

ORTOGONÁLIS SOROK SZUMMÁCIÓJÁRÓL

Csernyák László

Egyetemi doktori értekezés



Diss.

B 83



Bevezetés.

Legyen $\{C_n\}$ ($n=0, 1, \dots$) valós számsorozat és $\{\varphi_n(x)\}$ ($n=0, 1, \dots$) az $[a, b]$ intervallumban ortogonális és normált függvényrendszer.

A /1/
$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \varphi_n(x)$$
 ortogonálsor N -ik (C, α) -közepét ($\alpha > 0$) jelöljük $\sigma_N^{(\alpha)}(x)$ -el, azaz

$$\sigma_N^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{A_N^{(\alpha)}} \sum_{n=0}^N A_{N-n} C_n \varphi_n(x) \quad (N=0, 1, \dots)$$

ahol
$$A_m^{(\alpha)} = \binom{m+\alpha}{m}$$

Akkor mondjuk, hogy az /1/ ortogonálsor az $[a, b]$ intervallumban majdnem mindenütt (C, α) -összegezzhető az $f(x)$ függvényhez, ha

$$\sigma_N^{(\alpha)}(x) \rightarrow f(x) \quad (N \rightarrow \infty)$$

$[a, b]$ -ben majdnem mindenütt.

Ennél erősebb az Abel-Poisson-féle összegezési /röviden A-összegezési/ eljárás. Az /1/ ortogonálsor valamely $x_0 \in [a, b]$ pontban A-összegezzhető, ha a

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \varphi_n(x_0) r^n \quad (0 < r < 1)$$

sor konvergens és a

$$\lim_{r \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} C_n \varphi_n(x_0) r^n = S(x_0)$$

véges határérték létezik.

Négyzetesen integrálható ortogonális sorfejtés esetén, az $\alpha > 0$ paraméter érték mellett a (C, α) -összegezzhetőség és az A-

összegezhetőség egy nullamértékű halmaz kivételével egymással ekvivalens. Ezért tételeink, amelyeket $(C, 1)$ -összegezésre fogunk kimondani, érvényben maradnak (C, α) -összegezés $(\alpha > 0)$ vagy A-összegezés esetén is.

A $(C, 1)$ -összegezés általánosítása a Riesz-féle, röviden $(R, \lambda(n), 1)$ -összegezés. Legyen $\lambda(\omega)$ $(\omega \geq 0)$ pozitív, szigorú értelemben monoton növekvő függvény, $\lambda(0) = 0$ és $\lambda(\omega) \rightarrow \infty$, ha $\omega \rightarrow \infty$. Az /1/ sort az $f(x)$ függvényhez $(R, \lambda(n), 1)$ -összegezhetőnek nevezzük, ha $\omega = n$ és $n \rightarrow \infty$ esetén

$$\sigma_\omega(\lambda, x) = \frac{1}{\lambda(\omega)} \sum_{k \leq \omega} (\lambda(\omega) - \lambda(k)) c_k \varphi_k(x) \rightarrow f(x)$$

majdnem mindenütt.

A Riesz-féle összegezés a $\lambda(n) = n$ esetben a $(C, 1)$ -összegezési eljárást szolgáltatja.

Ha minden monoton növekvő $\{\mu_k\}$ indexsorozatra

$$\sum_{k=0}^n (\lambda(k+1) - \lambda(k)) (S_{\mu_k}(x) - f(x))^2 = O(\lambda(n+1))$$

akkor azt mondjuk, hogy az /1/ sor nagyon erősen $(R, \lambda(n), 1)$ -összegezhető $f(x)$ -hez. A $\mu_k = k$ esetben az /1/ sor erős $(R, \lambda(n), 1)$ -összegezhetőségéről beszélünk.

Kézenfekvő a probléma, hogy melyek azok a sorok amelyek (C, α) - illetve $(R, \lambda(n), 1)$ -összegezhetőek. Menchoff [1] és tőle függetlenül Kaczmarz bizonyította a következő alapvető tételt:

A.TÉTEL. Ha az /1/ ortonormált sor koefficiensei kielégítik a

$$\text{/2/} \quad \sum_{n=3}^{\infty} c_n^2 (\log \log n)^2 < \infty$$

feltételt, akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$ sor (C, α) -összegezhető $[a, b]$ -ben majdnem mindenütt.

Meg lehet mutatni, hogy a /2/ feltétel általában nem javítható. Igaz ugyanis a következő

B.TÉTEL. Legyen $W(n)$ pozitív számsorozat, amelyre

$$W(n) = O(\log \log n) \quad .$$

Megadható egy $\{a_n\}$ koefficiens sorozat és egy az $[a, b]$ alapintervallumban ortonormált $\{\phi_n(x)\}$ függvényrendszer úgy, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 W(n) < \infty$$

és a

$$/3/ \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi_n(x)$$

sor sehol sem $(C, 1)$ -összegezzhető.

Ezt a Menchoff-tételt Tandori [4] a következőképpen finomította:

C.TÉTEL. Legyen adott egy pozitív $\{a_n^*\} \in \ell^{2*}$ számsorozat, amely eleget tesz a

$$\sqrt{n} a_n^* \geq \sqrt{n+1} a_{n+1}^* \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^*)^2 (\log \log n)^2 = \infty$$

feltételeknek. Meg lehet adni az $[a, b]$ alapintervallumban

egy ortonormált $\{\phi_n(x)\}$ függvényrendszert úgy, hogy a /3/ sor

majdnem mindenütt nem $(C, 1)$ -összegezzhető $[a, b]$ -ben, ha az

$\{a_n\}$ sorozat eleget tesz a $a_n \geq \eta a_n^* \quad (n = 1, 2, \dots; \eta = konst)$ fel-
tételnek.

Tandori a bizonyítást csak arra az esetre végezte el amikor a $\{\phi_n(x)\}$ függvényrendszer nem egyenletesen korlátos. Ezért még ugyanebben a munkájában felveti a problémát, hogy vajjon a $\{\phi_n(x)\}$ ortonormált függvényrendszer választható-e egyenletesen korlátosnak. Erre pozitív választ fogunk adni, amennyiben bebizonyítjuk a következő állításunkat:

* azaz $\sum a_n^2 < \infty$

1. TÉTEL; Legyen $\{a_n^*\} \in l^2$ pozitív számsorozat, amelyre

$$/4/ \quad \sqrt{n} a_n^* \geq \sqrt{n+1} a_{n+1}^* \quad (n=1, 2, \dots) \quad \text{és}$$

$$/5/ \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^*)^2 (\log \log n)^2 = \infty$$

Ekkor létezik olyan $\{\phi_n(x)\}$ egyenletesen korlátos, ortonormált függvényrendszer, amelyre a

$$/6/ \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* \phi_n(x)$$

sor majdnem mindenütt nem $(C, 1)$ - összegezhető az $[a, b]$ alapintervallumban.

Alexits [1] és Tandori [2], [3] elégséges feltételeit adták annak, hogy az /1/ sor majdnem mindenütt nagyon erősen $(R, n, 1)$ -összegezhető legyen. Meder [1] az ő tételeikkel analóg tételeket bizonyított az $(R, \lambda(n), 1)$ -összegezhetőségre:

D. TÉTEL. Ha

$$/7/ \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 (\log \log \lambda(n))^2 < \infty$$

akkor az /1/ ortonormált sor $[a, b]$ -ben majdnem mindenütt nagyon erősen $(R, \lambda(n), 1)$ -összegezhető egy $f(x)$ függvényhez.

E. TÉTEL. Legyen $\{a_n\}$ pozitív számsorozat, amelyre

$$/8/ \quad \frac{\lambda(n)}{\lambda(n+1) - \lambda(n)} a_n^2 \geq \frac{\lambda(n+1)}{\lambda(n+2) - \lambda(n+1)} a_{n+1}^2 \quad \text{és} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty.$$

Legyen továbbá $\{c_n\}$ tetszésszerű valós számsorozat,

$$/9/ \quad c_n^2 = O(a_n^2).$$

Ha az /1/ ortonormált sor $[a, b]$ -ben majdnem minde-

nütt $(R, \lambda(n), 1)$ -összegezhető egy $f(x)$ függvényhez, akkor ezen feltételek mellett $[a, b]$ -ben majdnem mindenütt nagyon erősen is $(R, \lambda(n), 1)$ -összegezhető ugyan ehhez a függvényhez.

Tandori vetette fel a problémát, hogy ezen feltételekből következik-e a

$$\sum_{k=0}^n (\lambda(k+1) - \lambda(k)) (S_{V_k}(x) - f(x))^2 = O(\lambda(n+1))$$

egyenlőség akkor is, ha $\{V_k\}$ egymástól különböző természetes számok tetszőszerinti, nem szükségképpen monoton sorozata, azaz következik-e az /1/ sor "ultra erős" $(R, \lambda(n), 1)$ -összegezhetősége. A $\lambda(n) = n$ esetben Leindler [1] erre pozitív választ adott. Meg lehet azonban mutatni, hogy a /7/ feltétel nem minden $\lambda(n)$ függvény esetén elegendő az ultra erős $(R, \lambda(n), 1)$ -összegezhetőséghez. Ez egyszerű következménye az alábbi tételünknek:

2.TÉTEL. Legyen $W(\omega)$ tetszőszerinti, szigorú értelemben monoton növény, pozitív függvény; $W(\omega) \rightarrow \infty$, ha $\omega \rightarrow \infty$. Megadható olyan $\lambda(\omega) \leq W(\omega)$ függvény, hogy ha az /1/ sor $[a, b]$ -ben majdnem mindenütt egy $f(x)$ függvényhez ultra erősen $(R, \lambda(n), 1)$ -összegezhető akkor ugyan ehhez a függvényhez $[a, b]$ -ben majdnem mindenütt konvergál.

KÖVETKEZMÉNY. Megadható valós számoknak egy monoton nem növény $\{C_n\}$ sorozata és egy $\{\phi_n(x)\}$ ortonormált függvényrendszer úgy, hogy alkalmasan választott $\lambda(\omega)$ esetén a

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \phi_n(x)$$

sor sehol sem ultra erősen $(R, \lambda(n), 1)$ -összegezhető az alapintervallumban és

$$/10/ \quad \sum_{n=0}^{\infty} C_n^2 (\log \log \lambda(n))^2 < \infty .$$

További, $\lambda(\omega)$ -ra tett megszorításokkal azonban biztosítható az ultra erős összegeezhetőség is.

3.TÉTEL. Ha minden k természetes szám esetén fennáll az

$$/11/ \quad \frac{\lambda(k+1) - \lambda(k)}{\lambda(k+1)} \geq \frac{\lambda(k+2) - \lambda(k+1)}{\lambda(k+2)}$$

egyenlőtlenség, akkor /7/-ből következik /1/ ultra erős

$(R, \lambda(n), 1)$ -összegeezhetősége $[a, b]$ -ben majdnem mindenütt.

4.TÉTEL. Legyen $\{a_n\}$ olyan pozitív számsorozat, amely eleget tesz /8/-nak. Továbbá legyen $\{c_n\}$ egy tetszésszerű valós számsorozat, amelyre

$$c_n^2 = O(a_n^2)$$

Ha /1/ $[a, b]$ -ben majdnem mindenütt egy $f(x)$ függvényhez $(R, \lambda(n), 1)$ -összegeezhető, akkor /11/ mellett utra erősen is $(R, \lambda(n), 1)$ -összegeezhető ugyan ehhez a függvényhez $[a, b]$ -ben majdnem mindenütt.

Természetesen /11/ helyettesíthető azzal a feltétellel, hogy $\lambda(\omega)$ alulról konkáv, ugyanis ekkor

$$\lambda(k+1) - \lambda(k) \geq \lambda(k+2) - \lambda(k+1)$$

Ebből viszont - figyelembe véve, hogy $\lambda(\omega)$ pozitív, monoton növekvő - azonnal adódik /11/.

1. § Segédtételek.

Tételeink bizonyításához szükségünk lesz több segédtételre, azonban ezek előtt még néhány jelölést vezetünk be. Legyen $\Lambda(\omega)$ a $\lambda(\omega)$ függvény egyértelműen meghatározott inverze, $m_n = \Lambda(2^n)$, $\mu_n = [m_n]$ és $\log_+(x) = \max(1, \log x)$.

Segédtételeink közül az elsőt Zygmund bizonyította.

I. SEGÉDTÉTEL. Annak, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 < \infty$ feltétel mellett az /1/ sor $[a, b]$ -ben majdnem mindenütt $(R, \lambda(n), 1)$ -összegezhető legyen, szükséges és elégséges feltétele az $\{S_{\mu_n}(x)\}$ sorozat konvergenciája $[a, b]$ -ben majdnem mindenütt.

A következő segédtétel Leindlertől [2] származik:

II. SEGÉDTÉTEL: Legyen $\{p_m\}$ és $\{q_m\}$ két tetszőszerinti indexsorozat. Jelölje r_m a p_m és p_{m+1} közötti különböző indexek számát. Akkor a

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=p_m+1}^{p_{m+1}} c_n^2 \right) \log_+^2 r_m < \infty$$

feltételből következik, hogy növekvő m és $p_m < q_k < p_{m+1}$ mellett

$$S_{p_m}(x) - S_{q_k}(x) \rightarrow 0$$

$[a, b]$ -ben majdnem mindenütt.

III. SEGÉDTÉTEL. Legyen $P (\geq 4)$ természetes szám és

$$/12/ \quad 1 \leq C \leq \frac{1}{4} P \quad .$$

Létezik egy C -től és P -től független β szám úgy, hogy a $[-1, \beta]$ intervallumban megadható / C -től és P -től függő/ $\{q_\ell(c, P; x)\}$ ($\ell = 1, \dots, P^2$) ortonormált lépcsősfüggvény rendszer, amelyre a következő feltételek teljesülnek:

megadható C -től és P -től független pozitív M szám
úgy, hogy

$$|q_\ell(c, p; x)| < M \quad (-1 \leq x \leq \beta) \quad (\ell = 1, \dots, P^2)$$

és létezik minden $x \in [\frac{1}{2C}, \frac{1}{C}]$ pontban egy x -től függő
 $m(x) < p^2$ természetes szám, amelyre $q_1(c, p; x), \dots, q_{m(x)}(c, p; x)$
függvényértékek pozitívok és

$$\sum_{\ell=1}^{m(x)} q_\ell(c, p; x) > G \sqrt{C} p \log p,$$

ahol a G C -től és p -től valamint x -től független pozitív
szám.

Ez a segédtétel is ismert / Tandori [4] 75. old./.

IV. SEGÉDTÉTEL. Legyen $\{b_k\}$ monoton nem növő, pozitív, számsoro-
zat és $r_k(x)$ ($k=1, 2, \dots$) a Rademacher féle, $[0, 1]$ intervallum-
ban ortonormált függvényrendszer. Ekkor minden n természetes
számra megadható olyan $E_n \subset [0, 1]$ egyszerű halmaz[†], hogy min-
den $x \in E_n$ pontban

$$/13/ \quad \sum_{i=1}^n b_i r_i(x) \geq \sqrt{n} b_n \quad \text{és}$$

$$/14/ \quad \mu(E_n) \geq \frac{1}{2^\alpha},$$

ahol α $\{b_k\}$ -től és n -től független természetes szám

BIZONYÍTÁS; Vegyünk egy tetszőszerinti n természe-
 tes számot. Az $r_1(x), \dots, r_n(x)$ függvények értelmezésével tulaj-
 donképpen megadjuk a $[0, 1]$ intervallum 2^n számú, egyenlő
 hosszúságú, nyitott $I_\varphi^{(n)}$ ($\varphi = 1, \dots, 2^n$) részintervallumokra
 való felosztását, amelyeken valamennyi $r_i(x)$ ($i=1, \dots, n$) állandó:
 +1 vagy -1. Így az intervallumok mindegyikéhez tartozik az 12
 számú függvényérték előjeleinek egy n -edrendű kom bináci-
 ója, és amíg φ befutja 1-től 2^n -ig az összes természetes

[†] azaz véges sok intervallum egyesítése.

számot, az $r_1(x), \dots, r_n(x)$ függvények $I_\varphi^{(n)}$ -ban felvett értékeinek előjelei az összes n -edrendű kombinációt kimerítik. Így az olyan intervallumok száma, amelyben az n számú függvényérték közül k számú egyenlő $+1$ -el pontosan $\binom{n}{k}$.

Legyen $\frac{n+\sqrt{n}}{2} \leq k_0 \leq n$ tetszőszerinti, de egyenlőre rögzített természetes szám. Az $I_\varphi^{(n)}$ ($\varphi=1, \dots, 2^n$) intervallumok közül válasszuk ki azt az $\binom{n}{k_0}$ számú $I_{\varphi_0(k_0)}^{(n)}$ intervallumot, amelyekben k_0 számú függvény veszi fel az $+1$ értéket. Ha ezek között van legalább egy olyan $I_{\varphi_0(k_0)}^{(n)}$ intervallum, amelyben /13/ nem áll fenn, akkor legyen

$$r_{i_1}(x) = \dots = r_{i_{n-k_0}}(x) = -1 \quad (1 \leq i_q \leq n; q=1, \dots, n-k_0)$$

ha $x \in I_{\varphi_0(k_0)}^{(n)}$.

Mivel feltevésünk szerint

$$/15/ \quad k_0 \geq n - k_0 + \sqrt{n},$$

az ezen intervallumon pozitív függvények közül is kiválaszthatunk $n-k_0$ darabot, legyenek ezek

$$r_{j_1}(x) = \dots = r_{j_{n-k_0}}(x) = 1 \quad (1 \leq j_q \leq n; q=1, \dots, n-k_0), \text{ ha } x \in I_{\varphi_0(k_0)}^{(n)}.$$

A fennmaradt függvényeket jelöljük a következőképpen:

$$r_{m_1}(x) = \dots = r_{m_s}(x) = 1 \quad (1 \leq m_q \leq n; q=1, \dots, s), \text{ ha } x \in I_{\varphi_0(k_0)}^{(n)}.$$

/15/ miatt $s \geq \sqrt{n}$, és mivel $\{b_k\}$ monoton nem növe

$$/16/ \quad \sum_{q=1}^s r_{m_q}(x) b_{m_q} \geq \sqrt{n} b_n$$

Figyelembe véve, hogy

$$\sum_{i=1}^n b_i r_i(x) = \sum_{q=1}^{n-k_0} r_{i_q}(x) b_{i_q} + \sum_{q=1}^{n-k_0} r_{j_q}(x) b_{j_q} + \sum_{q=1}^s r_{m_q}(x) b_{m_q}$$

/13/ csak abban az esetben nem állhat fenn, ha

$$/17/ \quad \left| \sum_{q=1}^{n-k_0} \tau_{iq}(x) b_{iq} \right| \geq \sum_{q=1}^{n-k_0} \tau_{iq}(x) b_{iq}.$$

/16/-és /17/-ből következik, hogy azon intervallumban, amelyben az

$$\tau_{i_1}(x) = \dots = \tau_{i_{n-k_0}}(x) = 1$$

$$\tau_{i_1}(x) = \dots = \tau_{i_{n-k_0}}(x) = -1$$

$$\tau_{m_1}(x) = \dots = \tau_{m_s}(x) = 1$$

előjelkombináció érvényes, /13/ fennáll. Tehát minden olyan intervallumhoz, amelyen /13/ nem áll fenn, találunk olyant amelyen érvényes. Mégpedig, mivel az $\tau_{j_1}(x), \dots, \tau_{j_{n-k_0}}(x)$ függvényeket az $I_{j_0}^{(n)}(k_0)$ intervallumban pozitívok közül tetszésszerint választottuk, több is van ilyen. A fentiekből az is világos, hogy amennyiben /13/ több egymástól különböző intervallumon nem teljesül, ezek mindegyikéhez találunk legalább egy olyant, amelyiken fennáll, és ezek páronként különbözőek. Azt kaptuk, hogy az $\binom{n}{k_0}$ számú $I_{j_0}^{(n)}(k_0)$ intervallum közül legalább $\frac{1}{2} \binom{n}{k_0}$ számun érvényes /13/. Az összes ilyen tulajdonságú intervallumok számát, $N(n)$ -t úgy kapjuk, hogy k_0 -t végigfuttatjuk az $\frac{n+\sqrt{n}}{2}$ és n közötti természetes számokon azaz

$$\begin{aligned} /18/ \quad N(n) &= \frac{1}{2} \sum_{\frac{n+\sqrt{n}}{2} \leq k \leq n} \binom{n}{k} \geq \frac{1}{4} \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} - \sum_{\frac{n-\sqrt{n}}{2} \leq k \leq \frac{n+\sqrt{n}}{2}} \binom{n}{k} \right] = \\ &= \frac{1}{4} \left[2^n - \sum_{\frac{n-\sqrt{n}}{2} \leq k \leq \frac{n+\sqrt{n}}{2}} \binom{n}{k} \right]. \end{aligned}$$

Hogy a jobboldalt becsülhessük, vegyük figyelembe a valószínűségszámításból ismert összefüggést:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{np + \alpha \sqrt{npq} \leq k \leq np + \beta \sqrt{npq}} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

/Pl. Rényi: Valószínűségszámítás. 158. old./

Az $\alpha = -1; \beta = 1; p = q = \frac{1}{2}$ esetben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \sum_{\frac{n-\sqrt{n}}{2} \leq k \leq \frac{n+\sqrt{n}}{2}} \binom{n}{k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Mivel a jobboldal értéke 0 és 1 közé esik, van olyan $0 < k < 1$ n -től független állandó, hogy valamely n_0 -tól kezdve minden n -re

$$\frac{1}{2^n} \sum_{\frac{n-\sqrt{n}}{2} \leq k \leq \frac{n+\sqrt{n}}{2}} \binom{n}{k} \leq k$$

Tehát, ha $n > n_0$, akkor /18/-ből

$$N(n) \geq \frac{1}{4} 2^n (1-k)$$

Ha α az a legkisebb természetes szám, amelyre

$$\frac{1}{2^\alpha} \leq \min \left[\frac{N(1)}{2}, \dots, \frac{N(n_0)}{2^{n_0}}, \frac{1}{4} (1-k) \right],$$

akkor minden n -re

$$/19/ \quad N(n) \geq \frac{2^n}{2^\alpha}$$

Legyen E_n ezen $N(n)$ számú intervallum egyesítése. Ha figyelembe vesszük, hogy $\mu(I_s^{(n)}) = \frac{1}{2^n}$ ($s=1, \dots, 2^n$), akkor /19/-ből azonnal adódik /14/.

V.SEGÉDTÉTEL. Legyen $p \geq 1$ természetes szám és c legyen elegendő /12/-nek. Legyenek $a_1, \dots, a_{p^2}$ természetes számok és $s_0 = 0$, $s_i = a_1 + \dots + a_i$ ($i=1, \dots, p^2$) valamint $\bar{a}_i = a_i$, ha $s_{i-1} < l \leq s_i$ ($i=1, \dots, p^2$). Továbbá legyen $b_1, \dots, b_{s_{p^2}}$ olyan pozitív számsorozat, amelyre a $\{b_j\}$ ($s_{i-1} < j \leq s_i$) részsorozatok monoton nem növekvő és

$$/20/ \quad b_{s_0} \geq b_{s_1} \geq \dots \geq b_{s_{p^2}}$$

Akkor $[0, 1]$ -ben megadható egy $h_\ell(x) = h_\ell(c, p, \{a_i\}, \{b_j\}; x)$ ($\ell=1, \dots, s_{p^2}$) ortonormált lépcsőfüggvény rendszer úgy, hogy

teljesüljenek a következő feltételek:

$$|h_\ell(x)| < \sqrt{1+\beta} M \quad (\ell=1, \dots, p^2),$$

ahol M az III. segédtételben szereplő konstans, továbbá
megadható egy egyszerű halmaz

$$E = E(c; \{a\}) \subset [0, 1],$$

amelyre

$$/21/ \quad \mu(E) \geq \frac{1}{2^{1/\alpha}} \frac{1}{2^{(\beta+1)}} \frac{1}{c}.$$

/ α a IV. segédtételben szereplő konstans/, és minden $x \in E$ -
re létezik egy x -től függő $m(x) < p^2$ természetes szám úgy,

hogy

$$/22/ \quad \frac{b_i}{\sqrt{a_i}} h_i(x) + \dots + \frac{b_{s,m(x)}}{\sqrt{a_{s,m(x)}}} h_{s,m(x)} \geq \sqrt{1+\beta} C \sqrt{c} p \log p b_{s,m(x)}.$$

Ez a Tandori / [1] 155. old./ által közölt segédtétel-
 lel analóg, és bizonyítása is hasonlóan történik.

BIZONYÍTÁS. A $[0, 1]$ intervallumot osszuk fel $N = 2^{a_1} \dots 2^{a_{p^2}}$
 egyenlő részre, legyenek ezek $I_\varrho [u_\varrho, v_\varrho]$ ($\varrho = 1, \dots, N$), tehát

$$\mu(I_\varrho) = \frac{1}{N}.$$

Legyen

$$q_{\ell, \varrho}(x) = \begin{cases} \sqrt{1+\beta} q_\ell(c, p; i-1 + (\beta+1) \frac{x-u_\varrho}{v_\varrho-u_\varrho}) & \text{ha } u_\varrho < x < v_\varrho \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$(\varrho = 1, \dots, N; \ell = 1, \dots, p^2),$$

ahol $q_\ell(c, p; x)$ a III. segédtételben szereplő függvények.

Legyenek továbbá

$$E_\varrho = \left[\frac{v_\varrho - u_\varrho}{\beta+1} \left(\frac{1}{2c} + 1 \right) + u_\varrho, \frac{v_\varrho - u_\varrho}{\beta+1} \left(\frac{1}{c} + 1 \right) + u_\varrho \right] \quad (\varrho = 1, 2, \dots, N).$$

Világos, hogy

$$/23/ \quad \int_{I_\varrho} q_{i, \varrho}(x) q_{j, \varrho}(x) dx = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \frac{1}{N} & i = j \end{cases} \quad (\varrho = 1, \dots, N)$$

és

$$/24/ \quad \mu(E_\varrho) = \frac{1}{N} \frac{1}{2c(\beta+1)}.$$

Minden $x \in E_p$ -hoz adható a III. segédtétel értelmében egy x -től függő $m(x) < p^2$ természetes szám úgy, hogy a

$g_{1,s}(x), \dots, g_{m(x),s}(x)$ függvényértékek pozitívak és

$$/25/ \quad g_{1,s}(x) + \dots + g_{m(x),s}(x) \geq C \sqrt{1+\beta} \sqrt{c} p \log p.$$

Legyen

$$\bar{h}_{s_{i-1}+j}(x) = \sum_{s=1}^N r_j(x) g_{i,s}(x) \quad (i=1, \dots, p^2; j=1, \dots, a_i).$$

Az így értelmezett $\bar{h}_\ell(x)$ ($\ell=1, \dots, sp^2$) függvények lépcsősek. Le-

gyen $1 \leq \ell \leq sp^2$ tetszőszerinti index és $\ell = s_{i-1} + j$. Ekkor

/23/ miatt

$$\int_0^1 \bar{h}_\ell^2(x) dx = \sum_{s=1}^N \int_{I_s} r_j^2(x) g_{i,s}^2(x) dx = \sum_{s=1}^N \int_{I_s} g_{i,s}^2(x) dx = N \cdot \frac{1}{N}.$$

Azaz $\bar{h}_\ell(x)$ ($\ell=1, \dots, sp^2$) a $[0,1]$ intervallumban normált. Az

ortogonalitás is fennáll, ugyanis legyen $1 \leq \ell_1 \leq sp^2$ és

$1 \leq \ell_2 \leq sp^2$ két különböző index. Ha $\ell_1 = s_{i_1-1} + j_1$ és

$\ell_2 = s_{i_2-1} + j_2$, két eset lehetséges: vagy $i_1 \neq i_2$, vagy $i_1 = i_2 (=i)$

és $j_1 \neq j_2$. Mivel $r_j(x)$ [$j=1, \dots, \max(a_1, \dots, a_{p^2})$] az I_s

($s=1, \dots, N$) intervallumban konstans: +1 vagy -1, /23/-ből kö-

vetkezik, hogy az első esetben

$$\begin{aligned} \int_0^1 \bar{h}_{\ell_1}(x) \bar{h}_{\ell_2}(x) dx &= \sum_{s=1}^N \int_{I_s} r_{j_1}(x) r_{j_2}(x) g_{i_1,s}(x) g_{i_2,s}(x) dx = \\ &= \sum_{s=1}^N \text{sign}_{x \in I_s} r_{j_1}(x) r_{j_2}(x) \int_{I_s} g_{i_1,s}(x) g_{i_2,s}(x) dx = 0 \end{aligned}$$

A másik esetben hasonlóan

$$\begin{aligned} \int_0^1 \bar{h}_{\ell_1}(x) \bar{h}_{\ell_2}(x) dx &= \sum_{s=1}^N \int_{I_s} r_{j_1}(x) r_{j_2}(x) g_{i,s}(x) g_{i,s}(x) dx = \\ &= \sum_{s=1}^N \text{sign}_{x \in I_s} r_{j_1}(x) r_{j_2}(x) \int_{I_s} g_{i,s}^2(x) dx = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N \text{sign}_{x \in I_s} r_{j_1}(x) r_{j_2}(x) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N N \int_{I_s} r_{j_1}(x) r_{j_2}(x) dx = \int_0^1 r_{j_1}(x) r_{j_2}(x) dx = 0 \end{aligned}$$

Az is nyilvánvaló, hogy

$$\bar{h}_e(x) \leq \sqrt{1+\beta} M.$$

A IV. segédtétel alapján legalább $\frac{N}{2^\alpha}$ számú I_s ($1 \leq s \leq N$) részintervallumon fennáll /13/. Adott $1 \leq i \leq p^2$ esetén a $\bar{h}_{s_{i-1}+j}(x)$ ($j=1, \dots, a_i$) függvények értelmezését módosíthatjuk úgy, hogy ezen részintervallumok a $[0,1]$ intervallumon egyenletesen oszoljanak szét. Ezt megtehetjük mivel az ortonormált-ságot az I_s ($s=1, \dots, N$) részintervallumok permutálása a-zaz átindexelése nem befolyásolja. Ezt minden $1 \leq i \leq p^2$ -re vé-gezzük el, és az így létrejött függvények legyenek

$$h_e(x) = h_e(c, p, \{a_i\}, \{b_i\}; x) \quad (l=1, \dots, Sp^2).$$

Ez azt jelenti, hogy ha $x \in I_{k2^\alpha+1}$ ($k=0, \dots, \frac{N}{2^\alpha}-1$), akkor /13/ fennáll, amiből viszont folyik, hogy

$$x \in E_{k2^\alpha+1} \quad (k=0, \dots, \frac{N}{2^\alpha}-1)$$

esetén

$$/26/ \quad \sum_{j=1}^{a_i} b_{s_{i-1}+j} r_j(x) q_{i,s}(x) \geq \sqrt{a_i} q_{i,s}(x) b_{s_i} \quad (i=1, \dots, m(x)).$$

Legyen

$$E = E(c, \{a_i\}) = \bigcup_{k=0}^{\frac{N}{2^\alpha}-1} E_{k2^\alpha+1}.$$

/24/-ből

$$\mu(E) \geq N \frac{1}{2^\alpha} \frac{1}{N} \frac{1}{2c(\beta+1)} = \frac{1}{2^\alpha} \frac{1}{2(\beta+1)} \frac{1}{c}$$

Ha $x \in E$, akkor van olyan k ($0 \leq k \leq \frac{N}{2^\alpha}-1$), hogy $x \in E_{k2^\alpha+1}$.

Következésképpen /25/-ből és /26/-ből /20/ miatt

$$\begin{aligned} & \frac{b_1}{\sqrt{a_1}} h_1(x) + \dots + \frac{b_{s_{m(x)}}}{\sqrt{a_{s_{m(x)}}}} h_{s_{m(x)}}(x) = \sum_{i=1}^{m(x)} \sum_{j=1}^{a_i} \frac{b_{s_{i-1}+j}}{\sqrt{a_i}} h_{s_{i-1}+j}(x) = \\ & = \sum_{i=1}^{m(x)} \frac{1}{\sqrt{a_i}} \sum_{j=1}^{a_i} b_{s_{i-1}+j} r_j(x) q_{i,s}(x) \geq \sum_{i=1}^{m(x)} \frac{1}{\sqrt{a_i}} \sqrt{a_i} b_{s_i} q_{i,s}(x) = \\ & = \sum_{i=1}^{m(x)} b_{s_i} q_{i,s}(x) \geq b_{s_{m(x)}} \sum_{i=1}^{m(x)} q_{i,s}(x) \geq C \sqrt{1+\beta} \sqrt{c} p \log p b_{s_{m(x)}}. \end{aligned}$$

2. § A tételek bizonyítása.

I. TÉTEL BIZONYÍTÁSA: Tételünk bizonyításában felhasználjuk Tandori alapgondolatát. /L. Tandori [1] 161. old. és [4] 80. old./

/4/-ből következik, hogy

$$a_n^* = \frac{1}{\sqrt{n} \lambda_n} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

ahol $\{\lambda_n\}$ egy pozitív, monoton nem-csökkenő számsorozat. Így

/5/-ből

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\log_2 n)^2}{\lambda_{2^n}^2} = \infty$$

Legyen $l_n = \lambda_{2^n}$ ($n = 2, 3, \dots$). l_n monotonitása miatt

$$/27/ \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+1} \log_2^2 4^{n+1}}{l_{4^{n+1}}^2} = \infty.$$

Legyenek $3 \leq \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_m < \dots$ azon indexek, amelyekre

$$/28/ \quad \frac{4^{\mu_{m+1}} \log_2^2 4^{\mu_{m+1}}}{l_{4^{\mu_{m+1}}}^2} \geq 2^{3-\mu_m}.$$

A fennmaradt indexekre /27/ véges, tehát /28/-ből

$$/29/ \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4^{\mu_{m+1}} \log_2^2 4^{\mu_{m+1}}}{l_{4^{\mu_{m+1}}}^2} = \infty.$$

Legyen

$$C_m = \frac{l_{4^{\mu_{m+1}}}^2}{4^{\mu_{m+1}} \log_2^2 4^{\mu_{m+1}}} + 1 \quad (m = 1, 2, \dots).$$

/28/ miatt

$$/30/ \quad 1 \leq C_m \leq 2^{\mu_m - 2} \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Továbbá

$$\frac{1}{C_m} \geq \frac{1}{2} \min \left\{ 1, \frac{4^{\mu_{m+1}} \log_2^2 4^{\mu_{m+1}}}{l_{4^{\mu_{m+1}}}^2} \right\} \quad (m = 1, 2, \dots)$$

és /29/-ből

/31/

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{C_m} = \infty$$

Konstruálunk az $[a, b]$ intervallumban egy ortonormált, egyenletesen korlátos $\{\phi_n(x)\}$ ($n=0, 1, 2, \dots$) függvényrendszert és mérhető $E_m \subseteq [a, b]$ halmazoknak olyan sorozatát, hogy

a/ minden $x \in E_m$ esetén adható egy $n_m(x) (< 4^{\mu_{m+1}} - 1)$ természetes szám úgy, hogy

$$/32/ \quad \left| a_{2^{N_{m+1}+1}}^* \phi_{2^{N_{m+1}+1}}(x) + \dots + a_{2^{N_m+n_m(x)+1}}^* \phi_{2^{N_m+n_m(x)+1}}(x) \right| \geq D$$

ahol D m -től és x -től független szám,

$$N_m = 4^{\mu_1} + \dots + 4^{\mu_m} \quad (m=1, 2, \dots),$$

b/ az E_m ($m=0, 1, \dots$) halmazok sztochasztikusan függetlenek és

$$/33/ \quad \mu(E_m) \geq \frac{b-a}{2(p+1)} \frac{1}{2^\alpha} \frac{1}{C_{m+1}},$$

ahol α az V. segédtételben szereplő konstans.

Fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$/34/ \quad N_m = 4^{\mu_1} + \dots + 4^{\mu_m} \leq 4^{\mu_m} + 4^{\mu_m-1} + \dots + 4^{\mu_m-m} < 4^{\mu_m+1} \quad (m=1, 2, \dots).$$

Legyen $I = [u, v]$ tetszőszerinti intervallum és

$$h_c(c, p, \{a\}, \{b\}, I; x) = \begin{cases} h_c(c, p, \{a\}, \{b\}; \frac{x-u}{v-u}) & u < x < v \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$(l=1, \dots, S_{p^2})$$

ahol $h_c(c, p, \{a\}, \{b\}; x)$ ($l=1, \dots, S_{p^2}$) az V. segédtételben szereplő függvények. Továbbá legyen $E(I)$ az $E = E(c, \{a\})$ halmaz képe, amely az $y = u + (v-u)x$ transzformációval adódik.

Nyilvánvaló, hogy

$$/35/ \quad \int_I h_i(c, p, \{a\}, \{b\}, \bar{I}; x) h_j(c, p, \{a\}, \{b\}, \bar{I}; x) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \mu(I) & i = j \end{cases}$$

és

$$/36/ \quad \mu(E(I)) \geq \frac{\mu(I)}{2(\beta+1)} \cdot \frac{1}{2^\alpha} \cdot \frac{1}{c}$$

Minden $x \in E(I)$ létezik egy x -től függő $m(x)$ ($< p$) természetes szám, amelyre

$$/37/ \quad \frac{b_1}{\sqrt{a_1}} h_1(c, p, \{a\}, \{b\}, \bar{I}; x) + \dots + \frac{b_{s_{m(x)}}}{\sqrt{a_{s_{m(x)}}}} h_{s_{m(x)}}(c, p, \{a\}, \{b\}, \bar{I}; x) \geq \\ \geq C \sqrt{1+\beta} \sqrt{c} p \log p b_{s_{m(x)}}$$

ahol $c; s_1, \dots, s_{p^2}; \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{s_{p^2}}; b_1, \dots, b_{s_{p^2}}$ az V. segédtételben szereplő számok.

Legyen

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}} t_n\left(\frac{x-a}{b-a}\right) \quad (n=0, 1, 2)$$

ahol $t_n(x)$ az n -ik Rademacher függvény. Természetesen $\phi_n(x)$ ($n=0, 1, 2$) $[a, b]$ -ben ortonormált lépcsősfüggvények.

Legyen $s_0^{(m)} = 0, \quad s_i^{(m)} = a_i^{(m)} + \dots + a_i^{(m)} \quad (i=1, \dots, 4^{\mu_{m+1}})$

$$\bar{a}_j^{(m)} = a_i^{(m)} = 2^{N_{m+1}+i}, \quad \text{ha} \quad s_{i-1}^{(m)} < j \leq s_i^{(m)}$$

$$b_j^{(m)} = a_{2^{N_{m+1}+j}}^* \sqrt{\bar{a}_j^{(m)}} \quad (j=1, \dots, s_{4^{\mu_{m+1}}}^{(m)})$$

Mivel $\{a_i^*\}$ monoton nem növekvő és $\{\bar{a}_j^{(m)}\}$ állandó, ha $s_{i-1}^{(m)} < j \leq s_i^{(m)}$ $i=1, \dots, 4^{\mu_{m+1}}$, a $\{b_j^{(m)}\}$ sorozatra érvényesek az V. segédtétel kritériumai: a $\{b_j^{(m)}\}$ ($s_{i-1}^{(m)} < j \leq s_i$) részsorozatok monoton

nem növekvők és

$$/38/ \quad b_{s_i^{(m)}}^{(m)} = \frac{1}{\lambda_{2^{N_{m+1}+s_i^{(m)}}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

miatt $\{\lambda_n\}$ monotonitásából azonnal következik /20/.

Jelölje I_s ($s=1, \dots, 4$) az $[a, b]$ negyedét és $\bar{I}_s'$ ill. $\bar{I}_s''$

az I_s két felét. Alkalmazzuk az V. segédtételt a következő e-

setben: $c_i = \left[\frac{4^{\mu_i+1}}{4^{\mu_i+1} \log^2 4^{\mu_i+1}} + 1 \right]; \quad p_i = 2^{\mu_i}; \quad a_i^{(0)} = 2^i \quad (i=1, \dots, p^2)$

$$b_j^{(0)} = a_{2+j}^* \sqrt{\bar{a}_j^{(0)}} \quad (j=1, \dots, S_{p^2}^{(0)})$$

Legyen
$$\Phi_{2+l}(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}} \left[\sum_{s=1}^h h_s(c_i, p_i, \{a^{(0)}\}, \{b^{(0)}\}, I'_s; x) - \sum_{s=1}^h h_s(c_i, p_i, \{a^{(0)}\}, \{b^{(0)}\}, I''_s; x) \right] \quad (l=1, \dots, 2+\dots+2^{p^2})$$

$$E_0 = \bigcup_{s=1}^h [E(c_i, I'_s) \cup E(c_i, I''_s)]$$

Az V. segédtétel miatt $\Phi_m(x)$ ($2 < m \leq 2^{N_1+1}$) lépcsősfüggvény. Az ortonormáltság a definícióból és /35/-ből következik. Ha $x \in E_0$, akkor van olyan $1 \leq s \leq h$, hogy vagy $x \in E(c_i, I'_s)$ vagy $x \in E(c_i, I''_s)$. Tekintsük például az első esetet. Szintén az V. segédtétel értelmében van olyan $m_0(x) < 4^{\mu_1} - 1$ természetes szám, hogy

$$|a_{2+1}^* \Phi_{2+1}(x) + \dots + a_{2+1+m_0(x)}^* \Phi_{2+1+m_0(x)}(x)| =$$

$$= \left| a_{2+1}^* \frac{\sqrt{\bar{a}_1^{(0)}}}{\sqrt{\bar{a}_1^{(0)}}} \Phi_{2+1}(x) + \dots + a_{2+1+m_0(x)}^* \frac{\sqrt{\bar{a}_{S_{m_0(x)}^{(0)}}^{(0)}}}{\sqrt{\bar{a}_{S_{m_0(x)}^{(0)}}^{(0)}}} \Phi_{2+1+m_0(x)}(x) \right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b-a}} \left| \frac{b_1^{(0)}}{\sqrt{a_1^{(0)}}} h_1(c_i, p_i, \{a^{(0)}\}, \{b^{(0)}\}, I'_s; x) + \dots + \frac{b_{S_{m_0(x)}^{(0)}}^{(0)}}{\sqrt{a_{S_{m_0(x)}^{(0)}}^{(0)}}} h_{S_{m_0(x)}^{(0)}}(c_i, p_i, \{a^{(0)}\}, \{b^{(0)}\}, I'_s; x) \right|$$

Tehát /37/ és /38/ miatt

$$|a_{2+1}^* \Phi_{2+1}(x) + \dots + a_{2+1+m_0(x)}^* \Phi_{2+1+m_0(x)}(x)| \geq C \frac{\sqrt{1+\beta}}{\sqrt{b-a}} \sqrt{c_i} p_i \log p_i \frac{1}{\sqrt{2} \lambda_{2+1+m_0(x)}} =$$

$$= C \frac{\sqrt{1+\beta}}{\sqrt{b-a}} \left(\frac{4^{\mu_1+1}}{4^{\mu_1+1} \log^2 4^{\mu_1+1}} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} 2^{\mu_1} \log 2^{\mu_1} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\lambda_{2+1+m_0(x)}} >$$

$$> C \left(\frac{1+\beta}{b-a} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\lambda_{2^{N_1+1}}}{2^{\mu_1+1} \log 4^{\mu_1+1}} 2^{\mu_1} \log 2^{\mu_1} \frac{1}{\sqrt{2} \lambda_{2+1+m_0(x)}}$$

Mivel $m_0(x) < N_1$ és $\{\lambda_n\}$ monoton a $D = \frac{1}{16} C \left(\frac{\beta+1}{b-a} \right)^{\frac{1}{2}}$ esetben /32/ fennáll.

A második esetben $x \in \mathbb{E}(C, I_s'')$ / hasonlóan látható be /32/ és /33/. Tehát a/ és b/ $m=0$ -nál teljesül.

Legyen $k (\geq 1)$ egy tetszőszerinti természetes szám. Tegyük fel, hogy $\phi_n(x)$ ($0 \leq n \leq 2^{N_{k+1}}$) és E_m ($0 \leq m \leq k-1$) már definiálva vannak úgy, hogy $[a, b]$ -ben ezek a függvények ortonormált rendszert alkotnak, valamint a/ és b/ teljesülnek. Adható $[a, b]$ -nek egy véges felosztása úgy, hogy minden egyes I_s ($s=1, \dots, r$) részintervallumban minden $\phi_n(x)$ ($0 \leq n \leq 2^{N_{k+1}}$) függvény konstans, és minden E_m ($0 \leq m \leq k-1$) halmaz néhány intervallum egyesítése. Jelöljük I_s' -vel és I_s'' -vel I_s ($s=1, \dots, r$) két felét. Alkalmazzuk az V. segédtételt a következő számokra:

$$c_{k+1} = \frac{2^{\mu_{k+1}+1}}{4^{\mu_{k+1}+1} \log^2 4^{\mu_{k+1}+1}} + 1; \quad p_{k+1} = 2^{\mu_{k+1}}; \quad a_i^{(k)} = 2^{N_{k+1}+i} \quad (i=1, \dots, p^2)$$

$$b_j^{(k)} = a_{2^{N_{k+1}}+j}^{(k)} \sqrt{a_j^{(k)}} \quad (j=1, \dots, 2^{N_{k+1}} + \dots + 2^{N_k+p_{k+1}^2})$$

Legyen
$$E_k = \bigcup_{s=1}^r [E(c_{k+1}, I_s') \cup E(c_{k+1}, I_s'')]$$

és
$$\phi_{2^{N_{k+1}}+l}(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}} \left[\sum_{s=1}^r h_e(c_{k+1}, p_{k+1}, \{a^{(k)}\}, \{b^{(k)}\}, I_s'; x) - \sum_{s=1}^r h_e(c_{k+1}, p_{k+1}, \{a^{(k)}\}, \{b^{(k)}\}, I_s''; x) \right] \quad (l=1, \dots, 2^{N_{k+1}} + \dots + 2^{N_k+p_{k+1}^2})$$

Az V. segédtétel alapján a $\phi_n(x)$ ($2^{N_{k+1}} < n \leq 2^{N_{k+1}+1}$) függvények lépcsősek. Az ortonormáltságuk a következőképpen látható be.

Először legyen $1 \leq i \leq 2^{N_{k+1}+1} - 2^{N_{k+1}}$ és $1 \leq j \leq 2^{N_{k+1}+1} - 2^{N_{k+1}}$.

/35/ miatt

$$\begin{aligned} & \int \phi_{2^{N_{k+1}}+i}(x) \phi_{2^{N_{k+1}}+j}(x) dx = \\ &= \frac{1}{b-a} \left\{ \sum_{s=1}^r \int_{I_s'} h_i(c_{k+1}, p_{k+1}, \{a^{(k)}\}, \{b^{(k)}\}, I_s'; x) h_j(c_{k+1}, p_{k+1}, \{a^{(k)}\}, \{b^{(k)}\}, I_s'; x) dx + \right. \\ &+ \left. \sum_{s=1}^r \int_{I_s''} h_i(c_{k+1}, p_{k+1}, \{a^{(k)}\}, \{b^{(k)}\}, I_s''; x) h_j(c_{k+1}, p_{k+1}, \{a^{(k)}\}, \{b^{(k)}\}, I_s''; x) dx \right\} = \\ &= \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \frac{1}{b-a} \sum_{s=1}^r (\mu(I_s') + \mu(I_s'')) = 1 & i = j \end{cases} \end{aligned}$$

Legyen továbbá $0 \leq m \leq 2^{N_k+1}$ és $1 \leq \ell \leq 2^{N_{k+1}+1} - 2^{N_k+1}$.

Jelöljük $C_p(m)$ -el a $\phi_m(x)$ I_p -ban felvett értékét. Ekkor

$$\int_a^b \phi_m(x) \phi_{2^{N_k+1}+\ell}(x) dx = \frac{1}{\sqrt{b-a}} \left\{ \sum_{s=1}^r C_p(m) \int_{I_p^i} h_\ell(c_{k+1}, p_{k+1}, \{a^{(k)}\}, \{b^{(k)}\}, I_p^i; x) dx - \right. \\ \left. - \sum_{s=1}^r C_p(m) \int_{I_p''} h_\ell(c_{k+1}, p_{k+1}, \{a^{(k)}\}, \{b^{(k)}\}, I_p''; x) dx \right\} = 0$$

/36/-ből

$$\mu(E_k) = \frac{1}{2^{(\beta+1)}} \cdot \frac{1}{2^\alpha} \cdot \frac{1}{C_{k+1}} \sum_{s=1}^r (\mu(I_p^i) + \mu(I_p'')) = \frac{b-a}{2^{(\beta+1)}} \cdot \frac{1}{2^\alpha} \cdot \frac{1}{C_{k+1}}$$

tehát /33/ fennáll. Az E_m ($0 \leq m \leq k$) halmazok sztochasztikus függetlensége nyilvánvaló. Ha $x \in E_k$, akkor van olyan $1 \leq p \leq r$, hogy vagy $x \in E(c_{k+1}, I_p^i)$ vagy $x \in E(c_{k+1}, I_p'')$.

Tekintsük például az első esetet. Az V. segédétel értelmében van olyan $m_k(x) < 4^{\mu_{k+1}} - 1$ természetes szám, hogy

$$\left| a_{2^{N_k+1}+1}^* \phi_{2^{N_k+1}+1}(x) + \dots + a_{2^{N_k}+m_k(x)+1}^* \phi_{2^{N_k}+m_k(x)+1}(x) \right| = \\ = \left| a_{2^{N_k+1}+1}^* \frac{\sqrt{\bar{a}_1^{(k)}}}{\sqrt{\bar{a}_1^{(k)}}} \phi_{2^{N_k+1}+1}(x) + \dots + a_{2^{N_k}+m_k(x)+1}^* \frac{\sqrt{\bar{a}_{S_{m_k(x)}^{(k)}}^{(k)}}}{\sqrt{\bar{a}_{S_{m_k(x)}^{(k)}}^{(k)}}} \phi_{2^{N_k}+m_k(x)+1}(x) \right| = \\ = \left| \frac{b_1^{(k)}}{\sqrt{\bar{a}_1^{(k)}}} h_1(c_{k+1}, p_{k+1}, \{a^{(k)}\}, \{b^{(k)}\}, I_p^i; x) + \dots + \frac{b_{S_{m_k(x)}^{(k)}}^{(k)}}{\sqrt{\bar{a}_{S_{m_k(x)}^{(k)}}^{(k)}}} h_{S_{m_k(x)}^{(k)}}(c_{k+1}, p_{k+1}, \{a^{(k)}\}, \{b^{(k)}\}, I_p^i; x) \right| \frac{1}{\sqrt{b-a}}$$

A /37/ és /38/ összefüggés miatt

$$\left| a_{2^{N_k+1}+1}^* \phi_{2^{N_k+1}+1}(x) + \dots + a_{2^{N_k}+m_k(x)+1}^* \phi_{2^{N_k}+m_k(x)+1}(x) \right| \geq C \frac{\sqrt{1+\beta}}{\sqrt{b-a}} \sqrt{C_{k+1}} p_{k+1} \frac{\log p_{k+1}}{\sqrt{2} \lambda_{2^{N_k}+m_k(x)+1}} = \\ = C \frac{\sqrt{1+\beta}}{\sqrt{b-a}} \left(\frac{\ell_{4^{\mu_{k+1}+1}}^2}{4^{\mu_{k+1}+1} \log^2 4^{\mu_{k+1}+1}} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} 2^{\mu_{k+1}} \log 2^{\mu_{k+1}} \frac{1}{\lambda_{2^{N_k}+m_k(x)+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Mivel $N_k + m_k(x) < N_{k+1}$ és $\{\lambda_m\}$ monoton, D fenti értéke mel-

lett /32/ fennáll. Tehát a/ és b/ $m=k$ -nál is érvényes. Teljes indukció alkalmazásával adódik, hogy minden m -re igaz.

/31/ és /33/ miatt

$$\sum_{m=0}^{\infty} \mu(E_m) = \infty$$

Ebből és az E_m halmazok sztochasztikus függetlenségéből a második Borel-Cantellischen lemmát alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\mu(\overline{\lim_{m \rightarrow \infty} E_m}) = \infty$$

Ha

$$x \in \overline{\lim_{m \rightarrow \infty} E_m}$$

/32/ végtelen sok m indexre fennáll. Tehát a /6/ sor 2^m -ik részletösszegei $[a, b]$ -ben majdnem mindenütt divergensek.

Mivel $a_n^* \in \ell^2$, a Kolmogorov tételből következik, hogy majdnem mindenütt nem $(c, 1)$ -összegezzhető.

Ezzel tételünket igazoltuk.

2. TÉTEL BIZONYÍTÁSA: A $\lambda(\omega) \leq W(\omega)$ függvény megadható úgy, hogy létezzék természetes számoknak egy szigorú értelemben monoton növő $\{k_i\}$ sorozata, amelynek minden tagjára

$$\text{/39/} \quad \frac{\lambda(k_{i+1}) - \lambda(k_i)}{\lambda(k_{i+1})} \geq \tau > 0$$

ahol τ k_i -től független állandó.

Legyen $\{S_m(x)\}$ az /1/ sor részletösszegeinek sorozata. Megadható az egymástól különböző természetes számokból álló $\{v_k\}$ indexsorozat úgy, hogy a $v_{k_i} = 2i+1$ egyenlőség minden i -re teljesüljön, ugyanis, ha a $\{k_i\}$ sorozat kimeríti az összes természetes számot, akkor tételünk állítása nyilvánvaló.

/33/-ből és /1/ ultraerős $(R, \lambda(m), 1)$ -összegezzhetőségéből következik, hogy $[a, b]$ -ben majdnem mindenütt

$$r(S_{2i+1}(x) - f(x))^2 = r(S_{\nu_{k_i}}(x) - f(x))^2 \leq \frac{1}{\lambda(k_i+1)} \sum_{j=1}^k (\lambda(j+1) - \lambda(j)) (S_{\nu_j}(x) - f(x))^2 \rightarrow 0$$

Azaz $S_{2i+1}(x) - f(x) \rightarrow 0$ $[a, b]$ -ben majdnem mindenütt.

Hasonlóan látható be, hogy a részletösszegek sorozatának páros indexű részsorozata is $f(x)$ -hez konvergál $[a, b]$ -ben majdnem mindenütt. Ez viszont azt jelenti, hogy maga a sorozat is.

Ezzel állításunkat igazoltuk.

A KÖVETKEZMÉNY BIZONYÍTÁSA: Legyen $\{C_n\}$ valós számoknak monoton nem-növekvő sorozata, amely kielégíti a

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n^2 (\log \log n)^2 < \infty \text{ és } \sum_{n=0}^{\infty} C_n^2 \log^2 n = \infty$$

feltételeket. Tandori ismert tétele alapján adható olyan $\{\phi_n(x)\}$ ortonormált függvényrendszer, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} C_n \phi_n(x)$ sor mindenütt divergens. Ha $\lambda(n) \leq n$ eleget tesz /39/-nek, akkor $W(n)=n$ esetre alkalmazva tételünket adódik, hogy a sor nem lehet ultra erősen $(R, \lambda(n), 1)$ -összegezzhető shol sem, ugyanis akkor konvergencia lenne. Az nyilvánvaló, hogy a fenti feltételek mellett /10/ fennáll.

3. TÉTEL BIZONYÍTÁSA: A bizonyítás alapgondolata Leindlertől származik.

Zygmund ismert tétele alapján /7/-ből következik, hogy az /1/ sor majdnem mindenütt, $(R, \lambda(n), 1)$ -összegezzhető, és így az I. segédtétel miatt $\{S_{\mu_n}(x)\}$ majdnem mindenütt konvergens $[a, b]$ -ben.

Legyen

$$\sum_{k=\mu_m+1}^{\mu_{m+1}} C_k^2 = C_m^2$$

Ha $m (\geq 2)$ olyan tetszőszerinti természetes szám, amelyre

$C_n \neq 0$, legyen $\tau_0(n) = \mu_n$ és $\tau_i(n)$ ($1 \leq i \leq N_n$) az a legkisebb természetes szám, amelyre

$$\sum_{k=\tau_{i-1}(n)+1}^{\tau_i(n)} C_k^2 \geq \frac{C_n^2}{n}$$

A $C_n = 0$ esetben legyen $\tau_0(n) = \mu_n$ és $\tau_i(n) = \mu_{n+1}$. Természetesen $N_n \leq n$. Mivel /7/ miatt

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=\mu_n+1}^{\mu_{n+1}} C_k^2 \right) \log_+^2 N_n &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=\mu_n+1}^{\mu_{n+1}} C_k^2 \right) \log_+^2 n \leq \\ &\leq O(1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=\mu_n+1}^{\mu_{n+1}} C_k^2 (\log \log \lambda(k))^2 \right) < \infty, \end{aligned}$$

alkalmazhatjuk a II. segédteételt, amely szerint

$$S_{\tau_i(n)}(x) - S_{\mu_n}(x) \longrightarrow 0$$

azaz $S_{\tau_i(n)}(x)$ is konvergál $[a, b]$ -ben majdnem mindenütt $f(x)$ -hez.

Definiáljunk egy $\{v_k\}$ indexsorozatot a következőképpen:

legyen

$$v_k = \tau_i(n) \quad \text{ha} \quad \tau_i(n) \leq v_k < \tau_{i+1}(n)$$

és

$$v_k = \tau_{N_n}(n) \quad \text{ha} \quad \tau_{N_n}(n) \leq v_k < \mu_{n+1}$$

Ekkor

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\lambda(n+1)} \sum_{k=0}^n (\lambda(k+1) - \lambda(k)) (S_{v_k}(x) - f(x))^2 \leq \\ &\leq \frac{2}{\lambda(n+1)} \sum_{k=0}^n (\lambda(k+1) - \lambda(k)) (S_{v_k}(x) - S_{v_k}(x))^2 + \frac{2}{\lambda(n+1)} \sum_{k=0}^n (\lambda(k+1) - \lambda(k)) (S_{v_k}(x) - f(x))^2 \end{aligned}$$

Mivel $S_{v_k}(x) \rightarrow f(x)$, a jobboldal második tagja $[a, b]$ -ben majdnem mindenütt nullához tart. Állításunk igazolásához elég megmutatni, hogy az első tagra ugyanez érvényes.

E célból végezzük el a következő becslést:

$$/40/ \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda(k+1) - \lambda(k)}{\lambda(k+1)} \int_a^b (S_{\nu_k}(x) - S_{\nu_k}(x))^2 dx = O(1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda(k+1) - \lambda(k)}{\lambda(k+1)} \sum_{i=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} C_i^2 =$$

$$= O(1) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\mu_n \leq \nu_k \leq \mu_{n+1}} \frac{\lambda(k+1) - \lambda(k)}{\lambda(k+1)} \sum_{i=\nu_k}^{\nu_{k+1}} C_i^2 = O(1) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\mu_n \leq \nu_k < \mu_{n+1}} \frac{\lambda(k+1) - \lambda(k)}{\lambda(k+1)} \right) \frac{C_n^2}{n}$$

Mivel

$$\sum_{k=\mu_n}^{\mu_{n+1}-1} \frac{\lambda(k+1) - \lambda(k)}{\lambda(k+1)} \leq 2$$

/11/ miatt

$$\sum_{\mu_n \leq \nu_k < \mu_{n+1}} \frac{\lambda(k+1) - \lambda(k)}{\lambda(k+1)} \leq \sum_{k=0}^{\mu_{n+1}-1} \frac{\lambda(k+1) - \lambda(k)}{\lambda(k+1)} \leq 2(n+1)$$

Ezt /40/-be írva azt kapjuk, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda(k+1) - \lambda(k)}{\lambda(k+1)} \int_a^b (S_{\nu_k}(x) - S_{\nu_k}(x))^2 dx \leq O(1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(n+1)}{n} C_n^2 < \infty$$

Ebből B. Levi tétele alapján a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda(k+1) - \lambda(k)}{\lambda(k+1)} (S_{\nu_k}(x) - S_{\nu_k}(x))^2$$

sor $[a, b]$ -ben majdnem mindenütt konvergál, ami a Kronecker lemma szerint azt jelenti, hogy

$$\frac{1}{\lambda(n+1)} \sum_{k=1}^n (\lambda(k+1) - \lambda(k)) (S_{\nu_k}(x) - S_{\nu_k}(x))^2 \rightarrow 0 \quad \text{ha } n \rightarrow \infty$$

$[a, b]$ -ben majdnem mindenütt.

Ezzel tételünk bizonyítást nyert.

4. TÉTEL BIZONYÍTÁSA: Az $(R, \lambda(n), 1)$ -összegezhetőségből azonnal adódik az I. segédtétel alapján, hogy

$$S_{\mu_n}(x) \rightarrow f(x)$$

$[a, b]$ -ben majdnem mindenütt.

Legyen ν_k egy olyan indexsorozat, amelyre a következő feltételek teljesülnek:

$$\nu_k = \mu_{n+1} \quad \text{ha} \quad \mu_n \leq \nu_k < \mu_{n+1}$$

A bizonyítást a továbbiakban hasonlóan végezhetjük mint azt az előző tétel bizonyításának második részében tettük, csupán a /40/-nek megfelelő becslést részletezzük, mivel ez némi eltérést mutat az előző gondolatmenettől.

$$/40a/ \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda(k+1)-\lambda(k)}{\lambda(k+1)} \int_a^b (S_{\nu_k}(x) - S_{\nu_k}(x))^2 dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\mu_n \leq \nu_k < \mu_{n+1}} \frac{\lambda(k+1)-\lambda(k)}{\lambda(k+1)} \sum_{i=\nu_k+1}^{\mu_{n+1}} c_i^2 = O(1) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\mu_n \leq \nu_k < \mu_{n+1}} \frac{\lambda(k+1)-\lambda(k)}{\lambda(k+1)} \sum_{i=\nu_k+1}^{\mu_{n+1}} a_i^2$$

Mivel /8/-ből azonnal adódik $\mu_n \leq \nu_k < \mu_{n+1}$ esetén, hogy

$$/41/ \quad \sum_{k=\nu_k+1}^{\mu_{n+1}} a_k^2 \leq \sum_{i=\nu_k+1}^{\mu_{n+1}} \frac{\lambda(k+1)-\lambda(k)}{\lambda(k)} \frac{\lambda(k-1)}{\lambda(k)-\lambda(k-1)} a_{k-1}^2 \leq$$

$$\leq \frac{\lambda(\nu_k)}{\lambda(\nu_k+1)-\lambda(\nu_k)} a_{\nu_k}^2 \sum_{i=\nu_k+1}^{\mu_{n+1}} \frac{\lambda(k+1)-\lambda(k)}{\lambda(k)} \leq O(1) \frac{\lambda(\nu_k)}{\lambda(\nu_k+1)-\lambda(\nu_k)} a_{\nu_k}^2$$

Két eset lehetséges: vagy $k < \nu_k$ vagy $k \geq \nu_k$.

Az első esetben szintén /8/-ből adódik $\lambda(k)$ monotonitása miatt, hogy

$$/42/ \quad \frac{\lambda(\nu_k)}{\lambda(\nu_k+1)-\lambda(\nu_k)} a_{\nu_k}^2 \leq \frac{\lambda(k)}{\lambda(k+1)-\lambda(k)} a_k^2 < \frac{\lambda(k+1)}{\lambda(k+1)-\lambda(k)} a_k^2$$

A második esetben

$$/43/ \quad \frac{\lambda(\nu_k)}{\lambda(\nu_k+1)-\lambda(\nu_k)} a_{\nu_k}^2 < \frac{\lambda(\nu_k+1)}{\lambda(\nu_k+1)-\lambda(\nu_k)} a_{\nu_k}^2 \leq \frac{\lambda(k+1)}{\lambda(k+1)-\lambda(k)} a_k^2$$

A /42/ és /43/ összefüggéseket /41/-el összevetve /40a/-ből adódik, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda(k+1)-\lambda(k)}{\lambda(k+1)} \int_a^b (S_{\nu_k}(x) - S_{\nu_k}(x))^2 dx = O(1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty$$

Most már ugyan úgy folytathatjuk a bizonyítást mint az előző tételben.

Irodalom.

- Alexits [1] Eine Bemerkung zur starken Summierbarkeit der Orthogonalreihen, Acta Sci. Math., 16 /1955/ 127-129.
- Leindler [1] Über die starke Summierbarkeit der Orthogonalreihen, Acta Sci. Math., 23 /1962/, 82-91.
[2] Über die sehr starke Riesz-Summierbarkeit der Orthogonalreihen und Konvergenz lückenhafter Orthogonalreihen, Acta Math. Acad. Sci. Hung., 13 /1962/, 401-414.
- Meder [1] On very strong Riesz-summability of orthogonal series, Studia Math., 20 /1961/, 285-300.
- Menchoff [1] Sur les séries de fonctions orthogonales, Deuxième partie, Fundamenta Math. 8 /1926/ 56-108.
- Tandori [1] Über die orthogonalen Funktionen/Summation/, Acta Sci. Math., 18 /1957/, 149-168,
[2] Über die orthogonalen Funktionen VI., Acta Sci. Math., 20 /1959/, 14-18.
[3] Bemerkung zu einem Satz von G. Alexits, Acta Sci. Math., 21 /1960/, 12-14.
[4] Über die orthogonalen Funktionen I, Acta Sci. Math., 18 /1957/, 57-130.

