

Késleltetett differenciálegyenletek periodikus megoldásai monoton visszacsatolás esetén

Doktori értekezés tézisei

Beretka Szandra

Témavezető: Dr. Vas Gabriella

Matematika és Számítástudományok Doktori Iskola
Bolyai Intézet, Szegedi Tudományegyetem
Szeged, 2021

1. Bevezetés

A disszertációban

$$\dot{x}(t) = -\mu x(t) + f(x(t - \tau)), \quad t > 0, \quad (1.1)$$

alakú késleltetett differenciálegyenletekkel foglalkozunk, ahol $\mu \geq 0$ és $\tau > 0$, az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ visszacsatolási függvény pedig folytonos. Pozitív, illetve negatív visszacsatolásról beszélünk, ha $xf(x) \geq 0$, illetve $xf(x) \leq 0$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

Késleltetett egyenletek esetén általában $C = C([-\tau, 0], \mathbb{R})$ a fázistér, amely a $\varphi: [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvények Banach-tere szuprémum normával. Ha x folytonos, valós értékű függvény, mely értelmezési tartománya tartalmazza a $[t - \tau, t]$ intervallumot, akkor az x_t szegmens eleme C -nek, és a következőképp van definiálva: $x_t(s) := x(t + s)$ minden $s \in [-\tau, 0]$ esetén.

Minden $\varphi \in C$ egyértelműen meghatároz egy $x^\varphi: [-\tau, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvényt, amely differenciálható $(0, \infty)$ -en, teljesíti az egyenletet minden $t > 0$ -ra, és amelyre $x_0^\varphi = \varphi$. Az ilyen x^φ függvényt nevezzük az egyenlet φ kezdeti függvényhez tartozó megoldásának. Az $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvényt is megoldásnak nevezzük, ha kielégíti az egyenletet minden valós t esetén.

A doktori értekezésben periodikus megoldásokkal kapcsolatos kérdéseket tanulmányozunk pozitív és negatív visszacsatolás esetén. A disszertáció az alábbi két publikációra épül:

- Beretka Sz., Vas G., Saddle-node bifurcation of periodic orbits for a delay differential equation, *J. Differential Equations* 269 (2020), no. 5, 4215-4252.
- Beretka Sz., Vas G., Stable periodic solutions for Nazarenko's equation, *Communications on Pure & Applied Analysis* 19 (2020), no. 6, 3257-3281.

2. Periodikus pályák nyereg-csomó bifurkációja pozitív visszacsatolás esetén

Késleltetett differenciálegyenletek periodikus pályái esetén a Hopf-bifurkáció a legszélesebb körben vizsgált bifurkációs jelenség. A dolgozat 2. fejezetében egy ritkábban tanulmányozott jelenséggel, periodikus pályák nyereg-csomó bifurkációjával foglalkozunk.

Tekintsük az

$$\dot{x}(t) = -x(t) + f_K(x(t-1)), \quad t > 0, \quad (2.2)$$

késleltetett egyenletet, ahol az f_K visszacsatolási függvény folytonos, nem-csökkenő, és függ egy K paramétertől.

Ha χ fixpontja f_K -nak (azaz $f_K(\chi) = \chi$), akkor

$$\widehat{\chi} : [-1, 0] \ni t \rightarrow \chi \in \mathbb{R}$$

egyensúlyi helyzet. Ez az egyensúlyi helyzet asszimptotikusan stabil, ha $f'_K(\chi) < 1$, és instabil, ha $f'_K(\chi) > 1$.

Ha f_K -nak több olyan fixpontja van, amelyben f'_K nagyobb 1-nél (és ezáltal a dinamikai rendszer több instabil egyensúlyi helyzettel rendelkezik), akkor nagy amplitúdójúnak hívjuk azon periodikus megoldásokat, amelyek legalább két ilyen fixpont körül oszcillálnak. Krisztin és Vas [2] dolgozatában vezette be a nagy amplitúdójú periodikus megoldás fogalmát, és ebben a munkában bizonyította egy pár nagy amplitúdójú periodikus pálya létezését speciális f_K esetén. Krisztin és Vas [3] dolgozata pedig a nagy amplitúdójú periodikus pályák instabil halmazainak geometriai tulajdonságait vizsgálta. Vas [11]-ben igazolta, tetszőleges számú instabil egyensúlyi helyzet esetén, hogy a nagy amplitúdójú periodikus pályák minden olyan konfigurációja létezik, amelyet Mallet-Paret és Sell [5] eredménye megen-
ged.

A doktori értekezés 2. fejezetében nagy amplitúdójú periodikus pályák nyereg-csomó bifurkációját igazoljuk a (2.2) egyenletre és az alábbi f_K nem-linearitásra:

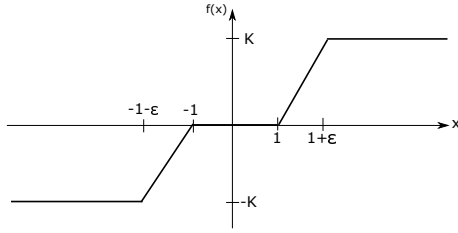
$$f_K(x) = \begin{cases} K, & x \geq 1 + \varepsilon, \\ \frac{K}{\varepsilon}(x - 1), & 1 \leq x < 1 + \varepsilon, \\ 0, & -1 \leq x < 1, \\ \frac{K}{\varepsilon}(x + 1), & -1 - \varepsilon \leq x < -1, \\ -K, & x < -1 - \varepsilon, \end{cases}$$

ahol $\varepsilon > 0$ kicsi rögzített, $K \in (6, 7)$ pedig a bifurkációs paraméter.

A következő tétel az [2] dolgozatban jelent meg mint sejtés.

2.3. Tétel. *(Periodikus pályák nyereg-csomó bifurkációja) Minden elég kicsi pozitív ε -hoz megadható egy $K^* = K^*(\varepsilon) \in (6.5, 7)$ küszöbszám, a (2.2) egyenletnek egy $p = p(\varepsilon) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nagy amplitúdójú periodikus megoldása a $K = K^*$ paraméterre, a p_0 kezdeti szegmensnek egy $B = B(\varepsilon)$ környezete C -ben és egy $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ konstans úgy, hogy az alábbiak teljesülnek.*

(i) *Ha $K \in (K^* - \delta, K^*)$, akkor a (2.2) egyenletnek nincs olyan periodikus pályája, amely áthalad B -n.*



2.1. ábra. Az f_K grafikonja

(ii) Ha $K = K^*$, akkor $\mathcal{O} = \{p_t : t \in \mathbb{R}\}$ az egyetlen periodikus pálya, melynek szegmense van B -ben.

(iii) Ha $K \in (K^*, K^* + \delta)$, akkor pontosan két nagy amplitúdójú periodikus pályának van szegmense a B halmazban.

Tudomásunk szerint csak López Nieto rendelkezik hasonló eredménnyel késleltetett differenciálegyenletekre: periodikus pályák nyereg-csomó bifurkációját igazolta egy másik késleltetett egyenletosztályra. Eredménye publikálás előtt áll [4].

A bizonyítás ötlete a következő. Bevezetünk egy F egy-dimenziós leképezést, mely a K és az ε paraméterektől is függ, majd megmutatjuk, hogy $F(\cdot, K, \varepsilon)$ fixpontjai a (2.2) egyenlet nagy amplitúdójú periodikus megoldásai között bijekció van, legalábbis lokálisan. Ezután pedig megmutatjuk, hogy hogy F nyereg-csomó bifurkáción megy át, ahogy K nő, $\varepsilon > 0$ pedig elég kicsi fix szám.

F nyereg-csomó bifurkációjában a neutrális fixpont két fixpontá válik szét, egyik vonzó, a másik pedig taszító. Ez viszont nem jelenti azt, hogy egy stabil és egy instabil periodikus pályát kapunk $K > K^*$ esetén. Tudjuk, hogy ha f_K folytonosan differenciálható, és a deriváltja nemnegatív, akkor (2.2) minden periodikus pályája instabil, lásd a 7.1. Propozíciót [11]-ben. Ezért azt feltételezzük, hogy a fenti tételben szereplő periodikus pályák is instabilak.

Az alábbiakban részletesen bemutatjuk a bizonyítás lépéseit.

Az F leképezés

A dolgozat 2.3. szakaszában speciális p periodikus függvényeket tekintünk, amelyek minden félperiódusnyi szakaszon valamely y_1, y_2, \dots, y_{10} analitikus segédfüggvények konkatenációjaként állnak elő. Az y_1, y_2, \dots, y_{10} függvényeket úgy választjuk, hogy ha p megoldása (2.2)-nek, akkor a segédfüggvények kielégítenek egy közös differenciálegyenletrendszer pe-

remfeltételekkel. Ezt a rendszert egy $F(L_2, K, \varepsilon) = L_2$ alakú fixpontegyenletre redukáljuk, ahol L_2 egy paraméter p definíciójában. Tehát bevezetünk egy egydimenziós (K -tól és ε -tól is függő) F leképezést úgy, hogy ha p megoldása a differenciálegyenletnek, akkor a p -t jellemző L_2 paraméter fixpontja $F(\cdot, K, \varepsilon)$ -nak. A konstrukció részletei a következők.

Legyen $\varepsilon \in (0, 1)$ és $K \in (6.5, 7)$. Tegyük fel, hogy

(H1) $L_i > 0$ minden $i \in \{1, 2, \dots, 5\}$ esetén,

(H2) $2L_1 + 5L_2 + 5L_3 + 3L_4 + 3L_5 = 1$,

(H3) $\theta_i > 1 + \varepsilon$ minden $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ esetén, és $\theta_i \in (1, 1 + \varepsilon)$ minden $i \in \{5, 6\}$ esetén.

Tekintsük a következő folytonos függvényeket (amelyek vízszintes eltoltjait a 2.2. ábrán láthatjuk):

(H4) $y_1 \in C([0, L_1], \mathbb{R})$, $y_1(0) = 1 + \varepsilon$ és $y_1(L_1) = \theta_1$,
 $y_2 \in C([0, L_2], \mathbb{R})$, $y_2(0) = \theta_1$ és $y_2(L_2) = \theta_2$,
 $y_3 \in C([0, L_3], \mathbb{R})$, $y_3(0) = \theta_2$ és $y_3(L_3) = \theta_3$,
 $y_4 \in C([0, L_4], \mathbb{R})$, $y_4(0) = \theta_3$ és $y_4(L_4) = \theta_4$,
 $y_5 \in C([0, L_5], \mathbb{R})$, $y_5(0) = \theta_4$ és $y_5(L_5) = 1 + \varepsilon$,
 $y_6 \in C([0, L_2], \mathbb{R})$, $y_6(0) = 1 + \varepsilon$ és $y_6(L_2) = \theta_5$,
 $y_7 \in C([0, L_3], \mathbb{R})$, $y_7(0) = \theta_5$ és $y_7(L_3) = \theta_6$,
 $y_8 \in C([0, L_4], \mathbb{R})$, $y_8(0) = \theta_6$ és $y_8(L_4) = 1$,
 $y_9 \in C([0, L_2 + L_5], \mathbb{R})$, $y_9(0) = 1$ és $y_9(L_2 + L_5) = -1$,
 $y_{10} \in C([0, L_3], \mathbb{R})$, $y_{10}(0) = -1$ és $y_{10}(L_3) = -1 - \varepsilon$,

(H5) ha $i \in \{1, 2, \dots, 5\}$, akkor $y_i(s) > 1 + \varepsilon$ az y_i értelmezési tartományának minden belső s pontja esetén,
 ha $i \in \{6, 7, 8\}$, akkor $y_i(s) \in (1, 1 + \varepsilon)$ az y_i értelmezési tartományának minden belső s pontja esetén,
 $y_9(s) \in (-1, 1)$ minden $s \in (0, L_2 + L_5)$ esetén,
 $y_{10}(s) \in (-1 - \varepsilon, -1)$ minden $s \in (0, L_3)$ esetén.

Definiáljuk a $0 < \tau_1 < \tau_2 < \tau_3 < \omega < 1$ konstansokat az alábbi módon:

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \sum_{i=1}^5 L_i, \\ \tau_2 &= \tau_1 + L_2 + L_3 + L_4, \\ \tau_3 &= \tau_2 + L_2 + L_5, \\ \omega &= \tau_3 + L_3.\end{aligned}$$

Vezessük be a 2ω -periodikus $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt a következőképp. Válasszuk a p függvényt a $[-1, -1 + \omega]$ intervallumon úgy, hogy

$$\begin{aligned}
p(t-1) &= y_1(t), & \text{ha } t &\in [0, L_1], \\
p(t-1+L_1) &= y_2(t), & \text{ha } t &\in [0, L_2], \\
p(t-1+L_1+L_2) &= y_3(t), & \text{ha } t &\in [0, L_3], \\
p(t-1+L_1+L_2+L_3) &= y_4(t), & \text{ha } t &\in [0, L_4], \\
p(t-1+L_1+L_2+L_3+L_4) &= y_5(t), & \text{ha } t &\in [0, L_5], \\
p(t-1+\tau_1) &= y_6(t), & \text{ha } t &\in [0, L_2], \\
p(t-1+\tau_1+L_2) &= y_7(t), & \text{ha } t &\in [0, L_3], \\
p(t-1+\tau_1+L_2+L_3) &= y_8(t), & \text{ha } t &\in [0, L_4], \\
p(t-1+\tau_2) &= y_9(t), & \text{ha } t &\in [0, L_2+L_5], \\
p(t-1+\tau_3) &= y_{10}(t), & \text{ha } t &\in [0, L_3],
\end{aligned} \tag{P.1}$$

lásd 2.2 ábra. Legyen

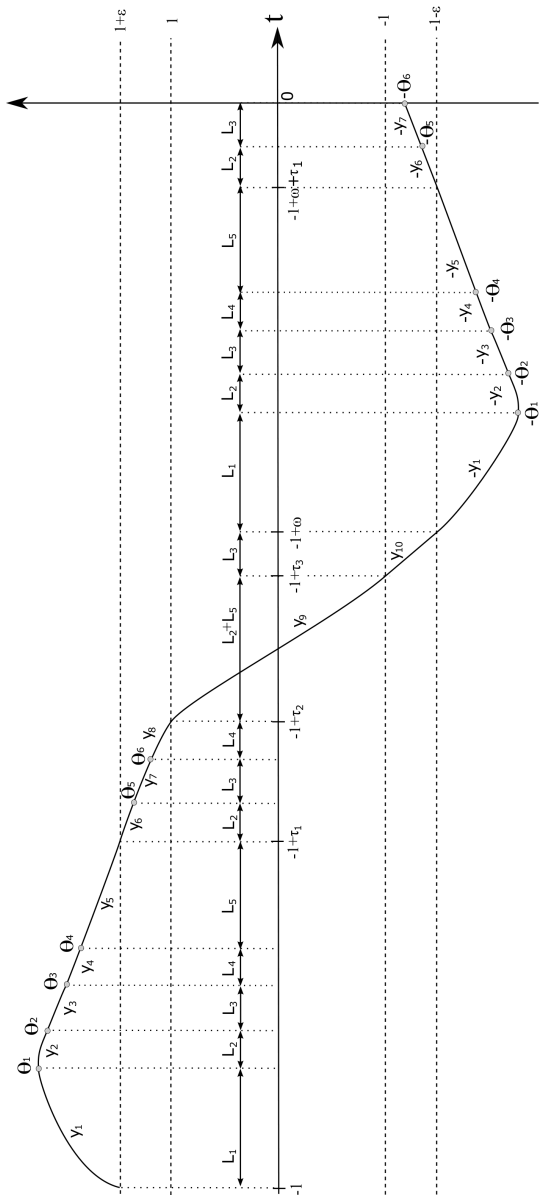
$$p(t) = -p(t - \omega) \quad \text{minden } t \in [-1 + \omega, -1 + 2\omega] \quad \text{esetén.} \tag{P.2}$$

Ezután terjesszük ki a p -t a valós számegetesenre 2ω -periodikusan.

A 2.3. szakaszban azt vizsgáljuk, hogy milyen összefüggések érvényesek az $L_1, \dots, L_5, \theta_1, \dots, \theta_6$ paraméterekre és y_1, \dots, y_{10} függvényekre, ha p kielégíti a (2.2) egyenletet minden $t \in \mathbb{R}$ esetén. Ehhez először alkalmazzuk a fenti (H2), (H5) hipotéziseket, és azt, hogy p megoldása (2.2)-nek. Egy tíz egyenletből álló közönséges differenciálegyenlet-rendszert kapunk az y_1, y_2, \dots, y_{10} függvényekre:

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1(t) &= -y_1(t) + K, & \text{ha } t &\in [0, L_1], \\
\dot{y}_2(t) &= -y_2(t) + \frac{K}{\varepsilon}(y_6(t) - 1) & \text{ha } t &\in [0, L_2], \\
\dot{y}_3(t) &= -y_3(t) + \frac{K}{\varepsilon}(y_7(t) - 1) & \text{ha } t &\in [0, L_3], \\
\dot{y}_4(t) &= -y_4(t) + \frac{K}{\varepsilon}(y_8(t) - 1) & \text{ha } t &\in [0, L_4], \\
\dot{y}_5(t) &= -y_5(t) & \text{ha } t &\in [0, L_5], \\
\dot{y}_6(t) &= -y_6(t) & \text{ha } t &\in [0, L_2], \\
\dot{y}_8(t) &= -y_8(t) - K, & \text{ha } t &\in [0, L_4], \\
\dot{y}_9(t) &= -y_9(t) - K, & \text{ha } t &\in [0, L_2+L_5], \\
\dot{y}_{10}(t) &= -y_{10}(t) - K, & \text{ha } t &\in [0, L_3].
\end{aligned} \tag{S.1}$$

Ha felhasználjuk a (H4) hipotézisben szereplő peremfeltételeket az egyenletrendszer megoldásaira, akkor egy tizenegy ismeretlenből és tíz egyenlet-



2.2. ábra. A p függvény grafikonja a $[-1, 0]$ intervallumon

ből álló algebrai egyenletrendszert kapunk az $L_1, \dots, L_5, \theta_1, \dots, \theta_6$ paraméterekre. A 11. algebrai egyenletet a (H2) hipotézis adja. Ezt az egyenletrendszert egyetlen $F(L_2, K, \varepsilon) = L_2$ alakú egyenletre redukáljuk, ahol

$$F : U \ni (L_2, K, \varepsilon) \mapsto \frac{K}{\varepsilon} (K + 1) (1 - (1 - L_4)e^{L_4}) + \theta_3 - (1 + \varepsilon) \frac{K + \theta_6}{K - 1} e^{-L_2} + L_2 \in \mathbb{R}.$$

F értelmezési tartománya:

$$U = \{(L_2, K, \varepsilon) \in \mathbb{R}^3 : \varepsilon \in (0, 1), K \in (6.5, 7), L_2 \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy F jól definiált és folytonos az U halmazon. A fenti gondolatmenet az alábbi proposíciót adja.

2.4. Propozíció. *Legyen $\varepsilon \in (0, 1)$ és $K \in (6.5, 7)$. Tegyük fel, hogy a 2ω -periodikus $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény megoldása (2.2)-nek, p az y_1, y_2, \dots, y_{10} függvények konkatenációja (P.1)-(P.2) szerint, továbbá az y_1, y_2, \dots, y_{10} függvények kielégítik a (H1)-(H5) feltételeket valamilyen $L_i > 0, i \in \{1, 2, \dots, 5\}$, és $\theta_i, i \in \{1, \dots, 6\}$ paraméterekkel. Ekkor $L_2 \in (0, \varepsilon)$ és $F(L_2, K, \varepsilon) = L_2$.*

A fenti gondolatmenet során az L_1, L_3, L_4, L_5 és $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_6$ paramétereket is kifejezzük L_2, K és ε függvényében. Ezekre az összefüggésekre a következő szakaszban szükségünk lesz.

F fixpontjai periodikus megoldásokat adnak

A 2.3. szakaszban levezettük: ha (H1)-(H5) teljesül, és $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan 2ω -periodikus megoldása (2.2)-nek, amely kielégíti (P.1)-(P.2)-t, akkor az $L_2 \mapsto F(L_2, K, \varepsilon)$ leképezésnek fixpontja van. A 2.4. szakaszban a fordított állítást bizonyítjuk: ha $\varepsilon > 0$ elég kicsi és $K \in (6.5, 7)$, akkor $L_2 \mapsto F(L_2, K, \varepsilon)$ kellően kicsi pozitív fixpontjai (2.2) periodikus megoldásait adják.

Az $L_i, i \in \{1, 3, 4, 5\}$, és $\theta_i, 1 \leq i \leq 6$, paraméterekre úgy tekintünk ebben a szakaszban mint L_2, K és ε függvényeire (és nem úgy mint a (H1)-(H5) feltételekben adott paraméterekre). Tehát tegyük fel, hogy

(H6) $L_i, i \in \{1, 3, 4, 5\}$, és $\theta_i, 1 \leq i \leq 6$, az L_2, K, ε változók 2.3. szakaszban megadott függvényei az U halmazon (lásd (C.1)-(C.10)-et a doktori értekezésben).

Könnyen ellenőrizhető, hogy L_i , $i \in \{1, 3, 4, 5\}$, és θ_i , $1 \leq i \leq 6$, folytonosak U -n.

Ebben a szakaszban a következőt is fel kell tennünk:

(H7) az y_1, \dots, y_{10} függvények a (S.1) közöséges differenciálegyenlet-rendszer azon megoldása, amelyet a disszertációban (Y.1)-(Y.10) képlettel adtunk meg.

Legyen $\widehat{L}_2 = \widehat{L}_2(K, \varepsilon)$ az L_2 paraméter azon értéke, melyre $L_4 = 0$, vagyis melyre $\theta_6 = 1$. Tekintsük az U halmaz alábbi részalmazát:

$$V = \left\{ (L_2, K, \varepsilon) : \varepsilon \in (0, 1), K \in (6.5, 7) \text{ és } L_2 \in \left(0, \widehat{L}_2(K, \varepsilon) \right) \right\} \subset U.$$

A 2.4. szakasz legfontosabb eredménye:

2.11. Következmény. *Tegyük fel (H6) és (H7) mellett, hogy $(L_2, K, \varepsilon) \in V$, $F(L_2, K, \varepsilon) = L_2$ és $\varepsilon > 0$ elég kicsi. Ekkor a (P.1)-(P.2) egyenletek által definiált 2ω -periodikus p függvény kielégíti a (2.2) késleltetett differenciálegyenletet \mathbb{R} -en.*

F nyereg-csomó bifurkációja

A 2.5. szakaszban megmutatjuk, hogy az F leképezés nyereg-csomó bifurkáción megy át.

Adott $\varepsilon \in (0, 1)$ -re legyen

$$U_\varepsilon = (-\varepsilon, \varepsilon) \times (6.5, 7),$$

és definiáljuk F_ε -t a következőképpen:

$$F_\varepsilon : U_\varepsilon \ni (L_2, K) \mapsto F(L_2, K, \varepsilon) \in \mathbb{R}.$$

2.14. Propozíció. *Bármely elég kicsi pozitív ε esetén megadható $K^* = K^*(\varepsilon) \in (6.5, 7)$ és $L_2^* = L_2^*(\varepsilon) \in (0, \widehat{L}_2(K, \varepsilon))$ úgy, hogy F_ε nyereg-csomó bifurkáción megy át az (L_2^*, K^*) pontban: létezik \mathcal{U} környezete L_2^* -nak a $(0, \widehat{L}_2(K^*, \varepsilon))$ intervallumban és $\delta_1 > 0$ konstans úgy, hogy*

- $F_\varepsilon(\cdot, K)$ -nak nincs fixpontja az \mathcal{U} halmazban $K \in (K^* - \delta_1, K^*)$ esetén,
- L_2^* az egyetlen fixpontja $F_\varepsilon(\cdot, K^*)$ -nak \mathcal{U} -ban,
- $F_\varepsilon(\cdot, K)$ -nak pontosan két fixpontja van az \mathcal{U} halmazban $K \in (K^*, K^* + \delta_1)$ esetén.

Más típusú periodikus megoldások kizárása

A fő tétel bizonyításához még meg kell mutatnunk, hogy a (2.2) késleltetett differenciálegyenlet összes periodikus megoldása F fixpontjaiból származik – legalább lokálisan, p_0 egy környezetében, ahol p_0 most a K^* paraméterhez konstruált p periodikus megoldás kezdeti szegmensét jelöli. Ez a lépés a doktori értekezés 2.6. szakaszában olvasható.

Ezekből a részeredményekből egyszerűen következik a 2. fejezet fő eredményének, a 2.3. Tételnek a bizonyítása, amely a 2.7. szakaszban szerepel.

3. Periodikus pályák egy negatív visszacsatolású egyenletre

A disszertáció 3. fejezetében a

$$\dot{y}(t) + py(t) - \frac{qy(t)}{r + y^n(t - \tau)} = 0, \quad t > 0, \quad (3.6)$$

késleltetett differenciálegyenletet vizsgáljuk a következő feltételek mellett:

$$p, q, r, \tau \in (0, \infty), \quad n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\} \quad \text{és} \quad \frac{q}{p} > r. \quad (3.7)$$

Ezt az egyenletet 1976-ban Nazarenko tanulmányozta [6] dolgozatában. Az $y(t)$ mennyiség a populáció nagyságát jelöli t időpillanatban. A változás $y'(t)$ sebessége megadható úgy, mint a $qy(t)/(r + y^n(t - \tau))$ szaporodási ráta és a $py(t)$ halálozási ráta különbsége. Mint látjuk, a halálozási ráta t -ben egyedül $y(t)$ -től, azaz a rendszer jelen állapotától függ, míg a szaporodási ráta függ y egy múltbeli értékétől is. Ez egy tipikus populációdinamikai koncepció; a késleltetés azért jelenik meg, mert az élőlényeknek időre van szüksége ahhoz, hogy születésük után szaporodóképesé váljanak. A sokat vizsgált Mackey–Glass-egyenletben a szaporodási ráta nagyon hasonló ahhoz, amit Nazarenko tekintett:

$$\dot{y}(t) = -py(t) + \frac{qy(t-1)}{r + y^n(t - \tau)}, \quad t > 0.$$

A korábbi fejezetekkel összhangban a szuprémum normával ellátott $C = C([-\tau, 0], \mathbb{R})$ Banach-tér a fázistér. A (3.6) egyenlet megoldásait, illetve a megoldások szegmenseit is úgy definiáljuk, ahogy az a Bevezetésben megjelent. A (3.7) feltétel teljesülése esetén a $\mathbb{R} \ni t \mapsto 0 \in \mathbb{R}$ és $\mathbb{R} \ni t \mapsto K = (q/p - r)^{1/n} \in \mathbb{R}$ függvények a konstans megoldások, vagyis pontosan egy pozitív egyensúlyi helyzet létezik a triviális mellett.

Ebben a fejezetben (3.6) olyan pozitív periodikus megoldásaira fókuszálunk, amelyek lassan oszcillálnak K körül. Az y megoldás lassan oszcillál K körül, ha $y - K$ szomszédos zérushelyei τ -nál nagyobb távolságra vannak egymástól.

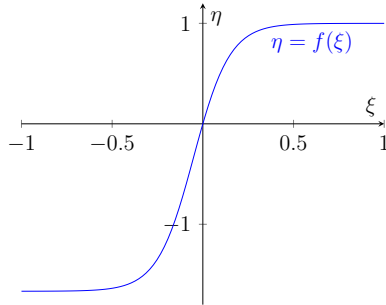
Mivel a pozitív megoldásokat vizsgáljuk, ezért használhatjuk az $x = \ln y - \ln K$ transzformációt. Ekkor az

$$x'(t) = -f(x(t - \tau)) \quad (3.1)$$

egyenletet kapjuk, ahol az $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ visszacsatolási függvényt az alábbi módon definiáljuk:

$$f(x) = p - \frac{q}{r + \left(\frac{q}{p} - r\right) e^{nx}} \quad \text{minden } x \in \mathbb{R}\text{-re,} \quad (3.8)$$

lásd a 3.1. ábrát. A transzformált egyenlet esetén értelemszerűen a 0 körül lassan oszcilláló periodikus megoldásokat tanulmányozzuk, tehát azon periodikus megoldásokat, amelyek zérushelyei τ -nál nagyobb távolságra helyezkednek el egymástól.



3.1. ábra. Az f függvény $p = 1$, $q = 4$, $r = 1,5$ és $n = 10$ esetén

Nussbaum igazolta a lassan oszcilláló periodikus megoldás globális létezését a (3.1) alakú egyenletekre és a visszacsatolási függvények széles, (3.8)-at tartalmazó osztályára. A [7, 8] dolgozatokból tudjuk, hogy (3.1)-nek

$$\tau > \tau_0 = \frac{\pi}{2f'(0)} = \frac{q\pi}{2np(q - pr)}$$

esetén van legalább egy lassan oszcilláló periodikus megoldása. Song, Wei és Han (3.6) alakban vizsgálták az egyenletet [10]-ben. Megmutatták, hogy

Hopf-bifurkáció történik a következő paraméterértékekre:

$$\tau_k = \frac{1}{f'(0)} \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) = \frac{q}{np(q-pr)} \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right), \quad k \geq 0.$$

Song és szerzőtársai nem tudták meghatározni a periodikus pályák stabilitását a bifurkációs pontoktól távol eső τ paraméterekre. A lassan oszcilláló periodikus megoldás unicitását sem vizsgálták. A disszertációban ezeket kérdéseket tanulmányozzuk.

A 3. fejezet fő eredményei a következő tételek.

3.8. Tétel. *Legyenek a p, q, r és n paraméterek olyanok, ahogy a (3.7) feltételben szerepelnek.*

(i) *Ha $\tau > 0$ elég nagy, akkor a (3.6) Nazarenko-egyenletnek egyetlen olyan pozitív $\bar{y} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periodikus megoldása létezik, amely lassan oszcillál K körül. Ez a periodikus pálya aszimptotikusan stabil, és az alábbi halmaz része a vonzási tartományának:*

$$\{ \phi : y^\phi(t) > 0, \text{ ha } t \geq -\tau, \text{ és } y_t^\phi - K\text{-nak legfeljebb egy előjelváltása van nagy } t \text{ esetén} \}.$$

(ii) *Ha $\bar{\omega}$ jelöli \bar{y} minimális periódusát, és*

$$\omega = \left(2 + \frac{q-pr}{pr} + \frac{pr}{q-pr} \right) \tau, \quad (3.9)$$

akkor $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \bar{\omega}/\omega = 1$.

A periodikus megoldás egyértelműsége természetesen mindig időbeli eltolás erejéig értendő.

Ha rögzítjük a p, q, r és τ paramétereket, akkor meghatározhatjuk a periodikus megoldás aszimptotikus alakját, ahogy $n \rightarrow \infty$.

3.9. Tétel. *Legyenek a p, q, r és τ paraméterek olyanok, ahogy a (3.7) feltételben szerepelnek. Tegyük fel, hogy $\tau \min\{p, q/r - p\} > 8$ is teljesül.*

(i) *A 3.8. Tétel (i). állítása igaz minden elég nagy n esetén.*

(ii) *Definiáljuk a $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt a*

$$[0, \omega] \ni t \mapsto \begin{cases} -pt, & 0 \leq t < \tau, \\ \left(\frac{q}{r} - p\right)t - \frac{q}{r}\tau, & \tau \leq t < \left(2 + \frac{pr}{q-pr}\right)\tau, \\ -pt + \left(\frac{q}{r} + p + \frac{p^2r}{q-pr}\right)\tau, & \left(2 + \frac{pr}{q-pr}\right)\tau \leq t < \omega \end{cases} \in \mathbb{R}$$

függvény ω -periodikus kiterjesztéseként, ahol ω -t (3.9)-ben adtuk meg. Jelölje $\bar{\omega}$ az (i). pontban kapott \bar{y} periodikus megoldás minimális periódusát.

Legyen $\eta_1 > 0$ és $\eta_2 > 0$ tetszőleges. Ha n elég nagy, akkor létezik $T \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $|\bar{\omega} - \omega| < \eta_1$, és

$$\left| \ln \frac{\bar{y}(t+T)}{K} - v(t) \right| < \eta_2 \quad \text{minden } t \in [0, \bar{\omega}] \quad \text{esetén.}$$

A tételek bizonyításai hasonlóak, és a következésképpen építjük fel őket. A (3.6) egyenletet (3.1) alakban vizsgáljuk a (3.8) nemlinearitással. Első lépésként a

$$v'(t) = -g(v(t - \tau))$$

"határegyenlet" egy lassan oszcilláló periodikus megoldását számoljuk ki, ahol $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan lépcsős függvény, mely közel van (3.8)-hoz a 0 egy környezetén kívül. Ezután úgy tekintjük (3.8)-at mint g perturbációját, és követjük Walther [12]-ben (egy másik differenciálegyenlet-osztályra) bemutatott technikáját, hogy információt nyerjünk (3.1) azon megoldásairól, amelyek kezdeti szegmensei az

$$\mathcal{A}(\beta) = \{ \phi \in C : \phi(t) \geq \beta \text{ minden } -\tau \leq t \leq 0 \text{ esetén, } \phi(0) = \beta \} \subseteq C$$

halmazba esnek. Igazoljuk, hogy ezen megoldások egy bizonyos idő elteltével visszatérnek $\mathcal{A}(\beta)$ -ba (β megfelelő választása esetén). Bevezetjük a $P : \mathcal{A}(\beta) \rightarrow \mathcal{A}(\beta)$ Poincaré-leképezést és meghatározunk ehhez a leképezéshez egy $L(P)$ Lipschitz-konstanst. Ha τ vagy n elég nagy, akkor $L(P) < 1$, azaz P kontrakció. A P leképezés egyetlen fixpontja egy lassan oszcilláló periodikus megoldás kezdeti szegmense. Emellett Nussbaum [9] dolgozatát használjuk, hogy megmutassuk, minden lassan oszcilláló periodikus megoldásnak van szegmense $\mathcal{A}(\beta)$ -ban, tehát a lassan oszcilláló periodikus megoldás eltolás erejéig egyértelmű. A stabilitás Kaplan és Yorke [1] dolgozatából következik. A többi állítás ezután könnyen igazolható.

Az alábbiakban ismertetjük a bizonyítás részleteit.

A határegyenlet

Tekintsük a (3.8) visszacsatolási függvényt. Legyen $A = q/r - p > 0$ és $B = p > 0$. Vegyük észre, hogy ha p, q, r rögzítve van (3.7) szerint, akkor

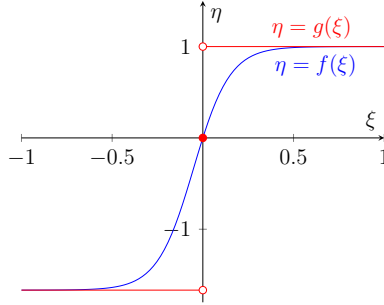
$$f(x) \rightarrow p - \frac{q}{r} = -A, \quad \text{ha } nx \rightarrow -\infty,$$

és

$$f(x) \rightarrow p = B, \quad \text{ha } nx \rightarrow \infty.$$

A 3.3. szakaszban ezért az

$$v'(t) = -g^{A,B}(v(t - \tau)) \tag{3.11}$$



3.2. ábra. $g^{A,B}$ grafikonja

"határegyenletet" vizsgáljuk, ahol $g^{A,B} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a következő függvény:

$$g^{A,B}(v) = \begin{cases} -A, & v < 0, \\ 0, & v = 0, \\ B, & v > 0. \end{cases}$$

3.10. Propozíció. *A (3.11) egyenletnek periodikus megoldása az alábbi módon definiált $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény:*

$$v(t) = \begin{cases} -Bt, & \text{ha } t \in [0, \tau], \\ At - (A + B)\tau, & \text{ha } t \in [\tau, \sigma + \tau], \\ -Bt + \left(A + 2B + \frac{B^2}{A}\right)\tau, & \text{ha } t \in [\sigma + \tau, \omega], \end{cases}$$

ahol $\sigma = (1 + B/A)\tau$ az első pozitív zérushelye, és $\omega = (2 + A/B + B/A)\tau$ a második pozitív zérushelye, illetve a minimális periódusa v -nek.

Becslések

Tetszőleges $A > 0$, $B > 0$, $\beta > 0$ és $0 < \varepsilon < \min\{A, B\}/2$ esetén jelölje $\mathcal{N}(A, B, \beta, \varepsilon)$ azon folytonos $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvények halmazát, melyekre igaz, hogy

$$-A \leq f(x) \leq -A + \varepsilon, \quad \text{ha } x < -\beta,$$

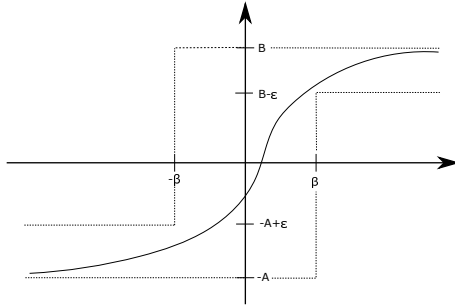
$$-A \leq f(x) \leq B, \quad \text{ha } -\beta \leq x \leq \beta,$$

és

$$B - \varepsilon \leq f(x) \leq B, \quad \text{ha } x > \beta.$$

A 3.3. ábra $\mathcal{N}(A, B, \beta, \varepsilon)$ egy elemét ábrázolja. A (3.8) függvény eleme a $\mathcal{N}(A, B, \beta, \varepsilon)$ halmaznak, ha $A = q/r - p$, $B = p$, $0 < \varepsilon < \min\{A, B\}/2$ és

$$\beta \geq \max \{f^{-1}(B - \varepsilon), -f^{-1}(-A + \varepsilon)\}.$$



3.3. ábra. $\mathcal{N}(A, B, \beta, \varepsilon)$ egy eleme

A disszertáció 3.4. szakaszában a (3.1) egyenlet $x = x^\phi$ megoldásait vizsgáljuk, ha $f \in \mathcal{N}(A, B, \beta, \varepsilon)$ és

$$\phi \in \mathcal{A}(\beta) = \{\phi \in C : \phi(t) \geq \beta \text{ minden } -\tau \leq t \leq 0 \text{ esetén, } \phi(0) = \beta\} \subseteq C.$$

Bizonyítjuk, hogy β és ε megfelelő választása esetén létezik $q = q(\phi) > 0$ és $\tilde{q} = \tilde{q}(\phi)$ úgy, hogy

$$x_q \in -\mathcal{A}(\beta) = \{\phi \in C : \phi(t) \leq -\beta, \text{ ha } -\tau \leq t \leq 0, \phi(0) = -\beta\},$$

és $x_{q+\tilde{q}} \in \mathcal{A}(\beta)$.

Úgy tudjuk igazolni, hogy $x_q \in -\mathcal{A}(\beta)$ és $x_{q+\tilde{q}} \in \mathcal{A}(\beta)$ valamely $q, \tilde{q} > 0$ -ra, hogy becsléseket adunk $|x^\phi - v|$ -re, ahol v az előző szakaszban konstruált speciális periodikus függvény. Ez a technika Walther [12] dolgozatából származik.

Lipschitz-folytonos leképezések

Az előző szakasz eredményei alapján bevezethetjük a $P : \mathcal{A}(\beta) \rightarrow \mathcal{A}(\beta)$ Poincaré-leképezést. Következő lépésként, a disszertáció 3.5. szakaszában meghatározzuk P egy Lipschitz-konstansát.

Tegyük fel, hogy $f \in \mathcal{N}(A, B, \beta, \varepsilon)$ Lipschitz-folytonos az $L(f)$ Lipschitz-konstanssal. Legyenek $L_\beta = L_\beta(f)$ és $L_{-\beta} = L_{-\beta}(f)$ Lipschitz-konstansok az $f|_{[\beta, \infty)}$ és $f|_{(-\infty, -\beta]}$ megszorításokhoz.

A Φ jelölést fogjuk használni a (3.1) egyenlet által indukált szemidynamikai rendszerre:

$$\Phi: [0, \infty) \times C \ni (t, \phi) \mapsto x_t^\phi \in C.$$

Tekintsük az

$$R: \mathcal{A}(\beta) \ni \phi \mapsto \Phi(q(\phi), \phi) = x_{q(\phi)}^\phi \in -\mathcal{A}(\beta)$$

leképezést.

Válasszuk ε -t és β -t úgy, mint az előző szakaszban. Ekkor igaz a következő.

3.20. Következmény. *Az R leképezés Lipschitz-folytonos az alábbi Lipschitz-konstanssal:*

$$L(R) = 3\tau L_\beta (1 + \delta L(f)) (1 + (N - 1)\tau L_{-\beta}(1 + \tau L_{-\beta})^{N-2}),$$

ahol $N = \lceil 1 + B/A \rceil$ és $\delta = 2\beta/(B - \varepsilon)$.

Tekintsük most a

$$Q: -\mathcal{A}(\beta) \ni \phi \mapsto \Phi(\tilde{q}(\phi), \phi) \in \mathcal{A}(\beta)$$

leképezést. Világos, hogy $P = Q \circ R$.

3.21. Propozíció. *A Q leképezés egy Lipschitz-konstansa:*

$$L(Q) = 3\tau L_{-\beta} \left(1 + \tilde{\delta} L(f)\right) \left(1 + (\tilde{N} - 1)\tau L_\beta(1 + \tau L_\beta)^{\tilde{N}-2}\right),$$

ahol $\tilde{N} = \lceil 1 + A/B \rceil$ és $\tilde{\delta} = 2\beta/(A - \varepsilon)$.

Következményként az alábbi állíthatjuk.

3.22. Propozíció. *A $P: \mathcal{A}(\beta) \ni \phi \mapsto Q(R(\phi)) \in \mathcal{A}(\beta)$ Poincaré-leképezés Lipschitz-folytonos az alábbi Lipschitz-konstanssal:*

$$\begin{aligned} L(P) &= L(R)L(Q) \\ &= 3\tau L_\beta(1 + \delta L(f)) (1 + (N - 1)\tau L_{-\beta}(1 + \tau L_{-\beta})^{N-2}) \\ &\quad \times 3\tau L_{-\beta} \left(1 + \tilde{\delta} L(f)\right) \left(1 + (\tilde{N} - 1)\tau L_\beta(1 + \tau L_\beta)^{\tilde{N}-2}\right). \end{aligned}$$

Ha $L(P) < 1$, akkor P kontrakció, és egyetlen egy fixpontja van, ami egy lassan oszcilláló periodikus megoldás kezdeti szegmense.

A periodikus megoldások értékkészletéről

A disszertáció 3.6. szakaszában megmutatjuk, hogy ha τ elég nagy, és β elég kicsi, akkor (3.1) bármely $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lassan oszcilláló periodikus megoldásának van szegmense $\mathcal{A}(\beta)$ -ban.

Nussbaum [9] dolgozatát követjük, ezért tekintsük a (3.1) egyenletet az

$$\tilde{x}'(t) = -\tau f(\tilde{x}(t-1)) \quad (3.33)$$

alakban, ahol $\tilde{x}(t) = x(\tau t)$. Az f függvényt (3.8)-ban definiáltuk. Legyen

$$d = \frac{1}{2} \min\{-f(-1), f(1), f'(0)\}.$$

Nussbaum [9] dolgozatában konkrét becsléseket ad a lassan oszcilláló periodikus megoldások értékkészletére a számegegyenes különböző részintervallumain. Ezen becslések azonnali következménye a következő propozíció.

3.26. Propozíció. *Ha $\tau d > 4$, és B az f függvény egy felső korlátja, akkor (3.33) minden lassan oszcilláló periodikus $\tilde{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ megoldásához adható egy 1 hosszúságú I intervallum úgy, hogy*

$$\tilde{x}(t) \geq \frac{\tau(\sqrt{B^2 + d^2} - B)}{2} \quad \text{minden } t \in I \quad \text{esetén.}$$

3.27. Következmény. *Ha $\tau d > 4$ és $\beta \leq \tau(\sqrt{B^2 + d^2} - B)/2$, ahol B az f függvény egy felső korlátja, akkor a (3.1) egyenlet bármely lassan oszcilláló periodikus megoldásának van szegmense $\mathcal{A}(\beta)$ -ban.*

A fejezet legfontosabb eredményeinek bizonyítása

A 3.8. Tétel bizonyítása vázlatosan a következő. Megmutatjuk, hogy ε és β választható úgy, hogy a disszertáció előző szakaszaiban leírt propozíciók teljesüljenek: ε -t fix, kicsi pozitív számnak, β -t $\alpha\tau$ -nak kell választani, ahol $\alpha > 0$ szintén rögzített kicsi szám. Ekkor minden elég nagy τ esetén $L(P) < 1$, vagyis P kontrakció, valamint a 3.27. Következmény feltételei is teljesülnek. Ebből kapjuk a lassan oszcilláló periodikus megoldás létezését és egyértelműségét. A stabilitás következik Kaplan és Yorke [1] dolgozatának 2.1. Tételéből és 2.5. Megjegyzéséből. A lassan oszcilláló periodikus megoldás minimális periódusára vonatkozó állítást Nussbaum [9] dolgozatának 1. Tételéből nyerjük.

A 3.9. Tétel hasonlóan igazolható. A periodikus megoldás aszimptotikus alakját leíró állítás azonnal adódik azokból a becslésekből, amelyeket $|x^\phi - v|$ -re adtunk a 3.4. szakaszban.

Hivatkozások

- [1] J. L. Kaplan, J. A. Yorke, On the stability of a periodic solution of a differential delay equation, *SIAM J. Math. Anal.* 6 (1975), 268–282.
- [2] T. Krisztin, G. Vas, Large-amplitude periodic solutions for differential equations with delayed monotone positive feedback, *J. Dynam. Differential Equations*, 23 (2011), 727–790.
- [3] T. Krisztin, G. Vas, The Unstable Set of a Periodic Orbit for Delayed Positive Feedback, *J. Dynam. Differential Equations*, 28 (2016), 805–855.
- [4] A. López Nieto, Periodic orbits of delay equations with monotone feedback and even-odd symmetry, <https://arxiv.org/abs/2002.01313>
- [5] J. Mallet-Paret, G. R. Sell, The Poincaré-Bendixson theorem for monotone cyclic feedback systems with delay, *J. Differential Equations*, 125 (1996), no. 2, 441–489.
- [6] V. G. Nazarenko, Influence of delay on auto-oscillations in cell populations, *Biofisika* 21 (1976), 352–356.
- [7] R. D. Nussbaum, Periodic solutions of some nonlinear autonomous functional differential equations, *Ann. Mat. Pura Appl.* 101 (1974), 263–306.
- [8] R. D. Nussbaum, A global bifurcation theorem with applications to functional differential equations, *J. Funct. Anal.* 19 (1975), 319–338.
- [9] R. D. Nussbaum, The range of periods of periodic solutions of $x'(t) = -\alpha f(x(t-1))$, *J. Math. Anal. Appl.* 58 (1977), no. 2, 280–292.
- [10] Y. Song, J. Wei, M. Han, Local and global Hopf bifurcation in a delayed hematopoiesis model, *Internat. J. Bifur. ChaosAppl. Sci. Engrg.* 14 (2004) 3909–3919.
- [11] G. Vas, Configurations of periodic orbits for equations with delayed positive feedback, *J. Differential Equations*, 262 (2017), 1850–1896.
- [12] H.-O. Walther, Contracting return maps for some delay differential equations, Topics in functional differential and difference equations (Lisbon, 1999), *Fields Inst. Commun.*, 29, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2001), 349–360.

Társszerzői nyilatkozat

Kijelentem, hogy ismerem Beretka Szandra Ph.D. fokozatra pályázó „Késleltetett differenciálegyenletek periodikus megoldásai monoton visszacsatolás esetén” című disszertációját melyet a Szegedi Tudományegyetemre nyújt be. A következő publikációk közös eredmények:

- Beretka Sz., Vas G., Saddle-node bifurcation of periodic orbits for a delay differential equation, *J. Differential Equations* 269 (2020), no. 5, 4215-4252.
- Beretka Sz., Vas G., Stable periodic solutions for Nazarenko's equation, *Communications on Pure & Applied Analysis* 19 (2020), no. 6, 3257-3281.

Beretka Szandra hozzájárulása a fent felsorolt cikkekhez 50–50 %. Kijelentem, hogy ezeket a publikációkat nem használtam fel és nem is fogom felhasználni tudományos fokozat megszerzéséhez.

Szeged, 2021. február 15.

Dr. Vas Gabriella