LÉPCSŐSFÜGGVÉNY-EGYÜTTHATÓS MÁSODRENDŰ DIFFERENCIÁLEGYENLETEK STABILITÁSÁRÓL

Doktori (Ph.D.) értekezés tézisei

SZÉKELY LÁSZLÓ

TÉMAVEZETŐ:

DR. HATVANI LÁSZLÓ

MATEMATIKA ÉS SZÁMÍTÁSTUDOMÁNYOK DOKTORI ISKOLA
SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI ÉS INFORMATIKAI KAR
BOLYAI INTÉZET

SZEGED
2011

1. Bevezetés

A disszertációban lépcsősfüggvény-együtthatós differenciálegyenletekhez kapcsolódó két stabilitási problémát vizsgálunk. Elsőként elegendő feltételt adunk meg kis megoldás, azaz nemtriviális, x-re vonatkozóan 0-hoz tartó megoldás létezésére olyan másodrendű lineáris differenciálegyenletek esetében, amelyekben a rugalmassági és a súrlódási együttható is lépcsősfüggvény. A tétel bizonyításához szükségünk van kétdimenziós differenciaegyenlet-rendszerek kis megoldásainak létezését garantáló feltételekre. Ezt a feladatot vizsgálva többet is bizonyítunk: szükséges és elegendő feltételeket adunk meg tetszőleges véges dimenziós differenciaegyenlet-rendszerek kis megoldásának létezésére.

A második részben az Armellini-Tonelli-Sansone tételt, mely azt garantálja, hogy a változó rugalmassági együtthatós másodrendű lineáris differenciálegyenlet minden megoldása kis megoldás legyen, terjesztjük ki az alkalmazásokban is fontos szerephez jutó (lásd pl. [3], [4]) ún. féllineáris differenciálegyenletekre a lépcsősfüggvény-együtthatós esetben. A féllineáris egyenletre vonatkozó tétel bizonyításának eszközeként kétdimenziós differenciaegyenlet-rendszerek triviális megoldásának aszimptotikus stabilitására vonatkozóan bizonyítunk egy új tételt, majd az ott alkalmazott geometriai módszert általánosítjuk a nemlineáris esetre.

Az értekezés a szerző következő publikációin alapul:

- L. Hatvani, L. Székely, On the existence of small solutions of linear difference equations with varying coefficients, *J. Difference Equ. Appl.*, **12** (2006), No. 8, 837–845.

- L. Hatvani, L. Székely, Asymptotic stability of two dimensional systems of linear difference equations and of second order half-linear differential equations with step function coefficients, *E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ.*, **38** (2011), 1–17.

A tézisfüzetben található jelölések és számozások (a formulák azonosítóitól eltekintve) megegyeznek a disszertációban használtakkal.

Előzmények

Tekintsük az

$$x'' + a(t)x = 0 \tag{LO}$$

másodrendű lineáris differenciálegyenletet, mely egy változó rugalmassági együtthatójú lineáris oszcillátor mozgását írja le. Ha $a : [0, \infty) \to [0, \infty)$ monoton nemcsökkenő függvény, akkor a Pólya-Sonin-tétel (lásd pl. [19]) szerint az (LO) egyenlet minden nemtriviális megoldása oszcillál, $|x|$ maximuma, azaz az amplitúdók nagysága nem nő, $|x'|$ szomszédos maximumhelyei, azaz az x szomszédos szélőértékhelyei közötti távolság pedig nem csökken.

1.1. Definíció. *Az (LO) egyenlet egy x_0 nemtriviális megoldását* kis megoldás*nak nevezzük, ha*

$$\lim_{t\to\infty} x_0(t) = 0$$

teljesül.

Milloux [16], Prodi [18] és Trevisan [20] bizonyította be, hogy ha $a : [0, \infty) \to [0, \infty)$ differenciálható és nemcsökkenő, akkor az (LO) egyenletnek akkor és csakis akkor létezik legalább egy kis megoldása, ha $\lim_{t\to\infty} a(t) = \infty$. Milloux egy olyan példán keresztül, amelyben az együtthatófüggvény lépcsősfüggvény volt, azt is megmutatta, hogy az (LO) egyenletnek nem feltétlenül minden megoldása kis megoldás. Hartman [9] az

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} \tag{LR}$$

lineáris differenciálegyenlet-rendszert vizsgálva, ahol $\mathbf{x}$ m-dimenziós vektor, $\mathbf{A}$ pedig a $[0, \infty)$ intervallumon értelmezett folytonos valós-valós függvények $m \times m$-es mátrixa, az alábbi eredményre jutott:

1.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy az (LR) egyenlet minden $\mathbf{x}$ megoldása esetén $\lim_{t\to\infty} \|\mathbf{x}(t)\| < \infty$ teljesül. Ekkor az (LR) egyenletnek akkor és csakis akkor létezik kis megoldása, ha*

$$\int^t \operatorname{tr} \mathbf{A}(s)\mathrm{d}s \to -\infty \qquad (t \to \infty).$$

Ennek felhasználásával Hartman [9] Milloux, Prodi és Trevisan tételét rendszerekre is kiterjesztette, emellett belátta, hogy az a együtthatófüggvény differenciálhatósága helyett elegendő feltenni annak folytonosságát.

Arra a kérdésre, milyen feltétel garantálja azt, hogy az (LO) egyenlet *minden* megoldása kis megoldás legyen, elsőként az Armellini-Tonelli-Sansone [15] tétel adta meg a választ az alábbi fogalmak segítségével. Az $f : [0, \infty) \to (0, \infty)$ nemcsökkenő függvényt *irregulárisan* növekvőnek nevezzük, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén megadható diszjunkt intervallumok olyan $\{(a_n, b_n)\}_{n=0}^{\infty}$ sorozata, hogy $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, és emellett a

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k - a_k}{b_n} \le \varepsilon, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (f(a_{n+1}) - f(b_n)) < \infty$$

egyenlőtlenségek is teljesülnek. Ez leegyszerűsítve azt jelenti, hogy f növekedése nem koncentrálódhat egy kis mértékű halmazra. Ennek a feltételnek nem-teljesülése esetén azt mondjuk, hogy f *regulárisan* növekvő.

1.4. Tétel. *Az (LO) egyenlet minden nemtriviális megoldása kis megoldás, ha az a együttható folytonosan differenciálható és reguláris módon növekedve tart végtelenbe $t \to \infty$ esetén.*

Fontos megjegyezni, hogy ez a stabilitási tulajdonság gyengébb a triviális megoldás aszimptotikus stabilitásánál.

Az irreguláris növekedésre a legegyszerűbb példa egy monoton növekvő lépcsősfüggvény. Az alkalmazások terén az ilyen együtthatós egyenleteknek az ún. bang-bang elv alapján fontos szerep jut például az irányításelmélet egyes területein belül. A lépcsősfüggvény-együtthatós differenciálegyenletek átírhatóak differenciaegyenlet-rendszerré, emiatt az ilyen típusú egyenletekre vonatkozó tételek bizonyításai visszavezethetőek differenciaegyenletekre vonatkozó állítások bizonyítására.

2. Lépcsősfüggvény-együtthatós másodrendű lineáris differenciálegyenletek kis megoldásairól

A második fejezetben az

$$x'' + c(t)x' + a^2(t)x = 0 \tag{LOS}$$

változó rugalmassági együtthatós oszcillátor mozgását leíró egyenletet tekintjük abban az esetben, amikor a rugalmassági erőn kívül $-c(t)x'$ $(c(t) \geq 0)$ súrlódási erő is hat a rendszerre, ahol a és c lépcsősfüggvény, azaz adottak a $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ és $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ valós sorozatok az alábbi tulajdonságokkal:

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n < \ldots; \qquad \lim_{n\to\infty} t_n = \infty,$$
$$a_n > 0, \quad c_n \geq 0 \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

továbbá $a(t) = a_n$ és $c(t) = c_n$ a $[t_{n-1}, t_n)$ intervallumon. Abban az esetben, amikor $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ és $c_n = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, azaz nincs súrlódás, Hatvani [10] belátta, hogy az

$$x'' + a_n^2 x = 0 \qquad (t_{n-1} \leq t < t_n,\ n = 1, 2, \ldots)$$

egyenletnek létezik kis megoldása, ha $\sum_{n=1}^{\infty} \max\{a_n/a_{n+1} - 1; 0\} < \infty$. Természetes gondolat, hogy a súrlódás figyelembe vételével ez a feltétel, sőt, a $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ feltétel is tovább gyengíthető. Ezt mutatja fejezetünk fő tétele.

2.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy teljesülnek az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ és $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatokra a fenti feltételek, és vezessük be a*

$$\gamma_n := \frac{c_n}{2a_n + c_n}[(2a_n - c_n)(t_n - t_{n-1}) - 2]$$

jelölést. Továbbá, tegyük fel, hogy

(i) $a_n > c_n/2$ $(n = 1, 2, \ldots)$,

(ii)
$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\gamma_k + \ln \frac{a_k}{a_{k+1}}\right) = -\infty,$$

(iii) *létezik K szám úgy, hogy tetszőleges n $(n = 1, 2, \ldots)$ esetén*
$$\sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{\gamma_k}{2} + \ln \max\left\{\frac{a_k}{a_{k+1}}; 1\right\}\right) < K.$$

Ekkor az (LOS) egyenletnek létezik legalább egy kis megoldása.

2.3. Megjegyzés. *A 2.2. tétel a disszertáció alapját képező [11] dolgozat 3.2. tételének egy továbbfejlesztése.*

Az (LOS) egyenlet átírható egy vele ekvivalens kétdimenziós differencia-egyenlet-rendszerré, ezért tételünk bizonyításához szükségünk van olyan elegendő feltételre, amely ezen rendszerek kis megoldásainak létezését biztosítja. Mi a kétdimenziós rendszerekre vonatkozó elegendő feltétel problémáját egy még általánosabb kontextusban tárgyaljuk, mégpedig szükséges és elegendő feltételeket adunk meg tetszőleges véges dimenziós differenciaegyenlet-rendszerek kis megoldásának létezésére.

Differenciaegyenletek kis megoldásairól

Az alábbi nem-autonóm differenciaegyenlet-rendszert tekintjük:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{M}_n \mathbf{x}_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{DE}$$

ahol $\mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^m$ oszlopvektor, $m \in \mathbb{N}$ és $\mathbf{M}_n \in \mathbb{R}^{m \times m}$ $m \times m$-es valós mátrix. Ennek az egyenletnek egy nemtriviális $\{\mathbf{x}_n\}_{n=0}^{\infty}$ megoldását *kis megoldás*nak nevezzük, ha arra $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{0}$ teljesül. Célunk Hartman lineáris differenciálegyenlet-rendszerre vonatkozó tételének a fenti differenciaegyenlet-rendszerre való kiterjesztése. A szakasz első eredményeként beláttuk a következő tételt:

2.8. Tétel. ([11]) *Tegyük fel, hogy a*

$$\prod_{n=0}^{\infty} \|\mathbf{M}_n\| < \infty$$

határérték létezik és véges. Ekkor,

(a) *a (DE) egyenlet tetszőleges $\{\mathbf{x}_n\}_{n=0}^{\infty}$ megoldása esetén az $\{\|\mathbf{x}_n\|\}_{n=0}^{\infty}$ sorozatnak létezik véges határértéke*;

(b) *a $\prod_{n=0}^{\infty} |\det \mathbf{M}_n|$ végtelen szorzat konvergens*; *továbbá,*

(c) *a (DE) egyenletnek akkor és csakis akkor létezik kis megoldása, ha*

$$\prod_{n=0}^{\infty} |\det \mathbf{M}_n| = 0.$$

Ezzel Peilnek és Pattersonnak [17], illetve Elbertnek [7] a megoldások normabeli határértékének létezésére vonatkozó elegendő feltételeit tovább gyengítettük, továbbá az Elberttől származó, a kétdimenziós esetre vonatkozó bizonyítási technika tetszőleges véges dimenziós esetre történő kiterjesztésével Peil és Petterson tételére egy új bizonyítást adtunk.

Könnyen konstruálható példa arra, hogy a $\prod_{n=0}^{\infty} \|\mathbf{M}_n\| < \infty$ feltétel nem szükséges a megoldások normabeli határértékének létezéséhez. Szintén egyszerű példával kimutatható az is, hogy a megoldások normabeli határértékének létezése nem szükséges kis megoldás létezéséhez. A szakasz fő tételében egy geometriai módszer segítségével megmutatjuk, hogy kis megoldások létezésére a $\prod_{n=0}^{\infty} |\det \mathbf{M}_n| = 0$ feltétel szükséges és elegendő abban az esetben is, ha mindössze a $\| \prod_{n=p}^{q} \mathbf{M}_n\|$ $(0 \le p \le q)$ sorozat korlátosságát követeljük meg.

2.9. Tétel. ([11]) *Tegyük fel, hogy található olyan $K \in \mathbb{R}$, hogy tetszőleges $p, q \in \mathbb{N}$, $(0 \le p \le q)$ esetén*

$$\left\| \prod_{n=p}^{q} \mathbf{M}_n \right\| \le K$$

teljesül. Ekkor a (DE) egyenletnek akkor és csakis akkor létezik kis megoldása, ha

$$\prod_{n=0}^{\infty} |\det \mathbf{M}_n| = 0.$$

Egy példán keresztül megmutatjuk, hogy a tételben szereplő $\left\| \prod_{n=p}^{q} \mathbf{M}_n \right\| \le K$ feltétel nem helyettesíthető a $\left\| \prod_{n=0}^{k} \mathbf{M}_n \right\| \le K$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$ feltétellel. Hogy helyettesíthető-e a $\prod_{n=0}^{k} \|\mathbf{M}_n\| \le K$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$ feltétellel, tudomásunk szerint jelenleg még megoldatlan probléma.

A 2.2. szakaszban a 2.9. tétel felhasználásával bebizonyítjuk a 2.2. tételt, azaz belátjuk, hogy a megadott feltételek mellett az (LOS) lécsősfüggvény-együtthatós differenciálegyenletnek létezik legalább egy kis megoldása.

Nemlineáris differenciaegyenletek kis megoldásairól

A második fejezet utolsó szakaszában a 2.9. tételünk nemlineáris differenciálegyenlet-rendszerekre történő kiterjesztésének lehetőségeit vizsgáljuk.

Az

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(n, \mathbf{x}_n) \qquad n = 0, 1, 2, \dots \tag{ND}$$

egyenletet tekintjük, ahol $m \in \mathbb{N}$, $\mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^m$ oszlopvektor, és az $\mathbf{f}(n, \cdot)$ függvények olyanok, hogy minden $n \in \mathbb{N}_0$ esetén rendelkeznek a következő tulajdonságokkal:

$$\mathbf{f}(n, \cdot) : \mathrm{D}_n \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m, \qquad \operatorname{ran} \mathbf{f}(n, \cdot) \subset \mathrm{D}_{n+1},$$

$$\mathbf{f}(n, 0) = 0, \qquad \mathbf{f}(n, \cdot) \in C^1(\mathrm{D}_n),$$

ahol D_n egy konvex tartomány ($n = 0, 1, \dots$). Legyen

$$\mathbf{F}(q, p\,; \cdot) := \mathbf{f}(q, \cdot) \circ \dots \circ \mathbf{f}(p, \cdot) \qquad (0 \le p \le q, \quad p, q \in \mathbb{N}_0),$$

továbbá legyen $F^j(q, p\,; \cdot) : \mathrm{D}_p \to \mathbb{R}$ ($j = 1, \dots, m$) az $\mathbf{F}(q, p\,; \cdot)$ függvény j-edik komponensfüggvénye, azaz

$$\mathbf{F}(q, p\,; \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} F^1(q, p\,; \mathbf{x}) \\ \vdots \\ F^m(q, p\,; \mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

Ilyen egyenletek esetén kis megoldások létezésére vonatkozóan Karsai, Graef és Li [14] Ljapunov-függvények segítségével már adott elegendő feltételt. Ennek a feltételnek az alkalmazhatóság szempontjából kritikus része egy, a Ljapunov-függvényre vonatkozó folytonossági feltétel. A lineáris esetre alkalmazott topológiai módszert használva a legáltalánosabb esetben eddig csak olyan részeredményt sikerült elérni, amely Karsaiék módszerével is megkapható. Mivel ez a tétel, a 2.8. tételhez hasonlóan csak az (ND) egyenlet jobb oldalán található függvényeket használja fel, továbbá a bizonyítása 2.9. tételével analóg, ezért ezt is bemutatjuk.

2.12. Tétel. *Tegyük fel, hogy található olyan origó körüli H_0 zárt gömb és $K > 0$, hogy*

$$\left\| \operatorname{grad} F^j(q, p\,; \mathbf{x}) \right\| \le K$$

tetszőleges $p, q \in \mathbb{N}_0$ ($0 \le p \le q$), $j = 1, \dots, m$ és $\mathbf{x} \in \mathrm{H}_0$ esetén teljesül, továbbá

$$\lim_{n \to \infty} \int_{H_0} |\det F'(n, 0; \mathbf{x})| \, \mathrm{d}\mathbf{x} = 0.$$

Ekkor az (ND) egyenletnek létezik legalább egy kis megoldása.

3. Lépcsősfüggvény-együtthatós másodrendű féllineáris differenciálegyenletek stabilitásáról

A harmadik fejezetben a lineáris oszcillátor mozgását leíró (LO) egyenlet egy fontos általánosítását, a Bihari Imre [1] és Elbert Árpád [5] által bevezetett

$$x''|x'|^{n-1} + q(t)|x|^{n-1}x = 0, \qquad n \in \mathbb{R}^+, \tag{FD}$$

ún. féllineáris differenciálegyenletet tekintjük. Az egyenlet elnevezése arra utal, hogy a megoldások tere homogén de nem additív. Erre az egyenletre Bihari [2] bizonyított egy Armellini-Tonelli-Sansone típusú tételt, vagyis bebizonyította, hogy a triviális megoldás x-re vonatkozóan aszimptotikusan stabilis, ha a q együttható-függvény sima és „regulárisan" tart végtelenbe, ha $t \to \infty$. Ilyen típusú eredmény [12] dolgozatunkig nem volt ismert nem-regulárisan növekedő együttható-függvényre. A 3. fejezetben ennek a dolgozatnak az eredményeit ismertetve adunk elegendő feltételt a féllineáris (FD) egyenlet triviális megoldásának x-re vonatkozó aszimptotikusan stabilitására abban a legtipikusabban nem-reguláris esetben, amikor q lépcsősfüggvény. Az eredmény annak köszönhető, hogy a lépcsősfüggvényt tartalmazó lineáris egyenletekre ($n = 1$ (FD)-ben) ismert lineáris technikákat sikerült helyettesíteni egy geometriai módszerrel, amely nem igényli a linearitást, sőt, még a lineáris esetre vonatkozó eredmények javítását is lehetővé teszi. Ennek köszönhetően eredményünk tartalmazza, sőt, élesíti Elbert [6, 8] lineáris lépcsősfüggvény-együtthatós egyenletre vonatkozó Armellini-Tonelli-Sansone tételeit, ezért ezt a módszert a fejezet elején először lineáris differenciaegyenlet-rendszerekre mutatjuk be.

Differenciaegyenletek aszimptotikus stabilitásáról

Elsőként a (DE) lineáris differenciaegyenlet-rendszer triviális megoldásának aszimptotikus stabilitását vizsgáljuk a kétváltozós esetben. Jól ismert, hogy a $\prod_{n=0}^{\infty} \|\mathbf{M}_n\| = 0$ feltétel teljesülése esetén (DE) minden megoldása az origóhoz tart, ha $n \to \infty$. Elbert [7] dolgozatában az (i) $\prod_{n=0}^{\infty} \max\{\|\mathbf{M}_n\|, 1\}$

$< \infty$, (ii) $0 < \prod_{n=0}^{\infty} \|\mathbf{M}_n\|$, (iii) $\prod_{n=0}^{\infty} \max\{\det|\mathbf{M}_n|, 1\} < \infty$ feltételek mellett adott elegendő feltételt a triviális megoldás aszimptotikus stabilitására. Bizonyítása az $\mathbf{M}_n$ mátrixok egy „trükkös” dekompozícióján és az ebből származtatott speciális mátrixok normáinak a becslésén alapul.

A (DE) egyenlet vizsgálatához egy stabilitási szempontból vele ekvivalens (DE') rendszert definiálunk, melynek megkonstruálása a polár faktorizáció tételén (lásd pl. [13, p. 188]) alapul:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \|\mathbf{M}_n\| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\omega_n & -\sin\omega_n \\ \sin\omega_n & \cos\omega_n \end{pmatrix} \mathbf{x}_n, \qquad 0 \le d_n \le 1, \qquad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{DE'}$$

ahol d_n és ω_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) az $\mathbf{M}_0, \dots, \mathbf{M}_n$ mátrixegyütthatókból meghatározhatóak. A szakasz fő tételében belátjuk, hogy az Elbert tételben szereplő (i) – (iii) feltételek gyengíthetőek.

3.3. Tétel. ([12]) *Tegyük fel, hogy* $\limsup_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n} \|\mathbf{M}_k\| < \infty$. *Ha*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \min\{1 - d_n, 1 - d_{n+1}\} \sin^2 \omega_{n+1} = \infty$$

teljesül, akkor a (DE') differenciaegyenlet triviális megoldása aszimptotikusan stabil.

Az Armellini-Tonelli-Sansone tétel kiterjesztése lépcsősfüggvény-együtthatós másodrendű félllineáris differenciálegyenletre

A fejezet fő tétele a következő.

3.5. Tétel. ([12]) *Legyen* $n > 1$ *és*

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k < t_{k+1} < \ldots, \qquad \lim_{k\to\infty} t_k = \infty,$$
$$0 < q_0 \le q_1 \le \ldots \le q_k \le q_{k+1} \le \ldots, \qquad \lim_{k\to\infty} q_k = \infty.$$

Ekkor az

$$x''|x'|^{n-1} + q_k|x|^{n-1}x = 0 \qquad (t_k \le t < t_{k+1},\ k = 0, 1, \ldots)$$

egyenlet minden nemtriviális megoldása kis megoldás, ha

$$\sum_{k=0}^{\infty} \min\left\{1-\frac{q_k}{q_{k+1}}, 1-\frac{q_{k+1}}{q_{k+2}}\right\} \left|S\left(q_{k+1}^{\frac{1}{n+1}}(t_{k+2}-t_{k+1})\right)\right|^{n+1} = \infty.$$

A tételben szereplő S függvény az ún. általánosított szinusz függvény, azaz az

$$\begin{cases} S''|S'|^{n-1} + S|S|^{n-1} = 0, \\ S(0) = 0, \quad S'(0) = 1 \end{cases}$$

kezdetiérték-problémának a megoldása, amely mellékesen eleget tesz az $|S(\Phi)|^{n+1} + |S'(\Phi)|^{n+1} \equiv 1$ azonosságnak. A bizonyítás menete hasonló a 3.3. tételéhez, azonban becsléseink módszerét az általánosított trigonometrikus függvények miatt módosítanunk kell. A nehézséget az okozza, hogy ezekre a függvényekre egzakt addíciós formulák nem ismeretesek.

Hivatkozások

[1] I. Bihari, Ausdehnung der Sturmschen Oszillations und Vergleichssätze auf die Lösungen gewisser nichtlinearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, *Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci.*, **2** (1957), 154–165.

[2] I. Bihari, Asymptotic result concerning equation $x''|x'|^{n-1} + a(t)x^{\overset{*}{n}}$. Extension of a theorem by Armellini-Tonelli-Sansone, *Studia Sci. Math. Hungar.* **19** (1984), no. 1, 151–157.

[3] G. Bognár, Similarity solution of a boundary layer flow for non-Newtonian fluids, *Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **10** (2010), 1555–1566.

[4] G. Bognár, On similarity solutions to boundary layer problems with upstream moving wall in non-Newtonian power-law fluids, IMA J. Appl. Math., (2011), 1–17.

[5] Á. Elbert, A half-linear second order differential equation. *Qualitative theory of differential equations, Vol. I, II (Szeged, 1979)*, pp. 153–180, *Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, **30**, North-Holland, Amsterdam-New York, 1981.

[6] Á. Elbert, On asymptotic stability of some Sturm-Liouville differential equations, *General Seminar in Mathematics*, University of Patras, **22-23** (1996/97), 57–66.

[7] Á. Elbert, Stability of some difference equations, *Advances in Difference Equations: Proceedings of the Second International Conference on Difference Equations and Applications, Veszprém, Hungary, 7-11 August 1995*, Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, 1997, 155–178.

[8] Á. Elbert, On damping of linear oscillators, *Studia Sci. Math. Hungar.* **38** (2001), 191–208.

[9] P. Hartman, On a theorem of Milloux, *Amer. J. Math.*, **70** (1948), 395–399.

[10] L. Hatvani, On the existence of a small solution to linear second order differential equations with step function coefficients, *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst.*, **4** (1998), 321–330.

[11] L. Hatvani, L. Székely, On the existence of small solutions of linear difference equations with varying coefficients, *J. Difference Equ. Appl.*, **12** (2006), No. 8, 837–845.

[12] L. Hatvani, L. Székely, Asymptotic stability of two dimensional systems of linear difference equations and of second order half-linear differential equations with step function coefficients, *E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ.*, **38** (2011), 1–17.

[13] N. Jacobson, *Lectures in abstract algebra, II. Linear algebra*, Springer Verlag (New York - Heidelberg - Berlin), 1953.

[14] J. Karsai, J. R. Graef, M. Y. Li, On the phase volume method for nonlinear difference equations, *Int. J. Differ. Equ. Appl.*, **1** (2000), 17–35.

[15] J. W. Macki, Regular growth and zero tending solutions, *Ordinary differential equations and operators (Dundee,)* 1982), Springer, Berlin, 1983, 358–374.

[16] H. Milloux, Sur l'equation differentielle $x''+A(t)x = 0$, *Prace Mat.-Fiz.*, **41** (1934), 39–54.

[17] T. Peil, A. Peterson, A Theorem of Milloux for Difference Equations, *Rocky Mountain J. Math.*, **24** (1994), No. 1, 253–260.

[18] G. Prodi, Un'osservazione sugl'integrali dell' equazione $y'' + A(t)y = 0$ nel caso $A(x) \to \infty$ per $x \to \infty$, *Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.*, **8** (1950), 462–464.

[19] G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, American Mathematical Society, New York, 1959.

[20] G. Trevisan, Sull'equazione differenziale $y'' + A(t)y = 0$, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **23** (1954), 340–342.