

Doktori disszertáció tézisei

**Globális optimalizáló módszerek tervezése és fejlesztése  
alkalmazásokkal**

*Balázs L. Lévai*

*Témavezető  
Dr. Balázs Bánhelyi  
egyetemi docens*

Informatika Doktori Iskola

Számítógépes Optimalizálás Tanszék

Informatikai Intézet

Szegedi Tudományegyetem

Szeged, 2019

# Bevezetés

A globális optimalizálás széles szakterület. A célfüggvények és keresési terek tulajdonságai alapján egyes optimalizáló metódusok jobban illeszkednek egy probléma megoldásához, mint mások, pusztán a megfelelő algoritmus vagy elméleti megközelítés kiválasztása egy probléma megoldásához is kihívást jelenthet. Az optimalizáló algoritmusok különböző osztályokba sorolhatók tulajdonságaik alapján. Mi a véletlen változók alkalmazása szerint kategorizáltuk őket három fő osztályba, a determinisztikus, sztochasztikus és hibrid algoritmusok osztályaiba.

Disszertációmban globális optimalizálási feladatok megoldásainak tervezését és fejlesztését tárgyaltam, hogy bemutassam a fentebb említett három fő megközelítés alkalmazását, alkalmanként intervallum aritmetikával kombinálva, amikor szükséges volt a matematikai értelemben vett szigor és pontosság. Mindezen felül egy létező optimalizáló algoritmus továbbfejlesztését is ismertettem.

## Körfedés rögzített középpontokkal

Célunk tetszőleges poligonok körökkel történő optimális fedésének meghatározása volt úgy, hogy a körök középpontjai rögzítettek, csak a sugaraik változtathatóak. Ehhez numerikusan megbízható módszereket használtunk a számítógépen ábrázolható számokkal az intervallum aritmetikára támaszkodva. Az optimalitás ebben a kontextusban azt jelenti, hogy a körök sugarainak négyzetösszege minimális. Formálisan a következő célfüggvényt minimalizáljuk

$$f(r_1, r_2, \dots, r_n) = \sum_{i=1}^n r_i^2,$$

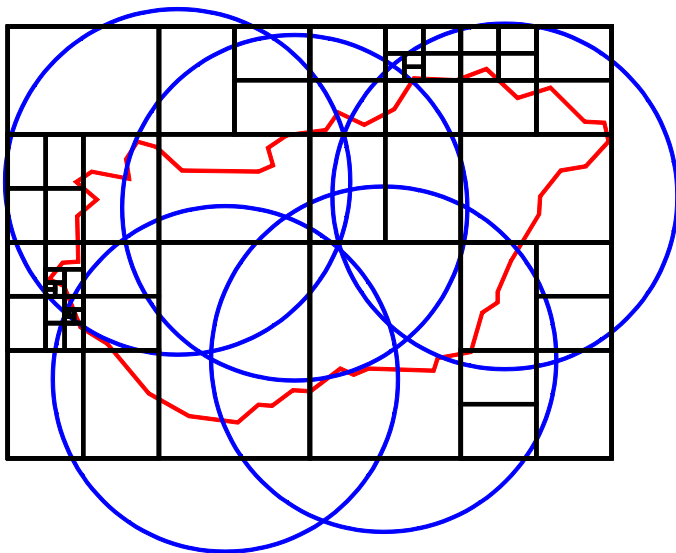
ahol  $r_1, r_2, \dots, r_n$  jelöli a sugarakat  $n$  darab körrel történő fedés esetén.

Egy ilyen típusú körfedési probléma megoldása felhasználható például a telekommunikációs hálózatokban lévő földfelszíni sugárzású adótornyok szükséges teljesítményének optimalizálásához.

## Fedés ellenőrzés

Először, bevezettünk egy algoritmust annak ellenőrzésére, hogy egy adott kör konfiguráció lefed-e egy adott poligont. Ezt a feladatot egy

branch-and-bound algoritmussal közelítettük meg, amely szisztematikusan particionálja a poligont befoglaló intervallumot kisebb részintervallumokká mindaddig, amíg minden részintervallumot legalább egy kör nem fed, vagy találunk egy olyan részintervallumot, amely kisebb, mint egy előre meghatározott hibahatár, és a fedése nem meghatározható, illusztrációként tekintjük meg az 1. ábrát.

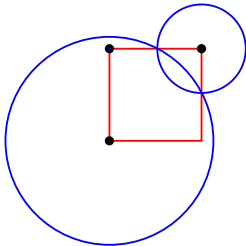


Ábra 1: Magyarország területének fedése körök egy adott konfigurációjával az algoritmus által generált végső intervallum particionálással együtt.

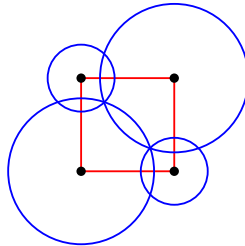
Ha az előre megadható hibahatárt nullára állítjuk, az algoritmus garantáltan terminál és felismeri a teljes fedéseket, azonban nem képes leállni, ha a fedés csak részleges.

## Konfiguráció optimalizálás

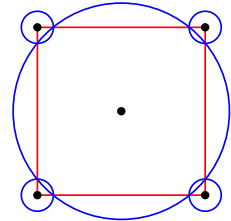
Az optimalizáló eljárásunk szintén egy branch-and-bound algoritmus, ami bejárja a megengedett kör konfigurációk keresési terét, amíg nem egy optimális teljes fedést. Ha a keresési tér megfelel pár könnyedén kielégíthető feltételnek, az algoritmus garantáltan terminál és visszaadja kör sugarak egy olyan konfigurációját, amelyek fedik a poligont, és amelyekre a célfüggvény értéke egy tetszőleges, de rögzített hibahatáron belül lesz bármely optimumhoz viszonyítva. A számításokban intervallum aritmetikát használtunk így az előállított eredmények numerikus hibáktól mentesek, az algoritmus futási eredményeire láthatunk példákat a 2 ábrán.



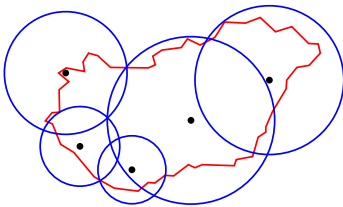
(a) Optimális fedés három csúsból.



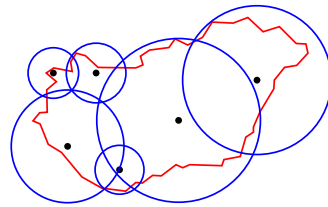
(b) Optimális fedés minden csúsból.



(c) Optimális fedés a csúcsokból és a középpontból.



(d) Optimális fedés 5 körrel.

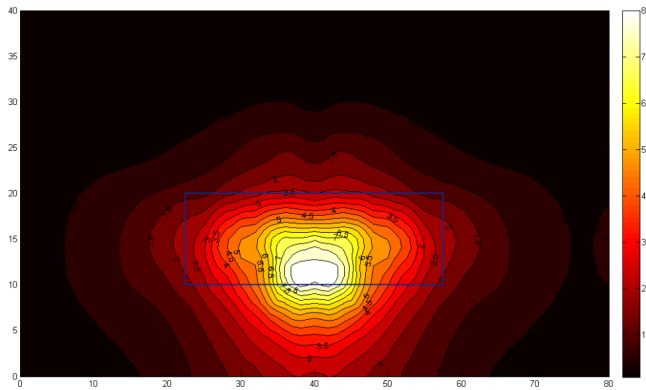


(e) Optimális fedés 6 körrel.

Ábra 2: Fedési példák az egység négyzetre és Magyarország területének poligon közelítésére. A fekete pontok a kör középpontokat jelölik. Az optimalizálás hibahatára 1% volt.

# LED technológiájú utcai lámpák tervezése

Egy gyakorlatias kérdésre kerestük a választ, hogyan tervezzünk utcai lámpákat a LED technológiát felhasználva úgy, hogy a lámpák, jobban világítsanak, mint az izzós vagy más LED alapú társaik, amelyek már elérhetőek a piacon. Mivel a megvilágítandó felület és egy LED lámpa fénykúpjának metszete egy ellipszis, továbbá a különböző fényforrások fényerőssége egy adott ponton egyszerűen összeadódik, értelmezhetjük ezt a tervezési problémát egy speciális fedési feladatként is, amikor egy téglalap alakú felületet akarunk fedni ellipszisekkel úgy, hogy az ellipszisek egymást is átfedhetik. Ez egy többcélú, magas dimenziós számú, globális optimalizálási feladat. Megoldásunkat egy tervező eszköz részeként készítettük el a Wemont Kft. számára, amely később egy LED technológiájú utcai lámpák készítéséről szóló nemzetközileg bejegyzett szabadalom [8] részévé vált.



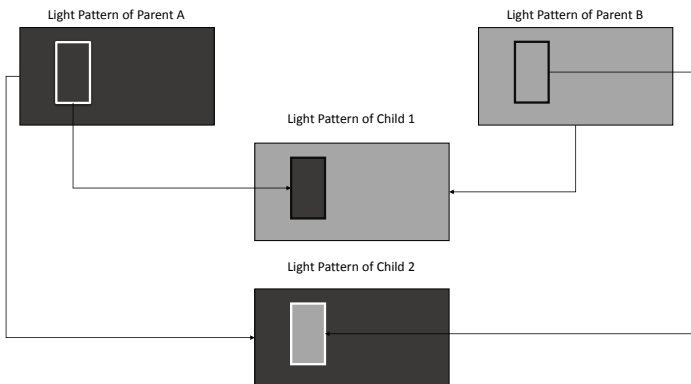
Ábra 3: Egy átlagos, izzóval működő utcai lámpa megvilágítási képe. A téglalap reprezentálja a megvilágítandó utca felületet. A színek a különböző LUX-ban mért illuminancia szinteket jelölik. A hasonló utcai lámpák fénye nem kontrollálható annyira, hogy a csak a szükséges területek világítsák meg és minden mást pedig hagyjanak sötétben.

## Megvilágítási kép számítás

A megvilágítási képek kiértékeléséhez képesnek kellett lennünk meghatározni azokat. Kifejlesztettünk egy egyedi rácsháló alapú megvilágítási kép számítási módszert, ami a lámpa és az utca szakasz geometriája, illetve a lámpában alkalmazott LED-ek világítási karakterisztikája alapján határozza meg a megvilágítási képet. Az algoritmust kihasználja az adott feladatok esetleges szimmetriáit, hogy csökkentse a kezelendő rácsháló pontok számát.

## Genetikus algoritmus

A sztochasztikus probléma megközelítést választottuk. Készítettünk egy genetikus algoritmust, amelynek esszenciája egy geometrikus koncepciójú keresztező operátor volt, amely képes a parciálisan jó megvilágítási képet adó részeket kombinálni a különböző lámpa tervekben. Ehhez először véletlenszerűen generálunk egy téglalapot a megvilágítandó utca felületen, majd meghatározzuk mely LED-ek irányulnak a téglalapba és azon kívülre a ős lámpa tervekben. A leszármazott lámpa tervekben a LED-ek az egyik ős téglalapba mutató LED-jei illetve a másik ős téglalapon kívülre mutató LED-jeiből állnak össze, így képesek vagyunk megvilágítási kép részek alapján és nem lámpa terv részek alapján kombinálni, melynek illusztrációját a 4. ábrán láthatjuk.



Ábra 4: Két lámpa terv keresztezése a megvilágítási képeik alapján.

Egy konfigurálható fitness függvényt használtunk, ami állíthatóvá

tette a különböző követelmények relatív fontosságát. A megoldásunk legtöbb számítást igénylő része egy egyedi rácsháló alapú megvilágítási kép számító eljárás volt, amely a hatékonyság érdekében figyelembe vette a feladatban lévő esetleges szimmetriákat, hogy csökkentse azon rácsháló pontok számát, amelyekre a lámpa fényerőssége meghatározandó.

Egy konfigurálható fitness függvényt használtunk, ami állíthatóvá tette a különböző követelmények relatív fontosságát, mint a felhasznált LED-ek költsége és energiafogyasztása, illetve lámpa által generált megvilágítási kép minőségét leíró különböző statisztikák.



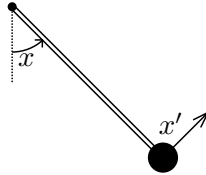
Ábra 5: A genetikus algoritmussal tervezett utcai lámpák csak a kívánt közterületet világítják meg. A megvilágítási kép fénye szinte tökéletesen nullára csökken az szélek mentén. Forrás: <http://www.wemont.hu/activity/led-es-kozvilagitas>, elérve 2017 május 19.

Mielőtt a partner cég gyártásra szánt terveket készített volna, szintetikus megvilágítási feladatokon teszteltük a megoldásunkat és az algoritmusunkkal készített tervek jelentősen jobb minőségűek lettek továbbá a teljes tervezési folyamat a feladat kezdőparaméter beállításaiával együtt a negyedére rövidült összehasonlítva a partner mérnök munkatársainak eredményével és a tervezéshez szükséges idővel. A 5. ábrán

az algoritmusunkkal tervezett utcai lámpák láthatóak.

## Kaotikus trajektóriák keresése

A kényszerrezgéses fékezett ingát tanulmányoztuk, amely egy súlytalan, szilárd rúdra felfüggesztett tömeg pontból áll, a rúd másik végpontja rögzített, ahogy az 6. ábrán látható.



Ábra 6: A kényszerrezgéses fékezett inga illusztrációja.  $x$  jelöli az inga szögét,  $x'$  pedig a szögsebességet.

Az ingára a gravitáció, a fékező súrlódás, és egy periodikus külső erő van hatással. Ez a rendszer leírható Poincaré képekkel, egy differenciál egyenletrendszerrel

$$\begin{aligned}x_1'(t) &= x_2(t), \\x_2'(t) &= \sin(x_1(t)) - 0, 1x_2(t) + \cos(t),\end{aligned}$$

ahol  $x_1$  jelöli a szöveget,  $x_2$  pedig a szögsebességet.

Formálisan az inga egy trajektóriája a fenti egyenletrendszer mindazon megoldásaiból áll, amelyek megfelelnek az  $x_1(0) = \hat{x}_1$  és  $x_2(0) = \hat{x}_2$  perem feltételeknek, ahol  $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$  az inga kezdőállapota.

Ha az inga trajektóriáit  $2\pi$  időintervallumokra osztva tanulmányozzuk, akkor az úgynevezett kaotikus trajektóriák azok a mindkét irányban végtelen sorozatok lesznek, amelyeknek elemei az ezen idő intervallumok alatt végrehajtott megengedett mozgástípusok, az inga az alsó egyensúlyi ponton az óramutató járása szerint áthalad pontosan egyszer, az óramutató járásával ellentétesen áthalad pontosan egyszer, vagy egyszer sem halad át rajta.

Készítettünk egy módszert az inga azon kezdőállapot régióinak megtalálására, amelyekből indítva a rendszer az előbbi mozgásokból álló előre rögzített sorozatot hajt végre.



## Kereső algoritmus

Terveztünk egy célfüggvényt, ami képes leírni az egyes trajektóriák eltérésének mértékét az előírt mozgásoktól egy Hausdorff távolságon alapuló távolság koncepció segítségével. A GLOBAL klaszterezésen alapuló sztochasztikus algoritmust felhasználva optimalizáltuk ezt a célfüggvényt, hogy kezdő állapotokat lokalizáljunk. Az eredmények numerikus megbízhatósága végett intervallum aritmetikát használtunk. Elméleti síkon a megoldásunk képes tetszőleges hosszúságú rögzített mozgás sorozathoz kezdő állapotokat találni, de a gyakorlatban e sorozatok kezelhető hosszúságát limitálja a számábrázolás implementációjának a pontossága.

## Eredmények

Képesek voltunk trajektória régiókat találni az összes három hosszú mozgás sorozat előíráshoz és néhány további sorozathoz is, amelyeket abból a célból vizsgáltunk, hogy bemutassuk a módszerünk képességeit. A 1. táblázat tartalmaz eredményeinkből egy részletet.

Prescribed motions	Example initial state	Found trajectories	Function evaluations	Run time
$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2 = \oplus\oplus\oplus$	(3.5145566; 1.1854134)	3	2 305	666
$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2 = \oplus\oplus\otimes$	(3.541253; 1.1780008)	1	3 356	965
$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2 = \oplus\oplus\ominus$	(4.1354217; 1.1146838)	9	1 489	431
$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2 = \oplus\otimes\oplus$	(3.4500625; 1.2046848)	1	3 057	862
$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2 = \oplus\otimes\otimes$	(3.6355882; 1.1519576)	1	7 229	2 089
$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2 = \oplus\otimes\ominus$	(4.1873482; 1.1159454)	2	2 477	723
$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2 = \oplus\ominus\oplus$	(4.3271325; 1.1040739)	3	2 968	858
$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2 = \oplus\ominus\otimes$	(3.9656183; 1.0787189)	2	3 212	931
$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2 = \oplus\ominus\ominus$	(3.7628911; 1.096835)	7	1 863	540

Table 1: Az optimalizálás eredménye három hosszú mozgás sorozatokra.  $\varepsilon_i$  jelöli a  $i^{\text{th}}$   $2\pi$  hosszú időintervallumot,  $\ominus$ ,  $\oplus$ , és  $\otimes$  reprezentálják a három mozgástípust, az alsó egyensúlyi állapoton történő áthaladást az óramutató járása szerint, azzal ellentétesen, vagy az áthaladás elkerülését.

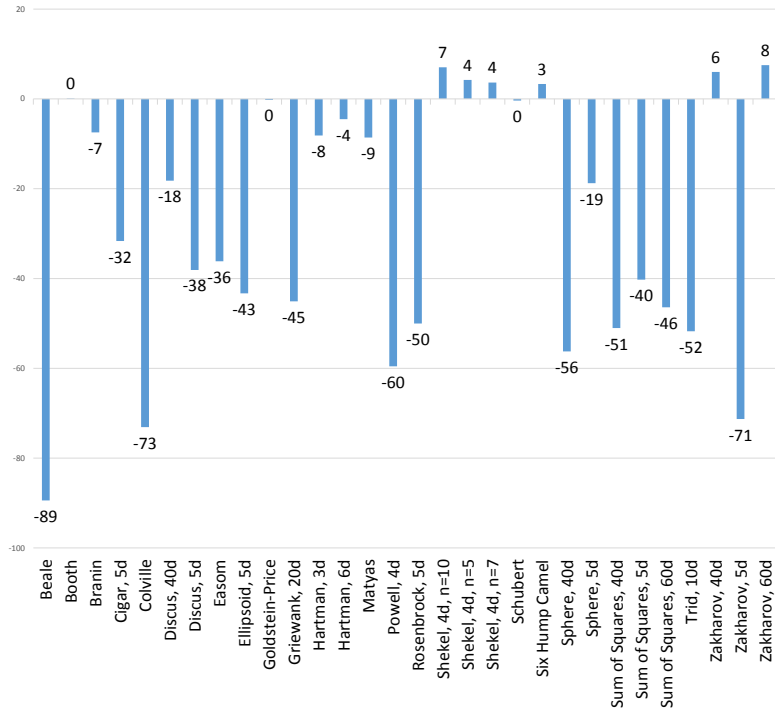
# Egy sztochasztikus globális optimalizáló eljárás továbbfejlesztése

Újraimplementáltuk és algoritmikusan továbbfejlesztettük a GLOBAL algoritmust, egy sztochasztikus optimalizáló eljárást, amelynek célja a nem lineáris, korlátos optimalizálási problémák megoldása. Ez egy sokoldalú eszköz, ami több összehasonlításban is versenyképesnek mutatkozott, például a következő cikkben [5]. Az algoritmus véletlenszerűen generál pontokat, amelyekből lokális kereséseket indít úgy, hogy próbálja elkerülni, hogy két keresés ugyanahhoz az optimum ponthoz vezessen. Ehhez a GLOBAL a már megtalált lokális optimumokhoz klaszterezi a generált pontokat, és csak azokból a pontokból indít lokális kereséseket, amelyeket nem tudott egyetlen létező klaszterhez sem rendelni.

## Algorithmic improvements

A fejlesztéseink mögött meghúzódó általános elképzelés az, hogy pontok összehasonlítása számítás igény szempontjából kevésbé költséges művelet, mint célfüggvény kiértékelése, így egy alaposabb klaszterezés csökkentheti az futtatott lokális keresések számát, amin keresztül a célfüggvény kiértékelések száma is redukálódik, így a futásidő is csökken a teljes optimalizálásra nézve.

Megtartottuk a korábban használt single-linkage klaszterezési megközelítést, de úgy módosítottuk, hogy rekurzív legyen. Minden iterációban, az eredeti algoritmus minden klaszter nélküli pontot csak egyszer próbált meg hozzáadni egy-egy klaszterhez. A módosításaink hatására a GLOBAL újrapróbálkozik a klaszter nélküli pontokkal valahányszor egy klaszter bővült az előző klaszterezési kísérletsorozat alatt, mivel a pontok csatlakozása egy klaszterhez a pont klaszter elemekkel történő egyenkénti összehasonlításán múlik. Ezen felül, a továbbfejlesztett GLOBAL klaszterezni a próbálja a klaszter nélküli pontokat akkor is, ha véget ért egy lokális keresés, mivel az is garantáltan egy meglévő klaszter bővülését, vagy egy új klaszter létrehozását eredményezni.



Ábra 7: A célfüggvény kiértékelések átlagos számának százalékban kifejezett relatív változása az eredeti és a továbbfejlesztett GLOBAL algoritmust összehasonlítva.

E módosításon felül megtartottuk az összes klaszterezési információt az optimalizálás teljes idejére, amelyet korábban részlegesen eldobott az algoritmus minden iterációban. Általában a rosszabb célfüggvény értékkel rendelkező pontok távolabb helyezkednek a lokális optimumoktól, amelyek afféle klaszter középpontokként szolgálnak. A módosítás előtt a klaszterek egyre sűrűbbé váltak az iterációk során, mivel a középpontokhoz közelebb eső pontokat vitte át az algoritmus egyik iterációból a másikba, és új klaszterek jelenhettek meg a korábban eldobott pontok helyén. Ez a keresési tér ugyanazon régióinak többszörös bejárását eredményezte, ami redundáns és így nem hatékony.

Összehasonlítottuk a módosított GLOBAL algoritmust az eredetivel számos optimalizálási teszt függvényen és jelentős előrelépést ta-

pasztaltunk a globális optimum megtalálásához szükséges célfüggvény kiértékelések átlagos számában, mely eredményeket az 7. ábra foglalja össze.

## Újratervezett implementáció

Elkészítettük a továbbfejlesztett GLOBAL új JAVA nyelvű modularizált implementációját, amely megkönnyíti nem csak a lokális keresőeljárás, hanem a klaszterező eljárás személyre szabását is. Alapbeállításként az implementáció az új single-linkage klaszterező algoritmust használja illetve a lokális keresésekhez az UNIRANDI metódust, egy vonal menti kereséseket végrehajtó véletlen séta módszert.

## A kontribúciók összefoglalása

A tézis pontjaimat és a hozzájuk tartozó publikációkat négy csoportba gyűjtve összegzem.

1. Kifejlesztettem egy determinisztikus megoldást intervallum aritmetikát használva a numerikus eredmények megbízhatóságának biztosítás érdekében tetszőleges poligon körökkel történő optimális fedésének meghatározására úgy, hogy a körök középpontjai rögzítettek, csak a sugaraik változtathatóak. Az optimalitás ebben a kontextusban azt jelenti, hogy a körök sugarainak négyzetösszege minimális. A megoldást és a numerikus eredményeket a következő cikkben kerültek publikálásra [4].
  - (a) Először készítettem egy intervallum aritmetikán alapuló branch-and-bound algoritmust annak ellenőrzésére, hogy adott pontosságon belül nyitott körök adott középpontokból és sugarakból álló konfigurációja teljesen fed-e egy poligont. Bemutattam az algoritmus elméleti elemzését, amelyben bizonyítottam annak helyességét, amelyet kiegészítettem a működés illusztrált bemutatásával.
  - (b) Készítettem egy második branch-and-bound algoritmust szintén az intervallum aritmetikára támaszkodva, hogy olyan kör sugár konfigurációk megtalálására, amelyek adott de tetszőleges pontosságon belül optimálisan fednek egy poligont. Bebizonyítottam az algoritmus elméleti helyességét, és részt

vettem a numerikus tesztek elkészítésében illetve analizésében.

2. Felépítettem egy sztochasztikus megoldást LED technológiájú utcai lámpák tervezésére, hogy jobb megvilágítási képpel, energia fogyasztással, és gyártási költséggel rendelkező lámpákat tervezhessünk más utcai lámpákhoz képest. A megoldás a következő könyvben került publikálásra [7]. Egy hasonlóan megközelített szintén magas komplexitású és nagy kihívást jelentő tervezési feladat megoldását mutatja be a cikk [3], amelyben egy automatikus hibadetektáló rendszer fejlesztésében vettem részt.
  - (a) Készítettem egy algoritmust a LED-del világító utcai lámpák megvilágítási képének meghatározására, amit a cél utca szakaszra generált két dimenziós rácsháló pontjaiban kiszámított illuminancia értékeként kapunk meg. A kalkuláció figyelembe veszi a szomszédos lámpák hatását és kihasználja a megvilágítási kép esetleges szimmetriáit, hogy csak a minimálisan szükséges rácspontokat kezelje a teljes megvilágítási kép előállításához. Az algoritmust CPU-ra és GPU-ra is implementáltam.
  - (b) Felépítettem egy genetikus algoritmust az utcai lámpák adott megvilágítási feladathoz történő optimalizációjára. A fitness függvény összevontan értékelté lámpa tervek költségét, energia felhasználását, és megvilágítási képének minőségét. Az algoritmus lelke egy geometrikus keresztező művelet volt, ami a megvilágítási képek alapján kombinálta a terveket. Implementáltam az algoritmust és segítettem a numerikus eredmények elkészítésében szintetikus teszt feladatokon.
3. A kényszerrezgéses fékezett inga kaotikus trajektóriáinak tanulmányozásához kifejlesztettem egy numerikusan megbízható módszert, ami képes e rendszer azon kezdő állapotainak a megtalálására, amelyekből meghatározott mozgás típusok egy tetszőlegesen hosszú, de rögzített elemszámú sorozatát hajtja végre az inga. Az módszer és a numerikus eredmények a következő cikkben kerültek publikálásra [6]-
  - (a) Terveztem majd implementáltam egy célfüggvényt, ami ki fejezi egy trajektória eltérésének mértékét egy adott előírt mozgás sorozattól. A függvény trajektória és a mozgásokhoz

tartózó állapot régiók intervallumos befoglalását hasonlítja össze.

- (b) Részt vettem a célfüggvény GLOBAL sztochasztikus optimalizáló algoritmussal történő integrációjában, amelynek eredménye a módszer, ami képes rögzített hosszúságú mozgás sorozat előírásokhoz megtalálni az kényszerrezgéses fékezett inga kezdőállapotait. Elméleti síkon ezek a sorozatok tetszőleges hosszúságúak lehetnek, de a gyakorlatban a kezelhető hosszúság függ az implementációtól. Részt vettem a numerikus eredmények előállításában, és számos előírt mozgás sorozathoz találtam kezdő állapot régiókat.
4. A GLOBAL sztochasztikus optimalizáló algoritmust fejlesztettem tovább majd készítettem egy új implementációt, amely már tartalmazta a módosításaimat. A továbbfejlesztett algoritmus és annak összehasonlítása az előző implementációval a következő könyvben [1] és cikkben [2] lett publikálva.
- (a) Módosítottam az eredeti single-linkage klaszterező stratégiát, hogy hatékonyabban használja fel a rendelkezésre álló klaszter információt az olyan lokális keresések megelőzésére érdekében, amelyek valószínűleg már ismert lokális optimumokat találnának meg. A GLOBAL klaszter információ kezelését is módosítottam, hogy ne dobja el annak egy részét minden iterációban, ezzel csökkentve a további felesleges célfüggvény kiértékelések számát a megnövekedett memória használat árán. Részt vettem a módosított és az eredeti algoritmus numerikus összehasonlításában.
  - (b) Elkészítettem a továbbfejlesztett GLOBAL moduláris implementációját JAVA nyelven, ami a klaszterezési algoritmus feladatra szabhatóságát is biztosítja a lokális kereső eljárás állíthatósága mellett.

## Irodalomjegyzék

- [1] Bánhelyi, B., Csendes, T., Lévai, B., L., Pál, L., Zombori, D.: The GLOBAL Optimization Algorithm, Newly Updated with Java Implementation and Parallelization. Springer Briefs in Optimization, Springer, 2018.

- [2] Bánhelyi, B., Csendes, T., Lévai, B., L., Zombori, D., Pál, L.: Improved versions of the GLOBAL optimization algorithm and the globalJ modularized toolbox. AIP Conference Proceedings, 2070(1), 2019.
- [3] Bánhelyi, B., Lévai, B., L.: Automatic failure detection and monitoring of ventilation and cooling systems. Proceedings of the 9<sup>th</sup> International Conference on Applied Informatics, Eger, 1:27–32, 2014.
- [4] Bánhelyi, B., Palatinus, E., Lévai, B., L.: Optimal circle covering problems and their applications. Central European Journal of Operations Research, 23:815–832, 2015.
- [5] Csendes, T., Pál, L., Sendin, J., O., H., Banga, J., R.: The GLOBAL Optimization Method Revisited. Optimization Letters, 2:445–454, 2008.
- [6] Lévai, B., L., Bánhelyi B.: An optimization technique for verified location of trajectories with prescribed geometrical behaviour in the chaotic forced damped pendulum. Central European Journal of Operations Research, 41:757–767, 2013.
- [7] Lévai, B., L., Bánhelyi, B.: Automatic Design of Optimal LED Street Lights. Optimized Packings with Applications, Springer Optimization and Its Applications, vol. 105, Springer, 2015.
- [8] Radnai T., Vőneki R.: Method for constructing a lighting device with discrete light sources and thus obtained lighting device. World Intellectual Property Organization, International Publication Number, WO 2011/154756 A2, 2011.