Dinamikai rendszerek kaotikusságának és stabilitásának vizsgálata megbízható számítógépes módszerekkel

„Doktori értekezés tézisei"

Bánhelyi Balázs

Témavezető:
Dr. Csendes Tibor

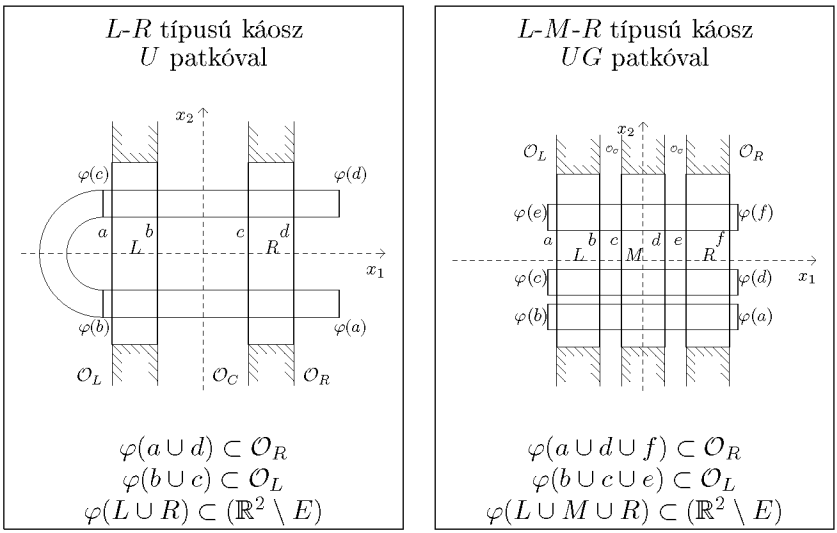
Szegedi Tudományegyetem
Szeged, 2007

1. Bevezetés

Dinamikai rendszerek vizsgálata során sok esetben érdekes kérdés lehet, hogy valóban rendelkeznek-e a megoldások közelítése során észlelt kaotikus vagy stabil viselkedéssel. Ennek megválaszolására megbízható technikákat javasoltunk, melyek képesek eldönteni egy adott régióról, hogy az rendelkezik-e az ilyen viselkedésekhez szükséges tulajdonságokkal.

Ebben az esetben a megbízhatóság matematikai erejű bizonyítást jelent, melyhez a számítógépes részben kezelni kell minden kerekítési és egyéb hibát. Valós számok helyett intervallumokkal számolunk, és ha az eredményintervallum valamely határpontja nem ábrázolható számítógépen, akkor megfelelően kifelé kerekítjük azt.

Ezek után, egy halmazelméleti tartalmazásokon alapuló eljárást mutatunk be, mely képes kimutani egy Smale-patkó létezését, és ezzel a kaotikus viselkedést. A kaotikus viselkedésekhez szükséges összes tartalmazási feltétel felírható $\mathcal{T}_j(W_j) \subset U_j$ alakban (lásd az 1. ábrát). Így ahhoz, hogy kimutassuk egy kaotikus régió létezését, ilyen típusú feltételeket kell ellenőrizni.



1. ábra. Különböző patkók szerkezetei.

2. Az Hénon-leképezés kaotikus régiói

Az ide tartozó problémákat az ezt vizsgáló matematikusok rendszerint emberi beavatkozással, „kézzel" oldják meg. Az egyik ilyen módszer az, amikor a Lipschitz-konstans használatával kezelik a közelítő megoldásokat, valamint figyelembe veszik a kerekítési hibákat is. Majd egy adott számú rácspontra számítógéppel ellenőrzik az adott feltételeket [15]. Az emberi beavatkozás elkerülésére egy intervallumaritmetikán alapuló automatikus eljárást javasolunk.

2.1. Az ellenőrző eljárás

Egy számítógépes módszert fogunk bemutatni, mely képes egy régióról megmutatni, hogy teljesíti-e a kaotikus viselkedéshez szükséges feltételeket. Vizsgálatainkat az Hénon-leképezésen kezdjük:

$$\mathcal{H}(x, y) = (1 + y - Ax^2, Bx).$$

Zgliczyński egy korábbi cikkében [15] az Hénon-leképezés klasszikus paramétereit ($A = 1.4$ és $B = 0.3$), valamint az alábbi kétdimenziós területeket tekintette: $E = E_1 \cup E_2 = \{(x, y) \mid x \geq 0.4,\ y \geq 0.28\} \cup \{(x, y) \mid x \leq 0.64,\ |y| \leq 0.01\}$, $\mathcal{O}_L = \{(x, y) \mid x < 0.4,\ y > 0.01\}$, $\mathcal{O}_R = \{(x, y) \mid y < 0\}$.

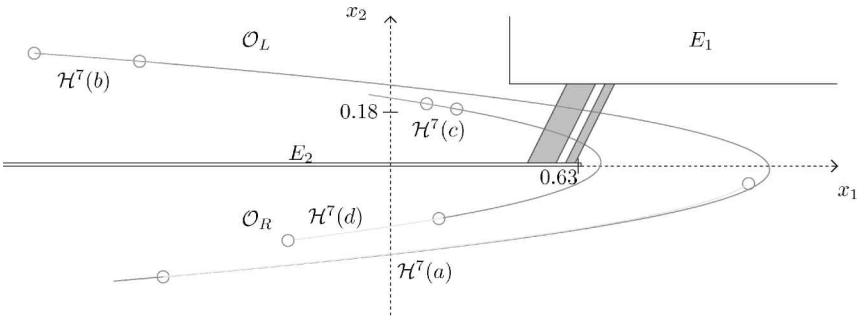
Zgliczyński az alábbi, 1. Tétel segítségével a Q_0 és Q_1 paralelogrammákra bizonyította a kaotikus viselkedéshez szükséges feltételeket. Ezen paralelogrammák két oldala párhuzamos az x tengellyel ($y_0 = 0.01$ és $y_1 = 0.28$), a másik kettő pedig ($\tan 2$) szöget zár be vele. Az alsó csúcspontok x koordinátái rendre $x_a = 0.460$, $x_b = 0.556$, $x_c = 0.558$ és $x_d = 0.620$. A Q_0 és Q_1 paralelogrammák Hénon-leképezés 7-dik iteráltja melletti képei láthatók a 2. ábrán.

1. Tétel (Zgliczyński). *Ha valamely k-ra az alábbi feltételek teljesülnek:*

$$\mathcal{H}^k(a \cup d) \subset \mathcal{O}_R,$$
$$\mathcal{H}^k(b \cup c) \subset \mathcal{O}_L,$$
$$\mathcal{H}^k(L \cup R) \subset (\mathbb{R}^2 \setminus E),$$

akkor $\mathcal{H}^k$ rendelkezik kaotikus régióval.

A kaotikus régió létezésének ellenőrzésére egy, az intervallumaritmetikán alapuló korlátozás és szétválasztás eljárást készítettünk. Az algoritmus



2. ábra. Az Hénon-leképezés 7-dik iteráltjának kaotikus régiója az Hénon-leképezés $A = 1.4$ és $B = 0.3$ paraméterei mellett. A paralelogrammák a, b, c, és d oldalai a 3. ábra bal felső sarkában is láthatóak.

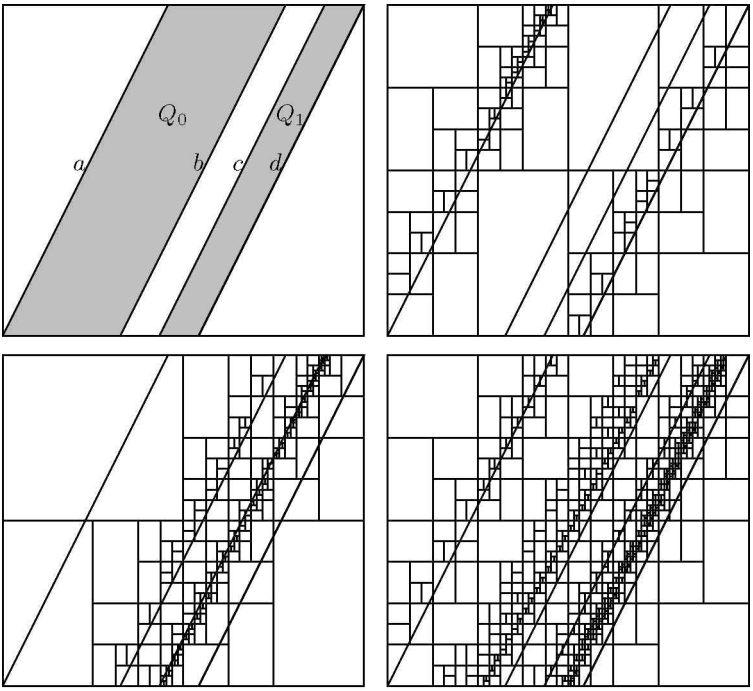
először meghatározza a kezdő intervallumot, mely tartalmazza az ellenőrizendő tartományt:

$$[0.46000000000, 0.75500000000] \times [0.01000000000, 0.28000000000].$$

Majd egymás után ellenőrzi a három tartalmazási tulajdonságot. Az állítás helyességéhez természetesen mind a három tulajdonságot igazolni kell. Az Hénon-leképezés 7-dik iteráltja esetében a szükséges transzformációk száma rendre 273, 523 és 1613 volt. Abban az esetben, ha az algoritmus nem volt képes közvetlenül igazolni az állítás helyességét egy részintervallumra, akkor azt eltárolja, hogy később tovább darabolhassa. A tároló verem maximális mélysége az ellenőrzés során rendre 11, 13 és 14 volt. A szükséges CPU idő mindössze pár másodperc volt egy átlagos PC-n.

2.2. Optimalizáló eljárás kaotikus régiók keresésére

Bebizonyítottuk, hogy az algoritmusunk képes véges számú lépés után pozitív választ adni, és a kapott válasz matematikai értelemben is megbízható. Egy ilyen teljesen automatikus eljárás a kaotikus régió bizonyítására célfüggvényként használható egy optimalizáló eljárásban, mely így alkalmas lehet új kaotikus régiók detektálására.



3. ábra. Az L és R paralelogrammák, és az algoritmus által generált kétdimenziós intervallumok, melyekre vagy teljesülnek az 1. Tételben adott feltételek, vagy egyetlen pontot sem tartalmaznak az adott régióból.

A megadott optimalizáló eljárás sikerességében kulcsfontosságú szempont, hogy hogyan konstruáljuk meg a célfüggvényt. Korábbi, hasonló problémák tapasztalatai alapján, úgy döntöttünk, hogy összeadjuk azokat a nemnegatív értékeket, amelyek jellemzik, hogy milyen mértékben sérülnek az adott feltételek. Abban az esetben, ha bármely feltétel sérül, az összeghez hozzáadunk egy pozitív konstanst.

Tekintsünk egy olyan példát, mikor az egyik

$$\mathcal{T}(Q) \subset \mathcal{O}$$

alakú feltétel sérül. Ekkor az ellenőrző rutin visszaad egy részintervallumot, mely tartalmaz legalább egy pontot, amely megsérti a feltételt. Ezután számoljuk ki a transzformált intervallum ($T(I)$) és az $\mathcal{O}$ halmaz Hausdorff-távolságát:

$$\max_{z \in T(I)} \inf_{y \in \mathcal{O}} d(z, y),$$

ahol $d(z, y)$ egy adott metrika két kétdimenziós pont között. Megjegyzendő, hogy ezen célfüggvény alakja erősen befolyásolja az optimalizáló eljárás hatékonyságát. Fontos, hogy a minimalizálás során a kisebb célfüggvényérték egy jobb struktúrát „sejtsen", azaz a derivált iránya segítse a megfelelő paraméterek megtalálását. Emiatt az ellenőrző eljárást úgy módosítottuk, hogy a legtávolabbi, nem megfelelő intervallumot adja vissza. A gyorsabb számítások végett mindig a legrosszabb eredményt mutató intervallumot vettük ki a veremből. Így, ha egy túl kicsi intervallumhoz jutottunk, akkor a veremben lévő összes elem távolsága kisebb a célterülettől, azaz a legtávolabbi rossz intervallumot kaptuk meg. Egy jól megválasztott célfüggvény másik előnye, hogy amikor nem sérül a feltétel, akkor sem kell azt kicserélni, hanem egyszerűen számolhatunk az eredeti formulával.

Ezek után az összes feltételre összegezzük ezen függvényeket. Így az alábbi formában írhatjuk fel az optimalizálási problémánkat:

$$\min_{x \in X} g(x), \text{ ahol } g(x) = p\left(\sum_{i=1}^{m} \max_{z \in T(I_i)} \inf_{y \in \mathcal{O}_i} d(z, y)\right),$$

melyben x egy lehetséges paramétersorozat a keresendő halmazok koordinátáira; X egy n-dimenziós intervallum, mely a lehetséges megoldások halmaza; m a feltételek száma; I az ellenőrző eljárás által visszaadott intervallum, amely sérti az adott feltételt; $\mathcal{O}_i$ az i. feltétel célhalmaza; $p(y) = y + C$, ha bármely $I_i \neq \emptyset$, egyébként $p(y) = 0$.

LO	ZO	FE	PE	T
12	4	13,197	4,086	17
12	1	12,913	3,365	16
12	1	13,569	4,303	19
12	2	12,918	3,394	16
12	1	14,117	5,083	18
12	3	21,391	7,400	25
12	2	12,623	3,296	16
12	0	15,388	6,221	30
12	3	13,458	3,858	15
12	2	14,643	5,002	16

1. táblázat. Numerikus eredmények a $\mathcal{H}^5$ kaotikus régiónak keresésére. LO jelenti a megtalált lokális optimumok számát, ZO az ezek közül 0 optimum értékkel rendelkezők számát, FE a célfüggvény kiértékelésének a számát, PE a büntető függvények kiértékelésének a számát, és T a szükséges CPU időt percben.

2.3. Alkalmazások

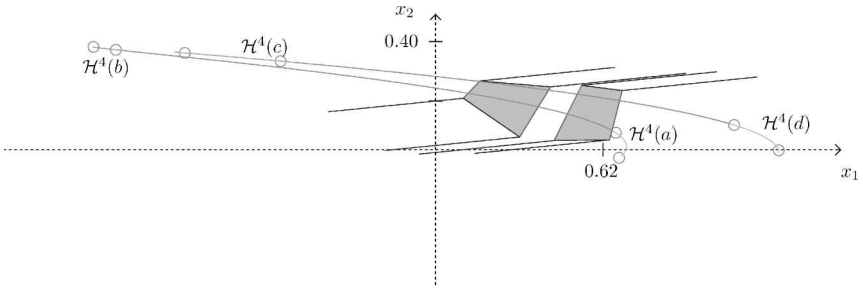
Az optimalizáló eljárásunkat először az Hénon-leképezés 5-dik iteráltján teszteltük. Megjegyezzük, hogy a kisebb iteráltakra nehezebb a kaotikus régiók megtalálása, továbbá a szakirodalomban sem található a 7-nél kisebb iteráltakra ilyen tartomány. Néhány kísérlet után, az optimalizáló eljárásunkat az alábbi keresési területtel használtuk:

$$A \in [1.00, 2.00],\ B \in [0.10, 1.00],\ x_a, x_b, x_c, x_d \in [0.40, 0.64].$$

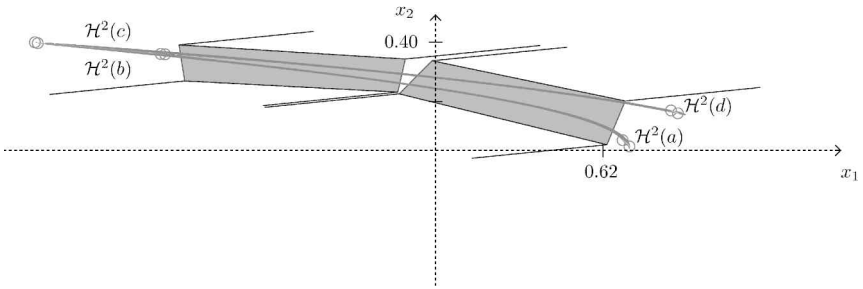
Az eljárás hatékonyságát az 1. táblázat illusztrálja, mely 10 futás numerikus eredményeit tartalmazza.

Ezzel az eljárással az Hénon-leképezés számos kaotikus régióját feltártuk, többek között a klasszikus paraméterek mellett a 4-dik, 2-dik és 6-dik iteráltakét (lásd a 4. ábrát). Az eljárás alkalmas volt továbbá a topologikus entrópia alsó korlátjának megadására is. Az eljárások és a kapcsolódó numerikus eredmények publikálásra kerültek nemzetközi folyóiratokban [4, 5, 6, 12] és konferenciaanyagokban [2, 3, 10].

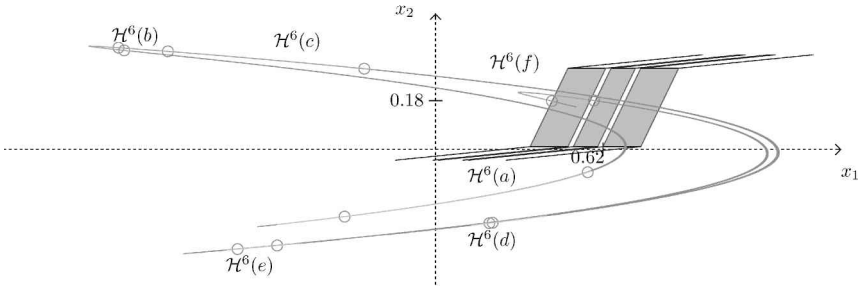
A munkám fő részét a programok megvalósítása, numerikus eredmények elérése és azok rendezése tette ki, továbbá a topologikus entrópiában elért eredmények – néhány matematikai állítás kivételével – a saját munkámnak tekinthetők.



(a) Az Hénon-leképezés 4-dik iteráltjára.



(b) Az Hénon-leképezés 2-dik iteráltjára.



(c) Az Hénon-leképezés 6-dik iteráltjára.

4. ábra. Az eljárással talált kaotikus régiók.

3. A kényszererős fékezett inga kaotikus viselkedése

A mai szakirodalomban kevés cikk tartalmaz matematikai erejű bizonyítást valósnak tekinthető mechanikai rendszer kaotikusságára. Hubbard egy egyszerűnek tűnő kényszererős fékezett ingáról mutatta be, hogy kaotikus [13], de matematikai bizonyítást nem adott annak létezésére. Ezen dinamikai rendszer érdekessége, hogy a kaotikus viselkedést köznapi szavakkal is meg lehet fogalmazni. Jelen esetben ez azt jelenti, hogy az alsó ponton való áthaladás jellegével is le lehet írni ezt a viselkedést, mely szabad szemmel is tapasztalható jelenség.

3.1. A kényszererős fékezett inga

Ebben a részben egy kényszererős fékezett ingával foglalkoztunk, mely egy mechanikai modell. Ebben a rendszerben egy test egy merev súlytalan rúdon függ, ezért a test csak egy körpályán tud mozogni (lásd az 5. ábrát). A gravitáción kívül a légellenállás is hat a rendszerre, amely az inga sebességével arányos nagyságú és azzal ellentétes irányú. Hat továbbá egy külső erő is a testre, melynek nagysága $\cos t$, ahol t az eltelt időt jelöli.

A tekintett másodrendű differenciálegyenlet a következő:

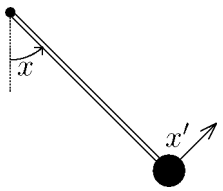
$$x'' = \cos t - 0.1x' - \sin x,$$

ahol x az inga szöge, és x' az inga forgási sebessége.

A fenti egyenletet felírhatjuk az alábbi formában is:

$$\begin{aligned} u' &= v, \\ v' &= \cos t - 0.1v - \sin u, \end{aligned}$$

ahol u az inga szöge, míg v az inga szögsebessége.



5. ábra. A kényszererős fékezett inga.

Az alábbi tételben fogalmazhatjuk meg ezen inga kaotikus viselkedését:

2. Tétel (Hubbard). *Az összes, mindkét irányban végtelen hosszú* $\epsilon_k \in \{-1, 0, 1\}$ *sorozatra létezik olyan* $(x(0), x'(0))$ *kezdőérték, amelyre az inga az* I_k *időintervallumok alatt az alábbi mozgást végzi:*

- az óra járásával megegyező irányban pontosan egyszer *haladt át az alsó ponton, akkor és csak akkor, ha* $\epsilon_k = -1$,
- nem *haladt át az alsó ponton, akkor és csak akkor, ha* $\epsilon_k = 0$,
- az óra járásával ellentétes irányban pontosan egyszer *haladt át az alsó ponton, akkor és csak akkor, ha* $\epsilon_k = 1$.

3.2. A káosz bizonyítása a kényszererős fékezett inga esetében

Először tettünk néhány lépést a kényszererős fékezett inga kaotikus viselkedésének számítógépes bizonyítása felé. Ezen eredmények megerősítettek minket nemcsak abban, hogy a tekintett rendszer rendelkezik kaotikus viselkedéssel, hanem abban is, hogy képesek lehetünk numerikus eszközökkel a még hiányzó bizonyítást elvégezni.

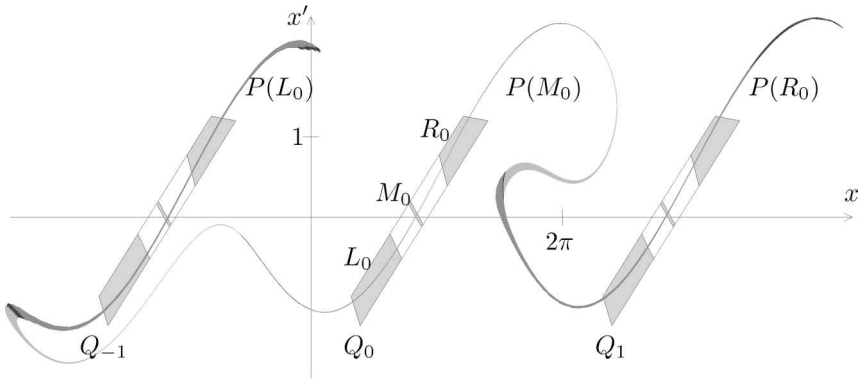
A matematikai erejű bizonyításhoz szükségünk van a $\{Q_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ négyszögekre, melyek „hosszúak" az instabil, és „keskenyek" a stabil sokaság irányában. A „különleges" pályák Poincáré-leképezés (P) meletti képeinek az alábbi tulajdonságokkal kell rendelkezniük:

1. a különleges pályák benne vannak az $\cup_{k\in\mathbb{Z}} Q_k$-ban;

2. a különleges pályák konzekvensen „látogatják meg" a Q_k négyszögeket: ha $P^n(x_0, x_0') \in Q_k$ valamely $k, n \in \mathbb{Z}$-re, akkor $P^{n+1}(x_0, x_0') \in Q_{k-1}$ vagy $P^{n+1}(x_0, x_0') \in Q_k$ vagy $P^{n+1}(x_0, x_0') \in Q_{k+1}$.

A bizonyításban fontos szerepet játszik az a tény, hogy ezen különleges pályák tetszőlegesen előírt sorrendben látogathatják meg a $\{Q_{i_k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ téglalapokat. Ennek igazolásához ismernünk kell ezen Q_k téglalapok $P(Q_k)$ Poincaré-képeit (lásd a 6. ábrát), és bizonyítani egy Smale-patkó létezését.

Erre a problémára alkalmaztuk a korábban említett korlátozás és szétválasztás alapú technikánkat, amely képes volt bizonyítani a tekintett rendszer kaotikus viselkedését. A bizonyítás részletei olvashatóak a [7, 8, 11] cikkekben, melyekben a munkám – többek között– a számítógépes bizonyítás megvalósítása volt.



6. ábra. A Q_0 téglalap Poincaré-leképezése a $t = \pm 2\pi$ időpillanatban.

4. A Wright-sejtés vizsgálata

E.M. Wright azt a sejtést fogalmazta meg egy 1955-ben megjelent cikkében [14], hogy az adott késleltetett differenciálegyenlet megoldásai nullához konvergálnak az α paraméterek széles körére. Ebben a cikkében bebizonyította az állítást $\alpha \leq 1.5$-re, de 1.5 és $\pi/2$ közötti értékekre csak sejtette az állítás helyességét.

4.1. Megbízható technika a trajektória követésére

E.M. Wright az alábbi késleltetett differenciálegyenletet vizsgálta:

$$z'(t) = -\alpha z(t-1)(1+z(t)),$$

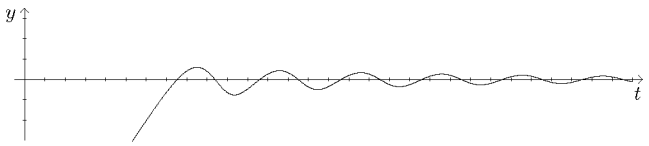
ahol α egy pozitív konstans, és a kezdeti függvény ($\phi(s)$) azonosan $c > -1$, azaz $\phi(s) = c$ az összes $s \in [-1, 0]$-ra.

Az egyszerűbb számítások céljából használjuk a $z(t) = e^{y(t)} - 1$ helyettesítést. Ekkor $z'(t) = e^{y(t)}y'(t)$ és $z(t-1) = e^{y(t-1)} - 1$. Ily módon a tekintett differenciálegyenletünk:

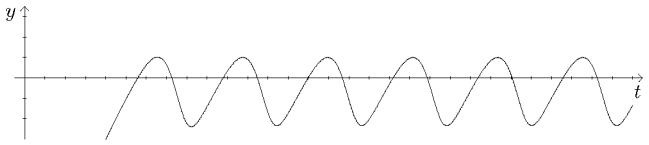
$$y'(t) = -\alpha(e^{y(t-1)} - 1)$$

alakban írható fel, ahol a kezdeti függvény legyen $\phi(s) = c$, $s \in [-1, 0]$.

Az $\alpha \leq 1.5$ esetben ismert, hogy a trajektória oszcillálva konvergál a nullához, míg az $\alpha > \pi/2$ esetén már különböző periodikus pályák valamelyikéhez tart a megoldás (lásd a 7. ábrát). Az eddigi numerikus eredmények



(a) Az $\alpha = 1.5$ eset.



(b) Az $\alpha = 2.0$ eset.

7. ábra. Közelítő ábrák a trajektóriára.

alapján az sejthető, hogy itt is hasonlóan viselkedik a megoldás, mint az $\alpha \leq 1.5$ esetben.

A nullához való konvergencia vizsgálata numerikus módszerekkel nehézkes, így egy egyszerűsített problémát tanulmányozunk. A feladatunk az, hogy a késleltetett differenciálegyenlet megoldásairól eldöntsük, hogy létezik-e olyan $a \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy az $[a, a+1]$ intervallumon a megoldás abszolút értéke kisebb, mint egy adott konstans. Ez az érték a mi esetünkben legyen 0.075.

A hagyományos differenciálegyenletekre kifejlesztett, matematikai bizonyításokban is használható módszerek egy jó része a Taylor-soron alapul. Így mi is ezen az elven működő eljárást alkalmazunk a jelenlegi késleltetett differenciálegyenletre.

Lagrange-féle maradéktaggal ellátott Taylor-polinom:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-x_0)^k y^{(k)}(x_0)}{k!} + r_n, \text{ ahol } r_n = \frac{(x-x_0)^n}{n!} y^{(n)}(x^*),$$

valamely $x^* \in [x_0, x]$ $(x_0 \leq x)$.

A kapott formulát megvizsgálva látható, hogy a magasabbrendű deriváltak alkalmazása esetén jobban közelíthető a függvény. A következő módon határozhatjuk meg a magasabbrendű deriváltakat:

$$y^{(k)}(t) = -\alpha y^{(k-1)}(t-1) + \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k-2}{i-1} y^{(i)}(t-1) y^{(k-i)}(t).$$

Egy megbízható algoritmusnak nem csak a számításaiban kell garantáltnak lennie, de a formulákat is korrektül kell használnia. Az alábbi módon tudjuk alkalmazni a Taylor-polinomot, hogy befoglaljuk a megoldást:

$$Y(t_1) = \sum_{i=0}^{n-1} Y^i(t_0)\frac{(t_1 - t_0)^i}{i!} + Y([t_0, t_1])^n \frac{(t_1 - t_0)^n}{n!},$$

$$Y([t_0, t_1]) = \sum_{i=0}^{n-1} Y^i(t_0)\frac{([0, t_1 - t_0])^i}{i!} + Y([t_0, t_1])^n \frac{([0, t_1 - t_0])^n}{n!}.$$

Az algoritmus két fix hosszú listát használ a megoldás befoglalás tárolására. Az első lista a megoldás és a deriváltak befoglalásait tartalmazza az adott időintervallumokon, míg a másik ugyanezeket tárolja csak ezen időintervallumok végpontjaiban. Minden lépésben kiszámoljuk ezen listák új elemeit a korábban említett formulákkal, majd beillesztjük a megfelelő listába, miközben töröljük a legrégebbi elemeket a listából. Ez az eljárás három paraméterrel rendelkezik: a lépés hossza, a legnagyobb derivált rangja, és az intervallumaritmetika pontossága.

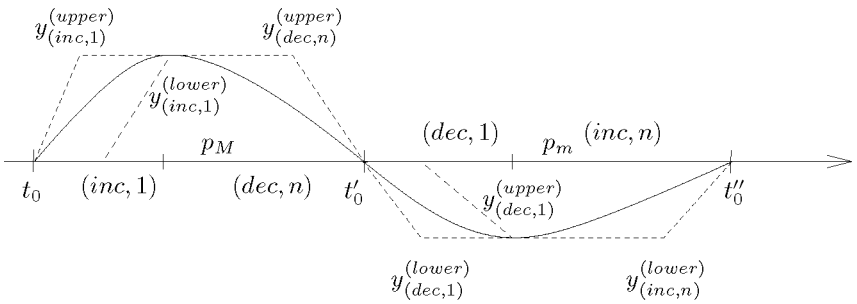
Összefoglalva, a feladat bizonyítása a teljes $\alpha = [1.5, \pi/2]$ intervallumra az óriási CPU idő miatt ezzel a módszerrel egyelőre nem lehetséges, bár a program az intervallum bármely pontjára, illetve annak szűk intervallumára képes matematikai bizonyítást adni. További numerikus eredmények a trajektóriakövetésről megtalálhatók az [1] cikkben.

4.2. A sejtés bizonyítása

Ebben a fejezetben megmutatunk új és a korábbinál erősebb korlátfüggvényeket, amelyek alkalmasak a periodikus megoldások szélsőértékeinek korlátozására.

Jelen technika követi Wright eredeti ötletét, de egyben új ötleteket is felhasznál. Tekintsünk egy periodikus megoldást és legyen a három egymás utáni zéruspontja t_0, t_0' és t_0''. Definiáljunk ezen periodikus megoldáshoz korlátfüggvényeket, melyeket a 8. ábrán láthatunk.

Ezen hat korlátfüggvényből levezetünk erősebb, hasonló korlátfüggvényeket. Az újonnan kapott korlátfüggvényeket és az eredetieket összevetve erősebb korlátfüggvényt kaphatunk. Majd ezen összefüggéseket egy iteratív eljárásba ötvözzük, melyben először jobb korlátfüggvényeket adunk az $(inc, 1)$ szakaszra az (inc, n) szakasz korlátjaiból, majd az $(inc, 1)$-ből a (dec, n)-re és így tovább. Mivel periodikus megoldást vizsgálunk, így az eredmény korlátokat használhatjuk ebben az iterációban indulási korlátokként is. Ezen új korlátfüggvények megkonstruálásakor alkalmazhatjuk



8. ábra. A trajektóriát korlátozó függvények, melyeket szaggatott vonallal jelöltünk.

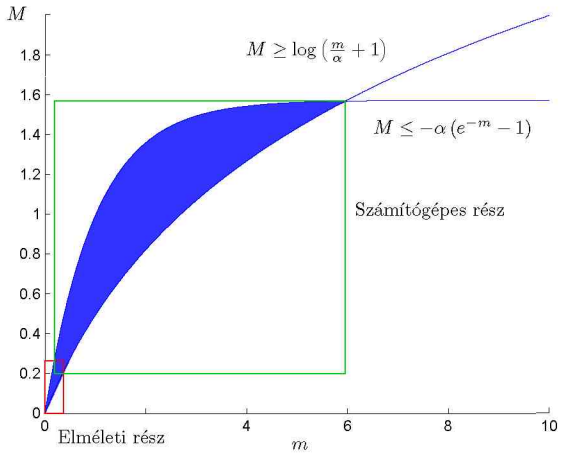
Wright eredeti ötletét, továbbá a korábban bemutatott Taylor-soron alapuló eljárásunkat. Kezdetben a felső korlátfüggvények lehetnek konstans M-ek, míg az alsó korlátok konstans $(-m)$-ek, kivéve az $y^{(lower)}_{(inc,1)}$ és az $y^{(upper)}_{(dec,1)}$ függvényeket, melyek 0-ák. Minden iterációs lépés után ellenőrizzük az alábbi feltételt:

$$y^{(upper)}_{(inc,1)}(t_0+1) \geq M \text{ és } -m \geq y^{(lower)}_{(dec,1)}(t'_0+1),$$

és ha valamelyik nem teljesül, akkor mondhatjuk, hogy az adott α, M és $(-m)$ paraméterekkel nem létezik periodikus pálya.

Az elméleti eredmények után a sejtésből az egyetlen, igazolásra váró probléma az maradt, hogy az $1.5 \leq \alpha \leq \pi/2$ értékekre létezik-e periodikus megoldás adott pozitív értéknél nagyobb abszolút értékű M és m szélsőértékekkel. A 9. ábra illusztrálja ezen két rész kapcsolatát.

A megoldáshoz implementáltunk egy új párhuzamosított korlátozás és szétválasztás eljárást, mely alkalmas a teljes sejtés bizonyítására. A Wright-sejtéssel és az általa elért eredményekkel Krisztin Tibor ismertetett meg. A fejezetben található trajektória követésére szolgáló eljárást és a bizonyításban szereplő korlátozási sémát saját eredményemnek tekintem. A bizonyítás számítógépes része részletesebben a [9] cikkben olvasható.



9. ábra. A számítógépes és elméleti rész kapcsolata a bizonyításban.

Hivatkozások

[1] B. Bánhelyi. Egy késleltetett differenciálegyenlet vizsgálata megbízható számítógépes eljárással. *Alkalmazott Matematikai Lapok*, 24:131–150, 2007.

[2] B. Bánhelyi and T. Csendes. A verified computational technique to locate chaotic regions of Hénon systems. In *Proceedings of the 6th International Conference on Applied Informatics (ICAI2004), Eger*, pages 297–304, 2004.

[3] B. Bánhelyi and T. Csendes. A global optimization model for locating chaos: numerical results. In *Proceedings of the International Workshop on Global Optimization (GO05), Almería (Spain)*, pages 35–39, 2005.

[4] B. Bánhelyi, T. Csendes, and B.M. Garay. Optimization and the Miranda approach in detecting horseshoe-type chaos by computer. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 17, 2007. Közlésre elfogadva.

[5] B. Bánhelyi, T. Csendes, and B.M. Garay. Σ_2 chaos for iterates of the classical Hénon mapping. Kézirat, 2007.

[6] B. Bánhelyi, T. Csendes, and B.M. Garay. A verified optimization technique to bound topological entropy rigorously. In *Proceedings of 12th GAMM - IMACS International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic and Validated Numerics (SCAN 2006), Duisburg (Germany)*. IEEE, 2007. Közlésre elfogadva.

[7] B. Bánhelyi, T. Csendes, B.M. Garay, and L. Hatvani. A computer-assisted proof for Σ_3-chaos in the forced damped pendulum equation. Kézirat, 2007.

[8] B. Bánhelyi, T. Csendes, B.M. Garay, and L. Hatvani. Computer assisted proof of chaotic behaviour of the forced damped pendulum. In *Proceedings of Colloquium on Differential and Difference Equations (CDDE2006), Brno (Czech Republic)*, Folia Facultatis Scientiarium Naturalium Universitatis Masarykianae Brunensis. Mathematica. Masaryk University, 2007. Közlésre elfogadva.

[9] B. Bánhelyi, T. Csendes, T. Krisztin, and A. Neumaier. Proof for a conjecture of Wright on a delay differential equation II. – Computer Aided Part. Kézirat, 2007.

[10] T. Csendes and B. Bánhelyi. A global optimization model for locating chaos. In *Proceedings of the International Workshop on Global Optimization (GO05), Almería (Spain)*, pages 81–85, 2005.

[11] T. Csendes, B. Bánhelyi, and L. Hatvani. Towards a computer-assisted proof for chaos in a forced damped pendulum equation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 199:378–383, 2007.

[12] T. Csendes, B.M. Garay, and B. Bánhelyi. A verified optimization technique to locate chaotic regions of a Hénon system. *Journal of Global Optimization*, 35:145–160, 2006.

[13] J. Hubbard. The forced damped pendulum: Chaos, complication and control. *Amer. Math. Monthly*, 106:741–758, 1999.

[14] E.M. Wright. A non-linear difference-differential equation. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 194:66–87, 1955.

[15] P. Zgliczyński. Computer assisted proof of the horseshoe dynamics in the Hénon map. *Random Comput. Dynam.*, 5:1–17, 1997.

A publikált cikkek megtalálhatóak a
www.inf.u-szeged.hu/∼banhelyi/Disszertacio honlapon.