. Az amenábilis csoportok karakterizációs tétele [36, Theorem 4.16] kimondja, hogy egy G lokálisan kompakt csoport pontosan akkor amenábilis, ha található rajta erős irányított Følner sorozat, illetve erős Følner sorozat a σ-kompakt esetben.

A Markov–Kakutani fixpont tétel segítségével bebizonyítható, hogy minden kommutatív csoport amenábilis, így található rajta Følner sorozat. E sorozat elemeit eltolva az is igazolható, hogy Følner sorozat nemcsak G-ben, hanem S belsejében, S°-ban is létezik.

2.1. Topologikusan invariáns közepek. Disszertációmban szükségem van az invariáns közepek egy speciális részhalmazára is. A topologikusan invariáns közepeket A. Hulanicki definiálta lokálisan kompakt Hausdorff csoportokon (ld. [36, 9. old.]). Félcsoportokon a következő definíciót használjuk. Először is legyen $\mathcal{G}(S)$

azon nemnegatív, mérhető g függvények halmaza S-en, amelyekre $\int_S g(s)d\mu(s) = 1$. Tetszőleges $f \in L^\infty(S)$ és $g \in \mathcal{G}(S)$ esetén defniniáljuk az alábbi $f * g \in L^\infty(S)$ konvolúciót: $(f * g)(y) = \int_S f(s+y)g(s)\,d\mu(s)$.

2.2. Definíció. Azt mondjuk, hogy egy $m \in L^\infty(S)^*$ funkcionál *topologikusan invariáns közép*, ha

- $\|m\| = m(\mathbf{1}) = 1$,
- $m(f * g) = m(f)$ minden $f \in L^\infty(S)$ és $g \in \mathcal{G}(S)$ függvényre.

Igazolható, hogy az S-en értelmezett topologikusan invariáns közepek $\mathcal{M}_\mathrm{t}(S)$ halmaza nemüres. Könnyen belátható továbbá, hogy minden m topologikusan invariáns közép eltolás invariáns. Valóban, tetszőlegesen rögzített $f \in L^\infty(S)$ függvényre és $y \in S$-re, válasszunk egy $g \in \mathcal{G}(S)$ függvényt, amelynek tartója $y+S$-ben fekszik. Ekkor

$$m(f) = m(f * g) = m\left(\int_{y+S} f(\,\cdot + s)g(s)\,d\mu(s)\right) = m(f_y * g_y) = m(f_y),$$

mert g_y a $\mathcal{G}(S)$ halmaz eleme, tehát $\mathcal{M}_\mathrm{t}(S) \subseteq \mathcal{M}(S)$ teljesül.

A következőkben megadunk egy konstrukciót, amely megmutatja, hogy az $\mathcal{M}_\mathrm{t}(S) \subseteq \mathcal{M}(S)$ tartalmazás lehet szigorú, azaz létezhet invariáns közép, amely nem topologikusan invariáns. Legyen $S = \mathbb{R}_+$, és legyen $r_1, r_2, \ldots$ a nemnegatív racionális számok egy felsorolása. Jelölje f_0 az $\Omega \cap \mathbb{R}_+$ halmaz karakterisztikus függvényét, ahol $\Omega = \bigcup_{n=1}^\infty (r_n - 2^{-n}, r_n + 2^{-n})$. Egyszerűen bizonyítható, hogy $m(f_0) = 0$ minden $m \in \mathcal{M}_\mathrm{t}(\mathbb{R}_+)$ középre, ugyanakkor az alábbi teljesül [28, Proposition 2].

2.3. Propozíció. *Létezik olyan m invariáns közép $L^\infty(\mathbb{R}_+)$-on, amelyre $m(f_0) = 1$.*

Általában csoportok széles osztályára ismert, hogy $\mathcal{M}_\mathrm{t}(G) \neq \mathcal{M}(G)$. Pontosabban, ha G egy amenábilis, nemkompakt, nemdiszkrét és lokálisan kompakt csoport, akkor az $\mathcal{M}_\mathrm{t}(G)$ és $\mathcal{M}(G)$ halmazok különbözőek (ld. [36, 277.old.] és [15], [37], [38]).

A topologikusan invariáns közepek halmaza jól jellemezhető az $L^\infty(S)^*$ duális térben. A következő állítás csoportokra vonatkozó megfelelőjét C. Chou bizonyította [36, 138.o.]. Tetszőleges pozitív mértékű $K \subseteq S$ kompakt halmazra vegyük a φ_K közepet $L^\infty(S)$-n, ahol $\varphi_K(f) := \frac{1}{\mu(K)} \int_K f(s)\,d\mu(s)$ $(f \in L^\infty(S))$. Ekkor a következő igazolható [28, Theorem 3] a csoport esethez hasonlóan.

2.4. Tétel. *Az $\mathcal{M}_\mathrm{t}(S)$ halmaz megegyezik a*

$$\{\varphi_{K_n + s_n}\}_{n\in\mathbb{N}} \quad (\{s_n\}_n \in S^\mathbb{N}),$$

sorozatok gyenge-$*$ torlódási pontjai konvex burkának gyenge-$*$ lezártjával, ahol $\{K_n\}_n$ egy tetszőlegesen választott, rögzített Følner sorozat S°-ban.

2.2. Konvergencia típusok félcsoportokon. Célunk, hogy stabilitási tételeket bizonyíthassunk, illetve operátor-félcsoportok aszimptotikus tulajdonságait vizsgálhassuk. A legtöbb esetben a pályák szokásos konvergenciájánál gyengébb fogalmakat használunk majd, amelyek bevezetéséhez szükségünk van a korábban tárgyalt közepekre. Látni fogjuk azt is, hogy ezek a konvergenciák integrálközepekkel is leírhatóak.

A $\preceq$ részbenrendezéssel az S halmaz egy irányított halmazzá válik. Azt mondjuk, hogy az $f\colon S \to \mathbb{C}$ függvény a végtelenben 0-hoz konvergál, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz létezik $s_0 \in S$ hogy $|f(s)| < \varepsilon$ teljesül minden $s_0 \preceq s$ esetben. Invariáns közepeket használva az előző konvergencia fogalomnál gyengébb fogalom, az úgynevezett (erős) majdnem konvergencia definiálható.

2.5. Definíció. Egy $f \in L^\infty(S)$ függvény *majdnem konvergens*, ha az $\{m(f) : m \in \mathcal{M}(S)\}$ halmaz egyelemű. Jelölésben, a-lim$f = c$, ha $m(f) = c$ minden $m \in \mathcal{M}(S)$ középre.

2.6. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f \in L^\infty(S)$ függvény *erős értelemben majdnem konvergál* egy $c \in \mathbb{C}$ számhoz, ha a-lim$|f - c| = 0$ teljesül.

Az előzőekhez hasonló módon bevezethetünk egy módosított konvergenciát is, ha az $\mathcal{M}(S)$ halmaz helyett az $\mathcal{M}_\mathrm{t}(S)$ halmazt használjuk.

2.7. Definíció. Egy $f \in L^\infty(S)$ függvény *topologikusan majdnem konvergens* ha $\{m(f) : m \in \mathcal{M}_\mathrm{t}(S)\}$ egyelemű. Jelölésben, at-lim$f = c$ ha $m(f) = c$ az összes $m \in \mathcal{M}_\mathrm{t}(S)$ középre. Azt mondjuk, hogy egy $f \in L^\infty(S)$ függvény *erős értelemben topologikusan majdnem konvergál* egy $c \in \mathbb{C}$ számhoz, ha at-lim$|f - c| = 0$.

A következő állítás jól jellemzi ezt a fajta konvergenciát. Megjegyezzük, hogy a tétel $\ell^\infty(\mathbb{Z}_+)$-on éppen Lorentz klasszikus eredményét adja vissza a majdnem konvergens sorozatokról [30].

2.8. Propozíció. [28, Proposition 4, Remark] *Egy $f \in L^\infty(S)$ függvény akkor és csak akkor topologikusan majdnem konvergál $c \in \mathbb{C}$-hez, ha*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\mu(K_n)} \int_{K_n} f_y(s)\, d\mu(s) = c$$

az $y \in S$-re nézve egyenletesen, ahol $\{K_n\}_n$ egy tetszőlegesen választott Følner sorozat.

Észrevehetjük, hogy ha $f \in L^\infty(S)$ majdnem konvergens függvény, akkor az előző integrálfeltétel mindig teljesül.

2.9. Következmény. [25, Proposition 7] *Tegyük fel, hogy az $f \in L^\infty(S)$ függvény majdnem konvergens,* a-lim $f = c$, *és $\{K_n\}_n$ Følner sorozat S-ben. Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\mu(K_n)} \int_{K_n} f_y(s)\, d\mu(s) = c$$

az $y \in S$-re nézve egyenletesen.

Az állítás megfordítása általában nem teljesül (ld. Propozíció 2.3).

Ezen előkészületek után rátérhetünk a reguláris norma-viselkedésű reprezentációk vizsgálatára.

3. Reprezentációk reguláris normafüggvénnyel

Legyen adott egy $\mathcal{X}$ komplex Banach tér, és jelölje $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ az $\mathcal{X}$-en ható korlátos lineáris operátorok algebráját. Egy $\rho\colon S \to \mathcal{L}(\mathcal{X})$ félcsoport homomorfizmust reprezentációnak hívunk, ha folytonos az erős operátor topológiában, tehát

- $\rho(0) = I$,
- $\rho(s + t) = \rho(s)\rho(t)$ minden $s, t \in S$-re,
- a $\rho_x\colon S \to \mathcal{X}$, $s \mapsto \rho(s)x$ pálya folytonos minden $x \in \mathcal{X}$-re.

3.1. Limeszfunkcionál és regularitás. A reguláris normafüggvény értelmezése előtt megadjuk a normalizáló függvény és a limeszfunkcionál definícióját, illetve összefoglaljuk ezek legfontosabb tulajdonságait. Azt mondjuk, hogy egy $p\colon S \to (0, \infty)$ függvény *normalizáló függvény,* ha mérhető és minden $s \in S$-re $p_s/p \in L^\infty(S)$ erős értelemben majdnem konvergál egy pozitív $c_p(s)$ számhoz. A c_p függvényt a p függvényhez tartozó *limeszfunkcionál*nak nevezzük.

A limeszfunkcionál egy fontos és alapvető tulajdonsága, melyet több bizonyítás során is kihasználunk, a következő.

3.1. Lemma. [25, Lemma 9] *Ha p egy olyan normalizáló függvény, amelyre $p(s) \geq 1$ teljesül minden $s \in S$ esetben, akkor $c_p(s) \geq 1$ minden $s \in S$-re.*

Az S félcsoport nem azonosan zéró, komplex értékű folytonos homomorfizmusait karaktereknek nevezzük és halmazukat $S^\sharp$-gal jelöljük.

3.2. Következmény. [25, Corollary 10] *Legyen $\chi \in S^\sharp$, amelyre $c_\mathrm{p} \leq |\chi| \leq p$. Ekkor $|\chi| = c_\mathrm{p}$.*

A továbbiakban előforduló minden p normalizáló függvényről feltesszük, hogy S kompakt részhalmazain korlátos, és $p \geq 1$ teljesül.

Azt mondjuk, hogy egy $\rho\colon S \to \mathcal{L}(\mathcal{X})$ reprezentáció a *p normalizáló függvényre nézve reguláris norma viselkedésű* vagy *p-reguláris normafüggvényű*, ha $\|\rho(s)\| \leq p(s)$ minden $s \in S$-re, és nem áll fenn az a-$\lim_s \|\rho(s)\|/p(s) = 0$ összefüggés.

A limeszfunkcionál legfontosabb tulajdonságait a következő két tételben foglaljuk össze.

3.3. Tétel. [25, Theorem 13] *Legyen p normalizáló függvény S-en és tegyük fel, hogy létezik egy p-reguláris normafüggvényű $\rho\colon S \to \mathcal{L}(\mathcal{X})$ reprezentáció. Ekkor a p normalizáló függvény c_p limeszfunkcionálja S egy pozitív karaktere.*

3.4. Tétel. [25, Theorem 14] *Ha a $\rho\colon S \to \mathcal{L}(\mathcal{X})$ reprezentáció reguláris norma viselkedésű a p és q normalizáló függvényekre nézve, akkor*

$$c_p = c_q.$$

Az előző tétel lehetővé teszi a következő definiciót. A $c_\rho := c_p$ függvényt, amely a normalizáló függvény megválasztásától független, a p-reguláris normafüggvényű *ρ reprezentáció limeszfunkcionáljának* nevezzük.

A limeszfunkcionál és a spektrálsugár-függvény kapcsolatát egy egyenlőtlenséggel írhatjuk le. Diszkrét félcsoportokhoz hasonlóan (ld. [20]) igazolható, hogy

$$c_\rho(s) \leq r(\rho(s)), \quad s \in S,$$

ahol $r(\rho(s))$ a $\rho(s)$ operátor spektrálsugarát jelöli. Kérchy bizonyította [19]-ben, hogy ha $S = \mathbb{Z}_+$, akkor valójában egyenlőség áll fönn a két oldal között. Az $S = \mathbb{R}_+$ esetben a következő analóg állítás teljesül [25, Proposition 16].

3.5. Propozíció. *Ha a $T\colon \mathbb{R}_+ \to \mathcal{L}(\mathcal{X})$ reprezentáció reguláris norma-viselkedésű (egy p normalizáló függvényre nézve), akkor $c_T(s) = r(T(s))$ $(s \in \mathbb{R}_+)$ teljesül.*

Megjegyezzük, hogy általában a spektrálsugár-függvény és a limeszfunkcionál eltérőek lehetnek [25, Example 17].

3.2. Reprezentáció spektruma. Legyen $f \in C_c(S)$ egy kompakt tartójú, folytonos függvény S-en. Az f függvény $\rho\colon S \to \mathcal{L}(\mathcal{X})$ reprezentáció szerinti Fourier transzformáltján az

$$\widehat{f}(\rho) := \int_S f(s)\rho(s)\, d\mu(s)$$

operátort értjük. Az integrál pontonként definiált: $\widehat{f}(\rho)x = \int_S f(s)\rho(s)x\, d\mu(s)$ $(x \in \mathcal{X})$ Bochner értelemben ([16, Chapter 7.5]). Világos, hogy $\widehat{f}(\rho) \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$. Hasonlóan értelmezhetjük $\widehat{f}(\chi)$-t tetszőleges $\chi \in S^\sharp$-re is, hiszen S karakterei egydimenziós reprezentációk.

Ezek után bevezetjük a nemkorlátos reprezentációk különféle spektrumfogalmait, melyek rokonságban állnak a Lyubich által használt δ-spektrummal [31], illetve Kérchy algebrai és kiegyensúlyozott spektrumával [20].

3.6. Definíció. A ρ reprezentáció *algebrai spektruma* a

$$\sigma_{\mathrm{a}}(\rho) := \Big\{ \chi \in S^\sharp : |\widehat{f}(\chi)| \le \|\widehat{f}(\rho)\| \text{ minden } f \in C_c(S)\text{-re} \Big\}$$

halmaz.
A ρ reprezentáció *kiegyensúlyozott spektruma* definíció szerint

$$\sigma_{\mathrm{b}}(\rho) := \sigma_{\mathrm{a}}(\rho) \cap S^\sharp_{\mathrm{b}},$$

ahol $S^\sharp_{\mathrm{b}} := \{ \chi \in S^\sharp : \chi(s) \ne 0 \text{ minden } s \in S\text{-re}\}$.
Egy reguláris norma viselkedésű ρ reprezentáció *spektrumán* a

$$\sigma(\rho) := \{\chi \in \sigma_{\mathrm{a}}(\rho) : |\chi| \le c_\rho\}$$

halmazt értjük, ahol c_ρ jelöli ρ limeszfunkcionálját.

A limeszfunkcionál létezése lehetővé teszi a számunkra, hogy értelmezhessük a periferális spektrumot.

3.7. Definíció. A $\rho\colon S \to \mathcal{L}(\mathcal{X})$ reguláris normafüggvényű reprezentáció *periferális spektruma*:

$$\sigma_{\mathrm{per}}(\rho) := \{ \chi \in \sigma(\rho) : |\chi(s)| = c_\rho(s) \text{ minden } s \in S\text{-re} \}.$$

A karakterek $S^\sharp$ halmazát a kompakt-nyílt topológiával ellátva, az előző halmazok lokálisan kompakt, Hausdorff teret alkotnak [25, Proposition 22]. Végezetül a $\rho\colon S \to \mathcal{L}(\mathcal{X})$ reprezentáció pontspektruma a

$$\sigma_{\mathrm{p}}(\rho) := \big\{\chi \in S^\sharp : \text{ létezik } 0 \ne x \in \mathcal{X} \text{ hogy } \rho(s)x = \chi(s)x \text{ minden } s \in S\text{-re}\big\}$$

halmaz.

A ρ reprezentáció adjungáltja, $\rho^*(s) := \rho(s)^*$ $(s \in S)$, nem feltétlenül erősen folytonos, így ρ^* spektruma általában nem értelmezhető. Ugyanakkor $\sigma_{\mathrm{p}}(\rho^*)$ teljesen hasonlóan definiálható, mint ahogy $\sigma_{\mathrm{p}}(\rho)$-t bevezettük.

A spektrumokkal kapcsolatos eredményünk szerint a kiegyensúlyozott spektrum mindig része a reprezentáció spektrumának [25, Proposition 19].

3.8. Propozíció. *Legyen a $\rho\colon S \to \mathcal{L}(\mathcal{X})$ reprezentáció reguláris normafüggvényű. Ekkor $\sigma_{\mathrm{b}}(\rho) \subseteq \sigma(\rho)$.*

Mivel a $\mathbb{Z}_+^n$ és $\mathbb{R}_+^n$ félcsoportok karakterei seholsem tűnnek el, ezért az előző állításból azonnal következik, hogy ekkor a $\sigma_{\mathrm{a}}(\rho)$, $\sigma_{\mathrm{b}}(\rho)$ halmazok egybeesnek és megegyeznek $\sigma(\rho)$-val, ha a reprezentáció normafüggvénye reguláris.

3.3. A spektrum leírása. (a) Legyen T egy korlátos, lineáris operátor $\mathcal{X}$-en. Jelölje $\rho_T\colon \mathbb{Z}_+ \to \mathcal{L}(\mathcal{X})$ a T által generált reprezentációt. Ekkor igazolható, hogy $\sigma_{\mathrm{a}}(\rho_T) = \sigma_{\mathrm{b}}(\rho_T) = \widehat{\sigma(T)}$, ahol $\widehat{\sigma(T)}$ a T operátor $\sigma(T)$ spektrumának polinomiálisan konvex burka [35, Theorem 2.10.3].

(b) Az előzőhöz geometriailag hasonló eredmény bizonyítható $\mathbb{R}_+$ reprezentációira, azaz C_0-félcsoportokra is [28, Proposition 5 és Corollary 6]. Legyen $T\colon \mathbb{R}_+ \to \mathcal{L}(\mathcal{X})$ egy C_0-félcsoport, amelynek generátora A, és legyen $\rho_\infty(A)$ a $\mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ halmaznak az a komponense, amely tartalmazza a $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \omega_0(T)\}$ félsíkot, ahol $\omega_0(T) := \lim_{s\to\infty}(\log \|T(s)\|)/s$.

3.9. Tétel. *Az előző jelöléseket használva,*

$$\sigma_{\mathrm{a}}(T) = \sigma_{\mathrm{b}}(T) = \mathbb{C} \setminus \rho_\infty(A).$$

(c) Vegyünk egy korlátos $\rho\colon S \to \mathcal{L}(\mathcal{X})$ reprezentációt, és legyen $\alpha := \sup\{\|\rho(s)\| : s \in S\} < \infty$. Ha $\|\rho(s_0)\| < 1$ teljesül egy $s_0 \in S$-re, akkor $\|\rho(ns_0 + s)\| \le \|\rho(s_0)\|^n \alpha$ $(n \in \mathbb{N})$ mutatja, hogy $\lim_s \|\rho(s)\| = 0$, azaz ρ egyenletesen stabil.

Feltéve, hogy $\|\rho(s)\| \geq 1$ teljesül minden $s \in S$-re, könnyen látható, hogy ρ normafüggvénye reguláris a $p(s) := \alpha$ $(s \in S)$ normalizáló függvény szerint; a c_ρ limeszfunkcionál a konstans $\mathbf{1}$ függvény. Ekkor $\sigma_{\mathrm{per}}(\rho)$ megegyezik ρ *unitér spektrumával* $\sigma_{\mathrm{u}}(\rho) := \{\chi \in \sigma(\rho) : |\chi| = 1\}$, sőt $\sigma_{\mathrm{a}}(\rho) = \sigma(\rho)$ is teljesül.

A $C_c(S)$ halmaz egy sűrű részhalmaza $L^1(S)$-nek, így könnyen látható, hogy $\sigma(\rho)$ egybeesik Batty és Vũ korlátos reprezentációkra definiált spektrumával [5]. A definíció csoport esetén megadja Lyubich véges L-spektrumát, illetve az Arveson spektrumot (ld. [31] és [10]).

(d) Vegyünk egy reguláris normafüggvényű $\rho\colon S \to \mathcal{L}(\mathcal{X})$ reprezentációt. Mivel $c_\rho \in S^\sharp_{\mathrm{b}}$, a $\tilde{\rho} := c_\rho^{-1}\rho\colon S \to \mathcal{L}(\mathcal{X})$ reprezentáció szintén reguláris normafüggvényű lesz és $c_{\tilde{\rho}} = \mathbf{1}$. Jelölje a $\chi \in \sigma_{\mathrm{per}}(\tilde{\rho})$ karakter G csoportra való kiterjesztését $\tilde{\chi}$. Bizonyítható, hogy $\sigma_{\mathrm{per}}(\tilde{\rho})$ azonosítható az $\mathrm{Sp}_{\mathrm{u}}(\tilde{\rho})$ unitér spektrummal (ld. [3]), nevezetesen $\sigma_{\mathrm{per}}(\tilde{\rho}) = \{\tilde{\chi}|S : \tilde{\chi} \in \mathrm{Sp}_{\mathrm{u}}(\tilde{\rho})\}$. Így $\sigma_{\mathrm{per}}(\rho) = \{c_\rho(\tilde{\chi}|S) : \tilde{\chi} \in \mathrm{Sp}_{\mathrm{u}}(\tilde{\rho})\}$.

4. A stabilitási tétel

4.1. Regularitás és izometrikus reprezentációk. A stabilitási tétel bizonyításának egyik fontos eleme, hogy az eredeti reprezentációnkhoz hozzá tudunk rendelni egy izometrikus reprezentációt. Az állítás jól ismert korlátos reprezentációk esetében, reguláris norma-viselkedés mellett pedig a következő módon terjeszthető ki [25, Theorem 23].

4.1. Tétel. *Tetszőleges p-reguláris norma-viselkedésű $\rho\colon S \to \mathcal{L}(\mathcal{X})$ reprezentációhoz megadható egy $\mathcal{Y}$ Banach téren ható $\psi\colon S \to \mathcal{L}(\mathcal{Y})$ izometrikus reprezentáció és egy $Q \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ kontrakció úgy, hogy :*

(i) $\ker Q = \{x \in \mathcal{X} : \text{a-}\lim_s \|\rho(s)x\|/p(s) = 0\}$, *és* $\operatorname{ran} Q$ *sűrű* $\mathcal{Y}$*-ban;*
(ii) $Q\rho(s) = c_\rho(s)\,\psi(s)Q$ *teljesül minden* $s \in S$*-re;*
(iii) *minden C operátorhoz, amely a $\{\rho(S)\}'$ kommutánsnak eleme, létezik pontosan egy olyan $D \in \{\psi(S)\}'$ operátor, amelyre $QC = DQ$; továbbá a $\gamma\colon \{\rho(S)\}' \mapsto \{\psi(S)\}', C \mapsto D$ leképezés egy kontraktív algerba homomorfizmus;*
(iv) $\sigma(\rho) \supseteq c_\rho\sigma(\psi), \quad \sigma_{\mathrm{per}}(\rho) \supseteq c_\rho\sigma_{\mathrm{per}}(\psi), \quad \sigma_{\mathrm{p}}(\rho^*) \supseteq c_\rho\sigma_{\mathrm{p}}(\psi^*).$

4.2. Stabilitási tétel A következő állítás a disszertáció egyik fő eredménye, egy Arend–Batty–Lyubich–Vũ típusú tétel reguláris normafüggvényű reprezentációkra [25, Theorem 25].

4.2. Tétel. *Legyen a $\rho\colon S \to \mathcal{L}(\mathcal{X})$ reprezentáció p-reguláris normafüggvényű. Ha $\sigma_{\mathrm{per}}(\rho)$ megszámlálható és $\sigma_{\mathrm{p}}(\rho^*) \cap \{\chi \in S^\sharp : |\chi| = c_\rho\}$ üres, akkor*

$$\text{a-}\lim_s \frac{\|\rho(s)x\|}{p(s)} = 0$$

minden $x \in \mathcal{X}$-re.

A tétel következménye az alábbi állítás [25, Corollary 26].

4.3. Következmény. *Legyen a $\rho\colon S \to \mathcal{L}(\mathcal{X})$ reprezentáció p-reguláris norma-viselkedésű. Ha $\sigma_{\mathrm{per}}(\rho)$ megszámlálható és $\sigma_{\mathrm{p}}(\rho^*) \cap \{\chi \in S^\sharp : |\chi| = c_\rho\}$ üres, akkor*

$$\lim_{i\to\infty} \frac{1}{\mu(K_i)} \int_{K_i} \frac{\|\rho(s)x\|}{p(s)}\, d\mu(s) = 0$$

igaz minden $x \in \mathcal{X}$-re, ahol $\{K_i\}_i$ tetszőleges Følner sorozat.

Az előző tétel általánosítása [5] korlátos reprezentációkra vonatkozó stabilitási tételének. A 4.2 Tétel spektrális feltételei lényegében megegyeznek [3] cikkben szereplő fő eredmény feltételeivel (ld. [3, Theorem 3.2]). Az alapvető különbségek a két eredmény között a ρ normájára vonatkozó feltételekben és a stablilitást leíró konvergenciában találhatók.

4.3. Reprezentációk és topologikus regularitás. Megjegyezzük, hogy a regularitás értelmezéséhez invariáns közepeket használtunk, ugyanakkor az előző eredmények érvényben maradnak akkor is, ha definícióinkban csupán a topologikusan invariáns közepek szűkebb halmazát használjuk. (A főbb állítások, pl. limeszfunkcionál létezése, izometrikus reprezentáció társítása hasonlóan igazolható, mint korábban.) Diszkrét félcsoportokon ez az értelmezés nem ad újat, hiszen a közepek e két osztálya a diszkrét esetben egybeesik. A következő fejezetben részletesen megvizsgáljuk a második alternatívát a félegyenesen, bevezetve a topologikusan reguláris normafüggvényű reprezentációkat.

5. C_0-félcsoportok és topologikus regularitás

A topologikus regularitást a következő módon definiáljuk. Azt mondjuk, hogy egy $p\colon \mathbb{R}_+ \to [1,\infty)$ függvény *topologikus normalizáló függvény,* ha (i) mérhető, (ii) lokálisan korlátos (azaz minden kompakt halmazon korlátos), (iii) minden $K \subseteq \mathbb{R}_+$ kompakt részhalmazon $\sup_{s\in K}\sup_{t\in\mathbb{R}_+} p_s(t)/p(t) < \infty$, és (iv) minden $s \in \mathbb{R}_+$-re, p_s/p topologikusan majdnem konvergál erős értelemben egy pozitív $c_p(s)$ számhoz. A c_p függvényt a p normalizáló függvény limeszfunkcionáljának nevezzük. A topologikus normalizáló függvények halmazát $\mathcal{P}_{\mathrm{t}}$-vel jelöljük. Az $\mathbb{R}_+$ félegyenes reprezentációit a szokásoknak megfelelően C_0-félcsoportoknak nevezzük a továbbiakban.

5.1. Definíció. A $T\colon \mathbb{R}_+ \to \mathcal{L}(\mathcal{X})$ C_0-félcsoport *reguláris norma viselkedésű a p topologikus normalizáló függvényre nézve* vagy *p-reguláris norma függvényű* ha (i) $\|T(s)\| \le p(s)$ teljesül minden $s \in \mathbb{R}_+$-re, és (ii) at-$\lim_s \|T(s)\|/p(s) = 0$ nem áll fenn.

A reguláris normasorozatok karakterizációja Kérchytől és Müllertől származik [21], [26]. A diszkrét esethez hasonlóan bevezethetjük a regularitási konstansot minden olyan $(T(s))_{s\ge 0}$ félcsoport esetén, ahol $r(T(s)) > 0$ $(s \in \mathbb{R}_+)$. Legyen

$$\kappa_T := \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{s\in\mathbb{R}_+} \left[\left(\frac{1}{n} \int_s^{s+n} r(T(t))^{-1}\|T(t)\|\, dt \right) \left(\sup_{s\le y\le s+n} r(T(y))^{-1}\|T(y)\| \right)^{-1} \right].$$

Világos, hogy $0 \le \kappa_T \le 1$. A regularitási konstans lehetővé teszi, hogy jellemezzük azokat a félcsoportokat, amelyek normafüggvénye topologikusan reguláris. A következő tételt [28]-ban bizonyítottuk.

5.2. Tétel. *Tekintsünk egy $T\colon \mathbb{R}_+ \to \mathcal{L}(\mathcal{X})$ C_0-félcsoportot. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek:*

(i) *létezik olyan $p \in \mathcal{P}_{\mathrm{t}}$, amelyre T normafüggvénye p-reguláris;*
(ii) *létezik olyan folytonos $p \in \mathcal{P}_{\mathrm{t}}$, amelyre T normafüggvénye p-reguláris;*
(iii) *$\|T(s)\| \ge 1$ minden $s \in \mathbb{R}_+$-re és $\kappa_T > 0$.*

6. Katznelson–Tzafriri típusú tétel Hilbert tereken

Az ABLV tétellel rokonságot mutató operátorelméleti állítás a Katznelson–Tzafriri tétel (a két tétel kapcsolatáról ld. [13]). Az $S = \mathbb{Z}_+$ esetben megadjuk a tétel egy kiterjesztését Hilbert tereken.

Jelölje I az identikus leképezést $\mathcal{X}$-en. Ha $f \in A^+(\mathbb{T})$ és $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ hatványkorlátos operátor, akkor értelmezhető $f(T) := \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}(k) T^k \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, ahol $f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}(k)\lambda^k$ és $\sum_{k=0}^{\infty} |\widehat{f}(k)| < \infty$.

Kiindulási pontunk az alábbi észrevétel, amelyet egy lemmában fogalmazunk meg [29, Lemma 2.2].

6.1. Lemma. *Legyen T hatványkorlátos operátor az $\mathcal{X}$ komplex Banach téren és legyen $f \in A^+(\mathbb{T})$. Ekkor minden $\lambda \in \mathbb{T}$ esetén a következő teljesül*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left\| \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{-k} T^k \left(f(T) - f(\lambda) I\right) \right\| = 0.$$

Az uniform ergodikus tétel alapján $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k$ normában nullához konvergál pontosan akkor, ha 1 a T rezolvensének eleme (ld. [27, Theorem 2.7]). Innen az alábbi állítás azonnal adódik [29, Corollary 2.3].

6.2. Következmény. *Legyen T hatványkorlátos operátor az $\mathcal{X}$ Banach téren és $f \in A^+(\mathbb{T})$. Ekkor tetszőleges $\lambda \in \sigma(T) \cap \mathbb{T}$ esetén,*

$$f(\lambda) = 0 \quad \textit{akkor és csak akkor, ha} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left\| \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{-k} T^k f(T) \right\| = 0.$$

Következő eredményünk Hilbert terekre vonatkozik [29, Theorem 2.1].

6.3. Tétel. *Legyen T hatványkorlátos operátor a $\mathcal{H}$ Hilbert téren. Ha $Q \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ és $TQ = QT$, akkor a következő állítások ekvivalensek:*

(i) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left\| \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{-k} T^k Q \right\| = 0$ *minden* $\lambda \in \sigma(T) \cap \mathbb{T}$*-re,*

(ii) $\lim_{n\to\infty} \|T^n Q\| = 0$.

Továbbá, ha $Q = f(T)$ valamely $f \in A^+(\mathbb{T})$-re, akkor (i) *és* (ii) *ekvivalens az alábbival*

(iii) $f(\lambda) = 0$ *minden* $\lambda \in \sigma(T) \cap \mathbb{T}$*-re.*

A bizonyítás során részben Vũ módszerét ([39], [40]) követjük, azaz a problémát izometriára redukálva először (i)-ből kiindulva az erős konvergenciát igazoljuk (ii)-ben. A bizonyítást ultrahatványok alkalmazásával fejezzük be.

Nyitott marad az a probléma, hogy milyen hasonló állítás bizonyítható C_0-félcsoportokra, illetve általánosabb reprezentációkra. További kérdés, hogy Hilbert tér helyett vehetünk-e általánosabb tereket, pl. L^p-teret $(1 < p < \infty)$ vagy szuperreflexív Banach teret.

Hivatkozások

1. B. Basit and A.J. Pryde, Ergodicity and stability of orbits of unbounded semigroup representations, *J. Aust. Math. Soc.*, **77** (2004), 209–232.
2. C.J.K. Batty, Asymptotic behaviour of semigroups of operators, in: Functional analysis and operator theory (J. Zemánek, ed.), *Banach Center Publ.* **30**, Warsaw (1994), 35–52.
3. C.J.K. Batty and S.B. Yeates, Weighted and local stability of semigroups of operators, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **129** (2000), 85–98.
4. C.J.K. Batty and S. Yeates, Extensions of semigroups of operators, *J. Operator Theory*, **46** (2001), 139–157.
5. C.J.K. Batty and Q. P. Vũ, Stability of strongly continuous representations of Abelian semigroups, *Math. Z.*, **209** (1992), 75–88.
6. H. Bercovici, On the iterates of a completely nonunitary contraction, Topics in Operator Theory: Ernst D. Hellinger memorial volume, *Operator Theory Adv. Appl.* **48**, Birkhauser, Basel, 1990, 185–188.
7. G. Cassier, Semigroups in finite von Neumann algebras, *Operator Theory Adv. Appl.* **127**, Birkhäuser Verlag, Basel 2001, 145–162.
8. G. Cassier, Generalized Toeplitz operators, restrictions to invariant subspaces and similarity problems, *J. Operator Theory,* **53** (2005), 49–89.
9. R. Chill and Y. Tomilov, Stability of operator semigroups: ideas and results, *Banach Center Publ.* **75**, Warsaw, 2007, 71–109.

10. E.B. Davies, *One-parameter semigroups,* Academic Press, London, 1980.
11. K.-J. Engel and R. Nagel, *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations,* Springer–Verlag, New York, 1999.
12. J. Esterle, Quasimultipliers, representation of H^∞, and the closed ideal problem for commutative Banach algebras, in: Radical Banach Algebras and automatic continuity, *Lecture Notes in Math.* **975** (1983), Springer, 66–162.
13. J. Esterle, E. Strouse and F. Zouakia, Theorems of Katznelson–Tzafriri type for contractions, *J. Funct. Anal.*, **94** (1990), 273–287.
14. J. Esterle, E. Strouse and F. Zouakia, Stabilité asymptotique de certains semi-groupes d'opérateurs et idéaux primaires de $L^1(\mathbb{R}_+)$, *J. Operator Theory*, **28** (1992), 203–227.
15. E.E. Granirer, On some properties of the Banach algebras $A_p(G)$ for locally compact groups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **95** (1985), 375–381.
16. E. Hille, *Methods in Classical and Functional Analysis*, Addison-Wesley, London, 1972.
17. L. Kérchy and J. van Neerven, Polynomially bounded operators whose spectrum on the unit circle has measure zero, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **63** (1997), 551–562.
18. Y. Katznelson and L. Tzafriri, On power bounded operators, *J. Funct. Anal.*, **68** (1986), 313–328.
19. L. Kérchy, Operators with regular norm-sequences, *Acta Sci. Math.* (*Szeged*), **63** (1997), 571–605.
20. L. Kérchy, Representations with regular norm-behaviour of discrete abelian semigroups, *Acta Sci. Math.* (*Szeged*), **65** (1999), 701–726.
21. L. Kérchy, Criteria of regularity for norm-sequences, *Integral Equations Operator Theory,* **34** (1999), 458–477.
22. L. Kérchy, Unbounded representations of discrete abelian semigroups, *Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.* **42**, Birkhauser, Boston 2000, 141–150.
23. L. Kérchy, Generalized Toeplitz operators, *Acta Sci. Math.* (*Szeged*), **68** (2002), 373–400.
24. L. Kérchy, Elementary and reflexive hyperplanes of generalized Toeplitz operators, *J. Operator Theory,* **51** (2004), 387–409.
25. L. Kérchy and Z. Léka, Representations with regular norm-behaviour of locally compact abelian semigroups, *Studia Math.,* **183** (2007), 143–160.
26. L. Kérchy and V. Müller, Criteria of regularity for norm-sequences. II, *Acta Sci. Math.* (*Szeged*), **65** (1999), 131–138.
27. U. Krengel, *Ergodic Theorems*, de Gruyter, Berlin, 1985.
28. Z. Léka, A characterization of C_0-semigroups with regular norm-function, *Acta Sci. Math.* (*Szeged*), **74** (2008), 863–883.
29. Z. Léka, A Katznelson–Tzafriri type theorem in Hilbert spaces, megjelenés alatt.
30. G.G. Lorentz, A contribution to the theory of divergent sequences, *Acta Math.*, **80** (1948), 167–190.
31. Y.I. Lyubich, *Introduction to the Theory of Banach Representations of Groups,* Birkhäuser, Basel, 1988.
32. Y.I. Lyubich and Vũ Qûoc Phóng, Asymptotic stability of linear differential equations on Banach spaces, *Studia Math.*, **88** (1988), 37–42.
33. H.S. Mustafayev, The Banach algebra generated by a contraction, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **134** (2006), 2677-2683.
34. H.S. Mustafayev, The behavior of the radical of the algebras generated by a semigroup of operators on Hilbert space, *J. Operator Theory*, **57** (2007), 19–34.
35. O. Nevanlinna, *Convergence of Iterations for Linear Equations,* Birkhäuser, Basel, 1993.
36. A.L.T. Paterson, *Amenability,* Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1988.
37. W. Rudin, Invariant means on L^∞, *Studia Math.*, **44** (1972), 219–227.
38. J.D. Stafney, Arens multiplication and convolution, *Pacific J. Math*, **14** (1964), 1423–1447.
39. Q. P. Vũ, A short proof of the Y. Katznelson and L. Tzafriri's theorem, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **115** (1992), 1023–1024.
40. Q. P. Vũ, Theorems of Katznelson–Tzafriri type for semigroups of operators, *J. Funct. Anal.*, **103** (1992), 74–84.
41. Q.P. Vũ, Semigroups with nonquasianalytic growth, *Studia Math.*, **104** (1993), 229–241.
42. S. B. Yeates, Non-quasianalytic representations of semigroups: their spectra and asymptotics, *D.Phil. Thesis*, Oxford University, 1998.
43. J. Zemánek, On the Gelfand-Hille theorems, in: Functional analysis and operator theory (J. Zemánek, ed.), *Banach Center Publ.* **30**, Warsaw (1994), 369–385.