

Ortodox félcsoportok és szemidirekt szorzatok

doktori értekezés tézisei

Hartmann Miklós

Szeged, 2007.

A természetben előforduló lokális szimmetriák matematikai modellezésére halmazok parciális bijekciói használhatók. Adott halmaz parciális bijekciói a parciális leképezésszorzással félcsoporthoz alkotnak. Ezen félcsoporthoz inverzképzésre zárt részfélcsoporthoz absztrakt megfelelői az inverz félcsoporthoz. Az inverz félcsoporthoz vizsgálatában kiemelt szerep jut két speciális osztálynak, a félhálónak (olyan inverz félcsoporthoz, melyeknek minden eleme idempotens) és a csoportoknak (olyan inverz félcsoporthoz, melyekben egyetlen idempotens van) osztálynak. Minden inverz félcsoporthoz természetes módon rendelhető félháló, az inverz félcsoporthoz idempotensei ugyanis felcserélhetők, ezért félhálót alkotnak. Általában az S félcsoporthoz idempotenseinek halmazát $E(S)$ -sel jelöljük. Másrészt, mivel minden inverz félcsoporthoz van egy legszűkebb olyan kongruencia, amely szerinti faktorfélcsoporthoz csoport, ezzel természetes módon hozzárendelhetünk minden inverz félcsoporthoz egy csoportot is. Amennyiben az inverz félcsoporthoz monoid is, újabb csoport rendelhető hozzá. Ugyanis tetszőleges M monoid esetén M egységelemének úgynevezett \mathcal{H} -osztálya csoport. Ezt a csoportot $U(M)$ -mel jelöljük. Ugyanakkor több lehetőség is van félhálóból és csoportokból inverz félcsoporthoz konstruálására. Az egyik ilyen lehetőség félhálónak csoportokkal vett szemidirekt szorzatainak a képzése.

A jelen értekezés célja, hogy bizonyos, inverz félcsoporthozokra és félhálónak csoportokkal vett szemidirekt szorzataira vonatkozó eredményeket tágabb félcsoporthozosztályra, az úgynevezett ortodox félcsoporthoz osztályára terjesszen ki. Az ortodox félcsoporthoz idempotensei nem feltétlenül cserélhetők fel, így nem félhálót, hanem köteget alkotnak. Ennek megfelelően az ortodox félcsoporthozokat kötegek csoportokkal vett szemidirekt szorzatai felől közelítjük meg. A továbbiakban köteg csoporttal vett szemidirekt szorzatát röviden csak szemidirekt szorzatnak nevezzük. Természetesen, amennyiben inverz félcsoporthozokról van szó, szemidirekt szorzaton félhálónak köteggel vett szemidirekt szorzatát értjük.

Előzmények — inverz félcsoporthozok

D. B. McAlister [McA1]-ben vezette be az E -unitér inverz félcsoporthoz fogalmát. Az E -unitér inverz félcsoporthozok az inverz félcsoporthozok elméletében fontos szerepet játszanak. Ennek egyik oka, hogy sok természetes módon felmerülő inverz félcsoporthoz E -unitér (pl. a szabad inverz félcsoporthozok). Másik oka, hogy viszonylag egyszerű struktúrájuk ellenére az E -unitér inverz félcsoporthozok idempotens-szétválasztó homomorf képeként bármely inverz félcsoporthoz megkapható, amint azt D. B. McAlister alábbi tétele mutatja.

2.5. Tétel. [McA1] *Bármely inverz félcsoporthoznak van E -unitér fedője.*

Az E -unitér inverz félcsoporthoz szerkezetét D. B. McAlister a fent említett cikkében írta le, mégpedig egy, a szemidirekt szorzathoz hasonló konstrukció segítségével. Ezt az eredményt felhasználva L. O'Carroll bebizonyította a következő tételt.

2.6. Tétel. [OCa] *Bármely E -unitér inverz félcsoporthoz beágyazható félháló csoporttal vett szemidirekt szorzatába.*

Az előző két tétel következményeként bármely inverz félcsoporthoz megkapható mint szemidirekt szorzat inverz részfélcsoporthoz idempotens-szétválasztó homomorf képe.

S. Y. Chen és H. S. Hsieh 1974-ben, a gyűrűelméleti faktorizálhatóság fogalmát általánosítva bevezette a faktorizálható inverz monoid fogalmát, egyben belátta a következő tételt.

2.7. Tétel. [CH] *Bármely inverz félcsoporthoz beágyazható faktorizálható inverz monoidba.*

D. B. McAlister [McA2]-ben közvetve belátta, hogy a faktorizálható inverz monoidok éppen egységelemes szemidirekt szorzatok (idempotens-szétválasztó) homomorf képei. Ezen eredmény és az előző tétel kombinációjából adódik, hogy bármely inverz félcsoporthoz beágyazható szemidirekt szorzat idempotens-szétválasztó homomorf képébe. Egy ilyen beágyazás mindig megadja az inverz félcsoporthoz egy E -unitér fedőjét is. D. B. McAlister és N. R. Reilly következő tétele mutatja, hogy így bármely E -unitér fedő megkapható.

2.8. Tétel. [MR] *Legyen S inverz félcsoporthoz, $\iota: S \rightarrow M$ pedig S beágyazása faktorizálható inverz monoidba. Ekkor az $S \times U(M)$ direkt szorzat*

$$\{(s, g) \in S \times U(M) : s\iota \leq g\}$$

részfélcsoporthoz E -unitér fedője az S félcsoporthoz. Fordítva, S minden E -unitér fedője előáll ezen a módon.

D. B. McAlister [McA2]-ben bevezette a majdnem faktorizálható inverz félcsoporthoz fogalmát is (fedő félcsoporthoz néven), majd belátta, hogy a majdnem faktorizálható inverz félcsoporthoz éppen szemidirekt szorzatok idempotens-szétválasztó homomorf képei. A majdnem faktorizálható inverz félcsoporthoz és a faktorizálható inverz monoidok kapcsolatát mutatja M. V. Lawson következő tétele.

2.12. Tétel. [La2] *Ha M faktorizálható inverz monoid, akkor $M \setminus U(M)$ majdnem faktorizálható inverz félcsoporth. Fordítva, bármely majdnem faktorizálható inverz félcsoporth megkapható így faktorizálható inverz monoidból.*

Előzmények — ortodox félcsoporthok

A fenti eredmények ortodox félcsoporthokra történő általánosítása a '80-as években kezdődött. M. B. Szendrei és K. Takizawa egymástól függetlenül bizonyították az alábbi tételt, ezzel általánosítva a 2.5. Tételt.

2.13. Tétel. [Sze1],[Ta] *Minden ortodox félcsoporthnak van E -unitér fedője.*

Az S E -unitér reguláris félcsoporthot *beágyazhatónak* nevezzük, ha beágyazható köteg csoporttal vett szemidirekt szorzatába. Ha a szemidirekt szorzat köteg tényezője választható az $E(S)$ köteg által generált varietásból, akkor S -et *közelmre beágyazhatónak* nevezzük. B. Billhardt következő tétele mutatja, hogy a 2.6. Tétel nem általánosítható ortodox félcsoporthokra.

2.14. Tétel. [Bi] *Létezik olyan E -unitér reguláris félcsoporth, amely nem ágyazható be köteg csoporttal vett szemidirekt szorzatába.*

M. B. Szendrei [Sze2]-ben a közelmre beágyazhatóságnak egy ekvivalens feltételét adta meg, és ezt felhasználva bebizonyította a következő tételeket.

2.15. Tétel. [Sze2] *A reguláris köteggel rendelkező E -unitér reguláris félcsoporthok közelmre beágyazhatók.*

2.16. Tétel. [Sze3] *Biszabad ortodox félcsoporthok idempotenstiszta homomorf képei közelmre beágyazhatók. Következésképpen bármely ortodox félcsoporthnak van közelmre beágyazható E -unitér fedője.*

Az utóbbi tétel az inverz félcsoporthokra vonatkozó 2.5. és 2.6. Tételek közös általánosításának tekinthető.

Csoportvarietások feletti E -unitér fedők

Az értekezés első fő eredményében a 2.14. Tétel eredményét élesztjük azal, hogy bármely nemtriviális, de az összes csoportok varietásától különböző csoportvarietáshoz megadunk egy olyan E -unitér reguláris félcsoporthot, amely legnagyobb csoport homomorf képe eleme az adott varietásnak, viszont nincs beágyazható E -unitér fedője az adott varietás felett.

A konstrukcióhoz szükségünk van a gráf-félcsoporthok fogalmára, melyeket csoportok általánosított Cayley-gráfjai, valamint kötegvarietások segítségével lehet definiálni.

3.1. Tétel. *Bármely E -unitér reguláris félcsoporthoz izomorf egy gráf-félcsoporthoz.*

A fenti tételt felhasználva, adott E -unitér reguláris félcsoporthoz csoport-homomorfizmusok segítségével megadható E -unitér fedőknek egy elég tág osztálya.

3.3. Tétel. *Legyen S E -unitér reguláris félcsoporthoz. Ekkor bármely G csoport, és annak bármely $\varphi: G \rightarrow S/\sigma$ szürjektív homomorfizmusa meghatározza S egy G fölötti E -unitér fedőjét. Fordítva, S minden E -unitér fedője tartalmaz olyan reguláris részfélcsoporthoz, amely szintén E -unitér fedője S -nek, és az előbbi módon megkapható alkalmas G csoport és φ homomorfizmus segítségével.*

Az előbbi tétel, valamint B. Billhardt beágyazhatósági kritériumának felhasználásával bizonyítható a fejezet fő eredménye.

3.8. Tétel. *Bármely V nemtriviális, de az összes csoportok varietásától különböző csoportvarietáshoz létezik olyan E -unitér reguláris félcsoporthoz, melynek legnagyobb csoport-homomorf képe eleme V -nek, azonban nincs V fölötti beágyazható E -unitér fedője.*

Majdnem faktorizálható ortodox félcsoporthoz

Az M ortodox monoidot *faktorizálhatónak* nevezzük, ha bármely $s \in M$ esetén létezik olyan $e \in E(M)$ és $u \in U(M)$, amelyekre $s = eu$. A faktorizálható inverz monoidok esetéhez hasonlóan bizonyítható a következő tétel.

4.1. Tétel. *Az M ortodox monoidra az alábbi feltételek ekvivalensek:*

- (i) M faktorizálható,
- (ii) M köteg monoid csoporttal vett szemidirekt szorzatának idempotenszétválasztó homomorf képe,
- (iii) M köteg csoporttal vett szemidirekt szorzatának homomorf képe.

Ha S félcsoporthoz, $s \in S$, akkor az s -sel való jobbról szorzás, illetve az s -sel való balról szorzás (mint S transzformációi) között szoros kapcsolat van. Ezen tulajdonság általánosítása vezet S translációburkának fogalmához, ami speciális transzformációpárokból áll. Bármely S félcsoporthoz translációburka monoid, melynek egységscsoportját $\Sigma(S)$ -sel jelöljük. Azt mondjuk, hogy az

S ortodox félcsoporth *majdnem faktorizálható*, ha bármely $s \in S$ esetén létezik olyan $e \in E(S)$ és $(\lambda, \rho) \in \Sigma(S)$, amelyre $s = e\rho$. Az S ortodox félcsoporthot *gyengén fedhetőnek* hívjuk, ha előáll szemidirekt szorzat homomorf képeként.

4.3. Tétel. *Egy ortodox félcsoporth akkor és csak akkor majdnem faktorizálható, ha köteg csoporttal vett szemidirekt szorzatának idempotens-szétválasztó homomorf képe.*

Inverz félcsoporthok esetén a szemidirekt szorzatok homomorf képei előállnak idempotens-szétválasztó homomorf képekként is. Amint azt a következő példa mutatja, ortodox félcsoporthok esetén ez már nem igaz.

4.5. Állítás. *Van olyan kombinatorikus teljesen 0-egyszerű gyengén fedhető ortodox félcsoporth, amely nem majdnem faktorizálható.*

Az előző állítás mutatja, hogy ortodox félcsoporthok gyenge fedhetőségének vizsgálata bonyolultabb, mint az inverz félcsoporthoké. Azonban egy nagyon speciális részosztály esetén a helyzet egyszerűbb. Ugyanis a gyengén fedhető általánosított inverz félcsoporthok jól jellemezhetők a legnagyobb inverz félcsoporth homomorf képük segítségével.

4.10. Tétel. *Egy általánosított inverz félcsoporth akkor és csak akkor gyengén fedhető, ha legnagyobb inverz félcsoporth homomorf képe majdnem faktorizálható.*

Az előző feltétel nem alkalmas a gyenge fedhetőség jellemzésére az összes ortodox félcsoporth esetén, amint azt az alábbi állítás mutatja.

4.12. Állítás. *Létezik olyan ortodox félcsoporth, amely nem gyengén fedhető, de legnagyobb inverz félcsoporth homomorf képe majdnem faktorizálható.*

Ortodox félcsoporthok beágyazása

Ebben a fejezetben a 2.16. Tétel felhasználásával bebizonyítjuk, hogy bármely ortodox félcsoporth beágyazható majdnem faktorizálható ortodox félcsoporthba. Legyen S ortodox félcsoporth, T pedig olyan E -unitér fedője, amely egy bizsabad ortodox félcsoporth idempotenssziszta homomorf képe. Jelöljön α olyan idempotens-szétválasztó kongruenciát, amelyre $T/\alpha \cong S$. A 2.16. Tétel bizonyítása alapján T beágyazható egy $\mathcal{B} * G$ szemidirekt szorzatba, ahol a \mathcal{B} köteg a T ortodox félcsoporth idempotensei által generált varietásnak eleme. Az előbbi beágyazás közelebbi vizsgálatával bizonyítható, hogy az α kongruencia kiterjeszhető $\mathcal{B} * G$ -re. Ez a kiterjesztés nem feltétlenül idempotens-szétválasztó, azonban $\mathcal{B} * G$ -t egy alkalmas idempotenssziszta

kongruenciával faktorizálva olyan $B * G$ szemidirekt szorzat adódik, amelybe T továbbra is beágyazható, valamint amelyre α már idempotens-szétválasztó kongruenciává terjeszthető ki. Így belátható a következő tétel.

5.9. Tétel. *Bármely ortodox félcsoport beágyazható majdnem faktorizálható ortodox félcsoportba.*

Legyen S ortodox félcsoport, valamint $\iota: S \rightarrow F$ egy beágyazása az F majdnem faktorizálható ortodox félcsoportba. Továbbá legyen a $\varphi: B * G \rightarrow F$ szürjektív idempotens-szétválasztó homomorfizmus egy $B * G$ szemidirekt szorzatról F -re. Ekkor az $\{(e, g) \in B * G : (e, g)\varphi \in S\iota\}$ félcsoport E -unitér fedője S -nek. Azt mondjuk, hogy egy E -unitér fedő *majdnem faktorizálható ortodox félcsoportba való beágyazásból származik*, ha izomorf egy ilyen fedővel. Vegyük észre, hogy az előző tétel bizonyítása során valójában azt láttuk be, hogy bizonyos fedők majdnem faktorizálható ortodox félcsoportokba való beágyazásokból származnak. Amennyiben az ortodox félcsoport kötege reguláris, ez minden E -unitér fedőre igaz, amint azt a szerző alábbi eredménye is mutatja.

5.11. Tétel. [Ha3] *Bármely reguláris köteggel rendelkező ortodox félcsoport E -unitér fedői megkaphatók majdnem faktorizálható ortodox félcsoportba való beágyazásból.*

Hivatkozások

- [Bi] Bernd Billhardt, *On embeddability into a semidirect product of a band by a group*, Journal of Algebra 206 (1998); 40–50.
- [BM] T. S. Blyth ; R. B. McFadden, *Unit orthodox semigroups.*, Glasgow Math. J. **24** (1983), no. 1, 39–42
- [CH] S. Y. Chen ; S. C. Hsieh, *Factorizable inverse semigroups.*, Semigroup Forum **8** (1974), no. 4, 283–297
- [Ha1] M. Hartmann, *E -unitary covers over group varieties*, Semigroup Forum **70** (2005), no. 1, 61–70
- [Ha2] M. Hartmann, *Almost factorizable orthodox semigroups*, Semigroup Forum **74** (2007), no. 1, 106–124
- [Ha3] M. Hartmann, *Embedding into almost factorizable orthodox semigroups*, Acta. Sci. Math., megjelenés alatt

- [Ho] John M. Howie, *Fundamentals of Semigroup Theory*, Clarendon Press, Oxford, 1995.
- [La1] Mark V. Lawson, *Inverse semigroups. The theory of partial symmetries*, World Scientific Publishing, 1998.
- [La2] M. V. Lawson, *Almost factorizable inverse semigroups*, Glasgow Math. J. **36** (1994), no. 1, 97–111
- [McA1] D. B. McAlister, *Groups, semilattices and inverse semigroups. I, II.*, Trans. Amer. Math. Soc. **192**, (1974), 227–244.
- [McA2] D. B. McAlister, *Some covering and embedding theorems for inverse semigroups.*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A **22** (1976), no. 2, 188–211.
- [MR] D. B. McAlister and N. R. Reilly, *E-unitary covers for inverse semigroups*, Pacific J. Math. **68** (1977), no. 1, 161–174
- [McF] R. B. McFadden, *Unit-regular orthodox semigroups*, Glasgow Math. J. **25** (1984), no. 2, 229–240
- [OCa] L. O’Carroll, *Embedding theorems for proper inverse semigroups*, J. Algebra **42** (1976), no. 1, 26–40
- [Pe] M. Petrich, *Inverse semigroups*, Wiley & Sons, 1984.
- [Sze1] Mária B. Szendrei, *On a pull-back diagram for orthodox semigroups*, Semigroup Forum **20** (1980), 1–10; Corrigendum: **25** (1982), 311–324.
- [Sze2] Mária B. Szendrei, *E-unitary regular semigroups*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, **106A** (1987), 89–102.
- [Sze3] Mária B. Szendrei, *On E-unitary covers of orthodox semigroups*, International Journal of Algebra and Computation Vol. 3, No. 3 (1993); 317–333.
- [Sze4] Mária B. Szendrei, *A finite non-embeddable E-unitary regular semigroup*, Semigroups and Applications (Proc. Conf. St. Andrews, 1997), World Scientific, Singapore, 1998; 202–214.
- [Sze5] Mária B. Szendrei, *Orthogroup bivarieties are bilocal*, Semigroups with applications (Proc. Conf. Oberwolfach, 1991), World Scientific, Singapore, 1992; 114–131.
- [Ta] K. Takizawa, *Orthodox semigroups and E-unitary regular semigroups*, Bull. Tokyo Gakugei Univ., Ser IV **31** (1979), 41–43