Konvex és diszkrét geometriai problémák a gömbön

Doktori értekezés tézisei

Zarnócz Tamás

Témavezető:

Dr. Fodor Ferenc

Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézet
Matematika és Számítástudományok Doktori Iskola

Szeged

2019.

1. Bevezető

A disszertációban és a tézisfüzetben taglalt problémák a konvex és diszkrét geometria témaköréből származnak. Eredményeink három főbb kategóriába oszthatók, melyek a következők: Egy ponton átmenő egyenesek páronkénti szögeinek maximalizálása, egységgömb fedése zónákkal, illetve izotróp mérték szerinti véletlen paralelotópok térfogata.

A disszertáció a szerző következő munkáin alapszik:

[FNZ18] F. Fodor, M. Naszódi, and T. Zarnócz, *On the volume bound in the Dvoretzky–Rogers lemma*, Pacific J. Math. (2018), közlésre elfogadva. arXiv:1804.03444.

[BFVZ17] A. Bezdek, F. Fodor, V. Vígh, and T. Zarnócz, *On the multiplicity of arrangements of equal zones on the sphere* (2017), közlésre benyújtva. arXiv:1705.02172.

[FVZ16a] F. Fodor, V. Vígh, and T. Zarnócz, *Covering the sphere by equal zones*, Acta Math. Hungar. **149** (2016), no. 2, 478–489, DOI 10.1007/s10474-016-0613-2. MR3518649

[FVZ16b] F. Fodor, V. Vígh, and T. Zarnócz, *On the angle sum of lines*, Arch. Math. (Basel) **106** (2016), no. 1, 91–100, DOI 10.1007/s00013-015-0847-1. MR3451371

Megjegyezzük, hogy a fenti cikkek közül kettő [FVZ16a, FVZ16b] megjelent, egy közlésre elfogadott [FNZ18] egy pedig közlésre elfogadott [BFVZ17].

2. Egyenesek szögösszegei

A disszertáció ezen fejezetének alapja a [FVZ16b] cikk.

2.1. Bevezető

Tekintsünk n egyenest a d-dimenziós $\mathbb{R}^d$ euklideszi térben, melyek mindegyike átmegy az o origón. Mi a maximális $S(n,d)$-vel jelölt összege az egyenespárok által meghatározott nemtompa szögeknek?

A kérdést Fejes Tóth László tette fel [FT59] 1959-ben 3 dimenzióra megfogalmazva. Sejtése szerint az optimális konfigurációban egy ortonormált bázis elemeit az egyenesek irányvektorainak használjuk úgy, hogy minden bázisvektorhoz $\lfloor n/d \rfloor$ vagy $\lfloor n/d \rfloor+1$ vektor tartozik. Pontosabban, ha $n = k \cdot d + m$ $(1 \leq m < d)$ az egyenesek száma, $x_1, \ldots, x_d$ pedig egy derékszögű koordináta rendszer tengelyei $\mathbb{R}^d$-ben, akkor az optimálisnak sejtett konfigurációban $k+1$-szer vesszük az $x_1, \ldots, x_m$ egyeneseket, és k-szor az $x_{m+1}, \ldots, x_d$-ket. Ekkor a szögek összege

$$\left[\binom{d}{2}k^2 + mk(d-1) + \binom{m}{2}\right]\frac{\pi}{2}.$$

Sejtését be is bizonyította 3 dimenzióban legfeljebb 6 $(n \leq 6)$ egyenes esetén, és adott egy felső korlátot egy rekurzív formula segítségével: $S(n,3) \leq n(n-1)\pi/5$. Eszerint az egyenesek szögeinek összege aszimptotikusan legfeljebb $n^2\pi/5$ amint $n \to \infty$. [FVZ16b] cikkünkben megjavítottuk ezt az aszimptotikus korlátot $3n^2\pi/16 \approx 0.589 \cdot n^2$-re, amit Bilyk és Matzke [BM19] tovább javítottak $\left(\frac{\pi}{4} - \frac{69}{100d}\right) n^2$-re, amint $n \to \infty$, amiből az is látható, hogy eredményük minden dimenzióban ad egy felső korlátot. Ez a felső korlát $d = 3$ esetén $0.556 \cdot n^2$ ha $n \to \infty$

Megjegyezzük, hogy a problémának számos változata ismert, némelyek részben vagy egészben megoldottak. Egyik fontos példa ezek közül az irányított egyenesek esete, azaz n origóból kiinduló félegyenes (vektor) páronkénti szögeinek maximalizálása. Egy másik fontos irány, amikor a szögek helyett a szögek valamilyen függvényeinek maximumát keressük. Ez az irány az ún. potenciálok irányába vezet.

2.2. Eredményeink

A problémakörben elért eredményeinket az alábbi tétel foglalja össze.

2.1. Tétel. *Legyenek $l_1, \dots, l_n$ egyenesek $\mathbb{R}^3$-ban, melyek mindegyike átmegy az origón. Jelölje φ_{ij} az l_i és l_j által bezárt szöget. Ekkor*

$$\sum_{1 \le i < j \le n} \varphi_{ij} \le \begin{cases} \frac{3}{2}k^2 \cdot \frac{\pi}{2}, & ha \quad n = 2k, \\ \frac{3}{2}k(k+1) \cdot \frac{\pi}{2}, & ha \quad n = 2k+1. \end{cases}$$

Tekintsük először a síkbeli esetet. A következő tétel valószínűleg munkánk előtt is ismert volt, de mivel nem találtunk rá bizonyítást az irodalomban, ezért úgy döntöttünk, hogy mi magunk is bebizonyítjuk. Azt mondjuk, hogy egy sugársor kiegyensúlyozott, ha minden egyenesre igaz, hogy a vele pozitív ($\pi/2$-nél kisebb) szöget bezáró, illetve a vele negatív szöget bezáró egyenesek számának különbsége legfeljebb 1.

2.2. Tétel. *Legyenek $l_1, \dots, l_n$ egyenesek $\mathbb{R}^2$-ben, melyek mindegyike átmegy az origón. Jelölje φ_{ij} az l_i és l_j által meghatározott szöget. Ekkor*

$$\sum_{1 \le i < j \le n} \varphi_{ij} \le \begin{cases} k^2 \cdot \frac{\pi}{2}, & ha \quad n = 2k, \\ k(k+1) \cdot \frac{\pi}{2}, & ha \quad n = 2k+1. \end{cases}$$

Továbbá pontosan akkor van egyenlőség, ha a sugársor kiegyensúlyozott.

A 2.2 Tétel bizonyításának alapötlete az az észrevétel, hogy egy merőleges egyenespárt tetszőlegesen mereven elforgatva a szögösszeg nem változik.

Legyenek $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ vektorok, φ pedig a közbezárt szögük. Ekkor a 3 dimenziós eset tárgyalásához először is szükségünk lesz a következő függvényre:

$$I : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}, \quad I(\varphi) := \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} \varphi_*^{\mathbf{u}}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \mathrm{d}\mathbf{u},$$

ahol $\varphi_*^{\mathbf{u}}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ a $\mathbf{v}_1$ és $\mathbf{v}_2$ vektorok $\mathbf{u}$ normálisú síkra vett vetületeinek a bezárt szöge, illetve ezen szög (π-re) kiegészítő szöge közül a nem nagyobb. Megjegyezzük, hogy I valóban csupán φ-től függ, a vektoroktól nem, ahogy ezt a definíció is sugallja.

Ezután megmutatjuk két lemma segítségével, hogy $I(\varphi) \ge 2\varphi/3$ minden $\varphi \in [0, \pi/2]$ esetén. Az első lemma ezt a végpontokban igazolja, azaz ha $\varphi = 0$ és $\varphi = \pi/2$.

2.4. Lemma. *A fenti jelöléseket használva,*

$$I(0) = 0, \quad \textit{illetve} \quad I(\pi/2) = \pi/3.$$

A második lemma segítségével megmutatjuk, hogy I konkáv, s így állításunk teljesül.

2.5. Lemma. *Az $I(\varphi)$ függvény konkáv $[0, \pi/2]$-n, és*

$$I(\varphi) \ge 2\varphi/3 \qquad ha \qquad 0 \le \varphi \le \pi/2. \tag{1}$$

Ezekből a 2.1 Tétel közvetlenül következik. Mivel a vetületek szögeinek átlaga (a vetítősík normálvektorára átlagolva) legalább 2/3-a az eredeti szögek összegének, így létezik egy $\mathbf{u}_0$, hogy ezen normálvektorú síkra vetítve a vektorokat a szögösszeg több, mint 2/3-a az eredeti szögösszegnek. Végül mivel az optimum ismert a síkbeli esetben, így a tételt igazoltuk.

3. Gömbfedés egybevágó zónákkal

A disszertáció ezen fejezetének alapja a [FVZ16a] cikk.

3.1. Bevezetés

Legyen S^2 az origó középpontú egységsugarú gömb $\mathbb{R}^3$-ban. Két gömbi pont, $x, y \in S^2$ gömbi távolságán az őket összekötő rövidebb főkörív hosszát értjük. A w félszélességű Z zóna alatt egy C főkör w (gömbi) sugarú paralelltartományát értjük, azaz azon S^2 beli pontok halmazát, melyek gömbi távolsága C-től nem nagyobb, mint w. A fejezetben vizsgált fő probléma az alábbi.

3.1. Probléma (Fejes Tóth László [FT73]). *Adott n esetén keressük a legkisebb w_n számot, melyre igaz, hogy S^2 lefedhető n egyforma w_n félszélességű zónával. Határozzuk meg továbbá azt az optimális konfigurációt, mely megvalósítja ezt a fedést.*

Egy ezzel analóg, másik kérdés, melyet szintén Fejes Tóth László tett fel, a következő: Ha nem követeljük meg a zónáktól, hogy egyforma szélességűek legyenek, akkor mi a fedő sávok szélességének minimális összege? A sejtés szerint a válasz π. Egy valamivel általánosabb hasonló kérdés, hogy egy gömbi konvex lemez fedéséhez mi a fedő sávok szélességének minimuma. Az összes említett kérdés hasonló természetű, mint Tarski híres plank-problémája

1932-ben Tarski [Tar32] tette fel az eredeti kérdést, mely később Tarski-féle sávfedési (plank) probléma néven vált híressé. Sejtése szerint ha a $K \subseteq \mathbb{R}^d$ konvex testet véges számú sáv lefedi, akkor a sávok szélességének összege legalább K minimális szélessége kell, hogy legyen. Az eredeti sejtést Bang bizonyította [Ban50, Ban51]. A sáv ebben a kontextusban két párhuzamos hipersík közötti térrészt jelent, a sáv szélessége pedig a két hipersík távolsága.

Legyen K konvex test, h_K a támaszfüggvénye, és $u \in \mathbb{R}^d$ egy egységvektor. A K u irányú szélességén a $h_K(u) + h_K(-u)$ mennyiséget értjük, K minimális szélességen pedig ezen mennyiségek minimumát:

$$w_K = \min_{u \in \mathbb{S}^{d-1}} h_K(u) + h_K(-u)$$

Visszatérve a gömbfelület zónákkal történő fedéshez, munkánk előtt az egyetlen ismert alsó korlát a triviális volt, miszerint a zónák területének összege ki kell, hogy adja a 4π-t, a gömb felszínét. Természetesen ez az alsó korlát nem éles, mivel már két zóna esetén igaz, hogy bármely két zónának van metszete, így a másodiktól kezdve semelyik sem járul hozzá a fedéshez teljes területével. Megjegyezzük továbbá, hogy a probléma megoldott volt $n = 3, 4$ zóna esetén Rosta [Ros72] és Linhart [Lin74] munkája nyomán. Tekintsünk egy fedésre úgy, mint ha zónánként építenénk fel, és nézzük meg a tényleges hozzájárulását a fedéshez (ami a második zónától kezdve szigorúan kisebb, mint a zóna területe). Két zóna metszetének területét tudjuk becsülni a szélesség és a főköreik által bezárt szög ismeretében, így a triviálisnál jobb alsó korlátot adhatunk a minimumra.

Megjegyezzük továbbá azt is, hogy munkánk után nem sokkal Jiang és Polyanskii [JP17] bebizonyították Fejes Tóth sejtését, ezzel megoldva az eredeti problémát. Ugyanakkor Steinerberger használta 3.3 Lemmát munkájában, így ez erős kapcsolatba került az s-Riesz energiákkal.

3.2. Két zóna metszete

Jelölje $2F(w, \alpha)$ két w szélességű zóna metszetének területét, melyek egymással α szöget zárnak be.

3.3. Lemma. *Legyen* $0 \leq w \leq \pi/4$ *és* $2w \leq \alpha \leq \pi/2$. *Ekkor*

$$\begin{aligned} F(w,\alpha) = 2\pi &+ 4\sin w \arcsin\left(\frac{1-\cos\alpha}{\cot w \sin\alpha}\right) + 4 \sin w \arcsin\left(\frac{1+\cos\alpha}{\cot w\sin\alpha}\right) \\ &- 2\arccos\left(\frac{\cos\alpha - \sin^2 w}{\cos^2 w}\right) - 2\arccos\left(\frac{-\cos\alpha-\sin^2 w}{\cos^2 w}\right). \end{aligned} \tag{2}$$

Továbbá $F(w, \alpha)$ *monoton csökkenő függvénye* α*-nak a* $[0, \pi/2]$ *intervallumon.*

E lemma segítségével tudjuk becsülni egy zóna hozzájárulását a fedéshez: Minél közelebb van egy zóna egy korábbi zónához (minél kisebb szöget zárnak be főköreik), annál kisebb lehet a tényleges hozzájárulása a fedéshez.

3.3. Becslés a minimális szélességre

Előző lemmánkból látszik, hogy egy zóna hozzájárulása függ attól, hogy milyen közel van a korábbi zónákhoz, így szükségessé vált megbecsülni, hogy n pont egy gömbön legfeljebb milyen messze lehet egymástól (ezzel ekvivalens azt kérdezni, hogy a zónák legalább milyen közel vannak egymáshoz). Jelölje d_n $n \geq 3$ esetén, a pontok páronkénti távolságainak maximumát. Pontos formula keresése d_n-re a diszkrét geometria egy rég fennálló kérdése, mely a híres Tammes-problémához vezet. Néhány n-re ismert a pontos érték, a többire becslést vagyunk kénytelenek használni.

Fejes Tóth László [FT72] bizonyította az alábbi felső korlátot d_n-re:

$$d_n \leq \tilde{\delta}_n := \arccos\left(\frac{\cot^2\left(\frac{n}{n-2}\frac{\pi}{6}\right) - 1}{2}\right), \tag{3}$$

Robinson [Rob61] javított $n \geq 13$ esetén ezen a korláton, jelölje az ő korlátját δ_n, legyen $d_n^* := \min\{\pi/2, d_n\}$, továbbá

$$\delta_n^* := \begin{cases} d_n^* & \text{ha } 3 \leq n \leq 14 \text{ vagy } n = 24, \\ \delta_n & \text{egyébként.} \end{cases} \tag{4}$$

Szükséges azonban egy alsó korlát is d_n-re, ami egy telített ponthalmaz esetén közvetlenül adódik:

$$\frac{2}{\sqrt{n}} \leq d_n^* \leq \delta_n^*.$$

Bevezetjük $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ és $n \geq 3$ esetén az $f(w, \alpha) = 4\pi \sin w - 2F(w, \alpha)$, illetve a

$$G(w, n) = 4\pi \sin w + \sum_{i=2}^{n} f(w, \delta_{2i}^*).$$

függvényeket. A $G(w, n)$ függvény alulról becsüli a bemutatott gondolatmenet alapján n w szélességű zóna hozzájárulását a fedéshez.

3.5. Lemma. *Rögzített $n \geq 3$ esetén $G(w, n)$ folytonos és monoton növekvő w-ben a $[0, \delta_{2n}^*/3]$ intervallumon. Továbbá $G(0, n) = 0$ és $G(\delta_{2n}^*/3, n) \geq 4\pi$.*

A fentiek segítségével már ki tudjuk mondani fő eredményünket:

3.6. Tétel. *Jelölje w_n^* $n \geq 3$ esetén a $G(w, n) = 4\pi$ egyenlet egyetlen megoldását a $[0, \delta_{2n}^*/3]$ intervallumon. Ekkor* $\arcsin(1/n) < w_n^* \leq w_n$.

4. Egybevágó zónákból álló elrendezések multiplicitása

A disszertáció ezen fejezetének alapja a [BFVZ17] cikk.

Az előző részből ismert egybevágó zónákból álló elrendezéseket ebben a részben multiplicitás szempontjából vizsgáljuk az S^{d-1} gömbön. Egy elhelyezés multiplicitásán azt a legnagyobb számot értjük, melyre igaz, hogy a gömb valamely pontja ennyi zónához tartozik. Adott d és n mellett az n zóna közös szélességének függvényében szeretnénk minimalizálni a multiplicitást. Világos, hogy ha $n \geq d$ akkor a multiplicitás legalább d és legfeljebb n. Vegyük észre, hogy a Fejes Tóth konfigurációban a multiplicitás n, azaz maximális.

Speciálisan ha $d = 3 \leq n$, akkor bármilyen fedés multiplicitása legalább 3. Első eredményünk ennek az egyszerű ténynek egy enyhe erősítése, amikor $n \geq 4$.

4.1. Tétel. *Legyen $n \geq 1$ egész és legyen S^2 fedve n egybevágó zóna uniója által. Ha S^2 minden pontja legfeljebb 2 zóna belsejéhez tartozik, akkor $n \leq 3$. Ezen felül ha $n = 3$ akkor a 3 zóna (főköre) páronként merőleges egymásra*

A következőkben szeretnénk felső korlátot adni a multiplicitásra. Ehhez szükség lesz az alábbi definíciókra.

Legyen $\alpha : \mathbb{N} \to (0, 1]$ pozitív valós függvény, melyre $\lim_{n\to\infty} \alpha(n) = 0$. Ekkor $d \geq 3$ egész esetén legyen $m_d = \sqrt{2\pi d} + 1$. Továbbá legyen $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ olyan függvény, mely teljesíti a következő feltételt:

$$\limsup_{n\to\infty} \alpha(n)^{-(d-1)} \left(\frac{e\, C_d^*\, n\, \alpha(n)}{k(n)} \right)^{k(n)} = \beta < 1, \tag{5}$$

ahol C_d^* egy megfelelő, csak a d-től függő konstans.

4.2. Tétel. *Minden $d \geq 3$ pozitív egészre, $\alpha(n)$ fentebb definiált függvényre és elég nagy n-re létezik n $m_d\alpha(n)$ gömbi félszélességű zónából álló elrendezés S^{d-1}-en úgy, hogy S^{d-1} semelyik pontja sem része $k(n)$-nél több zónának.*

A következő állítás szolgáltatja a kívánt felső korlátot a d-dimenziós gömb egybevágó sávokkal történő fedéseinek multiplicitására.

4.3. Tétel. *Minden $d \geq 3$ egészre létezik pozitív konstans A_d, bármely elég nagy n-re található S^{d-1} fedése n egybevágó $m_d \frac{\ln n}{n}$ szélességű zónával úgy, hogy S^{d-1} semelyik pontja sem tartozik $A_d \ln n$-nél több zónához.*

Megjegyezzük, hogy Frankl, Nagy és Naszódi bebizonyították a 4.3 Tételt és a 4.2 Tétel egy implicit változatát $d = 3$ dimenzióban, lásd 1.5 Tételt, illetve bizonyítását, valamint 1.6 Tételt a [FNN18] cikkben.

Alább néhány érdekes speciális eset következik $\alpha(n)$ nagyságának függvényében.

4.4. Következmény. *A 4.2 Tétel feltételeivel igazak a következők.*

i) Ha $\alpha(n) = n^{-(1+\delta)}$ valamely $\delta > 0$-ra, akkor $k(n) =$ konstans. Továbbá, ha $\delta > d-1$, akkor $k(n) = d$.

ii) Ha $\alpha(n) = \frac{1}{n}$, akkor $k(n) = B_d \frac{\ln n}{\ln \ln n}$ valamely megfelelő B_d konstansra.

Egy nyilvánvalóan nagy hézag van a multiplicitásra adott alsó és felső korlátok között. Egy zónákkal való fedés minimális multiplicitása továbbra is nyitott kérdés S^{d-1}-en.

5. A Dvoretzky–Rogers lemmában szereplő térfogatkorlát

A disszertáció ezen fejezetének alapja a [FNZ18] cikk.

5.1. Bevezető és eredmények

Azt mondjuk, hogy a μ *izotróp mérték*, ha olyan valószínűségi mérték $\mathbb{R}^d$-n, mely teljesíti a következő feltételeket.

$$\int_{\mathbb{R}^d} x \otimes x \ \mathrm{d}\mu(x) = \mathrm{Id}_d, \tag{6}$$

illetve:

$$\int_{\mathbb{R}^d} x \ \mathrm{d}\mu(x) = 0. \tag{7}$$

A Dvoretzky–Rogers lemma azt mondja ki, hogy bármilyen $\mathbb{R}^d$-beli véges izotróp vektorhalmazból kiválasztható d elem úgy, hogy az a részhalmaz elég nagy térfogatú paralelotópot feszít ki. Ennek következménye, hogy az általuk meghatározott determináns abszolút értéke legalább $\sqrt{d!/d^d}$.

Másfelől kiválasztható d vektor véletlenszerűen, ahogy Pivovarov [Piv10] cikkében olvasható, és kiszámolható a determináns négyzetének várhatóértéke is. Mi az ő eredményét terjesztjük ki mértékek egy bővebb családjára, így eljutva Pelczyński és Szarek [PS91] becsléséhez, valamint egy valószínűségi értelmezést adva a Dvoretzky–Rogers lemmában szereplő térfogatkorlátra.

A következő lemma Pivovarov eredménye:

5.1. Lemma (Pivovarov [Piv10], Lemma 3)**.** *Legyenek $x_1, \ldots, x_d$ független véletlen vektorok a $\mu_1, \ldots, \mu_d$ $\mathbb{R}^d$-ben izotróp mértékek szerint. Tegyük fel, hogy az $x_1, \ldots, x_d$ vektorok 1 valószínűséggel függetlenek. Ekkor*

$$\mathbb{E}([\det(x_1, \ldots, x_d)]^2) = d!. \tag{8}$$

Az alábbi kiterjesztésünkkel diszkrét izotróp mértékekre is alkalmazhatóvá válik Pivovarov lemmája.

5.2. Lemma. *Legyenek $x_1, \ldots, x_d$ független véletlen vektorok a $\mu_1, \ldots, \mu_d$ in $\mathbb{R}^d$ valószínűségi mértékek szerint melyek kielégítik* (6)*-t. Tegyük fel, hogy $\mu_i(\{0\}) = 0,\ i = 1, \ldots, d$ esetén. Ekkor* (8) *igaz.*

A geometriai motiváció az izotróp mértékek tanulmányozása mögött John [Joh48] híres eredményében keresendő.

5.3. Tétel. *Legyen K konvex test $\mathbb{R}^d$-ben. Ekkor létezik pontosan egy maximális térfogatú ellipszoid K-ban, továbbá ez az ellipszoid pontosan akkor a B^d d-dimenziós egységgömb ha léteznek $u_1, \ldots, u_m \in \mathrm{bd}K \cap S^{d-1}$ vektorok és $c_1, \ldots, c_m > 0$ pozitív valós számok úgy, hogy*

$$\sum_{i=1}^{m} c_i u_i \otimes u_i = \mathrm{Id}_d, \tag{9}$$

és

$$\sum_{i=1}^{m} c_i u_i = 0. \tag{10}$$

Ha az $u_1, \ldots u_m$ egységvektorok a $c_1, \ldots c_m$ konstansokkal kielégítik John tételének két feltételét, akkor azt mondjuk, hogy a vektorok egy John-féle egységfelbontást alkotnak. Ha a vektorok egy K test és John-ellipszoidjának érintési pontjai, akkor mindig található a vektoroknak egy megfelelő részhalmaza és alkalmas pozitív konstansok úgy, hogy ezek együtt egy John-féle egységfelbontást alkossanak. Dvoretzky és Rogers lemmája azt mondja ki, hogy egy John-féle egységfelbontásban mindig található d vektor úgy, hogy ezek nincsenek túl messze egy ortonormált bázis elemeitől.

5.4. Lemma (Dvoretzky–Rogers lemma [DR50])**.** *Legyenek $u_1, \ldots, u_m \in S^{d-1}$ vektorok és $c_1, \ldots, c_m > 0$ konstansok, melyek kielégítik* (9)*-t. Ekkor létezik olyan $b_1, \ldots, b_d$ ortonormált bázisa $\mathbb{R}^d$-nek és $\{x_1, \ldots, x_d\} \subset \{u_1, \ldots, u_m\}$ részhalmaza a vektoroknak úgy, hogy $x_j \in \mathrm{lin}\{b_1, \ldots, b_j\}$ és*

$$\sqrt{\frac{d-j-1}{d}} \le \langle x_j, b_j \rangle \le 1 \tag{11}$$

minden $j = 1, \ldots, d$-re.

Tekintsük az $x_1, \ldots, x_d$ vektorok által kifeszített paralelotópot. Ennek térfogatára teljesül:

$$(\mathrm{Vol}\,(P))^2 = [\det(x_1,\dots,x_d)]^2 \geq \frac{d!}{d^d}. \tag{12}$$

A következő két tétel munkánk fő eredménye. Az első lényegében Pelczyński és Szarek [PS91] becslése, csak valószínűségi megközelítésben illetve bizonyítással, ezáltal új értelmezést is adva a tételnek.

5.5. Tétel. *Legyenek $u_1,\dots,u_m \in S^{d-1}$ egységvektorok, melyek kielégítik (9)-t a $c_1,\dots,c_m > 0$ konstansokkal. Ekkor léteznek $\{x_1,\dots,x_d\} \subset \{u_1,\dots,u_m\}$ vektorok a rendszerből, hogy*

$$[\det(x_1,\dots,x_d)]^2 \geq \gamma(d,\overline{m}) \cdot \frac{d!}{d^d},$$

ahol $\gamma(d,\overline{m}) = \frac{\overline{m}^d}{d!}\binom{\overline{m}}{d}^{-1}$, és $\overline{m} = \min\{m, d(d+1)/2\}$.

Továbbá $\gamma(d,\overline{m})$-re igazak:

(i) $\gamma(d,\overline{m}) \geq \gamma(d,d(d+1)/2) \geq 3/2$ bármely $d \geq 2$-re és $m \geq d$-re. Ezen felül $\gamma(d,d(d+1)/2)$ monoton növekvő és $\lim_{d\to\infty}\gamma(d,d(d+1)/2) = e$.

(ii) Rögzített $c > 1$-re legyen $m \leq cd$, hogy $c \geq 1+1/d$. Ekkor

$$\gamma(d,m) \geq \gamma(d,\lceil cd\rceil) \sim \sqrt{\frac{c-1}{c}}\left(\frac{c-1}{c}\right)^{(c-1)d} e^d, \quad \textit{as } d \to \infty.$$

(iii) Rögzített $k \geq 1$ konstansra legyen $m \leq d+k$. Ekkor

$$\gamma(d,m) \geq \gamma(d,d+k) \sim \frac{k!e^k}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^d}{(d+k)^{k+1/2}}, \quad \textit{amint } d \to \infty.$$

Ennek a tételnek a geometriai interpretációja a következő. Ha K konvex politóp n hiperlappal, melynek B^d a John-ellipszoidja, akkor az $u_1,\dots,u_m$ John tételében szereplő érintési pontok száma legfeljebb $m \leq n$, így kapunk egy olyan szimplexet K-ban, melynek egyik csúcsa az origó, a többi érintési pont, térfogata pedig nem túl kicsi.

A következő állítás ad egy alsó korlátot annak valószínűségére, hogy d független, azonos eloszlású vektor az $\{u_1,\dots,u_m\}$ halmazból $\{c_1,\dots,c_m\}$ súlyokkal nagy térfogatú legyen.

5.6. Állítás. *Legyen $\lambda \in (0,1)$. Ekkor az 5.5 Tétel feltételei és jelölései szerint, ha az $x_1,\dots,x_d$ vektorokat függetlenül választjuk a $\mathbb{P}(x_\ell = u_i) = c_i/d$ eloszlás szerint ($\ell = 1,\dots,d$ és $i = 1,\dots,m$), akkor legalább $(1-\lambda)e^{-d}$ valószínűséggel*

$$[\det(x_1,\dots,x_d)]^2 \geq \lambda\gamma(d,\overline{m}) \cdot \frac{d!}{d^d}.$$

Speciálisan, ha a $k = 1$ esetet tekintjük az 5.5 Tétel (*iii*) pontjában, azaz amikor K a szabályos szimplex, melynek beírt gömbje a B^d egységgömb, akkor a szükséges számítások elvégzése után kapjuk, hogy a tétel által adott korlát ebben az esetben éles.

Hivatkozások

[Ban51] T. Bang, *A solution of the „plank problem."*, Proc. Amer. Math. Soc. **2** (1951), 990–993.

[Ban50] T. Bang, *On covering by parallel-strips*, Mat. Tidsskr. B. **1950** (1950), 49–53.

[BM19] D. Bilyk and R. W. Matzke, *On the Fejes Tóth problem about the sum of angles between lines*, Proc. Amer. Math. Soc. **147** (2019), no. 1, 51–59.

[DR50] A. Dvoretzky and C. A. Rogers, *Absolute and unconditional convergence in normed linear spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **36** (1950), 192–197.

[FT72] L. Fejes Tóth, *Lagerungen in der Ebene auf der Kugel und im Raum*, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972.

[FT59] L. Fejes Tóth, *Über eine Punktverteilung auf der Kugel*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar **10** (1959), 13–19.

[FT73] L. Fejes Tóth, *Research Problems: Exploring a Planet*, Amer. Math. Monthly **80** (1973), no. 9, 1043–1044.

[FNN18] N. Frankl, J. Nagy, and M. Naszódi, *Coverings: variations on a result of Rogers and on the epsilon-net theorem of Haussler and Welzl*, Discrete Math. **341** (2018), no. 3, 863–874.

[JP17] Z. Jiang and A. Polyanskii, *Proof of László Fejes Tóth's zone conjecture*, Geom. Funct. Anal. **27** (2017), no. 6, 1367–1377.

[Joh48] F. John, *Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions*, Studies and Essays Presented to R. Courant on his 60th Birthday, January 8, 1948, Interscience Publishers, Inc., New York, N. Y., 1948, pp. 187–204.

[Lin74] J. Linhart, *Eine extremale Verteilung von Grosskreisen*, Elem. Math. **29** (1974), 57–59.

[PS91] A. Pełczyński and S. J. Szarek, *On parallelepipeds of minimal volume containing a convex symmetric body in* $\mathbf{R}^n$, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **109** (1991), no. 1, 125–148.

[Piv10] P. Pivovarov, *On determinants and the volume of random polytopes in isotropic convex bodies*, Geom. Dedicata **149** (2010), 45–58.

[Rob61] R. M. Robinson, *Arrangements of 24 points on a sphere*, Math. Ann. **144** (1961), 17–48.

[Ros72] V. Rosta, *An extremal distribution of three great circles*, Mat. Lapok **23** (1972), 161–162 (1973).

[Ste18] S. Steinerberger, *Well-distributed great circles on* $\mathbb{S}^2$, Discrete Comput. Geom. **60** (2018), no. 1, 40–56.

[Tar32] A. Tarski, *Remarks on the degree of equivalence of polygons*, Parametr. **2** (1932), 310–314.

Társszerzői nyilatkozat

Alulírott Dr. Fodor Ferenc kijelentem, hogy az alábbiakban megnevezett, Zarnócz Tamással közös cikkeket doktori fokozat szerzésére nem használtam, illetve a jövőben sem használom fel.

1. Fodor F.; Vígh V.; Zarnócz T.: On the angle sum of lines. *Arch. Math.* **106** (2016) no. 1, 91-100.

2. Fodor F.; Vígh V.; Zarnócz T.: Covering the sphere by equal zones *Acta. Math. Hungar.* **149** (2016) no. 2, 478-489.

3. Fodor F.; Naszódi M.; Zarnócz T.: On the volume bound in the Dvoretzky-Rogers lemma. *Pacific J. Math.* Közlésre elfogadva (2018).

4. Bezdek A.; Fodor F.; Vígh V.; Zarnócz T.: On the multiplicity of arrangements of congruent zones on the sphere. (2017). (Korábbi címe: On the multiplicity of arrangements of equal zones on the sphere)

A jelölt (Zarnócz Tamás) hozzájárulása a fent nevezett 1. 2. és 3. cikk eredményeihez hozzávetőlegesen 33%, a 4. cikk eredményeihez pedig hozzávetőlegesen 25%.

Tisztelettel,

Fodor Ferenc

Dr. Fodor Ferenc

Kelt, Szeged, 2019.06.27.

Társszerzői nyilatkozat

Alulírott Dr. Vígh Viktor kijelentem, hogy az alábbiakban megnevezett, Zarnócz Tamással közös cikkeket doktori fokozat szerzésére nem használtam, illetve a jövőben sem használom fel.

1. Fodor F.; Vígh V.; Zarnócz T.: On the angle sum of lines. *Arch. Math.* **106** (2016) no. 1, 91-100.

2. Fodor F.; Vígh V.; Zarnócz T.: Covering the sphere by equal zones *Acta. Math. Hungar.* **149** (2016) no. 2, 478-489.

3. Bezdek A.; Fodor F.; Vígh V.; Zarnócz T.: On the multiplicity of arrangements of equal zones on the sphere. (2017).

A jelölt (Zarnócz Tamás) hozzájárulása a fent nevezett 1. és 2. cikk eredményeihez hozzávetőlegesen 33%, a 3. cikk eredményeihez pedig hozzávetőlegesen 25%.

Tisztelettel,

Dr. Vígh Viktor

Kelt, Szeged, 2019.05.07.

Társszerzői nyilatkozat

Alulírott Dr. Bezdek András kijelentem, hogy az alábbiakban megnevezett, Zarnócz Tamással közös cikket doktori fokozat szerzésére nem használtam, illetve a jövőben sem használom fel.

1. Bezdek A.; Fodor F.; Vígh V.; Zarnócz T.: On the multiplicity of arrangements of equal zones on the sphere (2017).

A jelölt (Zarnócz Tamás) hozzájárulása a fent nevezett 1. cikk eredményeihez hozzávetőlegesen 25%.

Tisztelettel,

Bezdek András

Dr. Bezdek András

Kelt, Budapest, 2019.05.03.

Társszerzői nyilatkozat

Alulírott Dr. Naszódi Márton kijelentem, hogy az alábbiakban megnevezett, Zarnócz Tamással közös cikket doktori fokozat szerzésére nem használtam, illetve a jövőben sem használom fel.

1. Fodor, F.; Naszódi, M.; Zarnócz, T.: On the volume bound in the Dvoretzky-Rogers lemma. *Pacific J. Math.* Közlésre elfogadva (2018).

A jelölt (Zarnócz Tamás) hozzájárulása a fent nevezett 1. cikk eredményeihez hozzávetőlegesen 33%.

Tisztelettel,

Dr. Naszódi Márton

Kelt: Budapest, 2019.01.04.