LÉPCSŐSFÜGGVÉNY-EGYÜTTHATÓS MÁSODRENDŰ DIFFERENCIÁLEGYENLETEK STABILITÁSÁRÓL

Doktori értekezés

SZÉKELY LÁSZLÓ

TÉMAVEZETŐ:

DR. HATVANI LÁSZLÓ

MATEMATIKA ÉS SZÁMÍTÁSTUDOMÁNYOK DOKTORI ISKOLA
SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI ÉS INFORMATIKAI KAR
BOLYAI INTÉZET

SZEGED
2011

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

Tekintsük az

$$x'' + a(t)x = 0 \tag{1.1}$$

másodrendű lineáris differenciálegyenletet, mely egy változó rugalmassági együtthatójú lineáris oszcillátor mozgását írja le. A Pólya-Sonin-tétel (lásd pl. [48]) szerint, ha az $a : [0, \infty) \to [0, \infty)$ együttható monoton nemcsökkenő függvény, akkor az (1.1) egyenlet minden nemtriviális megoldására teljesül, hogy

(i) a megoldás oszcillál,

(ii) $|x|$ maximuma, azaz az amplitúdók nagysága nem nő,

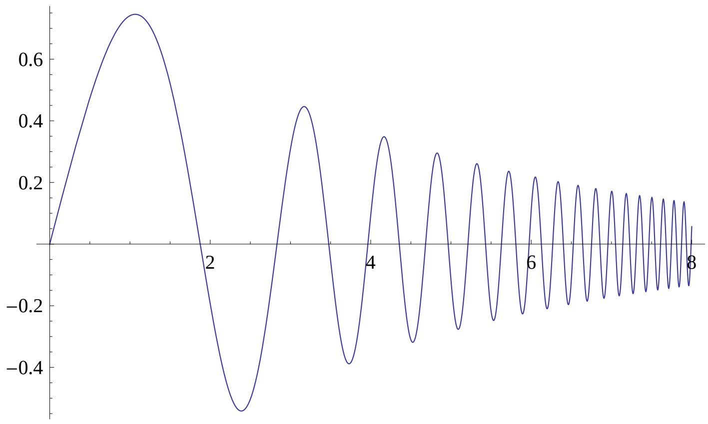
(iii) $|x|$ szomszédos maximumhelyei, azaz az x szomszédos szélsőértékhelyei közötti távolság nem csökken.

P. Hartman [26, p. 500] nyomán bevezetjük a következő definíciót.

1.1. Definíció. *Az (1.1) egyenlet egy x_0 nemtriviális megoldását* kis megoldás*nak nevezzük, ha*

$$\lim_{t\to\infty} x_0(t) = 0 \tag{1.2}$$

teljesül.



1.1. ábra. Az $x'' + e^t x = 0$ egyenlet $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$ kezdeti feltételhez tartozó megoldása

Biernacki [7] 1933-ban vetette fel azt a problémát, hogy az (1.1) egyenletnek milyen feltételek mellett létezik kis megoldása. H. Milloux [43] egy évre rá, illetve később tőle és egymástól is függetlenül Prodi [45] és Trevisan [51] bizonyította be a következőt:

1.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy az* $a : [0, \infty) \to [0, \infty)$ *függvény differenciálható és nemcsökkenő. Az (1.1) egyenletnek akkor és csakis akkor létezik legalább egy kis megoldása, ha*

$$\lim_{t\to\infty} a(t) = \infty. \tag{1.3}$$

Milloux egy olyan példán keresztül, amelyben az a együttható lépcsősfüggvény, azt is megmutatta, hogy az (1.1) egyenletnek nem feltétlenül minden megoldása kis megoldás.

Hartman [25] az

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} \tag{1.4}$$

lineáris differenciálegyenlet-rendszer kis megoldásainak létezését vizsgálta, ahol $\mathbf{x}$ m-dimenziós valós vektor, $\mathbf{A}$ pedig olyan $m \times m$-es mátrix, melynek minden eleme a $[0, \infty)$ intervallumon értelmezett folytonos valós-valós függvény. Az alábbi eredményre jutott:

1.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy az (1.4) egyenlet minden* $\mathbf{x}$ *megoldására* $\lim_{t\to\infty} \|\mathbf{x}(t)\| < \infty$ *teljesül. Ekkor az (1.4) egyenletnek akkor és csakis akkor létezik kis megoldása, ha*

$$\int^t \operatorname{tr} \mathbf{A}(s) \mathrm{d}s \to -\infty \qquad (t \to \infty), \tag{1.5}$$

ahol $\operatorname{tr} \mathbf{A}(s)$ az $\mathbf{A}$ mátrix nyomát jelöli az s időpillanatban. Az (1.5) feltétel geometriai szempontból a jól ismert Liouville-formula alapján azt jelenti, hogy a rendszer fázistérfogata 0-hoz tart, ha $t \to \infty$. A tétel felhasználásával Hartman [25] Milloux, Trevisan és Prodi tételét rendszerekre is kiterjesztette, emellett belátta, hogy az a együtthatófüggvény differenciálhatósága helyett elegendő feltenni annak folytonosságát.

Szintén Biernackitól [7] származik az a kérdés, hogy milyen feltételek biztosítják azt, hogy az (1.1) egyenlet *minden* nemtriviális megoldása kis megoldás legyen. Fontos megjegyezni, hogy ez a stabilitási tulajdonság gyengébb a triviális megoldás aszimptotikus stabilitásánál: x'-től, vagyis a rezgés sebességétől nem követeljük meg, hogy a végtelenben tartson 0-hoz; ezt Pólya és Sonin tétele alapján nem is tehetjük meg. A kérdésre elsőként az Armellini-Tonelli-Sansone [42] tétel adta meg a választ az alábbi fogalmak segítségével. Az $f : [0, \infty) \to (0, \infty)$ nemcsökkenő függvényt *irregulárisan* növekvőnek nevezzük, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén megadható diszjunkt intervallumok olyan $\{(a_n, b_n)\}_{n=0}^{\infty}$ sorozata, hogy $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, és emellett a

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k - a_k}{b_n} \le \varepsilon, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (f(a_{n+1}) - f(b_n)) < \infty$$

egyenlőtlenségek is teljesülnek. Ez leegyszerűsítve azt jelenti, hogy f növekedése nem koncentrálódhat egy kis mértékű halmazra. Ennek a feltételnek nem-teljesülése esetén azt mondjuk, hogy f *regulárisan* növekvő.

1.4. Tétel. *Az (1.1) egyenlet minden nemtriviális megoldása kis megoldás, ha az a együttható folytonosan differenciálható és reguláris módon növekedve tart végtelenbe $t \to \infty$ esetén.*

Az együtthatófüggvény regularitásának feltevése mellett a kis megoldások létezésére, illetve az origónak x-re vonatkozó aszimptotikus stabilitásának problémájára vonatkozó tételeket többen élesítették és azokat más egyenletek esetén is vizsgálták ([6], [9], [10], [24], [30], [35], [36], [46], [50]).

Az irreguláris növekedésre a legegyszerűbb példa egy monoton növekvő lépcsősfüggvény. Az alkalmazások terén az ilyen együtthatós egyenleteknek az ún. bang-bang elv alapján fontos szerep jut például az irányításelmélet egyes területein belül (lásd pl. [5]). Abban az esetben, amikor a lépcsősfüggvény, a Milloux és az Armellini-Tonelli-Sansone tételek az (1.1) egyenletre is kiterjeszthetőek ([21], [23], [27]), illetve általánosíthatóak ún. véletlen együtthatós egyenletekre ([16], [29], [31]) és impulzív rendszerekre is ([24]).

Ha a lépcsősfüggvény, akkor, mint azt a későbbiekben be is mutatjuk, az (1.1) egyenlet átírható differenciaegyenlet-rendszerré, emiatt a lépcsősfüggvény-együtthatós egyenletekre vonatkozó bizonyítások visszavezethetőek differenciaegyenletekre vonatkozó tételek bizonyítására. Ezért is, de már önmagában is érdekes megvizsgálni a problémakört differenciaegyenletek esetében is. A dolgozat második fejezetében elegendő feltételt adunk kis megoldás létezésére olyan másodrendű lineáris differenciálegyenletek esetében, amelyekben a rugalmassági és a súrlódási együttható is lépcsősfüggvény. A tétel bizonyításához szükségünk van kétdimenziós differenciaegyenlet-rendszerek kis megoldásainak létezését garantáló feltételekre. A fejezetben ezt a feladatot vizsgálva többet is bizonyítunk: szükséges és elegendő feltételeket adunk meg tetszőleges véges dimenziós differenciaegyenlet-rendszerek kis megoldásának létezésére. A fejezet utolsó szakaszában az itt alkalmazott bizonyítási technika nemlineáris differenciaegyenlet-rendszerekre történő általánosíthatóságát is megvizsgáljuk.

A harmadik fejezetben az Armellini-Tonelli-Sansone tételt terjesztjük ki az alkalmazásokban is fontos szerephez jutó ún. féllineáris differenciálegyenletekre abban az esetben, amikor az együttható lépcsősfüggvény. A féllineáris egyenletre vonatkozó tétel bizonyításának eszközeként kétdimenziós differenciaegyenlet-rendszerek triviális megoldásának aszimptotikus stabilitására vonatkozóan bizonyítunk egy új tételt, majd az ott alkalmazott geometriai módszert általánosítjuk a nemlineáris esetre.

Az értekezés a szerző következő publikációin alapul:

- L. Hatvani, L. Székely, On the existence of small solutions of linear difference equations with varying coefficients, *J. Difference Equ. Appl.*, **12** (2006), No. 8, 837–845.

- L. Hatvani, L. Székely, Asymptotic stability of two dimensional systems of linear difference equations and of second order half-linear differential equations with step function coefficients, *E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ.*, **38** (2011), 1–17.

2. fejezet

Lépcsősfüggvény-együtthatós másodrendű lineáris differenciálegyenletek kis megoldásairól

Tekintsük a változó rugalmassági együtthatós oszcillátor mozgását leíró (1.1) egyenletet abban az esetben, amikor a lépcsősfüggvény:

$$x'' + a_n^2 x = 0 \qquad (t_{n-1} \le t < t_n,\ n = 1, 2, \ldots), \tag{2.1}$$

ahol $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ és $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ valós sorozatok az alábbi tulajdonságokkal:

$$\begin{gathered} 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n < \ldots; \qquad \lim_{n\to\infty} t_n = \infty, \\ a_n > 0 \quad (n = 1, 2, \ldots). \end{gathered} \tag{2.2}$$

Egy $x : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ függvény megoldása a (2.1) egyenletnek, ha

a) x kétszer differenciálható és megoldása a (2.1) egyenletnek a $[t_{n-1}, t_n)$ intervallumokon $(n = 1, 2, \ldots)$,

b) x folytonosan differenciálható a $[0,\infty)$ intervallumon.

A folytonos együtthatós (1.1) egyenlet megoldásainak létezését és unicitását garantáló tételekből következik a (2.1) egyenlet megoldásainak egzisztenciája és unicitása is, mivel a (2.1) egyenlet adott $(x(0),\ x'(0))$ kezdeti értékekhez tartozó megoldása az egyes $[t_{n-1}, t_n)$ intervallumokhoz tartozó konstans e-gyütthatós másodrendű egyenletek megoldásával és az adott kezdeti értékből kiindulva azok összeillesztésével adhatóak meg.

Abban az esetben, amikor $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, Hatvani [27] a (2.1) egyenlet kis megoldásának létezésére a következő elegendő feltételt adta meg.

2.1. Tétel (Hatvani [27]). *Tegyük fel, hogy* $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. *Ekkor, ha*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \max\left\{\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1; 0\right\} < \infty, \tag{2.3}$$

akkor a (2.1) egyenletnek létezik legalább egy kis megoldása.

A (2.3) feltétel azt jelenti, hogy az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat „majdnem” növekvő a következő értelemben. Ha $a_p > a_{p+1} > \ldots > a_q > a_{q+1}$ valamely $p \le q$ esetén, akkor érvényes a

$$\sum_{n=p}^{q} \max\left\{\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1; 0\right\} = \sum_{n=p}^{q} \frac{a_n - a_{n+1}}{a_{n+1}} \ge \frac{a_p - a_{q+1}}{a_{p+1}}$$

becslés. Ekkor azt mondhatjuk, hogy a $\sum_{n=p}^{q} \max\{a_n/a_{n+1} - 1; 0\}$ összeg az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat „relatív csökkenésének” mértékét adja meg az $\{a_n\}_{n=p}^{q+1}$ „csökkenő fázis” alatt. Mivel a (2.3) feltételben szereplő összeg véges, így az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat csökkenésének mértéke is véges, azaz a sorozat „majdnem” növekvő.

Legyen a $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat az alábbi tulajdonságú:

$$c_n \ge 0 \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{2.4}$$

Tekintsük most azt az esetet, amikor a $-a(t)x$ rugalmassági erőn kívül $-c(t)x'$ súrlódási erő is hat a rendszerre:

$$x'' + c_n x' + a_n^2 x = 0 \qquad (t_{n-1} \le t < t_n,\ n = 1, 2, \ldots). \tag{2.5}$$

Természetes gondolat, hogy a súrlódás figyelembe vételével a (2.3) feltétel, sőt a $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ feltétel is tovább gyengíthető. Ezt mutatja fejezetünk fő tétele.

2.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy teljesülnek a (2.2) és a (2.4) feltételek, és vezessük be a*

$$\gamma_n := \frac{c_n}{(2a_n + c_n)}[(2a_n - c_n)(t_n - t_{n-1}) - 2]. \tag{2.6}$$

jelölést. Továbbá, tegyük fel, hogy

(i) $a_n > c_n/2$ $(n = 1, 2, \ldots)$,

(ii)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\gamma_k + \ln \frac{a_k}{a_{k+1}} \right) = -\infty, \tag{2.7}$$

(iii) *létezik* K *szám úgy, hogy tetszőleges* n $(n = 1, 2, \ldots)$ *esetén*

$$\sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{\gamma_k}{2} + \ln \max \left\{ \frac{a_k}{a_{k+1}}; 1 \right\} \right) < K. \tag{2.8}$$

Ekkor a (2.5) egyenletnek létezik legalább egy kis megoldása.

2.3. Megjegyzés. *A 2.2. tétel a disszertáció alapját képező [32] dolgozat 3.2. tételének egy továbbfejlesztése.*

Mivel, mint azt látni fogjuk, a (2.5) egyenlet átírható egy vele ekvivalens kétdimenziós differenciaegyenlet-rendszerré, ezért tételünk bizonyításához szükségünk lesz olyan elegendő feltételre, amely ezen rendszerek kis megoldásainak létezését biztosítja. A következő szakaszban ezt a problémát egy még általánosabb kontextusban tárgyaljuk, mégpedig szükséges és elegendő feltételeket adunk meg tetszőleges véges dimenziós differenciaegyenlet-rendszerek kis megoldásának létezésére.

2.1. Differenciaegyenletek kis megoldásairól

2.1.1. Előzmények

Tekintsük az

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{M}_n \mathbf{x}_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.9}$$

nem-autonóm differenciaegyenlet-rendszert, ahol $\mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^m$ oszlopvektor, $m \in \mathbb{N}$ és $\mathbf{M}_n \in \mathbb{R}^{m \times m}$ $m \times m$-es valós mátrix. A szakasz keretein belül Hartman (1.4) lineáris differenciálegyenlet-rendszerre vonatkozó 1.3. tételének az előbbi rendszerre való kiterjeszthetőségét vizsgáljuk.

Jelölje $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, illetve $\|\mathbf{x}\|$ az $\mathbf{x} = (x^1, \ldots, x^m)^T$, $\mathbf{y} = (y^1, \ldots, y^m)^T \in \mathbb{R}^m$ vektorok skalárszorzatát, illetve az $\mathbf{x}$ vektor normáját, vagyis

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := \sum_{i=1}^{m} x^i y^i, \qquad \|\mathbf{x}\| := \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Legyen továbbá $\|\mathbf{M}\|$ az $\mathbf{M}$ mátrix spektrálnormája, azaz az $\mathbf{M}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}$ szimmetrikus pozitív szemidefinit mátrix legnagyobb sajátértékének a négyzetgyöke. Azt mondjuk, hogy a (2.9) egyenlet triviális megoldása aszimptotikusan stabil, ha az egyenlet minden $\{\mathbf{x}_n\}_{n=0}^{\infty}$ megoldása az origóhoz tart (lásd pl. [19]). Közismert (lásd pl. [3, p. 232]), hogy az

$$M := \prod_{n=0}^{\infty} \|\mathbf{M}_n\| = 0 \tag{2.10}$$

feltételből következik az origó aszimptotikus stabilitása. Hartman differenciálegyenletekre vonatkozó definíciójának alapján bevezethető a kis megoldás fogalma differenciaegyenletekre is.

2.4. Definíció. *A (2.9) egyenlet egy nemtriviális* $\{\mathbf{x}_n\}_{n=0}^{\infty}$ *megoldását* kis megoldás*nak nevezzük, ha arra*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{0} \tag{2.11}$$

teljesül.

Fontos megjegyeznünk, hogy differenciaegyenletek esetében az origó aszimptotikus stabilitása ekvivalens azzal, hogy minden nemtriviális megoldás kis megoldás. A kérdés az, hogy milyen feltételek biztosítják (2.9) egy kis megoldásának a létezését. Peil és Patterson [44] bizonyította a következőt.

2.5. Tétel (Peil-Peterson [44]). *Tegyük fel, hogy* $\lim_{n\to\infty} \|\mathbf{x}_n\| < \infty$ *teljesül a (2.9) egyenlet minden* $\{\mathbf{x}_n\}_{n=0}^{\infty}$ *megoldására. Ekkor a (2.9) egyenletnek akkor és csakis akkor létezik legalább egy kis megoldása, ha*

$$\prod_{n=0}^{\infty} |\det \mathbf{M}_n| = 0. \tag{2.12}$$

Bizonyításuk ötlete hasonló ahhoz, amit Hartman [25] alkalmazott az (1.4) differenciálegyenletre vonatkozó eredeti bizonyításánál. Peil és Petterson elegendő feltételt is adott arra, hogy $\lim_{n\to\infty} \|\mathbf{x}_n\| < \infty$ minden megoldásra teljesüljön. Legyen $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ két $m \times m$-es valós mátrix, ekkor $\mathbf{A} \le \mathbf{B}$ akkor és csakis akkor, ha $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ negatív szemidefinit. Jelölje továbbá $\mathbf{E}$ az $m \times m$-es egységmátrixot.

2.6. Tétel (Peil-Peterson [44]). *Ha*

$$\mathbf{M}_n^{\mathrm{T}} \mathbf{M}_n \le \mathbf{E} \tag{2.13}$$

minden $n \in \mathbb{N}_0$ *esetén, akkor a (2.9) egyenlet minden* $\{\mathbf{x}_n\}_{n=0}^{\infty}$ *megoldására* $\lim_{n\to\infty} \|\mathbf{x}_n\| < \infty$ *teljesül.*

A spektrálnorma definíciója alapján könnyen látható, hogy a (2.13) feltétel ekvivalens azzal, hogy $\|\mathbf{M}_n\| \leq 1$ minden n-re ($n = 0, 1, \ldots$). Elbert [22] kétdimenziós rendszerek kis megoldásainak létezését vizsgálva egy ennél gyengébb elegendő feltételt adott arra, hogy $\lim_{n\to\infty} \|\mathbf{x}_n\| < \infty$ teljesüljön minden megoldásra.

2.7. Tétel (Elbert [22]). *Legyen $m = 2$ és tegyük fel, hogy*

$$M_E := \prod_{n=0}^{\infty} \max\{\|\mathbf{M}_n\|; 1\} < \infty \tag{2.14}$$

teljesül. Ekkor a (2.9) egyenletnek akkor és csakis akkor létezik legalább egy kis megoldása, ha

$$\prod_{n=0}^{\infty} |\det \mathbf{M}_n| = 0. \tag{2.15}$$

Tekintsük a következő példát:

$$\mathbf{M}_{2k} := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_{2k+1} := \begin{pmatrix} \frac{1}{2^{2k+1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^{2k+1}} \end{pmatrix}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Ennek alapján könnyen látható, hogy a (2.10) feltételből, mely garantálja hogy a (2.9) egyenlet minden megoldása kis megoldás, nem következik a (2.14) feltétel, mely legalább egy kis megoldás létezését biztosítja. Így felmerül a kérdés, hogy az Elbert tételében szereplő M_E határérték helyettesíthető-e a (2.10) összefüggés által definiált M-mel. Mint azt a következő tételünkben megmutatjuk, a válasz igen, sőt, Elbert bizonyítási technikáját általánosítva a tételét tetszőleges véges dimenzióra is kiterjesztjük. Ezzel egyúttal Peil és Petterson tételére egy új bizonyítást, továbbá a megoldások normabeli határértékének létezésére az eddigieknél gyengébb elegendő feltételt adunk.

2.1.2. Eredmények

2.8. Tétel ([32]). *Tegyük fel, hogy az*

$$M := \prod_{n=0}^{\infty} \|\mathbf{M}_n\| < \infty \tag{2.16}$$

határérték létezik és véges. Ekkor,

(a) *a (2.9) egyenlet tetszőleges $\{\mathbf{x}_n\}_{n=0}^{\infty}$ megoldása esetén az $\{\|\mathbf{x}_n\|\}_{n=0}^{\infty}$ sorozatnak létezik véges határértéke;*

(b) *a $\prod_{n=0}^{\infty} |\det \mathbf{M}_n|$ végtelen szorzat konvergens; továbbá,*

(c) *a (2.9) egyenletnek akkor és csakis akkor létezik kis megoldása, ha*

$$D := \prod_{n=0}^{\infty} |\det \mathbf{M}_n| = 0. \tag{2.17}$$

Bizonyítás. (a) Indirekt módon bizonyítunk. Tegyük fel, hogy

$$0 \le l := \liminf_{n\to\infty} \|\mathbf{x}_n\| < \limsup_{n\to\infty} \|\mathbf{x}_n\| := L \le \infty,$$

és legyenek l_*, L_* számok adottak úgy, hogy $l < l_* < L_* < L$. Az $M = 0$ esetben $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ aszimptotikusan stabil, ez viszont $l < L$ miatt lehetetlen, tehát $0 < M < \infty$. Ebből következik, hogy található olyan ν, hogy $p, q \in \mathbb{N}$, $p > \nu$ esetén $\prod_{n=p}^{n+q-1} \|\mathbf{M}_n\| \le L_*/l_*$. Ekkor l és l_* definíciója alapján létezik $k_0 > \nu$ úgy, hogy $\|\mathbf{x}_{k_0}\| < l_*$ teljesüljön. Ekkor

$$\|\mathbf{x}_{k_0+q}\| \le \left\| \left(\prod_{n=k_0}^{k_0+q-1} \mathbf{M}_n \right) \mathbf{x}_{k_0} \right\| \le \left(\prod_{n=k_0}^{k_0+q-1} \|\mathbf{M}_n\| \right) \|\mathbf{x}_{k_0}\| < \frac{L_*}{l_*}\, l_* = L_* < L$$

tetszőleges $q \in \mathbb{N}$ esetén fennáll, ami ellentmond L definíciójának.

(b) Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\mathbf{F}_n := \mathbf{M}_n \cdot \ldots \cdot \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_0, \quad \mathbf{A}_n := \mathbf{F}_n^{\mathrm{T}} \mathbf{F}_n = \left(a_{ij}^{(n)} \right)_{i,j=1}^{m} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Megmutatjuk, hogy az $a_{ij}^{(n)}$ sorozat konvergál ha $n \to \infty$. Vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_n\|^2 &= \|\mathbf{M}_{n-1} \cdot \ldots \cdot \mathbf{M}_0 \mathbf{x}_0\|^2 = \|\mathbf{F}_{n-1}\mathbf{x}_0\|^2 = \\ &= \langle \mathbf{F}_{n-1}\mathbf{x}_0, \mathbf{F}_{n-1}\mathbf{x}_0 \rangle = \langle \mathbf{A}_{n-1}\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 \rangle \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \end{aligned}$$

mely az (a) pont értelmében tetszőleges $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^m$ kezdeti érték esetén konvergens. Rögzített i $(1 \leq i \leq m)$ mellett az $\mathbf{x}_0$ kezdeti vektor komponenseit válasszuk meg úgy, hogy $x_{0_j} = \delta_{ij}$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$, ahol $\delta_{ii} = 1$ és $\delta_{ij} = 0$ $j \neq i$ esetén. Ekkor található olyan $a_{ii} \in \mathbb{R}$, hogy ha $n \to \infty$, akkor $\|\mathbf{x}_n\|^2 = a_{ii}^{(n-1)} \to a_{ii}$. Hasonló módon kapjuk, hogy $a_{ij}^{(n-1)} \to a_{ij}$ $(n \to \infty)$ valamely a_{ij}-re tetszőleges $i, j \in \{1, \ldots, m\}$, $i \neq j$ esetén. Legyen $\mathbf{A} := (a_{ij})_{i,j=1}^m \in \mathbb{R}^{m \times m}$, mely a fentiek miatt pozitív szemidefinit. Ezt felhasználva kapjuk, hogy

$$\prod_{i=0}^{n} |\det \mathbf{M}_i| = \left|\det \prod_{i=0}^{n} \mathbf{M}_i\right| = |\det \mathbf{F}_n| = (\det \mathbf{A}_n)^{\frac{1}{2}} \to (\det \mathbf{A})^{\frac{1}{2}} \qquad (n \to \infty);$$

azaz a $\prod_{n=0}^{\infty} |\det \mathbf{M}_n|$ végtelen szorzat konvergens és

$$D := \prod_{n=0}^{\infty} |\det \mathbf{M}_n| = (\det \mathbf{A})^{\frac{1}{2}}. \tag{2.18}$$

(c) *Elegendőség.* Tegyük fel, hogy fennáll (2.17). Ekkor, (2.18) alapján létezik legalább egy olyan $\hat{\mathbf{x}}_0 \in \mathbb{R}^m$ vektor, hogy $\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{0}$ teljesül. Arra az $\{\hat{\mathbf{x}}_n\}_{n=0}^{\infty}$ megoldásra, melynek kezdeti vektora $\hat{\mathbf{x}}_0$, igaz a következő:

$$\lim_{n \to \infty} \|\hat{\mathbf{x}}_n\|^2 = \lim_{n \to \infty} \langle \mathbf{A}_n \hat{\mathbf{x}}_0, \hat{\mathbf{x}}_0 \rangle = \langle \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_0, \hat{\mathbf{x}}_0 \rangle = 0,$$

így tehát $\{\hat{\mathbf{x}}_n\}_{n=0}^{\infty}$ egy kis megoldás.

Szükségesség. Tegyük fel, hogy létezik kis megoldás, de $D > 0$. Ekkor (2.18) alapján $\det \mathbf{A} > 0$, vagyis $\mathbf{A}$ pozitív definit. Emiatt tetszőleges $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$ kezdeti vektor esetén

$$\lim_{n \to \infty} \|\mathbf{x}_n\|^2 = \langle \mathbf{A}\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 \rangle > 0,$$

ami ellentmond annak, hogy van legalább egy kis megoldás. ∎

Érdemes megjegyezni, hogy a (2.16) feltétel nem szükséges a megoldások normabeli határértékének létezéséhez. Például, ha $\mathbf{M}_0$ és $\mathbf{M}_1$ két egymásra merőleges projekció, akkor a 2.8 tétel (a) pontja az $\mathbf{M}_2$, $\mathbf{M}_3$, ... mátrixoktól függetlenül teljesül. Mint ahogy azt az alábbi egyszerű példa is mutatja, a megoldások normabeli határértékének létezése nem szükséges kis megoldás létezéséhez. Legyen

$$\mathbf{M}_{2l} := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{M}_{2l+1} := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \qquad l = 0, 1, 2, \ldots.$$

Nyilvánvalóan

$$\prod_{n=0}^{k} \|\mathbf{M}_n\| = \begin{cases} 2, & \text{ha } k \text{ páros,} \\ 1, & \text{ha } k \text{ páratlan,} \end{cases}$$

az $(1,0)^{\mathrm{T}}$ pontból induló megoldásnak nincs határértéke, ha $n \to \infty$, míg a $(0,1)^{\mathrm{T}}$ kezdeti vektorból indított megoldás kis megoldás.

Egy geometriai módszer segítségével megmutatjuk, hogy a $D = 0$ feltétel akkor is szükséges és elegendő kis megoldás létezéséhez, ha mindössze a $\| \prod_{n=p}^{q} \mathbf{M}_n \|$ $(0 \le p \le q)$ sorozat korlátosságát követeljük meg.

2.9. Tétel ([32]). *Tegyük fel, hogy található olyan $K \in \mathbb{R}$, hogy tetszőleges $p, q \in \mathbb{N}$, $(0 \le p \le q)$ esetén*

$$\left\| \prod_{n=p}^{q} \mathbf{M}_n \right\| \le K \tag{2.19}$$

teljesül. Ekkor, a (2.9) egyenletnek akkor és csakis akkor létezik kis megoldása, ha fennáll a (2.17) feltétel.

Bizonyítás. *Szükségesség.* Jelölje B, illetve S az $\mathbb{R}^m$-beli, origó középpontú egységgömböt, illetve egységgömbfelületet. Legyen $\mathbf{s}_k$ az $\mathbf{F}_k$S ellipszoid origóhoz legközelebbi pontjainak valamelyike. A szükségesség belátásához tegyük fel, hogy $\{\hat{\mathbf{x}}_n\}_{n=0}^{\infty}$ kis megoldás $\hat{\mathbf{x}}_0 \in \mathrm{S}$ kezdeti vektorral. Ekkor $\|\mathbf{s}_n\| \leq \|\hat{\mathbf{x}}_n\| \to 0$ ha $n \to \infty$, vagyis $\mathbf{F}_k\mathrm{S}$ legrövidebb tengelyének a hossza 0-hoz konvergál. Mivel $(\mathbf{F}_k\mathrm{B})$ térfogata arányos a tengelyei hosszának szorzatával, és ezen hosszak sorozata felülről korlátozható K-val , ezért maga a térfogat is 0-hoz tart. Tudjuk hogy,

$$\mathrm{vol}(\mathbf{F}_k\mathrm{B}) = \left(\prod_{n=0}^{k} |\det \mathbf{M}_n|\right) \mathrm{vol}(\mathrm{B}) \qquad (n = 0, 1, 2, \dots);$$

így $D = 0$ is teljesül, amit bizonyítanunk kellett.

Elegendőség. Feltehetjük, hogy $\det \mathbf{M}_n \neq 0$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, mivel ennek nem teljesülése esetén biztosan létezik kis megoldás. Vegyük észre, hogy ekkor $\|\mathbf{s}_n\| \to 0$ is teljesül, ha $n \to \infty$. Tekintsük az $\mathbf{r}_n := \mathbf{F}_n^{-1}\mathbf{s}_n \in \mathrm{S}$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ sorozatot. Mivel S kompakt, így kiválasztható $\{\mathbf{r}_{n_l}\}_{l=0}^{\infty}$ részsorozat oly módon, hogy $\lim_{l\to\infty} \mathbf{r}_{n_l} =: \mathbf{r} \in \mathrm{S}$. Megmutatjuk, hogy az $\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{r}$ vektorból kiinduló $\{\hat{\mathbf{x}}_n\}_{n=0}^{\infty}$ megoldás kis megoldás. Az előbbiekből következik, hogy

$$\|\mathbf{F}_{n_l}\mathbf{r}\| \leq \|\mathbf{F}_{n_l}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{n_l})\| + \|\mathbf{F}_{n_l}\mathbf{r}_{n_l}\| \to 0 \qquad (l \to \infty),$$

ezért tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén található $\tilde{l}$ pozitív egész, hogy $\|\mathbf{F}_{n_{\tilde{l}}}\mathbf{r}\| < \varepsilon/K$ teljesüljön. Legyen $n > n_{\tilde{l}}$, ekkor

$$\begin{aligned}\|\mathbf{F}_n\mathbf{r}\| &= \| \left(\mathbf{M}_n\mathbf{M}_{n-1} \cdot \ldots \cdot \mathbf{M}_{n_{\tilde{l}}+1}\right) \mathbf{F}_{n_{\tilde{l}}}\mathbf{r}\| \leq \\ &\leq \|\mathbf{M}_n\mathbf{M}_{n-1} \cdot \ldots \cdot \mathbf{M}_{n_{\tilde{l}}+1}\|\|\mathbf{F}_{n_{\tilde{l}}}\mathbf{r}\| < K\frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon,\end{aligned}$$

amely ekvivalens azzal, hogy $\lim_{n\to\infty} \|\mathbf{F}_n\mathbf{r}\| = 0$. ∎

Megjegyezzük, hogy a tételben szereplő (2.19) feltétel nem helyettesíthető a

$$\left\|\prod_{n=0}^{k} \mathbf{M}_n\right\| \leq K \qquad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

feltétellel, amint azt az alábbi példa is mutatja (lásd [27]). Definiáljuk a $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ mátrixokat

$$\mathbf{B} := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{C} := \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

és legyen $\mathbf{M}_n :=$ vagy $\mathbf{B}$ vagy $\mathbf{C}$ a következő, az $\mathbf{x}_0^{(1)} = (1,0)^{\mathrm{T}}$ és $\mathbf{x}_0^{(2)} = (0,1)^{\mathrm{T}}$ kezdeti vektorokból kiinduló $\{\mathbf{x}_n^{(1)}\}_{n=0}^{\infty}$ és $\{\mathbf{x}_n^{(2)}\}_{n=0}^{\infty}$ fundamentális megoldásrendszerre épülő szabály alapján. Legyen

$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{M}_1 := \mathbf{B}, \qquad \mathbf{M}_2 = \mathbf{M}_3 = \ldots = \mathbf{M}_{n_1} := \mathbf{C},$$

ahol n_1 a legkisebb olyan egész amelyre már $\|\mathbf{x}_{n_1}^{(2)}\| \geq 4$ teljesül. Ezután legyen

$$\mathbf{M}_{n_1+1} = \ldots = \mathbf{M}_{n_2} := \mathbf{B}, \qquad \mathbf{M}_{n_2+1} = \ldots = \mathbf{M}_{n_3} := \mathbf{C},$$

ahol n_2 és n_3 a legkisebb egészek, amelyekre $\|\mathbf{x}_{n_2}^{(1)}\| \geq 4$, illetve $\|\mathbf{x}_{n_3}^{(2)}\| \geq 4$ fennállnak. Tegyük fel, hogy ezen szabály alapján n_1, n_2, …, n_{2k} már meghatározásra került. Ekkor,

$$\mathbf{M}_{n_{2k}+1} = \ldots = \mathbf{M}_{n_{2k+1}} := \mathbf{B}, \qquad \mathbf{M}_{n_{2k+1}+1} = \ldots = \mathbf{M}_{n_{2k+2}} := \mathbf{C},$$

ahol n_{2k+1}, n_{2k+2} a legkisebb egészek, melyekre $\|\mathbf{x}_{n_{2k+1}}^{(1)}\| \geq 4$ illetve $\|\mathbf{x}_{n_{2k+2}}^{(2)}\| \geq 4$ teljesülnek. Nyilvánvaló, hogy a determinánsok szorzata 0-hoz tart és a $\{\| \prod_{n=0}^{k} \mathbf{M}_n \|\}_{k=0}^{\infty}$ sorozat is korlátos, ennek ellenére a (2.9) egyenletnek nem létezik kis megoldása.

A mátrixnorma tulajdonságai miatt a

$$\prod_{n=p}^{q} \|\mathbf{M}_n\| \leq K \qquad (0 \leq p \leq q) \tag{2.20}$$

feltételből következik a (2.19) feltétel. Az előző példa alapján felmerül a kérdés, hogy a (2.19) feltétel helyettesíthető-e az alábbival:

$$\prod_{n=0}^{k} \|\mathbf{M}_n\| \leq K \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Tudomásunk szerint ez jelenleg még megoldatlan probléma.

2.2. A 2.2. tétel bizonyítása

Az előző szakaszbeli előkészítés után már minden eszköz adott a 2.2. tétel bizonyításához.

Bizonyítás. Bevezetve az $y = x'/a_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ változót, a (2.5) egyenlet átírható az

$$x' = a_n y, \qquad y' = -a_n x - c_n y \qquad\quad (t_{n-1} \le t < t_n,\ n = 1, 2, \ldots) \tag{2.21}$$

elsőrendű rendszerré. Mivel a (2.5) egyenlet megoldásai folytonosan differenciálhatóak a $[0, \infty)$ intervallumon, ezért ugyanott az $x'(t) = a_n y(t)$ függvénynek is folytonosnak kell lennie. Így, ha $t \mapsto (x(t), y(t))$ a (2.21) egyenlet egy megoldása a $[0, \infty)$ intervallumon, akkor a $t \mapsto y(t)$ függvénynek jobbról folytonosnak kell lennie minden $t \ge 0$ esetén és ki kell elégítenie az $a_n y(t_n - 0) = a_{n+1} y(t_n)$ egyenletet minden n-re $(n = 1, 2, \ldots)$, ahol $y(t_n - 0)$ az y bal oldali határértékét jelöli a t_n időpillanatban. Ez azt jelenti, hogy az x-re vonatkozó (2.5) egyenlet ekvivalens a következő impulzív elsőrendű rendszerrel:

$$\begin{aligned} &x' = a_n y, \qquad y' = -a_n x - c_n y && (t_{n-1} \le t < t_n) \\ &y(t_n) = \frac{a_n}{a_{n+1}} y(t_n - 0), && n = 1, 2, \ldots. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Az (r, φ) polárkoordinátákat a szokásos $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ egyenletekkel bevezetve a (2.21) rendszert

$$\begin{aligned} &r' = -c_n r \sin^2\varphi, \\ &\varphi' = -a_n - \frac{c_n}{2}\sin 2\varphi, \qquad (t_{n-1} \le t < t_n,\ n = 1, 2, \ldots) \end{aligned} \tag{2.23}$$

alakra hozhatjuk. Vegyük észre, hogy az (i) feltétel alapján $\varphi'(t) \le 0$ teljesül minden $t \in [t_{n-1}, t_n)$ esetén $(n = 1, 2, \ldots)$. A $\sin^2\varphi = (1 - \cos 2\varphi)/2$

azonosság és a Newton-Leibniz-formula segítségével az alábbi becsléshez jutunk:

$$\begin{aligned}
\ln\frac{r(t_n-0)}{r(t_{n-1})} &= -c_n\int_{t_{n-1}}^{t_n}\sin^2\varphi(t)\,\mathrm{d}t = -c_n\int_{t_{n-1}}^{t_n}\frac{\sin^2\varphi(t)\varphi'(t)}{\varphi'(t)}\,\mathrm{d}t\\
&= -c_n\int_{t_{n-1}}^{t_n}\frac{\sin^2\varphi(t)\varphi'(t)}{-a_n-\frac{c_n}{2}\sin 2\varphi}\,\mathrm{d}t\\
&= -c_n\int_{\varphi(t_n-0)}^{\varphi(t_{n-1})}\frac{\sin^2 u}{a_n+\frac{c_n}{2}\sin 2u}\,\mathrm{d}u\\
&\le -\frac{c_n}{a_n+\frac{c_n}{2}}\int_{\varphi(t_n-0)}^{\varphi(t_{n-1})}\sin^2 u\,\mathrm{d}u \qquad (2.24)\\
&= -\frac{c_n}{a_n+\frac{c_n}{2}}\left\{\left[\frac{1}{2}u-\frac{\sin 2u}{4}\right]_{\varphi(t_n-0)}^{\varphi(t_{n-1})}\right\}\\
&= \frac{c_n}{2a_n+c_n}\Bigg[(\varphi(t_n-0)-\varphi(t_{n-1}))\\
&\quad -\frac{1}{2}(\sin 2\varphi(t_n-0)-\sin 2\varphi(t_{n-1}))\Bigg].
\end{aligned}$$

A (2.23) rendszer második egyenletéből φ'-re a

$$\varphi' = -a_n-\frac{c_n}{2}\sin 2\varphi \le -a_n+\frac{c_n}{2}, \qquad (t_{n-1}\le t<t_n,\ n=1,2,\dots)$$

becslés adódik. Ebből integrálással a

$$\varphi(t_{n-1})-\varphi(t_n-0) = -\int_{t_{n-1}}^{t_n}\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \ge \left(a_n-\frac{c_n}{2}\right)(t_n-t_{n-1}) \qquad (2.25)$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Ennek felhasználásával a (2.24) becslést tovább folytathatjuk:

$$\ln\frac{r(t_n-0)}{r(t_{n-1})} \le -\frac{c_n}{2(2a_n+c_n)}[(2a_n-c_n)(t_n-t_{n-1})-2] = -\frac{\gamma_n}{2}. \qquad (2.26)$$

Legyen $\mathbf{M}_{n-1}^{(1)}$ a (2.23) rendszer alapmátrixa, azaz

$$\begin{pmatrix} x(t_n-0)\\ y(t_n-0)\end{pmatrix} = \mathbf{M}_{n-1}^{(1)}\begin{pmatrix} x(t_{n-1})\\ y(t_{n-1})\end{pmatrix}.$$

A (2.22) rendszer alapján az $(x(t_n), y(t_n))^{\mathrm{T}}$ vektor definíciója a következő:

$$\begin{pmatrix} x(t_n) \\ y(t_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{a_n}{a_{n+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t_n - 0) \\ y(t_n - 0) \end{pmatrix} = \mathbf{M}_{n-1} \begin{pmatrix} x(t_{n-1}) \\ y(t_{n-1}) \end{pmatrix},$$

ahol

$$\mathbf{M}_{n-1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{a_n}{a_{n+1}} \end{pmatrix} \mathbf{M}_{n-1}^{(1)}.$$

Nyilvánvalóan a (2.22) rendszer stabilitási tulajdonságai ekvivalensek az

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \mathbf{M}_{n-1} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{2.27}$$

rendszer stabilitási tulajdonságaival. A (2.26) becslést felhasználva becslést tudunk adni az $\mathbf{M}_{n-1}^{(1)}$ mátrixok normáira:

$$\|\mathbf{M}_{n-1}^{(1)}\| = \sup_{0 < r(t_{n-1})} \frac{r(t_n - 0)}{r(t_{n-1})} \leq \exp\left[-\frac{\gamma_n}{2}\right], \tag{2.28}$$

ahol a szuprémumot minden olyan megoldás esetében vesszük, amelyre teljesül, hogy a t_{n-1} időpillanatban r értéke pozitív. Így kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \|\mathbf{M}_{n-1}\| &\leq \|\mathbf{M}_{n-1}^{(1)}\| \max\left\{\frac{a_n}{a_{n+1}}; 1\right\} \\ &\leq \exp\left[-\frac{\gamma_n}{2}\right] \max\left\{\frac{a_n}{a_{n+1}}; 1\right\} \\ &= \exp\left[-\frac{\gamma_n}{2} + \ln\max\left\{\frac{a_n}{a_{n+1}}; 1\right\}\right]. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Ennek alapján könnyen látható, hogy tetszőleges n ($n = 1, 2, \ldots$) esetén a (iii) feltétel miatt

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n} \|\mathbf{M}_{k-1}\| &\leq \prod_{k=1}^{n} \exp\left[-\frac{\gamma_n}{2} + \ln\max\left\{\frac{a_n}{a_{n+1}}; 1\right\}\right] \\ &= \exp\left[\sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{\gamma_k}{2} + \ln\max\left\{\frac{a_k}{a_{k+1}}; 1\right\}\right)\right] < K. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Ebből következik, hogy tetszőleges p, q $(1 \le p \le q)$ esetén $\prod_{k=p}^{q} \|\mathbf{M}_{k-1}\| < K$ is teljesül. A 2.9. tétel állítása alapján elegendő megmutatnunk, hogy $\prod_{n=0}^{\infty} |\det \mathbf{M}_n| = 0$ is fennáll a (2.27) rendszerre. Ehhez szükségünk lesz a

$$|\det \mathbf{M}| \ \le \|\mathbf{M}\|^m$$

egyenlőtlenségre, mely tetszőleges $m \times m$-es $(m \in \mathbb{N})$ valós mátrix esetén fennáll. A (2.28) becslés és az előző egyenlőtlenség alapján érvényes az alábbi:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n} |\det \mathbf{M}_{k-1}| &= \prod_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_{k+1}} \left|\det \mathbf{M}_{k-1}^{(1)}\right| \\
&\le \prod_{k=1}^{n} \left\{ \frac{a_k}{a_{k+1}} \left(\sup_{0<r(t_{k-1})} \frac{r(t_k-0)}{r(t_{k-1})} \right)^2 \right\} \\
&\le \prod_{k=1}^{n} \exp\left[-\gamma_k + \ln \frac{a_k}{a_{k+1}} \right] \\
&= \exp\left[\sum_{k=1}^{n} \left(-\gamma_k + \ln \frac{a_k}{a_{k+1}} \right) \right].
\end{aligned}$$

A (ii) feltétel alapján kapjuk, hogy $\prod_{n=0}^{\infty} |\det \mathbf{M}_n| = 0$, így a 2.9. tétel alkalmazásával az állítást bebizonyítottuk. ∎

2.10. Megjegyzés. *A 2.2. tételben szereplő (ii) és (iii) feltételek függetlenek egymástól.*

A $c_n = 0$, $t_n = n$ és $a_n = a > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ választással adódik, hogy (iii)-ból nem következik (ii), hisz ekkor mindkét kifejezésben a tagok értéke 0. A másik irány megmutatásához legyen $c_n = 0$, $t_n = n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, az a_n sorozat elemeit pedig definiáljuk a következőképp:

$$a_1 := 2, \qquad a_{2k} := 2k, \qquad a_{2k+1} := 2(2k+1), \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Mivel $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, így (ii) teljesül, azonban az alábbiak miatt (iii) nem áll fenn:

$$\sum_{k=1}^{n} \ln \max\left\{\frac{a_k}{a_{k+1}}; 1\right\} = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \ln \frac{2(2k+1)}{2(k+1)}$$
$$\geq \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \ln \frac{4}{3} = \ln \frac{4}{3} \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \to \infty \qquad (n \to \infty).$$

2.11. Megjegyzés. *Az $x - 1 \geq \ln x$ egyenlőtlenség felhasználásával könnyen látható, hogy a $c_n = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ esetben Hatvani 2.1. tételéből következik a 2.2. tétel.*

2.3. Nemlineáris differenciaegyenletek kis megoldásairól

A szakaszban a 2.9. tétel és az annak bizonyítására alkalmazott geometriai módszer nemlineáris differenciaegyenlet-rendszerekre történő általánosíthatóságát vizsgáljuk.

Tekintsük az alábbi nemlineáris differenciaegyenlet-rendszert

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(n, \mathbf{x}_n) \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2.31}$$

ahol $m \in \mathbb{N}$, $\mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^m$ oszlopvektor, és az $\mathbf{f}(n, \cdot)$ függvények olyanok, hogy minden $n \in \mathbb{N}_0$ esetén rendelkeznek a következő tulajdonságokkal:

$$\mathbf{f}(n, \cdot) : \mathrm{D}_n \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m, \qquad \operatorname{ran} \mathbf{f}(n, \cdot) \subset \mathrm{D}_{n+1},$$

$$\mathbf{f}(n, 0) = 0, \qquad \mathbf{f}(n, \cdot) \in C^1(\mathrm{D}_n),$$

ahol D_n egy konvex tartomány $(n = 0, 1, \ldots)$. Legyen $q \geq p$ $(p, q \in \mathbb{N}_0)$. Az $\mathbf{f}(p, \cdot), \ldots, \mathbf{f}(q, \cdot)$ függvények kompozíciójára vezessük be az

$$\mathbf{F}(q, p\,; \cdot) := \mathbf{f}(q, \cdot) \circ \ldots \circ \mathbf{f}(p, \cdot)$$

jelölést, továbbá legyen $F^j(q,p\,;\cdot) : \mathrm{D}_p \to \mathbb{R}$ $(j = 1,\ldots,m)$ az $\mathbf{F}(q,p\,;\cdot)$ függvény j-edik komponensfüggvénye, azaz

$$\mathbf{F}(q,p\,;\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} F^1(q,p\,;\mathbf{x}) \\ \vdots \\ F^m(q,p\,;\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

Mivel $\mathbf{F}(n,0\,;\cdot)$ a (2.31) egyenlet folyama, így az egyenlet minden $\{\mathbf{x}_n\}_{n=0}^{\infty}$ megoldására teljesül az $\mathbf{F}(n,0\,;\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_n$ egyenlőség. Egy $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ függvény esetén $\operatorname{grad} g(x)$ jelölje g gradiensét, azaz $\operatorname{grad} g(x) = \left(\frac{\partial g(x)}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial g(x)}{\partial x_m}\right)^T$. Legyen $H_0 \subset \mathrm{D}_0$ egy korlátos, összefüggő nyitott halmaz lezártja. Ekkor H_0-nak a (2.31) egyenlet folyama melletti n-edik képe $H_n = \mathbf{F}(n,0;H_0)$, H_n fázistérfogata pedig

$$\mu(H_n) = \int_{H_0} |\det \mathbf{F}'(n,0;\mathbf{x})|\ \mathrm{d}\mathbf{x}, \tag{2.32}$$

ahol μ a Lebesque-mérték. Egy $H \subset \mathbb{R}^m$ halmaz esetén annak lezártjára, határára, illetve belsejére pedig vezessük be a $\overline{H}$, ∂H és $\operatorname{int} H = \overline{H} \setminus \partial H$ jelöléseket. Megjegyezzük, hogy a (2.9) lineáris differenciaegyenlet esetén egy korlátos, zárt és összefüggő H_0 halmaz fázistérfogata

$$\mu(H_n) = \left(\prod_{k=0}^{n} |\det M_k|\right) \mu(H_0). \tag{2.33}$$

A (2.31) egyenletre vonatkozóan Karsai, Graef és Li [37] a fent vázolt feltételeknél valamivel általánosabbak mellett, Ljapunov-függvény segítségével már megadott elegendő feltételt kis megoldás létezésére. Ennek a feltételnek az alkalmazhatóság szempontjából kritikus része egy, a Ljapunov-függvényre vonatkozó folytonossági feltétel. A lineáris esetre alkalmazott topológiai módszert használva a legáltalánosabb esetben eddig csak olyan részeredményt sikerült elérnünk, amely Karsaiék módszerével is megkapható. Mivel ez a tétel, a 2.9. tételhez hasonlóan csak a (2.31) egyenlet jobb oldalán található függvényeket használja fel, továbbá a bizonyítása a 2.9. tételével analóg, ezért ezt az alábbiakban bemutatjuk.

2.12. Tétel. *Tegyük fel, hogy található olyan origó körüli H_0 zárt gömb és $K > 0$, hogy*

$$\left\|\operatorname{grad} F^j(q,p\,;\mathbf{x})\right\| \le K \tag{2.34}$$

tetszőleges $p, q \in \mathbb{N}_0$ $(0 \le p \le q)$, $j = 1,\dots,m$ és $\mathbf{x} \in \mathrm{H}_0$ esetén teljesül, továbbá

$$\lim_{n\to\infty} \int_{H_0} |\det F'(n,0;\mathbf{x})| \,\mathrm{d}\mathbf{x} = 0. \tag{2.35}$$

Ekkor a (2.31) egyenletnek létezik legalább egy kis megoldása.

2.13. Megjegyzés. *A*

$$\lim_{n\to\infty} \det \mathbf{F}'(n,0;\mathbf{x}) = 0 \qquad (\mathbf{x} \in H_0) \tag{2.35$'$}$$

feltétel teljesülése esetén (2.35) *is teljesül.*

Bizonyítás. Jelölje $\mathbf{s}_n$ a ∂H_n halmaz origóhoz legközelebb eső pontjainak egyikét. Könnyen látható, hogy a (2.35) feltétel miatt $\lim_{n\to\infty} \mathbf{s}_n = 0$. Legyen $\mathbf{r}_n$ valamely pont azon $\mathbf{x} \in \partial H_0$ pontok közül, amelyekre $\mathbf{F}(n,0\,;\mathbf{x}) = \mathbf{s}_n$ teljesül. Mivel ∂H_0 kompakt, ezért az $\{\mathbf{r}_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozatnak létezik $\{\mathbf{r}_{n_l}\}_{l=0}^{\infty}$ konvergens részsorozata. Legyen $\lim_{l\to\infty} \mathbf{r}_{n_l} =: \mathbf{r} \in H_0$. Meg fogjuk mutatni, hogy az $\mathbf{r}$ pontból indított megoldás kis megoldás, vagyis $\lim_{n\to\infty} F^j(n,0;\mathbf{r}) = 0$ $(j = 1,\dots,m)$. Válasszunk egy tetszőleges j $(1 \le j \le m)$ indexet. Mivel $\mathbf{F}(n_l,0;\mathbf{r}_{n_l}) \to 0$ és $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{n_l}\| \to 0$, ha $l \to \infty$, ezért minden $\varepsilon > 0$ esetén megadható olyan $\tilde{l} \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy ha $l > \tilde{l}$, akkor az $\|\mathbf{F}(n_l,0;\mathbf{r}_{n_l})\| < \varepsilon/(2K)$ és az $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{n_l}\| < \varepsilon/(2K)$ egyenlőtlenségek egyszerre teljesülnek.

Legyen $l > \tilde{l}$. Ekkor, mivel az origó fixpont, $n > n_{\tilde{l}}$ esetén érvényes az alábbi becslés

$$\begin{aligned}
|F^j(n,0;\mathbf{r})| &\leq |F^j(n,0;\mathbf{r}) - F^j(n,0;\mathbf{r}_{n_l})| + |F^j(n,0;\mathbf{r}_{n_l})| \\
&= |F^j(n,0;\mathbf{r}) - F^j(n,0;\mathbf{r}_{n_l})| \\
&+ |F^j(n,n_l+1;F(n_l,0;\mathbf{r}_{n_l})) - F^j(n,n_l+1;\mathbf{0})|.
\end{aligned}$$

A becslésben szereplő mindkét tagra a vektor-skalár függvényekre vonatkozó Lagrange középérték-tételt alkalmazva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
|F^j(n,0;\mathbf{r})| &\leq |\langle \operatorname{grad} F^j(n,0;\boldsymbol{\xi}_j), (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{n_l})\rangle| \\
&\quad +|\langle \operatorname{grad} F^j(n,n_l+1;\boldsymbol{\eta}_j), F(n_l,0;\mathbf{r}_{n_l})\rangle| \\
&\leq \|\operatorname{grad} F^j(n,0;\boldsymbol{\xi}_j)\|\|(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{n_l})\| \\
&\quad +\|\operatorname{grad} F^j(n,n_l+1;\boldsymbol{\eta}_j)\|\|F(n_l,0;\mathbf{r}_{n_l})\| \\
&< K\frac{\varepsilon}{2K} + K\frac{\varepsilon}{2K} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

ahol $\boldsymbol{\xi}_j = \lambda_j\mathbf{r} + (1-\lambda_j)\mathbf{r}_{n_l}$, $\boldsymbol{\eta}_j = \nu_j F(n_l,0;\mathbf{r}_{n_l})$ és $\lambda_j, \nu_j \in [0,1]$. Ezzel, mivel ε és j tetszőleges, a tételt beláttuk. ■

2.14. Megjegyzés. *A bizonyítás alapján könnyen látható, hogy a (2.34) feltételből következik a (2.31) nemlineáris egyenlet megoldásainak korlátossága.*

2.15. Megjegyzés. *A (2.9) lineáris egyenlet esetén* $F(q,p\,;x) = \left(\prod_{n=p}^{q} M_n\right) x$, *így a 2.9. tétel elegendősége következik a 2.12. tételből.*

3. fejezet

Lépcsősfüggvény-együtthatós másodrendű félineáris differenciálegyenletek stabilitásáról

Ebben a fejezetben az

$$x''|x'|^{n-1} + q(t)|x|^{n-1}x = 0, \qquad 1 \leq n \in \mathbb{R},$$

ún. féllineáris differenciálegyenlet triviális megoldásának x-re vonatkozó aszimptotikus stabilitására adunk meg elegendő feltételt abban az esetben, amikor $n > 1$ és a q együtthatófüggvény lépcsős. A bizonyításánál alkalmazott geometriai módszer szintén alkalmazható kétdimenziós nemautonóm lineáris differenciaegyenlet-rendszerek esetén is. Az első szakaszban ennek a módszernek a segítségével Elbert ilyen differenciaegyenletek triviális megoldásának aszimptotikus stabilitásáról szóló tételét élesítjük és egy egyszerűbb bizonyítást is adunk rá. A második szakaszban rövid bevezetőt adunk a félllineáris differenciálegyenletek elméletének idevágó részéből, majd belátjuk a fejezet fő tételét, mellyel Bihari és Elbert ezen egyenletekre vonatkozó Armellini-Tonelli-Sansone-típusú tételeit általánosítjuk.

3.1. Differenciaegyenletek aszimptotikus stabilitásáról

3.1.1. Előzmények

Ebben a szakaszban az

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{M}_n \mathbf{x}_n, \qquad n = 0, 1, 2, \dots \tag{3.1}$$

kétváltozós differenciaegyenlet-rendszert tekintjük, azaz $\mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^2$ és $\mathbf{M}_n \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Ahogy azt már korábban is említettük, jól ismert [3, p. 232], hogy a $\prod_{n=0}^{\infty} \|\mathbf{M}_n\| = 0$ feltétel teljesülése esetén a (3.1) minden megoldása az origóhoz tart, ha $n \to \infty$, vagyis az egyenlet triviális megoldása aszimptotikusan stabil. Fontos kérdés, hogy ha ez a feltétel nem teljesül, akkor is lehetséges-e garantálni az aszimptotikus stabilitást. Elbert [22] dolgozatában az alábbi feltevések mellett adott elegendő feltételt a triviális megoldás aszimptotikus stabilitására:

(i) $\prod_{n=0}^{\infty} \max\{\|\mathbf{M}_n\|, 1\} < \infty$,

(ii) $0 < \prod_{n=0}^{\infty} \|\mathbf{M}_n\|$,

(iii) $\prod_{n=0}^{\infty} \max\{|\det \mathbf{M}_n|, 1\} < \infty$.

Magát a tételt csak később, bizonyos technikai előkészületek után mondjuk ki. Az állítás bizonyítása az $\mathbf{M}_n$ mátrixok egy „trükkös” dekompozícióján és az ebből származtatott speciális mátrixok normáinak a becslésén alapul.

A szakasz célja megmutatni, hogy a tételben szereplő (i) – (iii) feltételek tovább gyengíthetőek. Nevezetesen, belátjuk, hogy (i) – (iii) helyett elegendő megkövetelni a $\limsup_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n} \|\mathbf{M}_k\| < \infty$ feltételt. Ezen túlmenően, a bizonyításnál Elbert módszere helyett egy egyszerűbb, geometriai technikát alkalmazunk. Ez a módszer már, mint azt később megmutatjuk, a nemlineáris esetben is alkalmazható.

3.1.2. Eredmények

A (3.1) egyenlethez egy stabilitási szempontból vele ekvivalens rendszert definiálunk. Mivel a későbbiekben eredményeinket alkalmazni akarjuk a féllineáris egyenletre , ezért olyan síkbeli koordinátarendszert tekintünk melyben az x-tengely a függőleges, az y-tengely pedig a vízszintes tengely, a szögeket pedig az y-tengelyhez képest mérjük az óra járásával ellentétes irányban.

A sík két egybevágósági transzformációjának, az x-tengelyre való tükrözésnek és az origó körüli, φ szöggel történő forgatásnak mátrixaira vezessük be a következő jelöléseket:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{E}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Nyilvánvaló, hogy

$$\mathbf{E}(\varphi_1)\mathbf{E}(\varphi_2) = \mathbf{E}(\varphi_1 + \varphi_2), \qquad \mathbf{E}(\varphi)\mathbf{R} = \mathbf{R}\mathbf{E}(-\varphi). \tag{3.3}$$

Szükségünk lesz a következő tételre (lásd például [34, p. 188]):

3.1. Tétel (Polár faktorizáció). *Minden $\mathbb{R}^n$-beli $\mathbf{M}$ lineáris transzformáció felírható $\mathbf{M} = \mathbf{S}\mathbf{Q}$ szorzatalakban, ahol $\mathbf{S}$ szemidefinit és $\mathbf{Q}$ ortogonális. $\mathbf{S}$ egyértelműen meghatározott, míg $\mathbf{Q}$ akkor és csakis akkor egyértelmű, ha $\mathbf{M}$ nemelfajuló.*

A tételben szereplő $\mathbf{S}$ az $\mathbf{M}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}$ szimmetrikus mátrix négyzetgyöke. Ha $\mathbf{M}$ nemelfajuló, akkor az $\mathbf{M}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}$ szorzat pozitív definit, azaz diagonalizálható: $\mathbf{M}^{\mathrm{T}}\mathbf{M} = \mathbf{P}\mathbf{D}^2\mathbf{P}^{-1}$, ahol $\mathbf{D}^2$ az $\mathbf{M}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}$ sajátértékeit tartalmazó diagonális mátrix, $\mathbf{P}$ pedig az az ortogonális mátrix, melynek oszlopaiban a sajátértékeknek megfelelő sajátvektorok helyezkednek el. Ekkor $\mathbf{S} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}$ alakban írható, továbbá

$$\mathbf{M} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}. \tag{3.4}$$

Legyenek Λ és λ az $\mathbf{M}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}$ mátrix sajátértékei. A nemelfajuló esetben tudjuk, hogy mindkettő pozitív, ezen kívül tegyük fel, hogy $\Lambda \geq \lambda$. Megjegyezzük, hogy $\|\mathbf{M}\| = \sqrt{\Lambda}$, továbbá tegyük fel, hogy a $\mathbf{D}$ mátrixban a diagonális elemek csökkenő sorrendben szerepelnek. Abban az esetben, amikor $\det \mathbf{M} = 0$, feltehetjük, hogy $\mathbf{S}$ pozitív szemidefinit és legyen $\mathbf{S} = \|\mathbf{M}\|\tilde{\mathbf{S}}$. Mivel $\tilde{\mathbf{S}}$ szimmetrikus, így $\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{P}\tilde{\mathbf{D}}\mathbf{P}^{-1}$, ahol $\mathbf{P}$ ortogonális mátrix és

$$\tilde{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A fentieket a (3.1) egyenlet együttható-mátrixaira alkalmazva kapjuk, hogy

$$\mathbf{M}_n = \|\mathbf{M}_n\|\mathbf{P}_n\hat{\mathbf{D}}_n\mathbf{P}_n^{-1}\mathbf{Q}_n, \tag{3.5}$$

ahol

$$\hat{\mathbf{D}}_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d_n \end{pmatrix}, \qquad d_n := \begin{cases} \sqrt{\frac{\lambda_n}{\Lambda_n}}, & \text{ha } \det \mathbf{M}_n \neq 0; \\ 0, & \text{ha } \det \mathbf{M}_n = 0. \end{cases} \tag{3.6}$$

Tekintsük most a (3.1) egyenlet folyamát, legyen $\mathbf{F}_n := \prod_{k=0}^{n} \mathbf{M}_k$. Kihasználva, hogy ortogonális mátrixok szorzata is ortogonális, a folyam

$$\mathbf{F}_n = \prod_{k=0}^{n} \mathbf{P}_k\hat{\mathbf{D}}_k\mathbf{P}_k^{-1}\mathbf{Q}_k = \left(\prod_{k=0}^{n} \|\mathbf{M}_k\|\right)\mathbf{P}_n\left(\prod_{k=0}^{n} \hat{\mathbf{D}}_k\mathbf{O}_k\right) \tag{3.7}$$

alakra hozható, ahol az $\mathbf{O}_k$ $(k = 0, \dots, n+1)$ ortogonális mátrixok a következők:

$$\mathbf{O}_0 := \mathbf{P}_0^{-1}\mathbf{Q}_0, \quad \mathbf{O}_k = \mathbf{P}_k^{-1}\mathbf{Q}_k\mathbf{P}_{k-1}, \quad k = 1, \dots, n. \tag{3.8}$$

Elemi geometriából ismert, hogy a síkon minden ortogonális transzformáció vagy forgatás, vagy egy forgatás és az x-tengelyre történő tükrözés szorzata. Ekkor, ha $\mathbf{O}_k$ se nem forgatás, se nem az identitás, se nem $\mathbf{R}$, akkor $\mathbf{O}_k = \mathbf{E}(\vartheta_k)\mathbf{R}$ alakú valamely ϑ_k szöggel. Kihasználva a (3.3) tulajdonságokat, és hogy $\mathbf{R}$ a diagonális mátrixokkal felcserélhető, kapjuk, hogy

$$\mathbf{F}_n = \left(\prod_{k=0}^{n} \|\mathbf{M}_k\|\right) \mathbf{R}^m \mathbf{E}(\alpha_n) \left(\prod_{k=0}^{n} \hat{\mathbf{D}}_k \mathbf{E}(\omega_k)\right) \tag{3.9}$$

valamely $m \in \mathbb{N}_0$ $(m \leq n+1)$-re és valamely ω_k értékekre, ahol α_k és ω_k az $\mathbf{M}_0, \dots, \mathbf{M}_k$ mátrixok segítségével számíthatóak ki.

Tekintsük most az

$$\mathbf{x}_{n+1} = \|\mathbf{M}_n\| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\omega_n & -\sin\omega_n \\ \sin\omega_n & \cos\omega_n \end{pmatrix} \mathbf{x}_n, \qquad 0 \leq d_n \leq 1, \qquad n = 0, 1, 2, \dots \tag{3.10}$$

differenciaegyenletet. A fenti gondolatmenet alapján látható, hogy a (3.1) egyenlet $(0,0)^{\mathrm{T}}$ egyensúlyi helyzete akkor és csakis akkor stabil, illetve aszimptotikusan stabil, ha a (3.10) egyenlet $(0,0)^{\mathrm{T}}$ egyensúlyi helyzete is stabil, illetve aszimptotikusan stabil.

Az előkészületek után most már kimondhatjuk Elbert tételét.

3.2. Tétel (Elbert, [22]). *Tegyük fel, hogy teljesülnek az alábbiak:*

(i) $\prod_{n=0}^{\infty} \max\{\|\mathbf{M}_n\|, 1\} < \infty$,

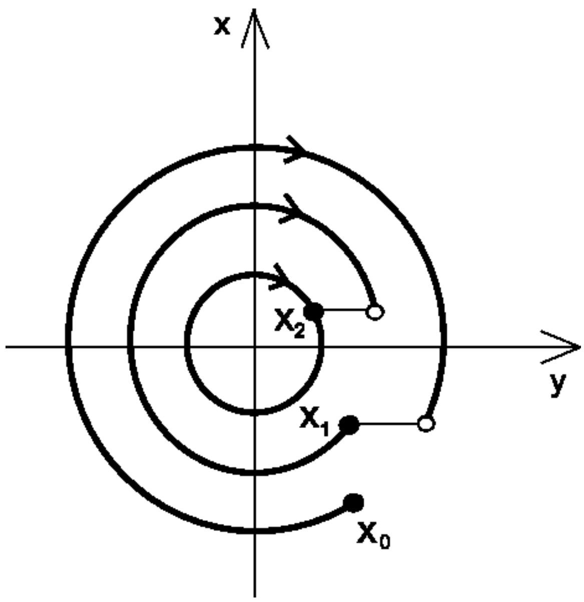
(ii) $0 < \prod_{n=0}^{\infty} \|\mathbf{M}_n\|$,

(iii) $\prod_{n=0}^{\infty} \max\{\det|\mathbf{M}_n|, 1\} < \infty$.

Ha
$$\sum_{n=0}^{\infty} \min\{1-d_n, 1-d_{n+1}\} \sin^2 \omega_{n+1} = \infty, \tag{3.11}$$
akkor a (3.10) differenciaegyenlet triviális megoldása aszimptotikusan stabil.

A szakasz fő tételében belátjuk, hogy az előző tételben szereplő (i) – (iii) feltételek gyengíthetőek.

3.3. Tétel ([33]). *Tegyük fel, hogy* $\limsup_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n} \|\mathbf{M}_k\| < \infty$*. Ha*
$$\sum_{n=0}^{\infty} \min\{1-d_n, 1-d_{n+1}\} \sin^2 \omega_{n+1} = \infty, \tag{3.12}$$
akkor a (3.10) differenciaegyenlet triviális megoldása aszimptotikusan stabil.



3.1. ábra. A (3.10) egyenlet dinamikája

A bizonyítás során elég azt az esetet vizsgálnunk, amikor $\|\mathbf{M}_k\| = 1$ ($k = 0, 1, \ldots$). Geometriai szempontból nézve a (3.10) egyenlet dinamikája nem más, mint egymást követő forgatások és az y-tengellyel párhuzamos kontrakciók sorozata (lásd a 3.1. ábrát). A kontrakció miatt a forgatás után az x tengelyen lévő pontok kivételével mindegyik pont origótól való távolsága csökken, mégpedig annál kisebb mértékben, minél közelebb van az x-tengelyhez. Mint azt látni fogjuk, a (3.12) feltétel azt garantálja, hogy ne legyen olyan pont, ami valahonnét kezdve a forgatások után mindig az x-tengely közelében marad, vagyis azt az esetet zárja ki, hogy a forgatások szöge valahonnét kezdve közel legyenek a π egész számú többszöröseihez, emellett pedig, hogy a kontrakciók túlságosan kicsik se lehessenek.

Bizonyítás. Ahogy már említettük, elegendő az $\|\mathbf{M}_k\| = 1$ $(k = 0, 1, \dots)$ esetet tekintenünk, és elég belátnunk, hogy $\left\|\prod_{n=0}^{\infty} \hat{\mathbf{D}}_n \mathbf{E}(\omega_n)\right\| = 0$. Vezessük be az r és φ polárkoordinátákat a következőképp:

$$\mathbf{x} := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad x = r\sin\varphi, \qquad y = r\cos\varphi.$$

Ekkor a (3.10) rendszer fázistere azon (r, φ) pontpárok halmaza, amelyekre $r \geq 0$, $-\infty < \varphi < \infty$ teljesül. Definiáljuk az alábbiakat:

$$\tilde{\mathbf{x}}_n := \mathbf{E}(\omega_n)\mathbf{x}_n, \quad \kappa_n := \varphi_{n+1} - (\varphi_n + \omega_n), \quad \Delta r_n := r_{n+1} - r_n, \quad n = 0, 1, \dots$$

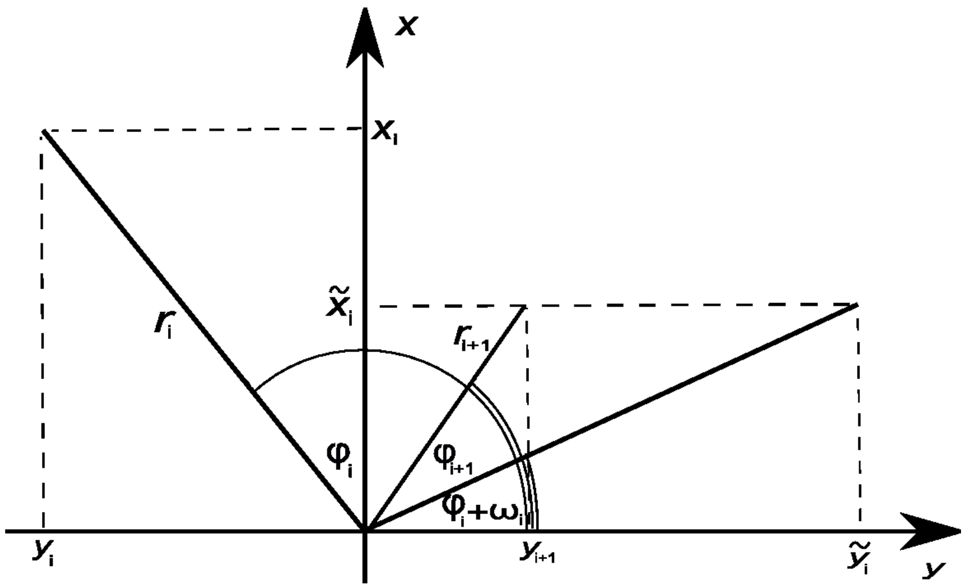
Könnyen látható, hogy teljesülnek a következők:

$$\sqrt{x_n^2 + y_n^2} = \sqrt{\tilde{x}_n^2 + \tilde{y}_n^2}, \qquad x_{n+1} = \tilde{x}_n, \qquad y_{n+1} = d_n \tilde{y}_n$$

$$\varphi_{n+1} = \varphi_0 + \sum_{i=0}^{n} (\omega_i + \kappa_i), \qquad r_{n+1} = r_0 + \sum_{i=0}^{n} \Delta r_i,$$

továbbá, hogy a kontrakció miatt $\Delta r_i \leq 0$. Ebből következik, hogy az $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozat monoton csökkenő, így létezik határértéke is.

Tegyük fel, hogy nem igaz a tétel állítása, azaz $\bar{r} := \lim_{n\to\infty} r_n > 0$. Az



3.2. ábra. A (3.10) egyenlet dinamikája polárkoordinátákban

előző összefüggések alapján az alábbi becslés adódik $-\Delta r_i$-re:

$$\begin{aligned}
-\Delta r_i &= r_i - r_{i+1} = \sqrt{x_i^2 + y_i^2} - \sqrt{x_{i+1}^2 + y_{i+1}^2} \\
&= \sqrt{\tilde{x}_i^2 + \tilde{y}_i^2} - \sqrt{\tilde{x}_i^2 + d_i^2\tilde{y}_i^2} = \frac{(1-d_i^2)\tilde{y}_i^2}{\sqrt{\tilde{x}_i^2 + \tilde{y}_i^2} + \sqrt{\tilde{x}_i^2 + d_i^2\tilde{y}_i^2}} \\
&\geq \frac{(1-d_i^2)r_i^2\cos^2(\varphi_i + \omega_i)}{2r_i} \geq \frac{\bar{r}}{2}(1-d_i)\cos^2(\varphi_i+\omega_i).
\end{aligned} \tag{3.13}$$

A célunk megmutatni, hogy az $\bar{r} > 0$ feltevés mellett az alsó becslések összege divergens, ami ellentmondáshoz vezet, hiszen $\sum_{i=0}^{n} \Delta r_i = r_0 - r_{n+1} < r_0 - \bar{r} < \infty$. A problémát az adja, hogy a (3.13) becslésben szereplő tagokban a megoldásoktól függő, ismeretlen φ_i szögek is megjelennek, melyeket ki kell küszöbölnünk. Nyilvánvaló, hogy

$$\begin{aligned}
|\cos(\varphi_i + \omega_i)| &= |\cos\varphi_i \cos\omega_i - \sin\varphi_i \sin\omega_i| \\
&\geq |\sin\varphi_i||\sin\omega_i| - |\cos\varphi_i||\cos\omega_i|.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Legyen $0 < \gamma < \varepsilon < 1$ és $\mu(\varepsilon,\gamma) := \sqrt{1-\gamma^2} - \varepsilon\gamma$. Mivel $\lim_{\varepsilon\to 0,\gamma\to 0} \mu(\varepsilon,\gamma) =$

1, ezért γ és ε megválaszthatóak úgy, hogy $\mu(\varepsilon, \gamma) \geq 1/2$ teljesüljön. Három alesetet fogunk megkülönböztetni.

a) $\boldsymbol{\gamma|\sin\omega_i| \geq |\cos\varphi_i|}$ **és** $\boldsymbol{|\cos\omega_i| \geq \varepsilon}$**.** Ekkor $|\sin\varphi_i| \geq |\cos\omega_i|$, a (3.14) felhasználásával pedig adódik, hogy

$$|\cos(\varphi_i + \omega_i)| \geq |\sin\omega_i||\cos\omega_i|(1-\gamma) \geq |\sin\omega_i|(1-\gamma)\varepsilon. \tag{3.15}$$

Ebben az esetben a (3.13) becslés a következőképp folytatható:

$$-\Delta r_i \geq \frac{\bar{r}}{2}(1-d_i)\cos^2(\varphi_i+\omega_i) \geq \frac{\bar{r}}{2}(1-\gamma)^2\varepsilon^2(1-d_i)\sin^2\omega_i. \tag{3.16}$$

b) $\boldsymbol{\gamma|\sin\omega_i| \geq |\cos\varphi_i|}$ **and** $\boldsymbol{|\cos\omega_i| < \varepsilon}$. Mivel

$$|\sin\varphi_i| \geq \sqrt{1-\gamma^2\sin^2\omega_i} \geq \sqrt{1-\gamma^2}, \tag{3.17}$$

így kapjuk, hogy

$$|\cos(\varphi_i+\omega_i)| \geq (\sqrt{1-\gamma^2} - \varepsilon\gamma)|\sin\omega_i| = \mu(\varepsilon,\gamma)|\sin\omega_i| \geq \frac{1}{2}|\sin\omega_i|. \tag{3.18}$$

Ekkor a (3.13) becslés folytatásaként

$$-\Delta r_i \geq \frac{\bar{r}}{2}(1-d_i)\cos^2(\varphi_i+\omega_i) \geq \frac{\bar{r}}{8}(1-d_i)\sin^2\omega_i \tag{3.19}$$

adódik.

c) $\boldsymbol{\gamma|\sin\omega_i| < |\cos\varphi_i|}$. Ebben az esetben $-\Delta r_i$ helyett $-\Delta r_{i-1}$ becsülhető alulról $|\sin\omega_i|$ segítségével. Vegyük észre, hogy a kontrakció miatt

$$\begin{aligned} |\cos\varphi_i| &= \frac{|y_i|}{\sqrt{x_i^2+y_i^2}} = \frac{d_{i-1}|\tilde{y}_{i-1}|}{\sqrt{\tilde{x}_{i-1}^2 + d_{i-1}^2\tilde{y}_{i-1}^2}} \\ &\leq \frac{|\tilde{y}_{i-1}|}{\sqrt{\tilde{x}_{i-1}^2+\tilde{y}_{i-1}^2}} = |\cos(\varphi_{i-1}+\omega_{i-1})| \end{aligned} \tag{3.20}$$

teljesül. Ennek felhasználásával $-\Delta r_{i-1}$-re a

$$\begin{aligned}
-\Delta r_{i-1} &\geq \frac{\bar{r}}{2}(1-d_{i-1})\cos^2(\varphi_{i-1}+\omega_{i-1}) \geq \frac{\bar{r}}{2}(1-d_{i-1})\cos^2\varphi_i \\
&\geq \frac{\bar{r}}{2}\gamma^2(1-d_{i-1})\sin^2\omega_i \geq \frac{\bar{r}}{2}\gamma^2\min\{1-d_{i-1},1-d_i\}\sin^2\omega_i
\end{aligned} \tag{3.21}$$

becslést kapjuk.

Legyen

$$c := \frac{\bar{r}}{2}\min\{(1-\gamma)^2\varepsilon^2;\frac{1}{4};\gamma^2\} > 0,$$

ekkor minden i index esetén

$$c\min\{1-d_{i-1};1-d_i\}\sin^2\omega_i \leq -\Delta r_{i-1}-\Delta r_i = r_{i-1}-r_{i+1}$$

teljesül. Ezen egyenlőtlenségek összegére

$$c\sum_{i=1}^{\infty}\min\{1-d_{i-1};1-d_i\}\sin^2\omega_i \leq r_0-\bar{r} < \infty,$$

adódik, amely ellentmond a (3.12) feltevésnek. ■

3.2. Az Armellini-Tonelli-Sansone tétel kiterjesztése lépcsősfüggvény-együtthatós másodrendű félineáris differenciálegyenletekre

3.2.1. A másodrendű féllineáris differenciálegyenletekről általában

A fejezet hátralévő részébenben a Bihari Imre [8] és Elbert Árpád [20] által bevezetett

$$x''|x'|^{n-1}+q(t)|x|^{n-1}x=0, \qquad n\in\mathbb{R}^+, \tag{3.22}$$

ún. féllineáris differenciálegyenletet tekintjük, mely a lineáris oszcillátor mozgását leíró (1.1) egyenlet általánosítása, ahol $q : [0, \infty) \to \mathbb{R}$. Az egyenlet elnevezése arra utal, hogy megoldásainak tere homogén, de nem additív. Abban az esetben, amikor q folytonos függvény, Elbert [20] belátta, hogy adott kezdeti értékhez a (3.22) egyenletnek létezik egyértelmű megoldása, mely a $[0, \infty)$ intervallumra kiterjeszthető. A (3.22) egyenlet az együtthatók megfelelő megválasztásával és bizonyos transzformációk végrehajtásával a szintén jól ismert

$$(r(t)\Phi(x'))' + c(t)\Phi(x) = 0, \qquad \Phi(x) := |x|^{p-1}\operatorname{sgn} x, \qquad p > 1 \tag{3.23}$$

alakra hozható ($n = p - 1$), mely ebben a formában az

$$(r(t)x')' + c(t)x = 0 \tag{3.24}$$

Sturm-Liouville differenciálegyenlet általánosításának tekinthető. A féllineáris egyenletek kvalitatív vizsgálatának egyik motivációja az, hogy például több fizikai jelenség olyan parciális differenciálegyenlettel írható le, amelyben az ún. p-Laplace operátor szerepel. Ezen egyenletek az egydimenziós esetben bizonyos feltételek mellett a (3.22), vagy a vele ekvivalens (3.23) alakra hozhatóak. A p-Laplace operátor a következő:

$$\Delta_p u(\mathbf{x}) := \operatorname{div}(\|\nabla u(\mathbf{x})\|^{p-2}\nabla u(\mathbf{x})),$$

ahol $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, $p > 1$, ∇ a gradiens-, továbbá $\operatorname{div} := \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_k}$ a divergenciaoperátor. Az alkalmazásra példaként szolgál bizonyos nem-newtoni folyadékok, az ún. hatványközegek mechanikája. Egy folyadékot newtoninak nevezünk, ha a nyírófeszültség, vagyis a folyadék felszínével párhuzamos erő nagysága egyenesen arányos a hatására létrejövő sebességváltozással. Azokat a folyadékokat, amelyekre ez nem teljesül, nem-newtoniaknak nevezzük. Newtoni folyadék például a víz, nem-newtoniak például különféle sóoldatok, a vér, stb. Egy folyadékot hatványközegnek nevezünk, ha a nyírófeszültség és a hatására létrejövő sebességváltozás közötti kapcsolatot hatványfüggvény írja le. Ilyen közegekre példa a tej, a festékek, bizonyos polimerek olvadékai, vagy az ásványi anyagokat tartalmazó zagy (lásd pl. [39]).

Az alkalmazások fontossága miatt (pl. [13], [14]), de magában is érdekes kérdés, hogy a másodrendű lineáris egyenletekre kidolgozott elméletek menynyiben vihetőek át a féllineáris esetre. A téma széleskörű irodalommal rendelkezik, ehhez kapcsolódóan már több monográfia is született (lásd például [4], [17], [18] és a bennük szereplő hivatkozásokat).

3.2.2. Előzmények és eredmények

Hasonlóan az (1.1) egyenlethez, a (3.22) egyenlet esetében is egy nemtriviális x_0 megoldást *kis megoldás*nak nevezünk, ha arra $\lim_{t\to\infty} x_0(t) = 0$ teljesül. Milloux tételének (1.2. tétel) elegendőségét kis megoldás létezésére Atkinson és Elbert [6] terjesztette ki a féllineáris egyenletre. Az Armellini-Tonelli-Sansone tételt, mely azt garantálja, hogy minden megoldás kis megoldás lesz, Bihari [9] általánosította abban az esetben, amikor q folytonosan differenciálható és regulárisan növekedő módon tart végtelenbe, ha $t \to \infty$ (a pontos definícióért lásd a Bevezetést). Ahogy azt már korábban említettük, az irreguláris növekedésre a legegyszerűbb példa egy monoton növekedő lépcsősfüggvény. Tekintsük a (3.22) egyenletet abban az esetben, amikor a q együttható az utóbb említett tulajdonságú:

$$x''|x'|^{n-1} + q_k|x|^{n-1}x = 0 \qquad (t_k \le t < t_{k+1},\ k = 0, 1, \ldots), \tag{3.25}$$

ahol

$$\begin{aligned} &0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k < t_{k+1} < \ldots, \qquad \lim_{k\to\infty} t_k = \infty, \\ &0 < q_0 \le q_1 \le \ldots \le q_k \le q_{k+1} \le \ldots, \qquad \lim_{k\to\infty} q_k = \infty. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Egy $x : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ függvény megoldása a (3.25) egyenletnek, ha

a) x kétszer differenciálható és megoldása a (3.25) egyenletnek a $[t_{n-1}, t_n)$ intervallumokon ($n = 1, 2, \ldots$),

b) x folytonosan differenciálható a $[0, \infty)$ intervallumon.

Elbertnek [20] a folytonos együtthatós (3.22) egyenlet megoldásainak létezését és unicitását garantáló tételéből következik a (3.25) egyenlet megoldásainak egzisztenciája és unicitása is, mivel a (3.25) egyenlet adott $(x(0), x'(0))$ kezdeti értékekhez tartozó megoldása az egyes $[t_{n-1}, t_n)$ intervallumokhoz tartozó konstans együtthatós egyenletek megoldásával és az adott kezdeti értékből kiindulva azok összeillesztésével adhatóak meg.

Hatvani [28] bizonyította be, hogy a (3.26) feltételek mellett a (3.25) egyenletnek is létezik kis megoldása. Az $n = 1$ esetre, amikor a féllineáris egyenlet megegyezik az (1.1) lineáris egyenlettel, Elbert [21, 23] a 3.2. tétel felhasználásával általánosította az Armellini-Tonelli-Sansone tételt.

3.4. Tétel (Elbert, [21, 23]). *Legyen $n = 1$. Ha*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \min \left\{ 1 - \frac{q_k}{q_{k+1}}, 1 - \frac{q_{k+1}}{q_{k+2}} \right\} \sin^2(\sqrt{q_{k+1}}(t_{k+2} - t_{k+1})) = \infty, \tag{3.27}$$

akkor az

$$x'' + q_k x = 0 \qquad (t_k \le t < t_{k+1},\ k = 0, 1, \ldots) \tag{3.28}$$

lineáris egyenlet minden nemtriviális megoldása kis megoldás.

A fejezet célja, hogy kiterjesszük a 3.4. tételt a (3.25) egyenlet $n > 1$ esetére. Ehhez szükségünk lesz a Lundberg [41] és Elbert [20] által bevezetett ún. általánosított szinusz és koszinusz függvényekre. Legyen $S = S_n(\Phi)$ az

$$\begin{cases} S''|S'|^{n-1} + S|S|^{n-1} = 0, \\ S(0) = 0, \quad S'(0) = 1 \end{cases} \tag{3.29}$$

kezdetiérték-probléma megoldása. Az egyenletet S'-vel megszorozva, majd a $[0, \Phi]$ intervallumon kiintegrálva az

$$|S(\Phi)|^{n+1} + |S'(\Phi)|^{n+1} = 1 \qquad (-\infty < \Phi < \infty), \tag{3.30}$$

összefüggést kapjuk, mely az $n = 1$ esethez tartozó $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$ pitagoraszi azonosság általánosítása. Abban az esetben, amikor S és S' is nemnegatív, S inverze a következő formulával adható meg:

$$\Phi = \int_0^S \frac{dt}{(1 - t^{n+1})^{\frac{1}{n+1}}}, \qquad (0 \leq S \leq 1).$$

Legyen

$$\hat{\pi} := 2 \int_0^1 \frac{dt}{(1 - t^{n+1})^{\frac{1}{n+1}}},$$

melyből kapjuk (lásd [20]), hogy

$$\hat{\pi} = \frac{2\frac{\pi}{n+1}}{\sin \frac{\pi}{n+1}},$$

ami az $n = 1$ közönséges esetben megegyezik π-vel. Az előzőek alapján S egyértelműen definiált a $[0, \hat{\pi}/2]$ intervallumon. S a következő definíció szerint kiterjeszthető a teljes számegyenesre $2\hat{\pi}$ periodikus függvényként:

$$S(\Phi) = \begin{cases} S(\hat{\pi} - \Phi), & \text{ha}\, \frac{\hat{\pi}}{2} \leq \Phi \leq \hat{\pi}, \\ -S(\Phi - \hat{\pi}), & \text{ha}\, \hat{\pi} \leq \Phi \leq 2\hat{\pi}, \\ S(\Phi - 2k\hat{\pi}), & \text{ahol}\, k = \pm 1, \pm 2, \ldots \end{cases}$$

A definícióból következik, hogy S' is $2\hat{\pi}$ periodikus függvény, továbbá, hasonlóan a közönséges esethez, S páratlan, illetve S' páros. Szükségünk lesz az általánosított tangens függvényre is, mely a közönséges esethez hasonlóan definiálható:

$$T(\Phi) := \frac{S(\Phi)}{S'(\Phi)}.$$

Az általánosított trigonometrikus függvények vizsgálatának központi szerep jut a féllineáris egyenletek elméletében, a témának jelentős irodalma van (lásd pl. [11], [12], [15], [49], illetve pl. a [40] monográfiát és a benne szereplő hivatkozásokat).

Az előkészületek után most már kimondhatjuk a fejezet fő tételét.

3.5. Tétel. *Legyen $n > 1$. Ekkor, ha*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \min\left\{1 - \frac{q_k}{q_{k+1}}, 1 - \frac{q_{k+1}}{q_{k+2}}\right\} \left| S\left(q_{k+1}^{\frac{1}{n+1}}(t_{k+2} - t_{k+1})\right)\right|^{n+1} = \infty, \qquad (3.31)$$

a (3.25) egyenlet minden nemtriviális megoldása kis megoldás.

Bizonyítás. Először is, vezessünk be egy új τ időváltozót:

$$\tau = \varphi(t) = \int_0^t q(s)^{\frac{1}{n+1}}\,\mathrm{d}s, \qquad \tau_k := \varphi(t_k). \qquad (3.32)$$

Legyen $x(t) = x(\varphi^{-1}(\tau)) =: y(\tau)$, ahol φ^{-1} a φ inverz függvénye. Ekkor

$$x'(t) = \dot{y}(\tau) q^{\frac{1}{n+1}}(t), \qquad x''(t) = \ddot{y}(\tau) q^{\frac{2}{n+1}}(t) \qquad (t \neq t_k,\ k = 0, 1, 2, \ldots)$$

teljesül, ahol $()^{\cdot} = \mathrm{d}/\mathrm{d}\tau$. Ezt felhasználva a (3.25) egyenlet az alábbi alakot ölti:

$$\ddot{y}(\tau)|\dot{y}(\tau)|^{n-1} + |y(\tau)|^{n-1} y(\tau) = 0 \qquad (\tau_k \leq \tau < \tau_{k+1},\ k = 0, 1, \ldots). \quad (3.33)$$

Mivel a (3.25) egyenlet tetszőleges x megoldásának folytonosan differenciálhatónak kell lennie a $(0, \infty)$ intervallumon, ezért minden $k \in \mathbb{N}$ esetén a $x'(t_{k+1} - 0) = x'(t_{k+1} + 0)$ egyenlőségnek teljesülnie kell, vagyis

$$\dot{y}(\tau_{k+1}) = \dot{y}(\tau_{k+1} + 0) = \left(\frac{q_k}{q_{k+1}}\right)^{\frac{1}{n+1}} \dot{y}(\tau_{k+1} - 0),$$

ahol $f(t - 0)$ és $f(t + 0)$ az f függvény t pontbeli bal, illetve jobb oldali határértékét jelöli. Emiatt a (3.25) egyenlet ekvivalens a következő impulzív differenciálegyenlettel:

$$\begin{cases} \ddot{y}(\tau)|\dot{y}(\tau)|^{n-1} + |y(\tau)|^{n-1}y(\tau) = 0, & \tau \neq \tau_k \\ \dot{y}(\tau_{k+1}) = \left(\frac{q_k}{q_{k+1}}\right)^{\frac{1}{n+1}} \dot{y}(\tau_{k+1} - 0), & k = 0, 1, 2, \ldots. \end{cases} \tag{3.34}$$

Vezessük be az $\dot{y} = \rho\dot{S}(\Phi)$, $y = \rho S(\Phi)$ általánosított polárkoordinátákat, ahol

$$\rho = (|\dot{y}|^{n+1} + |y|^{n+1})^{\frac{1}{n+1}}, \qquad T(\Phi) = \frac{y}{\dot{y}}, \quad -\infty < \Phi < \infty.$$

Ez az ún. általánosított Prüfer-transzformáció. Ezen változók segítségével a (3.33) egyenletet a

$$\dot{\Phi} = 1, \qquad \dot{\rho} = 0 \qquad (\tau_k \leq \tau < \tau_{k+1},\ k = 0, 1, \ldots) \tag{3.35}$$

rendszerré alakíthatjuk. Ennek alapján a (3.34) egyenlet dinamikája az $(\dot{y}, y)$ Minkowski-síkon (lásd [47]) a következő. Tetszőleges $(\dot{y}_0, y_0)$ pont a $[\tau_0, \tau_1)$ időintervallumon az origó körüli $\rho_0 := (|\dot{y}_0|^{n+1} + |y_0|^{n+1})^{\frac{1}{n+1}}$ sugarú Minkowski-körön mozog egységnyi szögsebességgel, majd a τ_1 időpillanatban a $(\dot{y}(\tau_1 - 0), y(\tau_1 - 0))$ pont a

$$(\dot{y}(\tau_1), y(\tau_1)) := \left(\left(\frac{q_0}{q_1}\right)^{\frac{1}{n+1}} \dot{y}(\tau_1 - 0), y(\tau_1 - 0)\right)$$

pontba ugrik át, majd ez a folyamat ismétlődik az egymást követő $[\tau_1, \tau_2)$, $[\tau_2, \tau_3), \ldots$ időintervallumokon. Definiáljuk az alábbiakat:

$$\rho_k := \left(|\dot{y}(\tau_k)|^{n+1} + |y(\tau_k)|^{n+1}\right)^{\frac{1}{n+1}}, \quad \Phi_k := \Phi(\tau_k), \quad \Omega_k := \tau_{k+1} - \tau_k,$$
$$\Delta\rho_k := \rho_{k+1} - \rho_k, \qquad \kappa_k := \Phi_{k+1} - (\Phi_k + \Omega_k), \qquad k = 0, 1, \ldots$$

Az előzőek alapján nyilvánvaló, hogy

$$\Phi_{k+1} = \Phi_0 + \sum_{i=0}^{k} (\Omega_i + \kappa_i), \qquad \rho_{k+1} = \rho_0 + \sum_{i=0}^{k} \Delta\rho_i, \quad k = 0, 1 \ldots$$

Mivel $\Delta\rho_i \le 0$, a $\{\rho_k\}_{k=0}^{\infty}$ sorozat monoton csökkenő így létezik határértéke. Legyen $\bar{\rho} := \lim_{k\to\infty} \rho_k$. Tegyük fel, hogy nem igaz a tétel állítása, azaz létezik legalább egy (ρ, Φ) megoldás, amelyre $\bar{\rho} > 0$ teljesül. Tekintsünk egy ilyen megoldást. $-\Delta\rho_i$-re érvényes az alábbi becslés:

$$
\begin{aligned}
-\Delta\rho_i &= \rho_i - \rho_{i+1} \\
&= \left(|\dot{y}(\tau_i)|^{n+1} + |y(\tau_i)|^{n+1}\right)^{\frac{1}{n+1}} - \left(|\dot{y}(\tau_{i+1})|^{n+1} + |y(\tau_{i+1})|^{n+1}\right)^{\frac{1}{n+1}} \\
&= \left(|\dot{y}(\tau_{i+1}-0)|^{n+1} + |y(\tau_{i+1}-0)|^{n+1}\right)^{\frac{1}{n+1}} \\
&\quad - \left(|\dot{y}(\tau_{i+1})|^{n+1} + |y(\tau_{i+1})|^{n+1}\right)^{\frac{1}{n+1}} \\
&= \left(|\dot{y}(\tau_{i+1}-0)|^{n+1} + |y(\tau_{i+1}-0)|^{n+1}\right)^{\frac{1}{n+1}} \\
&\quad - \left(\frac{q_i}{q_{i+1}}|\dot{y}(\tau_{i+1}-0)|^{n+1} + |y(\tau_{i+1}-0)|^{n+1}\right)^{\frac{1}{n+1}} \\
&= \frac{1}{n+1}\left(\rho_{i+1}^{n+1} + \eta_i\left(\rho_i^{n+1} - \rho_{i+1}^{n+1}\right)\right)^{-\frac{n}{n+1}} \\
&\quad \times \left(1 - \frac{q_i}{q_{i+1}}\right)|\dot{y}(\tau_{i+1}-0)|^{n+1} \\
&\ge \frac{1}{n+1}\left((\bar{\rho})^{n+1}\right)^{-\frac{n}{n+1}}\left(1 - \frac{q_i}{q_{i+1}}\right)\rho_i^{n+1}|S'(\Phi_i + \Omega_i)|^{n+1} \\
&\ge \frac{\bar{\rho}}{n+1}\left(1 - \frac{q_i}{q_{i+1}}\right)|S'(\Phi_i + \Omega_i)|^{n+1},
\end{aligned}
\tag{3.36}
$$

ahol $\eta_i \in (0,1)$ minden $i \in \mathbb{N}_0$ esetén. Hasonlóan a 3.3. tétel bizonyításához, most is $|S'(\Phi_i + \Omega_i)|$-t kell alulról becsülnünk $|S(\Omega_i)|$ vagy $|S(\Omega_{i+1})|$ segítségével. Abban a bizonyításban a koszinusz függvény addíciós formuláját használtuk fel ehhez. Mivel tudomásunk szerint az általános esetben egzakt addíciós formulát S-re és S'-re még nem sikerült találni, így jelen esetben egy más módszert alkalmazunk. (Az addíciós formulákra vonatkozó részeredményeket lásd pl. az [1] és a [2] dolgozatokban.)

Az $|S'(\Phi+\Omega)|$ és $|S(\Omega)|$ függvények $\hat{\pi}$ periódusúak mind a Φ, mind pedig az Ω változóra nézve, így a (Φ,Ω) síkon történő vizsgálatukhoz elegendő a

$[-\hat{\pi}/2, \hat{\pi}/2] \times [-\hat{\pi}/2, \hat{\pi}/2]$ téglalapot tekintenünk. Sőt, köszönhetően S és S' szimmetria-tulajdonságainak $|S'(\Phi + \Omega)|$ alsó becslését elég a $Q := [0, \hat{\pi}/2] \times [0, \hat{\pi}/2]$ téglalapon megadnunk.

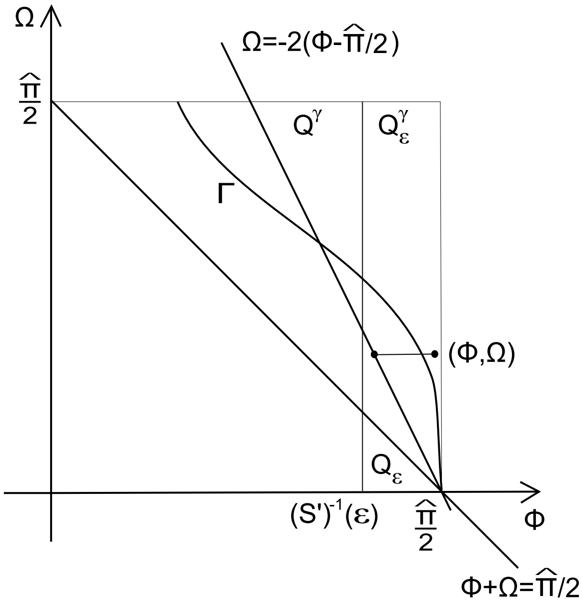
Definiáljuk a

$$Q_\varepsilon := \{(\Phi, \Omega) \in Q : |S'(\Phi)| < \varepsilon\}$$

halmazt, ahol $\varepsilon > 0$ elegendően kicsi. Legyen

$$Q^\gamma := \{(\Phi, \Omega) \in Q : |S'(\Phi)| \leq \gamma |S(\Omega)|\} \quad (0 < \gamma < 1),$$

és tekintsük először a $Q_\varepsilon^\gamma := Q_\varepsilon \cap Q^\gamma$ halmazt (lásd a 3.3. ábrát). A



3.3. ábra. A Q_ε, Q^γ és Q_ε^γ halmazok

$$\Gamma : |S'(\Phi)| = \gamma |S(\Omega)|$$

egyenlőség által definiált görbe egy darabja része az utóbbi halmaz határának. Megmutatjuk, hogy ha $n > 1$, akkor a Γ görbe érintője a $(\hat{\pi}/2, 0)$ pontban a $\Phi = \hat{\pi}/2$ egyenletű egyenes, azaz

$$\lim_{\Phi \to \frac{\pi}{2} - 0} f'(\Phi) = -\infty, \quad \text{ahol} \quad f(\Phi) := S^{-1}\left(\frac{1}{\gamma} S'(\Phi)\right). \tag{3.37}$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy

$$(S^{-1})'(W) = \frac{1}{(1 - W^{n+1})^{\frac{1}{n+1}}} \quad (0 \leq W \leq 1).$$

A (3.29) differenciálegyenlet alapján

$$S''(\Phi) = -|S'(\Phi)|^{-n+1} |S(\Phi)|^{n-1} S(\Phi), \tag{3.38}$$

melyet felhasználva kapjuk, hogy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\Phi} f(\Phi) = f'(\Phi) = \frac{-\frac{1}{\gamma}(S'(\Phi))^{-n+1} S^n(\Phi)}{\left(1 - \frac{1}{\gamma^{n+1}}(S'(\Phi))^{n+1}\right)^{\frac{1}{n+1}}},$$

tehát a (3.37) határérték γ értékétől függetlenül $-\infty$. Ebből következik, hogy található olyan $\delta > 0$, hogy

$$f'(\Phi) < -2 \quad \left((S')^{-1}(\varepsilon) < \frac{\hat{\pi}}{2} - \delta < \Phi < \frac{\hat{\pi}}{2}\right)$$

teljesüljön, így

$$f(\Phi) \geq -2\left(\Phi - \frac{\hat{\pi}}{2}\right),$$

amely azt jelenti, hogy a $(\hat{\pi}/2, 0)$ pont közelében a Γ görbe az $\Omega = -2(\Phi - \hat{\pi}/2)$ egyenestől jobbra helyezkedik el (lásd a 3.3. ábrát). $|S'(\Phi_i + \Omega_i)|$-nek $|S(\Omega_i)|$-vel történő alsó becsléséhez a $|S'(\Phi + \Omega)| / |S(\Omega)|$ hányadost fogjuk vizsgálni. A $(\Phi, \Omega) \in Q_\varepsilon^\gamma$ pont helyett a vele ugyanazon a vízszintes egyenesen lévő $(\hat{\pi}/2 - \Omega/2, \Omega)$ pontot véve, mely egyúttal a $\Phi = \hat{\pi}/2 - \Omega/2$ egyenesre is illeszkedik, a hányados értéke csökken (lásd ismét a 3.3. ábrát). Ennek alapján a L'Hospital szabály és a (3.38) összefüggés alkalmazásával a

$$\lim_{\Phi\to\frac{\hat{\pi}}{2}-0,\,\Omega\to 0+0,\,(\Phi,\Omega)\in Q_\varepsilon^\gamma}\frac{|S'(\Phi+\Omega)|}{|S(\Omega)|}\ge\lim_{\Omega\to 0+0}\frac{-S'\left(\left(\frac{\hat{\pi}}{2}-\frac{1}{2}\Omega\right)+\Omega\right)}{S(\Omega)}$$
$$=\lim_{\Omega\to 0+0}\frac{-S'\left(\frac{\hat{\pi}}{2}+\frac{1}{2}\Omega\right)}{S(\Omega)}=\lim_{\Omega\to 0+0}\frac{-S''\left(\frac{\hat{\pi}}{2}+\frac{1}{2}\Omega\right)\frac{1}{2}}{S'(\Omega)}$$
$$=\lim_{\Omega\to 0+0}\frac{\left|S'\left(\frac{\hat{\pi}}{2}+\frac{\Omega}{2}\right)\right|^{-n+1}\left|S\left(\frac{\hat{\pi}}{2}+\frac{\Omega}{2}\right)\right|^{n-1}S\left(\frac{\hat{\pi}}{2}+\frac{\Omega}{2}\right)}{2S'(\Omega)}=\infty$$

becsléshez jutunk. Ebből következik, hogy található olyan $\kappa>0$, hogy

$$|S'(\Phi+\Omega)|\ge\kappa|S(\Omega)|\qquad((\Phi,\Omega)\in Q_\varepsilon^\gamma)\tag{3.39}$$

teljesüljön.

Most már minden eszköz a rendelkezésünkre áll, hogy a (3.36) becslést folytatni tudjuk. Három alesetet fogunk megkülönböztetni.

A) $(\Phi_i,\Omega_i)\in Q_\varepsilon^\gamma$. Ekkor (3.36) és (3.39) alapján kapjuk, hogy

$$-\Delta\rho_i\ge\frac{\overline{\rho}}{n+1}\left(1-\frac{q_i}{q_{i+1}}\right)\kappa^{n+1}|S(\Omega_i)|^{n+1}.\tag{3.40}$$

A másik két esetben $-\Delta\rho_{i-1}$-t fogjuk becsülni. A (3.20) egyenlőtlenséghez hasonlóan megmutatható, hogy

$$|S'(\Phi_{i-1}+\Omega_{i-1})|\ge|S'(\Phi_i)|$$

is mindig teljesül, így

$$-\Delta\rho_{i-1}\ge\frac{\overline{\rho}}{n+1}\left(1-\frac{q_{i-1}}{q_i}\right)|S'(\Phi_{i-1}+\Omega_{i-1})|^{n+1}$$
$$\ge\frac{\overline{\rho}}{n+1}\left(1-\frac{q_{i-1}}{q_i}\right)|S'(\Phi_i)|^{n+1}.$$

B) $(\Phi_i,\Omega_i)\in Q_\varepsilon\setminus Q_\varepsilon^\gamma$. Ekkor $|S'(\Phi_i)|\ge\gamma|S(\Omega_i)|$, ezért

$$-\Delta\rho_{i-1}\ge\gamma^{n+1}\frac{\overline{\rho}}{n+1}\left(1-\frac{q_{i-1}}{q_i}\right)|S(\Omega_i)|^{n+1}.\tag{3.41}$$

C) $(\boldsymbol{\Phi_i}, \boldsymbol{\Omega_i}) \in \boldsymbol{Q} \backslash \boldsymbol{Q_\varepsilon}$. Ebben az esetben $|S'(\Phi_i)| \geq \varepsilon |S(\Omega_i)|$, így

$$-\Delta\rho_{i-1} \geq \varepsilon^{n+1} \frac{\overline{\rho}}{n+1} \left(1 - \frac{q_{i-1}}{q_i}\right) |S(\Omega_i)|^{n+1}. \tag{3.42}$$

Definiáljuk a C számot a következőképp:

$$C := \frac{\overline{\rho}}{n+1} \min\{\kappa^{n+1}; \gamma^{n+1}; \varepsilon^{n+1}\} > 0.$$

A (3.40), (3.41) és (3.42) becslések alapján tetszőleges i index esetén

$$C \min\left\{1 - \frac{q_{i-1}}{q_i}; 1 - \frac{q_i}{q_{i+1}}\right\} |S(\Omega_i)|^{n+1} \leq \Delta\rho_{i-1} - \Delta\rho_i = \rho_{i-1} - \rho_{i+1}$$

teljesül. Ezen egyenlőtlenségeket összegezve kapjuk, hogy

$$C \sum_{i=1}^{\infty} \min\left\{1 - \frac{q_{i-1}}{q_i}; 1 - \frac{q_i}{q_{i+1}}\right\} |S(\Omega_i)|^{n+1} \leq \rho_0 - \overline{\rho} < \infty,$$

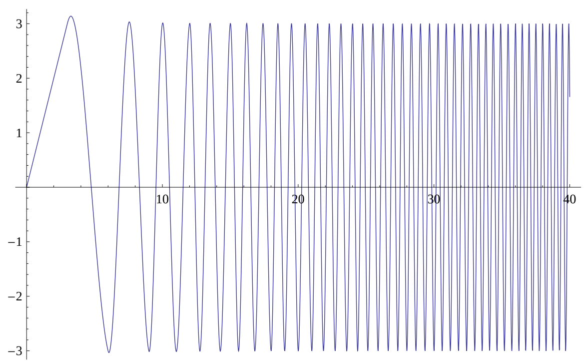
ami ellentmondás. ■

A 3.5. tétel szerint az $n > 1$ esetben a (3.31) feltétel elegendő a (3.25) egyenlet triviális megoldásának x-re vonatkozó aszimptotikus stabilitásához. A következő példa mutatja, hogy ennek nem teljesülése esetén található olyan megoldás, amely nem kis megoldás. Legyen

$$n =: 1{,}1, \qquad t_k := k\hat{\pi}, \qquad q_k := k^{n+1}, \qquad (k = 1, 2, \ldots), \tag{3.43}$$

ekkor a (3.31) feltételben szereplő sor összege 0, az $(x'(0), x(0)) = (1, 0)$ kezdeti értékből indított megoldás viszont nem kis megoldás (lásd a 3.4. ábrát is).

Érdekes lenne kiterjeszteni a 3.5. tételt a $0 < n < 1$ esetre is. Numerikus szimulációk alapján úgy gondoljuk, hogy a tétel ebben az esetben is igaz. Emellett a (3.43) feltételekben n megfelelő választásával a példa változatlanul működik.



3.4. ábra. A (3.25) egyenlet $(x'(0), x(0)) = (1, 0)$ kezdeti értékből indított megoldása a (3.43) feltételek mellett

Szintén érdekes probléma a kis megoldásokhoz tartozó kezdeti értékek eloszlása. Jelölje $\mathcal{C}$ a Minkowski-egységkört, $\mathcal{Y}$ pedig $\mathcal{C}$ azon pontjait, ahonnan indított megoldások kis megoldások lesznek, $\mathcal{X}$ pedig legyen $\mathcal{Y}$-nak $\mathcal{C}$-re vonatkoztatott komplementere. Az $n = 1$, vagyis a lineáris esetben *vagy minden* megoldás kis megoldás, *vagy csak egy* lineárisan független megoldás lesz kis megoldás. Ez topológiai szempontból azt jelenti, hogy ha létezik legalább egy olyan megoldás, amelyik nem kis megoldás, akkor $\mathcal{Y}$ két összefüggő halmazból áll. Atkinson és Elbert [6] ezt az állítást terjesztette ki a (3.22) féllineáris egyenletre abban az esetben, amikor q folytonosan differenciálható.

3.6. Tétel (Atkinson-Elbert [6]). *Tegyük fel, hogy $\mathcal{X} \neq \emptyset$. Ekkor léteznek olyan α és β valós számok úgy, hogy $\alpha \leq \beta \leq \alpha + \hat{\pi}$, továbbá*

$$\mathcal{Y} = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} [\alpha + k\hat{\pi}, \beta + k\hat{\pi}], \tag{3.44}$$

$$\mathcal{X} = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} (\beta + k\hat{\pi}, \alpha + (k+1)\hat{\pi}), \tag{3.45}$$

ahol k befutja az egész számok halmazát.

A tétel kiterjesztése a lépcsősfüggvény-együtthatós esetre még megoldatlan probléma.

Összefoglalás

A disszertációban lépcsősfüggvény-együtthatós differenciálegyenletekhez kapcsolódó két stabilitási problémát vizsgálunk. Elsőként elegendő feltételt adunk meg kis megoldás, azaz nemtriviális, x-re vonatkozóan 0-hoz tartó megoldás létezésére olyan másodrendű lineáris differenciálegyenletek esetében, amelyekben a rugalmassági és a súrlódási együttható is lépcsősfüggvény. A tétel bizonyításához szükségünk van kétdimenziós differenciaegyenlet-rendszerek kis megoldásainak létezését garantáló feltételekre. Ezt a feladatot vizsgálva többet is bizonyítunk: szükséges és elegendő feltételeket adunk meg tetszőleges véges dimenziós differenciaegyenlet-rendszerek kis megoldásának létezésére.

A második részben az Armellini-Tonelli-Sansone tételt, mely azt garantálja, hogy a változó rugalmassági együtthatós másodrendű lineáris differenciálegyenlet minden megoldása kis megoldás legyen, terjesztjük ki az alkalmazásokban is fontos szerephez jutó ún. féllineáris differenciálegyenletekre a lépcsősfüggvény-együtthatós esetben. A féllineáris egyenletre vonatkozó tétel bizonyításának eszközeként kétdimenziós differenciaegyenlet-rendszerek triviális megoldásának aszimptotikus stabilitására vonatkozóan bizonyítunk egy új tételt, majd az ott alkalmazott geometriai módszert általánosítjuk a nemlineáris esetre.

Az értekezés a szerző következő publikációin alapul:

- L. Hatvani, L. Székely, On the existence of small solutions of linear difference equations with varying coefficients, *J. Difference Equ. Appl.*, **12** (2006), No. 8, 837–845.

- L. Hatvani, L. Székely, Asymptotic stability of two dimensional systems of linear difference equations and of second order half-linear differential equations with step function coefficients, *E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ.*, **38** (2011), 1–17.

Tekintsük az

$$x'' + a(t)x = 0 \tag{LO}$$

másodrendű lineáris differenciálegyenletet, mely egy változó rugalmassági együtthatójú lineáris oszcillátor mozgását írja le. Ha $a : [0, \infty) \to [0, \infty)$ monoton nemcsökkenő függvény, akkor az (LO) egyenlet minden nemtriviális megoldása oszcillál, $|x|$ maximuma, azaz az amplitúdók nagysága nem nő, $|x|$ szomszédos maximumhelyei, azaz az x szomszédos szélsőértékhelyei közötti távolság nem csökken. Az (LO) egyenlet egy x_0 nemtriviális megoldását *kis megoldás*nak nevezzük, ha arra $\lim_{t\to\infty} x_0(t) = 0$ teljesül. Milloux [43], Prodi [45] és Trevisan [51] bizonyította be, hogy ha $a : [0, \infty) \to [0, \infty)$ differenciálható és nemcsökkenő, akkor az (LO) egyenletnek akkor és csakis akkor létezik legalább egy kis megoldása, ha $\lim_{t\to\infty} a(t) = \infty$. Milloux egy olyan példán keresztül, amelyben az együtthatófüggvény lépcsősfüggvény volt, azt is megmutatta, hogy az (LO) egyenletnek nem feltétlenül minden megoldása kis megoldás. Hartman [25] az

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} \tag{LR}$$

lineáris differenciálegyenlet-rendszert vizsgálva, ahol $\mathbf{x}$ m-dimenziós vektor, $\mathbf{A}$ pedig a $[0, \infty)$ intervallumon értelmezett folytonos valós-valós függvények

$m \times m$-es mátrixa, az alábbi eredményre jutott:

1.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy az (LR) egyenlet minden* $\mathbf{x}$ *megoldása esetén* $\lim_{t\to\infty} \|\mathbf{x}(t)\| < \infty$ *teljesül. Ekkor az (LR) egyenletnek akkor és csakis akkor létezik kis megoldása, ha*

$$\int^t \operatorname{tr} \mathbf{A}(s) \mathrm{d}s \to -\infty \qquad (t \to \infty).$$

Ennek felhasználásával Hartman [25] Milloux, Prodi és Trevisan tételét rendszerekre is kiterjesztette, emellett belátta, hogy az a együtthatófüggvény differenciálhatósága helyett elegendő feltenni annak folytonosságát.

Arra a kérdésre, milyen feltétel garantálja azt, hogy az (LO) egyenlet minden megoldása kis megoldás legyen, elsőként az Armellini-Tonelli-Sansone [42] tétel adta meg a választ: elegendő, ha a folytonosan differenciálható és „reguláris" módon tart végtelenbe. Ez leegyszerűsítve azt jelenti, hogy a növekedése nem koncentrálódhat egy kis mértékű halmazra. Fontos megjegyezni, hogy ez a stabilitási tulajdonság gyengébb a triviális megoldás aszimptotikus stabilitásánál. Az irreguláris növekedésre a legegyszerűbb példa egy monoton növekvő lépcsősfüggvény. Az alkalmazások terén az ilyen együtthatós egyenleteknek az ún. bang-bang elv alapján fontos szerep jut például az irányításelmélet egyes területein belül. A lépcsősfüggvény-együtthatós differenciálegyenletek átírhatóak differenciaegyenlet-rendszerré, emiatt az ilyen típusú egyenletekre vonatkozó tételek bizonyításai visszavezethetőek differenciaegyenletekre vonatkozó állítások bizonyítására.

A második fejezetben az

$$x'' + c(t)x' + a^2(t)x = 0 \tag{LOS}$$

változó rugalmassági együtthatós oszcillátor mozgását leíró egyenletet tekintjük abban az esetben, amikor a rugalmassági erőn kívül $-c(t)x'$ ($c(t) \geq 0$)

súrlódási erő is hat a rendszerre, ahol a és c lépcsősfüggvény, azaz adottak a $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ és $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ valós sorozatok az alábbi tulajdonságokkal:

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n < \ldots; \qquad \lim_{n\to\infty} t_n = \infty,$$

$$a_n > 0, \quad c_n \geq 0 \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

továbbá $a(t) = a_n$ és $c(t) = c_n$ a $[t_{n-1}, t_n)$ intervallumon. Abban az esetben, amikor $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ és $c_n = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, azaz nincs súrlódás, Hatvani [27] belátta, hogy az

$$x'' + a_n^2 x = 0 \qquad (t_{n-1} \leq t < t_n,\ n = 1, 2, \ldots)$$

egyenletnek létezik kis megoldása, ha $\sum_{n=1}^{\infty} \max\{a_n/a_{n+1} - 1; 0\} < \infty$. Természetes gondolat, hogy a súrlódás figyelembe vételével ez a feltétel, sőt, a $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ feltétel is tovább gyengíthető. Ezt mutatja fejezetünk fő tétele.

2.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy teljesülnek az* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ *és* $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ *sorozatokra a fenti feltételek, és vezessük be a*

$$\gamma_n := \frac{c_n}{2a_n + c_n}[(2a_n - c_n)(t_n - t_{n-1}) - 2]$$

jelölést. Továbbá, tegyük fel, hogy

(i) $a_n > c_n/2$ $(n = 1, 2, \ldots)$,

(ii)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\gamma_k + \ln \frac{a_k}{a_{k+1}} \right) = -\infty,$$

(iii) *létezik K szám úgy, hogy tetszőleges n $(n = 1, 2, \ldots)$ esetén*

$$\sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{\gamma_k}{2} + \ln \max\left\{ \frac{a_k}{a_{k+1}}; 1 \right\} \right) < K.$$

Ekkor az (LOS) egyenletnek létezik legalább egy kis megoldása.

Az (LOS) egyenlet átírható egy vele ekvivalens kétdimenziós differenciaegyenlet-rendszerré, ezért tételünk bizonyításához szükségünk van olyan elegendő feltételre, amely ezen rendszerek kis megoldásainak létezését biztosítja.

A következő szakaszban a kétdimenziós rendszerekre vonatkozó elegendő feltétel problémáját egy még általánosabb kontextusban tárgyaljuk, mégpedig szükséges és elegendő feltételeket adunk meg tetszőleges véges dimenziós differenciaegyenlet-rendszerek kis megoldásának létezésére. Az alábbi nem-autonóm rendszert tekintjük:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{M}_n \mathbf{x}_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{DE}$$

ahol $\mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^m$ oszlopvektor, $m \in \mathbb{N}$ és $\mathbf{M}_n \in \mathbb{R}^{m \times m}$ $m \times m$-es valós mátrix. Ennek az egyenletnek egy nemtriviális $\{\mathbf{x}_n\}_{n=0}^{\infty}$ megoldását *kis megoldás*nak nevezzük, ha arra $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{0}$ teljesül. Célunk Hartman lineáris differenciálegyenlet-rendszerre vonatkozó tételének a fenti differenciaegyenlet-rendszerre való kiterjesztése. A szakasz első tételében (2.8. tétel) beláttuk, hogy ha $\prod_{n=0}^{\infty} \|\mathbf{M}_n\| < \infty$, akkor a differenciaegyenlet minden megoldására $\lim_{n\to\infty} \|\mathbf{x}_n\| < \infty$ teljesül, továbbá az egyenletnek akkor és csakis akkor létezik legalább egy kis megoldása, ha $\prod_{n=0}^{\infty} |\det \mathbf{M}_n| = 0$. Ezzel Peilnek és Pattersonnak [44], illetve Elbertnek [22] a megoldások normabeli határértékének létezésére vonatkozó elegendő feltételeit tovább gyengítettük, továbbá az Elberttől származó, a kétdimenziós esetre vonatkozó bizonyítási technika tetszőleges véges dimenziós esetre történő kiterjesztésével Peil és Petterson tételére egy új bizonyítást adunk.

Könnyen konstruálható példa arra, hogy a $\prod_{n=0}^{\infty} \|\mathbf{M}_n\| < \infty$ feltétel nem szükséges a megoldások normabeli határértékének létezéséhez. Szintén egyszerű példával kimutatható az is, hogy a megoldások normabeli határértékének létezése nem szükséges kis megoldás létezéséhez. A szakasz fő tételében egy geometriai módszer segítségével megmutatjuk, hogy kis megoldások létezésére a $\prod_{n=0}^{\infty} |\det \mathbf{M}_n| = 0$ feltétel szükséges és elegendő abban az esetben is, ha mindössze a $\| \prod_{n=p}^{q} \mathbf{M}_n \|$ $(0 \leq p \leq q)$ sorozat korlátosságát követeljük meg.

2.9. Tétel. *Tegyük fel, hogy található olyan $K \in \mathbb{R}$, hogy tetszőleges $p, q \in \mathbb{N}$, $(0 \leq p \leq q)$ esetén*

$$\left\| \prod_{n=p}^{q} \mathbf{M}_n \right\| \leq K$$

teljesül. Ekkor a (DE) egyenletnek akkor és csakis akkor létezik kis megoldása, ha

$$\prod_{n=0}^{\infty} |\det \mathbf{M}_n| = 0.$$

Egy példán keresztül megmutatjuk, hogy a tételben szereplő $\left\| \prod_{n=p}^{q} \mathbf{M}_n \right\| \leq K$ feltétel nem helyettesíthető a $\left\| \prod_{n=0}^{k} \mathbf{M}_n \right\| \leq K$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ feltétellel. Hogy helyettesíthető-e a $\prod_{n=0}^{k} \|\mathbf{M}_n\| \leq K$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ feltétellel, tudomásunk szerint jelenleg még megoldatlan probléma.

A második fejezet utolsó szakaszában a 2.9. tétel nemlineáris differenciálegyenlet-rendszerekre történő kiterjesztésének lehetőségeit vizsgáljuk. Ilyen egyenletek esetén kis megoldások létezésére vonatkozóan Karsai, Graef és Li [37] Ljapunov-függvények segítségével már adott elegendő feltételt. Ennek a feltételnek az alkalmazhatóság szempontjából kritikus része egy, a Ljapunov-függvényre vonatkozó folytonossági feltétel. A lineáris esetre alkalmazott topológiai módszert használva a legáltalánosabb esetben eddig csak olyan részeredményt sikerült elérni, amely Karsaiék módszerével is megkapható, ezt a szakasz keretein belül bemutatjuk.

A harmadik fejezetben a lineáris oszcillátor mozgását leíró (LO) egyenlet egy fontos általánosítását, a Bihari Imre [8] és Elbert Árpád [20] által bevezetett

$$x''|x'|^{n-1} + q(t)|x|^{n-1}x = 0, \qquad n \in \mathbb{R}^+, \tag{FD}$$

ún. féllineáris differenciálegyenletet tekintjük. Az egyenlet elnevezése arra utal, hogy a megoldások tere homogén de nem additív. Erre az egyenletre Bihari [9] bizonyított egy Armellini-Tonelli-Sansone típusú tételt, vagyis bebizonyította, hogy a triviális megoldás x-re vonatkozóan aszimptotikusan stabilis, ha a q együttható-függvény sima és „regulárisan" tart végtelenbe, ha $t \to \infty$. Ilyen típusú eredmény [33] dolgozatunkig nem volt ismert nem-regulárisan növekedő együttható-függvényre. A 3. fejezetben ennek a dolgozatnak az eredményeit ismertetve elegendő feltételt adunk a féllineáris (FD) egyenlet triviális megoldásának x-re vonatkozó aszimptotikus stabilitására abban a legtipikusabban nem-reguláris esetben, amikor q lépcsősfüggvény. Az eredmény annak köszönhető, hogy a lépcsősfüggvényt tartalmazó lineáris egyenletekre ($n = 1$ (FD)-ben) ismert lineáris technikákat sikerült helyettesíteni egy geometriai módszerrel, amely nem igényli a linearitást, sőt, még a lineáris esetre vonatkozó eredmények javítását is lehetővé teszi. Ennek köszönhetően eredményünk tartalmazza, sőt, élesíti Elbert [21, 23] lineáris lépcsősfüggvény-együtthatós egyenletre vonatkozó Armellini-Tonelli-Sansone tételeit, ezért ezt a módszert a fejezet elején először lineáris differenciaegyenlet-rendszerekre mutatjuk be.

A fejezet első szakaszában a (DE) lineáris differenciaegyenlet-rendszer triviális megoldásának aszimptotikus stabilitását vizsgáljuk a kétváltozós esetben. Jól ismert, hogy a $\prod_{n=0}^{\infty} \|\mathbf{M}_n\| = 0$ feltétel teljesülése esetén (DE) minden megoldása az origóhoz tart, ha $n \to \infty$. Elbert [22] dolgozatában ezen feltétel nem teljesülése esetén adott elegendő feltételt a triviális megoldás aszimptotikus stabilitására. Bizonyítása az $\mathbf{M}_n$ mátrixok egy „trükkös" dekompozícióján és az ebből származtatott speciális mátrixok normáinak a becslésén alapul.

A (DE) egyenlet vizsgálatához egy stabilitási szempontból vele ekvivalens (DE') rendszert definiálunk, melynek megkonstruálása a polár faktorizáció tételén (lásd például [34, p. 188]) alapul:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \|\mathbf{M}_n\| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\omega_n & -\sin\omega_n \\ \sin\omega_n & \cos\omega_n \end{pmatrix} \mathbf{x}_n, \qquad 0 \le d_n \le 1, \qquad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{DE'}$$

ahol d_n és ω_n $(n = 0, 1, 2, \dots)$ az $\mathbf{M}_0, \dots, \mathbf{M}_n$ mátrixegyütthatókból meghatározhatóak. A szakasz fő tétele a következő:

3.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy* $\limsup_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n} \|\mathbf{M}_k\| < \infty$. *Ha*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \min\{1 - d_n, 1 - d_{n+1}\} \sin^2 \omega_{n+1} = \infty$$

teljesül, akkor a (DE') differenciaegyenlet triviális megoldása aszimptotikusan stabil.

A fejezet második szakaszában az (FD) féllineáris differenciálegyenletet tekintjük.

3.5. Tétel. *Legyen* $n > 1$ *és*

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} < \dots, \qquad \lim_{k\to\infty} t_k = \infty,$$
$$0 < q_0 \le q_1 \le \dots \le q_k \le q_{k+1} \le \dots, \qquad \lim_{k\to\infty} q_k = \infty.$$

Ekkor az

$$x''|x'|^{n-1} + q_k|x|^{n-1}x = 0 \qquad (t_k \le t < t_{k+1},\ k = 0, 1, \dots)$$

egyenlet minden nemtriviális megoldása kis megoldás, ha

$$\sum_{k=0}^{\infty} \min\left\{1 - \frac{q_k}{q_{k+1}}, 1 - \frac{q_{k+1}}{q_{k+2}}\right\} \left| S\left(q_{k+1}^{\frac{1}{n+1}} (t_{k+2} - t_{k+1})\right)\right|^{n+1} = \infty.$$

A tételben szereplő S függvény az ún. általánosított szinusz függvény, azaz az

$$\begin{cases} S''|S'|^{n-1} + S|S|^{n-1} = 0, \\ S(0) = 0, \quad S'(0) = 1 \end{cases}$$

kezdetiérték-problémának a megoldása, amely mellékesen eleget tesz az $|S(\Phi)|^{n+1} + |S'(\Phi)|^{n+1} \equiv 1$ azonosságnak. A bizonyítás menete hasonló a 3.3. tételéhez, azonban becsléseink módszerét az általánosított trigonometrikus függvények miatt módosítanunk kell. A nehézséget az okozza, hogy ezekre a függvényekre egzakt addíciós formulák nem ismeretesek.

Summary

In the dissertation we examine two stability problems related to differential equations with step function coefficients. First, we consider second order linear differential equations, where both elasticity coefficient and damping coefficient are step functions. For such equations, we give sufficient condition on the existence of a small solution, i.e. the existence of such a solution which tends to 0 with respect to x. For the proof of the theorem, as a tool, we need conditions guaranteeing the existence of a small solution of two dimensional systems of linear difference equations. Although, we prove more: we give necessary and sufficient conditions on the existence of a small solution of difference equations of arbitrarily finite dimension.

In the second part of the thesis, we consider the Armellini-Tonelli-Sansone theorem for second order linear differential equations with varying elasticity coefficient. This theorem gives a sufficient condition on that all solutions of such equations are small. We extend this theorem to the so-called half-linear differential equations in the case when the coefficient is a step function. Half-linear differential equations have many important applications. For the extension of the Armellini-Tonelli-Sansone theorem to the half-linear case, we need to prove a new theorem on the asymptotic stability of two dimensional systems of linear difference equations. The proof is based on a geometric method which applies also for the nonlinear case.

The dissertation is based on the following papers of the author:

- L. Hatvani, L. Székely, On the existence of small solutions of linear difference equations with varying coefficients, *J. Difference Equ. Appl.*, **12** (2006), No. 8, 837–845.

- L. Hatvani, L. Székely, Asymptotic stability of two dimensional systems of linear difference equations and of second order half-linear differential equations with step function coefficients, *E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ.*, **38** (2011), 1–17.

Consider the second order differential equation

$$x'' + a(t)x = 0 \tag{LO}$$

describing the motion of a linear oscillator with varying elasticity coefficient. If $a : [0, \infty) \to [0, \infty)$ is a monotone non-decreasing function, then all nontrivial solutions of equation (LO) are oscillatory, the maxima of $|x|$, i.e. the size of the amplitudes is non-increasing, and the neighboring maxima of $|x|$, that is the distances between neighboring extrema of x are non-decreasing. A nontrivial solution x_0 of equation (LO) is called *small* if $\lim_{t\to\infty} x_0(t) = 0$. Milloux [43], Prodi [45] and Trevisan [51] proved that if $a : [0, \infty) \to [0, \infty)$ is differentiable and non-decreasing then equation (LO) has at least one small solution if and only if $\lim_{t\to\infty} a(t) = \infty$ holds. Milloux also constructed an example with a step function coefficient a, where not all solutions of equation (LO) were small. Hartman [25] investigated the linear system of differential equations

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}, \tag{LR}$$

where $\mathbf{x}$ is an m dimensional vector and $\mathbf{A}$ is an $m \times m$ matrix having real continuous entries with domain $[0, \infty)$. He proved the following:

Theorem 1.3 *Suppose that for all solutions* $\mathbf{x}$ *of equation (LR)* $\lim_{t\to\infty} \|\mathbf{x}(t)\| < \infty$ *holds. Then equation (LR) has at least one small solution if and only if*

$$\int^t \operatorname{tr} \mathbf{A}(s)\mathrm{d}s \to -\infty \qquad (t \to \infty).$$

Based on this result, Hartman [25] extended the theorem of Milloux, Prodi and Trevisan to systems of equations, furthermore, he proved that instead of differentiability, it is sufficient to assume the continuity of a.

The Armellini-Tonelli-Sansone [42] theorem was the first to give a sufficient condition on that *all* solutions of equation (LO) are small. The theorem says that if a is continuously differentiable and tends "regularly" to infinity as $t \to \infty$ then $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ holds for all solutions x of equation (LO). Roughly speaking, this condition means that the growth of a cannot be located to a set with small measure. It is important to note that this stability property is weaker than the asymptotic stability of the trivial solution of equation (LO). The simplest case of intermittent growth is when q is a monotonously increasing step function. Such equations have an important role for example in the field of control theory thanks to the so-called Bang-Bang principle. Differential equations with step function coefficients can be rewritten as systems of difference equations, thus the proof of theorems on such equations can be deduced to the proof of statements on difference equations.

In Chapter 2 we consider the equation

$$x'' + c(t)x' + a^2(t)x = 0 \qquad \text{(LOS)}$$

describing the motion of an oscillator where both elasticity coefficient a and damping coefficient c are step functions. Namely, $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ and

$\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ are real sequences with the following properties:

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n < \ldots; \qquad \lim_{n\to\infty} t_n = \infty,$$

$$a_n > 0, \quad c_n \geq 0 \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

furthermore, $a(t) = a_n$ and $c(t) = c_n$ on the interval $[t_n, t_{n-1})$. In the case when $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ and damping doesn't act, i.e. $c_n = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, Hatvani [27] proved that there exists at least one small solution of equation (LOS) if $\sum_{n=1}^{\infty} \max\{a_n/a_{n+1} - 1; 0\} < \infty$ holds. It is natural to guess that damping helps weaken this condition and even the condition $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. In fact, in the main theorem of this chapter we could prove the following.

Theorem 2.2 *Assume that the above conditions on sequences $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ and $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ are satisfied, and let us introduce the notation*

$$\gamma_n := \frac{c_n}{2a_n + c_n}[(2a_n - c_n)(t_n - t_{n-1}) - 2].$$

Suppose, in addition, that

(i) $a_n > c_n/2$ $(n = 1, 2, \ldots)$,

(ii)
$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\gamma_k + \ln \frac{a_k}{a_{k+1}} \right) = -\infty,$$

(iii) *there is a number K such that for arbitrary n $(n = 1, 2, \ldots)$*
$$\sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{\gamma_k}{2} + \ln \max\left\{ \frac{a_k}{a_{k+1}}; 1 \right\} \right) < K$$
holds.

Then equation (LOS) has at least one small solution.

Equation (LOS) is equivalent with a two dimensional system of difference equations, therefore for the proof of our theorem we need a sufficient condition guaranteeing the existence of a small solution of such system.

In the next section we discuss the problem of finding a sufficient condition guaranteeing the existence of a small solution of two dimensional system of difference equations in a more general manner, namely, we give necessary and sufficient conditions for the existence of such solutions of arbitrarily finite dimensional systems. We consider the following nonautonomous system of difference equations

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{M}_n \mathbf{x}_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{DE}$$

where $\mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^m$ is a column vector, $m \in \mathbb{N}$ and $\mathbf{M}_n \in \mathbb{R}^{m \times m}$ is an $m \times m$ matrix having real entries. A nontrivial $\{\mathbf{x}_n\}_{n=0}^{\infty}$ solution of this equation is called *small* if $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{0}$. The aim of this section is to extend Hartman's theorem on linear system of differential equations to linear systems of difference equations. In Theorem 2.8 we prove that if $\prod_{n=0}^{\infty} \|\mathbf{M}_n\| < \infty$ holds, then $\lim_{n\to\infty} \|\mathbf{x}_n\| < \infty$ is satisfied for all solutions of equation (DE), furthermore, the equation has at least one small solution if and only if $\prod_{n=0}^{\infty} |\det \mathbf{M}_n| = 0$. With this result we weaken the sufficient conditions on the existence of the limit of the solutions' norm given by Peil and Patterson [44] and Elbert [22]. In addition, we extend Elbert's method of proof from two dimension to arbitrary dimension m and we give a new proof to the theorem of Peil and Patterson.

One can easily see, that $\prod_{n=0}^{\infty} \|\mathbf{M}_n\| < \infty$ is not necessary for the existence of the limit of the norm of all solutions of (DE). A simple example can be constructed to show that this property is not essential from the point of view of the existence of a small solutions. Using a geometric method of proof we show that $\prod_{n=0}^{\infty} |\det \mathbf{M}_n| = 0$ is necessary and sufficient to have at least one small solution if we require only the boundedness of the sequence $\|\prod_{n=p}^{q} \mathbf{M}_n\|$ $(0 \le p \le q)$.

Theorem 2.9 *Suppose that there is a $K \in \mathbb{R}$ such that for every $p, q \in \mathbb{N}$,*

$(0 \le p \le q)$ *we have*

$$\left\| \prod_{n=p}^{q} \mathbf{M}_n \right\| \le K.$$

Then there exists at least one small solution of (DE) if and only if

$$\prod_{n=0}^{\infty} |\det \mathbf{M}_n| = 0.$$

With an example we show that condition $\left\| \prod_{n=p}^{q} \mathbf{M}_n \right\| \le K$ in Theorem 2.9 cannot be replaced by $\left\| \prod_{n=0}^{k} \mathbf{M}_n \right\| \le K$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$. The question that this can condition be replaced by $\prod_{n=0}^{k} \|\mathbf{M}_n\| \le K$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$ has remained open here.

In the final section of this chapter we examine the possible extensions of Theorem 2.9 to nonlinear systems of difference equations. With the aid of a Lyapunov function, Karsai, Graef and Li [37] gave a sufficient condition for such equations to have at least one small solution. Currently, with the application of our topological method of proof, we could only conclude such result which is a consequence of their theorem. In this section we discuss this result as well.

In Chapter 3 we consider the half-linear second order differential equation

$$x''|x'|^{n-1} + q(t)|x|^{n-1}x = 0, \qquad n \in \mathbb{R}^+, \tag{FD}$$

which is an important generalization of the second order differential equation (LO) and was introduced by Imre Bihari [8] and Árpád Elbert [20]. They called it half-linear because its solution set is homogeneous, but it is not additive. To this equation Bihari [9] proved an Armellini-Tonelli-Sanone-type theorem, namely, he proved that the trivial solution of (LO) is asymptotically stable with respect to x if coefficient q is continuously differentiable and tends "regularly" to infinity as $t \to \infty$. Such result for this equation with irregularly (or intermittently) growing coefficients was unknown until the appearance of our paper [33]. In Chapter 3 we give a sufficient condition on the asymptotic stability of the trivial solution with respect to x in the case when coefficient q is the most typically intermittently growing, that is when q is a step function. In the proof of our theorem we could successfully replace the method used for the linear case ($n = 1$ in (FD)) to a geometric technique which does not require linearity. What is more, this new method of proof allows us to sharpen the known results for the linear case. Therefore, our results not just include, but even sharpen the Armellini-Tonelli-Sanone-type theorems of Elbert [21, 23] for linear differential equations with step function coefficients, thus we first introduce this method to linear systems of difference equations.

In the first section we investigate the asymptotic stability of the trivial solution of the linear system of difference equations (DE) in the case when it is two dimensional. It is well-known that if $\prod_{n=0}^{\infty} \|\mathbf{M}_n\| = 0$, then all solutions of equation (DE) tend to zero as $n \to \infty$. Elbert [22] gave a sufficient condition for the asymptotic stability in the case when the previous assumption does not hold. His proof was based on estimation of the norm of some special matrices and a „tricky" decomposition of matrices $\mathbf{M}_n$.

To investigate equation (DE), we define a difference equation (DE') on the plane which has the same stability properties as equation (DE). The construction of this equation is based on the polar factorization theorem (see eg. [34, p. 188]). Let

$$\mathbf{x}_{n+1} = \|\mathbf{M}_n\| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\omega_n & -\sin\omega_n \\ \sin\omega_n & \cos\omega_n \end{pmatrix} \mathbf{x}_n, \qquad 0 \le d_n \le 1, \qquad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{DE'}$$

where d_n and ω_n $(n = 0, 1, 2, \dots)$ can be calculated from matrices $\mathbf{M}_0, \dots, \mathbf{M}_n$. The main theorem of this section is as follows:

Theorem 3.3 *Suppose that* $\limsup_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n} \|\mathbf{M}_k\| < \infty$. *If*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \min\{1 - d_n, 1 - d_{n+1}\} \sin^2 \omega_{n+1} = \infty,$$

then the zero solution of difference equation (DE') is asymptotically stable.

In the second section we consider the half-linear second order differential equation (DE).

Theorem 3.5 *Let* $n > 1$ *and*

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k < t_{k+1} < \ldots, \qquad \lim_{k\to\infty} t_k = \infty,$$
$$0 < q_0 \le q_1 \le \ldots \le q_k \le q_{k+1} \le \ldots, \qquad \lim_{k\to\infty} q_k = \infty.$$

Then all non-trivial solutions of equation

$$x''|x'|^{n-1} + q_k|x|^{n-1}x = 0 \qquad (t_k \le t < t_{k+1},\ k = 0, 1, \ldots)$$

are small, if

$$\sum_{k=0}^{\infty} \min\left\{1 - \frac{q_k}{q_{k+1}}, 1 - \frac{q_{k+1}}{q_{k+2}}\right\} \left| S\left(q_{k+1}^{\frac{1}{n+1}}(t_{k+2} - t_{k+1})\right)\right|^{n+1} = \infty.$$

The function S appearing in the theorem is the so-called generalized sine function, that is, the solution of the initial value problem

$$\begin{cases} S''|S'|^{n-1} + S|S|^{n-1} = 0, \\ S(0) = 0, \quad S'(0) = 1. \end{cases}$$

Note, that S satisfies the identity $|S(\Phi)|^{n+1} + |S'(\Phi)|^{n+1} \equiv 1$. The proof is similar to the one of Theorem 3.3, but due to the appearance of the generalized trigonometric functions we have to modify our estimations. The main difficulty is that exact addition formulae for these functions are unknown.

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Dr. Hatvani Lászlónak, aki értékes tanácsaival és javaslataival nem csak a disszertáció elkészítéséhez nyújtott segítséget, hanem egész pályafutásomat támogatta. Nagy öröm és megtiszteltetés számomra, hogy a tanítványa lehettem.

Köszönettel tartozok Vadászné Dr. Bognár Gabriellának, aki a féllineáris egyenletek elméletéhez és alkalmazásaihoz kapcsolódóan több munkára is felhívta a figyelmemet.

Köszönöm feleségemnek, Králik Tímeának a nyugodt körülményeket és határtalan türelmét.

Irodalomjegyzék

[1] I. Adamaszek, On generalized sine and cosine functions, *Demonstratio Math.*, **28** (1995), 263–270.

[2] I. Adamaszek-Fidytek, On generalized sine and cosine functions, II. *Demonstratio Math.*, **37** (2004), 571–578.

[3] R. P. Agarwal, *Difference equations and inequalities*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 115, Marcel Dekker, Inc., New York, 1992.

[4] R. P. Agarwal, *Oscillation theory for second order linear, half-linear, superlinear and sublinear dynamic equations*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 2002.

[5] M. Athans, *Optimal control*, McGraw-Hill, New York, 1966.

[6] F. V. Atkinson, Á. Elbert, An extension of Milloux's theorem to half-linear differential equations, *Proceedings of the 6th Colloquium on the Qualitative Theory of Differential Equations (Szeged, 1999)*, No. 8, (electronic), Proc. Colloq. Qual. Theory Differ. Equ., *E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ., Szeged*, 2000.

[7] M. Biernacki, Sur l'equation differentielle $x'' + a(t)x = 0$, *Prace Mat. Fiz.*, **40** (1933), 163–171.

[8] I. Bihari, Ausdehnung der Sturmschen Oszillations und Vergleichssätze auf die Lösungen gewisser nichtlinearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, *Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci.*, **2** (1957), 154–165.

[9] I. Bihari, Asymptotic result concerning equation $x''|x'|^{n-1} + a(t)x^{\overset{*}{n}}$. Extension of a theorem by Armellini-Tonelli-Sansone, *Studia Sci. Math. Hungar.*, **19** (1984), no. 1, 151–157.

[10] I. Bihari, An asymptotic statement concerning the solutions of the differential equation $x'' + a(t)x = 0$. Analternative proof of a theorem G. Prodi and G. Trevisan, *Studia Sci. Math. Hungar.*, **20** (1985), 11–13.

[11] G. Bognár, E. Rozgonyi, The series expansions of generalized hypergeometric functions, *9th WSEAS International Conference on Applied Mathematics, Istambul, Turkey*, (2006), 181–186.

[12] G. Bognár, E. Rozgonyi, The power series solutions of some nonlinear initial value problems, *WSEAS Transactions on Mathematics*, **5** (2006), 627–635.

[13] G. Bognár, Similarity solution of a boundary layer flow for non-Newtonian fluids, *Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **10** (2010), 1555–1566.

[14] G. Bognár, On similarity solutions to boundary layer problems with upstream moving wall in non-Newtonian power-law fluids, *IMA J. Appl. Math.*, (2011), 1–17.

[15] B.M. Brown, M.S.P. Eastham, Eigenvalues of the radial p-Laplacian with a potential on $(0, \infty)$, *J. Comput. Appl. Math.*, **208** (2006), 111–119.

[16] S. Csörgő, L. Hatvani, Stability properties of solutions of linear second order differential equations with random coefficients, *J. Differential Equations*, **248** (2010), 21–49.

[17] O. Došlý, Half-linear differential equations, *Handbook of differential equations*, 161–357, Elsevier/North-Holland, Amsterdam, 2004.

[18] O. Došlý, P. Řehák, *Half-linear differential equations*, Elsevier/North-Holland, Amsterdam, 2005.

[19] S. N. Elaydi, *An Introduction to Difference Equations*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag (New York-Berlin-Heidelberg), 1996.

[20] Á. Elbert, A half-linear second order differential equation. *Qualitative theory of differential equations, Vol. I, II (Szeged, 1979)*, pp. 153–180, *Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, **30**, North-Holland, Amsterdam-New York, 1981.

[21] Á. Elbert, On asymptotic stability of some Sturm-Liouville differential equations, *General Seminar in Mathematics*, University of Patras, **22-23** (1996/97), 57–66.

[22] Á. Elbert, Stability of some difference equations, *Advances in Difference Equations: Proceedings of the Second International Conference on Difference Equations and Applications, Veszprém, Hungary, 7-11 August 1995*, Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, 1997, 155–178.

[23] Á. Elbert, On damping of linear oscillators, *Studia Sci. Math. Hungar.*, **38** (2001), 191–208.

[24] J. R. Graef, J. Karsai, The Milloux-Hartmann theorem for impulsive systems, *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst.*, **6** (1999), 155–168.

[25] P. Hartman, On a theorem of Milloux, *Amer. J. Math.*, **70** (1948), 395–399.

[26] P. Hartman, *Ordinary Differential Equations*, Birkhäuser, Boston, 2nd edn., 1982.

[27] L. Hatvani, On the existence of a small solution to linear second order differential equations with step function coefficients, *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst.*, **4** (1998), 321–330.

[28] L. Hatvani, On stability properties of solutions of second order differential equations, *Proceedings of the 6th Colloquium on the Qualitative Theory of Differential Equations (Szeged, 1999)*, No. 11, (electronic), Proc. Colloq. Qual. Theory Differ. Equ., *E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ., Szeged*, 2000.

[29] L. Hatvani, On small solutions of second order linear differential equations with non-monotonous random coefficients, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **68** (2002), 705–725.

[30] L. Hatvani, The growth condition guaranteeing small solutions for a linear oscillator with an increasing elasticity coefficient, *Georgian Math. J.*, **14** (2007), no. 2, 269–278.

[31] L. Hatvani, L. Stachó, On small solutions of second order differential equations with random coefficients, *Arch. Math. (Brno)*, Equadiff 9 (Brno, 1997), **34** (1998), 119–126.

[32] L. Hatvani, L. Székely, On the existence of small solutions of linear difference equations with varying coefficients, *J. Difference Equ. Appl.*, **12** (2006), No. 8, 837–845.

[33] L. Hatvani, L. Székely, Asymptotic stability of two dimensional systems of linear difference equations and of second order half-linear differential equations with step function coefficients, *E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ.*, **38** (2011), 1–17.

[34] N. Jacobson, *Lectures in abstract algebra, II. Linear algebra*, Springer Verlag (New York - Heidelberg - Berlin), 1953.

[35] J. Karsai, On the existence of a solution tending to zero of nonlinear differential equations, *Dynam. Systems Appl.*, **6** (1997), 429–440.

[36] J. Karsai, J. R. Graef, M. Y. Li, A generalization of the Milloux-Hartman theorem for nonlinear systems, *Communications in Difference Equations, Proceedings of the 4th International Conference on Difference Equations and Applications, Poznan, Poland, August 27-31, 1998*, 203–213.

[37] J. Karsai, J. R. Graef, M. Y. Li, On the phase volume method for nonlinear difference equations, *Int. J. Differ. Equ. Appl.*, **1** (2000), 17–35.

[38] I. T. Kiguradze, T. A. Chanturia, *Asymptotic Properties of Solutions of Nonautonomous Ordinary Differential Equations*, Mathematics and Its Applications (Soviet series), 89 Kluwer Academic Publishers (Dordrecht-Boston-London), 1993.

[39] Lajos Tamás, *Az áramlástan alapjai*, (Budapest), 2008.

[40] J. Lang, D. Edmunds, *Eigenvalues, Embeddings and Generalised Trigonometric Functions*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 2016, Springer Verlag (Berlin-Heidelberg), 2011.

[41] P. Lindqvist, J. Peetre, Erik Lundberg's Theory of Goniometric Functions, *Lund, University, Centre of Mathematical Sciences*, 2003.

[42] J. W. Macki, Regular growth and zero tending solutions, *Ordinary differential equations and operators* (*Dundee*, 1982), Springer, Berlin, 1983, 358–374.

[43] H. Milloux, Sur l'equation differentielle $x''+A(t)x=0$, *Prace Mat.-Fiz.*, **41** (1934), 39–54.

[44] T. Peil, A. Peterson, A Theorem of Milloux for Difference Equations, *Rocky Mountain J. Math.*, **24** (1994), No. 1, 253–260.

[45] G. Prodi, Un'osservazione sugl'integrali dell' equazione $y''+A(t)y=0$ nel caso $A(x)\to\infty$ per $x\to\infty$, *Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.*, **8** (1950), 462–464.

[46] P. Pucci, J. Serrin, Asymptotic stability for ordinary differential systems with time dependent restoring potentials, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **132** (1995), 207–232.

[47] H. Rund, *The Differential Geometry of Finsler Spaces*, Springer, Berlin, 1959.

[48] G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, American Mathematical Society, New York, 1959.

[49] Szilvásiné Rozgonyi Erika, *Nemlineáris peremértékproblémák megoldásainak vizsgálata és néhány folyadék mechanikai alkalmazás*, doktori

értekezés, Hatvany József Informatikai Tudományok Doktori Iskola, Miskolci Egyetem, 2011.

[50] J. Terjéki, On the conversion of a theorem of Milloux, Prodi and Trevisan, *Differential Equations,* Lecture Notes in Pre and Applied Math., Dekker, New york, 1989, 661–665.

[51] G. Trevisan, Sull'equazione differenziale $y'' + A(t)y = 0$, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **23** (1954), 340–342.