# Izometriákról és egyéb megőrzési problémákról

## Tézisfüzet


## Gaál Marcell

### Témavezető: Dr. Molnár Lajos, DSc

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
Szegedi Tudományegyetem, Bolyai Intézet
Analízis Tanszék


**Szeged, 2019**

A disszertáció fő része 5 fejezetből áll, melyeket összefoglaló (angol és magyar nyelvű), illetve egy tartalomjegyzék követ. A fejezetek a szerző [**8, 9, 11, 12, 13**], referált matematikai folyóiratban publikált cikkeit fogják össze.

A jelen disszertáció néhány eredményt tartalmaz a megőrzési problémák területéről. Az ilyen problémákat általánosan a következőképpen tudjuk megfogalmazni. Legyen adott egy struktúra és egy, a struktúra elemei között értelmezett operáció, numerikus mennyiség, vagy reláció, stb. A feladat meghatározni azon transzformációk zárt alakkal történő leírását, melyek invariánsul hagyják a struktúra megadott jellemzőjét.

A megőrzési problémák egy rendkívül részletes osztályozása megtalálható Molnár monográfiájában [**27**], illetve az alábbi áttekintő cikkekben: [**20, 22, 32**]. A jelen disszertáció keretében alapvetően csak az alábbi típusokba tartozó megőrzési problémákkal foglalkoztunk:

- Az 1-4. fejezetekben pozitív operátorokon értelmezett kétváltozós műveletek különböző unitér invariáns függvényeit megőrző leképezésekkel;
- Az 5. fejezetben lineáris operátorok vektortereinek izometriáival.

## 1. Determinánstartó leképezések egy osztálya véges Neumann algebrákon

1897-ben Frobenius [**6**] igazolta, hogy minden olyan lineáris $\phi$ leképezés az $M_n(\mathbb{C})$ mátrixalgebrán, amely megőrzi a determinánst, alkalmas $M, N \in M_n(\mathbb{C})$ mátrixokkal az alábbi formába írható:

$$\phi(A) = MAN \quad \text{vagy} \quad \phi(A) = MA^{tr}N$$

ahol $(.)^{tr}$ a transzponálást jelöli. Továbbá az $M, N$ mátrixok nyilván kielégítik a $\det(MN) = 1$ feltételt is.

Frobenius eredményének hatására az elmúlt évtizedekben több szerző is különböző determináns fogalmakkal kapcsolatos megőrzési problémát vizsgált [**2, 4, 5, 18, 29, 35**]. Többek között Huang és szerzőtársai [**18**] leírták azon transzformációk szerkezetét a pozitív definit mátrixok $\mathbb{P}_n$ halmazán, amelyek eleget tesznek a

$$\det(\phi(A) + \phi(B)) = \det(\phi(I))^{1/n} \det(A + B)$$

feltételnek, az összes $A, B \in \mathbb{P}_n$ esetén.

Az 1. fejezetben hasonló feladatot oldottunk meg egy $\tau$ nyomszerű állapottal ellátott véges $\mathcal{N}$ Neumann algebra $\mathcal{N}^{++}$ pozitív definit kúpján, igazolva ezzel Huang és szerzőtársai eredményének egy operátoralgebrai megfelelőjét. Amennyiben $\mathcal{N}$ egy ilyen algebra, akkor egy invertálható $A \in \mathcal{N}$ operátor $\tau$-hoz tartozó $\Delta$ Fuglede-Kadison determinánsa [**7**] a

$$\Delta(A) = \exp(\tau(\log \sqrt{A^*A}))$$

képlettel definiált.

1. Tétel. (Gaál, Nayak [**13**])
*Legyen $\mathcal{N}$ egy $\tau$ hűséges, nyomszerű állapottal ellátott véges Neumann algebra, továbbá $\phi : \mathcal{N}^{++} \to \mathcal{N}^{++}$ egy bijektív leképezés. Ekkor*

$$\Delta(\phi(A) + \phi(B)) = \Delta(\phi(I)) \cdot \Delta(A + B)$$

*teljesül minden $A, B \in \mathcal{N}^{++}$ esetén pontosan akkor, ha létezik egy $J : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ $\tau$-őrző Jordan $^*$-izomorfizmus és egy pozitív invertálható $T \in \mathcal{N}^{++}$ operátor, melyre*

$$\phi(A) = TJ(A)T, \quad A, B \in \mathcal{N}^{++}.$$

*Továbbá, amennyiben $\mathcal{N}$ egy faktor, akkor $\phi$ kiterjeszthető $\mathcal{N}$ egy ($\tau$-őrző) $^*$-automorfizmusává, vagy $^*$-antiautomorfizmusává.*

A megoldás során nagyban támaszkodtunk a Minkowski determinánsegyenlőtlenség egy operátoralgebrai megfelelőjére. Habár magát az egyenlőtlenséget korábban igazolta Arveson [**1**], illetve Hiai és Bourin is [**3**], az eredményeik nem tartalmazták az egyenlőség feltételének karakterizálását. Ennek következtében meg kellett határoznunk azt is, hogy pozitív invertálható $A, B \in \mathcal{N}$ operátorokat tekintve milyen feltételek esetén létezik a

$$\Delta(A + B) = \Delta(A) + \Delta(B)$$

operátoregyenletnek megoldása.

## 2. Norma-additív leképezések egy $C^*$-algebra pozitív definit kúpján

Normált terek additív félcsoportjai között értelmezett bizonyos normaadditív leképezések vizsgálata egy aktív kutatási terület. Korábbi, elsősorban függvényalgebrákkal kapcsolatos vizsgálatokat illetően megemlítjük a [**14, 15, 16, 17, 36**] publikációkat.

A felsorolt munkák hatására néhány szerző norma-additív leképezéseket tanulmányozott, az előbbiektől eltérő struktúrákon, pozitív és pozitív definit operátorok kúpjain. Nevezetesen Nagy [**29**] leírta pozitív Schatten operátorok norma-additív leképezéseinek szerkezetét, a Schatten $p$-normára nézve. Molnár és Szokol [**28**] pedig hasonló problémát oldottak meg egy standard operátoralgebra (korlátos lineáris operátorok egy olyan részalgebrája, amely tartalmazza a véges rangú operátorokat) pozitív kúpján.

A 2. fejezetben az előbbi problémát egy véges, normalizált trace-el rendelkező $C^*$-algebrán tekintettük. Meghatároztuk egy $C^*$-algebra pozitív definit $\mathcal{A}^{++}$ kúpján azon bijektív transzformációk szerkezetét, melyek eleget tesznek a

$$\|\phi(a) + \phi(b)\|_p = \|a + b\|_p$$

feltételnek, minden $a, b \in \mathcal{A}^{++}$ esetén, ahol $\|a\|_p = \tau(|a|^p)^{1/p}$ az $a$ elem Schatten $p$-normáját jelöli.

2. Tétel. (Gaál [**8**])
*Legyen $\phi : \mathcal{A}^{++} \to \mathcal{A}^{++}$ egy bijektív transzformáció és $p > 1$. Ekkor*

$$\|\phi(a) + \phi(b)\|_p = \|a + b\|_p, \quad a, b \in \mathcal{A}^{++}$$

*teljesül pontosan akkor, ha létezik egy $J : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ Jordan $^*$-izomorfizmus és egy pozitív invertálható $d \in \mathcal{A}^{++}$ elem, melyre*

$$\phi(a) = dJ(a)d, \quad a \in \mathcal{A}^{++},$$

*valamint $J$ és $d$ kielégítik a*

$$\|dJ(a)d\|_p = \|a\|_p, \quad a \in \mathcal{A}^{++} \tag{1}$$

*feltételt. Továbbá, ha $\mathcal{A}$ egy véges Neumann algebra faktor, akkor $\phi$ kiterjeszthető $\mathcal{A}$ egy $^*$-automorfizmusává, vagy $^*$-antiautomorfizmusává.*

A [**8**] cikk publikálását követően kiderült, hogy az (1) feltétel ekvivalens azzal, hogy $d$ centrális elem, lásd [**26**].

## 3. Kváziaritmetikai közepekkel kapcsolatos megőrzési problémák

A 3. fejezetben pozitív definit mátrixok kváziaritmetikai közepeivel foglalkoztunk. Az $f$ függvény által generált, $t \in [0, 1]$ súlyhoz tartozó $M_{f,t} \colon \mathbb{P}_n^2 \to \mathbb{P}_n$ kváziaritmetikai közepet az alábbi formula definiálja:

$$M_{f,t}(A, B) = f^{-1}(tf(A) + (1 - t)f(B)). \tag{2}$$

Megjegyezzük, hogy a formula pozitív számok kváziaritmetikai közepeinek egy nemkommutatív kiterjesztését adja. A legalapvetőbb kváziaritmetikai közepek a *log-euklideszi közép* és a *$\lambda$–hatvány közepek* (melyek általánosítasi mind a számtani, mind a harmonikus középnek). Utóbbi közepek közös súlya $1/2$, generáló függvényei pedig rendre az $x \mapsto \log(x)$ és az $x \mapsto x^\lambda$ függvények, valamely $\lambda \neq 0$ valós számmal.

A 3. fejezetben három típusú, kváziaritmetikai közepekkel kapcsolatos megőrzési problémát vizsgáltunk.

**A) probléma.** Írjuk le kváziaritmetikai közepek homomorfizmusait.

Rámutattuk, hogy egy adott kváziaritmetikai középre nézve a homomorfizmusoknak nincs általános alakjuk, ugyanakkor azon transzformációk, melyek automorfizmusok az összes $t \in [0,1]$ súly esetén az $M_{f,t}$ középre nézve, zárt alakkal állíthatók elő. Ezt követően a fejezet fő részében az alábbi problémát tanulmányoztuk.

**B) probléma.** Határozzuk meg azon transzformációk szerkezetét, melyek megőrzik egy kváziaritmetikai közép valamely normáját.

A problémát általános kváziaritmetikai közepekre korábban megoldatlan volt, de Kubo-Ando közepekkel kapcsolatban megemlítjük a [**28, 31**] publikációkat. A 3. fejezetben a B) problémát oldottuk meg, a generátorfüggvényre és a normára vonatkozó igen általános feltételek mellett.

3. Tétel. (Gaál, Nagy [**12**])
*Tegyük fel, hogy* $|\lim_{x\to 0} f(x)| = \infty$ *és azt, hogy* $f(]0,\infty[)$ *az* $\mathbb{R}$, $]0,\infty[$ *halmazok valamelyike. Legyen* $t \in ]0,1[$ *egy rögzített valós szám és* $N(.)$ *egy unitér-invariáns norma. Továbbá tegyük fel, hogy* $\phi\colon \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n$ *egy bijekció, melyre*

$$N(M_{f,t}(\phi(A),\phi(B))) = N(M_{f,t}(A,B))$$

*tetszőleges* $A, B \in \mathbb{P}_n$ *esetén. Ekkor létezik egy* $U \in M_n(\mathbb{C})$ *unitér mátrix, hogy*

$$\phi(A) = UAU^* \quad \textit{vagy} \quad \phi(A) = UA^{tr}U^*$$

*teljesül minden* $A \in \mathbb{P}_n$ *esetén.*

Az utóbbi eredményünk feltételeivel szerettünk volna a legalapvetőbb kváziaritmetikai közepek közül, a log-euklideszi közepek, valamint a $\lambda$-hatványközepek közül, a lehető legtöbbet lefedni. Nyilván az első, illetve $\lambda < 0$ esetén a második típusú közepek (és így a harmonikus közép is) kielégíti a fenti tétel feltételeit. Ez ugyanakkor nem mondható el $\lambda > 0$ esetén a $\lambda$–hatványközepekről. Utóbbi közepekkel kapcsolatban az alábbi eredményt sikerült igazolnunk.

4. Tétel. (Gaál, Nagy [**12**])
*Legyen* $f(x) = x^\lambda$ $(x > 0)$ *valamely* $\lambda > 0$ *számmal és* $t \in ]0,1[$ *egy rögzített valós szám. Jelölje* $\|.\|_\infty$ *a spektrál normát az* $M_n(\mathbb{C})$ *algebrán. Továbbá tegyük fel, hogy* $\phi\colon \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n$ *egy bijekció, melyre*

$$\|M_{f,t}(\phi(A),\phi(B))\|_\infty = \|M_{f,t}(A,B)\|_\infty$$

*tetszőleges $A, B \in \mathbb{P}_n$ esetén. Ekkor létezik egy $U \in M_n(\mathbb{C})$ unitér mátrix, hogy*

$$\phi(A) = UAU^* \quad \textit{vagy} \quad \phi(A) = UA^{tr}U^*$$

*teljesül minden $A \in \mathbb{P}_n$ esetén.*

Ha $\mathcal{A}$ egy $C^*$-algebra, akkor tetszőleges $t \in [0,1]$ és $a, b \in \mathcal{A}^{++}$ esetén definiálhatjuk az $M_{f,t}(a,b)$ közepet a (2) formula segítségével. Tegyük fel, hogy $f$ növekvő, sima függvény. Ekkor $a, b \in \mathcal{A}^{++}$ és $t \in [0,1]$ esetén $\Gamma_{a,b}(t)$ az alábbi képlettel definiált:

$$\Gamma_{a,b} : [0,1] \to \mathcal{A}^{++}, \quad t \mapsto M_{f,1-t}(A, B).$$

Ha adott egy $|||.|||$ norma az $\mathcal{A}$ algebrán, akkor azt mondjuk, hogy $\phi$ megőrzi a geodetikus $|||.|||$ normáját az $\mathcal{A}^{++}$ halmazon, amennyiben

$$|||\Gamma_{\phi(a),\phi(b)}(t)||| = |||\Gamma_{a,b}(t)||| \tag{3}$$

teljesül minden $t \in [0,1]$ és bármely $a, b \in \mathcal{A}^{++}$ esetén.

**C) probléma.** Adjuk meg azon leképezéseket az $\mathcal{A}^{++}$ halmazon, amelyek megőrzik egy geodetikus normáját.

A C) problémát részben megoldották Szokol és szerzőtársai [**34**, Theorem 4.1], az $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$ mátrixalgebra esetén, a Schatten $p$-normát tekintve. Megjegyezzük, hogy a 3. tétel állítása ennél sokkal erősebb, a következők miatt:

1) egészen általános kváziaritmetikai közepeket tekintettünk, nem csak azokat, amelyeknek a logaritmus a generáló függvényük;
2) a (3) teljesülését csak *egy* rögzített $t \in [0,1]$ esetén követeltük meg;
3) nemcsak a $||.||_p$ normát tekintettük, hanem általános unitér-invariáns normákat.

További hozzájárulásunk a C) probléma megoldásához a következő.

5. Tétel. (Gaál, Nagy [**12**])
*Legyen $\mathcal{A}$ egy $\tau$ normalizált trace-el ellátott $C^*$-algebra. Rögzítsünk egy $p \geq 1$ számot és tekintsük az $f = \log$ függvényt. Ha $\phi\colon \mathcal{A}^{++} \to \mathcal{A}^{++}$ egy bijekció, mely megőrzi a geodetikus Schatten p-normáját, akkor létezik egy $J$ Jordan $^*$-izomorfizmusa az $\mathcal{A}$ algebrának, és egy $c \in \mathcal{A}^{++}$ centrális elem, hogy*

$$\phi(a) = cJ(a), \quad a \in \mathcal{A}^{++}.$$

*Továbbá, $c$ és $J$ kielégítik a $\tau(cJ(x)J(y)) = \tau(xy)$ feltételt, minden $x, y \in \mathcal{A}$ esetén.*

## 4. Kubo-Ando közepek normáit megőrző leképezések Hilbert tér effekteken

A 4. fejezet eredményei egy $H$ Hilbert tér feletti $E(H)$ effekt algebrára vonatkoznak, ami alatt a

$$[0, I] = \{X \in B(H) \ : \ X = X^*, \ 0 \leq X \leq I\}$$

operátor-intervallumot értjük. Továbbá, egy kétváltozós műveletet a pozitív operátorok halmazán középnek nevezünk a Kubo-Ando [**19**] értelemben, ha teljesíti a következő tulajdonságokat. Tetszőleges $A, B, C, D$ és $(A_n), (B_n)$ sorozat esetén

(i) $I\sigma I = I$;
(ii) ha $A \leq C$ és $B \leq D$, akkor $A\sigma B \leq C\sigma D$;
(iii) $C(A\sigma B)C \leq (CAC)\sigma(CBC)$;
(iv) ha $A_n \downarrow A$ és $B_n \downarrow B$, akkor $A_n\sigma B_n \downarrow A\sigma B$

ahol $\downarrow$ a monoton csökkenő konvergenciát jelöli, az erős operátor topológiát tekintve. Amennyiben $\sigma$ egy Kubo-Ando közép, a $\tilde{\sigma}$ transzponáltját az $A\tilde{\sigma}B := B\sigma A$ összefüggés definiálja. A Kubo-Ando elmélet egyik fő eredménye szerint ha $\dim H = d < \infty$, akkor létezik egy $d$-monoton $f_\sigma$ függvény (operátor monoton, ha $\dim H = \infty$), hogy a közép

$$A\sigma B = A^{1/2} f_\sigma(A^{-1/2}BA^{-1/2})A^{1/2}$$

alakba írható, ha az $A$ operátor invertálható. Továbbá az $f_\sigma$ függvény a (iv) tulajdonság miatt egyértelműen meghatározza a $\sigma$ közepet.

Megjegyezzük, hogy az (i)-(ii) tulajdonság következtében az $E(H)$ zárt a fenti, tisztán axiomatikusan definiált, $\sigma$ műveletekre nézve. Így az előző fejezet A) és B) problémái az $E(H)$ effekt algebra kapcsán is vizsgálhatóak.

Ami az A) problémát illeti, Šemrl [**33**] meghatározta az $E(H)$ automorfizmusait a geometriai, illetve a harmonikus középre nézve (Kubo-Ando közepek, melyek generáló függvényei az $x \mapsto \sqrt{x}$, illetve az $x \mapsto 2x/(1+x)$ függvények). A 4. fejezetben a B) problémát vizsgáltuk szimmetrikus normákat és általános Kubo-Ando közepeket tekintve. Egy $N$ normát szimmetrikusnak nevezünk, ha

$$N(AXB) \leq \|A\| N(X) \|B\|$$

teljesül tetszőleges $A, B, X$ operátorok esetén, ahol $\|.\|$ az operátornormát jelöli. Megjegyezzük, hogy a mátrixanalízis területén megjelenő számos norma szimmetrikus, többek között a Schatten és a Ky Fan normák csajádjai is. Továbbá, ha $\dim H < \infty$, akkor minden unitér invariáns norma egyben szimmetrikus is.

6. Tétel. (Gaál, Nagy [**11**])
*Legyen $\sigma$ egy Kubo-Ando közép, illetve $f_\sigma$ egy szigorúan konkáv függvény, melyre $f_\sigma(0) = 0$ vagy $\tilde{f_\sigma}(0) = 0$ teljesül. Továbbá legyen $N$ egy szimmetrikus norma. Ekkor egy $\phi\colon E(H) \to E(H)$ bijekcióra*

$$N(\phi(A)\sigma\phi(B)) = N(A\sigma B), \quad A, B \in E(H)$$

*pontosan akkor, ha létezik egy $U$ unitér-antiunitér operátor $H$-n, melyre*

$$\phi(A) = UAU^*, \quad A \in E(H).$$

Megjegyezzük, hogy az $f_\sigma(0) = 0$ és $\tilde{f_\sigma}(0) = 0$ feltételek ekvivalensek az $A\sigma 0 = 0$ és $0\sigma A = 0$ (minden pozitív $A$ operátorra) feltevésekkel.

Az A) és B) problémák pozitív operátorokon történő vizsgálatával kapcsolatban – az $E(H)$ effekt algebra helyett – az olvasó a [**10, 23, 24, 25, 28**] publikációkban találhat eredményeket.

## 5. Önadjungált nulla-nyomú és ferdén szimmetrikus mátrixok izometriái

Nagy az *"Isometries of the spaces of self-adjoint traceless operators"* című [**30**] cikkében bebizonyította, hogy az $n$-szer $n$-es önadjungált, nulla-nyomú mátrixok $H_n^0$ vektorterének izometriái szürjektívek, és így a Mazur-Ulam tétel következtében egy eltolástól eltekintve lineárisak. Ezt követően Nagy leírta a $H_n^0$ valós vektortér lineáris izometriát, a Schatten $p$-normák családjára nézve, amennyiben $n \neq 3$.

Az 5. fejezet első felében meghatároztuk $H_n^0$ izometria csoportját tetszőleg *unitér invariáns* normára nézve, ami a [**30**] cikkben nyitott problémaként merült fel. Sőt, kiderült, hogy csak egy gyengébb invariancia tulajdonságot kell megkövetelnünk: a kérdéses normának csak az *unitér hasonlósági transzformációkkal* szemben kell invariánsnak lennie. Emellett eredményünk tartalmazta az $n = 3$ esetet is, ami a korábbi tételből hiányzott.

A következő eredményekben $PSU(n)$ jelöli az $SU(n)$

$$\mathrm{Ad} : SU(n) \to GL(n^2 - 1, \mathbb{R}), \quad U \mapsto \mathrm{Int}_U(.)$$

adjungált reprezentáció általi képét $GL(n^2 - 1, \mathbb{R})$-ben. A $PSU(n)$ Lie csoport nyilván megőrzi a $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}\, AB$ trace-formát, így beágyazható a $H_n^0$ ortgonális csoportjába. Jelöljük $O(n^2 - 1, \mathbb{R})$-el ezt a csoportot, továbbá legyen $(.)^{tr}$ a transzponálás.

Ha $H$ egy részcsoportja $G$-nek, akkor a $H \le G$ jelölést alkalmazzuk. Amennyiben a $G$ csoport a $H_1, \ldots H_s$ részcsoportok és a $g_1, \ldots g_t$ elemek által generált, akkor $\langle H_1, \ldots, H_s, g_1, \ldots, g_t\rangle$ jelöli a generált részcsoportot.

Továbbá feltételezzük, hogy $G$ beágyazható $GL(V)$-be valamely $V$ vektortér esetén. Ekkor $C(G)$ és $\mathcal{N}(G)$ jelölik a $G$ csoport centralizátorát és normalizátorát $GL(V)$-ben.

7. Tétel. (Gaál, Guralnick [**9**])
*Legyen $V := H_n^0$, illetve tegyük fel, hogy $n \geq 3$. Legyen $\mathcal{K}$ egy kompakt Lie csoport, melyre $PSU(n) \leq \mathcal{K} \leq GL(V)$. Ekkor az alábbi esetek közül pontosan egy teljesül:*

(a) $\mathcal{K} \leq \mathcal{N}(PSU(n)) = \langle PSU(n), GL(1,\mathbb{R}), (.)^{tr}\rangle$;
(b) $SO(V) \leq \mathcal{K} \leq \mathcal{N}(SO(V)) = \langle O(V), GL(1,\mathbb{R})\rangle$.

Az eredmény közvetlen következményeként az alábbi választ kaptuk Nagy kérdésére.

8. Következmény. *Tegyük fel, hogy $n \geq 3$. Ha $\mathcal{K}$ izometria csoportja valamely unitér invariáns normának a $H_n^0$ téren, akkor a következő esetek lehetségesek:*

(a) $\mathcal{K} = \langle PSU(n), \mathbb{Z}/2, (.)^{tr}\rangle$;
(b) $\mathcal{K} = O(n^2-1,\mathbb{R})$.

Az 5. fejezet második eredménye a valós számtest feletti $n$-szer $n$-es ferdén szimmetrikus mátrixok $K_n(\mathbb{R})$ halmazával kapcsolatos. Jelölje $PSO(n,\mathbb{R})$ az $SO(n,\mathbb{R})$

$$\mathrm{Ad} : SO(n,\mathbb{R}) \to GL(K_n(\mathbb{R})), \quad Q \mapsto \mathrm{Int}_Q(.)$$

adjungált reprezentáció általi képét.

9. Tétel. (Gaál, Guralnick [**9**])
*Legyen $W := K_n(\mathbb{R})$. Tegyük fel, hogy $n \geq 4$. Legyen $\mathcal{K}$ egy kompakt Lie csoport a $PSO(n,\mathbb{R}) \leq \mathcal{K} \leq GL(W)$ tulajdonsággal. Ekkor a következők valamelyike teljesül:*

(a) $n > 4$, $n \neq 8$ *és*

$$\mathcal{K} \leq \mathcal{N}(PSO(n,\mathbb{R})) = \langle PO(n,\mathbb{R}), GL(1,\mathbb{R})\rangle;$$

(b) $n = 4$ *és*

$$\mathcal{K} \leq \mathcal{N}(PSO(4,\mathbb{R})) = \langle PO(4,\mathbb{R}), C(PSO(4,\mathbb{R}))\rangle;$$

(c) $n = 8$ *és*

$$\mathcal{K} \leq \mathcal{N}(PSO(8,\mathbb{R})) = \langle PSO(8,\mathbb{R}), GL(1,\mathbb{R}), S_3\rangle;$$

(d) $SO(W) \leq \mathcal{K} \leq \mathcal{N}(SO(W)) = \langle O(W), GL(1,\mathbb{R})\rangle$.

Definiáljuk az $A^* := \psi(A)$ involúciót a

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{23} \\ -a_{12} & 0 & a_{14} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{14} & 0 & a_{34} \\ -a_{23} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{pmatrix}$$

összefüggéssel. Az előző eredményünk alkalmazásával $n \neq 8$ esetben beláttuk Li és Tsing alábbi, ferdén szimmetrikus mátrixok izometriáira vonatkozó struktúratételét.

10. Tétel. (Li, Tsing [**21**])
*Legyen $L : K_n(\mathbb{R}) \to K_n(\mathbb{R})$ egy lineári transzformáció. Ekkor a következők ekvivalensek:*

(a) *$L$ izometria egy olyan ortogonális kongruencia invariáns normára nézve, amely nem pozitív számszorosa a Frobenius normának;*
(b) *létezik egy $\eta \in \{-1, 1\}$ és egy ortogonális $Q \in O(n, \mathbb{R})$ mátrix, hogy a következők valamelyike teljesül:*
  (i) *$L(X) = \eta QXQ^{-1}$ minden $X \in K_n(\mathbb{R})$ esetén;*
  (ii) *$n = 4$ and $L(X) = \eta QX^*Q^{-1}$ minden $X \in K_n(\mathbb{R})$ esetén.*

Az $n = 8$ esetben láttuk, hogy egy ortogonális kongruencia invariáns norma izometria csoportja ennél bővebb is lehet.

11. Tétel. (Gaál, Guralnick)
*Legyen $\mathcal{K}$ egy olyan $K_8(\mathbb{R})$-on értelmezett ortogonális kongruencia invariáns norma izometria csoportja, amely nem pozitív számszorosa a Frobenius normának. Ekkor a következő esetek lehetségesek:*

(a) $\mathcal{K} = \langle PO(8, \mathbb{R}), \mathbb{Z}/2 \rangle$;
(b) $\mathcal{K} = \langle PSO(8, \mathbb{R}), \mathbb{Z}/2, S_3 \rangle$.

*Megfordítva, az (a) és (b) csoportok mind izometria csoportjai valamely ortogonális kongruencia invariáns normának $K_8(\mathbb{R})$-on.*

# Irodalomjegyzék


[1] W. Arveson, *Analyticity in operator algebras*, Amer. J. Math. **89** (1967), 578–642.

[2] B. Aupetit, *Spectrum-preserving linear mappings between Banach algebras or Jordan-Banach algebras*, J. London Math. Soc. **62** (2000), 917–924.

[3] J. Bourin and F. Hiai, *Anti-norms on finite von Neumann algebras*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **51** (2015), 207–235.

[4] G. Dolinar and P. Šemrl, *Determinant preserving maps on matrix algebras*, Linear Algebra Appl. **348** (2002), 189–192.

[5] M.L. Eaton, *On linear transformations which preserve the determinant*, Illinois J. Math. **13** (1969), 722–727.

[6] G. Frobenius, *Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen*, J. Reine Angew. Math. (1897), 994–1015.

[7] B. Fuglede and R.V. Kadison, *Determinant theory in finite factors*, Ann. of Math. **55** (1952), 520–530.

[8] M. Gaál, *Norm-additive maps on the positive definite cone of a $C^*$-algebra*, Results Math. **73**:151 (2018)

[9] M. Gaál and R.M. Guralnick, *On isometry groups of self-adjoint traceless and skew-symmetric matrices*, Linear Algebra Appl. **541** (2018), 211–220.

[10] M. Gaál and G. Nagy, *A characterization of unitary-antiunitary similarity transformations via Kubo-Ando means*, Ann. Math. (to appear)

[11] M. Gaál and G. Nagy, *Maps on Hilbert space effect algebras preserving norms of operator means*, Acta Sci. Math. (Szeged) **84** (2018), 201–208.

[12] M. Gaál and G. Nagy, *Preserver problems related to quasi-arithmetic means of invertible positive operators*, Integr. Equ. Oper. Theory **90**:7 (2018).

[13] M. Gaál and S. Nayak, *On a class of determinant preserving maps for finite von Neumann algebras*, J. Math. Anal. Appl. **464** (2018), 317–327.

[14] O. Hatori G. Hirasawa and T. Miura, *Additively spectral-radius preserving surjections between unital semisimple commutative Banach algebras*, Cent. Eur. J. Math. **8** (2010), 597–601.

[15] O. Hatori, S. Lambert, A. Luttman, T. Miura, T. Tonev, and R. Yates, *Spectral preservers in commutative Banach algebras*, in Function Spaces in Modern Analysis, K. Jarosz, Edt. Contemporary Mathematics vol. 547, American Mathematical Society, 2011, pp. 103–124.

[16] M. Hosseini and J.J. Font, *Norm-additive in modulus maps between function algebras*, Banach J. Math. Anal. **8** (2014), 79–92.

[17] M. Hosseini and J.J. Font, *Real-linear isometries and jointly norm-additive maps on function algebras*, Mediterr. J. Math. **13** (2016), 1933–1948.

[18] H. Huang, C.N. Liu, P. Szokol, M.C. Tsai and J. Zhang, *Trace and determinant preserving maps of matrices*, Linear Algebra Appl. **507** (2016), 373–388.

[19] F. Kubo and T. Ando, *Means of positive linear operators*, Math. Ann. **246** (1980), 205–224.

[20] C.K. Li and S. Pierce, *Linear preserver problems*, Amer. Math. Monthly **108** (2001), 591–605.

[21] C.K. Li and N.K. Tsing, *Duality between some linear preserver problems. III. c-spectral norms and (skew)-symmetric matrices with fixed singular values*, Linear Algebra Appl. **143** (1991), 67–97.

[22] C.K. Li and N.K. Tsing, *Linear preserver problems: A brief introduction and some special techniques*, Linear Algebra Appl. **162-164** (1992), 217–235.

[23] L. Molnár, *Maps preserving general means of positive operators*, Electron. J. Linear Algebra **22** (2011), 864–874.

[24] L. Molnár, *Maps preserving the geometric mean of positive operators*, Proc. Amer. Math. Soc. **137** (2009), 1763–1770.

[25] L. Molnár, *Maps preserving the harmonic mean or the parallel sum of positive operators*, Linear Algebra Appl. **430** (2009), 3058–3065.

[26] L. Molnár, *Quantum Rényi relative entropies on density spaces of $C^*$-algebras: their symmetries and their essential difference*, submitted.

[27] L. Molnár, Selected Preserver Problems on Algebraic Structures of Linear Operators and on Function Spaces, Springer, 2007.

[28] L. Molnár and P. Szokol, *Transformations preserving norms of means of positive operators and nonnegative functions*, Integr. Equ. Oper. Theory **83** (2015), 271–290.

[29] G. Nagy, *Determinant preserving maps: an infinite dimensional version of a theorem of Frobenius*, Linear Multilinear Algebra **65** (2017), 351–360.

[30] G. Nagy, *Isometries of the spaces of self-adjoint traceless operators*, Linear Algebra Appl. **484** (2015), 1–12.

[31] G. Nagy, *Preservers for the p-norm of linear combinations of positive operators*, Abstr. Appl. Anal. **2014** (2014), Article ID 434121, 9 pages.

[32] S. Pierce et al., *A survey of linear preserver problems*, Linear Multilinear Algebra **33** (1992), 1–129.

[33] P. Šemrl, *Symmetries of Hilbert space effect algebras*, J. London Math. Soc. **88** (2013), 417–436.

[34] P. Szokol, M.C. Tsai and J. Zhang, *Preserving problems of geodesic-affine maps and related topics on positive definite matrices*, Linear Algebra Appl. **483** (2015), 293–308.

[35] V. Tan and F. Wang, *On determinant preserver problems*, Linear Algebra Appl. **369** (2003), 311–317.
[36] T. Tonev and R. Yates, *Norm-linear and norm-additive operators between uniform algebras*, J. Math. Anal. Appl. **357** (2009), 45–53.