

Felharmonikus keltés lézertérben és plazmonikus nanorészecskék vizsgálata

Doktori értekezés tézisei



Kasza József

Témavezetők:

Dr. Földi Péter

Egyetemi docens, tudományos munkatárs,
SZTE Elméleti Fizikai Tanszék,
ELI-ALPS

Dr. Dombi Péter András

Tudományos tanácsadó,
Wigner Fizikai Kutatóközpont,
ELI-ALPS

Szeged, 2022.

1. Bevezetés

A fény és az anyag közti kölcsönhatás jelenségeinek számos fajtája vált kulcsfontosságúvá a tudomány és technika világában az elmúlt néhány évtizedben. Ezt a folyamatot jelentősen elősegítette a lézerek megjelenése és elterjedése 1960 óta, hiszen ezzel az eszközzel olyan fény-anyag kölcsönhatási paramétertartományok váltak elérhetővé, ami új fizikai jelenségek kiaknázását tették lehetővé.

Az egyik legfontosabb ilyen jelenségcsoport a nemlineáris optikai jelenségek köre, amely az adott közeg polarizációjának nemlineáris válasza a beérkező lézertérre. Ez például lehetővé teszi új frekvenciakomponensek megjelenését a lézertér és a közeg kölcsönhatásának eredményeként. Ezek a jelenségek jellemzően a polarizáció perturbatív rendjeivel írhatók le, ennek megfelelően a magasabb rendű folyamatok egyre gyengébbek, észlelésük egyre több kihívással jár.

Azonban a nagy intenzitású, piko- és femtoszekundumos lézerek fejlesztésével elérhetővé váltak olyan lézerterek is, amelyek az atomon belüli térerősségeknek nem csak a perturbációját jelentették, hanem olyan külső teret szolgáltatottak, amely összemérhetővé vált az atomi terekkel, és ezáltal új fizikai jelenségek megfigyelését tették lehetővé. Az egyik legjellemzőbb ilyen példa a küszöbfeletti ionizáció 1979-es felfedezése [1], amely során a leggyengébben kötött elektron nem csak több foton egyidejű elnyelésére képes (ami aztán az ionizációhoz vezet), hanem a minimálisan szükségesnél több fotont is elnyel. Emiatt az atomok fotoionizációs spektrumában jellegzetes lépcsős struktúra jelenik meg. Az ehhez szükségesnél nagyobb lézertér intenzitások esetén pedig a lézertér az atomi potenciált olyannyira torzítja, hogy akár alagútmisszióval is ki tudnak lépni elektronok. Ezeket a jelensé-

geket, a hagyományos nemlineáris optikától megkülönböztetendő, számos helyen az "extrém nemlineáris optika" gyűjtőnévvel illetik.

A disszertációm alapját képező kutatások során részben szintén egy extrém nemlineáris optikai jelenség, a magasrendű felharmonikus keltés ("high order harmonic generation" HHG) vizsgálatát végeztem el. Az alapjelenség során az intenzív lézer hatására bekövetkező ionizáció után az elektron a lézer terében gyorsul, majd a "szülőionhoz" visszatérve azzal rekombinálódik, az energiát pedig koherens módon, az extrém ultraibolya (XUV) tartománybeli fotonok kisugárzásával adja le [2]. Ezt a folyamatot először gázmintákban sikerült demonstrálni [3], de az 1990-es évek eleje óta sokféle fizikai rendszerben mutatták ki, illetve előrejelezték a magasrendű felharmonikus-keltés lehetőségét, többek között plazmafelületeken, szilárd anyagokban és nanostruktúrákban [4]. Az ilyen magasrendű felharmonikus spektrumok lehetővé teszik femtoszekundumnál rövidebb lézerimpulzusok előállítását is, az XUV tartományban lényegesen rövidebb optikai ciklusnak és a felharmonikusok széles spektrumának és fázishelyes oszcillációjának köszönhetően [5]. Az attoszekundumos impulzusok előállításának technológiája pedig egy új tudományterület, az atomi elektronok ultragyors folyamataival foglalkozó attofizika megjelenését tette lehetővé az elmúlt 20 év során. Az attoszekundumos technológiák elterjedése így ma is indokoltá teszi a magasrendű felharmonikus-keltési folyamatok új megközelítésű vizsgálatát. A disszertációmban erre mutatok be példákat.

Nagy optikai térerősséget azonban nem csak az attofizikában megszokott, bonyolult felépítésű, erősített lézerrendszerekkel lehet elérni. A lézerfény energiáját ugyanis különböző nanométeres tartományba eső fizikai rendszerekkel való kölcsönhatás során a

diffrakciós korlát alatti térrészre lehet koncentrálni, amely együtt jár a külső térerősséghez képest megjelenő jelentős térnövekményekkel is. Ez a hatás már kellően kis görbületes sugarú hegygel rendelkező nanotűk esetén is megjelenik (ld. a sztatikus tereknél is érvényes csúcshatás), azonban igazán nagy, akár két nagyságrendnyi térnövekményt akkor lehet elérni, ha a fény rezonánsan kelt felületi töltéssűrűség-hullámokat ill. -oszcillációkat, ún. felületi plazmon polaritonokat (SPP) (síkfelület esetén), illetve lokalizált felületi plazmont (LSP) nanorészecskék esetén. Az ilyen mértékű térnövekmény azt is lehetővé teszi, hogy nanorészecskék környezetében egyszerű femtoszekundumos lézeroszcillátorokkal is lehet akár extrém nemlineáris optikai jelenségeket indukálni [6].

A disszertációmban bemutatom lokalizált felületi plazmonokkal kapcsolatos kutatásaim eredményeit is, amelyek szabályos felületi nanostruktúrahálózatok térnövekményével és az azokon létrehozható femtoszekundumos plazmontranziensekkel kapcsolatosak.

2. Célkitűzések

Bár a HHG folyamatának elméleti értelmezésével nagyon sok munka foglalkozik [7], minden részlet azért még ma sem tiszta, így érdemes vizsgálni a területet a megszokottól eltérő módszerekkel annak érdekében, hogy a rendszer kvantummechanikai viselkedését mélyebben megismerjük.

Ezért az a célt tűztem ki, hogy a Floquet módszer[8] és a Sturm bázis[9] együttes alkalmazásával numerikus módszert dolgoztam ki a folyamatos gerjesztő térbe helyezett hidrogénszerű atomok viselkedésének vizsgálatára. A módszer kidolgozásával

távlatilag az volt a tervem, hogy az ilyen rendszer kvantummechanikai viselkedését tanulmányozzam, és a kisebb numerikus számítási igény előnyeit kihasználva elmélyítsem a harmonikus spektrumok keletkezésével kapcsolatos ismereteinket. Célom volt az elkészített programkódok segítségével a különböző kvantummechanikai szuperpozíciós kezdőállapotokból indított atomi rendszerek spektrumainak összehasonlítása. Tervezem annak a vizsgálatát, hogyan befolyásolja a kezdőállapot és az atomi alapállapot közötti dipólmomentum mátrixelem eltűnése a spektrum kvalitatív tulajdonságait.

A folytonos gerjesztő tér mellet célom volt az impulzusszerű gerjesztés dinamikai vizsgálata, mivel erre is alkalmas a diszkrét Sturm bázis. Erre másik numerikus módszert dolgoztam ki amely lehetővé tette a felharmonikus spektrumok tanulmányozását a gerjesztő tér polarizációjának függvényében is. A kísérleti eredmények reprodukálásával, miszerint a modellben cirkuláris polarizáció mellett nincs felharmonikus keltés, validáltam a módszerem helyességét. A kérdés melyre választ kerestem az, hogy a szokásos magyarázaton túlmutató mélyebb interferometrikus kép is kirajzolódik-e a futtatások eredményeként?

Kísérleti munkám során a kutatócsoportunk céljait követve a nanostruktúrák létrehozásának folyamatában is részt vettem. Az ehhez használatos berendezések mélyebb megismerése által jól alkalmazható robusztus folyamatot dolgoztunk ki a nanorészecskék elektronsugaras litográfiával (EBL) történő létrehozására. A tapasztalatokból építkezve saját (FDTD modellszámítások segítségével készített) tervek alapján nanostruktúra mátrixok rajzolása, azok megírása EBL segítségével, majd előhívása és fémezése is a célok között volt. A továbbiakban az elkészített nanostruktúra-hálózatok extinkciós spektrumainak felvételén és

az FDTD modellszámításokban kapott térnövekményekkel való összefüggés kimutatásán dolgoztam. Pontosabban a gerjesztés és a extinkciós spektrum átfedésének függvényében vizsgáltam a térnövekményt izolált nanorúd, illetve nanorúd mártixok modellezésével egyaránt. Ez az összevetés a későbbiekben az 5. tézisponthoz kapcsolódó eredményekhez vezetett.

3. Kutatási módszerek

A magasrendű felharmonikuseltés modellezését a külső térbe helyezett atom időfüggő Schrödinger-egyenletével kezdem. Periodikus gerjesztést feltételezve, a Floquet állapotok végtelen halmaza teljes bázist alkot minden időpillanatban, ezért tetszőleges, ismert kezdő állapot esetén, annak időfejlődése kifejezhető rajta. Vagyis miután meghatároztam a Floquet kvázienergiákat és a megfelelő időben periodikus állapotokat, bármely kezdeti állapot dinamikáját ki tudtam számolni. Mivel az időfüggő differenciálegyenlet ezen módszer segítségével egy mátrix sajátérték-egyenlet formáját ölti.

A hidrogénszerű kötött állapotok ortogonálisak a kontinuumban lévő pozitív energiás állapotokra, viszont a gázmintában lezajló magasrendű felharmonikus keltés folyamatának szokásos képe (a három lépéses modell) alapján a kontinuumhoz tartozó, pozitív energiás állapotok szerepe jelentős. Ezért, a probléma megfelelő leírása érdekében, a bázisfüggvények egy másik halmazát használom, a Sturm állapotokat [10]. Ezek bázist alkotnak a normálható állapotok terében. A Floquet módszer numerikusan hatékony és kényelmes a rendszer állapotának leírásához, mivel a sajátérték-egyenletet csak egyszer kell megoldani a csonkolt altéren belül, hogy megkapjuk a különböző kiindulási állapo-

tok időfejlődését. A gerjesztő impulzus időtartamától függően a TDSE-alapú és a Sturm – Floquet módszerek kiegészítik egymást: az első megközelítés előnyösebb kevés ciklusú lézerrimpulzusoknál, míg az általam kidolgozott módszer alkalmasabb sok ciklusú vagy folytonos gerjesztés esetén.

A nagy intenzitású optikai gerjesztés központi frekvenciájához tartozó magasrendű felharmonikusok előállítására irányuló erősen nemlineáris folyamatot már észlelték különböző fizikai rendszerek céltárgyként történő felhasználásával [3, 11]. A jelenség szerepe a mögöttes erős térbeli mechanizmusok megértésének elmélyítésén túl a lézertechnikában is alapvető: az elektromágneses sugárzás rövid (akár attoszekundumos tartományú) impulzusainak megjelenése. A disszertációmban a Sturm bázis dinamikai egyenletekben is alkalmazom, itt hossz mértéket és dipólközelítést használva elliptikusan polarizált lézertérrel dolgozom és annak csak az elektromos terével való kölcsönhatást veszem figyelembe. Megvizsgálom a felharmonikusok keltés folyamatának ellipticitás függését. A numerikus megközelítem pontossága is ellenőrizhető az orientáció függetlenség monitorozásával.

Klasszikus képen egyértelmű a magasrendű felharmonikus keltés (HHG) folyamatának polarizáció függése. Amikor a gerjesztő tér cirkulárisan polarizált, a klasszikus elektronpályák soha nem térnek vissza az atommagokhoz, ami a magasrendű felharmonikus sugárzás hiányához vezet. Hasonló eredmény érhető el egy kvantummechanikai leírás alkalmazásával, amikor az elektronok dinamikáját az időfüggő Schrödinger-egyenlet adja, ahol a hullámfüggvények kötött és szabad részei elhanyagolható átfedést mutatnak cirkuláris polarizáció esetén. Valójában az elektron hullámcsomag véges térbeli kiterjedése magyarázhatja meg a magasrendű felharmonikusok fokozatos eltűnését az ellipticitás

fokának növekedésével.

A kvantummechanikai leírásban azonban nem a koordináta reprezentáció az egyetlen lehetőség, szabadon használhatunk például más, diszkrét bázist. Nyilvánvaló, hogy a Sturm bázis [10, 12] minden tagja megfelel egy pontosan definiált hullámfüggvénynek, így eredményeim fizikailag egyenértékűek a valós térben szokásos leírással. A dolgozatomban alkalmazott módszer legfontosabb előnye, hogy egyértelműen feltárja a HHG polarizációfüggésének szimmetriával kapcsolatos alapvető aspektusait.

Kutatásaim során továbbá vizsgálatokat végeztem a plazmonikus nanorészecskékkel kapcsolatos térnövekményére vonatkozóan. Az optikai válaszjel (extinkció) és a térnövekmény modellezésére egyaránt a kereskedelmi forgalomban elérhető Lumerical szoftvercsomagot használtam. A szimulációimat időbeli véges differencia módszerével végeztem (finite difference time-domain, FDTD). Az FDTD módszer egy numerikus technika, amelyet elektrodinamikai modellezésre használnak. Mivel ez egy időtartománybeli módszer, az FDTD megoldások széles frekvenciatartományt képesek lefedni egyetlen szimulációs futtatással, és a nemlineáris anyagtulajdonságokat természetes módon kezelik. A szimulációk során arany nanostruktúrákat vizsgáltam, amelyeket egy indium-ónoxid (ITO) réteggel bevont ömlesztett kvarcüveg lapka tetején helyeztem el. A gyorsabb és hatékonyabb futtatások érdekében egyetlen nanorészecskét és közvetlen környezetét vettem figyelembe a szimuláció során. Ahhoz, hogy a szomszédos illetve távolabbi részecskék hatását le tudjam írni, a szimulációs térfogat határain periodikus peremfeltételeket írtam elő a szubsztrát felületére merőleges irányokban, ami egybeesett a nanorészecske-hálózat tengelyeivel. Abszorbeáló határfeltételt szabtam meg a szubsztráttal párhuzamos irányban. A

gerjesztéshez egy lineárisan polarizált rövid lézerimpulzus időbeli alakját állítottam be, amelyet az ELI-ALPS intézetben működő HR lézerrendszer szélessávú spektrumából számítottam ki. A nanorudak extinkciós spektrumát lineárisan polarizált teljesítér szórt-tér (TFSF) sík hullámforrás használatával modelleztem. Az elnyelt és a szórt teljesítményt a forrás régióin belül és kívül kiszámolva meghatározható a részecskék extinkciós spektruma. Emiatt a részecske mátrixokat egy olyan síkhullámú forrással világítottam meg, amelynek jellemzői megegyeztek a TFSF forrással. A távotér szimulációkkal meghatározott extinkciós görbéket később összehasonlítottam a mértekkel.

A minták plazmonikus tulajdonságainak spektroszkópai jellemzését, azaz a nanostruktúra mátrixok extinkciós tulajdonságainak vizsgálatát egy Zeiss Axio Imager.z2m fénymikroszkóp segítségével mértem transzmissziós módban. Az áthaladó fényt egy beépített volfrám-halogénlámpa biztosítja, amelynek spektruma megközelítőleg egy 3080 K-es feketetest sugárzásának felel meg. A tézispontban megfogalmazott eredmények ilyen extinkciós méréseknek köszönhetőek.

4. Új tudományos eredmények

1. Összekapcsoltam a kontinuumot is tartalmazó Sturm-bázis és a periodikus gerjesztések leírására alkalmas Floquet-módszer koncepcióját. Numerikus eljárást dolgoztam ki ennek a Sturm-Floquet módszernek az implementálására, amely alkalmas az erős gerjesztő lézertér és hidrogénszerű atomok kölcsönhatásának a leírására. Ezt felhasználva vizsgáltam a magasrendű felharmonikusok keltésének dinamikáját, és a dipólmomentum operátor várható értékét

kiszámítva meghatároztam a felharmonikusok spektrumát [P1].

2. Megvizsgáltam, hogy a magasrendű felharmonikus-keltés folyamatát hogyan befolyásolja a kezdő atomi állapot megválasztása. A Sturm-Floquet módszer felhasználásával megmutattam, hogy energia sajátállapotok szuperpozíciójából kiinduló dinamika esetén a spektrumok akkor változnak meg észrevehetően, ha a kezdőállapot és az alapállapot közötti dipólmomentum mátrixelem eltűnik. Ilyenkor a spektrum levágási tartománya az ionizációs energia csökkenése, és az alapállapotba való átmenet tiltottsága miatt eltolódik az alacsonyabb frekvenciák irányába. Egy ilyen energiaállapot és az alapállapot megfelelő súlyú szuperpozíciója esetén a spektrumban kettős plató jelenik meg. Számításaim azt is megmutatták, hogy a szuperpozíciókban résztvevő állapotok relatív fázisa viszont akkor változtatja meg észrevehetően a dinamikát, ha ezek az állapotok dipól-csatoltak [P1].
3. A Sturm-bázissal kapcsolatos eredményeim általánosításaként vizsgáltam a hidrogénatom impulzusszerű gerjesztését. Az átmeneti dipólmomentum mátrixelemek felhasználásával meghatároztam a dinamikai egyenleteket, és numerikus módszert dolgoztam ki ezek megoldására. Ennek segítségével kiszámítottam a dipólmomentum várható értékének időfejlődését, és Fourier-transzformáció segítségével meghatároztam az atom által kisugárzott magasrendű felharmonikus spektrumokat különböző polarizációjú gerjesztések esetén [P3].
4. Az előző tézispontbeli módszerrel meghatároztam a magas-

rendű felharmonikus spektrumok polarizációfüggését. Eredményeim a kísérletekkel egybehangzóan azt mutatták, hogy cirkulárisan polarizált gerjesztés esetén a felharmonikusok nem jelennek meg. A jelenség szokásos valós térbeli interpretációjának egy alternatíváját is megfogalmaztam diszkrét (Sturm) bázis esetére, és megmutattam, hogy ebben a képben a kiválasztási szabályok és a cirkuláris polarizáció együttese olyan téridő szimmetriához vezet, amely megakadályozza a felharmonikusok megjelenését [P3].

5. Nanostruktúra-hálózatok mért és szimulációból adódó extinkciós spektrumait, valamint a szimulációk alapján meghatározott térnövekmény-értékeket felhasználva megmutattam, hogy a nanostruktúra-hálózatok térnövekménye annál nagyobb értékű, minél nagyobb az átfedés a gerjesztés spektruma és a nanostruktúrák extinkciós spektruma között. Az átfedést a kétféle spektrum összeszorzásával nyert görbe integráljával jellemeztem, amely paraméter függvényében az elérhető térnövekmény lineáris növekedést mutat. Annak érdekében, hogy ennek az összefüggésnek az általános jellegét bizonyítsam, izolált nanostruktúrák esetén is kiszámoltam a várható térnövekményt, és megállapítottam, hogy az adatpontok a nanostruktúra-hálózatokon megfigyelt trendbe illeszkednek [P2].

5. Összefoglalás, kitekintés

Hidrogénszerű atomokban történő felharmonikus keltéssel foglalkoztam, amely kapcsán megmutattam, hogy a Sturm bázis és a Floquet módszer numerikus ötvözése alkalmas a folyamat leírására folytonos gerjesztőtér esetén. Az általam kidolgozott

módszer azért hasznos, mert jóval kisebb számítási igény mellett képes meghatározni a keletkező felharmonikus spektrumot. A módszer segítségével továbbá azt is megmutattam, hogy a kezdőállapotok kvantummechanikai koherenciája erősen befolyásolja a HHG spektrumokat. Hidrogén energia sajátállapotokból képzett szuperpozíciókat kezdőállapotként használva megmutattam, hogy az azt alkotó állapotok súlya fontos szerepet játszik a magasrendű felharmonikus sugárzás előállításában. Ráadásul, ha a kezdő szuperpozíciós állapot komponensei dipólus csatoltak, akkor az időfüggő HHG jel érzékeny a kezdő szuperpozíciós állapot alkotóinak a kvantummechanikai fáziskülönbségére is. Ez kísérleti szempontból is fontos lehet, mert az atomi koherencia segítségével szabályozhatjuk a keltett HHG sugárzás tulajdonságait.

A Sturm-bázist felhasználva az impulzusszerű gerjesztés vizsgálatával is foglalkoztam. Számításaimat az átmeneti dipólmomentum mátrixelemekre alapozva megmutattam, hogy a módszer alkalmas a felharmonikus spektrum polarizációfüggésének kimutatására. Többek között a magasrendű harmonikusok eltűnését is leírja cirkulárisan polarizált gerjesztés esetén, ami a kísérleti eredményeket is tükrözi. Az általam kidolgozott módszer hasznos, mert mélyebb betekintést nyújt abba, hogy a kvantummechanikai interferencia hatások és a kiválasztási szabályok hogyan magyarázzák a folyamat polarizációfüggését. Ez tette lehetővé számomra, hogy rámutassak, hogy lényegében az impulzusmomentum megmaradása a felelős a felharmonikusok hiányáért cirkulárisan polarizált gerjesztő tér esetén.

Plazmonikus nanostruktúrákkal kapcsolatos eredményeim hozzájárulnak ahhoz, hogy az ilyen rendszerekben elérhető térnövekményt optimalizáljuk, különösen olyan esetekben, amikor rövid

impulzusú, femtoszekundumos gerjesztéssel akarunk létrehozni plazmontranzienseket. Ez a törekvés nem csak az alkalmazások szempontjából fontos, hanem jó néhány alapkutatói kérdés megválaszolásában is szerepet játszik. Fontos példa erre a plazmongerjesztés során különösen érdekes tulajdonságokat mutató, ún. forró elektronok dinamikájának a vizsgálata. A dolgozatomban taglalt eredmények ez alapján hozzájárultak az ultragyors plazmonikai kutatási terület fejlődéséhez.

6. Tézispontokhoz kapcsolódó referált publikációk listája

- [P1] J. Kasza, P. Dombi, and P. Földi, Sturmian-Floquet approach to high-order harmonic generation, *J. Opt. Soc. Am. B* 35, pp. A126-A130, 2018.
- [P2] Z. Pápa, J. Kasza, J. Budai, Z. Márton, G. Molnár, and P. Dombi, Tuning plasmonic field enhancement and transients by far-field coupling between nanostructures, *Appl. Phys. Lett.* 117, 081105, 2020.
- [P3] J. Kasza, I. Magashegyi, P. Dombi, and P. Földi, Polarization dependence of atomic high-order harmonic generation: Description using a discrete basis, *Phys. Rev. A* 105, 033105, 2022

7. További irodalom

- [1] Agostini, P., Fabre, F., Mainfray, G., Petite, G., and Rahman, N. K., „Free-free transitions following six-photon io-

- nization of xenon atoms,” *Physical Review Letters* **42**(17), 1127 (1979).
- [2] Farkas, G. and Tóth, C., „Proposal for attosecond light pulse generation using laser induced multiple-harmonic conversion processes in rare gases,” *Physics Letters A* **168**(5), 447 – 450 (1992).
- [3] Ferray, M., L’Huillier, A., Li, X. F., Lompre, L. A., Mainfray, G., and Manus, C., „Multiple-harmonic conversion of 1064 nm radiation in rare gases,” *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* **21**(3), L31 (1988).
- [4] Ciappina, M. F., Pérez-Hernández, J. A., Shaaran, T., Lewenstein, M., Krüger, M., and Hommelhoff, P., „High-order-harmonic generation driven by metal nanotip photoemission: Theory and simulations,” *Phys. Rev. A* **89**, 013409 (2014).
- [5] Krausz, F. and Ivanov, M., „Attosecond physics,” *Rev. Mod. Phys.* **81**, 163–234 (2009).
- [6] Dombi, P., Hörl, A., Rácz, P., Márton, I., Trügler, A., Krenn, J. R., and Hohenester, U., „Ultrafast strong-field photoemission from plasmonic nanoparticles,” *Nano letters* **13**(2), 674–678 (2013).
- [7] Lewenstein, M., Balcou, P., Ivanov, M. Y., L’Huillier, A., and Corkum, P. B., „Theory of high-harmonic generation by low-frequency laser fields,” *Phys. Rev. A* **49**, 2117–2132 (1994).

- [8] Floquet, G., „Sur les équations différentielles linéaires a coefficients périodiques,” *Ann. École Norm. Sup.* **12**, 46–88 (1883).
- [9] Goscinski, O., „Preliminary research report no. 217, quantum chemistry group, uppsala university, (1968),”.
- [10] Avery, J. and Avery, J., [*Generalized Sturmians and Atomic Spectra*], World Scientific (2006).
- [11] L’Huillier, A. and Balcou, P., „High-order harmonic generation in rare gases with a 1-ps 1053-nm laser,” *Phys. Rev. Lett.* **70**, 774–777 (1993).
- [12] Avery, J. and Avery, J., [*Solving the Schrödinger Equation: Has Everything Been Tried?*], ch. 6. The generalized Sturmian method, 111–140., Imperial College Press (2011).