# Globális stabilitás a késleltetett logisztikus leképezésre

Doktori (Ph.D.) értekezés tézisei

**Dudás János**

Témavezető:

Krisztin Tibor

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
Bolyai Intézet

Szegedi Tudományegyetem

Szeged

2021.

Az egyik legismertebb nemlineáris leképezés a logisztikus leképezés $[0,1] \ni x \mapsto ax(1-x) \in \mathbb{R}$, ahol $a > 0$ a paraméter. A disszertációban az

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_{n-d})$$

késleltetett logisztikus differenciaegyenletnek a globális stabilitását vizsgáljuk $a > 0$ és $d \in \mathbb{N}$ esetén. Az egyenlet ekvivalens módon az

$$F_d : \mathbb{R}^{d+1} \ni u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{d+1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ au_{d+1}(1 - u_1) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d+1},$$

alakba írható. Jelen mű a szerző [1, 2] cikkein alapul, melyekben a $d = 1$, illetve $d = 2$ esetekben vizsgáljuk a késleltetett logisztikus leképezés globális stabilitását.

Annak ellenére, hogy módszerünket egy speciális egyenleten, a logisztikus leképezésen mutattuk be, úgy gondoljuk, hogy könnyedén alkalmazható, illetve kiterjesztető más, hasonló leképezésekre is, például a Ricker (see [3]), illetve a Pielou leképezésre (see [4]). Így a késleltetett logisztikus leképezés tekinthető egy esettanulmánynak is a disszertációban ismertetett módszerhez, ugyanis a gondolatmenetünk megismételhető a fenti leképezésekre is a módszer magától értetődő módosításaival.

Jól ismert, hogy $a \in (0,1]$ esetén az $F_d$ függvénynek a

$[0,1]^{d+1}$ halmazban az origó az egyetlen fixpontja, amely lokálisan stabil és $\lim_{n\to\infty} F_d^n(u) = 0$ minden $u \in [0,1]^{d+1}$ esetén. Amennyiben $a > 1$, akkor egy nemtriviális $u_A = (A, A, \ldots, A)$ fixpont jelenik meg $[0,1]^{d+1}$-ben, $A = 1 - \frac{1}{a}$ értékkel. Továbbá létezik egy $d$-től függő $a_0 > 1$ úgy, hogy ez a fixpont lokálisan aszimptotikusan stabil, ha $a \in (1, a_0)$, és instabil, ha $a > a_0$. Az $a = a_0$ helyen Neimark–Sacker bifurkáció következik be. Megmutatjuk, hogy a következő sejtés teljesül $d \in \{1, 2\}$ érték esetén.

**Sejtés.** *A nemtriviális $u_A$ fixpont lokálisan stabil, továbbá $\lim\limits_{n\to\infty} F_d^n(u) = u_A$ minden $a \in (1, a_0]$ és $u \in S^d$ esetén, ahol*

$$S^d = \Big\{ u \in [0,1)^d \times (0,1) : a^k u_{d+1} \prod_{j=1}^{k} (1 - u_j) < 1, \\ k \in \{1, 2, \ldots, d\} \Big\}.$$

A fenti kifejezésben az $S^d$ halmaz pontosan azokat az $(x_1, x_2, \ldots, x_{d+1}) \in \mathbb{R}_+^{d+1}$ pontokat tartalmazza, melyekre $x_n > 0$ teljesül minden $n > d+1$ esetén. A sejtés olyan alakba is átfogalmazható, hogy az $u_A$ fixpont lokális stabilitása maga után vonja annak globális stabilitását. Ez a tulajdonság számos esetben teljesül, lásd például [5, 6, 4, 3, 7], azonban nem igaz mindig, lásd [8].

Kis paraméterértékek esetén, pontosabban $a \in \left(1, \frac{d+2}{d+1}\right]$ értékekre, ahol $d = 1$, illetve $d = 2$, tisztán analitikus bizonyítást adunk a sejtésre. Ezzel szemben a disszertáció nagy részét képző esetben, amikor $a < a_0$ értéke közel van $a_0$-hoz, a bizonyítás analitikus és megbízható, számítógéppel támogatott módszerek ötvözésével történik. Először az $u_A$ fixpont körül analitikus eszközökkel konstruálunk egy $\mathcal{M}$ vonzó tartományt, azaz belátjuk, hogy minden $u \in \mathcal{M}$ esetén $\lim_{n\to\infty} F_d^n(u) = u_A$. Majd megbízható numerikus módszerek segítségével megmutatjuk, hogy minden $u \in S^d$ esetén az $F_d^n(u)$ iteráltak előbb-utóbb belelépnek az analitikusan konstruált $\mathcal{M}$ környezetbe, azaz létezik $n_0 = n_0(u)$ úgy, hogy $F_d^{n_0}(u) \in \mathcal{M}$. Tehát $S^d$ minden pontja az $u_A$ vonzástartományában van. Jelen esetben a megbízható azt jelenti, hogy minden lehetséges numerikus hiba kontrollálva van intervallum aritmetikai technikákkal, ezáltal a számítógéppel támogatott rész is matematikailag precíz eredményeket szolgáltat.

Az $a_0$-tól távolabbi paraméterértékek esetén az $u_A$ körüli vonzó környezet konstruálásra első megközelítésként standard linearizációs technikákat alkalmazunk. Azonban az így nyert vonzó környezet ráhúzódik a fixpontra, ahogy $a$ tart $a_0$-ba. Emiatt az $a_0$-hoz közeli paraméterértékek esetén ez a környezet nem lesz elegendően nagy a számítógéppel támogatott rész számára a módszerünk második felében. Így e paraméterértékek esetén egy másik megközelítésre is szükségünk van, annak érdekében, hogy a szükséges méretű vonzó környezetet megkapjuk.

Az $a_0$-hoz közeli $a$ értékekre a Neimark–Sacker bifurkációs normálformát használjuk a $d = 1$ esetben. Pontosabban sima és invertálható leképezésekkel a

$$w \mapsto \lambda w + c_1 w^2 \overline{w} + R_2,$$

alakba transzformáljuk a leképezést, ahol $c_1$ a Lyapunov-együttható és $R_2 = O\left(|w|^4\right)$ a magasabbfokú tagokat jelöli. Ezután megmutatjuk, hogy létezik $\rho_0 > 0$ úgy, hogy

$$\left|\lambda w + c_1 w^2 \overline{w} + R_2\right| < |w|$$

minden $w \in \mathbb{C}$-re, ahol $0 < |w| \leq \rho_0$. Ez biztosítja, hogy a $B_{\rho_0} = \{w \in \mathbb{C} : \ |w| \leq \rho_0\}$ halmaz benne van a vonzó környezetben. Mivel a számítógépes részben szükségünk van a konstruált környezet méretére is, ezért a normálformás transzformáció során nem elegendő mindössze az alacsonyabbrendű tagoknak az együtthatóit meghatározni, ahogy tennénk egy szokásos bifurkációs vizsgálat esetén. Ezek az alacsonyabbrendű tagok egy elegendően kis környezet létezését biztosítják csak, de annak explicit méretét nem szolgáltatják. Emiatt lényeges, hogy a transzformáció során nyomon kövessük a magasabbrendű tagokat, valamint hogy amennyire lehetséges, pontos becslést adjunk rájuk azért, hogy elegendően nagy $\mathcal{M}$ környezetet kapjunk.

A $d = 2$ esetben a Neimark–Sacker bifurkációs normálforma adaptálása a célunk. Ehhez azonban új ötletekre van szükségünk, ugyanis az $F_3(u)$ egy háromdimenziós függvény, így a módszer átültetése magasabb dimenzióba nem magától értetődő. A disszertáció újdonsága abban rejlik, hogy a centrális sokaság és a Neimark–Sacker bifurkációs normálforma segítségével explicit módon konstruálunk egy megfelelő méretű vonzó környezetet a háromdimenziós logisztikus leképezés nemtriviális fixpontja körül.

E célból a centrális sokaságra való redukció egy közelítő változatát hajtottuk végre. Először tekintettük a centrális sokaság $\phi(z)$ negyedrendű polinomiális közelítését, majd az $y = \phi(z)$ körüli

$$T(r, C) = \{(z, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} : \ |z| \leq r, \ |y - \phi(z)| \leq C|z|^5\}$$

halmazt, ahol $r$ és $C$ pozitív konstansok. A $T(r, C)$ halmaz megfelelő alakja biztosítja, hogy adaptálni tudjuk a kétdimenziós technikát magasabb dimenzióba.

Először az $y$ irányú dinamikát vizsgáljuk a $T(r, C)$ halmazban. Felhasználva, hogy a fixponthoz közeli megoldások exponenciális módon közelítik meg a centrális sokaságot, megmutatjuk, hogy $T(r, C)$ feltételesen invariáns az $y$ irányban. Ezután pedig a $T(r, C)$ halmaz $z$ irányú dinamikáját vizsgáljuk a Neimark–Sacker bifurkációs normálforma segítségével. Kihasználva a $T(r, C)$ halmaz speciális alakját, megmutatjuk, hogy hasonlóan a kétdimenziós esethez, egy megfelelően választott koordináta-rendszerben a transzformált $z$ koordináta szigorúan csökken a leképezés iterálása során. Végezetül, az $y$ és a $z$ irányú dinamika kombinálásával megkaphatjuk, hogy a $T(r, C)$ halmaz benne van a fixpont vonzástartományában.

Világos, hogy $T(r, C)$ nem egy valódi környezete a $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ koordináta-rendszer origójának. Ezért bevezetjük a

$$\tilde{T}(\hat{r}, K) = \{(z, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} : \ |z| \leq \hat{r}, \ |\phi(z) - y| \leq K\}$$

halmazt adott $\hat{r} > 0$ és $K > 0$ konstansok esetén. Felhasználva a $T(r, C)$ halmaz $y$ irányú exponenciálisan vonzó tulajdonságát megmutatjuk, hogy $\tilde{T}(\hat{r}, K)$ is a fixpont vonzástartományában van. Így ez a valódi környezet használható a módszer második részében.

Végezetül a módszer számítógéppel támogatott részét ismertetjük $d = 1$, illetve $d = 2$ esetben. A késleltetett logisztikus leképezésnek megfeleltetünk egy irányított gráfot, amely tükrözi a leképezés viselkedését egy bizonyos felbontás erejéig. Egészen pontosan az $S^d$ halmazt lefedjük véges sok $(d + 1)$-dimenziós kis kockával. Ezeket a kockákat tekintve a gráf csúcsainak, bevezetünk egy irányított gráfot, amely leírja az $F_d$ leképezés viselkedését ezeken a kis kockákon. Ezáltal az $S^d$ halmaz végtelen sok pontjának vizsgálatát egy véges gráfproblémára vezettük vissza, amely számítógépes eszközökkel könnyebben kezelhető. Az irányított gráf éleinek konstruálásához megbízható numerikus módszereket használunk, hogy a számítógép lebegőpontos ábrázolásából adódó hibákat kezelni tudjuk. E gráf segítségével megmutatjuk, hogy $S^d$ minden pontjának iteráltjai belelépnek a korábban kapott vonzó környezetbe. Bebizonyítva ezzel a sejtést a $d \in \{1, 2\}$ esetekre.

Záró megjegyzésként hangsúlyozzuk, hogy a számítógépes rész egyre idő- és számításigényesebb, ahogy közelebb jutunk a fixponthoz, így kritikus fontosságú, hogy az analitikus eszközökkel kapott környezet minél nagyobb legyen. Másrészről az analitikus részben a pontosabb becslések ára a még magasabbfokú együtthatók meghatározása, ami a szimbolikus számításokat teszi bonyolultabbá és fáradságosabbá. Valamint létezik az analitikus módszernek is egy felső határa, amelynél nagyobb környezet konstruálására már nem alkalmas. Ezenfelül a háromdimenziós esetben az $r$ és a $C$ (melyek csak egymás kárára növelhetőek) helyes megválasztása is döntő fontosságú a számítógéppel támogatott rész sebességét illetően.

Jegyezzük meg, hogy a fent említett Ricker és a Pielou leképezés $d = 2$ késleltetéssel a módszer szempontjából lényegében csak abban különbözik a logisztikus leképezéstől, hogy azzal ellentétben ezek nem polinomiális leképezések. Ezáltal a módszer könnyen adaptálható a becslések során bevezetett kis módosítások segítségével. A fő kérdés valójában az, hogy a kapott vonzó környezet elegendően nagy méretű-e a módszer számítógéppel támogatott részéhez, azaz belátható számítási időt és memóriát felhasználva sikeresen le fut-e az algoritmus. A fenti két leképezés a logisztikus leképezéssel együtt érdekes probléma nagyobb késleltetés, azaz $d > 2$ esetén is. Hisszük, hogy az analitikus rész, egészen pontosan a centrális redukció természetes módon adódó módosításokkal átültethető magasabb dimenzióba is. A kritikus pontot a számítógépes rész jelenti, ugyanis a magasabb dimenzió exponenciálisan növekvő gráfot eredményez.

Ezeken felül érdekes probléma lehet a kritikus értéknél nagyobb paraméterértékek esetén megjelenő egyetlen invariáns zárt görbe létezésének bizonyítása is. Azonban ez a kérdés merőben különbözik a disszertációban vizsgált problémától, így lényegesen több új ötletre van szükségünk ennek megmutatásához.

# References

[1] J. Dudás. Global stability for the 2-dimensional logistic map. *Journal of Difference Equations and Applications*, 25(2):179–201, 2019.

[2] J. Dudás and T. Krisztin. Global stability for the three-dimensional logistic map. *Nonlinearity*, 34(2):894–938, 2021.

[3] F. A. Bartha, Á. Garab, and T. Krisztin. Local stability implies global stability for the 2-dimensional Ricker map. *Journal of Difference Equations and Applications*, 19(12):2043–2078, 2013.

[4] E. Camouzis and G. Ladas. *Dynamics of Third-Order Rational Difference Equations with Open Problems and Conjectures*. Chapman and Hall/CRC, 2008.

[5] E. Liz. Local stability implies global stability in some one-dimensional discrete single-species models. *Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series B*, 7(1):191–199, 2007.

[6] E. Liz, V. Tkachenko, and S. Trofimchuk. Global stability in discrete population models with delayed-density dependence. *Mathematical Biosciences*, 199(1):26–37, 2006.

[7] F. A. Bartha and Á. Garab. Necessary and sufficient condition for the global stability of a delayed discrete-time

single neuron model. *Journal of Computational Dynamics*, 1(2):213–232, 2014.

[8] V. J. López and E. Parreño. L.a.s. and negative Schwarzian derivative do not imply g.a.s. in Clark's equation. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 28(2):339–374, 2016.

# Társszerzői nyilatkozat

Kijelentem, hogy ismerem Dudás János doktori (Ph.D.) fokozatra pályázó Globális stabilitás a késleltetett logisztikus leképezésre című értekezését, amelyet a Szegedi Tudományegyetemre nyújt be.

A következő cikkből felhasznált eredményekben a pályázó hozzájárulása meghatározó volt:

- J. Dudás and T. Krisztin. Global stability for the 3-dimensional logistic map. *Nonlinearity*, 34(2):894-938, 2021.

Dudás János hozzájárulása ehhez a cikkhez 70%.

Kijelentem, hogy a fent felsorolt eredményeket nem használtam fel, és nem is fogom felhasználni tudományos fokozat megszerzéséhez.

Szeged, 2021. január 27.

Krisztin Tibor
Szegedi Tudományegyetem
tanszékvezető egyetemi tanár