Két részbenrendezett halmazokkal kapcsolatos problémáról

Doktori (Ph.D.) értekezés tézisei

Kunos Ádám

Témavezetők:

Dr. Maróti Miklós
egyetemi docens

és

Dr. Zádori László
egyetemi tanár

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
Bolyai Intézet
Szegedi Tudományegyetem, Természettudományi és Informatikai Kar

Szeged, 2021

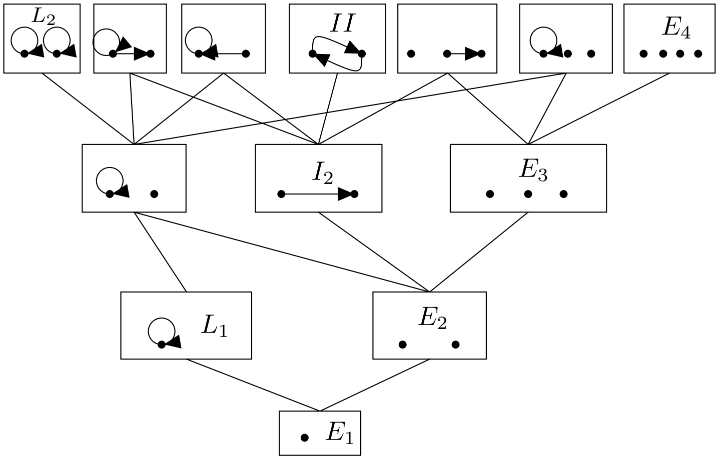
Az értekezés két részbenrendezett halmazokkal kapcsolatos problémával foglalkozik. Habár az érdeklődésük tárgyát képező struktúrák típusa (részbenrendezések) összeköti őket, a két probléma ezen túl nem kapcsolódik egymással.

1. Definiálhatóság a véges irányított gráfok beágyazás- és részstruktúra-részbenrendezéseiben

Az első probléma, ami az első fejezetet tölti ki, *elsőrendű definiálhatóság részstruktúra- és beágyazás-részbenrendezésekben.* Az első fejezet a szerző három cikkén alapul [5–7]. Hogy a témát elhelyezzük a matematika hatalmas palettáján, a következőt mondhatjuk. A kérdések logikának tűnnek: próbáljuk megfogni a kifejező erejét adott struktúrák elsőrendű nyelveinek. Hogy válaszokat kapjunk, nem használunk mást, mint alapvető kombinatorikus gondolkodást. A problémák mögött azonban ott húzódnak végtelen, bonyolult részbenrendezett halmazok szimmetriái. Ez a kutatás, valójában, Jaroslav Ježek és Ralph McKenzie egy 2009-2010-es cikksorozatának [1–4] folytatása. Az értekezés szerzőjén túl mások is felkapták ezt a témát [9, 12–14].

Menjünk bele a részletekbe egy kicsit. Jelölje $\mathcal{D}$ a véges irányított gráfok (izomorfiatípusainak) halmazát. Két irányított gráf, $G, G' \in \mathcal{D}$, esetén jelölje $G \leq G'$ azt, hogy G *beágyazható* G'-be, azaz G-t megkaphatjuk G'-ből csúcsok és élek elhagyásával. Más szóval, létezik egy $G \to G'$ injektív leképezés, amely megtartja az éleket. Egy látszólag hasonló fogalom következik. Jelölje $G \sqsubseteq G'$ azt, hogy G *részstruktúrája* G'-nek, azaz G-t megkaphatjuk G'-ből csak csúcsok elhagyásával. Más szóval, létezik egy $G \to G'$ injektív leképezés, amely megtartja az éleket és a „nem-éleket" (az élek hiányát) is. Eddig két részbenrendezésünk van: $(\mathcal{D}; \leq)$ és $(\mathcal{D}; \sqsubseteq)$ (ld. 1. és 2. ábrák). Az értekezés első fejezetében ezen részbenrendezések esetén vizsgáljuk a részbenrendezett halmazok elsőrendű nyelvének kifejező erejét.

Valószínűleg a legtermészetesebb kérdés az elemenkénti definiálhatóság kérdése. Tudjuk-e definiálni a $(\mathcal{D}; \leq)$ vagy $(\mathcal{D}; \sqsubseteq)$ részbenrendezések elemeit elsőrendű formulákkal (a részbenrendezett halmazok nyelvén)? Itt jönnek be a szimmetriák, más néven automorfizmusok. Tegyük fel, hogy, egy P részbenrendezett halmazban, a p elemet egy



1. ábra. A $(\mathcal{D}; \leq)$ részbenrendezés aljának Hasse-diagramja.

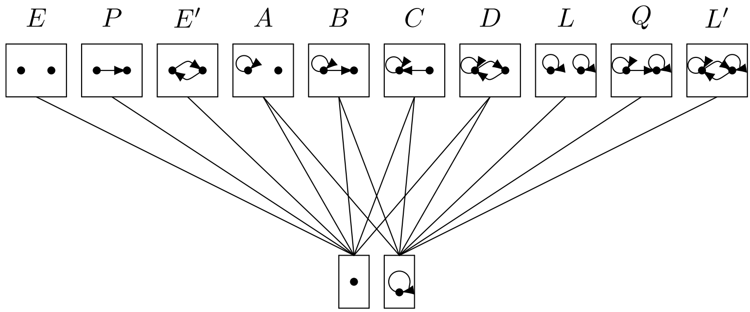
automorfizmus egy tőle különböző p'-be visz. Ekkor, természetesen, elsőrendű formulák nem tudják megkülönböztetni p-t és p'-t, hiszen ugyanazok a strukturális jellemzőik a P-n belül.

Az automorfizmusok és a definiálhatóság tekintetében is sokkal könnyebben kezelhető $(\mathcal{D}; \leq)$, így a beágyazás-részbenrendezéssel kezdjük az 1. fejezetet. Jelölje G^T a G transzponáltját, azt a gráfot, melyet G-ből az élek megfordításával kapunk. Az automorfizmust, ami G-t G^T-be képezi, könnyű felfedezni. Ennélfogva, a legerősebb állítás, amiben az elemenkénti definiálhatóság szempontjából reménykedhetünk az, hogy a $\{G, G^T\}$ halmaz minden G irányított gráf esetén definiálható. Ezt bizonyítjuk az értekezésben.

1. Tétel. *A $\{G, G^T\}$ halmaz minden $G \in \mathcal{D}$ esetén elsőrendű-definiálható a $(\mathcal{D}; \leq)$ részbenrendezésben.*

Ezt a tételt használva, bebizonyítjuk, hogy nincs más nemtriviális automorfizmus, rámutatva az erős oda-vissza kapcsolatra a definiálhatóság és az automorfizmusok között.

2. Tétel. *A $(\mathcal{D}; \leq)$ részbenrendezésnek két automorfizmusa van, a triviális, és az, ami minden irányított gráfot a transzponáltjába visz. Következésképpen, $(\mathcal{D}; \leq)$ automorfizmuscsoportja $\mathbb{Z}_2$-vel izomorf.*



2. ábra. A $(\mathcal{D}; \sqsubseteq)$ részbenrendezés Hasse-diagramjának alja.

Eddig odáig jutottunk, hogy $(\mathcal{D}; \leq)$ véges részhalmazainak definiálhatóságát lezártuk: Egy véges $S \subset \mathcal{D}$ részhalmaz akkor és csak akkor elsőrendű-definiálható, ha minden $G \in S$ esetén $G^T \in S$ is teljesül. Tehát ahhoz, hogy tovább menjünk, végtelen részhalmazok definiálhatóságát kell vizsgálnunk.

Ahogy egy híres modellelméleti állítás mutatja, nincs olyan elsőrendű formula az irányított gráfok nyelvén, mely definiálná a gyengén-összefüggő irányított gráfok halmazát. Meglepő módon, az általunk vizsgált elsőrendű nyelven van ilyen formula. Még azt is megmutatjuk, hogy egy konstans (egy konkrét, transzponáltjával nem izomorf irányított gráf) hozzáadásával az irányított gráfok teljes másodrendű nyelve kifejezhető az általunk vizsgált nyelv segítségével. Egy olyan utat járunk be, melyet Ježek és McKenzie fektettek le a [4] dolgozatban. Definiálunk egy új nyelvet, ami látszólag sokkal erősebbnek tűnik, mint a vizsgált elsőrendű nyelv. Végül megmutatjuk, hogy valójában ugyanakkora a kifejező erejük.

Jelölje $[n]$ az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmazt minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Jelölje $\mathcal{CD}$ véges irányított gráfoknak egy következőképpen definiált kis kategóriáját. Az objektumok $\mathrm{ob}(\mathcal{CD})$ halmaza álljon az olyan irányított gráfokból, melyek alaphalmaza $[n]$ valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén. Az összes $A, B \in \mathrm{ob}(\mathcal{CD})$ esetén álljon $\hom(A, B)$ az olyan $f = (A, \alpha, B)$ hármasokból, ahol $\alpha : A \to B$ megtartja az éleket. Morfizmusok kompozícióját a következőképpen képezzük. Tetszőleges $A, B, C \in \mathrm{ob}(\mathcal{CD})$

objektumok esetén ha $f = (A, \alpha, B)$ és $g = (B, \beta, C)$, akkor

$$fg = (A, \beta \circ \alpha, C).$$

Egyszerű látni, hogy $f \in \hom(A, B)$ akkor és csak akkor injektív, ha minden $X \in \mathrm{ob}(\mathcal{CD})$ esetén

$$\forall g, h \in \hom(X, A): \quad gf = hf \Leftrightarrow g = h. \tag{1}$$

teljesül. Hasonlóan, $f \in \hom(A, B)$ akkor és csak akkor szürjektív, ha az összes $X \in \mathrm{ob}(\mathcal{CD})$ esetén

$$\forall g, h \in \hom(B, X): \quad fg = fh \Leftrightarrow g = h.$$

teljesül. Ezek elsőrendű definíciók a kategóriák elsőrendű nyelvén, ennélfogva $\mathcal{CD}$-ben az izomorfizmus és beágyazhatóság elsőrendű definiálható. Ebből az következik, hogy $(\mathcal{D}, \leq)$ összes elsőrendű-definiálható relációja definiálható $\mathcal{CD}$ elsőrendű nyelvén is. Vezessünk be néhány konkrét objektumot és morfizmust:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_1 \in \mathrm{ob}(\mathcal{CD}): &\quad V(\mathbf{E}_1) = [1],\ E(\mathbf{E}_1) = \emptyset, \\
\mathbf{I}_2 \in \mathrm{ob}(\mathcal{CD}): &\quad V(\mathbf{I}_2) = [2],\ E(\mathbf{E}_1) = \{(1,2)\}, \\
\mathbf{f}_1 \in \hom(\mathbf{E}_1, \mathbf{I}_2): &\quad \mathbf{f}_1 = (\mathbf{E}_1, \{(1,1)\}, \mathbf{I}_2), \\
\mathbf{f}_2 \in \hom(\mathbf{E}_1, \mathbf{I}_2): &\quad \mathbf{f}_2 = (\mathbf{E}_1, \{(1,2)\}, \mathbf{I}_2).
\end{aligned}$$

Ezzel a négy konstanssal kibővítve a $\mathcal{CD}$ struktúrát kapjuk $\mathcal{CD}'$-t. A $(\mathcal{D}, \leq)$ részbenrendezés formulái olyan tényekkel operálnak, hogy irányított gráfok beágyazhatók-e egymásba „egészben", a gráfok belső struktúrája hivatalosan elérhetetlen. Ezzel szemben, a $\mathcal{CD}'$ struktúra elsőrendű nyelvén a beágyazhatóságon túl megfogható az irányított gráfok elsőrendű nyelve is. Az utóbbit még nem láttuk, a következő gondolatmenet azonban alátámasztja. Tetszőleges $X \in \mathrm{ob}(\mathcal{CD})$ esetén a morfizmusok $\hom(\mathbf{E}_1, X)$ halmaza természetes módon bijektív X pontjaival. Legyenek $f, g \in \hom(\mathbf{E}_1, X)$ a következők:

$$f = (\mathbf{E}_1, \{(1,x)\}, X), \quad g = (\mathbf{E}_1, \{(1,y)\}, X) \quad (x, y \in V(X)).$$

Figyeljük meg, hogy ekkor (x, y) akkor és csak akkor éle X-nek, ha

$$\exists h \in \hom(\mathbf{I}_2, X): \quad \mathbf{f}_1 h = f,\ \mathbf{f}_2 h = g \tag{2}$$

teljesül. Ez azt mutatja, hogy a $\mathcal{CD}'$ elsőrendű nyelvével elérhetjük az irányított gráfok belső struktúráját is, azaz a nyelv sokkal gazdagabb, mint az általunk vizsgált $(\mathcal{D}, \leq)$ elsőrendű nyelve. Még tovább mehetünk. Megmutathatjuk, hogy a $\mathcal{CD}'$ elsőrendű nyelve ki tudja fejezni az irányított gráfok teljes másodrendű nyelvét. Megfogalmazzuk ezt pontosabban. Azt mutatjuk meg, hogy $\mathcal{CD}'$ elsőrendű nyelve ki tud fejezni egy nyelvet, melyben az objektumok és morfizmusok feletti változókon túl vannak még

(I) kvantifikálható változók

  (a) objektumok pontjai felett,

  (b) objektumok részhalmazai felett,

  (c) két objektum közti függvények felett,

  (d) véges sok objektum szorzatának részhalmazai felett (heterogén relációk),

(II) függő változók melyek megadják egy objektum alaphalmazát és él-relációját,

(III) az apparátus, hogy jelöljük

  (a) az él-relációt elemek között,

  (b) egy függvény hatását egy elemen,

  (c) egy k-as jelenlétét egy relációban.

Azt mondjuk, hogy a $\rho \subseteq (\mathrm{ob}(\mathcal{CD}))^n$ reláció *izomorfizmus-invariáns*, ha $A_i, B_i \in \mathrm{ob}(\mathcal{CD})$ és $A_i \cong B_i$ $(1 \leq i \leq n)$ esetén

$$(A_1, \ldots, A_n) \in \rho \ \Leftrightarrow\ (B_1, \ldots, B_n) \in \rho.$$

Az $\mathrm{ob}(\mathcal{CD})$ izomorfizmus-invariáns relációinak halmaza természetes módon bijektív a $\mathcal{D}$ relációinak halmazával. Jelölje A annak az irányított gráfnak az izomorfiatípusát, melynek alaphalmaza $\{a, b, c\}$ és két éle van: (a, c) és (b, c). A következőt bizonyítjuk.

3. Tétel. *Akkor és csak akkor definiálható egy reláció a $(\mathcal{D}; \leq, A)$ struktúra elsőrendű nyelvén, ha a neki megfelelő izomorfizmus-invariáns reláció definiálható a $\mathcal{CD}'$ elsőrendű nyelvén.*

Ennek a bizonyításához valamilyen módon modellezzük a kategória működését a $(\mathcal{D}; \leq, A)$ nyelvének segítségével. Ez egy hosszú és technikai bizonyítás.

Az első fejezet második fele a $(\mathcal{D}; \sqsubseteq)$ *részstruktúra*-részbenrendezést vizsgálja. Itt rögtön valami újdonsággal találjuk szembe magunkat. Ennek a kutatási témának a történetében eddig példátlan módon, nemtriviális automorfizmusokat találunk. Habár prezentálunk egy sejtést az automorfizmuscsoportra, bizonyítani nem tudjuk azt.

4. Sejtés. *A $(\mathcal{D}; \sqsubseteq)$ részbenrendezés automorfizmuscsoportja a 768-elemű $(\mathbb{Z}_2^4 \times S_4) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_2$ csoporttal izomorf, ahol α egy adott hatás.*

Megpróbáljuk megvilágítani ezt a hatalmas automorfizmuscsoportot. Ahhoz, hogy definiáljunk egy φ automorfizmust, meg kell adnunk, hogyan kapjuk $\varphi(G)$-t. Az összes automorfizmusnak, amelyet eddig ismerünk, van egy közös jellemzője: mindannyian *lokálisak* a következő értelemben. Ahhoz, hogy megkapjuk $\varphi(G)$-t, a G irányított gráf legfeljebb kételemű részstruktúráit kell módosítanunk valamilyen adott szabály szerint. Hogy ezt világosabbá tegyük, mutatunk egy nemtriviális példát. Legyen $\varphi(G)$ az irányított gráf, amit úgy kapunk G-ből, hogy megfordítjuk az élek irányát azokon a kételemű részstruktúráin, melyekben mindkét csúcson van hurokél. Könnyű látni, hogy ez valóban egy automorfizmust ad meg. (Egyszerű rátalálni arra az automorfizmusra, ami úgy kapja $\varphi(G)$-t, hogy megfordítja az összes élet, de ez nem az.) Figyeljük meg, hogy a most ismertetett példában G módosítása lokálisan történik, nevezetesen a 2-elemű részstruktúráin. Az összes automorfizmus, amit ismerünk, ezzel a tulajdonsággal bír. Most definiálunk néhány konkrét φ_i automorfizmust. Azt fogjuk megmondani, hogyan kapjuk $\varphi_i(G)$-t a G-ből. Az egyik legtriviálisabb a következő:

- φ_1: ahol van hurokél, ott vegyük el, és fordítva, ahol nincs, oda tegyünk.

Figyeljük meg, hogy ez az automorfizmus csak az 1-elemű részstruktúrákkal operál. Most elkezdjük használni a 2. ábra jelöléseit.

- φ_2: az E-vel izomorf részstruktúrákat cseréljük E'-re és fordítva.
- φ_3: az L-lel izomorf részstruktúrákat cseréljük L'-re és fordítva.
- φ_4: fordítsuk meg az éleket azokon a részstruktúrákon melyek P-vel izomorfak.
- φ_5: fordítsuk meg az éleket azokon a részstruktúrákon melyek Q-val izomorfak.

Jelölje S_4 a szimmetrikus csoportot az $\{A, B, C, D\}$ halmazon és legyen $\pi \in S_4$. Definiáljuk

- φ_π: minden $X \in \{A, B, C, D\}$-re megváltoztatjuk az X-el izomorf részstruktúrákat $\pi(X)$-re (úgy, hogy a hurokélek helyben maradnak).

Figyeljük meg, hogy, φ_1 kivételével, ezek az automorfizmusok nem nyúlnak a hurokélekhez.

Azt sejtjük, hogy a felsoroltak generálják az automorfizmuscsoportot. Ezen generátorok után már talán természetesebbnek tűnik a sejtés 768-elemű $(\mathbb{Z}_2^4 \times S_4) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_2$ csoportja.

Már láttuk, hogy erős kapcsolat van az általunk vizsgált elsőrendű nyelvek kifejező ereje és az automorfizmusok között. A kérdés, hogy a bizonytalan automorfizmuscsoport jelen esetben megakadályozza-e, hogy a definiálhatóságról állításokat bizonyítsunk. Bár könnyen lehetne, szerencsére nem ez a helyzet. A következőt mutatjuk meg az értekezésben.

5. Tétel. *Véges sok konstans hozzáadásával a $(\mathcal{D}; \sqsubseteq)$ elsőrendű nyelve ki tudja fejezni a $(\mathcal{D}; \leq)$ elsőrendű nyelvét.*

Megjegyezzük, hogy ennek a tételnek csak azért van súlya, ezen a ponton, mert a $(\mathcal{D}; \leq)$ elsőrendű nyelvéről már korábbról tudjuk, hogy nagyon erős.

Hogyan bizonyítunk egy ilyen állítást? Annak ellenére, hogy a bizonyítás hosszú és technikai, a következő egyszerű ötleten alapul. Emlékezzünk vissza, hogy úgy kapunk irányított gráfoknak részstruktúráit, hogy csak csúcsokat hagyunk el, míg beágyazható részeit úgy kaphatunk, hogy csúcsokat és éleket is hagyhatunk el. Az utóbbit akarjuk definiálni, tehát élek elhagyását kellene valahogy „szimulálnunk”. A következő az alapötlet. Ha egy G irányított gráfban van egy (u, v) él, akkor hozzáadunk egy csúcsot és két élet, hogy „támogassuk” az élet. Nevezetesen, hozzáadjuk w-t a csúcsok halmazához és (u, w)-t és (w, v)-t az élek halmazához. Ezek után azt mondjuk, hogy az (u, v) él „támogatott”. Az az ötlet, hogy a támogatottság megszüntethető egy csúcs elhagyásával (előző példánkban w), amit tudunk csinálni részstruktúra-képzéssel. Vázlatosan, a következőt szeretnénk tenni: támogatjuk az összes élet, veszünk egy részstruktúrát, és egy végső lépésben csak a támogatott éleket hagyjuk meg a gráfban. Természetesen, sok probléma merül fel ezzel kapcsolatban. Először is, hogyan különböztetjük meg a támogató és az eredeti éleket? Ez a terv nagyon alapvető részének tűnik. Másrészt, a tervünk úgy végződött, hogy „egy végső lépésben csak a támogatott éleket hagyjuk meg a gráfban”. Úgy tűnik itt az eredeti problémába futunk újra, hiszen nem tudunk éleket elhagyni. Annak ellenére, hogy, mint látjuk, a terv eléggé hibásnak tűnik, megvalósítható. Ezt tesszük a dolgozatban.

A fenti tételhez megtalálni konstansoknak egy minimális listáját majdnem ekvivalensnek tűnik az automorfizmuscsoport meghatározásával. Ennélfogva, nem tudunk egy ilyen minimális listát adni. Egy lehetséges, de minimálistól távol álló lista állhat a legfeljebb 12 elemű irányított gráfokból. Furcsának tűnhet, hogy nem „tudjuk”, hogy milyen konstansokat használunk a bizonyításunk során. Ez azért van, mert néhány esetben a következő gondolatmenetet használjuk. Bizonyos tulajdonságait az irányított gráfoknak jellemezni lehet *lokális* módon. Például meg tudjuk mondani tartalmaz-e az irányított gráf egy nem-hurok élet a 2-elemű részstruktúrái alapján. Sokkal bonyolultabb tulajdonságokat is el lehet így mondani. Nagyon fáradtságos és hosszú volna listázni azokat a konstansokat, melyeket ilyen módon használunk a bizonyításunk során. Még ha meg is tennénk, akkor sem kapnánk egy minimális listát (habár a listánk sokkal konkrétabb lenne). Emiatt, ennek a konkrét bizonyításnak az analizálásával reménytelennek tűnik egy minimális konstanslista megállapítása (legalábbis a szerző számára).

A fenti tételnek azért van egy következménye az automorfizmuscsoportra, mely a legerősebb állítás, melyet jelen pillanatban bizonyítani tudunk:

6. Tétel. *A* $(\mathcal{D}; \sqsubseteq)$ *részbenrendezés automorfizmuscsoportja véges.*

2. Véges részbenrendezett halmazok klónjainak végesen generálhatóságáról

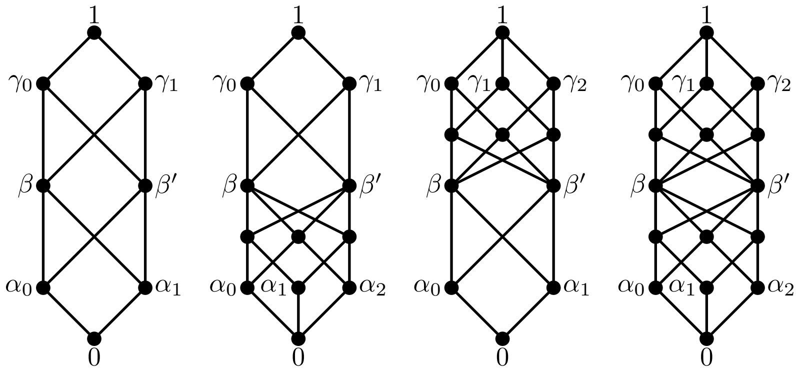
Ez a fejezet egy teljesen másik problémát vizsgál, melyben azért továbbra is részbenrendezett halmazok játsszák a főszerepet. Véges műveletek egy halmazát klónnak nevezzük, ha tartalmazza az összes projekciót és zárt a kompozícióra (függvényösszetétel). Az értékezésben mindig feltesszük, hogy a műveleteink alaphalmaza véges. Világos módon, az összes művelet (egy véges alaphalmazon) klón. Tartalmazásra nézve a legnagyobbakat, melyek kisebbek ennél, maximális klónoknak nevezzük. Ivo G. Rosenberg, egy klasszikus eredményben [10], klasszifikálta a maximális klónokat, hat osztályra bontva őket. Ezek közül öt esetén meg lett mutatva, hogy az ezekben lévő klónok végesen generáltak. A hatodik, kérdéses osztály a korlátos részbenrendezett halmazok monoton klónjainak osztálya. Azokat a részbenrendezéseket nevezzük korlátosnak, melyeknek van legnagyobb és legkisebb eleme. Néhány részeredmény már ismert. Ismert, hogy a legfeljebb 7-elemű részbenrendezések monoton klónjai végesen generáltak, továbbá azoké is, melyeknek van monoton többségi művelete. Egy zseniális dolgozatban [11], 1986-ban, Tardos Gábor megmutatta, hogy egy adott 8-elemű részbenrendezés klónja nem végesen generált. Ez volt az első alkalom, hogy egy maximális klónról kiderült, hogy nem végesen generált. Egy 1993-as dolgozatban Zádori László általánosította Tardos eredményét, karakterizálva azon soros párhuzamos részbenrendezett halmazokat, melyek klónja nem végesen generált. Azóta, egészen mostanáig senki nem talált nem végesen generált maximális klónokat, annak ellenére, hogy azt sejthetjük, hogy sok ilyen van. A 2. fejezetben egy olyan friss dolgozatot [8] mutatunk be, mely új ilyen klónokat talál. Az értekezés szerzőjét, PhD hallgató korában, második témavezetője, a fent említett Zádori professzor vezette be témába. Maróti Miklós, az első témavezetője is csatlakozott a kutatáshoz. Hárman írták a fent említett [8] dolgozatot, mely korlátos részbenrendezések egy új családjáról mutatja meg, hogy nem végesen generált a klónjuk, továbbá néhány új irányt is javasol, amerre a szerzők szerint ezek a kutatások fejlődhetnek.

A fejezet első felében bemutatjuk ezt az új családot, mely tagjainak klónjai nem végesen generáltak. Jelölje $\mathbf{k}$ a k-elemű antiláncot. Legyen A_n az a részbenrendezés, melyet úgy kapunk az n-atomú Boole-hálóból, hogy elhagyjuk a legnagyobb elemét. Jelölje B_n az A_n duálisát. Legyen $C_{m,n} = A_m + \mathbf{2} + B_n$ (ld. 3. ábra). A következőt bizonyítjuk.

7. Tétel. *Ha $m, n \geq 2$, akkor $C_{m,n}$ klónja és idempotens klónja is nem végesen generált.*

Itt, a szokásos módon, idempotens klón alatt azon monoton műveletek klónját értjük, melyek teljesítik az $f(x, \dots, x) = x$ azonosságot. A tétel bizonyítása Tardos bizonyításának analogonja.

Vázlatosan, a Tardos-bizonyítás a következőképpen megy. Mutat olyan relációkat, melyeket a kicsi aritású műveletek megőriznek, a nagyok pedig nem. Tegyük fel, hogy tudunk mutatni egy olyan r relációt,



3. ábra. A $C_{2,2}$, $C_{3,2}$, $C_{2,3}$, és $C_{3,3}$ részbenrendezett halmazok

melyet a legfeljebb n változós függvények megőriznek, de van egy olyan nagyobb változós művelet, ami nem őriz meg. Ez azt jelenti, hogy a legfeljebb n-változós monoton műveletek (véges) halmaza nem generálja a klónt.

Hogyan mutatunk egy „nagyobb változós" műveletet, ami nem őrzi meg a relációnkat? Tardos parciálisan definiálja, csak néhány gondosan megválasztott elemén az értelmezési tartománynak, úgy, hogy látszódjon, hogy tényleg nem őrzi meg a relációját. Utána azt állítja, hogy a parciálisan definiált művelete kiterjeszthető. A kiterjeszthetőség bizonyításánál nagyban támaszkodik a részbenrendezett halmazának úgynevezett *akadályainak* leírására. Ezt a leírást megadja a dolgozatban. Az akadályok olyan minimális okok, melyek miatt egy parciális leképezés nem terjeszthető ki. Őket használva egy parciális leképezés kiterjeszthetőségének bizonyítása csupán annak az ellenőrzésévé redukálódik, hogy az nem tartalmaz akadályt. A Tardos-bizonyítást nehéz átvinni más részbenrendezett halmazokra. Ebben kulcsfontosságú az akadályok leírása, mely legtöbbször kilátástalannak tűnik. Szerencsére $C_{m,n}$ esetén sikerült leírnunk az akadályokat.

Egy másik érdekes családja a korlátos részbenrendezett halmazoknak a zárt koronák családja. Ezek esetén az akadályok leírása reménytelennek tűnik, így a Tardos-bizonyítás nem átvihető. Habár az ebbe az irányba tett vizsgálataink még hiányosak, a fejezet második felében ismertetünk néhány eredményünket.

Egy monoton műveletet felszállónak nevezünk, ha nagyobb vagy egyenlő valamelyik projekciónál. Bebizonyítjuk, hogy a korlátos részbenrendezések klónjait generálják bizonyos felszálló idempotens műveletek és a 0, 1 konstans műveletek. Következésképpen, ha egy korlátos részbenrendezett halmaz felszálló idempotens műveleteinek klónja végesen generált, akkor a klónja is végesen generált. Mutatunk egy példát egy félig-korlátos részbenrendezett halmazra, melynek felszálló idempotens klónja ugyan végesen generált, de a klónja nem az.

8. Tétel. *A* $\mathbf{2}+\mathbf{2}+\mathbf{1}$ *részbenrendezett halmaz felszálló idempotens klónja végesen generált, de a klónja nem végesen generált.*

Egy másik érdekes következménye az eredményeinknek, hogy ha egy véges korlátos részbenrendezésnek a klónja végesen generált, akkor három elem generálja, egy (konkrét) felszálló idempotens művelet, és a 0, 1 konstans műveletek.

Hivatkozások

[1] J. Ježek and R. McKenzie. Definability in substructure orderings, i: Finite semilattices. *Algebra universalis*, 61(1):59, 2009.

[2] J. Ježek and R. McKenzie. Definability in substructure orderings, iii: Finite distributive lattices. *Algebra universalis*, 61(3):283, 2009.

[3] J. Ježek and R. McKenzie. Definability in substructure orderings, iv: Finite lattices. *Algebra universalis*, 61(3):301, 2009.

[4] J. Ježek and R. McKenzie. Definability in substructure orderings, ii: Finite ordered sets. *Order*, 27(2):115–145, 2010.

[5] Á. Kunos. Definability in the substructure ordering of finite directed graphs. *accepted at Order, already appeared online.*

[6] Á. Kunos. Definability in the embeddability ordering of finite directed graphs. *Order*, 32(1):117–133, 2015.

[7] Á. Kunos. Definability in the embeddability ordering of finite directed graphs, ii. *Order*, 36(2):291–311, Jul 2019.

[8] Á. Kunos, M. Maróti, and L. Zádori. On finite generability of clones of finite posets. *Order*, 36(3):653–666, Nov 2019.

[9] R. Ramanujam and R. S. Thinniyam. Definability in first order theories of graph orderings. In *International Symposium on Logical Foundations of Computer Science*, pages 331–348. Springer, 2016.

[10] I. G. Rosenberg. Über die funktionale vollständingkeit in dem mehrwertigen logiken. *Rozpravy Ceskoslovenske Akad. Ved., Ser. Math. Nat. Sci.*, 80:3–93, 1970.

[11] G. Tardos. A maximal clone of monotone operations which is not finitely generated. *Order*, 3(3):211–218, Sep 1986.

[12] R. S. Thinniyam. Definability of recursive predicates in the induced subgraph order. In *Indian Conference on Logic and Its Applications*, pages 211–223. Springer, 2017.

[13] R. S. Thinniyam. Defining recursive predicates in graph orders. *Logical Methods in Computer Science*, Volume 14, Issue 3, 2018.

[14] A. Wires. Definability in the substructure ordering of simple graphs. *Annals of Combinatorics*, 20(1):139–176, 2016.