Doktori értekezés tézisei

Kombinatorikus teljesen 0-egyszerű félcsoportok és szabad spektrum

Kátai-Urbán Kamilla

Témavezetők: Dr. Megyesi László, egyetemi docens
Dr. Szabó Csaba, egyetemi docens

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
Szegedi Tudományegyetem
Bolyai Intézet
2009

Bevezetés

A „kifejezések”– speciálisan a „szavak” – mindig központi szerepet játszottak az algebrai vizsgálatokban. Szemléletesen szólva a *kifejezések* változókból és műveleti jelekből felépített olyan jelsorozatok, amelyek adott típusú algebrák esetén „kiértékelhetők”, azaz végrehajtható műveletsorozatot írnak elő, akármilyen elemeket is helyettesítünk a változók helyére. Kifejezés például egy Boole-kifejezés a Boole-algebrák körében, egy egész együtthatós polinom a gyűrűk körében, illetve változók és azok inverzeinek egy sorozata a csoportok körében. Ha egy kifejezést egy megfelelő típusú algebrán az összes lehetséges módon kiértékelünk, akkor egy függvényt – n-változós kifejezés esetén n-változós függvényt – kapunk az algebra felett. Az így kapható függvényeket az algebra *kifejezésfüggvényeinek* hívjuk. Például a Boole-függvények a Boole-kifejezésekhez tartozó kifejezésfüggvények a kételemű Boole-algebra felett. Két kifejezést *ekvivalensnek* tekintünk egy adott algebra felett, ha nincs olyan kiértékelés, amely mellett a két kifejezés különböző értéket vesz fel, azaz, ha a két kifejezés ugyanazt a kifejezésfüggvényt határozza meg az algebrán. Egy algebra kifejezésfüggvényeinek száma az algebra fontos jellemzője. Például közismert, hogy a kételemű Boole-algebra felett az összes függvény, azaz összes Boole-függvény kifejezésfüggvény. Hasonlóan jól ismert tény, hogy ha egy véges test esetében az összes elemet, mint konstanst, azaz mint 0-változós műveletet, felvesszük alapműveletnek a szokásos alapműveletek mellé, akkor az így kapott algebra felett minden függvény kifejezésfüggvény. Nyilvánvaló, hogy egy k-elemű algebra felett pontosan akkor áll elő minden függvény kifejezésfüggvényként, ha az n-változós kifejezésfüggvények száma k^{k^n}.

Algebrák egy osztályán valamely azonosság teljesülése ebben a terminológiában azt jelenti, hogy az azonosságot alkotó két kifejezés ekvivalens az osztály összes algebrája felett; röviden: a két kifejezés ekvivalens az osztály felett. Az azonosságokkal definiálható osztályt *varietásnak* nevezik. Például vartietás az összes csoportok osztálya, az Abel-csoportok osztálya, a Boole-algebrák osztálya, a gyűrűk osztálya, stb. Ismert, hogy tetszőleges $\mathcal{V}$ varietásban minden X halmaz esetén létezik úgynevezett *X által generált szabad algebra*, és izomorfiától eltekintve egyértelműen meghatározott. A „szabad" jelző arra utal, hogy ez a „legáltalánosabb" X által generált algebra $\mathcal{V}$-ben abban az értelemben, hogy minden X által generált $\mathcal{V}$-beli algebra ennek homomorf képe. Az X által generált $\mathcal{V}$-beli szabad algebra egyik modellje az az $\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X)$ algebra, amelynek elemei a kifejezések $\mathcal{V}$ feletti ekvivalenciaosztályai, és amelynek alapműveleteit a kifejezésekre természetes módon adódó alapműveletek indukálják. Ha $|X| = n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$, akkor $\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X)$ helyett $\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)$-et írunk. Így $|\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)|$ éppen a $\mathcal{V}$ felett „lényegesen különböző", azaz páronként nemekvivalens n-változós kifejezések száma. Bennünket olyan $\mathcal{V}$ varietások érdekelnek, ahol $\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)$ minden n-re véges, azaz $\mathcal{V}$-ben minden végesen generált algebra véges. Ekkor a *$\mathcal{V}$ varietás szabad spektrumán* az $|\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)|$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ sorozatot értjük. Például a Boole-algebrák varietásának szabad spektruma $|\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)| = 2^{2^n}$ $(n \in \mathbb{N}_0)$.

Ha a $\mathcal{V}$ varietás *végesen generált*, azaz $\mathcal{V}$-t egy $\mathbf{A}$ véges algebra generálja, akkor könnyen látható, hogy $|\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)|$ éppen az $\mathbf{A}$ feletti kifejezésfüggvények száma. Speciálisan, ha $\mathbf{A}$ elemszáma k, akkor $|\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)| \leq k^{k^n}$. Másrészt, ha $k \geq 2$, akkor $|\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)| \geq n$. Azonban az adott korlátok között sem lehet tetszőleges a szabad spektrum, erről szólnak az úgynevezett hézagtételek. Például, ha a $\mathcal{V}$ varietás végesen generált, akkor vagy van olyan c pozitív valós és k pozitív egész szám, amelyre $|\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)| \leq cn^k$, vagy pedig $|\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)| \geq 2^{n-k}$ teljesül valamely k pozitív egészre és bármely n-re (Theorem 12.2, [HM]). J. Berman [Be] a téma egy másik megközelítését adta: az egyszerű algebrák által generált varietások szabad spektrumát a szelíd kongruenciák nyelvén jellemezte.

Végesen generált varietásoknál gyakran szoros kapcsolat van a generáló algebra struktúrája és a varietás szabad spektruma között. G. Higman [Hi] és P. Neumann [Ne] bizonyította, hogy ha $\mathbf{G}$ véges csoport, akkor a $\mathbf{G}$ által generált varietásban az n elem által generált relatívan szabad csoport mérete pontosan akkor exponenciális n-ben, ha $\mathbf{G}$ nilpotens, egyébként pedig dupla-exponenciális.

Egy n-változós kifejezésfüggvény nem feltétlenül függ az összes változójától, azaz nem valódi n-változós kifejezésfüggvény. Az $\mathbf{A}$ algebra feletti valódi n-változós kifejezésfüggvények számát $p_n(\mathbf{A})$-val szokás jelölni, és a $p_n(\mathbf{A})$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ sorozat neve: az $\mathbf{A}$ *algebra p_n-sorozata.* Szoros kapcsolat van az $\mathbf{A}$ algebra p_n-sorozata és az $\mathbf{A}$ által generált $\mathcal{V}$ varietás szabad spektruma között, ugyanis tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$-ra $|\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k(\mathbf{A})$. Az irodalomban számos cikk foglalkozik a p_n-sorozatok általános tulajdonságával, illetve azzal, hogy milyen összefüggések vannak az algebra és a p_n-sorozatának tulajdonságai között. Félcsoportok p_n-sorozatainak tulajdonságait vizsgálták a következő dolgozatokban. A [CDR1], [CR] cikkekben leírták az összes olyan véges félcsoportot, amelyek p_n-sorozatára van polinom korlát, azaz, van olyan k pozitív egész, amelyre $p_n \leq n^k$. A [CDR2] dolgozatban megadták a korlátos p_n-sorozattal rendelkező félcsoportokat félhálók, Boole-csoportok és derékszögű kötegek nilpotens bővítéseként.

Félcsoport-varietások szabad spektrumáról keveset lehetett tudni, mielőtt Szabó Csaba és a szerző elkezdte a félcsoportok szabad spektrumának szisztematikus vizsgálatát. Az értekezés az elért eredményeket tartalmazza. Ahogy a véges egyszerű csoportok tekinthetők a véges csoportok építőköveinek, úgy a véges félcsoportok építőkövei a véges teljesen 0-egyszerű félcsoportok. A kombinatorikus teljesen 0-egyszerű félcsoportok 9 varietást generálhatnak. Ezek mindegyike generálható egyetlen kombinatorikus teljesen 0-egyszerű félcsoporttal. A disszertációban ezen varietások szabad spektrumára adunk becslést.

Vizsgálataink során a következő módszereket alkalmazzuk. A kombinatorikus teljesen 0-egyszerű félcsoportok Rees-reprezentációjánál a félcsoportok elemeit elempárokként ábrázolják. Ez indokolja, hogy az ilyen algebrák feletti kifejezések esetén jól tudjuk alkalmazni a páros gráfokat. A páros gráfok összefüggő komponensei a pontosztályokon partíciókat indukálnak. A partíciók számát becsülve adnuk becslést az úgynevezett ötelemű kombinatorikus Brandt-félcsoport által generált varietás szabad spektrumára. A kombinatorikus teljesen 0-egyszerű félcsoportok által generált 9 varietás közül egy esetében célszerű a kifejezésekhez páros gráfok helyett irányított gráfokat rendelni. Ekkor az irányított gráfokon vett zárt Euler-séták számát becsüljük, és ezt alkalmazzuk a varietás szabad spektrumának becsléséhez. Eredményeink összefoglalását az 1. táblázat tartalmazza, ahol $f(n) \sim g(n)$ azt jelöli, hogy $\lim_{n\to\infty} f(n)/g(n) = 1$, valamint $\sim_{\log}$ azt, hogy $\log f(n) \sim \log g(n)$ teljesül.

Az értekezésben szereplő eredmények a [KSz1], [KSz2], illetve [KSz3] dolgozatokban találhatók. Kutatásaink nyomán a következő vizsgálatok születtek. S. Seif [Se] bizonyította, hogy egy nem ortodox monoid által generált $\mathcal{V}$ varietásra $\log |\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)|$ (mint n függvénye) mindig exponenciális. I. Dolinka [Do] Higman–Neuman-típusú feltételt adott arra, hogy a félcsoportok egy osztályának szabad spektruma mikor nem log-exponenciális. Kötegvarietások p_n-sorozatát vizsgálták [PW]-ben, [PSz]-ben és [Pl]-ben.

Előzmények

Az „egyszerű” kifejezésnek különbözik a jelentése az univerzális algebrában és a félcsoportelméletben. Az univerzális algebrában egy algebrát egyszerűnek neveznek, ha nincs valódi nemtriviális kongruenciája. A félcsoportelméletben az ilyen félcsoportokat *kongruenciamentesnek* nevezik, és az olyan félcsoportot hívják *egyszerűnek*, amely nem tartalmaz valódi ideált. A 0-*egyszerű* félcsoport fogalma az utóbbi megfelelője a zéruselemes félcsoportok körében. Egy zéruselemes félcsoport *nullfélcsoport*, ha bármely két elemének szorzata 0-val egyenlő. Megjegyezzük, hogy ha egy zéruselemes félcsoport kongruenciamentes és nem kételemű nullfélcsoport, akkor szükségképpen 0-egyszerű is. Minden véges 0-egyszerű félcsoport úgynevezett *teljesen* 0-*egyszerű* félcsoport is, így a véges zéruselemes félcsoportok körében a kételemű nullfélcsoport kivételével minden kongruenciamentes félcsoport teljesen 0-egyszerű is. A teljesen 0-egyszerű félcsoportok alapvető szerepet játszanak a félcsoportelméletben, többek között azért, mert szerkezetük jól kezelhető: az úgynevezett Rees-mátrixkonstrukcióval megadható. Ennek egy speciális esetét ismertetjük a következő bekezdésben. Egy félcsoportot *kombinatorikusnak* nevezünk, ha csak triviális csoportot tartalmaz részfélcsoportként.

Legyen Λ és I nemüres halmaz, továbbá $M = (m_{\lambda,i})$ olyan $\Lambda \times I$ típusú mátrix, amely csak 0-t és 1-et tartalmaz, és minden sora és minden oszlopa tartalmaz legalább egy 1-et. Az $(I \times \Lambda) \cup \{0\}$ halmazon bevezetjük a következő műveletet:

$$(i,\lambda)(j,\mu) = \begin{cases} (i,\mu), & \text{ha } m_{\lambda,j} = 1, \\ 0, & \text{ha } m_{\lambda,j} = 0, \end{cases}$$
$$(i,\lambda)0 = 0(i,\lambda) = 00 = 0.$$

Így kombinatorikus félcsoportot kapunk, amelyet kombinatorikus Rees-mátrixfélcsoportnak nevezünk. Egy ilyen Rees-mátrixfélcsoportot (innen jön az elnevezés) mátrixokból álló félcsoportként is elképzelhetünk. Feleltessük meg a 0 elemnek az $I \times \Lambda$ típusú zérusmátrixot, az (i,λ) alakú elemnek pedig azt a mátrixot, ami $I \times \Lambda$ típusú, és pontosan egy nem 0 elemet tartalmaz, mégpedig 1-t, a mátrix i-edik sorának és λ-adik oszlopának metszéspontjában. Könnyen ellenőrizhető, hogy az eredeti félcsoporttal izomorf zéruselemes félcsoportot kapunk, ha a műveltet a következőképpen értelmezzük ezen mátrixok halmazán: $A \circ B = AMB$, ahol a jobb oldalon a szokásos mátrixszorzást kell elvégezni. Az M mátrixot ezért *szendvicsmátrixnak* nevezik. Ennek a konstrukciónak a jelentőségét az adja, hogy a kombinatorikus teljesen 0-egyszerű félcsoportok izomorfiától eltekintve éppen a kombinatorikus Rees-mátrixfélcsoportok.

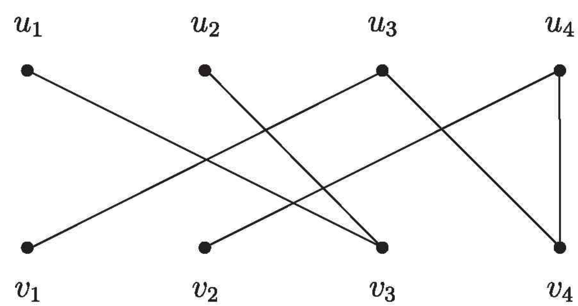
N. Reilly [Re] bizonyította, hogy pontosan 9 olyan varietás van, amit kombinatorikus teljesen 0-egyszerű félcsoportok generálnak (ld. 1. táblázat 1. oszlopa). Ezen varietások mindegyike generálható egyetlen véges kombinatorikus 0-egyszerű félcsoporttal (ld. 1. táblázat 2. oszlopa), de ez a félcsoport izomorfia erejéig nem egyértelműen meghatározott.

varietás	generáló félcsoport	szendvics-mátrix (M)	a varietás szabad spektruma
$\mathcal{SL}$	$\mathbf{Y}$	$[1]$	$2^n - 1$
$\mathcal{LNB}$	$\mathbf{L}$	$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$	$n2^{n-1}$
$\mathcal{RNB}$	$\mathbf{R}$	$\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}$	$n2^{n-1}$
$\mathcal{NB}$	$\mathbf{N}$	$\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$	$n(n+1)2^{n-2}$
$\mathcal{B}$	$\mathbf{B_2}$	$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$	$\sim_{\log} n^{2n}$
$\mathcal{LNB}_2$	$\mathbf{L_2}$	$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$	$\sim_{\log} n^{2n}$
$\mathcal{RNB}_2$	$\mathbf{R_2}$	$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}$	$\sim_{\log} n^{2n}$
$\mathcal{NB}_2$	$\mathbf{N_2}$	$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}$	$\sim_{\log} n^{2n}$
$\mathcal{A}$	$\mathbf{A_2}$	$\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$	$\sim n^2 2^{n^2}$

1. táblázat.

Szabó Cs. és S. Seif az [SSz1]-ben és az [SSz2] cikkben kombinatorikus teljesen 0-egyszerű félcsoportok felett vizsgálta a kifejezések ekvivalenciáját. Ezt két esetre lehet szétbontani aszerint, hogy a félcsoporthoz tartozó M szendvicsmátrix (ld. 1. táblázat 3. oszlopa) úgynevezett 1-blokk mátrix-e, vagy sem. A kifejezések kiértékelésekor fontos szerepe van annak, hogy mely változók követik egymást. Ezeket az összefüggéseket gráfok segítségével tehetjük szemléletesebbé.

A Rees-reprezentációnál láttuk, hogy egy kombinatorikus teljesen 0-egyszerű félcsoport elemeire gondolhatunk úgy, mint elempárokra, ezért célszerű a kifejezésekhez is páros gráfokat rendelni. Legyen $t = t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ egy n-változós kifejezés, rendeljük t-hez a $G(t)$ páros gráfot az alábbi módon. Legyen a $G(t)$ páros gráf „felső" ponthalmaza $\{u_1, \ldots, u_n\}$, az „alsó" ponthalmaza $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Ily módon minden változónak két csúcsot feleltetünk meg. A kifejezések kiértékelésénél a változókhoz rendelt elempárokhoz a megfelelő pontpárok tartoznak. A v_i pontból vezet él u_j-be a páros gráfban, ha az x_i változót x_j követi valahol a t kifejezésben, vagyis $x_i x_j$ részkifejezés t-ben. Így egy kiértékelésről könnyen el lehet dönteni, hogy milyen eredményt ad. Az 1. ábra a $t = x_1x_3x_2x_4x_4x_3x_1x_3x_2$ kifejezéshez tartozó $G(t)$ páros gráfot ábrázolja. Azt mondjuk, hogy az ábrán látható páros gráf



1. ábra.
$t = x_1x_3x_2x_4x_4x_3x_1x_3x_2$

komponensei az $\{u_1, u_2, v_3\}$ és $\{u_3, u_4, v_1, v_2, v_4\}$ ponthalmazok. Megjegyezzük, hogy a komponens fogalmát nem a hagyományos értelemben használjuk, ugyanis most csak pontokat tartalmaz, éleket nem. Egy páros gráf komponensei *partíciókat indukálnak* a páros gráf pontosztályain, például az 1. ábrán a felső pontosztályon az $\{\{u_1, u_2\}, \{u_3, u_4\}\}$ partíciót, az alsó pontosztályon pedig a $\{\{v_1, v_2, v_4\}, \{v_3\}\}$ partíciót indukálják. Ezen partíciók számának becslése az egyik módszerünk a szabad spektrum meghatározásában.

Az 1. táblázatban $\mathbf{A_2}$ az egyetlen olyan félcsoport, amihez tartozó szendvicsmátrix nem 1-blokk mátrix. Ebben az esetben egy kifejezéshez a következő, természetes módon adódó, többszörös él nélküli irányított gráfot rendeljük. Az irányított gráf annyi pontot tartalmazzon, ahány változó szerepel a kifejezésben. Ha $x_i x_j$ részkifejezés, akkor az x_i változónak megfelelő pontból vezessen él az x_j-nek megfelelő pontba.

Kombinatorikus teljesen 0-egyszerű félcsoportok által generált varietások szabad spektruma

Kötegnek nevezzük az olyan félcsoportot, amelynek minden eleme idempotens. Az 1. táblázat első négy sorában szereplő varietások kötegvarietások, mégpedig rendre a félhálók, a balnormális kötegek, a jobbnormális kötegek, illetve a normális kötegek varietása. Bár ezen varietások szabad spektruma közismert, levezetjük a teljesen 0-egyszerű félcsoportoknál alkalmazott módszerekkel is.

A $\mathcal{B}$ varietást a $\mathbf{B_2}$ félcsoport, az úgynevezett ötelemű kombinatorikus Brandt-félcsoport generálja. Igazoltuk [KSz1]-ben, hogy minden olyan partíciópárhoz, melyek osztályainak száma megegyezik, megadható egy-egy olyan t kifejezés, amely $\mathbf{B_2}$-n valódi n-változós kifejezésfüggvényt definiál, és a hozzá tartozó $G(t)$ páros gráf komponensei éppen ezen partíciókat indukálják a gráf pontosztályain. Az indukált partíciók számát becsülve aszimptotikus formulát kapunk a $\mathbf{B_2}$ félcsoport p_n-sorozatára.

4.8. Tétel. [KSz1] *Jelölje $p_n = p_n(\mathbf{B_2})$ a $\mathbf{B_2}$ feletti valódi n-*

változós kifejezésfüggvények számát. Ekkor

$$\log p_n \sim 2n \log n.$$

Az előző eredményt felhasználva a $\mathcal{B}$ szabad spektrumára a következő becslés adódik.

4.9. Tétel. [KSz1]

$$\log |\mathbf{F}_{\mathcal{B}}(n)| \sim 2n \log n.$$

Az alábbi állítás az $\mathbf{N_2}$, $\mathbf{L_2}$, $\mathbf{R_2}$ félcsoportok p_n-sorozatainak, illetve a $p_n(\mathbf{B_2})$-sorozatnak a viszonyát írja le.

4.10. Állítás. [KSz3] *Az $\mathbf{N_2}$, $\mathbf{L_2}$, $\mathbf{R_2}$ félcsoportok feletti valódi n-változós kifejezésfüggvények száma kielégíti az alábbi egyenlőtlenségeket:*

$$p_n(\mathbf{B_2}) \leq p_n(\mathbf{L_2}) = p_n(\mathbf{R_2}) \leq p_n(\mathbf{N_2}) \leq n^2 p_n(\mathbf{B_2}).$$

Az előző két eredmény alapján a következő összefüggést kapjuk.

4.11. Tétel. [KSz3] *Jelölje $\mathcal{V}$ az $\mathcal{LNB}_2$, $\mathcal{RNB}_2$, $\mathcal{NB}_2$ varietások valamelyikét. Ekkor*

$$\log |\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)| \sim 2n \log n.$$

A korábbiakban említettük, hogy az $\mathbf{A_2}$ félcsoport esetén a kifejezésekhez irányított gráf rendelhető. Az $\mathbf{A_2}$ feletti valódi n-változós kifejezésfüggvények számát a zárt Euler-sétával rendelkező irányított n pontú gráfok számával becsüljük. Ehhez szükségünk van a következő állításra.

4.13. Állítás. [KSz2] *Jelölje $D(n)$ azon n pontú irányított gráfok számát, amelyek rendelkeznek zárt Euler-sétával. Ekkor $D(n) = o(2^{n^2})$.*

A 4.13. Állítás segítségével asszimptotikus becslést adhatunk a $\mathcal{A}$ varietás szabad spektrumára.

4.14. Tétel. [KSz2]

$$|\mathbf{F}_{\mathcal{A}}(n)| \sim n^2 2^{n^2}.$$

Eredményeink összefoglalása az 1. táblázat 4. oszlopában található, azaz becslést adtunk az összes olyan varietás szabad spektrumára, amelyet kombinatorikus teljesen 0-egyszerű félcsoportok generálnak.

A $\mathcal{B}, \mathcal{LNB}_2, \mathcal{RNB}_2, \mathcal{NB}_2$ varietások szabad spektrumára adott becslések megegyeznek, pedig a varietások között a $\mathcal{B} < \mathcal{LNB}_2 < \mathcal{NB}_2$ és a $\mathcal{B} < \mathcal{RNB}_2 < \mathcal{NB}_2$ relációk állnak fenn. A páros gráf pontosztályain indukált partíciók elemszámát vizsgálva pontosíthatjuk a p_n-sorozatok számára adott korábbi korlátokat. A következő állítás $p_n(\mathbf{B_2})$-re ad meg az eddiginél jobb alsó és felső korlátot.

4.16. Állítás. [KSz3] *A $\mathbf{B_2}$ félcsoport p_n-sorozatára az alábbi egyenlőtlenségek teljesülnek:*

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 S(n,k)^2 + 2\sum_{k=1}^{n-1} n(k-1)S(n-1,k)^2 +$$
$$+\sum_{k=1}^{n-1} n(n-1)S(n-2,k)^2 \leq p_n(\mathbf{B_2}) \leq \sum_{k=1}^{n} k^2 k! S(n,k)^2 +$$
$$+2\sum_{k=1}^{n-1} n(k-1)(k-1)! S(n-1,k)S(n,k) + \sum_{k=1}^{n-1} n(n-1)k! S(n-1,k)^2$$

Hasonló becslések adhatók meg az $\mathbf{L_2}$, $\mathbf{R_2}$ és az $\mathbf{N_2}$ félcsoportok p_n-sorozataira is. Az ezen félcsoportok feletti kifejezések ekvivalenciájánál az első és utolsó változók megválasztásának is szerepe van. Ebből adódik, hogy az összegzéseknél más együtthatókat kapunk.

Hivatkozások

[Be] J. Berman, *Free spectra gaps and tame congruence types*, Int. J. Algebra Comput. **5** (1995), 651–672.

[CDR1] S. Crvenković, I. Dolinka, N. Ruškuc, *The Berman conjecture is true for finite surjective semigroups and their inflations*, Semigroup Forum **62** (2001), 103–114.

[CDR2] S. Crvenković, I. Dolinka, N. Ruškuc, *Finite semigroups with few term operations*, J. Pure Appl. Algebra **157** (2001), 205–214.

[CR] S. Crvenković, N. Ruškuc, *Log-linear varieties of semigroups*, Algebra Universalis **33** (1995), 370–374.

[Do] I. Dolinka,*On free spectra of finite completely regular semigroups and monoids*, J. Pure Appl. Algebra, submitted.

[Hi] G. Higman, *The order of relatively free groups*, Proc. Internat. Conf. Theory of Groups, Canberra 1965, Gordon and Breach Pub., 1967, pp. 153–163.

[HM] D. Hobby, R. McKenzie, *The structure of finite algebras*, Contemporary Mathematics no. 76, Amer. Math. Soc., Providence, 1988.

[KSz1] K. Kátai-Urbán, Cs. Szabó, *Free spectrum of the variety generated by the five element combinatorial Brandt semigroup*, Semigroup Forum **73** (2006), 253–260.

[KSz2] K. Kátai-Urbán, Cs. Szabó, *Free spectrum of the variety generated by the combinatorial completely* 0*-simple semigroups*, Glasgow Math. J. **49** (2007), 93–98.

[KSz3] K. Kátai-Urbán, Cs. Szabó, *The* p_n *sequence of semigroup varieties generated by combinatorial* 0*-simple semigroup*, Algebra Universalis **59** (2008), 435–446.

[MW] L. Moser, M. Wyman, *An asymptotic formula for the Bell-numbers*, Trans. Royal Soc. Can. **49** (1955), 49–54.

[Ne] P. Neumann, *Some indecomposable varieties of groups*, Quart. J. Math. Oxford **14** (1963), 46–50.

[PW] G. Pluhár, J. Wood, *The free spectra of varieties generated by idempotent semigroups*, Algebra Discr. Math. (2008), 89–100

[PSz] G. Pluhár, Cs. Szabó, *The free spectrum of the variety of bands*, Semigroup Forum **76** (2008), 576–578.

[Pl] G. Pluhár, *Szavak száma idempotens félcsoportokban – Kötegvarietások szabad spektruma*, Mat. Lapok (N.S.) **13** (2008), 44–53.

[Re] N. Reilly, *Varieties generated by completely 0-simple semigroups,* manuscript.

[Se] S. Seif, *Monoids with sub-log-exponential free spectra*, J. Pure Appl. Algebra **212** (2008), 1162–1174.

[SSz1] S. Seif, Cs. Szabó, *Algebra complexity problems involving graph homomorphisms, semigroups and the constraint satisfaction problem*, J. Complexity **19** (2003), 153–160.

[SSz2] S. Seif, Cs. Szabó, *Computational complexity of checking identities in 0-simple semigroups and matrix semigroups over finite fields*, Semigroup Forum **72** (2006), 207–222.