Kombinatorikus teljesen 0-egyszerű félcsoportok és szabad spektrum

Ph.D. értekezés

Kátai-Urbán Kamilla

Témavezetők: Dr. Megyesi László
Dr. Szabó Csaba

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
Bolyai Intézet
SZTE TTIK
2009
Szeged

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

A „kifejezések”– speciálisan a „szavak” – mindig központi szerepet játszottak az algebrai vizsgálatokban. Szemléletesen szólva a kifejezések változókból és műveleti jelekből felépített olyan jelsorozatok, amelyek adott típusú algebrák esetén „kiértékelhetők”, azaz végrehajtható műveletsorozatot írnak elő, akármilyen elemeket is helyettesítünk a változók helyére. Kifejezés például egy Boole-kifejezés a Boole-algebrák körében, egy egész együtthatós polinom a gyűrűk körében, illetve változók és azok inverzeinek egy sorozata a csoportok körében. Ha egy kifejezést egy megfelelő típusú algebrán az összes lehetséges módon kiértékelünk, akkor egy függvényt – n-változós kifejezés esetén n-változós függvényt – kapunk az algebra felett. Az így kapható függvényeket az algebra kifejezésfüggvényeinek hívjuk. Például a Boole-függvények a Boole-kifejezésekhez tartozó kifejezésfüggvények a kételemű Boole-algebra felett. Két kifejezést ekvivalensnek tekintünk egy adott algebra felett, ha nincs olyan kiértékelés, amely mellett a két kifejezés különböző értéket vesz fel, azaz, ha a két kifejezés ugyanazt a kifejezésfüggvényt határozza meg az algebrán. Egy algebra kifejezésfüggvényeinek száma az algebra fontos jellemzője. Például közismert, hogy a kételemű Boole-algebra felett az összes függvény, azaz összes Boole-függvény kifejezésfüggvény. Hasonlóan jól ismert tény, hogy ha egy véges test esetében az összes elemet, mint konstanst, azaz mint 0-változós műveletet, felvesszük alapműveletnek a szokásos alapműveletek mellé, akkor az így kapott algebra felett minden függvény kifejezésfüggvény. Nyilvánvaló, hogy egy k-elemű algebra felett pontosan akkor áll elő minden függvény kifejezésfüggvényként, ha az n-változós kifejezésfüggvények száma k^{k^n}.

Algebrák egy osztályán valamely azonosság teljesülése ebben a terminológiában azt jelenti, hogy az azonosságot alkotó két kifejezés ekvivalens az osztály összes algebrája felett; röviden: a két kifejezés ekvivalens az osztály felett. Az azonoságokkal definiálható osztályt *varietásnak* nevezik. Pédául vartietás az összes csoportok osztálya, az Abel-csoportok osztálya, a Boole-algebrák osztálya, a gyűrűk osztálya, stb. Ismert, hogy tetszőleges $\mathcal{V}$ varietásban minden X halmaz esetén létezik úgynevezett *X által generált szabad algebra*, és izomorfiától eltekintve egyértelműen meghatározott. A „szabad” jelző arra utal, hogy ez a „legáltalánosabb” X által generált algebra $\mathcal{V}$-ben abban az értelemben, hogy minden X által generált $\mathcal{V}$-beli algebra ennek homomorf képe. Az X által generált $\mathcal{V}$-beli szabad algebra egyik modellje az az $\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X)$ algebra, amelynek elemei a kifejezések $\mathcal{V}$ feletti ekvivalenciaosztályai, és amelynek alapműveleteit a kifejezésekre természetes módon adódó alapműveletek indukálják. Ha $|X| = n$ ($n \in \mathbb{N}_0$), akkor $\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X)$ helyett $\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)$-et írunk. Így $|\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)|$ éppen a $\mathcal{V}$ felett „lényegesen különböző”, azaz páronként nemekvivalens n-változós kifejezések száma. Bennünket olyan $\mathcal{V}$ varietások érdekelnek, ahol $\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)$ minden n-re véges, azaz $\mathcal{V}$-ben minden végesen generált algebra véges. Ekkor a $\mathcal{V}$ *varietás szabad spektrumán* az $|\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)|$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ sorozatot értjük. Például a Boole-algebrák varietásának szabad spektruma $|\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)| = 2^{2^n}$ $(n \in \mathbb{N}_0)$.

Ha a $\mathcal{V}$ varietás *végesen generált*, azaz $\mathcal{V}$-t egy $\mathbf{A}$ véges algebra generálja, akkor könnyen látható, hogy $|\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)|$ éppen az $\mathbf{A}$ feletti kifejezésfüggvények száma. Speciálisan, ha $\mathbf{A}$ elemszáma k, akkor $|\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)| \leq k^{k^n}$. Másrészt, ha $k \geq 2$, akkor $|\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)| \geq n$. A szabad spektrum az adott korlátok között sem lehet tetszőleges, erről szólnak az úgynevezett hézagtételek, amelyek közül néhány eredményt a 2.2. fejezetben ismertetünk.

Végesen generált varietásoknál gyakran szoros kapcsolat van a generáló algebra struktúrája és a varietás szabad spektruma között. G. Higman [Hi] és P. Neumann [Ne] bizonyította, hogy ha $\mathbf{G}$ véges csoport, akkor a $\mathbf{G}$ által generált varietásban az n-elem által generált relatívan szabad csoport mérete pontosan akkor exponenciális n-ben, ha $\mathbf{G}$ nilpotens, egyébként pedig duplaexponenciális.

J. Berman [Be2] a téma egy másik megközelítését adta, az egyszerű algebrák által generált varietások szabad spektrumait a szelíd kongruenciák nyelvén jellemezte. A szelíd kongruenciák elméletében bevezetett típusok, **1**, **2**, **3**, **4** és **5**, rendre megfelelnek az unér, affin, Boole-, háló- és félhálótípusoknak.

1.1. Tétel. [Be2] *Minden $k \geq 2$-re vannak olyan $d_1, \ldots, d_5$ és c_1, c_2, c_4 konstansok, hogy tetszőleges k-elemű egyszerű $\mathbf{A}$ algebra esetén minden elég nagy n-re az $\mathbf{A}$ által generált $\mathcal{V}$ varietás szabad spektrumára az alábbiak teljesülnek:*

(i) *Ha* $\operatorname{typ}(\mathbf{A}) = \mathbf{1}$, *akkor* $d_1 n \leq |\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)| \leq c_1 n^{\log_2 k}$;

(ii) *Ha* $\operatorname{typ}(\mathbf{A}) = \mathbf{2}$, *akkor* $d_2 k^n \leq |\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)| \leq c_2 k^{(k-1)n}$;

(iii) *Ha* $\operatorname{typ}(\mathbf{A}) = \mathbf{3}$, *akkor* $k^{d_3 k^n} \leq |\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)| \leq k^{k^n}$;

(iv) *Ha* $\operatorname{typ}(\mathbf{A}) = \mathbf{4}$, *akkor* $k^{d_4 k^n/\sqrt{n}} \leq |\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)| \leq k^{c_4 k^n/\sqrt{n}}$;

(v) *Ha* $\operatorname{typ}(\mathbf{A}) = \mathbf{5}$, *akkor* $d_5 k^n \leq |\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)| \leq k^{\sigma(n)}$, *ahol*

$$\sigma(n) = \frac{nk}{n - k(k-1)^3} \binom{n}{(k-1)^3} (k-1)^{n-(k-1)^3}.$$

Látható, hogy az **5**-ös típusra adott becslés a legpontatlanabb. Itt szeretnénk részletesebb eredményeket elérni. Egy nagyon érdekes 5-ös típusú algebraosztály a kombinatorikus teljesen 0-egyszerű félcsoportok osztálya. Így természetes kiindulópontnak tűnik az ezen algebrák által generált varietások szabad spektrumainak vizsgálata.

Félcsoport-varietások szabad spektrumáról keveset lehetett tudni, mielőtt Szabó Csaba és a szerző elkezdte a félcsoportok szabad spektrumának szisztematikus vizsgálatát, az értekezés ezeket az eredményeket tartalmazza. Ahogy a véges egyszerű csoportok tekinthetők a véges csoportok építőköveinek, úgy a véges félcsoportok alapkövei a véges teljesen 0-egyszerű félcsoportok. A kombinatorikus teljesen 0-egyszerű félcsoportok 9 varietást generálnak, ezen varietások szabad spektrumaira adunk becslést. A következő tételt bizonyítjuk az úgyenevezett ötelemű kombinatorikus Brandt-félcsoport által generált varietás szabad spektrumára.

Tétel. [KSz1]

$$\log|\mathbf{F}_{\mathcal{B}}(n)| \sim 2n\log n.$$

Az alábbi tételben a kombinatorikus teljesen 0-egyszerű félcsoportok által generált varietás szabad spektrumára adunk aszimptotikus becslést.

Tétel. [KSz2]

$$|\mathbf{F}_{\mathcal{A}}(n)| \sim n^2 2^{n^2}.$$

Kutatásaink nyomán a következő vizsgálatok születtek. S. Seif [Se] bizonyította, hogy egy nem ortodox monoid által generált $\mathcal{V}$ varietásra $\log|\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)|$ (mint n függvénye) mindig exponenciális. I. Dolinka [Do] Higman-Neuman típusú feltételt adott arra, hogy a félcsoportok egy osztályának szabad spektruma mikor nem log-exponenciális. Köteg varietások p_n-sorozatát vizsgálták a [PW]-ben, a [PSz]-ben és a [Pl]-ben.

Az értekezés 2. fejezetében alapfogalmakat, jelöléseket ismertetünk. Először áttekintünk néhány félcsoportelméleti alapfogalmat. Definiáljuk a teljesen 0-egyszerű félcsoportokat, és megadjuk ezen félcsoportok Rees-féle reprezentációját, valamint a kombinatorikus teljesen 0-egyszerű félcsoportok által generált 9 varietást. Azon kombinatorikus teljesen 0-egyszerű félcsoportokat, amelyeknek fontos szerepe lesz a további vizsgálataink során, definiáló relációkkal is megadjuk. Továbbá a fejezetben univerzális algebrai fogalmakat definiálunk, ahol lehet, csak félcsoportelméleti szemszögből, és ismertetünk néhány szabad spektrumra vonatkozó általános eredményt. A fejezet végén szereplő becslést, amely egy halmaz partícióinak számára ad aszimptotikus formulát, a későbbiekben a 4.2. fejezetben használjuk fel, az úgynevezett ötelemű kombinatorikus Brandt félcsoport által generált varietás szabad spektrumának meghatározásakor. Megjegyezzük, hogy ezek csak aszimptotikus becslések, de a mi esetünkben ezek megfelelőek, hiszen egyelőre a szabad spektrummal kapcsolatos viszgálatok során ennél pontosabb becslésekre nem volt szükség.

A 3. fejezetben a kombinatorikus teljesen 0-egyszerű félcsoportok feletti kifejezések ekvivalenciáját vizsgáljuk S. Seif és Szabó Cs. [SSz1]-ben és [SSz2]-ben található eredményeit felhasználva. A kifejezéseket páros, illetve irányított gráfok segítségével tesszük szemléletesebbé. A kombinatorikus teljesen 0-egyszerű félcsoportok Rees-reprezentációjánál a félcsoportok elemeit elempárokként ábrázolják, ez indokolja, hogy az ilyen típusú algebrák feletti kifejezések esetén páros gráfokat alkalmazzunk.

A 4. fejezet tartalmazza a dolgozat fő eredményeit, azaz, a kombinatorikus teljesen 0-egyszerű félcsoportok által generált összes varietás szabad spektrumára adott becsléseket. A kifejezésekhez páros, illetve irányított gráfokat rendelünk. A páros gráfok összefüggő komponensei a pontosztályokon partíciókat indukálnak, amelyek számát vizsgáljuk a 4.2. fejezetben, és így adunk becslést a szabad spektrumra. A kombinatorikus teljesen 0-egyszerű félcsoportok által generált 9 varietás közül egy esetében célszerű a kifejezésekhez páros gráf helyett irányított gráfot rendelni (ld. 4.4. fejezet), ekkor az irányított gráfokon vett zárt Euler-séták számát becsüljük. A páros gráf pontosztályain indukált partíciók elemszámát vizsgálva a fejezet végén pontosítjuk a p_n-sorozatok számára adott korábbi korlátokat. Eredményeink összefoglalását a 2. táblázat tartalmazza, ezen eredmények a [KSz1], [KSz2], illetve [KSz3] dolgozatokban találhatók.

2. Előzmények

A 2.1. fejezetben ismertetünk néhány félcsoportelméleti alapfogalmat, például, hogy az „egyszerű" kifejezés jelentése különbözik az univerzális algebrában használttól. Valamint ismertetjük a teljesen 0-egyszerű félcsoportok egy szép reprezentációját. A 2.2. fejezetben univerzális algebrai fogalmakat adunk meg, illetve jelöléseket vezetünk be. Végül a 2.3. fejezet néhány fogalmat tartalmaz a partíciókra vonatkozóan.

2.1. Félcsoportok

A továbbiakban ha egy félcsoport tartalmaz zéruselemet, akkor azt 0-val jelöljük, ha pedig egy félcsoport egységelemes, akkor 1 jelöli az egységelemét. Legyen **S** olyan félcsoport, amely nem tartalmaz zéruselemet. Ha S-hez hozzávesszük az új 0 elemet, és kiterjesztjük a szorzást az $S \cup \{0\}$ halmazra olymódon, hogy $0s = s0 = 0$ és $00 = 0$ teljesül bármely S-beli s elemre, akkor az **S** félcsoport *0-elemmel való bővítését* kapjuk, amit $\mathbf{S}^0$-val jelölünk.

A 0-elemmel bővített $\mathbf{G}^0$ csoportot 0-*csoportnak* nevezzük. Az $\mathbf{S}$ félcsoport A nemüres részhalmazát *ideálnak* nevezzük, ha $SA \subseteq A$ és $AS \subseteq A$ teljesül. Egy zéruselemes félcsoport *nullfélcsoport*, ha bármely két elemének szorzata 0-val egyenlő. Egy $\mathbf{S}$ zéruselemes félcsoportot 0-*egyszerűnek* nevezünk, ha nem nullfélcsoport, és $\{0\}$-n valamint $\mathbf{S}$-en kívül nincs más ideálja. Valójában ezt a második feltételt, csak a kételemű nullfélcsoport elégíti ki, mert egy nullfélcsoportban minden részhalmaz ideál. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy az „egyszerű" kifejezésnek különbözik a jelentése az univerzális algebrában és a félcsoportelméletben. Az univerzális algebrában egy algebrát egyszerűnek neveznek, ha nincs valódi nemtriviális kongruenciája. A félcsoportelméletben az ilyen félcsoportokat *kongruenciamentesnek* nevezik, és az olyan félcsoportot hívják egyszerűnek, amely nem tartalmaz valódi ideált. A 0-egyszerű félcsoport fogalma az utóbbi megfelelője a zéruselemes félcsoportok körében. Sőt, a zéruselem nélküli változat tekinthető a zéruselemes változat speciális esetének, hiszen egy egyszerű félcsoport zéruselemmel való bővítése mindig 0-egyszerű. Természetesen nem minden 0-egyszerű félcsoport áll elő ezen a módon. Megjegyezzük, hogy ha egy zéruselemes félcsoport kongruenciamentes és nem kételemű nullfélcsoport, akkor szükségképpen 0-egyszerű is.

Egy félcsoport e elemét *idempotensnek* nevezzük, ha $e^2 = e$ teljesül. *Kötegnek* nevezzük az olyan félcsoportot, amelynek minden eleme idempotens. Egy félcsoport idempotens elemeinek halmazán megadható egy részbenrendezés a következőképpen:

$$e \leq f \text{ pontosan akkor, ha } ef = fe = e.$$

Ez az úgynevezett *természetes részbenrendezés*. Ha egy $\mathbf{S}$ félcsoport tartalmaz zéruselemet, akkor ez az egyetlen minimális elem az idempotens elemek természetes részbenrendezésére nézve. Egy idempotens elemet *primitívnek* neveznek, ha a nem 0 idempotens elemek között minimális, azaz, egy e primitív idempotens elemet a következő tulajdonság definiál: bámely f idempotens elem estén, ha $ef = fe = f \neq 0$ teljesül, akkor $e = f$. Egy félcsoportot *teljesen* 0-*egyszerűnek* nevezünk, ha 0-egyszerű, és tartalmaz primitív idempotens elemet. Fontos megjegyezni, hogy minden véges 0-egyszerű félcsoport teljesen 0-egyszerű is (ld. Proposition 3.2.1 [How]), de léteznek végtelen teljesen 0-egyszerű félcsoportok is. Így a véges zéruselemes félcsoportok körében a kételemű nullfélcsoportot kivételével minden kongruenciamentes félcsoport teljesen 0-egyszerű is.

A következő konstrukció és tétel Rees [Ree] nevéhez fűződik, amelynek segítségével a teljesen 0-egyszerű félcsoportok egy szép és könnyen kezelhető reprezentációját kapjuk. Legyen Λ és I nemüres halmaz, $\mathbf{G}$ pedig csoport. Legyen $M = (m_{\lambda,i})$ olyan $\Lambda \times I$ típusú mátrix, amelynek elemei a $G \cup \{0\}$

halmazból valók, és minden sora és minden oszlopa tartalmaz legalább egy 0-tól különböző, azaz, G-beli elemet. Az $(I\times G\times\Lambda)\cup\{0\}$ halmazon bevezetjük a következő műveletet:

$$(i,g,\lambda)(j,h,\mu)=\begin{cases}(i,gm_{\lambda,j}h,\mu), & \text{ha } m_{\lambda,j}\neq 0,\\ 0, & \text{ha } m_{\lambda,j}=0,\end{cases}$$
$$(i,g,\lambda)0=0(i,g,\lambda)=00=0.$$

Ellenőrizhető, hogy így zéruselemes félcsoportot kapunk. Ezt a félcsoportot $\mathbf{G}^0$ *feletti Rees-mátrixfélcsoportnak* nevezzük, és $\mathcal{M}^0(I,\mathbf{G},\Lambda;M)$-mel jelöljük. Egy Rees-mátrixfélcsoportot (innen jön az elnevezés) mátrixokból álló félcsoportként is elképzelhetünk. Feleltessük meg a 0 elemnek az $I\times\Lambda$ típusú zérus mátrixot, az (i,g,λ) alakú elemnek pedig azt a mátrixot, ami $I\times\Lambda$ típusú, és pontosan egy nem 0 elemet tartalmaz, mégpedig g-t, a mátrix i-edik sorának és λ-adik oszlopának metszéspontjában. Könnyen ellenőrizhető, hogy az eredeti félcsoporttal izomorf zéruselemes félcsoportot kapunk, ha a műveltet a következőképpen értelmezzük ezen mátrixok halmazán: $A\circ B=AMB$, ahol az utóbbi a szokásos mátrixszorzás. Az M mátrixot ezért *szendvicsmátrixnak* nevezik.

A Rees-mátrixfélcsoportok jelentőségét az alábbi tétel adja.

2.1. Tétel. *Minden* 0*-csoport feletti Rees-mátrixfélcsoport teljesen* 0*-egyszerű, és fordítva, minden teljesen* 0*-egyszerű félcsoport izomorf egy* 0*-csoport feletti Rees-mátrixfélcsoporttal.*

A továbbiakban csak 0-csoport feletti Rees-mátrixfélcsoportokkal foglalkozunk, ezért röviden csak Rees-mátrixfélcsoportoknak fogjuk hívni ezeket a félcsoportokat.

Egy félcsoportot *kombinatorikusnak* nevezünk, ha csak triviális csoportot tartalmaz részfélcsoportként. Mivel $\mathcal{M}^0(I,\mathbf{G},\Lambda;M)$-ben $\mathbf{G}_{i,\lambda}=\{(i,g,\lambda)\colon g\in\mathbf{G}\}$ olyan részfélcsoport, ami $\mathbf{G}$-vel izomorf minden olyan i,λ párra, ahol $m_{\lambda,i}\neq 0$, így az $\mathcal{M}^0(I,\mathbf{G},\Lambda;M)$ Rees-mátrixfélcsoport pontosan akkor kombinatorikus, ha $\mathbf{G}$ triviális ($G=\{1\}$). Ebben az esetben a nem 0 elemek $(i,1,\lambda)$ alakúak, így törölhetjük a középső komponenst az elemhármasból, és helyette (i,λ)-t írunk. Az M mátrix csak 0-t és 1-et tartalmaz, és a művelet is egyszerűsödik:

$$(i,\lambda)(j,\mu)=\begin{cases}(i,\mu), & \text{ha } m_{\lambda,j}=1,\\ 0, & \text{ha } m_{\lambda,j}=0,\end{cases}$$
$$(i,\lambda)0=0(i,\lambda)=00=0.$$

N. Reilly [Rei] leírta a teljesen 0-egyszerű félcsoportok által generált varietások hálóját. Bizonyította, hogy pontosan 9 olyan varietás van, amit kombinatorikus teljesen 0-egyszerű félcsoportok generálnak. Ezen varietások mindegyike generálható egyetlen véges kombinatorikus 0-egyszerű félcsoporttal (de ez a félcsoport izomorfia erejéig általában nem egyértelműen meghatározott). Az 1. táblázat soraiban megadjuk ezeket a varietásokat, valamint egy-egy generáló elemüket Rees-mátrixfélcsoport alakban. Pontosabban, a harmadik oszlopban található szendvicsmátrix által definiált Rees-mátrixfélcsoport jele áll a második oszlopban, az elsőben pedig e Rees-mátrixfélcsoport által generált varietás jelölése található.

varietás	generáló félcsoport	szendvics-mátrix (M)
$\mathcal{SL}$	$\mathbf{Y}$	$[1]$
$\mathcal{LNB}$	$\mathbf{L}$	$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$
$\mathcal{RNB}$	$\mathbf{R}$	$\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}$
$\mathcal{NB}$	$\mathbf{N}$	$\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$
$\mathcal{B}$	$\mathbf{B_2}$	$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$
$\mathcal{LNB}_2$	$\mathbf{L_2}$	$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$
$\mathcal{RNB}_2$	$\mathbf{R_2}$	$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}$
$\mathcal{NB}_2$	$\mathbf{N_2}$	$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}$
$\mathcal{A}$	$\mathbf{A_2}$	$\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$

1. táblázat.

Vizsgálataink során a $\mathbf{B_2}$ és $\mathbf{A_2}$ félcsoportoknak kitüntetett szerepe lesz, ezen félcsoportokat definiáló relációkkal is megadjuk a zéruselemes félcsoportok körében:

$$\mathbf{B_2} \cong \langle a, b \mid aba = a, bab = b, a^2 = b^2 = 0\rangle;$$
$$\mathbf{A_2} \cong \langle a, b \mid aba = a, bab = b, a^2 = a, b^2 = 0\rangle.$$

Vegyük észre, hogy $\mathbf{Y}$ a kételemű félháló, $\mathbf{L}$ [$\mathbf{R}$] pedig a kételemű balzéró [jobbzéró] félcsoport 0-elemmel való bővítése. Továbbá $\mathbf{N}$ a kételemű balzéró és a kételemű jobbzéró félcsoport direkt szorzatának 0-elemmel való bővítése. A $\mathbf{B_2}$ félcsoportra a félcsoportelméletben az „ötelemű kombinatorikus Brandt-félcsoport” elnevezést használják.

Az 1. táblázat első négy sorában szereplő varietások kötegvarietások, mégpedig rendre a félhálók, balnormális kötegek, jobbnormális kötegek, illetve a normális kötegek varietása. Ezen félcsoport-varietásokat az $x^2 = x$ azonossággal együtt rendre a következő azonosságok határozzák meg: $xy = yx$, $xyz = xzy$, $xyz = yxz$, illetve $xyzx = xzyx$. Továbbá ismert, hogy $\mathcal{NB} = \mathcal{LNB} \vee \mathcal{RNB}$, és $\mathcal{X}_2 = \mathcal{B} \vee \mathcal{X}$ teljesül $\mathcal{X} = \mathcal{LNB}, \mathcal{RNB}, \mathcal{NB}$-re.

2.2. Szabad spektrum

Az 1. fejezetben néhány univerzális algebrai fogalmat szemléletes módon már ismertettünk, most formálisan is megadjuk a definíciókat, ahol lehet, az áttekinthetőség kedvéért csak félcsoportokra. Félcsoportelméleti szemszögből kifejezéseken nemüres szavakat értünk, azaz, a szabad félcsoport elemeit. Pontosabban fogalmazva *n-változós félcsoport-kifejezéseknek*, vagy röviden *n-változós kifejezéseknek*, nevezzük az n-elemű ábécéből (a változók halmazából) alkotott szavakat. Legyen $t = t(x_1, \dots, x_n) = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}$ egy n-változós kifejezés, az $x_{i_j} x_{i_{j+1}} \dots x_{i_m}$ $(1 \leq j \leq k, m \leq k)$ kifejezést a t *részkifejezésének* nevezzük.

Rögzítsünk néhány jelölést, amelyre később szükségünk lesz. Legyen $t_1 = t_1(x_1, \dots, x_n) = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}$ és $t_2 = t_2(x_1, \dots, x_n) = x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_m}$ két kifejezés, ahol $x_{i_k} = x_{j_1}$. Jelölje $t_1 \uplus t_2$ ezen két *kifejezés összefűzését* úgy, hogy az x_{i_k} csak egyszer szerepeljen: $t_1 \uplus t_2 = x_{i_1} \dots x_{i_k} x_{j_2} \dots x_{j_m}$. A $t^{\underline{k}}$ jelölést t azon *kezdőszeletére* fogjuk használni, amely az x_k változó első előfordulásáig fog tartani, és az x_k-val végződik. A $t^{\overline{k}}$ pedig jelölje t azon *zárószeletét*, ami az x_k utolsó előfordulásától kezdődik, és x_k-t is tartalmazza. Például, ha $t_1 = x_1 x_3 x_2 x_4 x_3 x_2$ és $t_2 = x_2 x_3$, akkor $t_1 \uplus t_2 = x_1 x_3 x_2 x_4 x_3 x_2 x_3$, $t_1^{\underline{2}} = x_1 x_3 x_2$ valamint $t_1^{\overline{3}} = x_3 x_2$.

Ha $t = t(x_1, \dots, x_n)$ egy n-változós kifejezés, akkor A elemeinek behelyettesítése a változókba meghatároz egy $t^{\mathbf{A}}$ *n-változós kifejezésfüggvényt*:

$$A^n \to A,\ \overline{a} \mapsto t^{\mathbf{A}}(\overline{a})\ (\overline{a} \in A^n).$$

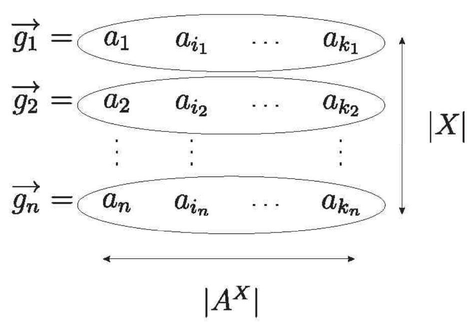
A t_1 és a t_2 kifejezések *ekvivalensek* egy $\mathbf{A}$ algebra felett ($t_1(x_1,\ldots,x_n) \equiv t_2(x_1,\ldots,x_n)$ vagy röviden a $t_1 \equiv t_2$ jelölést használjuk), ha $t_1^{\mathbf{A}}$ és $t_2^{\mathbf{A}}$ egyenlő. Az n-változós kifejezésfüggvények halmazát $\mathrm{Clo}_n\mathbf{A}$-val jelöljük.

Legyen $t = t(x_1,\ldots,x_n)$ egy n-változós kifejezés. Egy $t^{\mathbf{A}}$ kifejezésfüggvényt *valódi n-változósnak* hívunk, ha minden változótól függ, azaz, ha minden $1 \le i \le n$ esetén léteznek olyan $a_1,\ldots,a_{i-1},a,b,a_{i+1},\ldots,a_n \in A$ elemek, hogy

$$t^{\mathbf{A}}(a_1,\ldots,a_{i-1},a,a_{i+1},\ldots,a_n) \neq t^{\mathbf{A}}(a_1,\ldots,a_{i-1},b,a_{i+1},\ldots,a_n).$$

Jelöljük az $\mathbf{A}$ fölötti valódi n-változós kifejezésfüggvényeket $E_n(\mathbf{A})$-val. Itt $E_0(\mathbf{A})$ jelöli $\mathbf{A}$ konstansait. Legyen $p_n(\mathbf{A}) = |E_n(\mathbf{A})|$. A $p_n(\mathbf{A})$ sorozatot az $\mathbf{A}$ *algebra p_n-sorozatának* nevezik. Nyilvánvalóan teljesül a $|\mathrm{Clo}_n\mathbf{A}| = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p_k(\mathbf{A})$ egyenlőség.

Legyen $\mathcal{V}$ végesen generált varietás, az 1. fejezetben ismertett jelölést használva, $\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)$ a $\mathcal{V}$ varietásbeli, n-elem által generált szabad algebrát jelöli, és X egy n-elemű generátorrendszere $\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)$-nek (1. ábra).



$$\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n) = \langle \overrightarrow{g_1}, \overrightarrow{g_2}, \ldots, \overrightarrow{g_n} \rangle \subseteq A^{A^X}$$

1. ábra.

Ha az $\mathbf{A}$ algebra generálja a $\mathcal{V}$ varietást, akkor a

$$t = t(x_1,\ldots,x_n) \mapsto t^{\mathbf{A}}$$

leképezés izomorfizmus $\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)$ és az $\mathbf{A}^{\mathbf{A}^n}$ részalgebrái (azaz, az $\mathbf{A}$ feletti n változós kifejezésfüggvények ($\mathrm{Clo}_n\mathbf{A}$)) között. Tehát teljesül az $|\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)| = |\mathrm{Clo}_n\mathbf{A}|$ összefüggés, így

$$|\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)| = |\mathrm{Clo}_n\mathbf{A}| = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p_k(\mathbf{A}). \tag{1}$$

Ha $|\mathbf{A}| = k$, akkor az 1. ábráról is leolvasható az $|\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)| \leq k^{k^n}$ egyenlőtlenség, továbbá ismert, hogy $|\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)| = k^{k^n}$ pontosan akkor, ha $\mathbf{A}$ primál algebra, azaz, minden függvény kifejezésfüggvény az $\mathbf{A}$ algebrán. A $\mathcal{V}$ varietás szabad spektrumán az n-elem által generált szabad algebra elemszámának sorozatát értjük ($|\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)|$, $n = 0, 1, 2, \ldots$).

A következő eredmények univerzális algebrai jellegűek, az első kettő R. McKenzie-től származik. Kongruenciadisztributív varietásokról szól a Theorem 12.3 [HM], azaz olyan varietásokról, amelyekben minden algebra varietáshálója diszributív: ha $\mathcal{V}$ nem triviális lokálisan véges kongruenciadisztributív varietás, akkor minden $0 < c < 1$-re van olyan elég nagy m, hogy $m > n$ esetén $|\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)| \geq 2^{2^{cn}}$ teljesül. Azaz, ezekben az esetekben a szabad spektrum nagy. Azonban az adott korlátok között sem lehet tetszőleges a szabad spektrum, erről szólnak az úgynevezett hézagtételek. Például, ha a $\mathcal{V}$ varietás végesen generált, akkor vagy van olyan véges c és k, hogy $|\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)| \leq cn^k$, vagy pedig $|\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)| \geq 2^{n-k}$ teljesül valamely k pozitív egészre és bármely n-re (Theorem 12.2, [HM]). A következő tételek a szabad spektrum felső határától való eltérésre vonatkoznak. Legyen $\mathcal{V}$ egy k-elemű algebra által generált varietás, jelölje $\delta_{\mathcal{V}}(n)$ azt a nem negatív valós értékű függvényt, amelyre $|\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)| = k^{k^n - \delta_{\mathcal{V}}(n)}$. V. L. Murskii [Mu] megmutatta, hogy vagy $\lim_{n\to\infty} \delta_{\mathcal{V}}(n) = \infty$ teljesül, vagy van olyan $d \leq k$ egész, amelyre $\delta_{\mathcal{V}}(n) = d$. J. Berman [Be1] igazolta, hogy ha $k \geq 3$, akkor van olyan csak k-tól függő c pozitív konstans, amelyre vagy $\delta_{\mathcal{V}}(n) \geq c2^n$, vagy $\delta_{\mathcal{V}}(n) = d$ teljesül egy $d \leq k$ konstansra.

Az irodalomban számos cikk foglalkozik a p_n-sorozatok általános tulajdonságával, illetve azzal, hogy milyen összefüggések vannak az algebra és a p_n-sorozatának tulajdonságai között. Félcsoportok p_n-sorozatainak tulajdonságait vizsgálták a következő dolgozatokban. A [CDR1], [CR] cikkekben leírták az összes olyan véges félcsoportot, amelyek p_n-sorozatára van polinom korlát, azaz, van olyan k pozitív egész, amelyre $p_n \leq n^k$. A [CDR2] dolgozatban megadták a korlátos p_n-sorozattal rendelkező félcsoportokat félhálók, Boole-csoportok és derékszögű kötegek nilpotens bővítéseként.

2.3. Partíciók

Az $\{1, \ldots, n\}$ halmaz π *partícióján* a halmaz olyan nem üres részhalmazainak halmazát értjük, amelyek páronként diszjunktak (ezek a partíció *osztályai*), és egyesítésük az $\{1, \ldots, n\}$. Jelölje Π_n az $\{1, \ldots, n\}$ halmaz összes partícióinak halmazát, és $|\pi|$ a π partíció osztályainak számát.

Legyen $S(n,k) = |\{\pi \in \Pi_n \colon |\pi| = k\}|$, az n-elemű halmaz k osztályú partícióinak száma. Az $S(n,k)$ számokat *másodfajú Stirling-számoknak* nevezzük. Az $\{1, \ldots, n\}$ halmaz partícióinak számát $B(n)$-nel jelöljük, ezek az úgynevezett *Bell-számok*. A jelöléseinket használva: $B(n) = |\Pi_n| = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)$. A (2) formula [MW] a Bell-számokra ad aszimptotikus becslést:

$$B(n) \sim \frac{1}{\sqrt{n}} r^{n+\frac{1}{2}} e^{r-n-1}, \tag{2}$$

ahol $r \log r = n$. Bármely $\varepsilon(> 0)$-hoz létezik olyan l, amelyre ha $n > l$, akkor $n/\log n < r < n(1+\varepsilon)/\log n$. Megjegyezzük, hogy $f(n) \sim g(n)$ teljesül, ha $\lim_{n\to\infty} f(n)/g(n) = 1$, valamint a későbbiekben használni fogjuk az $f(n) \sim_{\log} g(n)$ jelölést is, amelyen a $\log f(n) \sim \log g(n)$-t értjük.

3. Kifejezések ekvivalenciája kombinatorikus teljesen 0-egyszerű félcsoportok felett

Az [SSz1]-re és az [SSz2]-re támaszkodva kombinatorikus teljesen 0-egyszerű félcsoportok felett vizsgáljuk a kifejezések ekvivalenciáját. A kifejezésfüggvények kiértékelésekor fontos szerepe van annak, hogy mely változók követik egymást, ezeket az összefüggéseket gráfok segítségével tehetjük szemléletesebbé.

Jól látszik, hogy az 1. táblázatban szereplő M szendvicsmátrixokra az utolsó kivételével teljesül a következő, ha $m_{\lambda,i} = m_{\lambda,j} = m_{\mu,i} = 1$, akkor $m_{\mu,j} = 1$. Azaz, az $\mathbf{A_2}$ félcsoporthoz tartozó szendvicsmátrix kivételével, az M mátrixokat fel tudjuk úgy bontani csak 0-t vagy csak 1-et tartalmazó blokkokra, hogy a blokkokat tekintve diagonális mátrixot kapjunk. Nevezzük az ilyen típusú mátrixokat *1-blokk mátrixnak*.

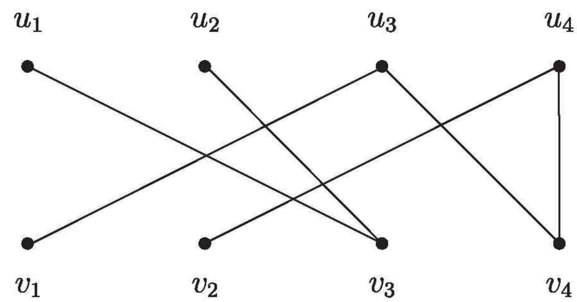
Az 1. táblázatban szereplő félcsoportok feletti kifejezések ekvivalenciája két esetre bontható aszerint, hogy az M szendvicsmátrix 1-blokk mátrix-e, vagy sem, a 3.1. és a 3.2. fejezetben ezt a két esetet tárgyaljuk.

3.1. A szendvicsmátrix 1-blokk mátrix

Ebben a fejezetben jelölje $\mathbf{S}$ az 1. táblázat valamely $\mathbf{A_2}$-től különböző félcsoportját, és $M_{\mathbf{S}}$ pedig az $\mathbf{S}$-hez tartozó szendvicsmátrixot.

Ahogy a 2.1. fejezetben már láttuk a kombinatorikus teljesen 0-egyszerű félcsoportok elemeire gondolhatunk úgy, mint elempárokra. Így egy kifejezés egy x_i változóját is képzeljük el úgy, mint egy (u_i, v_i) elempárt. Legyen $t = t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ egy n-változós kifejezés, rendeljük t-hez a $G(t)$ páros gráfot az alábbi módon. Legyen $\{u_1, \ldots, u_n\}$ a $G(t)$ páros gráf „felső” ponthalmaza, és $\{v_1, \ldots, v_n\}$ az „alsó” pontjainak halmaza. A v_i pontból vezet él az u_j-be, ha az x_i változót x_j követi valahol a t kifejezésben, vagyis az $x_i x_j$ részkifejezés

t-ben. A 2. ábra a $t = x_1x_3x_2x_4x_4x_3x_1x_3x_2$ kifejezéshez tartozó G(t) páros gráfot ábrázolja.



2. ábra.
$t = x_1x_3x_2x_4x_4x_3x_1x_3x_2$

Hasonló félcsoport-kifejezésekhez rendelt gráfkonstrukciók máshol is találhatók ([Gr], [Hou], [Ma], [Tr]).

A *$G(t)$ páros gráf z pontját tartalmazó komponensén* azon pontok halmazát értjük, amelyek a z-ből elérhetők egy sétával, jelöljük $\mathrm{Comp}_{G(t)}(z)$-vel. A 2. ábrán látható páros gráf *komponensei* az $\{u_1, u_2, v_3\}$ és $\{u_3, u_4, v_1, v_2, v_4\}$ ponthalmazok. Megjegyezzük, hogy a komponens fogalmát nem a hagyományos értelemben használjuk, ugyanis most csak pontokat tartalmaz, éleket nem.

3.1. Állítás. [SSz2] *Tegyük fel, hogy $M_{\mathbf{S}}$ egy $r \times l$ típusú mátrix, és J jelölje az azonos típusú csak 1-et tartalmazó mátrixot. Legyen $p = p(x_1, \ldots, x_n) = x_{i_1} \ldots x_{i_k}$ és $q = q(x_1, \ldots, x_n) = x_{j_1} \ldots x_{j_m}$ $(i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_m \in \{1, \ldots, n\})$ két kifejezés.*

(i) *Ha $M_{\mathbf{S}} = J$, akkor $\mathbf{S}$ felett $p \equiv q$ akkor és csakis akkor, ha következők teljesülnek:*

  (a) a p-ben és a q-ban szereplő változók megegyeznek;

  (b) ha $r = 2$, akkor $i_1 = j_1$;

  (c) ha $l = 2$, akkor $i_k = j_m$.

(ii) *Ha $M_{\mathbf{S}} \neq J$, akkor $\mathbf{S}$ felett $p \equiv q$ akkor és csakis akkor, ha következők teljesülnek:*

  (a) $G(p)$ és $G(q)$ komponensei megegyeznek;

(b) $\mathrm{Comp}_{G(p)}(u_{i_1}) = \mathrm{Comp}_{G(q)}(u_{j_1})$;

(c) $\mathrm{Comp}_{G(p)}(v_{i_k}) = \mathrm{Comp}_{G(q)}(v_{j_m})$;

(d) *ha $M_{\mathbf{S}}$-nek van két azonos sora, akkor $i_1 = j_1$;*

(e) *ha $M_{\mathbf{S}}$-nek van két azonos oszlopa, akkor $i_k = j_m$.*

Egy páros gráf komponensei *partíciókat indukálnak* a páros gráf pontosztályain. Például a 2. ábrán látható páros gráf felső pontosztályán az $\{\{u_1, u_2\}, \{u_3, u_4\}\}$ partíciót, az alsó pontosztályon pedig a $\{\{v_1, v_2, v_4\}, \{v_3\}\}$ partíciót indukálják. Ebben az esetben mindkét partíció osztályainak száma kettő. A következő lemma arról szól, hogy mennyivel térhet el a partíciók osztályainak száma.

3.2. Lemma. *Legyen $t = t(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k}$ $(i_1, i_2, \ldots, i_k \in \{1, 2, \ldots, n\})$, és t tartalmazza legalább egyszer mind az n változót. Valamint legyen a $G(t)$ a t kifejezéshez tartozó páros gráf az $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ és $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ pontosztályokkal. Ekkor a $G(t)$ páros gráf két pontosztályán a komponensek olyan partíciókat indukálnak, melyek osztályainak száma legfeljebb eggyel térhet el. Továbbá a $G(t)$ páros gráfban legfeljebb két izolált pont lehet, az u_{i_1} vagy a v_{i_k}.*

Bizonyítás. Mivel a $G(t)$ páros gráf pontosztályain a gráf komponensei indukálják a partíciókat, könnyű látni, hogy az osztályok számában csak úgy lehet eltérés, ha a gráf tartalmaz izolált pontot. Mivel $x_{i_j}x_{i_{j+1}}$ a t részkifejezése bármely $j \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$-re, így a t-hez tartozó $G(t)$ páros gráfban a v_{i_j} és $u_{i_{j+1}}$ csúcsok között vezet él bármely $j \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$-re, és a t-ben minden változó legalább egyszer előfordul. Tehát a $G(t)$ gráfban legfeljebb két izolált pont lehet, az u_{i_1} vagy a v_{i_k}.

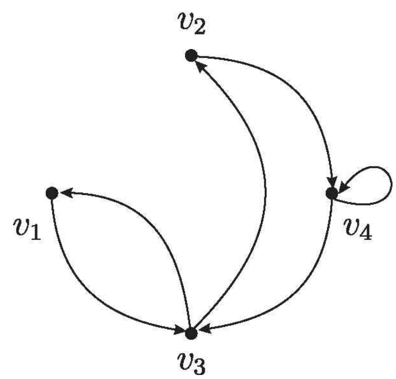
■

Megjegyezzük, ha az előző lemma feltételeinek megfelelő $G(t)$ páros gráfban az u_{i_1} izolált pont, akkor az x_{i_1} változó pontosan egyszer fordul elő a t kifejezésben. Hasonlóan ha v_{i_k} izolált pont, akkor a t kifejezés utolsó változója, az x_{i_k}, pontosan egyszer fordul elő t-ben.

3.2. A szendvicsmátrix nem 1-blokk mátrix

Az 1. táblázatban az $\mathbf{A_2}$ az egyetlen olyan félcsoport, amelyhez tartozó szendvicsmátrix nem 1-blokk mátrix. Az $\mathbf{A_2}$ feletti kifejezések ekvivalenciájának vizsgálata egyszerűbb, ha egy t kifejezéshez most nem egy páros gráfot, hanem egy $\overrightarrow{G}(t)$ többszörös él nélküli irányított gráfot rendelünk a következő természetes módon. Legyen $t(x_1, x_2, \ldots, x_k) = t$ egy kifejezés $\mathbf{A_2}$ felett, és

$\overrightarrow{G}(t)$ jelöljön egy k pontú irányított gráfot a $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ ponthalmazzal. A v_i-ből vezet él v_j-be, ha x_i-t követi x_j valahol t-ben, azaz, ha $x_i x_j$ részkifejezés t-ben. Például a $t = x_1x_3x_2x_4x_4x_3x_1x_3x_2$ kifejezés esetén az 3. ábrán látható irányított gráfot kapjuk.



3. ábra.
$t = x_1x_3x_2x_4x_4x_3x_1x_3x_2$

3.3. Állítás. [SSz2] *Legyen* $p(x_1, \ldots, x_n) = x_{i_1} \ldots x_{i_k}$ *és* $q(x_1, \ldots, x_n) = x_{j_1} \ldots x_{j_m}$ $(i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_m \in \{1, \ldots, n\})$ *két kifejezés. Ekkor* $\mathbf{A_2}$ *felett* $p \equiv q$ *akkor és csakis akkor, ha a következők teljesülnek:*

(i) $\overrightarrow{G}(p) = \overrightarrow{G}(q)$;

(ii) $x_{i_1} = x_{j_1}$;

(iii) $x_{i_k} = x_{j_m}$.

4. Kombinatorikus teljesen 0-egyszerű félcsoportok és szabad spektrum

Becslést adunk az 1. táblázatban szereplő varietások szabad spektrumaira. Vizsgáljuk a generáló félcsoport feletti valódi n-változós kifejezésfüggvények számát, és az (1) összefüggés segítségével becsüljük a szabad spektrumot.

4.1. Az $\mathcal{SL}, \mathcal{RNB}, \mathcal{LNB}, \mathcal{NB}$ varietások szabad spektrumai

Bár ezen varietások szabad spektruma közismert, levezetjük a kombinatorikus teljesen 0-egyszerű félcsoportoknál alkalmazott módszerekkel is.

4.1. Állítás. *Az $\mathcal{SL}$ szabad spektruma $2^n - 1$, $n = 1, 2, \ldots$.*

Bizonyítás. Az $\mathcal{SL}$ varietást generálja az $\mathbf{Y}$ félcsoport, a kételemű félháló. Mivel a félhálók kommutatív és idempotens félcsoportok, így egy félháló feletti kifejezésfüggvény csak a változók halmazától függ, azaz, az n-változós kifejezésfüggvények száma megegyezik az n-elemű halmaz összes részhalmazainak számával, kivéve az üres halmazt. ■

4.2. Állítás. *Az $\mathcal{RNB}$ és $\mathcal{LNB}$ varietások szabad spektruma $n2^{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$.*

Bizonyítás. Az $\mathcal{RNB}$ és $\mathcal{LNB}$ varietásokat generáló félcsoportok duálisan izomorfak, így a szabad spektrumuk megegyezik. Tehát elég csak az egyik varietás szabad spektrumát meghatározni, legyen ez az $\mathcal{RNB}$. Számoljuk ki a $p_k(\mathbf{R})$-t először. Az $\mathbf{R}$ félcsoportot Rees-mártixfélcsoport (ld. 2.1. fejezet) alakban az $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$ szendvicsmátrix definiálja. Mivel M-ben csak 1 szerepel, és 2 oszlopa van a 3.1. Állítás (i) pontja alapján, két k változós kifejezés pontosan akkor ekvivalens, ha azonos változókat tartalmaznak és az utolsó változójuk megegyezik. Mivel k-féle lehetőségünk van az utolsó változó kiválasztására, így k féle valódi k-változós kifejezésfüggvény van, azaz, $p_k(\mathbf{R}) = k$. Tehát a (1) formulát felhasználva $|\mathbf{F}_{\mathcal{RNB}}| = \sum k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$. ■

4.3. Állítás. *Az $\mathcal{NB}$ varietás szabad spektruma $n(n+1)2^{n-2}$, $n = 1, 2, \ldots$.*

Bizonyítás. Az $\mathbf{N}$ félcsoport generálja az $\mathcal{NB}$ varietást. $\mathbf{N}$-et Rees-mátrixfélcsoportként az $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ definiálja (ld. 1. táblázat). Mind a sorok mind az oszlopok száma kettő M-ben, így a 3.1. Állítás (i) pontja alapján az első és utolsó változóknak meg kell egyezni két kifejezés ekvivalenciájánál. Tehát k^2 féle valódi k-válozós kifejezésfüggvény lehetséges $\mathbf{N}$ felett. Így az (1) fomula alapján $|\mathbf{F}_{\mathcal{NB}}(n)| = \sum k^2\binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}$ teljesül. ■

4.2. A $\mathcal{B}$ varietás szabad spektruma

A $\mathcal{B}$ varietást a $\mathbf{B_2}$ félcsoport, az úgynevezett ötelemű kombinatorikus Brandt-félcsoport, generálja. Ezen félcsoportot 2.1. fejezetben definiáló relációkkal is megadtuk a zéruselemes félcsoportok körében. A bevezetésben szereplő Berman-tétel a $\mathcal{B}$ varietásra a következőt állítja: van olyan d szám, hogy elég nagy n-re $d5^n \leq |\mathbf{F}_{\mathcal{B}}(n)| \leq 5^{\sigma(n)}$ teljesül, ahol $\sigma(n) = \frac{5n}{n-320}\binom{n}{64}4^{n-64}$. Mi, felhasználva a 3.1. fejezetben ismertetett páros gráf konstrukciót, ennél lényegesen jobb, aszimptotikus, becslést adunk a szabad spektrumra.

A $\mathbf{B_2}$ félcsoporthoz, mint Rees-mátrixfélcsoporthoz, a 2×2-es egységmátrix tartozik szendvicsmátrixként, így a 3.1. Állítás következő speciális esetét kapjuk.

4.4. Állítás. *Legyen $p = p(x_1, \ldots, x_n) = x_{i_1} \ldots x_{i_k}$ és $q = q(x_1, \ldots, x_n) = x_{j_1} \ldots x_{j_m}$ $(i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_m \in \{1, \ldots, n\})$ két kifejezés. Ekkor $\mathbf{B_2}$ felett $p \equiv q$ akkor és csakis akkor, ha*

(i) *a $G(p)$ és a $G(q)$ páros gráfok komponensei megegyeznek;*

(ii) $\mathrm{Comp}_{G(p)}(u_{i_1}) = \mathrm{Comp}_{G(q)}(u_{j_1})$*;*

(iii) $\mathrm{Comp}_{G(p)}(v_{i_k}) = \mathrm{Comp}_{G(q)}(v_{j_m})$.

A 2.2. fejezetben definiáltuk a kifejezések összefűzését, a következő lemma helyessége az összefűzés definíciójából adódik.

4.5. Lemma. *Legyen $t_1 = t_1(x_1, \ldots, x_n) = x_{i_1}x_{i_2} \ldots x_{i_k}$ és $t_2 = t_2(x_1, \ldots, x_n) = x_{j_1}x_{j_2} \ldots x_{j_m}$ két kifejezés, amelyre $x_{i_k} = x_{j_1}$. Ha $t = t_1 \uplus t_2$, akkor a t-hez tartozó $G(t)$ páros gráf potjai (élei) a $G(t_1)$ és $G(t_2)$ gráfok pontjainak (éleinek) uniója.*

Az alábbi lemma a valódi n-változós kifejezésfüggvényeket jellemzi $\mathbf{B_2}$ felett.

4.6. Lemma. *Ha a $t = t(x_1, \ldots, x_n)$ kifejezés tartalmazza mind az n darab változót, akkor $t^{\mathbf{B_2}}$ valódi n-változós.*

Bizonyítás. Legyen $i \in \{1, \ldots, n\}$, és vegyük a következő két kiértékelését t-nek $\mathbf{B_2}$ felett:

$$b = t^{\mathbf{B_2}}([1,1], \ldots, [1,1]) \quad \text{és} \quad c = t^{\mathbf{B_2}}([1,1], \ldots, [1,1], 0, [1,1], \ldots, [1,1]),$$

ahol a második esetben 0-t az x_i változóba helyettesítettük. Mivel az $[1,1]$ idempotens és a 0 zéruselem $\mathbf{B_2}$-ben, így $b = [1,1] \neq 0 = c$. Tehát a $t^{\mathbf{B_2}}$ kifejezésfüggvény függ az összes változójától.

$\blacksquare$

A 3.2. Lemmában láttuk, hogy a t kifejezéshez tartozó $G(t)$ páros gráf komponensei milyen elemszámú partíció-párokat indukálhatnak a pontosztályokon. A következőkben megadunk minden olyan partíció-párhoz, melyek osztályainak száma megegyezik, egy-egy olyan t kifejezést, amelyhez tartozó $G(t)$ páros gráf éppen ezen partíciókat indukálja a gráf pontosztályain.

4.7. Állítás. [KSz1] *Legyen* π_1 *az* $\{u_1, \ldots, u_n\}$, π_2 *pedig a* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *halmaz egy-egy olyan partíciója, amelyre* $|\pi_1| = |\pi_2| = k$ $(1 \leq k \leq n)$ *teljesül. Minden ilyen* π_1, π_2 *partíció-párra létezik olyan* $t = x_1 \ldots x_1$ *n-változós kifejezés amelyre* $t^{\mathbf{B_2}}$ *egy valódi n-változós kifejezésfüggvény, és a hozzátartozó* $G(t)$ *páros gráf komponensei a* π_1 *és* π_2 *partíciókat indukálják az* $\{u_1, \ldots, u_n\}$, *illetve* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *halmazokon.*

Bizonyítás. Az állítást n szerinti indukcióval bizonyítjuk.

Az állítás nyilvánvalóan teljesül $n = 1$-re, a $t = x_1x_1$ kifejezéssel. $n = 2$ és $k = 1$ esetén a $t = x_1x_2x_2x_1$ kifejezés, $n = 2$, $k = 2$-re pedig a $t = x_1x_2x_1$ kifejezés megadja a kívánt páros gráfot. A 4.6. Lemma alapján ezen kifejezések valódi kétváltozós kifejezések.

Legyen $n \geq 3$. Tegyük fel, hogy az állítás teljesül minden olyan n'-re, ahol $n' < n$. Az n-elemű halmazon minden k $(1 \leq k \leq n)$ osztályú partíció-párra mutatunk egy kifejezést.

1. eset: $k = n$.

Minden osztály egyelemű π_1-ben és π_2-ben is. Könnyű ellenőrizni, hogy a $t = x_1x_2x_3 \ldots x_nx_1$ kifejezéshez tartozó $G(t)$ gráf teljesíti a feltételeket, és a 4.6. Lemma alapján a $t^{\mathbf{B_2}}$ valódi n-változós.

2. eset: *$k < n$, és van olyan i, amelyre sem az u_i sem a v_i nem alkot egyelemű osztályt.*

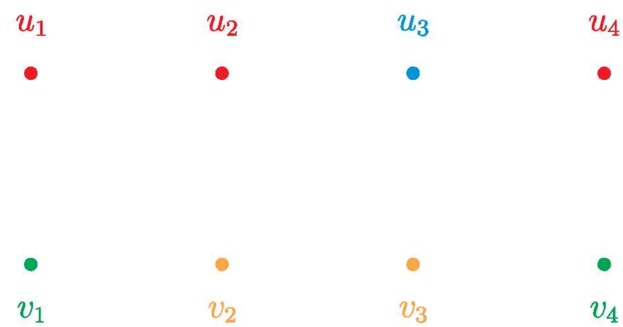
Legyen $u_i, u_l \in A \in \pi_1$ és $v_i, v_j \in B \in \pi_2$. Töröljük u_i-t π_1-ből és v_i-t π_2-ből. Két olyan partíciót kapunk, π_1'-t, illetve π_2'-t, amelyeknek k osztálya van az $\{1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n\}$ indexű $n-1$-elemű halmazokon.

Először tegyük fel, hogy $i \neq 1$. Az indukciós feltevés szerint van olyan $t_{n-1} = x_1 \ldots x_1$ kifejezés, amely $(n-1)$-változós, és amelyre $t_{n-1}^{\mathbf{B_2}}$ valódi $n-1$-változós, továbbá $G(t_{n-1})$ komponensei a π_1' és π_2' partíciókat indukálják. Mivel $t_{n-1}^{\mathbf{B_2}}$ valódi $n-1$-változós, az $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ változók mind szerepelenk t_{n-1}-ben, és így van olyan részkifejezése t_{n-1}-nek, amely x_rx_l és x_jx_s alakú valamely $r, s \in \{1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n\}$-re. Tekintsük a

$$t = t_{n-1} \uplus t_{n-1}^{r} \uplus x_rx_ix_s \uplus t_{n-1}^{\overline{s}}$$

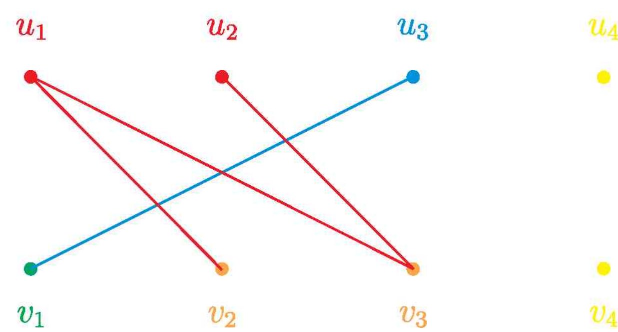
kifejezést. A 4.5. Lemma szerint a $G(t)$ gráf a $G(t_{n-1})$-hez képest két új pontot, az u_i-t és a v_i-t, illetve két új élt, az u_iv_r-et és az u_sv_i-t tartalmaz. Mivel $u_lv_r, u_sv_j \in E(G(t_{n-1}))$, így u_i és u_l és hasonlóan v_i és v_j a $G(t)$ azonos komponenseihez tartoznak, és nincs két olyan különböző $G(t_{n-1})$-beli komponens, ami $G(t)$-ben összekapcsolódna. Így t teljesíti a feltételeket.

1. Példa. Tekintsük az $\{\{u_1, u_2, u_4\}, \{u_3\}\}$, valamint a $\{\{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}\}$ partíciókat, amelyek teljesítik a 2. eset feltételeit $(n = 4, k = 2)$, és i-t választhatjuk 4-nek. A 4. ábrán különböző színekkel jelöltük a partíciók



4. ábra.

osztályait. Látható, hogy az u_4-gyel és a v_4-gyel egy osztályban van például az u_1, illetve a v_1, így, a bizonyítás jelöléseit használva, $l = j = 1$. Ha töröljük az u_4-et és v_4-et a partíciókból, ellenőrizhető, hogy az indukció során a $t_{n-1} = t_3 = x_1x_3x_1x_3x_2x_1$ kifejezést kapjuk, amelyhez az 5. ábrán látható páros gráf tartozik. A t_3 valódi 3-változós, így tartalmaz x_rx_1 és x_1x_s alakú



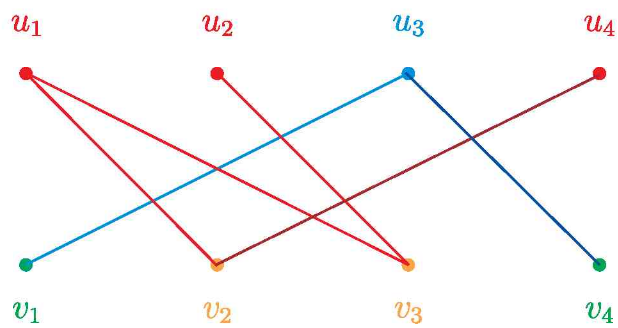
5. ábra.
$G(t_3)$

részkifejezést is, választhatjuk az r-et 2-nek és s-et 3-nak. Így az eredeti partíciókhoz tartozó t kifejezést a következőképpen kapjuk:

$$t = t_3 \uplus t_3^{\underline{2}} \uplus x_2x_4x_3 \uplus t_3^{\overline{3}} = x_1x_3x_1x_3x_2x_1 \uplus x_1x_3x_1x_3x_2 \uplus x_2x_4x_3 \uplus x_3x_2x_1 =$$
$$= x_1x_3x_1x_3x_2x_1x_3x_1x_3x_2x_4x_3x_2x_1.$$

A 6. ábrán a t kifejezéshez tartozó páros gráfot adtuk meg. Az 5., illetve a 6. ábrákat összehasonlítva jól látszik, hogy $G(t)$ a $G(t_3)$-hoz képest csak két új pontot és két új élt tartalmaz, a komponensek száma nem változik, és a $G(t)$ gráf a kívánt partíciókat indukálja a pontosztályokon.

Most legyen $i = 1$. Töröljük u_1-t π_1-ből és v_1-et π_2-ből.



6. ábra.
$G(t)$

A π_1' és π_2' partíciókat kapjuk, amelyeknek k osztálya van az $n-1$-elemű $\{2,3,\dots,n\}$ indexű halmazokon. Ha az indukciós feltevést alkalmazzuk az x_1 helyett az x_2 változóra, a $t_{n-1} = x_2 \dots x_2$ kifejezést kapjuk, amelyre a $G(t_{n-1})$ komponensei a π_1' és a π_2' partíciókat indukálják. Továbbá t_{n-1} tartalmazza az $x_r x_l$ és $x_j x_s$ részkifejezéseket, valamely $r, s \in \{2,\dots,n\}$-re. Legyen

$$t = x_1 x_s \uplus t_{n-1}^{\overline{s}} \uplus t_{n-1} \uplus t_{n-1}^{\underline{r}} \uplus x_r x_1.$$

$G(t_{n-1})$-hez két pontot és két élt adtunk, hogy megkapjuk $G(t)$-t. A v_1 pontot u_s-sel, a v_r-t u_1-gyel kötöttük össze, és így a t kifejezés a π_1 és π_2 partíciókat indukálja.

2. Példa. Itt is vehetjük az 1. példában szereplő $\{\{u_1,u_2,u_4\},\{u_3\}\}$, illetve $\{\{v_1,v_4\},\{v_2,v_3\}\}$ partíciókat, csak most i-t 1-nek választjuk. Az u_1-gyel és a v_1-gyel egy osztályban van a például az u_2, illetve a v_4, így, a bizonyítás jelöléseit használva, $l = 2, j = 4$. Töröljük az u_1-et, és v_1-et a partíciókból. Az indukciós feltevést x_2-re alkalmazva a $t_{n-1} = t_3 = x_2 x_4 x_3 x_4 x_3 x_2$ kifejezést kapjuk. A t_3 valódi 3-változós, így tartalmaz $x_r x_2$ és $x_4 x_s$ alakú részkifejezést is, ebben az eset $r = s = 3$. Így az eredeti partíciókhoz tartozó t kifejezést a következőképpen kapjuk:

$$\begin{aligned} t &= x_1 x_3 \uplus t_3^{\overline{3}} \uplus t_3 \uplus t_3^{\underline{3}} \uplus x_3 x_1 = x_1 x_3 \uplus x_3 x_2 \uplus x_2 x_4 x_3 x_4 x_3 x_2 \uplus x_2 x_4 x_3 \uplus x_3 x_1 \\ &= x_1 x_3 x_2 x_4 x_3 x_4 x_3 x_2 x_4 x_3 x_1. \end{aligned}$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy a t kifejezéshez tartozó gráf a megadott partíciókat indukálja a pontosztályokon.

3. eset: *$k < n$ és bármely $1 \le i \le n$-re vagy u_i alkot egyelemű osztályt π_1-ben, vagy v_i alkot egyelemű osztályt π_2-ben.*

Mind π_1, mind π_2 tartalmaz legalább egy nem egyelemű osztályt, mert $k < n$ és $|\pi_1| = |\pi_2|$. Legyen u_i és v_j egy-egy olyan elem, amely legalább kételemű osztályból való. Megjegyezzük, hogy az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $i \neq 1$ és $j \neq 1$. A feltevés szerint, v_i és u_j egyelemű osztályt alkot. Legyen $u_i, u_s \in A \in \pi_1$ és $v_j, v_l \in B \in \pi_2$. Ha töröljük u_i-t, v_i-t, u_j-t és v_j-t, akkor az $n-2$-elemű halmazon vett π_1' és π_2' partíciókat kapjuk, amelyeknek $k-1$ osztálya van. Az indukciós feltevés szerint van olyan $t_{n-2} = x_1 \ldots x_1$ kifejezés, amelyre a $G(t_{n-2})$ a π_1' és π_2' partíciókat indukálja. Mint az előzőekben, most is találunk a t_{n-2}-ben $x_r x_s$ és $x_l x_p$ alakú részkifejezést, valamely $p, r \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i, j\}$-re. Legyen

$$t = t_{n-2} \uplus t_{n-2}^{r} \uplus x_r x_i x_j x_p \uplus t_{n-2}^{\overline{p}}.$$

A $G(t)$ gráf négy új pontot (u_i, u_j, v_i, v_j), és három új élt $(u_p v_j,\ u_j v_i,\ u_i v_r)$ tartalmaz a $G(t_{n-2})$-hez képest. Azaz, v_i és u_j egyelemű osztályokat alkotnak, u_i és u_s egy osztályba esnek, hasonlóan v_j és v_l is. Így $G(t)$ a π_1 és π_2 partíciókat indukálja.

3. Példa. Vegyük az $\{\{u_1, u_2\}, \{u_3\}, \{u_4\}\}$, és a $\{\{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3, v_4\}\}$ partíciókat, amelyek teljesítik a 3. eset feltételeit ($n = 4, k = 3$). Az u_2 és a v_3 egy-egy olyan elem, amely nem egyelemű osztályból való, továbbá u_1 egy osztályban van u_2-vel, v_4 pedig v_3-mal. A bizonyítás jelöléseit használva $i = 2$, $j = 3$, $s = 1$ és $l = 4$. A v_2-t és az u_3-at tartalmazó osztályok egyeleműek. Ha töröljük u_2-t, v_2-t, u_3-at és v_3-at az eredeti partíciókból, akkor az $\{\{u_1\}, \{u_4\}\}$ és a $\{\{v_1\}, \{v_4\}\}$ partíciókat kapjuk. Az indukciós feltevés szerint ehhez a partíció-párhoz a $t_{n-2} = t_2 = x_1 x_4 x_1$ kifejezés tartozik. A t_2 tartalmaz $x_r x_1$ és $x_4 x_p$ alakú részkifejezést is, ahol $r = 4$ és $p = 1$. Így az eredeti partíciókhoz tartozó t kifejezést a következőképpen kapjuk:

$$\begin{aligned} t &= t_2 \uplus t_2^{4} \uplus x_4 x_2 x_3 x_1 \uplus t_2^{\overline{1}} = x_1 x_4 x_1 \uplus x_1 x_4 \uplus x_4 x_2 x_3 x_1 \uplus x_1 = \\ &= x_1 x_4 x_1 x_4 x_2 x_3 x_1. \end{aligned}$$

A t kifejezéshez tartozó $G(t)$ páros gráf a megfelelő partíciókat indukálja a pontosztályokon.

■

Most becslést adhatunk a $\mathbf{B_2}$ félcsoport p_n-sorozatára.

4.8. Tétel. [KSz1] *Jelölje $p_n = p_n(\mathbf{B_2})$ a $\mathbf{B_2}$ feletti valódi n-változós kifejezésfüggvények számát. Ekkor*

$$\log p_n \sim 2n \log n.$$

Bizonyítás. A 4.6. Lemma szerint, p_n megegyezik azon $t = t(x_1, \ldots, x_n)$ kifejezések számával, amelyekben szerepel az összes $(x_1, \ldots, x_n)$ változó. A rövidség kedvéért, az ilyen kifejezéseket valódi n-változósnak nevezzük. A

4.4. Állítás alapján, egy valódi n-változós t kifejezés $\mathbf{B_2}$ felett csak a $G(t)$ gráf komponenseitől és a t első és utolsó változójától függ. Így legfeljebb $n^2 B(2n)$ darab valódi n-változós kifejezés van $\mathbf{B_2}$ felett, ahol $B(n)$ a Bell-számokat jelöli (ld. 2.3. fejezet). Másrészt, a 4.7. Állításban minden azonos elemszámú partíció-párra megadtunk egy-egy valódi n-változós kifejezést. Tehát a következő egyenlőtlenséget kapjuk:

$$\sum_{k=0}^{n} (S(n,k))^2 \leq p_n \leq n^2 B(2n), \tag{3}$$

ahol $S(n,k)$ a másodfajú Stirling-számokat jelöli (ld. 2.3. fejezet). A négyzetes és a számtani közép közötti egyenlőtlenséget felhasználva becsülhetjük p_n-t $B(n)$-nel a következőképpen:

$$p_n \geq \sum_{k=0}^{n} (S(n,k))^2 \geq (\sum_{k=0}^{n} S(n,k))^2/(n+1) = B(n)^2/(n+1).$$

Mivel $f(n) \sim g(n)$ a $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = 1$-t jelöli, így $\lim_{n\to\infty} \log(a_n - b_n) = 0$. Ha $n/\log n$-t írunk r helyébe a (2)-ben, alsó becslést kapunk a $B(n)$ Bell-számra, bármely n-re:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\log B(n) - \log\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{n}{\log n}\right)^{n+\frac{1}{2}} e^{\frac{n}{\log n}-n-1}\right)\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\log B(n) - \left(n\log n + \frac{n}{\log n} - n - 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\log\log n\right)\right) \geq 0,$$

és így a következőt kapjuk

$$\lim_{n\to\infty}\left(\log(B(n)^2/(n+1)) - \left(2n\log n + 2\frac{n}{\log n} - \right.\right.$$
$$\left.\left. 2n - 2 - 2\left(n+\frac{1}{2}\right)\log\log n - \log(n+1)\right)\right) \geq 0.$$

Ennek segítségével alsó becslést adhatunk $\log p_n$-re:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\log p_n - \left(2n\log n + 2\frac{n}{\log n} - 2n - 2 - \right.\right. \tag{4}$$
$$\left.\left. 2\left(n+\frac{1}{2}\right)\log\log n - \log(n+1)\right)\right) \geq 0.$$

Ahhoz, hogy felső becslést kapjunk $\log p_n$-re, felülről kell becsülnünk a $B(2n)$ Bell-szám logaritmusát. Legyen r egy olyan valós szám, amelyre

$r \log r = 2n$. Ekkor, bármely $\varepsilon > 0$-ra, létezik l úgy, hogyha $n > l$, akkor $r < 2n(1+\varepsilon)/\log 2n$. Felhasználva ezt (2)-ben a következőt kapjuk:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\log B(2n) - \log\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\left(\frac{2n(1+\varepsilon)}{\log 2n}\right)^{2n+\frac{1}{2}} e^{\frac{2n(1+\varepsilon)}{\log 2n}-2n-1}\right)\right) \leq 0,$$

és így

$$\lim_{n\to\infty}\left(\log B(2n) - \left(2n\log 2n + \log(1+\varepsilon)\left(2n+\frac{1}{2}\right) + \frac{2n(1+\varepsilon)}{\log 2n} - 2n - 1 - \left(2n+\frac{1}{2}\right)\log\log 2n\right)\right) \leq 0.$$

Behelyettesítve a $\log(n^2 B(2n)) = \log B(2n) + 2\log n$ és a $\log 2n = \log n + \log 2$ kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\log p_n - \left(2n\log n + \log(1+\varepsilon)\left(2n+\frac{1}{2}\right) + \frac{2n(1+\varepsilon)}{\log 2n} - 2n(1-\log 2) - 1 - \left(2n+\frac{1}{2}\right)\log\log 2n + 2\log n\right)\right) \leq 0. \tag{5}$$

A (4) alsó becslésben és az (5) felső becslésben a meghatározó tag mindkét esetben a $2n\log n$. Így

$$\log p_n \sim 2n \log n,$$

és ez az, amit bizonyítani akartunk.

■

Az előző eredményt felhasználva a $\mathcal{B}$ szabad spektrumára a következő becslés adódik.

4.9. Tétel. [KSz1]

$$\log|\mathbf{F}_{\mathcal{B}}(n)| \sim 2n\log n.$$

Bizonyítás. A $\mathcal{B}$ varietás szabad spektrumának meghatározására az (1) összefüggést használjuk:

$$|\mathbf{F}_{\mathcal{B}}(n)| = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p_k.$$

Mivel $\binom{n}{k} < 2^n$, így nyilvánvalóan teljesül a

$$\sum_{k=0}^{n} p_k < |\mathbf{F}_{\mathcal{B}}(n)| < 2^n \sum_{k=0}^{n} p_k$$

egyenlőtlenség. A 4.4. Állítás és a 4.6. Lemma alapján a $(p_k)_{k=0}^{\infty}$ szigorúan monoton növő, így

$$p_n < |\mathbf{F}_{\mathcal{B}}(n)| < 2^n n p_n.$$

A (4) és (5) egyenlőtlenségeket felhasználva kapjuk:

$$\log |\mathbf{F}_{\mathcal{B}}(n)| \sim 2n \log n.$$

■

4.3. Az $\mathcal{LNB}_2$, $\mathcal{RNB}_2$, $\mathcal{NB}_2$ varietások szabad spektruma

Az $\mathcal{LNB}_2$, $\mathcal{RNB}_2$, $\mathcal{NB}_2$ varietások vizsgálata a 4.9. Következményben szereplő eredményen alapul. Először nézzük meg, mit mondhatunk ezen varietások p_n-sorozatának és a $p_n(\mathbf{B_2})$ viszonyáról.

4.10. Állítás. [KSz3] *Az $\mathbf{N_2}$, $\mathbf{L_2}$, $\mathbf{R_2}$ félcsoportok feletti valódi n-változós kifejezésfüggvények száma kielégíti az alábbi egyenlőtlenségeket:*

$$p_n(\mathbf{B_2}) \leq p_n(\mathbf{L_2}) = p_n(\mathbf{R_2}) \leq p_n(\mathbf{N_2}) \leq n^2 p_n(\mathbf{B_2}).$$

Bizonyítás. Mindhárom félcsoport esetén egy t kifejezés által indukált kifejezésfüggvény a $G(t)$ gráf komponenseitől és az első, illetve az utolsó változóktól függ. Szimmetriai okokból $p_n(\mathbf{L_2}) = p_n(\mathbf{R_2})$. Valamint $\mathbf{B_2} < \mathbf{L_2} < \mathbf{N_2}$, így $p_n(\mathbf{B_2}) \leq p_n(\mathbf{L_2}) = p_n(\mathbf{R_2}) \leq p_n(\mathbf{N_2})$. A 3.1. Állítás (2) pontja alaján a kifejezések ekvivalenciájában különbség csak az első és utolsó változók szerepében van. A $\mathbf{B_2}$ félcsoport esetén a $G(t)$ gráfhoz legalább $|\mathrm{Comp}_G(t)|^2$ féle különböző kifejezésfüggvény tartozik, míg az $\mathbf{N_2}$ esetén legalább n^2 féle. Így $p_n(\mathbf{N_2}) \leq n^2 p_n(\mathbf{B_2})$.

■

4.11. Tétel. [KSz3] *Jelölje $\mathcal{V}$ az $\mathcal{LNB}_2$, $\mathcal{RNB}_2$, $\mathcal{NB}_2$ varietások valamelyikét. Ekkor*

$$\log |\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)| \sim 2n \log n.$$

Bizonyítás. A 4.10. Állítás szerint a fenti $\mathcal{V}$ varietások bármely $\mathbf{S}$ generáló félcsoportjára teljesül, hogy $p_n(\mathbf{B_2}) \leq p_n(\mathbf{S}) \leq n^2 p_n(\mathbf{B_2})$, és így

$$|\mathbf{F}_{\mathcal{B}}(n)| \leq |\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)| \leq n^2 |\mathbf{F}_{\mathcal{B}}(n)|.$$

Az kifejezések logaritmusát véve, és alkalmazva a $\log |\mathbf{F}_{\mathcal{B}}(n)| \sim 2n \log n$ összefüggést a 4.9. Tételből, kapjuk, hogy

$$\frac{\log \mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)}{2n \log n} \geq \frac{\log \mathbf{F}_{\mathcal{B}}(n)}{2n \log n} \to 1 \text{ és } \frac{\log \mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)}{2n \log n} \leq \frac{\log \mathbf{F}_{\mathcal{B}}(n)}{2n \log n} + \frac{1}{n} \to 1.$$

Így teljesül a $|\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)| \sim 2n \log n$ összefüggés.

■

4.4. Az $\mathcal{A}$ varietás szabad spektruma

A 3.2. fejezetben megadtuk, hogyan lehet egy t kifejezéshez egy $\overrightarrow{G}(t)$ irányított gráfot rendelni. Ha van olyan irányított séta $\overrightarrow{G}$ irányított gráfon, ami tartalmazza az összes élt (nem követeljük meg, hogy pontosan egyszer), akkor ezt a sétát *Euler-sétának* nevezzük.

A következő lemma a 3.3. Állítás következménye:

4.12. Lemma. *Legyen $\overrightarrow{G}$ egy n pontú irányított gráf. Ha $\overrightarrow{G}$ tartalmaz zárt Euler-sétát, akkor pontosan n^2 sok nemekvivalens valódi n-változós kifejezés indukál azonos irányított gráfot.*

Bizonyítás. Jelölje $v_1, \ldots, v_n$ a $\overrightarrow{G}$ pontjait. Mivel $\overrightarrow{G}$-ben van zárt Euler-séta, ezért van olyan zárt Euler-séta, ami v_j-vel kezdődik: $p_1 = v_j \ldots v_j$, illetve van v_j-ből v_i-be menő séta is: $p_2 = v_j \ldots v_i$. Így a a p_1 és a p_2 összefűzésére, $p = x_j \ldots x_i$-re, teljesülnek a következők:

(i) lefedi $\overrightarrow{G}$ összes élét, mivel ez már p_1-re is teljesül;

(ii) v_j-vel kezdődik;

(iii) v_i-vel végződik.

Így a megfelelő $t = x_j \ldots x_i$ kifejezésre teljesülnek:

(i) $\overrightarrow{G}(t) = \overrightarrow{G}$;

(ii) x_j-vel kezdődik;

(iii) x_i-vel végződik.

Ezt a konstrukciót megismételhetjük bármely $1 \leq i, j \leq n$-re, így n^2 sok különböző kifejezés indukálja $\overrightarrow{G}$-t. Másrészt, a 3.3. Állítás szerint az összes olyan kifejezést felsoroltuk ezzel, ami $\overrightarrow{G}$-t indukálja.

■

4.13. Állítás. [KSz2] *Jelölje $D(n)$ azon n pontú irányított gráfok számát, amelyek rendelkeznek zárt Euler-sétával. Ekkor $D(n) = o(2^{n^2})$.*

Bizonyítás. Legyen $\overrightarrow{G}$ egy n pontú irányított gráf. Ha $\overrightarrow{G}$ nem tartalmaz zárt Euler-sétát, akkor van olyan $S \subset V(G)$ ponthalmaz, amelyre nem vezet él S-ből $V(G) \setminus S$-be. Legyen S pontjainak száma k. Ekkor 2^{k^2} sok (többszörös él nélküli) irányított gráf lehetséges S-en, $2^{(n-k)^2}$ sok irányított gráf van $V(G) \setminus S$-en és $2^{(n-k)k}$ lehetőség van a $V(G) \setminus S$-ből S-be menő élekre. Így $2^{k^2}2^{(n-k)^2}2^{(n-k)k}$ darab olyan irányított gráf van, amely nem tartalmaz S-ből induló éleket. Az S ponthalmaz elemeit $\binom{n}{k}$ féleképpen választhatjuk meg. $k = 1$-re és $k = n-1$-re kapjuk, hogy

$$\binom{n}{1}2^{1^2}2^{(n-1)^2}2^{(n-1)1} + \binom{n}{n-1}2^{(n-1)^2}2^{(1)^2}2^{(n-1)1} =$$
$$= 2 \cdot n2^{n^2-n+1} \leq n2^{n^2-n+4}.$$

Továbbá $\binom{n}{k} \leq 2^n$-ből következik, hogy

$$\binom{n}{k}2^{k^2}2^{(n-k)^2}2^{(n-k)k} \leq 2^n2^{k^2}2^{(n-k)^2}2^{(n-k)k} = 2^{n^2+n-nk+k^2}.$$

$1 < k < n-1$ esetén pedig

$$2^{n^2+n-nk+k^2} \leq 2^{n^2-n+4}.$$

Jelölje $N(n)$ azon n pontú irányított gráfok számát, amelyek nem tartalmaznak zárt Euler-sétát. Ekkor

$$N(n) \leq \sum_{1}^{n-1}\binom{n}{k}2^{k^2}2^{(n-k)^2}2^{(n-k)k}.$$

Az előző becslést alkalmazva a következő felső korlátot kapjuk $N(n)$-re:

$$N(n) \leq n2^{n^2-n+4} + (n-2)2^{n^2-n+4} \leq (2n-2)2^{n^2-n+4}.$$

Mivel $N(n) + D(n) = 2^{n^2}$, így $D(n) = o(2^{n^2})$.

$\blacksquare$

4.14. Tétel. [KSz2]

$$|\mathbf{F}_{\mathcal{A}}(n)| \sim n^2 2^{n^2}.$$

Bizonyítás. A 3.3. Állítás szerint az $\mathbf{A_2}$ feletti kifejezések, valamint az irányított gráfok és a pontpárok megfelelnek egymásnak, így a $|\mathbf{F}_{\mathcal{A}}(n)| \leq n^2 2^{n^2}$ egyenlőtlenség teljesül. A 4.12. Lemmából és a 4.13. Állításból a valódi n-változós kifejezésfüggvények számára kapjuk, hogy $p_n(\mathbf{A_2}) = n^2 \cdot o(2^{n^2})$. Mivel $p_n(\mathbf{A_2}) \leq |\mathbf{F}_{\mathcal{A}}(n)|$, így:

$$|\mathbf{F}_{\mathcal{A}}(n)| = o(2^{n^2+2\log n}).$$

$\blacksquare$

4.5. További becslések a $\mathbf{B_2}$-t tartalmazó varietások szabad spektrumára

A $\mathcal{B}$, $\mathcal{LNB}_2$, $\mathcal{RNB}_2$, $\mathcal{NB}_2$ varietások szabad spektrumára adott becslések közel sem olyan pontosak, mint amit az $|\mathbf{F}_{\mathcal{A}}(n)|$ elemszámra adtunk. Míg az utóbbi esetben becslésünk aszimptotikus, az első három varietás esetén csak a szabad spektrum logaritmusára adtunk aszimptotikát. Ráadásul, mindhárom varietásra ugyanazt a közelítő értéket kaptuk. Azonban teljesülnek a következők:

$$\mathbf{B_2} < \mathbf{R_2} < \mathbf{N_2} \quad \text{és} \quad \mathbf{B_2} < \mathbf{L_2} < \mathbf{N_2},$$

továbbá

$$\mathcal{B} < \mathcal{RNB}_2 < \mathcal{NB}_2 \quad \text{és} \quad \mathcal{B} < \mathcal{LNB}_2 < \mathcal{NB}_2,$$

ahol az összes tartalmazás valódi.

Ezért a p_n-sorozatok és a szabad spektrumok között is valódi egyenlőtlenség áll fenn:

$$p_n(\mathbf{B_2}) < p_n(\mathbf{L_2}) = p_n(\mathbf{R_2}) < p_n(\mathbf{N_2}),$$

és természetesen

$$|\mathbf{F}_{\mathcal{B}}(n)| < |\mathbf{F}_{\mathcal{LNB}_2}(n)| = |\mathbf{F}_{\mathcal{RNB}_2}(n)| < |\mathbf{F}_{\mathcal{NB}_2}(n)|.$$

A 4.10. Állítás alapján pedig

$$p_n(\mathbf{N_2}) < n^2 p_n(\mathbf{B_2}) \quad \text{és} \quad |\mathbf{F}_{\mathcal{NB}_2}(n)| < n^2 |\mathbf{F}_{\mathcal{B}}(n)|$$

is teljesül.

A következő lemma a 4.7. Állítás általánosításának tekinthető.

4.15. Lemma. *Legyen π_1 az $\{u_1, \ldots, u_n\}$, π_2 pedig a $\{v_1, \ldots, v_n\}$ halmaz egy-egy olyan partíciója, amelyre $|\pi_1| = |\pi_2| = k$ $(1 \leq k \leq n)$ teljesül, és legyen $1 \leq i, j \leq n$. Minden ilyen π_1, π_2 partíció-párra létezik olyan $t = x_i \ldots x_j$ n-változós kifejezés amelyre $t^{\mathbf{B_2}}$ egy valódi n-változós kifejezésfüggvény, és a hozzátartozó $G(t)$ páros gráf komponensei a π_1 és π_2 partíciókat indukálják az $\{u_1, \ldots, u_n\}$, illetve $\{v_1, \ldots, v_n\}$ halmazokon.*

Bizonyítás. Legyen $t = x_1 \ldots x_1$ olyan n-változós kifejezés, amely a π_1-et és π_2-t indukálja a t-hez tartozó $G(t)$ páros gráf megfelelő pontosztályain. Ilyen kifejezés a 4.7. Állítás alapján létezik. A 2.2. fejezet elején bevezetett jelöléseket használva, legyen $t_1 = t^{\bar{i}} \uplus t \uplus t^{\underline{j}}$. Így a t_1 kifejezés első változója x_i, az utolsó pedig x_j. Valamint a t_1-hez tartozó $G(t_1)$ páros gráf tartalmazza $G(t)$ összes élét, mivel t részkifejezés t_1-ben. Továbbá t_1 a t részkifejezéseiből épül fel, így nem tartalmaz sem extra éleket, sem extra pontokat. Tehát teljesül a $G(t_1) = G(t)$ egyenlőség, így a 4.7. Állítás alapján a lemma teljesül. ■

Először a $\mathbf{B_2}$ félcsoport p_n-sorozatára adunk az eddigieknél jobb alsó és felső korlátot.

4.16. Állítás. [KSz3] *A $\mathbf{B_2}$ félcsoport p_n-sorozatára az alábbi egyenlőtlenségek teljesülnek:*

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 S(n,k)^2 + 2\sum_{k=1}^{n-1} n(k-1)S(n-1,k)^2 + \sum_{k=1}^{n-1} n(n-1)S(n-2,k)^2 \leq$$
$$\leq p_n(\mathbf{B_2}) \leq$$
$$\leq \sum_{k=1}^{n} k^2 k! S(n,k)^2 + 2\sum_{k=1}^{n-1} n(k-1)(k-1)! S(n-1,k)S(n,k) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n-1} n(n-1)k! S(n-1,k)^2.$$

Bizonyítás. A 4.7. Állítás bizonyításában minden olyan partíció-párhoz, amelyek mérete megegyezik, mutattunk olyan kifejezést, amely pont a megfelelő partíciókat indukálja $G(t)$-n. Ezt használtuk fel a 4.8. Tétel bizonyításánál, és így kaptuk a (3) formulában az alsó becslést. Ez azonban nem feltétlenül adja a legpontosabb alsó becslést a kifejezésfüggvények számára. Ahogy a 3.2. Lemmában már láttuk a két partíció osztályainak száma eltérhet, igaz, hogy csak legfeljebb 1-gyel, de már ily módon is többfajta kifejezéshez juthatunk. Továbbá minden partíció-párhoz esetleg több kifejezés is rendelhető.

Ha $t = t(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}$ $(i_1, i_2, \ldots, i_k \in \{1, 2, \ldots, n\})$ olyan kifejezés, amely tartalmazza legalább egyszer mind az n változót, valamint a $G(t)$ a t kifejezéshez tartozó páros gráf az $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ és $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ pontosztályokkal, akkor, ahogy a 3.2. Lemmában beláttuk, legfeljebb két izolált pont lehet $G(t)$-ben, az u_{i_1} vagy a v_{i_k}. Különböztessünk meg három esetet aszerint, hogy 0, 1 vagy 2 izolált pont van $G(t)$-ben, ezek fogják rendre adni az állításban szereplő becslések három összegzését.

1. eset: *$G(t)$-nek nincs izolált pontja.*

Ez az az eset, amelyet a 4.8. Tétel bizonyításánál használtunk az alsó becsléshez, a 4.7. Állítást felhasználva, vagyis itt a két partíció osztályainak száma megegyezik. Az ott szereplő konstrukcióban nem maradt izolált pont. A kiindulási kifejezésünkben, x_1^2-ben, nincs izolált pont, az indukciós lépéseknél sem keletkezett újabb izolált pont, hisz az új változót mindig két másik változó közé tettük be. Tehát, ha nincs izolált pont $G(t)$-ben az $\{u_1, \dots, u_n\}$ és a $\{v_1, \dots, v_n\}$ halmazokon két egyforma méretű partíciót indukál a gráf. Az alsó becslés első tagját a következőképpen kapjuk. A 4.15. Lemma alapján az $\{u_1, \dots, u_n\}$ és a $\{v_1, \dots, v_n\}$ halmazok két tetszőleges k-elemű π_1, π_2 partíciójához, illetve az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz bármely két eleméhez létezik olyan kifejezés, amely a π_1, π_2 partíciókat indukálja, és a megfelelő változóval kezdődik és végződik. Az n-elemű halmaz k-elemű partícióinak száma $S(n, k)$ (ld: 2.3. fejezet), így a megfelelő partíció-párok száma $S(n, k)^2$, és az első és utolsó változó a partíciók bármely osztályából választható. A 4.15. Lemma szerint minden ilyen tulajdonságú π_1, π_2 partíció- és változópárhoz van legalább egy t kifejezés, így az 1. esethez tartozó kifejezések száma legalább $k^2 S(n, k)^2$.

A 4.8. Tétel bizonyításánál a felső becsléshez a $2n$-elemű halmaz partícióink számát ($B(2n)$) használtuk, ennél jobb becslés is adható. Vizsgáljuk meg, hogy legfeljebb hány olyan kifejezés van, amely a π_1, π_2 partíciókat indukálja. Legyen $|\pi_1| = |\pi_2| = k$. A gráf élei egy párosítást határoznak meg a π_1 és a π_2 osztályai közt. Az első és utolsó helyre is k osztály kerülhet. A párosítás π_1 és π_2 osztályai közt pedig $k!$ féle képpen valósítható meg. Az első esethez tehát maximum $k^2 k! S(n, k)^2$ kifejezés tartozik.

2. eset: *$G(t)$-nek egy izolált pontja van.*

A $t = t(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}$ $(i_1, i_2, \dots, i_k \in \{1, 2, \dots, n\})$ kifejezéshez tartozó $G(t)$ gráfban az izolált pont vagy u_{i_1} vagy v_{i_k}. A szimmetria miatt elég az egyik esetet vizsgálni, hiszen ha a t kifejezéshez tartozó $G(t)$ gráfban u_{i_1} az izolált pont, akkor a változók fordított sorrendjével kapott $x_{i_k} \dots x_{i_1}$ kifejezéshez tartozó gráfban v_{i_k} lesz izolált pont és fordítva.

Tegyük fel, hogy u_{i_1} az izolált pont, így az x_{i_1} első változó pontosan egyszer fordul elő a kifejezésben. Ha az első változót levágjuk a kifejezésből, akkor az alsó becslést az előző esethez hasonlóan kapjuk, csak most $n-1$-változósnak kell a kifejezést tekinteni, illetve az első változót n féleképpen választhatjuk meg. A felső becslésnél az $n-1$, illetve az n-elemű halmazon kell tekinteni a k osztályú partíciót. Az osztályok közötti párosítás $(k-1)!$ féleképpen valósítható meg ebben az esetben.

3. eset: *$G(t)$-nek két izolált pontja van.*

Ebben az esetben mind az u_{i_1} mind a v_{i_k} izolált pont a $G(t)$ páros gráfban. Tehát mind az első, mind az utolsó változó pontosan egyszer szerepel a kifejezésben, így ezeket $n(n-1)$ féleképpen lehet megválasztani. Az alsó becslésnél a megmaradt $n-2$ változóból álló kifejezések számát becsüljük. A felső korlátnál pedig az $n-1$ pont k osztályú partícióinak számát kell meghatározni. Így megkapjuk a harmadik összegzést is az alsó, illetve a felső becslésre.

■

A 4.16. Állítás eredményeit felhasználva $\mathbf{L_2}$, $\mathbf{R_2}$ és az $\mathbf{N_2}$ félcsoportok p_n-sorozatára a következő alsó és felső becsléseket kapjuk.

4.17. Állítás. [KSz3] *Az* $\mathbf{L_2}$*,* $\mathbf{R_2}$ *és az* $\mathbf{N_2}$ *félcsoportok* p_n*-sorozatára az alábbi egyenlőtlenségek teljesülnek:*

$$\sum_{k=1}^{n} knS(n,k)^2 + \sum_{k=1}^{n-1} n(k-1)S(n-1,k)^2 + \sum_{k=1}^{n-1} n(n-1)S(n-1,k)^2 + \\
+ \sum_{k=1}^{n-1} n(n-1)S(n-2,k)^2 \leq p_n(\mathbf{L_2}) = p_n(\mathbf{R_2}) \leq \sum_{k=1}^{n} knk!S(n,k)^2 + \\
+ \sum_{k=1}^{n-1} n(k-1)(k-1)!S(n-1,k)S(n,k) + \sum_{k=1}^{n-1} n(n-1)(k-1)!S(n-1,k)S(n,k) + \\
+ \sum_{k=1}^{n-1} n(n-1)k!S(n-1,k)^2;$$

$$\sum_{k=1}^{n} n^2S(n,k)^2 + 2\sum_{k=1}^{n-1} n(n-1)S(n-1,k)^2 + \sum_{k=1}^{n-1} n(n-1)S(n-2,k)^2 \leq \\
\leq p_n(\mathbf{N_2}) \leq \sum_{k=1}^{n} n^2k!S(n,k)^2 + 2\sum_{k=1}^{n-1} n(n-1)(k-1)!S(n-1,k)S(n,k) + \\
+ \sum_{k=1}^{n-1} n(n-1)k!S(n-1,k)^2.$$

Bizonyítás. A 4.16. Állításban a $\mathbf{B_2}$ p_n-sorozatára adott becsléstől csak annyiban különböznek az állításban szereplő becslések, hogy az $\mathbf{L_2}$, $\mathbf{R_2}$ és az $\mathbf{N_2}$ félcsoportok feletti kifejezések ekvivalenciájánál az első és utolsó változók megválasztásának is szerepe van. Ebből adódik, hogy az összegzéseknél más együtthatókat kapunk. Mivel az $\mathbf{L_2}$ és az $\mathbf{R_2}$ félcsoportok duálisan izomorfak, a $p_n(\mathbf{L_2}) = p_n(\mathbf{R_2})$ egyenlőség teljesül, így elég csak az $\mathbf{L_2}$ félcsoportot vizsgálni. Legyen $t = t(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k}$ $(i_1, i_2, \ldots, i_k \in \{1, 2, \ldots, n\})$, és t tartalmazza legalább egyszer mind az n változót. Valamint legyen a $G(t)$ a t kifejezéshez tartozó páros gráf az $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ és $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ pontosztályokkal. A 3.2. Lemma alapján az u_{i_1} és a v_{i_k} pontok lehetnek izoláltak a $G(t)$ gráfban. Hasonlóan az előző bizonyításhoz, itt is az izolált pontok száma alapján vizsgáljuk az eseteket.

1. eset: *$G(t)$-nek nincs izolált pontja.*

A 4.16. Állítás bizonyításához képest csak annyi a különbség, hogy az $\mathbf{L_2}$ félcsoportnál az első változót n féleképpen választhatjuk meg, az utolsót pedig k féleképpen. Az $\mathbf{N_2}$ félcsoport esetén pedig mind az első, mind az utolsó változó n féleképpen választható. Így kapjuk az alsó és felső becslésekben szereplő első összegzéseket.

2. eset: *$G(t)$-nek egy izolált pontja van.*
Könnyen látható, hogy ha egy pont izolált a gráfban, akkor a hozzátartozó változó pontosan egyszer szerepel a kifejezésben. Mivel az $\mathbf{L_2}$ félcsoport esetén az első és utolsó változó szerepe nem szimmetrikus, két esetet kell megkülönböztetnünk.

(a) eset: *Az u_{i_1} az izolált pont.* Ekkor az első változó n féleképpen választható meg, míg az utolsó $k-1$ féleképpen, így kapjuk a második összegzést az $\mathbf{L_2}$ félcsoport p_n-sorozatának alsó és felső becslésénél.

(b) eset: *A v_{i_k} az izolált pont.* Az első és utolsó változó $n(n-1)$ féleképpen választható meg. Ez adja a harmadik összegzést a $p_n(\mathbf{L_2})$ alsó és felső becslésében.
Az $\mathbf{N_2}$ félcsoportnál, függetlenül attól, hogy melyik pont az izolált, $n(n-1)$ féleképpen választaható meg az első és utolsó változó.

3. eset: *$G(t)$-nek két izolált pontja van.*
Mind az első, mind az utolsó változó pontosan egyszer szerepel a kifejezésben, tehát $n(n-1)$ féleképpen választható meg. Így a $\mathbf{B_2}$ félcsoport p_n-sorozatával megegyező becsléseket kapunk erre az esetre, ezek adják az utolsó összegzéseket.

■

Köszönetnyilvánítás

Megköszönöm Megyesi Lászlónak, hogy az algebra felé irányította a figyelmemet, valamint Szabó Csabának a témaválasztásban és a kutatásban nyújtott segítségét. Továbbá köszönöm Szendrei Máriának, hogy olyan sokat tanulhattam tőle a félcsoportokról.

Hivatkozások

[Be1] J. Berman, *Finite algebras with large free spectra*, Algebra Universalis, **26** (1989), 149–165.

[Be2] J. Berman, *Free spectra gaps and tame congruence types*, Int. J. Algebra Comput. **5** (1995), 651–672.

[CDR1] S. Crvenković, I. Dolinka, N. Ruškuc, *The Berman conjecture is true for finite surjective semigroups and their inflations*, Semigroup Forum **62** (2001), 103–114.

[CDR2] S. Crvenković, I. Dolinka, N. Ruškuc, *Finite semigroups with few term operations*, J. Pure Appl. Algebra **157** (2001), 205–214.

[CR] S. Crvenković, N. Ruškuc, *Log-linear varieties of semigroups*, Algebra Universalis **33** (1995), 370–374.

[Do] I. Dolinka,*On free spectra of finite completely regular semigroups and monoids*, J. Pure Appl. Algebra, submitted.

[Gr] L.R. Graham, *On finite* 0*-simple semigroups and graph theory,* Math. Syst. Theory **2** (1968), 325–339.

[Hi] G. Higman, *The order of relatively free groups*, Proc. Internat Conf. Theory of Groups, Canberra 1965, Gordon and Breach Pub., 1967, pp. 153–163.

[HM] D. Hobby, R. McKenzie, *The structure of finite algebras*, Contemporary Mathematics no. 76, Amer. Math. Soc., Providence, 1988.

[Hou] C.H. Houghton, *Completely* 0*-simple semigroups and their associated graphs and groups*, Semigroup Forum **37** (1977), 41–67.

[How] J. M. Howie, *Fundamental of semigroup theory*, London Math. Soc. Monographs, New Series 12, The Clarendon Press, Oxford, 1995.

[KSz1] K. Kátai-Urbán, Cs. Szabó, *Free spectrum of the variety generated by the five element combinatorial Brandt semigroup*, Semigroup Forum **73** (2006), 253–260.

[KSz2] K. Kátai-Urbán, Cs. Szabó, *Free spectrum of the variety generated by the combinatorial completely* 0*-simple semigroups*, Glasgow Math. J. **49** (2007) 93–98.

[KSz3] K. Kátai-Urbán, Cs. Szabó, *The* p_n *sequence of semigroup varieties generated by combinatorial* 0*-simple semigroup*, Algebra Universalis 59 (2008), 435–446.

[Ma] G. Mashevitzky, *Completely simple and completely* 0*-simple semigroup identities,* Semigroup Forum **37** (1988), 253–264.

[MW] L. Moser, M. Wyman, *An asymptotic formula for the Bell-numbers*, Trans. Royal Soc. Can. **49** (1955), 49–54.

[Mu] V. L. Murskii, *The existence of a finite basis of identities and other properities of "almost all" finite algebras, (in Russian)*, Problemy Kibernet No. 30 (1975), 43–56.

[Ne] P. Neumann, *Some indecomposable varieties of groups*, Quart. J. Math. Oxford **14** (1963), 46–50.

[PW] G. Pluhár, J. Wood, *The free spectra of varieties generated by idempotent semigroups*, Algebra Discr. Math. No. 2 (2008), 89–100

[PSz] G. Pluhár, Cs. Szabó, *The free spectrum of the variety of bands*, Semigroup Forum **76** (2008), 576–578.

[Pl] G. Pluhár, *Szavak száma idempotens félcsoportokban – Kötegvarietások szabad spektruma*, Mat. Lapok (N.S.) **13** (2008), 44–53.

[Ree] D. Rees, *On semi-groups*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **36** (1940), 387–400.

[Rei] N. Reilly, *Varieties generated by completely* 0*-simple semigroups,* manuscript.

[Se] S. Seif, *Monoids with sub-log-exponential free spectra*, J. Pure Appl. Algebra **212** (2008), 1162–1174.

[SSz1] S. Seif, Cs. Szabó, *Algebra complexity problems involving graph homomorphisms, semigroups and the constraint satisfaction problem*, J. Complexity **19** (2003), 153–160.

[SSz2] S. Seif, Cs. Szabó, *Computational complexity of checking identities in* 0*-simple semigroups and matrix semigroups over finite fields*, Semigroup Forum **72** (2006), 207–222.

[Tr] A. N. Trahtman, *Identities of a five-element* 0*-simple semigroup*, Semigroup Forum **48** (1994), 385–387.

5. Összefoglaló

Legyen $\mathbf{A}$ egy k-elemszámú véges algebra, és $\mathcal{V}$ jelölje az $\mathbf{A}$ által generált varietást. Ismert, hogy az n-elem által generált $\mathcal{V}$-beli szabad algebra mérete, $|\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)|$ legfeljebb k^{k^n}. Ha $k \geq 2$, akkor $|\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)|$ legalább n. A $\mathcal{V}$ varietás szabad spektrumán a $|\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)|$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ sorozatot értjük. Például, a Boole-algebrák varietásának szabad spektruma nagy: $|\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)| = 2^{2^n}$. R. McKenzie kongruenciadisztributív varietásokra igazolta, hogy a szabad spektrum nagy (Theorem 12.3 [HM]). Azonban az adott korlátok között sem lehet tetszőleges a szabad spektrum, erről szólnak az úgynevezett hézagtételek.

Végesen generált varietásoknál gyakran szoros kapcsolat van a generáló algebra struktúrája és a varietás szabad spektruma között. G. Higman [Hi] és P. Neumann [Ne] bizonyította, hogy ha $\mathbf{G}$ véges csoport, akkor a $\mathbf{G}$ által generált varietásban az n elem által generált relatívan szabad csoport mérete pontosan akkor exponenciális n-ben, ha $\mathbf{G}$ nilpotens, egyébként pedig duplaexponenciális.

Egy algebra p_n-sorozatán az algebra fölötti valódi n-változós kifejezésfüggvények számának sorozatát értjük. A [CDR1], [CR] cikkekben leírták az összes olyan véges félcsoportot, amelyek p_n-sorozatára van polinom korlát, azaz, van olyan k pozitív egész, amelyre $p_n \leq n^k$. A [CDR2] dolgozatban megadták a korlátos p_n-sorozattal rendelkező félcsoportokat félhálók, Boolecsoportok és derékszögű kötegek nilpotens bővítéseként.

Félcsoport varietások szabad spektrumáról eddig nagyon keveset lehet tudni. Szabó Csaba és a szerző kezdte el a félcsoportok szabad spektrumának szisztematikus vizsgálatát, az értekezés ezeket az eredményeket tartalmazza. Ahogy a véges egyszerű csoportok tekinthetők a véges csoportok építőköveinek, úgy a véges félcsoportok alapkövei a véges teljesen 0-egyszerű félcsoportok. A kombinatorikus teljesen 0-egyszerű félcsoportok 9 varietást generálnak, ezen varietások szabad spektrumaira adunk becslést.

Vizsgálataink során a következő módszereket alkalmazzuk. A kombinatorikus teljesen 0-egyszerű félcsoportok Rees-reprezentációjánál a félcsoportok elemeit elempárokként ábrázolják. Ez indokolja, hogy az ilyen algebrák feletti kifejezések esetén jól tudjuk alkalmazni a páros gráfokat. A páros gráfok összefüggő komponensei a pontosztályokon partíciókat indukálnak. A partíciók számát becsülve adnuk becslést az úgynevezett ötelemű kombinatorikus Brandt-félcsoport által generált varietás szabad spektrumára. A kombinatorikus teljesen 0-egyszerű félcsoportok által generált 9 varietás közül egy esetében célszerű a kifejezésekhez páros gráfok helyett irányított gráfokat rendelni. Ekkor az irányított gráfokon vett zárt Euler-séták számát becsüljük, és ezt alkalmazzuk a varietás szabad spektrumának becsléséhez.

Az értekezésben szereplő eredmények a [KSz1], [KSz2], illetve [KSz3] dolgozatokban találhatók. Kutatásaink nyomán a következő vizsgálatok születtek. S. Seif [Se] bizonyította, hogy egy nem ortodox monoid által generált $\mathcal{V}$ varietásra $\log|\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)|$ (mint n függvénye) mindig exponenciális. I. Dolinka [Do] Higman–Neuman-típusú feltételt adott arra, hogy a félcsoportok egy osztályának szabad spektruma mikor nem log-exponenciális. Kötegvarietások p_n-sorozatát vizsgálták [PW]-ben, [PSz]-ben és [Pl]-ben.

Előzmények

A következő konstrukció Rees [Ree] nevéhez fűződik, melynek segítségével a kombinatorikus teljesen 0-egyszerű félcsoportok egy könnyen kezelhető reprezentációját kapjuk. Legyen Λ és I nemüres halmaz, továbbá $M = (m_{\lambda,i})$ olyan $\Lambda \times I$ típusú mátrix, amely csak 0-t és 1-et tartalmaz, és minden sora és minden oszlopa tartalmazza legalább egyszer az 1-et. Az $(I \times \Lambda) \cup \{0\}$ halmazon bevezetjük a következő műveletet:

$$(i,\lambda)(j,\mu) = \begin{cases} (i,\mu), & \text{ha } m_{\lambda,j} = 1, \\ 0, & \text{ha } m_{\lambda,j} = 0, \end{cases}$$
$$(i,\lambda)0 = 0(i,\lambda) = 00 = 0.$$

Az így kapott félcsoportot nevezzük kombinatorikus Rees-mátrixfélcsoportnak. Az M mátrixot szendvicsmátrixnak nevezik. Ennek a konstrukciónak a jelentőségét az adja, hogy a kombinatorikus teljesen 0-egyszerű félcsoportok izomorfiától eltekintve éppen a kombinatorikus Rees-mátrixfélcsoportok.

N. Reilly [Rei] bizonyította, hogy pontosan 9 olyan varietás van, amit kombinatorikus teljesen 0-egyszerű félcsoportok generálnak (ld. 2. táblázat 1. oszlopa). Ezen varietások mindegyike generálható egyetlen véges kombinatorikus 0-egyszerű félcsoporttal (ld. 2. táblázat 2. oszlopa), de ez a félcsoport izomorfia erejéig általában nem egyértelműen meghatározott.

Szabó Cs. és S. Seif [SSz1]-ben és [SSz2]-ben kombinatorikus teljesen 0-egyszerű félcsoportok felett vizsgálta a kifejezések ekvivalenciáját. Ezt két esetre lehet szétbontani aszerint, hogy a félcsoporthoz tartozó M szendvicsmátrix (ld. 2. táblázat 3. oszlopa) úgynevezett 1-blokk mátrix-e, vagy sem. A kifejezésfüggvények kiértékelésekor fontos szerepe van annak, hogy mely változók követik egymást, ezeket az összefüggéseket gráfok segítségével tehetjük szemléletesebbé.

A Rees-reprezentációnál láttuk, hogy egy kombinatorikus teljesen 0-egyszerű félcsoportok elemeire gondolhatunk úgy mint elempárokra, ezért célszerű a kifejezéseket is páros gráfokként ábrázolni. A 2. táblázatban az $\mathbf{A_2}$ az egyetlen olyan félcsoport, amihez tartozó szendvicsmátrix nem 1-blokk mátrix. Ebben az esetben egy kifejezéshez a természetes módon adódó irányított gráfot rendeljük.

varietás	generáló félcsoport	szendvics-mátrix (M)	a varietás szabad spektruma
$\mathcal{SL}$	$\mathbf{Y}$	$[1]$	2^n-1
$\mathcal{LNB}$	$\mathbf{L}$	$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$	$n2^{n-1}$
$\mathcal{RNB}$	$\mathbf{R}$	$\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}$	$n2^{n-1}$
$\mathcal{NB}$	$\mathbf{N}$	$\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$	$n(n+1)2^{n-2}$
$\mathcal{B}$	$\mathbf{B_2}$	$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$	$\sim_{\log} n^{2n}$
$\mathcal{LNB}_2$	$\mathbf{L_2}$	$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$	$\sim_{\log} n^{2n}$
$\mathcal{RNB}_2$	$\mathbf{R_2}$	$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}$	$\sim_{\log} n^{2n}$
$\mathcal{NB}_2$	$\mathbf{N_2}$	$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}$	$\sim_{\log} n^{2n}$
$\mathcal{A}$	$\mathbf{A_2}$	$\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$	$\sim n^2 2^{n^2}$

2. táblázat.

Kombinatorikus teljesen 0-egyszerű félcsoportok által generált varietások szabad spektrumai

A 2. táblázat első négy sorában szereplő varietások kötegvarietások, mégpedig rendre a félhálók, a balnormális kötegek, a jobbnormális kötegek, illetve a normális kötegek varietása. Bár ezen varietások szabad spektruma közismert, levezetjük a teljesen 0-egyszerű félcsoportoknál alkalmazott módszerekkel is.

A $\mathcal{B}$ varietást a $\mathbf{B_2}$ félcsoport, az úgynevezett ötelemű kombinatorikus Brandt-félcsoport generálja. Igazoltuk [KSz1]-ben, hogy minden olyan partíciópárhoz, melyek osztályainak száma megegyezik, megadható egy-egy olyan t kifejezés, amely $\mathbf{B_2}$-n valódi n-változós kifejezésfüggvényt definiál, és a hozzá tartozó $G(t)$ páros gráf komponensei éppen ezen partíciókat indukálják a gráf pontosztályain. Az indukált partíciók számát becsülve aszimptotikus formulát kapunk a $\mathbf{B_2}$ félcsoport p_n-sorozatára.

4.8. Tétel. [KSz1] *Jelölje $p_n = p_n(\mathbf{B_2})$ a $\mathbf{B_2}$ feletti valódi n-változós kifejezésfüggvények számát. Ekkor*

$$\log p_n \sim 2n \log n.$$

Az előző eredményt felhasználva a $\mathcal{B}$ szabad spektrumára a következő becslés adódik.

4.9. Tétel. [KSz1]

$$\log |\mathbf{F}_{\mathcal{B}}(n)| \sim 2n \log n.$$

Az alábbi állítás az $\mathbf{N_2}$, $\mathbf{L_2}$, $\mathbf{R_2}$ félcsoportok p_n-sorozatainak, illetve a $p_n(\mathbf{B_2})$-sorozatnak a viszonyát írja le.

4.10. Állítás. [KSz3] *Az $\mathbf{N_2}$, $\mathbf{L_2}$, $\mathbf{R_2}$ félcsoportok feletti valódi n-változós kifejezésfüggvények száma kielégíti az alábbi egyenlőtlenségeket:*

$$p_n(\mathbf{B_2}) \leq p_n(\mathbf{L_2}) = p_n(\mathbf{R_2}) \leq p_n(\mathbf{N_2}) \leq n^2 p_n(\mathbf{B_2}).$$

Az előző két eredmény alapján a következő összefüggést kapjuk.

4.11. Tétel. [KSz3] *Jelölje $\mathcal{V}$ az $\mathcal{LNB}_2$, $\mathcal{RNB}_2$, $\mathcal{NB}_2$ varietások valamelyikét. Ekkor*

$$\log |\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)| \sim 2n \log n.$$

A korábbiakban említettük, hogy az $\mathbf{A_2}$ félcsoport esetén a kifejezésekhez irányított gráf rendelhető. Az $\mathbf{A_2}$ feletti valódi n-változós kifejezésfüggvények számát a zárt Euler-sétával rendelkező irányított n pontú gráfok számával becsüljük. Ehhez szükségünk van a következő állításra.

4.13. Állítás. [KSz2] *Jelölje $D(n)$ azon n pontú irányított gráfok számát, amelyek rendelkeznek zárt Euler-sétával. Ekkor $D(n) = o(2^{n^2})$.*

A 4.13. Állítás segítségével asszimptotikus becslést adhatunk a $\mathcal{A}$ varietás szabad spektrumára.

4.14. Tétel. [KSz2]

$$|\mathbf{F}_{\mathcal{A}}(n)| \sim n^2 2^{n^2}.$$

Eredményeink összefoglalása a 2. táblázat 4. oszlopában található, azaz becslést adtunk összes olyan varietás szabad spektrumára, amelyet kombinatorikus teljesen 0-egyszerű félcsoportok generálnak.

A $\mathcal{B}$, $\mathcal{LNB}_2$, $\mathcal{RNB}_2$, $\mathcal{NB}_2$ varietások szabad spektrumára adott becslések megegyeznek, pedig a varietások között a $\mathcal{B} < \mathcal{LNB}_2 < \mathcal{NB}_2$ és a $\mathcal{B} < \mathcal{RNB}_2 < \mathcal{NB}_2$ relációk állnak fenn. A páros gráf pontosztályain indukált partíciók elemszámát vizsgálva pontosíthatjuk a p_n-sorozatok számára adott korábbi korlátokat. A következő állítás $p_n(\mathbf{B_2})$-re ad meg az eddiginél jobb alsó és felső korlátot.

4.16. Állítás. [KSz3] *A $\mathbf{B_2}$ félcsoport p_n-sorozatára az alábbi egyenlőtlenségek teljesülnek:*

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 S(n,k)^2 + 2\sum_{k=1}^{n-1} n(k-1)S(n-1,k)^2 + \sum_{k=1}^{n-1} n(n-1)S(n-2,k)^2 \leq$$
$$\leq p_n(\mathbf{B_2}) \leq$$
$$\leq \sum_{k=1}^{n} k^2 k! S(n,k)^2 + 2\sum_{k=1}^{n-1} n(k-1)(k-1)! S(n-1,k)S(n,k) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n-1} n(n-1)k! S(n-1,k)^2.$$

Hasonló becslések adhatók meg az $\mathbf{L_2}$, $\mathbf{R_2}$ és az $\mathbf{N_2}$ félcsoportok p_n-sorozataira is. Az ezen félcsoportok feletti kifejezések ekvivalenciájánál az első és utolsó változók megválasztásának is szerepe van. Ebből adódik, hogy az összegzéseknél más együtthatókat kapunk.

6. Summary

Let $\mathbf{A}$ be a k-element finite algebra and let $\mathcal{V}$ denote the variety generated by $\mathbf{A}$. It is known that the size of the free algebra $\mathbf{F}_\mathcal{V}(n)$ in $\mathcal{V}$ freely generated by n-elements is at most k^{k^n}. If $k \geq 2$, then this number is at least n. The free spectrum of a variety $\mathcal{V}$ is the sequence of cardinalities $|\mathbf{F}_\mathcal{V}(n)|$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. For example, for the free spectrum of Boolean algebras we have $|\mathbf{F}_\mathcal{V}(n)| = 2^{2^n}$. Another theorem on free spectra is Theorem 12.3 in [HM]: If $\mathcal{V}$ is a nontrivial locally finite congruence distributive variety, then for every c such that $0 < c < 1$, and for every large n, the free spectrum of $\mathcal{V}$ is bounded below by $2^{2^{cn}}$. We also have some results on the free spectra

called gap theorems. For example, Theorem 12.2 in [HM] says: Let $\mathcal{V}$ be a finitely generated variety. Then either $|\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)| \leq cn^k$ for some finite c and k, or else $|\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)| \geq 2^{n-k}$ for some positive integer k and for all n.

For finitely generated varieties there is a strong connection between structural properties of the generating algebra and the free spectra of the varieties. If $\mathbf{G}$ is a finite group, then the size of the n-generated relatively free group in the variety generated by $\mathbf{G}$ is exponential in n if $\mathbf{G}$ is nilpotent and doubly exponential if $\mathbf{G}$ is not nilpotent ([Hi] and [Ne]).

The p_n sequence of an algebra is the number of essentially n-ary term operations over the algebra. A full description of finite semigroups for which the p_n sequence is bounded by a polynomial (which means there exists an integer k, such that $p_n \leq n^k$), is presented in [CDR1] and [CR]. Semigroups with bounded p_n sequences are described first in terms of identities and then structurally as nilpotent extensions of semilattices, Boolean groups and rectangular bands in [CDR2].

Csaba Szabó and the author analyzed systematically the free spectra of the semigroup varieties, the Ph.D. thesis contains these results. Completely 0-simple semigroups are basic blocks for semigroups, similarly, as simple groups are building blocks for groups. There are nine varieties generated by combinatorial completely 0-simple semigroups, we estimate the free spectra for all of them.

In order to make our arguments more expressive, we assign certain graphs to semigroup terms in the following way. In the Rees-representation the elements of a combinatorial completely 0-simple semigroup are represented as pairs of elements, therefore we assign a bipartite graph to terms of such an algebra. The connected components of these bipartite graphs induce partitions on the vertex sets, and we use the number of these partitions to estimate the free spectrum of the so called five element combinatorial Brandt semigroup. Only in one out of the nine varieties generated by comibnatorial completely 0-simple semigroups we assign directed graphs instead of biparted graphs to semigroup terms, in which case we estimate the number of closed Eurlerian walk in the directed graphs.

The results of the thesis are published in [KSz1], [KSz2] and [KSz3]. Inspired by these papers the following results were obtained by others. S. Seif [Se] proved that, for a variety $\mathcal{V}$ generated by a non-orthodox monoid, $\log |\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)|$ is exponential (as a function of n). I. Dolinka [Do] gave a Higman-Neuman type condition if the free spectrum of a class of semigroups is not log-exponential. In [PW], [PSz] and in [Pl] p_n sequences of band varieties are examined.

Preliminaries

We use the following representation of combinatorial completely 0-simple semigroups from [Ree]. Let Λ and I be nonempty sets, moreover let $M = (m_{\lambda,i})$ be a Λ by I matrix with 0 and 1 entries such that each row and column contains at least one nonzero element. We define an operation on the set $(I \times \Lambda) \cup \{0\}$ as follows:

$$(i,\lambda)(j,\mu) = \begin{cases} (i,\mu) & \text{if } m_{\lambda,j} = 1, \\ 0 & \text{if } m_{\lambda,j} = 0, \end{cases}$$
$$(i,\lambda)0 = 0(i,\lambda) = 00 = 0.$$

That way, we get a combinatorial semigroup which is called combinatorial Rees matrix semigroup. The matrix M is called a sandwich matrix. The importance of the combinatorial Rees matrix semigroups is the following: every combinatorial Rees matrix semigroup is completely 0-simple, and conversely, each combinatorial completely 0-simple semigroup is isomorphic to a combinatorial Rees matrix semigroup.

N. Reilly described the lattice of varieties generated by completely 0-simple semigroups in [Rei]. In particular, he proved that there are exactly 9 combinatorial varieties among them (see 1st column of Table 3). Each of these varieties can be generated by one finite 0-simple semigroup (see 2nd column of Table 3), but the choice of which is in general not unique.

In [SSz1] and [SSz2] Cs. Szabó and S. Seif have investigated the term equivalence problem over completely 0-simple semigroups. Their analysis distinguishes two cases depending on whether the sandwich matrix M of the semigroup (see the 3rd column in Table 1) is a so called 1-block matrix or not. Furthermore, the order of variables has an important role in the evaluation of a semigroup term.

In the Rees-representation the elements of a combinatorial completely 0-simple semigroup are represented as pairs of elements, therefore we assign a bipartite graph to terms of such an algebra.

Variety	generating semigroup	sandwich matrix (M)	free spectra of variety
$\mathcal{SL}$	$\mathbf{Y}$	$[1]$	$2^n - 1$
$\mathcal{LNB}$	$\mathbf{L}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$n2^{n-1}$
$\mathcal{RNB}$	$\mathbf{R}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$	$n2^{n-1}$
$\mathcal{NB}$	$\mathbf{N}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$n(n+1)2^{n-2}$
$\mathcal{B}$	$\mathbf{B_2}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\sim_{\log} n^{2n}$
$\mathcal{LNB}_2$	$\mathbf{L_2}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\sim_{\log} n^{2n}$
$\mathcal{RNB}_2$	$\mathbf{R_2}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\sim_{\log} n^{2n}$
$\mathcal{NB}_2$	$\mathbf{N_2}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\sim_{\log} n^{2n}$
$\mathcal{A}$	$\mathbf{A_2}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\sim n^2 2^{n^2}$

Table 3

Free spectra of varieties generated by combinatorial completely 0-simple semigroups

The varieties in the first four rows of Table 3 are varieties of bands (i.e., semigroups in which every element is idempotent), their names are: variety of semilattices, left normal bands, right normal bands, and normal bands, respectively. The free spectra of these varieties are well known.

The variety $\mathcal{B}$ is generated by $\mathbf{B_2}$, the so called five element combinatorial Brandt semigroup. We proved in [KSz1] that we can assign a pair of partitions of the same size to a term t, such that $t^{\mathbf{B_2}}$ is an essentially n-ary term operation and the corresponding bipartite graph $G(t)$ induces these partitions on the sets of vertices. We get an asymptotic formula for the p_n sequence of $\mathbf{B_2}$ by estimating the number of induced partitions.

Theorem 4.8. [KSz1] *Let* $p_n = p_n(\mathbf{B_2})$ *denote the number of essentially*

n-ary term operations of $\mathbf{B_2}$*. Then*

$$\log p_n \sim 2n \log n.$$

Using the previous result we get the following theorem for the free spectrum of $\mathcal{B}$.

Theorem 4.9. [KSz1]

$$\log |\mathbf{F}_{\mathcal{B}}(n)| \sim 2n \log n.$$

The following proposition describes the connections between the p_n sequences of the $\mathbf{N_2}$, $\mathbf{L_2}$, $\mathbf{R_2}$ semigroups and the $p_n(\mathbf{B_2})$ sequence.

Proposition 4.10. [KSz3] *The number of essentially n-ary term operations for the algebras $\mathbf{N_2}$, $\mathbf{L_2}$, $\mathbf{R_2}$ satisfy the following inequalities:*

$$p_n(\mathbf{B_2}) \leq p_n(\mathbf{L_2}) = p_n(\mathbf{R_2}) \leq p_n(\mathbf{N_2}) \leq n^2 p_n(\mathbf{B_2}).$$

Using the previous two results we have obtained the following theorem for the free spectra.

Theorem 4.11. [KSz3] *Let $\mathcal{V}$ denote one of the varieties $\mathcal{LNB}_2$, $\mathcal{RNB}_2$, $\mathcal{NB}_2$. Then*

$$\log |\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)| \sim 2n \log n.$$

There is a strong connection between essentially n-ary term operations over $\mathbf{A_2}$ and directed graphs with n vertices containing a closed Eulerian walk, so we used the next proposition.

Proposition 4.13. [KSz2] *Let $D(n)$ denote the number of directed graphs on n vertices with a closed Eulerian walk. Then $D(n) = o(2^{n^2})$.*

Now we give an asymptotic estimate for the free spectrum of $\mathcal{A}$.

Theorem 4.14. [KSz2]

$$|\mathbf{F}_{\mathcal{A}}(n)| \sim n^2 2^{n^2}.$$

The 4th column of Table 3 contains the summary of our results, that is we gave approximations of the free spectra of all the varieties generated by combinatorial completely 0-simple semigroups.

The approximations of the free spectra of the varieties $\mathcal{B}$, $\mathcal{LNB}_2$, $\mathcal{RNB}_2$ and $\mathcal{NB}_2$ coincide, and the relations $\mathcal{B} < \mathcal{LNB}_2 < \mathcal{NB}_2$ and $\mathcal{B} < \mathcal{RNB}_2 < \mathcal{NB}_2$ hold. We can give better bounds for the p_n sequences via analizing the size of the partitions induced on the sets of vertices of the bipartite graph. In the following proposition we give better lower and upper bounds for $p_n(\mathbf{B_2})$.

Proposition 4.16. [KSz3] *The following inequalities hold for the p_n sequence of $\mathbf{B_2}$*

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 S(n,k)^2 + 2\sum_{k=1}^{n-1} n(k-1)S(n-1,k)^2 + \sum_{k=1}^{n-1} n(n-1)S(n-2,k)^2 \leq$$
$$\leq p_n(\mathbf{B_2}) \leq$$
$$\leq \sum_{k=1}^{n} k^2 k! S(n,k)^2 + 2\sum_{k=1}^{n-1} n(k-1)(k-1)! S(n-1,k)S(n,k) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n-1} n(n-1)k! S(n-1,k)^2.$$

We get similar bounds for the p_n sequence of $\mathbf{L_2}$, $\mathbf{R_2}$ and $\mathbf{N_2}$ too, where term equivalence depends on the choice of the first and last variables, thus we get different coefficients.