Véletelen gráfok lokális gyenge limeszei és paraméterek folytonossága

Doktori értekezés tézisei

Beringer Dorottya

Témavezető: Timár Ádám, Ph.D.

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
Bolyai Intézet
Szegedi Tudományegyetem, Természettudományi és Informatikai Kar
Szeged
2020

Bevezetés

A gráflimeszek elméletének egyik fő motivációját az adja, hogy szeretnénk megérteni a nagy gráfok viselkedését. Ilyen gráfokat véletlen gráfmodellek segítségével kaphatunk, vagy az alkalmazásokban előforduló hálózatokból, például számítástudományban, statisztikus fizikában, biológiában vagy szociális hálózatok vizsgálatához kapcsolódóan.

A disszertációban a Benjamini és Schramm által bevezetett lokális gyenge konvergenciával foglalkozunk. Ez a fogalom jól használható az alkalmazásokhoz kapcsolódóan leggyakrabban vizsgált gráfmodellek esetén, melyekre jellemző a korlátos várható értékű, de nem korlátos fokszám.

A gráflimeszek egyik előnye, hogy sok esetben egyszerűbb a limeszgráffal dolgozni, mint az ehhez konvergáló gráfsorozattal [2]. Konvergens gráfsorozatok esetén reménykedhetünk, hogy a vizsgált gráfparaméter konvergál, és a limeszgráfon is definiálható egy megfelelő paraméter, ami megegyezik a paraméterek határértékével. A párosítási arány egy olyan példa, amire ez teljesül. Ez a jelenség jól illusztrálja, hogy miért lehet hasznos eszköz a gráfok limeszelmélete gráfparaméterekkel kapcsolatos kérdések vizsgálatában. Az ilyen irányú kutatások sorába illeszkednek a 3. Fejezetben bemutatott eredményeink, melyekben a párosítási arányt vizsgáljuk.

A lokális gyenge konvergencia természetes módon kiterjeszthető végtelen gráfokra is. Ebben a bővebb osztályban is felmerülnek ugyanazok a kérdések: milyen értelemben határoz meg egy végtelen gráfot a lokális struktúrája? Konvergens gráfsorozatok esetén konvergálnak-e bizonyos gráfparaméterek? A 4. Fejezetben perkolációs kritikus valószínűségekre vonatkoztatva vizsgáljuk ezt a kérdést, amelyet eredetileg Oded Schramm [5] vetett fel tranzitív gráfokra. Az ehhez hasonló, lokalitással összefüggő kérdések esetén azonban jellemzően nem a tranzitivitás, hanem az unimodularitás a vizsgált gráfok körére tett természetes feltevés. A 4. Fejezetben a fenti kérdéseket az unimoduláris gráfok osztályában vizsgáljuk, illetve ezzel összefüggésben megnézzük, hogy a lokalitás szempontjából mi lehet a kritikus valószínűség megfelelő definíciója.

1. Véletlen gráfok

Ebben a részben definiáljuk azokat a leggyakrabban használt véletlen gráfmodelleket, melyeket a 3. Fejezetben vizsgálni fogunk. Az itt leírt gráfmodellek mindegyikének létezik egy természetes módon irányított változata, továbbá egy általánosabb, címkézett változata is, azonban ezeket csak a disszertációban definiáljuk.

1.1. Példák véges véletlen gráfokra

Az első két példánk véges véletlen gráf. Véges véletlen gráf alatt egy diszkrét valószínűségeloszlást értünk a véges gráfok izomorfiaosztályainak megszámlálható számosságú halmazán.

Az alábbi két gráfmodell egyre fontosabbá vált az alkalmazásokban, mivel képes megragadni a valóságban előforduló hálózatok olyan fontos jellemzőit, mint például a skálainvariáns fokszámeloszlás. Ennek köszönhető, hogy a a 3. Fejezetben bemutatott munkánk fő motivációját nyújtó [16] cikkben is ezeket a gráfokat vizsgálták.

1.1. Definíció (Véletlen konfigurációs modell)**.** *Rögzítsünk egy nemnegatív egész értékű ξ valószínűségi változót. Legyen G_n az alábbi módon definiált véletlen gráf: legyenek $\xi_1, \ldots, \xi_n$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, melyek eloszlása megegyezik ξ eloszlásával. Adott $\xi_1, \ldots, \xi_n$ értékek mellett legyen $\mathcal{E} := \{(k, j) : k \in [n], j \in [\xi_k]\}$ a* ***fél-élek halmaza****. Legyen H az $\mathcal{E}$ halmaz egy teljes párosítása (ha $|\mathcal{E}|$ páratlan, akkor először hagyjunk el belőle egy egyenletes eloszlás szerint választott fél-élt, és utána válasszunk egy teljes párosítást). Az $[n]$ csúcshalmazon a H véletlen teljes párosítás által meghatározott élhalmazú $G_n = G_n(H)$ véletlen gráfot* ***véletlen konfigurációs modellnek*** *nevezzük.*

A ξ fokszámeloszlást konstans d-nek választva a véletlen konfigurációs modell speciális eseteként definiálhatjuk a **véletlen d-reguláris gráfot**. Az így kapott eloszlás megegyezik annak a véletlen gráfnak az eloszlásával, amit úgy kapunk, hogy egyenletesen eloszlás szerint választunk egyet azon d-reguláris gráfok közül, amelyeknek a csúcshalmaza $[n]$.

A második vizsgált modellünk a preferential attachment szabállyal megadott gráf, melyet Barabási és Albert vezetett be a [4] cikkben, a precíz konstrukciót pedig Bollobás és Riordan [10] írta le. Ennek a véletlen gráfcsaládnak több változata is van, amelyek aszimptotikusan ekvivalenseknek tekinthetők: mind ugyanahhoz a végtelen limeszgráfhoz konvergálnak [7].

1.2. Definíció (Preferential attachment gráfok)**.** *Rögzítsük a pozitív egész r és $\alpha \in [0, 1)$ konstansokat. Minden n esetén legyen az n csúcsú* ***preferential attachment gráf*** *az alábbi rekurzív definícióval megadott $G_n = G^{PA}_{r,\alpha,n}$ véletlen gráf az $[n]$ csúcshalmazon: legyen G_1 az egy csúcsú, él nélküli gráf. A G_n gráfot úgy hozzuk létre, hogy a korábban létrehozott G_{n-1} gráfot egy új, n-el jelölt csúccsal és r darab új éllel bővítjük ki, ahol minden új él kezdőpontja n. Az új élek $w_1, \ldots w_r$ végpontjait egymástól függetlenül választjuk meg az alábbi módon: α valószínűséggel w_j-t egyenletes eloszlás szerint választjuk az $[n-1]$ halmazból, $1-\alpha$ valószínűséggel pedig w_j-t a $\deg_{G_{n-1}}$ fokszámokkal arányos eloszlás szerint választjuk. Vegyük észre, hogy az első csúcs kivételével mindegyik csúcs ki-foka r, továbbá minden csúcs be-foka véletlen, és a be-fokok átlagának várható értéke r-hez tart $n \to \infty$ esetén.*

1.2. Véletlen gyökeres gráfok

Ha *végtelen gráfokat* is megengedünk, akkor bonyolultabb esetet kapunk. A lokálisan véges gráfok izomorfiaosztályainak halmaza nem megszámlálhatóan véges, és első ránézésre nem nyilvánvaló, hogy milyen topológiát válasszunk ezen a halmazon. Egy lehetséges út, ahogyan topológiát definiálhatunk, ha gyökeres gráfokat tekintünk, ami a lokális gyenge konvergencia szempontjából is egy természetes választás. *Gyökeres gráfok távolságát* oly

módon definiáljunk, hogy két gráf akkor legyen közel egymáshoz, ha a gyökereik nagy környezetei izomorfak. Jelölje $\mathcal{G}_\star$ a lokálisan véges, összefüggő gráfok izomorfiaosztályainak terét a fenti távolság által definiált topológiával ellátva. **Véletlen gyökeres gráf** alatt a $\mathcal{G}_\star$ téren vett valószínűség-eloszlást értünk.

A vizsgálatainkban az *unimoduláris* véletlen gyökeres gráfok terére szorítkozunk, ami a véletlen gráfok eloszlására tett természetes szimmetria feltételt jelent. Ez a fogalom általánosítja a leggyakrabban vizsgált véletlen gráfok (Cayley-gráfok invariáns részgráfjai, illetve véges gráfok lokálisan gyenge limeszei) közös tulajdonságait. Az unimodularitásnak több ekvivalens definíciója használatos. Az alábbi definíció egy jó eszközt nyújt a bizonyításokhoz: unimoduláris gráfokra vonatkozó egyenlő(tlen)ségek gyakran bizonyíthatók egy megfelelő tömeg transzportáló függvény segítségével.

1.3. Definíció (Unimoduláris véletlen gráfok)**.** *[1, Definition 2.1] Azt mondjuk, hogy a véletlen gyökeres (címkézett) gráf* ***unimoduláris****, ha teljesíti a* ***tömeg transzportációs elvet****, azaz*

$$\mathbb{E}_G\left(\sum_{x\in V(\omega)} f(\omega,o,x)\right) = \mathbb{E}_G\left(\sum_{x\in V(\omega)} f(\omega,x,o)\right)$$

teljesül minden, a kitüntetett rendezett csúcspárral rendelkező lokálisan véges gráfok izomorfiaosztályainak terén értelmezett mérhető f függvény esetén.

Az unimoduláris gráfok alábbi osztályai, amelyeket a disszertációban is vizsgálunk, egyszerű példákat adnak a definícióra.

1.4. Példa (Véges véletlen gráfok)**.** *Könnyen ellenőrizhető a definíció alapján, hogy egy véges gráf a csúcsai közül egyenletes eloszlás szerint választott gyökérrel unimoduláris. Az unimoduláris véletlen gráfok osztályának konvexitásából következik, hogy egyenletes eloszlás szerint választott gyökérrel minden véges véletlen gráf unimoduláris.*

Az unimoduláris véletlen gráfok egyik fontos tulajdonsága, hogy ez az osztály *zárt a lokális gyenge limeszképzésre.* Nyitott kérdés [1, Question 10.1], hogy vajon az unimoduláris gráfok osztálya bővebb-e, mint a szofikus mértékek tere, azaz a véges véletlen gráfok lokális gyenge limeszei halmazának a lezártja.

1.5. Állítás (Unimoduláris gráfok lokális gyenge limeszei [6])**.** *Az unimoduláris gráfok tere zárt a lokális gyenge limesz képzésére (2.1. Definíció). Ebből következik, hogy a véges véletlen gráfok limeszeiként előálló véletlen gyökeres gráfok unimodulárisak.*

Az utolsó példánk egy önmagában is érdekes unimoduláris véletlen gyökeres gráf. Ahogy a 2.4. Tételben leírjuk, ez a véletlen gráf véges gráfok lokális gyenge limeszeként is előállítható. A következő részben bemutatunk majd még egy példát olyan unimoduláris véletlen gyökeres gráfra, ami véges gráfok limeszeként áll elő, és a 4. Fejezetben szereplő példáinkban lesz fontos.

1.6. Definíció (Unimoduláris Galton–Watson fa)**.** *Legyen ξ nemnegatív egész értékű valószínűségi változó véges várható értékkel. A ξ fokszámeloszlású* ***unimoduláris Galton–Watson fa*** *(jelölése: $UGW(\xi)$) az alábbi véletlen gyökeres fa. A fa gyökere o. Azt mondjuk, hogy az y csúcs az x csúcs* gyereke*, ha szomszédosak és $dist(y, o) = dist(x, o) + 1$. Az $UGW(\xi)$ gráf eloszlását az alábbi rekurzív definíció adja meg:*

- *Annak a valószínűsége, hogy a gyökérnek $k \geq 0$ gyereke van, $\mathbb{P}(\xi = k)$.*
- *Minden x csúcs esetén annak a valószínűsége, hogy x-nek $k \geq 0$ gyereke van, $\frac{(k+1)\mathbb{P}(\xi=k+1)}{\mathbb{E}\xi}$, egymástól függetlenül az egyes csúcsokra.*

2. Gráfsorozatok lokális gyenge konvergenciája

A gyökeres véletlen gráfok lokális gyenge konvergenciája az eloszlásaik gyenge konvergenciáját jelenti a $\mathcal{G}_\star$ térben (összefüggő, lokálisan véges gráfok tere). Az alábbi, jól használható definíció a lokális gyenge konvergencia azon a tulajdonságát ragadja meg, hogy a gráfsorozat tagjainak lokális statisztikái a limeszgráféihoz tartanak.

2.1. Definíció (Gráfsorozatok lokális gyenge konvergenciája)**.** *Azt mondjuk, hogy lokálisan véges véletlen gyökeres gráfok (G_n, o_n) sorozata* ***lokálisan gyengén konvergál*** *a lokálisan véges véletlen gyökeres (G, o) gráfhoz, ha minden pozitív egész r esetén a gyökér körüli r sugarú gömb eloszlása a (G_n, o_n) gráfban konvergál a gyökér körüli r sugarú gömb eloszlásához a (G, o) gráfban.*

Jelölje $\mathcal{G}_\star^D$ a $\mathcal{G}_\star$ tér azon alterét, ami az olyan összefüggő, lokálisan véges véletlen gyökeres gráfok izomorfiaosztályaiból áll, amelyek minden fokszáma legfeljebb D. Nem nehéz megmutatni, hogy $\mathcal{G}_\star^D$ kompakt topologikus tér. Ebből következik, hogy minden $\mathcal{G}_\star^D$-beli sorozatnak van konvergens részsorozata, ami tart $\mathcal{G}_\star^D$ valamelyik eleméhez. Konvergens gráfsorozatokról szóló sok korábbi eredményt azon erősebb feltétel mellett bizonyítottak, hogy valamilyen D-re a sorozat minden tagja $\mathcal{G}_\star^D$-beli. Bizonyos kérdések esetén, mint például a disszertáció 4. Fejezetében, a legalapvetőbb példák mutatják, hogy csak ebben a szűkebb osztályban értelmesek. Sok gyakran használt gráfmodell azonban nem teljesíti a fokszámra tett egyenletes korlátossági feltételt, viszont az általunk vizsgált összes sorozatra teljesül, hogy a fokszámok átlagának a várható értéke véges. Az ilyen sorozatok is jól viselkednek a lokális gyenge konvergencia szempontjából, így egyes eredményekből a korlátos fokszám feltétel elhagyható, ahogy azt a 3. Fejezetben is látni fogjuk.

A következőkben felsoroljuk a kutatásaink szempontjából legfontosabb konvergens gráfsorozatokat.

Az első példánk a 4. Fejezet (ellen)példáiban játszik fontos szerepet. Elsőre talán furcsának tűnhet, hogy a reguláris fa egy csúcsa körüli gömbök limesze nem a reguláris fa.

2.2. Példa (3-reguláris fa gömbjeinek limesze)**.** *Legyen $\mathbb{T}_3$ a 3-reguláris végtelen fa, és legyen $G_n = B_{\mathbb{T}_3}(v, n)$ a $\mathbb{T}_3$ fa egy csúcsa körüli n sugarú gömb. Ekkor a G_n gráfok limesze*

az alábbi, Λ-val jelölt, a továbbiakban ***lombkoronás fának*** *nevezett összefüggő végtelen fa megfelelően választott véletlen gyökérrel. Az összefüggő Λ gráf csúcshalmaza megszámlálhatóan végtelen sok diszjunkt részhalmazra osztható fel: legyen $L(0)$ az 1 fokú csúcsok halmaza, és minden $k > 0$ esetén legyen $L(k)$ az $L(0)$-tól k távolságra levő csúcsok halmaza. Minden $L(j)$ halmazba végtelen sok csúcs esik, és minden $L(j)$-beli csúcsnak pontosan egy $L(j+1)$-beli és pontosan kettő $L(j-1)$-beli szomszédja van. A Λ fa gyökere 2^{-j-1} valószínűséggel $L(j)$-beli csúcs.*

A következő, nem triviális példánk végtelen gráfok egy konvergens sorozata, ami azt is mutatja, hogy miért természetes a korlátos fokszám feltétel a 4. Fejezetben. Ennek az eredménynek az $\mathbb{E}X > 1$ esete a Beringer, Pete, Timár [8] cikkben jelent meg, és később kiterjesztettük az itt bemutatott általánosabb esetre.

2.3. Állítás. *Adott nemnegatív egész értékű X valószínűségi változó esetén jelölje $\hat{X}$ azt a pozitív egész értékű valószínűségi változót, amire $\mathbb{P}(\hat{X} = k) = \frac{\mathbb{P}(X=k-1)}{k\,\mathbb{E}(\frac{1}{X+1})}$ minden $k \geq 1$ esetén. Legyen $UGW_\infty(\hat{X})$ az $\hat{X}$ fokszámeloszlású unimoduláris Galton–Watson fa feltételes eloszlása arra az eseményre, hogy a fa végtelen. Ha $\mathbb{E}X_n \geq 1$ és $\mathbb{E}X \geq 1$, akkor $UGW_\infty(\hat{X}_n) \to UGW_\infty(\hat{X})$ lokálisan gyengén akkor és csak akkor, ha $X_n \to X$ eloszlásban.*

Az alábbi két konvergens gráfsorozat a 3. Fejezetben lesz fontos.

Legyen G_n egy n csúcsú, a *véletlen konfigurációs modell* alapján előállított véletlen gráf olyan ξ fokszámeloszlással, amelyre $\mathbb{E}(\xi^2) < \infty$. Ekkor G_n lokálisan gyengén konvergál az $UGW(\xi)$ véletlen gráfhoz $n \to \infty$ esetén [1, Example 10.2], [11, Theorem 3.15]. A *véletlen d-reguláris gráfok* speciális esete már korábban is ismert volt, ekkor a limesz $\mathbb{T}_d$, a d-reguláris végtelen fa.

Berger, Borgs, Chayes és Saberi [7] megmutatták, hogy a *preferential attachment gráfok* sorozata rögzített r és α paraméterek esetén lokálisan gyengén tart az általuk definiált, azonos paraméterekkel rendelkező Pólya-pont gráfhoz.

A fenti két modell valójában erősebb értelemben is konvergál. Ha a (G_n) sorozatot egy közös valószínűségi mezőn definiáljuk, minden n esetén a megadott peremeloszlásokkal, de tetszőleges együttes eloszlással, akkor a sorozat *majdnem biztosan lokálisan gyengén konvergál* ugyanahhoz a véletlen limeszgráfhoz. A fenti modellek irányított változatai, amelyek az alkalmazásokban fontosak, szintén konvergálnak ebben az erősebb értelemben a limeszgráfok irányított változataihoz. A 2.4. Tétel 2) állításának bizonyításához felhasználtuk a [7] cikk eredményeit a preferential attachment gráfok lokálisan gyenge konvergenciájáról, és megmutattuk, hogy a lokális gyenge konvergencia definíciójában szereplő megfelelő valószínűségek erősen koncentrálódnak. A 3) állítás bizonyításához a [14, Proposition 2.2] eredményt általánosítottuk a nem korlátos fokszámú esetre.

2.4. Tétel. *1) [11, Theorem 3.28] Legyen ξ nemnegatív egész értékű valószínűségi változó, melyre $\mathbb{E}(\xi^p) < \infty$ valamilyen $p > 2$ esetén. A ξ fokszámeloszlású véletlen konfigurációs*

modellel definiált gráfsorozat tetszőleges együttes eloszlás esetén majdnem biztosan lokálisan gyengén konvergál az $UGW(\xi)$ unimoduláris Galton–Watson fához.

2) [9] A preferential attachment gráfok sorozata tetszőleges együttes eloszlás esetén majdnem biztosan lokálisan gyengén konvergál a Pólya-pont gráfhoz.

3) [9] Mindkét modell irányított változata majdnem biztosan lokálisan gyengén konvergál a limeszgráfok irányított változatához.

3. Párosítási arány nagy gráfokban

A kontrollálhatóság elméletében vizsgált egyik fontos paraméter szorosan kapcsolódik a vizsgált hálózat irányított párosítási arányához, ahogy azt Liu, Slotine és Barabási megmutatták a [16] cikkben. Egy hálózat kontrollálhatósági paramétere az a legkisebb N_D szám, amire teljesül, hogy ennyi csúcs elég a rendszer irányításához, például egy sejtet ennyi molekulájának a közvetlen irányításával eljuttathatunk egy rosszindulatú állapotból egészséges állapotba. A [16] cikkben megmutatták, hogy egy véges hálózat irányításához szükséges csúcsok számának aránya, azaz az $n_D = N_D/|V(G)|$ hányados egyenlő egy mínusz az irányított párosítási arány. Az **irányított párosítási arányt** egy maximális méretű irányított párosítás relatív méreteként definiáljuk, ahol irányított párosítás alatt egy olyan élhalmazt értünk, amire nézve minden csúcs ki- és be-foka is legfeljebb 1. Ez a kapcsolat lehetővé teszi, hogy n_D-re vonatkozó eredményeket bizonyítsunk az irányított párosítási arányra vonatkozó megfelelő állítások segítségével.

A fő motivációnk a [16] cikk további két észrevétele volt, amelyek a következők. A cikk első megfigyelése, hogy valós hálózatokon és hálózatok modelljein egyaránt lefuttatott szimulációk alapján úgy tűnt, hogy a párosítási arányt lényegében meghatározza gráf fokszámsorozata, pontosabban ha randomizáljuk egy gráf éleit oly módon, hogy a fokszámok nem változnak, akkor a párosítási arány nem változik meg lényegesen. A második, statisztikus fizikai módszereken és numerikus eredményeken alapuló megfigyelés, hogy a legszélesebb körben vizsgált skálafüggetlen hálózati modellek esetén az irányított párosítási arány konvergál egy konstanshoz, ha a hálózat mérete végtelenhez tart. A [16] cikk szempontjából leginkább releváns modellek a skálafüggetlen hálózatok, amelyekre a valóságban előforduló hálózatok számos jellemzője teljesül, például a polinomiális lecsengésű fokszámeloszlás. A célunk az volt, hogy általánosítsuk Elek és Lippner [15] eredményét a párosítási arány konvergenciájáról, és ezzel precíz matematikai bizonyításokat adjunk a [16] cikk megfigyeléseire. A párosítási arány és a kontrollálhatósági paraméter kapcsolata segítségével eredményeink hálózatok kontrollálhatóságáról szóló tételek formájában is megfogalmazhatóak.

Ennek a fejezetnek az eredményei Beringer és Timár [9] cikkében kerültek publikálásra.

3.1. A párosítási arány koncentrálódása

Az ebben a részben bemutatott tételeink a véletlen gráfok egyes paramétereinek koncentrálódásáról szóló állítások sorába illeszkednek. Korábbi hasonló eredmények felhasználták a vizsgált gráfok definícióiból adódó függetlenséget [3, 11], azonban a 3.1. és 3.2. Tételekben szereplő modellekben kevesebb függetlenséget feltételezünk, ezt a különbséget kezelnünk kellett a tételeink bizonyításában.

A 3.1. Tétel 1) részében az irányított párosítási arány koncentrálódását mutatjuk meg olyan véletlen gráfokban, amelyekben a ki- és be-fokok rögzítettek. Ezt az eredményt figyelték meg szimulációk segítségével a kutatásaink motivációját adó [16] cikkben. A tétel 2) részében megmutatjuk, hogy ha az éleket úgy randomizáljuk, hogy a ki- és be-fokok megmaradását nem követeljük meg, csak az egyes csúcsok teljes fokszáma marad állandó, akkor is hasonló koncentrálódást figyelhetünk meg. A 3.1. Tételből az is következik, hogy ha egy gráfsorozatban a fokszámsorozatok tapasztalati második momentuma $n \to \infty$ esetén 1-hez tartó valószínűséggel $o(n)$, akkor a gráfok irányított párosítási aránya nagy valószínűséggel erősen koncentrálódik az átlaga körül. Ez a tulajdonság teljesül a legszélesebb körben alkalmazott véletlen gráfmodellekre, melyeket az 1. Fejezetben definiáltunk.

3.1. Tétel (A párosítási arány koncentrálódása a konfigurációs modellben)**.** *1) Legyen G egy n csúcsú, $e(G)$ élű véletlen irányított gráf, melyet a véletlen konfigurációs modellel állítunk elő rögzített ki- és be-fokok mellett. Ekkor a G gráf $m(G)$ irányított párosítási arányára minden $\varepsilon > 0$ esetén teljesül az alábbi egyenlőtlenség:*

$$\mathbb{P}\left(|m(G) - \mathbb{E}(m(G))| > \varepsilon\right) \leq 2\exp\left\{-\frac{\varepsilon^2 n^2}{8e(G)}\right\}.$$

2) Legyen G egy n csúcsú, $e(G)$ élű véletlen irányított gráf, melyet a véletlen konfigurációs modellel állítunk elő rögzített fokszámok mellett. Ekkor a G gráf $m(G)$ irányított párosítási arányára minden $\varepsilon > 0$ esetén teljesül az alábbi egyenlőtlenség:

$$\mathbb{P}\left(|m(G) - \mathbb{E}(m(G))| > \varepsilon\right) \leq 2\exp\left\{-\frac{\varepsilon^2 n^2}{8e(G)}\right\}.$$

A preferential attachment gráfok párosítási arányára szintén erős koncentrálódás jellemző. Megjegyezzük, hogy a 3.2. Tétel nem következik a 3.1. Tételből, ugyanis a preferential attachment gráfok éleinek irányítása természetes módon adódik a modell definíciójából, és lényegesen különbözik a függetlenül választott véletlen irányítástól.

3.2. Tétel (Preferential attachment gráfok párosítási arányának koncentrálódása)**.** *Legyen G_n egy n csúcsú véletlen preferential attachment gráf r paraméterrel. Ekkor az $m(G_n)$ párosítási arány koncentrálódik a várható értéke körül az alábbi módon: minden $\varepsilon > 0$ esetén fennáll az alábbi egyenlőtlenség:*

$$\mathbb{P}\left(|m(G_n) - \mathbb{E}(m(G_n))| > \varepsilon\right) \leq 2\exp\left\{-\frac{\varepsilon^2 n}{8r^2}\right\}.$$

3.2. A párosítási arány konvergenciája

Ebben a részben a *véletlen irányított gráfok* párosítási arányának konvergenciájáról szóló eredményeinket mutatjuk be. Látni fogjuk, hogy sok esetben a konvergencia erősebb értelemben, majdnem biztosan is teljesül. Elek és Lippner [15] bizonyították a párosítási arány konvergenciáját lokálisan gyengén konvergens *determinisztikus irányítatlan* gráfsorozatok esetén a fokszámokra tett egyenletes korlát mellett, Bordenave, Lelarge és Salez [12] pedig a fokszámra tett korlátossági feltétel nélkül. Ahhoz, hogy bebizonyítsuk Liu, Slotine és Barabási [16] észrevételeit, ezeket az eredményeket általánosítanunk kell *irányított véletlen* gráfokra. Első tételünk ezen általánosabb feltételek mellett mutatja meg a párosítási arány *várható értékének* konvergenciáját.

3.3. Tétel. *Legyen G_n véges véletlen (irányított) gráfok egy sorozata, ami lokálisan gyengén konvergál a (G, o) véletlen (irányított) gyökeres gráfhoz, melyben o fokszámának véges a várható értéke. Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(m(G_n)) = m_E(G, o),$$

ahol $m_E(G, o) := \sup_M \mathbb{P}_G(o \in V^{(-)}(M))$ a (G, o) véletlen gyökeres gráf ***(várható) párosítási aránya****, melyhez a szuprémumot a G gráf összes olyan M véletlen (irányított) párosítására vesszük, melyre M majdnem biztosan egy (irányított) párosítása (G, o)-nak és a (G, M, o) címkézett gráf eloszlása unimoduláris. A $V^{(-)}(M)$ szimbólummal az irányítatlan esetben az M párosítás csúcshalmazát, az irányított esetben pedig az M párosításra vonatkozóan pozitív be-fokú csúcsok halmazát jelöljük.*

A 3.3. Tétel bizonyításában a [15] cikk módszereit használjuk. Az ott szereplő bizonyításhoz képest a fő különbségek az egyenletes fokszámkorlát hiányából adódnak. Az egyik lényeges változtatás, hogy mi *IID faktorként* definiálunk hosszú javító utaktól mentes $M(T)$ párosításokat. Fokszámkorlát nélküli gráfok esetén a [15] cikk 4.1. lemmája nem alkalmazható, ehelyett az alábbi 3.4. Lemmát bizonyítottuk.

3.4. Lemma. *Jelölje a (G, o) véletlen unimoduláris gráf eloszlását μ, és tegyük fel, hogy o fokszámának várható értéke véges. Ekkor minden $\varepsilon > 0$ és bármely n esetén van olyan δ, amelyre teljesül, hogy ha egy mérhető H eseményre $\mu(H) < \delta$, akkor $\mu(H^n) < \varepsilon$, ahol $H^n := \{(\omega, x) : (\omega, o) \in H, dist_\omega(o, x) \leq n\}$.*

Ennek a résznek a fő eredménye a vizsgált gráfmodellek (irányított) párosítási arányainak majdnem biztos konvergenciája, amely a 3.3. és 2.4. Tételekből következik. Az 1) rész speciális eseteként kapjuk, hogy az irányított véletlen konfigurációs modell irányított párosítási aránya majdnem biztosan tart egy konstanshoz.

3.5. Tétel (A párosítási arány majdnem biztos konvergenciája)**.** *1) Legyen G_n közös valószínűségi mezőn definiált, majdnem biztosan lokálisan gyengén konvergens irányítatlan véges gráfok sorozata, továbbá legyen $\overrightarrow{G_n}$ irányított véletlen gráfok sorozata, melyet a G_n*

sorozatból kapunk oly módon, hogy minden élnek egymástól függetlenül választunk egy véletlen irányítást. Ekkor $m(\overrightarrow{G_n})$ *majdnem biztosan konvergál a* $\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(m(\overrightarrow{G_n}))$ *konstanshoz.*

2) Legyen G_n *preferential attachment gráfok sorozata a definíció által megadott természetes irányítással. Ekkor* $m(G_n)$ *majdnem biztosan tart a* $\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(m(G_n))$ *konstanshoz.*

4. Perkolációs kritikus valószínűségek és unimoduláris véletlen gráfok

A lokális gyenge konvergencia fogalmát eredetileg *véges* gráfok sorozataira vezették be. Azonban a definíció *végtelen* gráfok sorozataira is alkalmazható, és természetes módon adódik ugyanaz a kérdés: konvergálnak-e bizonyos gráfparaméterek lokálisan gyengén konvergens gráfsorozatok mentén? Ebben a fejezetben perkolációs kritikus valószínűségeket vizsgálunk, melyeket eredetileg determinisztikus gráfok esetén definiáltak.

A $\mathbb{Z}^d$ rácson vett perkoláció esetén definiált számos kritikus valószínűségről kiderült, hogy azok nem csak $\mathbb{Z}^d$-n, hanem ennél általánosabban, minden tranzitív gráf esetén megegyeznek. A 4.2. részben ezen különböző definíciók kapcsolatát vizsgáljuk abban az esetben, ha G egy extremális unimoduláris véletlen gráf, ami a tranzitivitás természetes kiterjesztése a nem determinisztikus esetre.

A perkolációs kritikus valószínűség folytonosságát a tranzitív gráfok osztályán Oded Schramm [5] sejtése fogalmazza meg:

4.1. Sejtés (Schramm)**.** *Ha* G_n *csúcs-tranzitív végtelen gráfok sorozata, amely lokálisan konvergál* G*-hez, továbbá* $\sup_n p_c(G_n) < 1$*, akkor* $p_c(G_n) \to p_c(G)$ *teljesül.*

A sejtést bizonyos speciális esetekben bizonyították, de teljes általánosságban nem.

Az ilyen jellegű lokalitási állítások esetén azonban sokszor nem a tranzitív determinisztikus gráfok, hanem az unimoduláris véletlen gráfok osztálya a természetes feltevés. Éppen ezért a 4.3. részben Schramm sejtését az unimoduláris véletlen gráfok körében vizsgáljuk, és azt is megnézzük, hogy a lokalitás szempontjából mi lehet a kritikus valószínűség megfelelő definíciója.

Ennek a fejezetnek az eredményei a Beringer, Pete, Timár [8] cikkben kerültek publikálásra.

4.1. Perkolációs kritikus valószínűségek általánosításai

Bernoulli él-**perkolációt** fogunk vizsgálni a G gráfon, ami az alábbi véletlen részgráfot jelenti: minden élt egymástól függetlenül p valószínűséggel megtartunk (nyitott élek), $1-p$ valószínűséggel kitörlünk (zárt élek). Rögzítjük a G gráf egy o csúcsát, és a továbbiakban $\mathcal{C}_o$-val jelöljük az o csúcs összefüggőségi komponensét a perkolációs részgráfban. A p paraméterű perkolációra vonatkozó valószínűséget, illetve várható értéket $\mathbb{P}_p$-vel, illetve $\mathbb{E}_p$-vel jelöljük.

A perkolációelmélet egyik alapvető és régóta vizsgált kérdése a $p_c = \sup\{p : \mathbb{P}_p(|\mathcal{C}_o| = \infty) = 0\}$ és $p_T = \sup\{p : \mathbb{E}_p(|\mathcal{C}_o|) < \infty\}$ **kritikus valószínűségek értéke**. Ezek a mennyiségek természetes módon általánosíthatóak *extremális* unimoduláris véletlen gráfokra. Ebben a részben definiáljuk az alábbi általánosított kritikus valószínűségeket: p_c, p_T, $\tilde{p}_c$, p_T^a és $\tilde{p}_c^a$. Némileg leegyszerűsítve azt mondhatjuk, hogy az első három a fent említett mennyiségek „befagyasztott" változata, míg az utolsó kettő „átlagolt" változat.

Legyen μ az **extremális** unimoduláris (G, o) véletlen gyökeres gráf eloszlása, azaz μ legyen egy olyan mérték, ami nem állítható elő unimoduláris mértékek nemtriviális lineáris kombinációjaként. Ebben az esetben a (G, o) gráf egy ω megvalósulásának $p_c(\omega)$ kritikus valószínűsége egy μ-majdnem biztos konstans, és ugyanez teljesül p_T-re is [1, Section 6]. Így a következő definíció extremális unimoduláris gráfok esetén értelmes lesz. Használjuk a $\mathbb{P}_p^\omega$, illetve $\mathbb{E}_p^\omega$ jelöléseket a G véletlen gráf rögzített ω megvalósulásán vett p paraméterű perkolációhoz tartozó valószínűségre, illetve várható értékre. Extremális unimoduláris véletlen gráfok esetén az alábbi kritikus valószínűségeket definiálhatjuk:

$$\begin{aligned} p_c &= \inf\left\{p : \mu\left(\mathbb{P}_p^\omega\left(|\mathcal{C}_o| = \infty\right) > 0\right) = 1\right\} \\ &= \sup\left\{p : \mu\left(\mathbb{P}_p^\omega\left(|\mathcal{C}_o| = \infty\right) = 0\right) = 1\right\} \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} p_T &= \sup\left\{p : \mu\left(\mathbb{E}_p^\omega\left(|\mathcal{C}_o|\right) < \infty\right) = 1\right\} \\ &= \inf\left\{p : \mu\left(\mathbb{E}_p^\omega\left(|\mathcal{C}_o|\right) = \infty\right) = 1\right\}. \end{aligned}$$

Előfordulhat, hogy habár $\mathbb{E}_p^\omega\left(|\mathcal{C}_o|\right) < \infty$ μ-majdnem minden ω esetén, ezeknek a mennyiségeknek a μ szerint vett várható értéke mégis végtelen. Ez a p_T kritikus valószínűségnek egy második természetes kiterjesztését adja unimoduláris véletlen gráfokra, melyben $\mathcal{C}_o$ várható értékét tekintjük:

$$\begin{aligned} p_T^a &= \sup\left\{p : \mathbb{E}\left(\mathbb{E}_p^\omega\left(|\mathcal{C}_o|\right)\right) < \infty\right\} \\ &= \inf\left\{p : \mathbb{E}\left(\mathbb{E}_p^\omega\left(|\mathcal{C}_o|\right)\right) = \infty\right\}. \end{aligned}$$

A definíciókból azonnal következik, hogy $p_c \geq p_T \geq p_T^a$. Ismert, hogy tranzitív gráfok esetén $p_c = p_T$. Példáinkban megmutatjuk, hogy extremális unimoduláris véletlen gráfok esetén (akár szubexponencális növekedést feltételezve is) előfordulhat, hogy a három kritikus valószínűség különbözik.

A további két kritikus valószínűséghez egy olyan mennyiséget általánosítunk, amelyet Duminil-Copin és Tassion [13] vezetett be tranzitív gráfokra. Legyen (G, o) egy gyökeres gráf, legyen $S \in \mathcal{S}(G)$ egy, a gyökeret tartalmazó véges részgráf, és definiáljuk az alábbi mennyiséget:

$$\phi_p(S) := \sum_{e \in \partial_E S} p\, \mathbb{P}_p(o \overset{S}{\leftrightarrow} e^-),$$

ami az S határán levő azon e nyitott élek várható száma, melyeknek a belső végpontjához (e^--hoz) vezet S-beli nyitott élekből álló út o-ból p paraméterű perkoláció esetén. Ennek

segítségével a [13] cikkben az alábbi kritikus valószínűséget definiálták:

$$\begin{aligned}\tilde{p}_c &:= \sup\{p : \text{van olyan } S \in \mathcal{S}(G), \text{ hogy } \phi_p(S) < 1\} \\ &= \inf\{p : \phi_p(S) \geq 1 \text{ minden } S \in \mathcal{S}(G) \text{ esetén}\}\,.\end{aligned} \tag{4.1}$$

Azt is bizonyították a [13] cikkben, hogy tranzitív gráfok esetén $p_c = \tilde{p}_c$. Valójában $\tilde{p}_c$ bevezetésének egyik célja az volt, hogy a kritikus valószínűség lokalitásának kérdéséhez nyújtson egy lehetséges megközelítési módot.

Első ránézésre nem nyilvánvaló, hogyan lehet ezt a definíciót unimoduláris gráfokra általánosítani. A legegyszerűbb mód, hogy egy „befagyasztott" változatot definiálunk: majdnem minden ω esetén szeretnénk találni egy megfelelő $S_\omega \in \mathcal{S}(\omega)$ részgráfot. Egy $S \in \mathcal{S}(\omega)$ részgráf esetén jelölje

$$\phi_p^\omega(S) := \sum_{e \in \partial_E S} p\, \mathbb{P}_p^\omega \left(o \overset{\omega,p}{\underset{S}{\longleftrightarrow}} e^- \right)$$

azon élek várható számát S határán ω-ban, melyeknek a belső végpontjához (e^--hoz) vezet S-beli nyitott élekből álló út o-ból az ω-n vett p paraméterű perkolációs részgráfban. Legyen

$$\tilde{p}_c := \sup\left\{p : \mu\left(\left\{\omega : \exists S_\omega \in \mathcal{S}(\omega), \text{ melyre } \phi_p^\omega(S_\omega) < 1\right\}\right) = 1\right\}. \tag{4.2}$$

Az alábbi kritikus valószínűség egy másik természetes általánosítása $\tilde{p}_c$-nek, amely egy „átlagolt" változatnak tekinthető:

$$\tilde{p}_c^a := \sup\{p : \exists r, \text{ melyre } \mathbb{E}\left(\phi_p^\omega(B_\omega(o,r))\right) < 1\}.$$

4.2. Unimoduláris véletlen gráfok kritikus valószínűségeinek viszonya

Ebben a részben megvizsgáljuk a kritikus valószínűségek különböző általánosításai közötti kapcsolatot. Eredményeinket egy mondatban úgy lehetne összefoglalni, hogy $p_c = \tilde{p}_c$ mindig teljesül, de ezen felül szinte bármi lehetséges, kivéve ha a véletlen gráf nagyon erős egyenletességi feltételeket teljesít, egy ilyen feltétel lesz a később definiált "egyenletesen jó".

A pozitív eredményeink bemutatásával kezdjük, melyek a különböző kritikus valószínűségek egybeeséséről szólnak.

Az első tételünk nélkülözhetetlen eszköz a fejezet bizonyításaiban. A bizonyításának egyik irányához új ötleteket használtunk, míg a másik irány a [13] cikkben szereplő bizonyítás általánosítása unimoduláris véletlen gráfokra.

4.2. Tétel. *Ha G egy korlátos fokszámú unimoduláris véletlen gyökeres gráf, akkor $p_c(G) = \tilde{p}_c(G)$.*

Tranzitív gráfok esetén $\tilde{p}_c$ definíciójának egy nagy előnye, hogy egy véges környezet segítségével ellenőrizhetjük, hogy a p valószínűség $\tilde{p}_c$-nál kisebb-e. Ez a tulajdonság teszi természetessé az alábbi feltétel bevezetését, amely a tranzitív gráfok egy olyan jellemzőjét ragadja meg, amelyből a $\tilde{p}_c$ és $\tilde{p}_c^a$ kritikus valószínűségek közötti erős kapcsolat is következik.

4.3. Definíció. *Azt mondjuk, hogy egy korlátos fokszámú unimoduláris véletlen gráf* ***egyenletesen jó****, ha minden $p < p_c$ esetén van olyan pozitív egész $r(p)$, hogy $\mu_G(\{\omega : \exists S_\omega \subseteq B_\omega(o, r(p)), o \in S_\omega$, melyre $\phi_p^\omega(S_\omega) < 1\}) = 1$.*

Az egyenletesen jó unimoduláris gráfok egyik jellemzője, hogy $\phi_p(B_\omega(o, r))$ lecsengése r-ben exponenciális. Az alábbi lemma következményeként kapjuk, hogy egyenletesen jó gráfok esetén $p_c \leq \tilde{p}_c^a$.

4.4. Lemma. *Legyen G korlátos fokú unimoduláris véletlen gráf. G akkor és csak akkor egyenletesen jó, ha minden $p < p_c$ esetén léteznek $c = c(p) < 1$ és $R(p)$ konstansok, melyekre minden $r \geq R(p)$ esetén $\phi_p^\omega(B) \leq c^r$ majdnem minden ω-ra és minden véges $B \supseteq B_\omega(o, r)$ részhalmazra.*

4.5. Következmény. *Ha G egyenletesen jó unimoduláris gráf, akkor $p_c \leq \tilde{p}_c^a$.*

Ha egy egyenletesen jó unimoduláris gráf egyenletes szubexponenciális növekedésű, akkor a tranzitív esethez hasonlóan a p_c, p_T és p_T^a kritikus valószínűségek egybeesnek.

4.6. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az unimoduláris G gráf* ***egyenletes szubexponenciális növekedésű****, ha minden $c < 1$ és $\varepsilon > 0$ esetén van olyan R, hogy $\mathbb{P}_G(\omega : |B_\omega(o, r)|c^r < \varepsilon) = 1$ minden $r > R$ esetén.*

4.7. Következmény. *Ha G egyenletesen jó, egyenletes szubexponenciális növekedésű unimoduláris gráf, akkor $p_c = p_T = p_T^a$.*

$\tilde{p}_c = p_c$	korlátos fokú
$p_c \geq p_T \geq p_T^a$	mindig
$p_c = p_T^a$	korlátos fokú egyenletesen jó egyenletes szubexp. növekedéssel
$p_c > p_T$	polinomiális növekedésű példa
$p_T > p_T^a$	polinomiális növekedésű példa
$p_c \leq \tilde{p}_c^a$	korlátos fokú, egyenletesen jó
$p_c < \tilde{p}_c^a$	korlátos fokú, egyenletesen jó példa
$p_c > \tilde{p}_c^a$	nem egyenletesen jó példa

1. táblázat. A kritikus valószínűségek viszonya

Ahogy ennek a résznek az elején említettük, az egyenletesen jó feltétel nélkül a kritikus valószínűségek eltérhetnek egymástól. A legegyszerűbb példa a lombkoronás fa (2.2. Példa): ez a gráf nem egyenletesen jó, nem szubexponenciális növekedésű és $p_c = 1 > \frac{1}{\sqrt{2}} = p_T^a = \tilde{p}_c^a$. Konstruáltunk egy olyan példát is, ami mutatja, hogy a 4.5. Következményben szereplő egyenlőtlenség lehet éles egyenletesen jó gráfok esetén. Találtunk példákat olyan polinomiális növekedésű gráfokra is, amelyeknél szigorú egyenlőtlenség áll fenn a p_c, p_T és p_T^a kritikus valószínűségek között. Ezek azt is mutatják, hogy a 4.7. Következmény állítása nem marad igaz, ha valamelyik feltételét elhagyjuk. A kritikus valószínűségek kapcsolatáról szóló eredményeinket az 1. táblázat foglalja össze.

4.3. A kritikus valószínűség lokalitása

Ebben a részben Scramm sejtésének unimoduláris gráfokra történő általánosítását vizsgáljuk:

4.8. Kérdés. *Konvergálnak-e a $p_c(G_n)$ kritikus valószínűségek $p_c(G)$-hez, ha G_n unimoduláris véletlen gráfok sorozata, $G_n \to G$ lokálisan gyengén és $\sup p_c(G_n) < 1$?*

Először is megjegyezzük, hogy unimoduláris Galton–Watson fákra a 2.3. Állítás alapján a kritikus valószínűség lokalitása korlátos fokszám esetén teljesül, általában azonban nem. Ez mutatja, hogy unimoduláris véletlen gráfok vizsgálata esetén a fokszámok egyenletes korlátossága, melyet a továbbiakban mindig felteszünk, egy igen természetes feltétel a fenti kérdéssel kapcsolatban.

A 4.3.1. részben feltételeket adunk, amelyekből következik a $\lim p_c(G_n) = p_c(G)$ konvergencia. A 4.3.2. részben példákat adunk olyan unimoduláris véletlen gráfsorozatokra, melyekre $G_n \to G$, azonban $p_c(G) > \lim p_c(G_n)$ vagy $p_c(G) < \lim p_c(G_n) < 1$. Ezekből a példákból látszik, hogy a 4.8. Kérdésre sok esetben nemleges a válasz, azaz Schramm sejtése nem teljesül az unimoduláris véletlen gráfok osztályán, annak ellenére, hogy sok hasonló, eredetileg tranzitív gráfokra megfogalmazott állítás kiterjeszthető erre az osztályra.

4.3.1. Alulról félig folytonosság és folytonosság

A $\phi_p(S)$ mennyiség segítségével rövid bizonyítást lehet adni arra az állításra, hogy $p_c(G)$ alulról félig folytonos a tranzitív gráfok osztályán a lokális topológiával ellátva, azaz ebben az osztályban $\liminf p_c(G_n) \geq p_c(G)$ teljesül. Hasonlóan megmutatható, hogy ugyanez az egyenlőtlenség $\tilde{p}_c^a$-ra is fennáll az unimoduláris gráfok osztályában.

4.9. Állítás. *Legyenek G_n és G unimoduláris véletlen gráfok egyenletesen korlátos fokszámokkal. Ha G_n lokálisan gyengén tart G-hez, akkor $\liminf_{n\to\infty} \tilde{p}_c^a(G_n) \geq \tilde{p}_c^a(G)$.*

A 4.10. Állításban megmutatjuk, hogy a G és G_n gráfokra tett bizonyos megszorítások mellett teljesül a $\lim p_c(G_n) = p_c(G)$ konvergencia, azaz feltételeket adunk, amelyek mellett a 4.8. Kérdésre pozitív választ adhatunk.

4.10. Állítás. *Legyen G egyenletesen jó unimoduláris véletlen gráf. Legyen továbbá G_n unimoduláris véletlen gráfok sorozata, amely* egyenletesen ritka *módon lokálisan gyengén tart G-hez. Az egyenletesen ritka feltétel alatt azt értjük, hogy létezik egy olyan pozitív k, hogy minden n esetén a μ_G és μ_{G_n} mértékeknek van egy olyan ν_n csatolása, amelyre $G \subseteq G_n$ és van olyan végtelenhez tartó r_n sorozat, amelyre $|(E(G_n) \setminus E(G)) \cap B_{G_n}(o, r_n)| \leq k$ teljesül ν_n-majdnem biztosan. Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} p_c(G_n) = p_c(G).$$

A disszertációban bemutatunk egy példát, amelyre ez az állítás alkalmazható.

Az egyenletes szubexponenciális növekedésű unimoduláris fák speciális esetében a 4.10. Állításban a konvergenciára tett egyenletesen ritka feltétel gyengíthető. Az alábbi állítás

további példát ad egyenletesen jó unimoduláris gráfokra, az állítás konvergenciáról szóló részét pedig a 4.12. Állításban is felhasználjuk.

4.11. Állítás. *Ha G egy egyenletes szubexponenciális növekedésű, korlátos fokú unimoduláris véletlen fa, akkor G egyenletesen jó és mind az öt kritikus valószínűség 1.*

Ha G_n egyenletes szubexponenciális növekedésű, korlátos fokú unimoduláris véletlen gráfok sorozata, melyekben a legnagyobb kör hossza végtelenhez tart, akkor $p_c(G_n)$, $\tilde{p}_c(G_n)$ és $\tilde{p}_c^a(G_n)$ mindegyike 1-hez tart.

4.3.2. Ellenpéldák

A disszertációban részletesen leírunk több ellenpéldát a 4.8. Kérdésre, azaz olyan sorozatokat mutatunk, amelyekből következik, hogy Schramm sejtése nem teljesül általában unimoduláris gráfokra. A tézisfüzetben csak a példák legfontosabb jellemzőit írjuk le, a részleteket mellőzzük.

Az első példában G_n egy rögzített Cayley-gráf invariáns véletlen részgráfjainak sorozata, ami egyenletesen ritka módon tart a Cayley-gráf egy invariáns véletlen G részgráfjához. Ebben a példában $\lim p_c(G_n) < p_c(G)$ és a G limeszgráf nem egyenletesen jó.

A második példában a G_n gráfok $\mathbb{Z}^5$ invariáns véletlen részgráfjai, amelyek lokálisan gyengén tartanak a $\mathbb{Z}^2$ gráfhoz, és $\lim p_c(G_n) < p_c(\lim G_n)$. Ebben a példában a limeszgráf egyenletesen jó, de a konvergencia nem egyenletesen ritka. A disszertációban ennek a példának egy általánosabb változatát is leírjuk.

A harmadik példában mutatunk egy olyan G_n sorozatot, amelyre $p_c(\lim G_n) < \lim p_c(G_n) < 1$ teljesül. Mindegyik G_n gráf $\mathbb{Z}^2$-nek egy kvázi-tranzitív részgráfja, ami tekinthető $\mathbb{Z}^2$ egy véletlen invariáns részgráfjának is (így unimoduláris), és G_n tart $\mathbb{Z}^2$-hez. Ebben a példában $\lim G_n$ és mindegyik G_n teljesíti a 4.5. és 4.7. Következmények feltételeit, így $p_c = p_T = p_T^a$, továbbá $\tilde{p}_c^a(G) < \lim \tilde{p}_c^a(G_n) < 1$. Ez mutatja, hogy a kritikus valószínűségek egyik általánosítására sem teljesül Schramm sejtése az unimoduláris véletlen gráfok osztályában általában. Ez a példa azt is mutatja, hogy az alulról félig folytonosságot jelentő egyenlőtlenség a 4.9. Állításban éles is lehet, akár abban az esetben is, ha a G_n gráfok $\mathbb{Z}^2$ invariáns véletlen részgráfjai, melyek $\mathbb{Z}^2$-hez tartanak.

4.4. Az 1 költségű tranzitív gráfokról

Pozitív eredményeink egyik következménye, hogy ha G egy szubexponenciális növekedésű tranzitív gráf, akkor az invariáns bi-Lipschitz tulajdonságú feszítő részgráfjainak van olyan G_n sorozata, melyre $p_c(G_n) \to 1$.

4.12. Állítás. *Ha G egy tranzitív, amenábilis gráf, akkor az invariáns véletlen részgráfjainak van olyan G_n sorozata, melyre teljesül az alábbi: mindegyik G_k bi-Lipschitz (így összefüggő) feszítő részgráfja G-nek, G_k legnagyobb körének hossza végtelenhez tart, és G_k lokálisan gyengén tart egy $\mathcal{T}$ invariáns véletlen feszítő fához, melynek legfeljebb két vége van.*

Ha G egy szubexponenciális növekedésű unimoduláris tranzitív gráf, akkor $p_c(G_k) \to 1$.

Ez az állítás a 4.13. Lemma alapján tekinthető azon egyszerű tény erősítésének, hogy a szubexponenciális növekedésű csoportok költsége 1. Egy $\mathbb{G}$ **csoport költségét** úgy definiáljuk, hogy a szuprémumát vesszük az invariáns összefüggő feszítő gráfjaiban tekintett várható fokszám felének. Egy Γ **tranzitív gráf költsége** hasonlóan definiálható, ekkor $\mathbb{G}$-invariáns, összefüggő véletlen feszítő *rész*gráfok felett veszünk szuprémumot, ahol $\mathbb{G} \leq Aut(\Gamma)$ egy (általában hallgatólagosan rögzített) csúcs-tranzitív részcsoportja a gráf automorfizmus-csoportjának.

4.13. Lemma. *Ha Γ a $\mathbb{G}$ csoport egy Cayley-gráfja, és Γ részgráfjainak létezik olyan $\mathbb{G}$-invariáns, összefüggő, feszítő G_k részgráfokból álló sorozata, melyekre $p_c(G_k) \to 1$, akkor a Γ gráf költsége, és így $\mathbb{G}$ költsége is 1.*

Nem tudjuk, hogy a lemma feltétele ekvivalens-e azzal, hogy a költség 1, azaz hogy a 4.13. Lemma megfordítása teljesül-e.

Egy $\mathcal{T}$ összefüggő, $p_c(\mathcal{T}) = 1$ egyenlőtlenséget teljesítő, $\mathbb{G}$-invariáns feszítő gráf létezése ekvivalens a $\mathbb{G}$ csoport amenábilitásával, amiből pedig következik, hogy $\mathbb{G}$ költsége 1. Azonban a disszertációban leírunk egy példát olyan invariáns, bi-Lipschitz $G_k \subset \mathbb{T}_3 \times \mathbb{Z}$ részgráfok sorozatára, ami mutatja, hogy a $p_c(G_k) \to 1$ feltételből nem következik az amenábilitás.

Hivatkozások

[1] Aldous, D., Lyons, Russell (2007) Processes on unimodular random networks, *Electron. J. Probab.*, Vol 12, no. 54, 1454–1508

[2] Aldous D., Steele J.M. (2004) The Objective Method: Probabilistic Combinatorial Optimization and Local Weak Convergence. In: Kesten H. (eds) Probability on Discrete Structures. Encyclopaedia of Mathematical Sciences (Probability Theory), vol 110. Springer, Berlin, Heidelberg

[3] Alon, N., Spencer, J. H. (2000) The Probabilistic Method, 2nd edition, Wiley-Interscience

[4] Barabási, A-L., Albert, R. (1999) Emergence of scaling in random networks, *Science* **473**, 509–512.

[5] Benjamini, I., Nachmias, A., and Peres, Y. (2011) Is the critical percolation probability local? *Probab. Theory Relat. Fields* Vol. 149, 261–269

[6] Benjamini, I., Schramm, O. (2001) Recurrence of distributional limits of finite planar graphs, *Electron. J. Probab.* Vol. 6, paper no. 23, 13 pp. (electronic).

[7] Berger, N., Borgs, C., Chayes, J. T., Saberi, A.: Asymptotic behavior and distributional limits of preferential attachment graphs, *The Annals of Probability* Vol. 42, No. 1, 1–40. (2014)

[8] Beringer, D., Pete, G., Timár, Á. (2017) On percolation critical probabilities and unimodular random graphs. Electron. J. Probab. 22 , paper no. 106, 26 pp.

[9] Beringer, D., Timár, Á. (2019) Controllability, matching ratio and graph convergence, J Stat Phys 174: 1080.

[10] Bollobás, B., Riordan, O. (2004) The diameter of a scale-free random graph, *Combinatorica* **24**, 5–34.

[11] Bordenave, Ch. (2016) Lecture notes on random graphs and probabilistic combinatorial optimalization, https://www.math.univ-toulouse.fr/ bordenave/coursRG.pdf, cited 15 Sept 2018

[12] Bordenave, Ch., Lelarge, M., Salez, J. (2013) Matchings on infinite graphs, *Probability Theory and Related Fields*, Vol. 157, 183–208

[13] Duminil-Copin, H. and Tassion, V. (2016) A new proof of the sharpness of the phase transition for Bernoulli percolation and the Ising model, *Comm. Math. Phys.* Vol. 343, no. 2, 725–745.

[14] Elek, G. (2010) Parameter testing in bounded degree graphs of subexponential growth, *Random Structures & Algorithms* Vol. 37, 248–270

[15] Elek, G., Lippner, G. (2010) Borel oracles. An analytical approach to constant-time algorithms. *Proc. Amer. Math. Soc.* 138, no. 8, 2939–2947.

[16] Liu, Y-Y., Slotine, J-J., Barabási, A-L. (2011) Controllability of complex networks, *Nature* Vol. 473, 167–173.