

S I K B E L I H Á R O M S Z Ö G E L T G R Á F O K

D o k t o r i é r t e k e z é s

Hetyei Gábor
Pécs, 1967



Diss. B 202



T a r t a l o m j e g y z é k

Bevezetés	1. old.
<u>I. fejezet: Háromszögelt gráfok és származtatásuk</u>	
1. §. A használatos fogalmak és jelölések	4. old.
2. §. Háromszögelt gráfok	7. old.
3. §. Háromszögelt gráfok származtatása	9. old.
4. §. Elemi gráfok. Kaposolási gráf	12. old.
<u>II. fejezet: Elsőfoku faktorok</u>	
5. §. A Tutte-féle feltétel szigorítása	16. old.
6. §. Az elemi gráfok és az elsőfoku faktorok kapcsolata	18. old.
7. §. Tilos él nélküli gráfok	20. old.
8. §. Lényeges él	27. old.
<u>III. fejezet: Hamilton körök</u>	
9. §. Eredmények. A Whitney tétel általánosítása	28. old.
10. §. Whitney ellenpéldája. A példa variálása	34. old.
<u>IV. fejezet: Független pontthalmazok</u>	
11. §. A $\mathcal{G}/F = 2/n-2/$ tulajdonságu független pontthalmazok	38. old.
12. §. Független pontthalmaz pontjainak maximális száma. Az extrém gráfok meghatározása	42. old.
Irodalomjegyzék	44. old.

B e v e z e t é s

Ez a dolgozat a síkbeli háromszögelt gráfokkal foglalkozik. Ezek olyan síkbeli gráfok, amelyeknek minden lapjuk háromszög, másszóval: amelyeknél újabb élt behuzni - úgy, hogy a gráf síkbeli maradjon - már nem lehetséges.

E gráfok duálisai jelentős szerepet játszanak a térképszínezésre vonatkozó négy színsejtésben. Emiatt az a probléma, hogy minimálisan hány szín kell az ilyen gráfok pontjainak illetve lapjainak színezéséhez /úgy, hogy bármely két, éllel összekötött pont, illetve bármely két, közös élű lap különböző színű legyen/ - részben megoldott, részben reménytelenül nehéz feladatnak látszik. /Erre vonatkozóan: Irodalomjegyzék: /1/, /2/, /3/, /12/, /16/. /

Ezek a gráfok szerepet kapnak az újabb gráfelméleti problémáknál is: pl abban a kérdésben, hogy egy nem síkbeli gráf minimálisan hány síkbeli gráf összefforrasztásából áll elő.

E gráfok extrém volta miatt néhány elemi tulajdonságuk, jellemző adatuk közismert. Ennek ellenére alig jelölhető meg olyan cikk, amely ezekkel a gráfokkal behatóbban foglalkozna. /Ilyen kivételes két cikk a /15/ és /16/-os/. Az egyik enumerációs, a másik Hamilton-körös problémával foglalkozik. /Éppen ez indokolja azt, hogy a jelen dolgozat megpróbál áttekintést adni ezekről a gráfokról a gráfelméletben szokásos még egy néhány problémakörnek megfelelően.

Az ilyen extrém gráfokkal való foglalkozás azért is jelentős, mert éppen az extrém tulajdonság miatt sokszor bizonyos általános összefüggések is könnyebben ismerhetők fel. Ennek ellenére az is jellemző, hogy az általános összefüggések sokszor erősen módosult formában, az extrém tulajdonságoknak megfelelően jelentkeznek, /Konkrét példaként legyen szabad a páros gráfok, és a tetszőleges

gráfok elsőfoku faktoraira vonatkozó Hall-Radó illetve Tutte-féle tétel tartalmi összhangjára és formai ellentétére utalni./

Ilyen vonás a dolgozatban is megmutatkozik. A bizonyított tételek egy részében a háromszögelt gráfokra jellemző specifikumok az uralkodók. /Elsősorban a négyszeresen összefüggő háromszögelt gráfokból való egyértelmű felépíthetőség./

A dolgozat fejezetei zömmel új eredményeket tartalmaznak. Az I.fejezet ismerteti a háromszögelt gráfok származtatását /rekurzív módon/, illetve a tetszőleges háromszögelt gráfoknak a négyszeresen összefüggő háromszögelt gráfokból való felépíthettségét, az ennek megfelelő mintegy a gráf "durva szerkezetét" kifejező - kapcsolási gráfot.

A II.fejezet egyrészt erős megszorítást ad az elsőfoku faktorok létezését biztosító Tutte-féle feltételben szereplő szeparáló halmazokra, másrészt azzal foglalkozik: maga a gráf "durva szerkezete" mikor biztosítja előre az elsőfoku faktor létezését. Jelentős ebben a fejezetben még azoknak a háromszögelt gráfoknak a vizsgálata, amelyekben bármely éhhez található azt tartalmazó elsőfoku faktor. Itt több tulajdonság tetszőleges gráfokra is érvényes. Ez a megfogalmazásból is kiderül.

A III.fejezet fő eredménye a Hamilton körökre vonatkozó Whitney ill. Tutte tétel általánosítása./Egyrészt a Hamilton körben önkényesen megválasztható élek számára vonatkozóan, másrészt abban az eredményben, hogy két négyszeresen összefüggő háromszögelt gráf összeforrasztásával előálló háromszögelt gráfnak, illetve 3, 4, 5 négyszeresen összefüggő gráfból bizonyos módon összeforrasztott háromszorosan összefüggő gráfoknak mindig van Hamilton körük./ Érdekes még az a három negatív eredmény is, ami a Whitney által említett ellenpélda általánosításából adódik.

Az utolsó fejezet a maximális fokszámösszegű független pontalmazok vizsgálatán keresztül határozza meg az n

pontu háromszögelt gráfok függetlenségi számának maximumát. Itt érdekes a maximumot elérő fokszámösszegű független ponthalmaz megkeresésére adott eljárás, amely a pontok 3-szinnel való színezhetősége esetében az azonos színnel jelölendő pontok megkeresésére is alkalmas./És ezenkívül a 3-színezéssel kapcsolatos tétel új bizonyítására is.Ez azonban ebben a dolgozatban már nem szerepel./

Az I.fejezettől eltekintve, ahol gyakran az alapvető fogalmak, jelölések és tételek felsorolásáról van szó, a dolgozat minden fejezete ismerteti: melyek a vonatkozó ismert eredmények, kitől származnak, melyik cikkben találhatók. Ezután következnek a dolgozat eredményei külön megjelölés nélkül.

I. Fejezet: Háromszögelt gráfok és származtatásuk

1. §. A használatos fogalmak és jelölések

A dolgozatban $G = /X, U/$ olyan gráfot jelöl, amelyben X a pontok /véges/ halmaza, U pedig az élek /véges/ halmaza.

A gráf pontjait latin kisbetűk: $a, b, c, \dots$ jelölik /esetleg indexezve./ Az a és b pontot összekötő él jele $/a, b/$, néha egyetlen nagybetű pl : E .

A dolgozatban csak olyan gráfokkal foglalkozunk, amelyben bármely két pontot legfeljebb egy él köt össze, és egy pontot önmagával összekötő él /hurok/ sem szerepel.

$\emptyset$ jelöli az üres halmazt, $/A/$ az A halmaz elemeinek számát, 0 vagy 0_n az $/n$ pontu/ üres gráfot, /amelynek nincs egyetlen éle sem/, K_n pedig az n pontu teljes gráfot, /amelyben bármely két pontot él köt össze./

A $G = /X, U/$ gráf egy részgráfján az olyan $G_1 = /X_1, U_1/$ gráfot értjük, amelyre $X_1 \subseteq X$, $U_1 \subseteq U$ és az U_1 -beli élek végpontjai X_1 -beliek. Ha U_1 tartalmazza az összes olyan $/G$ -beli/ élt, amelynek mindekét végpontja X_1 -beli, akkor az X_1 pontjai által kifeszített részgráfról, vagy metszetgráfról beszélünk. Jele: $G/X_1/$.

Az a pont fokszámán az a -ra illeszkedő $/a$ végpontu/ élek számát értjük és $\varphi/a/$ -val jelöljük. Használni fogjuk a

$$\varphi/A/ = \sum_{a \in A} \varphi/a/$$

jelölést is.

$G-A$ az a gráf, amelyet a G gráfból úgy kapunk, hogy pontjainak egy A halmazát, a pontokra illeszkedő élekkel együtt elhagyjuk.

$\{a, b, c, \dots\}$ jelöli az $a, b, c, \dots$ elemekből álló halmazt.

A $G-\{a\}$ gráfot $G-a$ -val jelöljük. Az élekből és pontokból álló

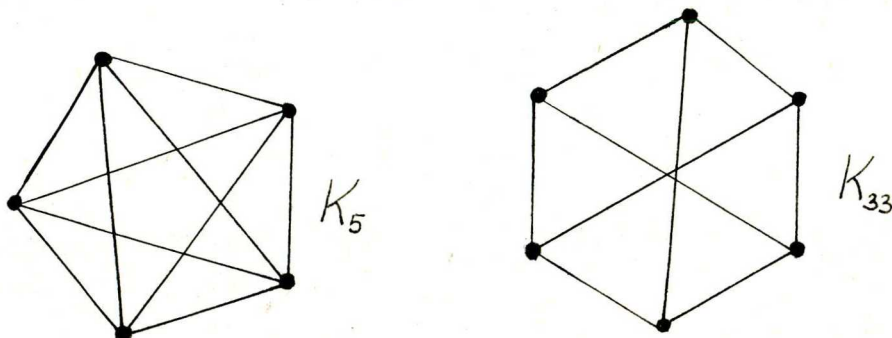
$a_1/a_1, a_2/a_2, a_3/a_3, \dots, a_{n-1}/a_{n-1}, a_n/a_n$ sorozatot az a_1 -et és a_n -et összekötő vonalnak nevezzük, feltéve, hogy benne ugyanaz az él kétszer nem fordul elő. A vonal hosszán a benne szereplő élek számát értjük.

Ut az olyan vonal, amelyben bármely pont csak egyszer fordul elő. Körnek nevezzük az a_1 -et a_n -nel összekötő vonalat, ha $a_1=a_n$, és a többi pont mindegyike csak egyszer fordul elő. Az n -élű kört n -szögnek is nevezzük.

Egy gráf összefüggő, ha bármely két pontja a gráfban vonallal összeköthető. A nem összefüggő gráf összefüggő részekből /komponensekből/ áll.

k/A jelöli a $G-A$ gráf összefüggő komponenseinek számát, p/A pedig e komponensek közül a páratlan sok pontot tartalmazók /röviden: páratlan komponensek/ számát.

Az összefüggő, kört nem tartalmazó gráfot fának nevezzük. Síkbeli gráf az olyan gráf, amelyiket meg lehet rajzolni a síkon úgy, hogy az éleket szemléltető folytonos vonalak metszéspontjai a gráfnak is mind pontjai legyenek. Ismeretes /Lásd pl: /9/. /, hogy a síkbeli gráfok ugyanazok, mint a gömbön /hasonló értelemben/ megrajzolható gráfok. Nem síkbeli gráf pl az 1. ábrán látható K_5 és $K_{3,3}$ gráf. /A gráf pontjait körökkel különböztettük meg az élek látszólagos metszéspontjaitól./



1. ábra.

Ha egy gráf egy $/a,b/$ élét egy ponttá huzzuk össze, /Az a és b pontokat azonosítjuk, miközben az $/a,b/$ élt megszüntetjük és az $/x,a/$, $/x,b/$ alakú éleket is azonosítjuk./ - akkor kontrakcióról beszélünk.

Két gráf izomorf, ha megadható pontjaik közöttt egy olyan kölcsönösen egyértelmű leképezés, amelynél két pont akkor és csak akkor éllel összekötött, ha képeik is ilyenek.

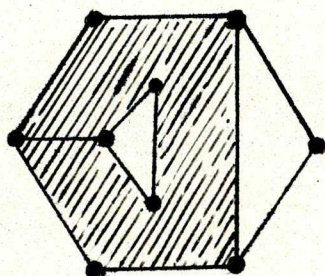
G_1 G_2 -re kontrahálható: ha G_1 -ből élkontrakciók sorozatával G_2 -vel izomorf gráfba juthatunk.

Kuratowsky tétele: Egy G gráf akkor és csak akkor rajzolható meg a síkon, ha nincs sem K_5 -tel, sem $K_{3,3}$ -mal izomorf, sem ilyenre kontrahálható részgráfja.

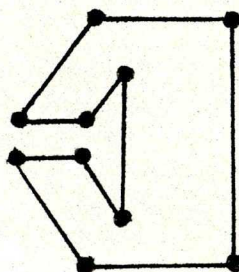
Abban, hogy egy gráf megrajzolható-e a síkban, vagy sem, nagy segítséget nyújt még a

Jordan tétel: Legyen K egy folytonos zárt görbe a síkban. K a síkot két tartományra, egy belsőre és egy külsőre osztja, és bármely olyan folytonos vonal, amely a belső tartomány egy a pontját a külső tartomány egy b pontjával köti össze, metszi K -t.

Tekintsünk egy síkbeli gráfot a gömbön megrajzolva. Ha a gráf pontjait és éleit /mint folytonos vonalakat/ megadó gömbi pontokat a gömbfelületből elhagyjuk, akkor a gömbfelület összefüggő nyitott ponthalmazai maradnak vissza. Ezeket a gráf lapjainak nevezzük. A lap lehet többszörösen összefüggő, és az is lehet, hogy vannak többszörös csúcsai. A 2.ábrán vonalkázott lapot például



2.ábra.



3.ábra.

annak ellenére, hogy területén a gráfnak csak 8 pontja helyezkedik el, 10-szögnek célszerű felfogni./3.ábra/

Euler tétel néven ismeretes az az érdekes összefüggés, hogy ha a síkbeli gráf minden lapja egyszeresen összefüggő, akkor

$$\text{csucsek száma} - \text{élek száma} + \text{lapok száma} = 2$$

/Itt csucsoknak a gráf pontjait szokás nevezni./

2.§. Háromszögelt gráfok

/2.1/ Definíció: Háromszögelt gráf az olyan /hurok és többszörös él nélküli/ síkbeli gráf, amelynek minden lapja háromszög.

Legegyszerűbb ilyen gráf az egyetlen háromszög.

/2.2/ A legalább négy ponttal rendelkező háromszögelt gráf: 1/ Összefüggő

2/ Bármely a pontjához van olyan kör, amelynek pontjai éppen az adott pont összes szomszédai.

Bizonyítás: Ha a háromszögelt gráf nem lenne összefüggő, akkor lenne legalább kétszeresen összefüggő lapja. Ez azonban nem lehet háromszöglap.

Az a csucspontu összes háromszöglapot véve, ezeknek az a pontra nem illeszkedő élei éppen megadják azt a kört, amelynek pontjai éppen az a pont összes szomszédai.

Következmény: Legalább négypontu háromszögelt gráfban minden pont legalább harmadfoku.

/Valóban: mivel többszörös él nem létezik, minden kör legalább három pontu. Ezért minden pontnak legalább három szomszédja van.

/2.3/ Nevezetes egyszerű háromszögelt gráfok: az egyetlen háromszög -, a tetraéder -, az oktaéder - és az ikozaéder élei és csucsai által alkotott gráfok. Ezeket röviden csak háromszögnek, tetraédernek stb fogjuk nevezni.

/2.4/ Tekintsünk egy n pontu háromszögelt gráfot. Ebben az élek számát jelölje e/n , a lapokét l/n . Ismeretes tény, hogy

$$e/n = 3 \cdot l/n - 2$$

$$l/n = 2 \cdot l/n - 2$$

/Ezek az összefüggések egyszerűen adódnak egyrészt az Euler tétel, másrészt a $3 \cdot l/n = 2 \cdot e/n$ összefüggésből. Az utóbbi azt fejezi ki, hogy ha minden lapnál megszámoljuk a határoló éleket, akkor minden élt kétszer számolunk meg./

Az n pontu $G = (X, U)$ háromszögelt gráf pontjainak fokszámösszege

$$\sum_{x \in X} f(x) = 2 \cdot e/n = 6 \cdot l/n - 2$$

Ez természetesen csak úgy lehet, ha

A gráfban van olyan pont, amely legfeljebb ötödfoku.

/Ha minden pont fokszáma ≥ 6 , akkor $\sum_{x \in X} f(x) \geq 6n$ volna./

/2.5/ Az elsőfoku faktorok és a Hamilton körök vizsgálatánál szükségünk lesz a következő tényre:

Hurok és többszörös él nélküli síkbeli G gráf pontjainak száma legyen n , lapjainak száma l , ezek közül a háromszöglapok száma l_3 . Ekkor

$$l_3 \geq 2 \cdot l - n + 2$$

Bizonyítás: A G pontjait összekötő új élek felvételével egy háromszögelt G^* gráfhoz jutunk. Ebben n pont és $2 \cdot l/n - 2$ háromszöglap van. G^* -ből G -t a beiktatott új élek törlésével kapjuk. Ezáltal G^* néhány háromszöglapja G egy lapjává egyesül, G^* újabb néhány háromszöglapja G egy újabb lapjává egyesül, stb.

l_3 - db háromszöglap G -ben és G^* -ban egyaránt szerepel

$l - l_3$ G -ben szereplő /nem háromszög/lap G^* -beli

$2 \cdot l/n - 2 - l_3$ darab háromszögből tevődik össze.

Mindegyik legalább két háromszögből /vagy többből/

áll. Ezért

$$l - l_3 \leq \frac{2/n - 2 - l_3}{2}$$

ami ekvivalens az állítással.

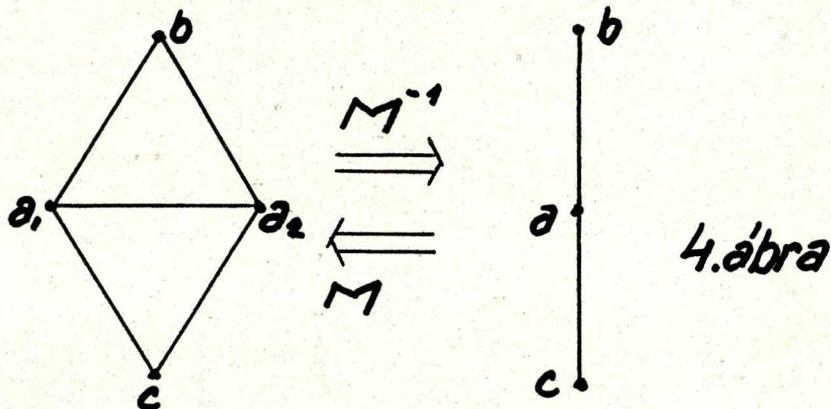
/Megjegyzés: Lehet, hogy a G^H gráfban már vannak többszörös élek. Az $l/n = 2/(n-2)$ összefüggés, és az Euler tétel viszont az ilyen gráfokra is érvényes, ezért a /2.5/ összefüggés is./

3.5. Háromszögelt gráfok származtatása

/3.1/ Adott T-típusú gráfokra vonatkozó problémák gyakran teljes indukciós módon oldhatók meg, ha ismeretes egy eljárás, amellyel egy minimális pontszámú T-típusú gráfból T-típusú gráfok sorozatán el lehet jutni a kérdéses T-típusú gráfhoz, minden lépésben növelve a pontok számát. Különösen használható az ilyen eljárás pl. az n pontú, T-típusú gráfok számának megszámlálásakor.

Az alábbiakban egy ilyen eljárást ismertetünk a háromszögelt gráfokra.

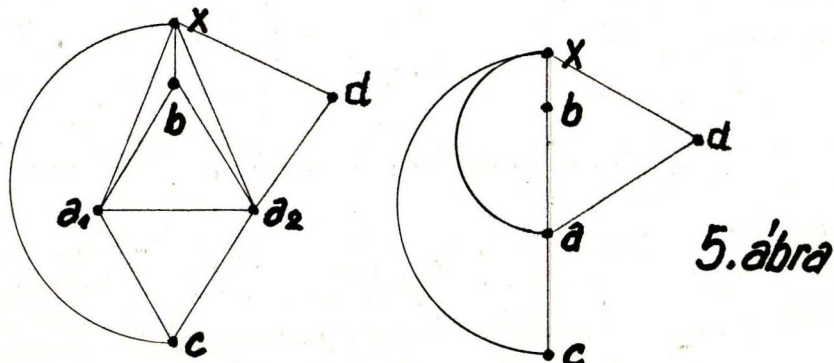
Tekintsünk egy $n \geq 4$ pontú háromszögelt gráfot. Ebben egy $/a_1, a_2/$ él két háromszöglapot /mondjuk az $/a_1, a_2, b/-t$ és az $/a_1, a_2, c/-t/$ választ el egymástól. Ha a b és c ponton kívül más pont nem szomszédos az a_1, a_2 mindegyikével, akkor az $/a_1, a_2/$ élt egy $/a$ ponttá/ kontrahálva, nyilván ismét egy háromszögelt gráfhoz jutunk. /4.ábra./



ván ismét egy háromszögelt gráfhoz jutunk. /4.ábra./

Ezt a korlátozott kontrakciót M^{-1} műveletnek fogjuk nevezni.

Megjegyzés: Ha a b és c pontokon kívül még van olyan x pont, amely az a_1, a_2 mindegyikével szomszédos, akkor az $/a_1, a_2/$ él kontrakciója az $/x, a_1/$ és $/x, a_2/$ élek azonosítása mellett/ nem háromszögelt gráfhoz vezethet: /5. ábra/



5. ábra

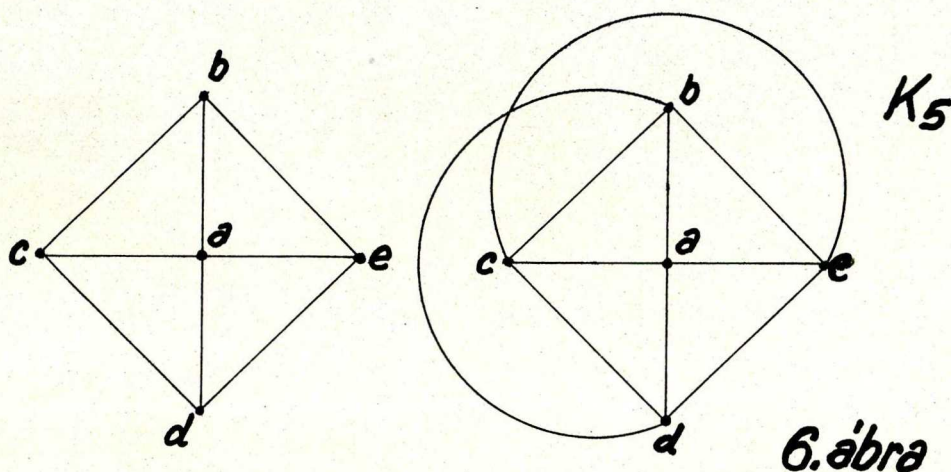
Az M^{-1} eljárás fordítottját - amikor az a pontot a b és c pontokra vonatkozóan egy $/a_1, a_2/$ élle huzzuk szét - M műveletnek nevezzük. Ekkor az $/a, b/$ élt egy $/a_1, a_2, b/$ háromszöglappá, az $/a, c/$ élt egy $/a_1, a_2, c/$ háromszöglappá huzzuk szét. Ekkor az a, b és c pontokra csak azt a kikötést kell tennünk, hogy az a pont szomszédos b-vel és c-vel. Bebizonyítjuk a következőt:

1. tétel: Minden legalább négypontu háromszögelt gráf előállítható az M művelet ismételt alkalmazásával /háromszögelt gráfok sorozatán keresztül/ az egyetlen háromszögből.

Bizonyítás: Az világos, hogy M művelettel háromszögelt gráfból háromszögelt gráfot kapunk. Ahhoz, hogy a tétel helyességét belássuk, elég megmutatni, hogy bármely legalább négypontu háromszögelt G gráfban van olyan $/a_1, a_2/$ él, hogy legfeljebb két olyan pont van, amely a_1, a_2 mindegyikével szomszédos. Ekkor ugyanis az $/a_1, a_2/$ élt kontrahálva, eggyel kevesebb pontu háromszögelt gráfhoz jutunk, amelyből a G M-művelettel adódik. Ilymódon a tétel teljes

indukcióval igazolható. Ilyen $/a_1, a_2/$ él létezését indirekt módon bizonyítjuk: Tegyük fel, hogy volna olyan G háromszögelt gráf, amelynek bármely $/a_1, a_2/$ éléhez lenne legalább három pont, amely a_1, a_2 mindegyikével szomszédos. Az a_1 és a_2 egymással is szomszédos, ezért $\varphi /a_i/ \geq 4$ $/i=1,2/$. Azaz a gráfban minden pont legalább negyedfoku. Viszont G háromszögelt gráf, ezért a $/2.4/$ szerint van legfeljebb ötödfoku pontja.

1.eset: Van negyedfoku pont. Legyen ez a , szomszédai pedig b, c, d, e . $/6. \text{ ábra}/$



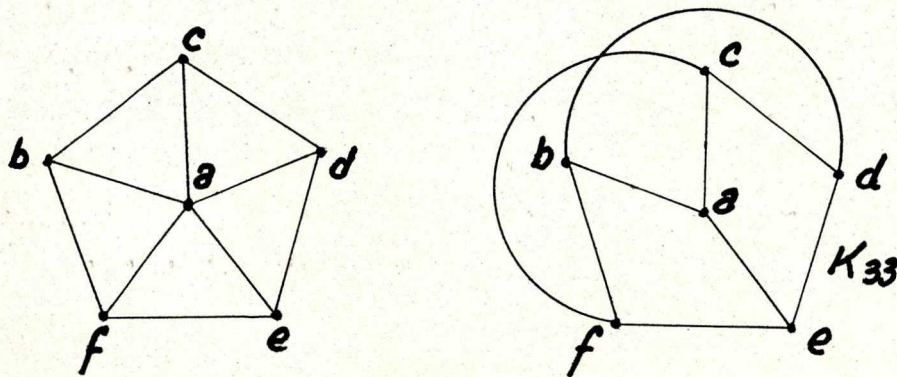
A feltétel szerint az $/a, b/$ élhez van legalább 3 olyan pont, amely a -val is, b -vel is szomszédos. De ez csak c, d, e lehet, mert $\varphi /a/ = 4$. Ezért d szomszédos b -vel.

Hasonlóan, az $/a, c/$ élhez is van legalább 3 olyan pont, amely a -val is, c -vel is szomszédos. Ezért $/e, c/$ él is van a gráfban. Így azonban az $A = \{a, b, c, d, e\}$ halmazhoz tartozó $G/A/$ metszetgráf egy ötpontu teljes gráf. Így a Kuratowsky tétel szerint G nem síkbeli. Ez ellentmondás.

2.eset: Van ötödfoku pont. Legyen ez a , szomszédai pedig b, d, c, e, f . $/7. \text{ ábra}/$ Ekkor az $/a, b/$ élhez létezik legalább három olyan pont, amely a -val is, b -vel is szomszédos. Mivel ezek a pontok a -nak szomszédai, c, d, e, f közül valók. Így létezik vagy $/b, d/$ él, vagy $/b, e/$ él, vagy mindkettő. Feltehetjük, hogy $/b, d/$ él létezik.

$/A$ másik esetben ugyanugy okoskodhatnánk. $/Az /a, c/$ élhez van legalább 3 olyan pont, amely a -val is, c -vel is

szomszédos. Ezért feltehető, hogy létezik pl $/c,f/$ él.
/Vagy pedig $/c,e/$ él./ Így viszont a gráfnak van egy K_{33} -as részgráfja /a 7.ábra jobboldala/, tehát a gráf nem síkbeli. Ez ismét ellentmondás. Ezzel a tételt bizonyítottuk.



7. ábra

A tétel alapján az összes háromszögelt gráf rekurzív módon megkonstruálható.

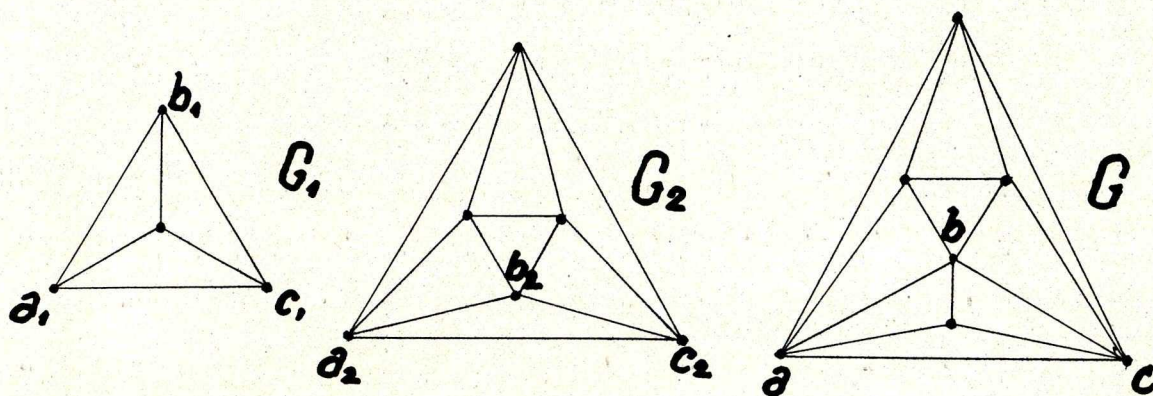
4. §. Eleni gráfok. Kapcsolási gráf

/4.1/ Tekintsünk két, legalább négy pontu háromszögelt gráfot, G_1 -et és G_2 -öt, mindegyiket a gömbre megrajzolva. Válasszuk ki G_1 -nek egy $/a_1, b_1, c_1/$, a G_2 -nek pedig egy $/a_2, b_2, c_2/$ háromszöglapját. Forasszuk egybe a két lapot, és ezáltal a két gömböt is úgy, hogy az
 a_1 és a_2 pontot egy a ponttá,
 b_1 és b_2 pontot egy b ponttá,
 c_1 és c_2 pontot egy c ponttá

összeferasztjuk. Természetesen ekkor az $/a_1, b_1/$ és az $/a_2, b_2/$ élek egy $/a, b/$ élle azonosulnak, és hasonló mondható el a másik két élpárról. Ha az összeferasztott két lapot átszakítjuk, akkor az összeferasztott két gömb

egy gömbbé fújható fel. /8. ábra/

Est az eljárást a következőkben csak így mondjuk el:
A G_1 háromszögelt gráf $/a_1, b_1, c_1/$ lapját a G_2 háromszögelt gráf $/a_2, b_2, c_2/$ lapjával azonosítva, forrasszuk össze a két gráfot.



8. ábra

As új gráfban az $/a, b, c/$ háromélű kör már nem lapot határol, hanem a belsejében is, külsejében is van a gráfnak pontja. As ilyen $/a, b, c/$ háromélű kört forrasztási háromszögnek nevezzük. Világos, hogy két háromszögelt gráf összeforrasztásából ismét háromszögelt gráfot kapunk.

As összeforrasztás ellentéte: mivelte G -ben találva egy forrasztási háromszöget, annak mentén a gráfot szétválasztjuk két háromszögelt gráfra /amelyek összeforrasztásával a G -t visszanyerhetjük./

Ha a G háromszögelt gráfban nincs forrasztási háromszög, akkor a G gráfot - csak ebben a dolgozatban - elemi gráfnak nevezzük.

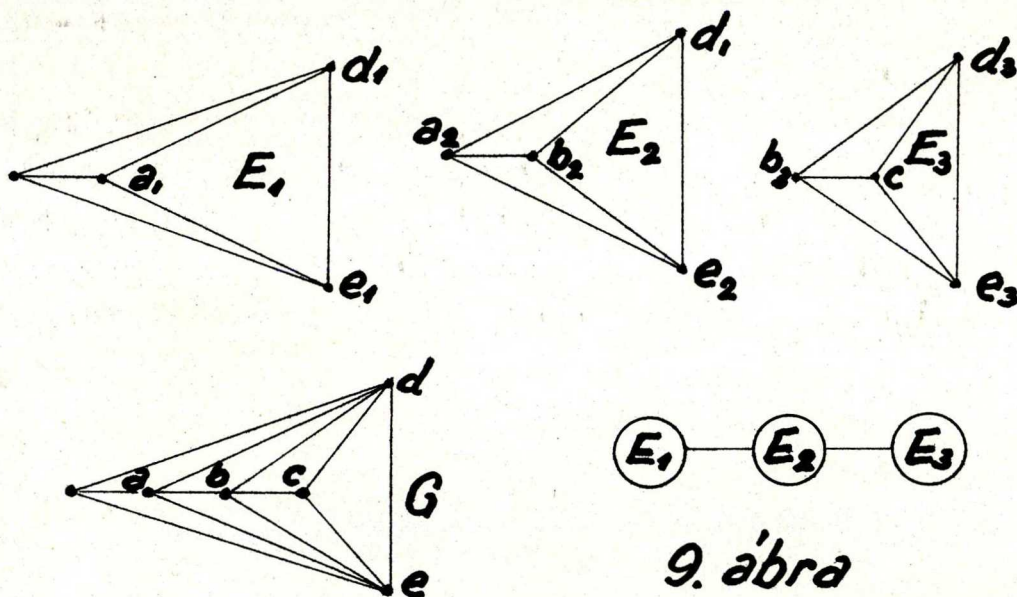
Megjegyzés: As "elemi gráf" elnevezést csak a rövidség kedvéért használjuk az irodalomban elfogadott "négyszerezen összefüggő háromszögelt gráf" terminológia helyett. /Lásd pl: /14/-es cikk 102. old./

/4.2./ A Jordan tétel miatt nem lehetséges az, hogy két forrasztási háromszög úgy helyezkedjék el, hogy az egyiknek a másik belsejében is, külsejében is legyen csúcs-

pontja. Emiatt világos, hogy

Ha a G háromszögelt gráf nem elemi gráf, akkor egyértelműen meghatározott, hogy mely /az egyetlen háromszögeltől különböző/ elemi gráfokból és milyen módon épül fel.

/4.3./ Nem elemi háromszögelt gráfok belső felépítéséről durva közelítéssel felvilágosítást nyújt a gráf kapcsolási gráfja. Ezt egy G háromszögelt gráfnál úgy kapjuk, hogy azokat az elemi gráfokat, amelyekből G összeferasztással adódik, egy-egy ponttal szemléltetjük, és két ilyen pontot akkor és csak akkor kapcsolunk össze éllel, ha a megfelelő elemi gráfok egy-egy lapjuk mentén G -ben össze vannak ferasztva. /9. ábra. A pontokat körök szemléltetik./



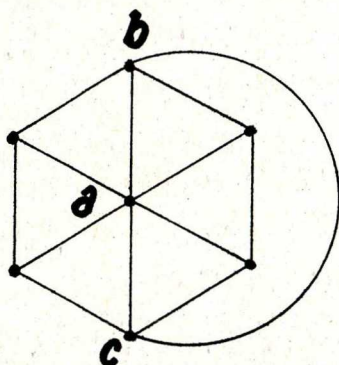
9. ábra

Világos, hogy a kapcsolási gráf mindig fa. A kapcsolási gráf elsőfokú pontjainak megfelelő elemi gráfokat a háromszögelt gráf végső elemi gráfjainak nevezzük.

/4.4./ Legalább négy pontú háromszögelt gráfban bármelyik a pont szomszédai egy körön fekszenek. Jelöljük ezt a kört P/a -val. /Ezt a kört, mint q/a -oldalú sokszöget, P/a poligonnak is fogjuk nevezni./ A Hamilton körök vizsgálatánál jó szolgálatot tesz majd a következő tulajdonság ismerete:

Ha egy legalább négy pontu háromszögelt G gráf elemi gráf, akkor bármelyik a pontjára teljesül a következő: Ha két P/a -beli pont szomszédos, G -ben/ akkor az őket összekötő él is P/a -beli.

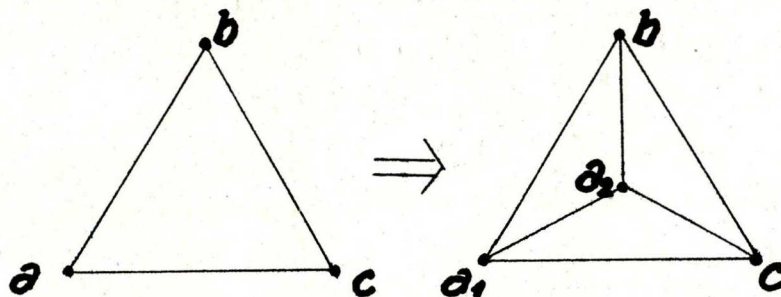
Bizonyítás: Ha lenne olyan a pont, amelynek két szomszéd-



10. ábra

ját: p -t és q -t nem P/a -beli él köti össze /10. ábra/, akkor az $/a, b, c/$ háromélű kör forrasztási háromszög, és így a gráf nem elemi.

/4.5./ Az elemi gráfok származtatásáról: Ha egy háromszöglap a, b, c csucsaira alkalmazzuk a 3.§.-ban megismert M módszert, akkor a keletkező egyik pont harmadfo-



11. ábra

ku./11. ábra/ Így az eredmény ugyanaz, mintha az $/a, b, c/$ háromszöglapra egy tetraédert forrasztottunk volna. A létrejött gráf tehát nem elemi.

Definiáljunk egy M_e műveletet, amely az M műveletből adódik azzal a korlátozással, hogy a, b, c nem lehetnek egy háromszög csúcsai. Bebizonyítható a következő állítás:

Minden legalább hét pontu elemi gráf megkapható az oktaéder gráfjából az M_e művelet /ismételt/ alkalmazásával úgy, hogy minden közbenső lépésnél elemi gráfot kapunk.

A bizonyításban hasonló eszközöket /pl Kuratowsky tétel/ kell felhasználnunk, mint az 1. tétel bizonyításánál.

II. Fejezet: Elsőfoku faktorok

5. § A Tutte-féle feltétel szigorítása

A $G = /X, U/$ gráf egy k -adfoku faktorán egy olyan F részgráfot értünk, amelynek

1/ pontjai megegyeznek G pontjaival, és

2/ minden pontjára k számú G -beli él illeszkedik.

Ennek megfelelően G egy elsőfoku faktorát megkeresni ugyanaz, mint G pontjait egymástól idegen párokba állítani úgy, hogy bármelyik párba két szomszédos /egymással éllel összekötött/ pont kerüljön.

A k -adfoku faktorok létezésének szükséges és elegendő feltétele Tutte nevéhez fűződik. /Irodalomjegyzék: /1/, /5/, /13/- / A számunkra érdekes legegyszerűbb esetben ez így hangzik:

A $G = /X, U/$ gráfnak akkor és csak akkor van elsőfoku faktora, ha bármely $A / \emptyset \subseteq A \subseteq X/$ ponthalmazra $p/A/ \leq /A/$.

Sajnos, ez a kritérium inkább arra jó, hogy megmutassuk: mikor nincs a gráfnak elsőfoku faktora. Hiszen ehhez elég egyetlen A halmazt találni, amelyre $p/A/ > /A/$. Ha azt akarjuk kideríteni, hogy van elsőfoku faktor, akkor általában egyszerűbb egy olyat ténylegesen megkeresni, mint a Tutte-féle feltétel teljesülését megmutatni. A nehézséget az összes lehetséges A halmaz megvizsgálása okozza. /Az, hogy elegendő a $2 \cdot /A/ < /X/$ tulajdonságú A halmazokat vizsgálni, triviális megszorítás./

Ha azt keressük, hogy egy háromszögelt G gráfnak van-e elsőfoku faktora, nyilván legelőször is megszámláljuk a gráf pontjait. Ha az eredmény páratlan, akkor elsőfoku faktor eleve nem lehet. Az a problematikus eset, amikor a pontok száma páros. Ekkor a következő megszorítás érvényes:

2. Tétel: Ha a G pontjainak száma páros, és G -nek nincs elsőfoku faktora, akkor van olyan A ponthalmaza, hogy

$p/A/ > /A/$, A bármely a pontja $/G\text{-ben}/$ legalább hatodfokú, továbbá az a pontnak $/G\text{-ben}/$ még legalább három $A\text{-beli}$ szomszédja van.

Bizonyítás:

/I/ Ha $G\text{-nek}$ páros sok pontja van akkor bármely A pont-halmazára $p/A/+ /A/ \equiv 0 \pmod{2}$

/Valóban: Ha $\text{mod } 2$ számoljuk meg G pontjait, akkor ezt megtehetjük úgy, hogy A minden pontját megszámláljuk, $G-A$ minden páratlan komponenséből egy pontot vesszünk figyelembe, a páros sok pontu komponensektől pedig eltekintünk/

/II/ Egy páros sok pontu G háromszögelt gráfban legyen $A \subseteq X$, $a \in A$, c_1 és c_2 pedig az $a\text{-val}$ szomszédos két olyan pont, amely $G-A$ különböző összefüggő komponenseibe tartozik. Ekkor c_1 és c_2 $G\text{-ben}$ nem lehetnek szomszédosak.

/Valóban: Ha c_1 és c_2 $G\text{-ben}$ szomszédos volna, akkor $G-A\text{-ban}$ is az lenne. De akkor ez a két pont $G-A$ ugyanazon összefüggő komponensébe tartozna./

Térjünk rá ezután a tétel bizonyítására!:

Ha nincs elsőfokú faktor, akkor a $p/A/ > /A/$ tulajdonsága A pont-halmazok között van olyan, amely a lehető legkevesebb pontból áll. Legyen ez /vagy egy ilyen/ halmaz az A . Kimutatjuk, hogy $a \in A\text{-ra}$ $\varphi/a/ \geq 6$.

Mindenesetre $p/A/ > /A/$ miatt

$$p/A/ \geq /A/ + 2$$

$/A$ $p/A/ = /A/ + 1$ ugyanis az /I/ miatt lehetetlen./

Legyen $A_0 = A - \{a\}$. Mivel A minimumtulajdonsága volt, ezért

$$p/A_0/ \leq /A_0/ = /A/ - 1$$

Az a pont a $G-A_0$ gráf egy C összefüggő komponensének pontja. Ha az $a\text{-t}$ is elvesszük, akkor a páratlan komponensek száma $p/A_0/\text{-ről}$ $p/A/\text{-ra}$, azaz legalább 3-mal nő:

$$p/A/ - p/A_0/ \geq (/A/ + 2) - (/A/ - 1) = 3$$

Van tehát $a\text{-nak}$ legalább három szomszédja: c_1, c_2, c_3 amelyek $C\text{-beliek}$, de az a pont elvétele után $G-A$ különböző összefüggő komponenseibe tartoznak. E három pont közül

bármely kettő nem szomszédos. /A /II/ miatt./ Az a pont összes szomszédai viszont egy körön helyezkednek el, mert G háromszögelt. Ez csak úgy lehet, ha az a pont legalább hatodfoku és legalább 3 A -beli szomszédja van.

6.5. Az elemi gráfok és az elsőfoku faktorok kapcsolata

Mint hamarosan látni a páros pontszámú elemi gráfoknak van elsőfoku faktoruk. Kézenfekvő a következő kérdés: Ha ismerjük, hogy a háromszögelt gráf hogyan épül fel elemi gráfokból, akkor mit mondhatunk az elsőfoku faktor létezésére vonatkozóan? Bebizonyítjuk a következőt:

3.tétel: Ha a páros pontszámú háromszögelt G gráf kapcsolási gráfjában nincs legalább nyolcadfoku ponttá, kontra-hálható részfa, akkor G -nek van elsőfoku faktora.

Ebből nyilvánvalóan következik, hogy a páros pontú elemi gráfoknak van elsőfoku faktoruk. Mielőtt a tétel bizonyítására rátérünk, egy megjegyzést teszünk a páros pontszámú háromszögelt gráf felépítésére vonatkozóan:

/6.1/ Ha ismerjük egy G háromszögelt gráf kapcsolási gráfját, és arra vagyunk kíváncsiak, van-e G -nek elsőfoku faktora, akkor először is megnézzük, G pontjainak száma páros-e? Igaz a következő:

Háromszögelt G gráf pontjainak száma akkor és csakis akkor páros, ha a hozzátartozó kapcsolási gráfban páratlan sok páros pontszámú elemi gráf szerepel.

/Ugyanis: Ha G p -számú páros sok pontú és q -számú páratlan sok pontú elemi gráfokból van összeállítva, akkor a forrasztási háromszögek száma $p+q-1$. Minden összeállításhoz 6 pontból 3 lesz. Mod2 összeszámolva:

G pontjainak száma $\equiv q-3 \cdot (p+q-1) \equiv -3p-1 \equiv 0 \pmod{2}$
akkor és csakis akkor, ha $p \equiv 1 \pmod{2}$.

Hasonlóan egyszerűen adódik az is, hogy egy páros pontszámú háromszögelt gráfot egy forrasztási háromszög men-

tén szétbontva, egy páros sok pontu és egy páratlan sok pontu háromszögelt gráfot kapunk.

/6.2./ A 3.tétel bizonyítása: Ha a páros pontu G háromszögelt gráfnak nincs elsőfoku faktora, akkor van olyan A pontalmaza, amelyre $p/A/ > /A/$. Ekkor $p/A/+/A/ \equiv 0 \pmod{2}$ miatt $p/A/ = /A/+1$ lehetetlen, így $p/A/ \geq /A/+2$. Tekintsük az A pontjai által kifeszített $G/A/$ gráfot. A $G/A/$ lapjai kétfélék lehetnek:

- 1/ G -ben a lap már nem szerepel, mert a lap belsejében van a $G-A$ gráf valamelyik összefüggő komponense, összes pontjával.
- 2/ A lap G -ben is szerepel. Ekkor a lap háromszöglap. A laphoz tartozó mindhárom csúcsot megtartva, az egyik élt töröljük. Így a lapot vagy egy hasonló /a 2.esetbeli/ háromszöglappal egyesítettük /négy-szögge/, vagy egy olyan lappal, aminek belsejében $G-A$ -beli összefüggő komponens van. Az eljárást folytatjuk mindaddig, amíg van olyan háromszöglap, amely G -nek is lapja.

Így végül egy olyan síkbeli gráfhoz jutunk, amelynek $/A/$ csúcsa, és ℓ lapja van, ahol $\ell \geq p/A/ \geq /A/+2$. /Két olyan lapot, amelynek mindegyikében van $G-A$ -beli komponens, az előbbi eljárás során soha sem egyesítettünk. Egy lap belsejében sem lehet két $G-A$ -beli komponens./
 $A/2.5/$ miatt a háromszöglapok száma:

$$\ell_3 \geq 2./\ell - /A/+2 / \geq 2.(/A/+2 - /A/ + 2) = 8$$

Ezek a lapok G -ben nem háromszöglapok, hanem forrasztási háromszögek. Mégpedig, ha G -t a gömbön megrajzolva gondoljuk, akkor világos, hogy az ℓ_3 darab háromszög közül bármely hármat megrajzolva, olyan eset nem fordulhat elő, hogy valamelyikük belsejében is, külsejében is lenne egy-egy H -beli pont, ahol H a másik két háromszög csúcs-pontjainak halmaza. Ekkor ugyanis ez a háromszög a $G/A/-$ ből kapott gráfban nem lehetne háromszöglapot határoló háromélű kör.

Ezért az ℓ_3 darab forrasztási háromszög mentén a G -t szétbontva, kapunk egy háromszögelt gráfot, amelyen ℓ_3 darab forrasztásra kijelölt lap van, és ℓ_3 darab olyan háromszögelt gráfot, amelyek mindegyikén egy-egy forrasztásra kijelölt lap van.

A kapcsolási gráfban ezeknek a háromszögelt gráfoknak egy-egy részfa felel meg. Mégpedig: az ℓ_3 darab forrasztásra kijelölt lapot tartalmazó gráfnak olyan részfa, amelynek pontjaiból a kapcsolási gráf több pontjába összesen ℓ_3 él vezet ki. Ez éppen azt jelenti, hogy ezt a részfát egy ponttá kontrahálva, az ℓ_3 -fokú lesz, ahol $\ell_3 \geq 8$. Ebből a 3. tétel helyessége világos.

7.5. Tilos él nélküli gráfok

Ha egy G gráfnak van elsőfokú faktora /röviden: 1-faktor/, akkor még lehet olyan éle, amely egyetlen 1-faktorban sem szerepel. Az ilyen éleket tilos éleknek nevezzük. /Az elnevezés oka: Ha egy 1-faktor éleit próbáljuk megtalálni, akkor az élek közé tilos élt nem szabad beválasztanunk./ A tilos éleket a következő tulajdonság jellemzi:

/7.1/ 1-faktoros G gráf $/a, b/$ éle akkor és csak akkor akkor tilos él, ha G -ben van olyan A ponthalmaz, hogy $\{a, b\} \subseteq A$ és $p/A/ = /A/$.

Bizonyítás: Az $/a, b/$ él akkor és csak akkor tilos él, ha a $G_0 = G - \{a, b\}$ gráfnak nincs elsőfokú faktora, azaz ha van olyan A_0 ponthalmaz a G_0 -ban, amelyet elhagyva, p darab páratlan komponens marad vissza, és $p > /A_0/$.

Ekkor G -ből az $A = A_0 \cup \{a, b\}$ halmazt elhagyva, ugyanazokat a komponenseket kapjuk, azaz

$$p/A/ = p > /A/-2$$

Másrészt G -nek van elsőfokú faktora, így

$$p/A/ = p \leq /A/$$

Végül $p/A = /A/-1$ a $p/A + /A/ \equiv 0 \pmod{2}$ miatt lehetetlen. Ezért $p/A = /A/$

Következmények:

- 1/ Ha egy 1-faktoros G gráf egy A pontthalmazára $p/A = /A/$, akkor G/A minden éle tilos él.
- 2/ Tilos él nélküli gráf bármely $p/A = /A/$ tulajdonságu A pontthalmazára $G/A = 0$.
- 3/ Egy 1-faktoros G gráf akkor és csak akkor tilos él nélküli, ha bármely $G/A \neq 0$ tulajdonságu A pontthalmazára $p/A \leq /A/-2$.

A tilos élek szempontjából az elsőfoku faktorról rendelkező összefüggő gráfok három csoportba oszthatók:

- 1/ Nincs bennük tilos él
- 2/ Van tilos élük, de ha ezeket $/a$ végpontjaik megtartása mellett/ megszüntetjük, akkor összefüggő gráfot kapunk.
- 3/ A tilos élek megszüntetése után a gráf már nem összefüggő.

A 3/ esetben a gráf pontjainak bizonyos osztálybasorolásáról van szó. /Ugyanabba az összefüggő komponensbe tartozó pontok alkotnak egy osztályt./ Együttal a gráfot is felbontjuk bizonyos "blokkokra" és azokat összekötő tilos élekre. A 3./ eset bekövetkezésére egy elegendő feltételt is adhatunk:

/7.2./ Ha egy összefüggő, 1-faktoros G gráfban van olyan A pontthalmaz, hogy $G/A \neq 0$, $p/A = /A/$ és $k/A > p/A$, akkor G a tilos élek megszüntetése után $/A$ végpontokat megtartjuk!/ nem lesz összefüggő.

Bizonyítás: $k/A > p/A$ miatt $G-A$ összefüggő komponensei között van páros pontszámu is. Legyen ez C . Legyen $/a, c/$ egy olyan él, amely egy C -beli c pontból egy nem C -beli a pontba vezet. Ekkor $a \in A$. Legyen $A_1 = A \cup \{c\}$.

$$p/A_1/ \geq p/A/+1 = /A/+1 = /A_1/$$

mert $C-\{c\}$ páratlan sok pontból áll. Mivel G -nek volt l -faktora, ezért $p/A_1/ \leq /A_1/$ és így $p/A_1/ = /A_1/$. Ezért $G/A_1/$ minden éle, így az $/a,c/$ is tilos él.

Mivel a C -beli pontokból a nem C -beli pontokba vezető élek mind tilosak, ezért G a tilos élek megszüntetése után már nem összefüggő.

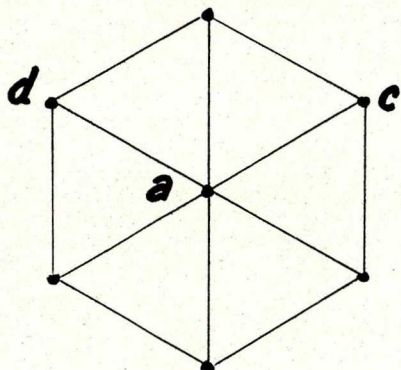
Térjünk rá ezután a tilos él nélküli háromszögelt gráfok vizsgálatára! Ezeknek érdekes tulajdonságuk a következő:

/7.3./ Egy háromszögelt G gráf akkor és csak akkor tilos él nélküli, ha bármely két a,b pontját eltávolítva, l -faktoros gráf marad vissza.

Bizonyítás: $l/$ Ha bármely két pontot eltávolítva, l -faktoros gráf marad vissza: Ekkor bármelyik $/a,b/$ él a $G-\{a,b\}$ gráf egy l -faktoraival a G gráf egy l -faktorát adja. Így $/a,b/$ nem tilos él.

2a/ Először is lássuk be a következőt: Ha a legalább négy-pontu háromszögelt G gráf egy A ponthalmazára $G/A/=0$, akkor a $G-A$ gráf összefüggő.

/Ekkor $G/A/=0$ miatt az A pontjai nem szomszédosak. Ezért, ha $a \in A$, akkor az a pont összes szomszédai $G-A$ -beliek. Mivel G összefüggő, a $G-A$ gráf bármely két x,y pontja G -beli vonallal összeköthető. Ha ez a vonal áthaladna egy A -beli a ponton, pl úgy, hogy



12. ábra

a vonalban szerepel $c,/c,a/,a,/a,d/,d$ részlet, akkor ezt helyettesítsük a $P/a/$ poligon egyik cd ívével. /12. ábra./ Ilymódon belátható, hogy bármely két, $G-A$ -beli pont mármint a $G-A$ -ban vonallal összeköthető, azaz $G-A$ össze-

függő.

2b/ Ha G tilos él nélküli: Két szomszédos a, b pontot eltávolítva 1-faktoros gráf marad vissza. Ha két nem szomszédos a, b pontot távolítunk el, akkor a 2a/ szerint a $G - \{a, b\}$ gráf összefüggő. Ha 1-faktor nélküli, akkor volna olyan $A_0 \neq \emptyset$ ponthalmaza, amit elhagyva p számú páratlan komponens marad vissza, és

$$p > |A_0| \geq 1$$

Ekkor G -ből az $A = A_0 \cup \{a, b\}$ pontjait elhagyva, ugyanezeket az összefüggő komponenseket kapjuk:

$$p/A = p > |A_0| = |A| - 2$$

Ez a /7.1/-ben szereplő 3. Következmény miatt csak úgy lehet, ha $G/A = 0$. Ekkor viszont a 2a/ miatt lehetetlen az, hogy $G-A$ nem összefüggő, és legalább $p/ \geq 2/$ komponensből áll.

Látni fogjuk, hogy a páros sok pontu elemi gráfok tilos él nélküliek. A tilos él nélküliség ugyanis egyszerűbb esetben már a gráf "durva szerkezetét" tükröző kapcsolási gráfról leolvasható. Igaz ugyanis a következő:

4.tétel: Ha a páros sok pontu háromszögelt G gráf kapcsolási gráfjában nincs legalább negyedfoku ponttá kontrahálható részfa, akkor G tilos él nélküli.

A bizonyítás hasonló a 3.tételéhez.

Érdekes tény a következő: Ha egy adott háromszögelt gráfról el akarjuk dönteni, hogy tilos él nélküli-e, akkor e vizsgálat jórésze csak a durva strukturát megadó kapcsolási gráfra kell, hogy szorítkozzék. Mint a következőben látni fogjuk, egy problémánál kell magához az eredeti gráfhoz visszatérni. Ez pedig a következő:

Elemi gráf k -számu lapjára egy-egy tetraédert forrasztva, mikor kapunk tilos él nélküli gráfot?

Ahhoz, hogy belássuk, a tilos él nélküliség problémája valóban erre a problémára vezethető vissza, néhány tulajdonság ismeretére van szükségünk.

/7.4/ Az elemi gráfokból összeferasztott tilos él nélküli G háromszögelt gráfot egy $/a,b,c/$ ferasztási háromszög mentén egy páratlan sok pontu G_1 és egy páros sok pontu G_2 háromszögelt gráfra bontunk. Ekkor

G_2 tilos él nélküli

$H_1 = G_1 - \{a,b,c\}$; $G_1 - a$; $G_1 - b$; $G_1 - c$ gráfoknak van elsőfoku faktoruk, és e három gráf elsőfoku faktorait együtt tekintve, bennük a G_1 összes éle előfordul.

Bizonyítás: G_2 pontjai közül csupán az a,b,c pontoknak van nem G_2 -beli, azaz H_1 -beli szomszédjuk. A G_2 -nek páros sok pontja van. Ezért G egy tetszőleges F 1-faktorára a következő két eset valamelyike teljesül:

1.eset: Az a,b,c pontok közül kettőnek, pl x és y -nak H_1 -beli párja van. $/x,y,z$ az a,b,c pontok egy tetszőleges permutációját jelenti. / Azaz F -ben szerepel $/x,x_1/$ és $/y,y_1/$ alakú él, ahol $\{x_1,y_1\} \subseteq H_1$. Ekkor a z pont párja G_2 -beli.

$F \cap G_1$ a $G_1 - z$ egy 1-faktorát adja.

$(F \cap G_2) \cup \{x,y\}$ a G_2 egy 1-faktorát adja.

2.eset: Az a,b,c pontok közül egynak sincs H_1 -beli párja.

Ekkor $F \cap G_2$ a G_2 egy 1-faktorát adja

$F \cap G_1$ a H_1 egy 1-faktorát adja.

Mivel G tilos él nélküli volt, ezért bármelyik éle előfordul valamelyik F 1-faktorban. Ezért G_2 bármelyik éle előfordul a felsorolt két típusú új faktorok valamelyikében. Hasonló mondható el G_1 éleiről a $G_1 - a$, $G_1 - b$, $G_1 - c$

H_1 új faktoraira vonatkozóan.

/7.5./ Ha a páratlan sok pontu G_1 háromszögelt gráf egy /a,b,c/ lapjára egy G_2 háromszögelt gráfot ráforrasztva tilos él nélküli gráfot kapunk, akkor a G_2 helyett egy G_0 tilos él nélküli háromszögelt gráfot ráforrasztva is tilos él nélküli G gráf adódik.

Bizonyítás: Mindenesetre a /7.4./ szerint G_2 is tilos él nélküli, továbbá a $G_1 - \{a,b,c\}$, $G_1 - a$, $G_1 - b$, $G_1 - c$ gráfok 1-faktorosak, és a faktorokban a G_1 összes éle előfordul. E gráfok 1-faktorait rendre egészítsük ki a G_0 gráf, a $G_0 - \{b,c\}$ gráf, a $G_0 - \{a,c\}$ gráf és a $G_0 - \{a,b\}$ gráf 1-faktoraival. Így a G faktorait kapjuk. Ebben G összes éle előfordul.

A /7.4./ és /7.5./ tulajdonságoknak érdekes következményei vannak. Jelöljön P akár egy páratlan pontszámú elemi gráfot, akár két páros pontszámú elemi gráfból összeforrasztott gráfot. Ekkor

/7.6./ Egy G háromszögelt gráf akkor és csak akkor tilos él nélküli, ha G és P összeforrasztásával előálló gráf tilos él nélküli.

/Valóban: P és egy tetraéder összeforrasztásával adódó gráf a 4.tétel szerint tilos él nélküli. Ebből pedig - a tetraédert G -re cserélve - a /7.4./ és /7.5./ miatt adódik az állítás helyessége./

Következmény: Tilos él nélküli gráfra pl tetszőleges sok páratlan pontszámú elemi gráfot forrasztva, tilos él nélküli gráfot kapunk.

Végül - ismét csak a /7.4./ és /7.5./ segítségével adódik a következő:

/7.7./ A G háromszögelt gráf egy páros pontu végső elemi gráfját G -ből leválasztjuk, és helyébe egy tetraédert forrasztunk. /Feltéve, hogy van páros pontu végső elemi gráf./ A kapott gráf akkor és csak akkor tilos él nélküli, ha G is az.

Ezután, ha kíváncsiak vagyunk arra, hogy egy páros pontu G gráf tilos él nélküli-e, a következőt tesszük: Egy $/a,b,c/$ forrasztási háromszög mentén G -t egy páros pontu G_2 és egy páratlan sok pontu G_1 háromszögelt gráfra bontjuk. A G_1 -nek az $/a,b,c/$ lapjára egy tetraédert forrasztva, a kapott gráf legyen G_0 . A /7.4./ és /7.5./ miatt G akkor és csak akkor tilos él nélküli, ha G_0 és G_2 mindegyike az.

Az eljárást ismételjük. A közben adódó gráfoknál a /7.6/ és /7.7/ miatt szabad a páratlan végső elemi gráfokat, /vagy a nekik megfelelő P -gráfokat/ elhagyni, illetve a páros végső elemi gráfokat tetraéderre cserélni. Így az a kérdés, hogy a G háromszögelt gráf tilos él nélküli-e, valóban visszavezethető arra a kérdésre, hogy:

Egy E elemi gráfra k darab tetraédert forrasztva, mikor kapunk tilos él nélküli gráfot?

Ennél a kérdésnél a válasz már nem a kapcsolási gráftól, hanem az E belső szerkezetétől, a forrasztásra kijelölt lapok elhelyezkedésétől függ. /PL: Egy páros pontszámu E elemi gráfra négy tetraédert forrasztva, kaphatunk tilos éllel rendelkező gráfot is - pl az E -tetraéder esetben -, de kaphatunk tilos él nélkülit is - PL: E egy oktaéder, és négy olyan lapjára forrasztunk tetraédert, amelyek közül bármely kettőnek nincs közös éle.

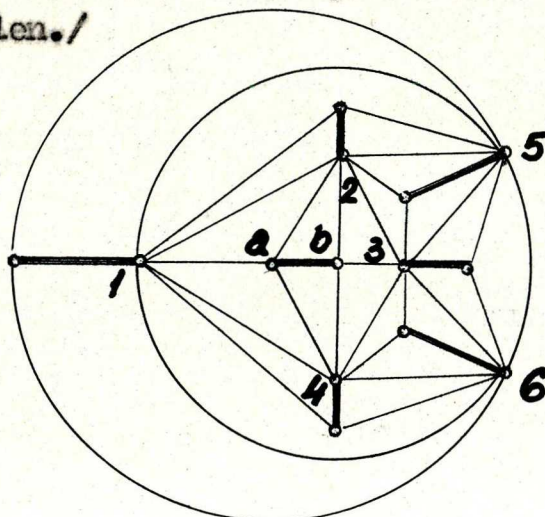
8.§. Lényeges él

Az 1-faktoros G gráf egy $/a,b/$ élét lényeges élnek nevezzük, ha az G minden 1-faktorában szerepel.

/8.1./ Az 1-faktoros $G=X/U$ gráf egy $/a,b/$ éle akkor és csak akkor lényeges él, ha megadható egy olyan A ponthalmaz $/\emptyset \subseteq A \subseteq X/$, hogy $p/A = /A/$, és az $/a,b/$ élt $/a$ végpontjai megtartása mellett megszüntetve, a $G-A$ gráf egy páros sok pontu összefüggő C komponense két páratlan komponensre esik szét.

Bizonyítás: A tételben leírt $/a,b/$ él lényeges él. Ha megszüntetjük, akkor a kapott gráfnak nincs 1-faktora, hiszen a tételben leírt A halmazra $p/A = /A/ + 1$ következik be. Ezért az $/a,b/$ a G minden 1-faktorában szerepel.

Megfordítva: Ha az $/a,b/$ lényeges él: Legyen G_0 az a gráf, amelyet G -ből az $/a,b/$ él megszüntetésével kapunk. /Az a és b pontokat megtartjuk!/. Mivel G_0 -nak nincs 1-faktora, ezért van olyan A ponthalmaza, hogy G_0-A -nak p számu páratlan komponense van, és $p > /A/$. Viszont az $/a,b/$ élt meghuzva, a páratlan komponensek száma $\leq /A/$. /A G gráfnak ugyanis van 1-faktora./ Ez csak úgy lehet, ha az $/a,b/$ él a G_0-A két páratlan komponensét köti össze. /Azaz: $G-A$ -nak van olyan páros pontszámu komponense, amely az $/a,b/$ él megszüntetésével két páratlan komponensre esik szét./ Így a G -ben $p/A = p-2 \leq /A/$. Viszont a kapott $p/A \leq /A/$ és $p/A = p-2 > /A/-2$ -ből $p/A = /A/$ következik. /A $p/A + /A/ \equiv 0 \pmod{2}$ miatt $p/A = /A/-1$ lehetetlen./



13. ábra

Ilyen lényeges él a 13. ábrán látható $/a,b/$ él is.
 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
 $p/A = /A/ = 6$
 $C = /a,b/$. A gráf egy 1-faktorát a vastagított élek adják.

Lényeges élel rendelkező gráfoknál a /8.1/ miatt van olyan A pontthalmaz, hogy $k/A/ \geq p/A/+1 = /A/+1$. Ebből a 3.tételnél követett gondolatmenettel kimutatható, hogy a kapcsolási gráfban van legalább 6-odfoku pontra tartalmazható részfa. A 13.ábra éppen ilyen gráfot mutat.

III. Fejezet: H a m i l t o n k ö r ö k

9.§. Eredmények. A Whitney-tétel általánosítása

Ha egy gráfban van olyan kör, amely a gráf összes pontját tartalmazza, akkor ezt a gráf Hamilton körének /a továbbiakban röviden: H-körének / nevezzük.

A H-kör létezésének szükséges és elegendő feltétele nem ismeretes. Az elegendő feltételek közül nevezetes Dirac tétele: Ha egy n pontu gráfban minden pont foka legalább $n/2$, akkor biztosan van H-kör. Ezt a tételt Pósa általánosította. /Lásd: /10/, /11/, /4/. /

A háromszögelt gráfokra vonatkozóan H. Whitney 1931-ben bebizonyította, /16/, hogy az elemi gráfoknak van H-körük. A bizonyításból az is kiderül, hogy

/3.1/ Elemi gráf bármely E éléhez megadható E -t tartalmazó H-kör.

Ezt az eredményt W.T. Tutte általánosította. Egy 1956-ban megjelent dolgozatában /14/ síkbeli gráfok körére bizonyított egy általános tételt, amelyből következik, hogy négyszeresen összefüggő síkbeli gráfoknak van H-körük. A háromszögelt gráfokra ebből /a pontos alakból/ a következő adódik:

/3.2/ Legyen G elemi gráf, E és F pedig ugyanazon háromszöglet két éle. G -nek van E és F -et egyszerre tartalmazó H-köre.

A Whitney-tétel alapja a következő lemma volt:

Lemma: Gömbre megrajzolt elemi gráf egy R köre a gömb felületét két tartományra osztja. Az egyik tartományt, a benne lévő élekkel és pontokkal együtt az R kör belsejének, a másikat az R kör külsejének nevezzük. Legyen a és b az R két különböző pontja, amely az R -et két ivre: R_1 -re és R_2 -re bontja. Mindkét ivbe $\underline{a}$ -t is, $\underline{b}$ -t is beleértjük. Ha teljesül a következő két feltétel:

1/ R_1 egyetlen pontpárja sincs R belsejében haladó éllel összekötve.

2/ Vagy az R_2 egyetlen pontpárja sincs az R belsejében haladó éllel összekötve, vagy van az R_2 ivnek olyan /az a és b -től különböző/ c pontja, amely az R_2 -öt olyan R_3 és R_4 ivekre osztja, /a c pontot mindkét ivbe beleértjük/ hogy bármelyikük olyan, hogy egyetlen pontpárjuk sincs az R belsejében haladó éllel összekötve.

Ekkor van olyan út $\underline{a}$ -tól $\underline{b}$ -ig /röviden ab út/, amely csak R -beli és R belsejében fekvő élekből áll, és keresztül megy R pontjain és az R belsejében fekvő pontokon egyszer és csakis egyszer.

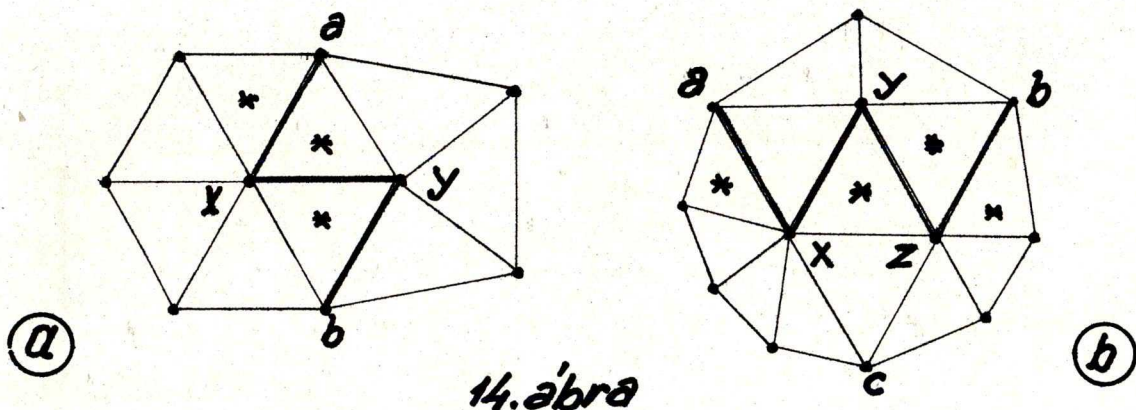
A lemmát egy $E = /a, b/$ élű háromszögre alkalmazva kapjuk a /9.1/-et. A lemma alapján ennél többet is igazolhatunk:

5.tétel: Legyen x az elemi gráf tetszőleges pontja, $E = /a, x/$ és $F = /b, x/$ pedig az x pontra illeszkedő két él. Ekkor van olyan H -kör, amely $\underline{E}$ -t és $\underline{F}$ -et egyszerre tartalmazza.

Bizonyítás: Az x pont szomszédai egy R kört alkotnak. Az R belseje legyen az x -et nem tartalmazó tartomány. Mivel a gráf elemi, ezért az x szomszédai által kifeszített részgráf az R -rel azonos. /a /4.4./ miatt./ Ezért R teljesíti a lemma feltételeit. Az ott szereplő ab utat az E és F élekkel kiegészítve, a gráf egy H -körét kapjuk.

/9.3/ A /4.4./ és a lemma segítségével az elemi gráfoknál bebizonyíthatnánk még néhány - nehezen megfogalmazható - ilyen jellegű tételt.

1/ Vegyük az $E = /x, y/$ élt. /14.a ábra/ Ez az $/a, x, y/$ és $/b, x, y/$ lapokat választja el egymástól. A $P/x/$ körnek y -t nem tartalmazó ab -íve, és a $P/y/$ körnek x -et nem tartalmazó ab -íve a lemmának eleget tevő R kört alkot. /A kör belseje legyen az $/x, y/$ élt nem tartalmazó tartomány/. A lemma szerinti ab -utat akár az $/a, x/$ és $/x, y/$ és $/y, b/$, akár az $/a, y/$ és $/x, y/$ és $/x, b/$ élek egy-egy H -körre egészítik ki.



2/ Tekintsük az $/x, y, z/$ háromszöget. /14.b. ábra/. Ez a háromszög, /ha az elemi gráf legalább hatpontu/ él mentén három háromszöggel szomszédos. Ezeknek az x, y, z pontoktól különböző csúcsai legyenek a, b, c . A $P/x/$ körből a z és y pontokra illeszkedő éleket, $P/y/$ körből az x és z pontra illeszkedő éleket, $P/z/$ körből az x és y pontokra illeszkedő éleket elhagyva, a visszamaradó három ív egy R kört alkot, amely teljesíti a lemma feltételeit. /Az R belseje: az $/x, y, z/$ lapot nem tartalmazó tartomány/. A lemma szerinti ab -utat pl az ábrán vastagított élekkel egy H -körre egészíthetjük ki.

Láthatjuk: nemesak az igaz, hogy az elemi gráfoknak van H -körük, hanem a H -körre még bizonyos kikötéseket is tehetünk. / Egy x pontra illeszkedő két élt előírhatjuk, a 14.a ábrának megfelelő élháromast, vagy a 14.b ábrának megfelelő élnégyszest is megválaszthatunk. / Ez a tény lehetővé teszi, hogy megmutassuk: két elemi gráf összeforrasztásával előálló háromszögelt gráfoknak van H -körük. Ehhez

azonban még bizonyos új fogalmakat célszerű bevezetni:

/9.4./ H-körös gráf egy tetszőleges háromszögét a gráf egy rögzített H-körére vonatkozóan i -típusúnak nevezzük $/i=0,1,2,3/$, ha ebben a H-körben a háromszögnek i száma éle szerepel./3-típusú háromszög nyilván csak a 3 pontú háromszögelt gráfnál fordul elő./

Az 1-típusú és a 2-típusú háromszögeknél kitüntetett pontokról is beszélhetünk: a 2-típusú háromszögnél az a kitüntetett pont, amelyre a háromszög H-körbeli két éle illeszkedik, az 1-típusúnál viszont az, amelyre a háromszög H-körbeli éle nem illeszkedik.

Ezután bebizonyítjuk a következőt:

/9.5/ A G háromszögelt gráfot egy $/a,b,c/$ forrasztási háromszög mentén a G_1 és G_2 háromszögelt gráfokra bontjuk. G -nek akkor és csak akkor van H-köre, ha teljesülnek a következők:

1/ G_1 is, G_2 is H-körös

2a/Vagy az igaz, hogy G_1, G_2 egyikében az $/a,b,c/$ háromszöglap /valamely H-körben/ 1-típusú, ugyanakkor a másik egy H-körében 2-típusú, és a kitüntetett pontok ugyanazok,

b/vagy az igaz, hogy G_1, G_2 mindegyikében az $/a,b,c/$ háromszög 2-típusú, de a kitüntetett pontok különbözők.

Bizonyítás: 1/ A feltétel elegendő: Mind az a/, mind a b/ esetben a G_1 gráf /a tételnek megfelelő/ H-körét jelöljük H_1 -vel. / $i=1,2/$

a/ Ha az 1/ és 2a/ teljesül: Ha pl H_1 -ben az $/a,b,c/$ háromszög 1-típusú pl a kitüntetett ponttal, H_2 -ben pedig 2-típusú, ugyancsak a kitüntetett ponttal, akkor a H_1 -ből

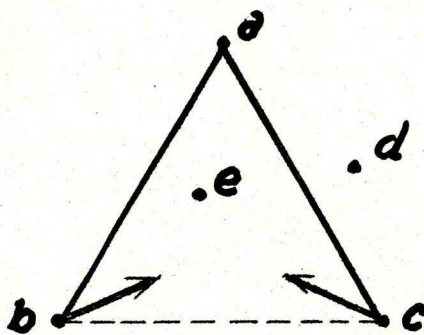
/a végpontok megtartása mellett/ töröljük a $/b,c/$ élt, a H_2 -ből pedig az $/a,b/$ és $/a,c/$ élt. A visszamaradó két ív a G egy H-körét adja, amelyben az $/a,b,c/$ háromszög

o-típusu.

b/ Ha 1/ és 2b/ teljesül: Legyen az $/a,b,c/$ kitüntetett pontja H_1 -ben az a , a H_2 -ben pedig a b pont. Hagyjuk el $/a$ végpontok megtartása mellett H_1 -ből az $/a,c/$ élt, H_2 -ből pedig a $/b,c/$ élt. A visszamaradó két ív $/közös$ élük az $/a,b/$ él/ a G gráf egy H -körét adja, amelyben az $/a,b,c/$ háromszög 1-típusu.

2/ A feltétel szükséges: Ha G -nek van olyan H -köre, amelyben az $/a,b,c/$ háromszög o-, illetve 1-típusu, akkor a bizonyítás 1a/, 1b/ részében leírt eljárás fordítottja a tételben leírt G_1 -beli ill G_2 -beli H -körök létezéséhez vezet. Ezzel az összes esetet ki is merítettük. Ugyanis: Ha G -nek van forrasztási háromszöge, akkor a G legalább ötpontu és így a forrasztási háromszög nem lehet 3-típusu.

Ha az $/a,b,c/$ forrasztási háromszög 2-típusu lenne, pl a kitüntetett ponttal, akkor a H -körnek az a -t nem tartalmazó bc -ive vagy teljesen az $/a,b,c/$ háromszög bel-



15. ábra

sejében, vagy teljesen a külsejében fekszik. /15. ábra./ Ha ez az ív a háromszög belsejéből áthaladna a külsejébe, akkor az ívet szemléltető folytonos vonal metszené a háromszög határát, a Jordan tétellel szembe. De csak csúcspontban metszhetné, mert a

gráf síkbeli. Ekkor viszont az $/a,b,c/$ háromszög valamelyik csúcsára legalább 3, ugyanazon H -körbeli él illeszkedne. Viszont az $/a,b,c/$ háromszög forrasztási háromszög, ezért a belsejében is, a külsejében is van a gráfnak pontja, s ezek mind az a -t nem tartalmazó bc -iven kell, hogy fekszenek. Ez ellentmondás. Ezért a forrasztási háromszög nem lehet 2-típusu.

Az 5.tétel, és a /9,5/-ben leírtak egyszerű következménye:

6.tétel: a/ Két elemi gráf összeforrasztásával keletkező háromszögelt gráfnak van H-köre.

b/ Egy elemi gráf közös csúcsu két háromszöglapjára egy-egy elemi gráfot forrasztva, H-körös gráfot kapunk.

/9.6./ Megjegyzés: A 6.tétel b/-részének helyességét könnyű látni akkor, ha a közös csúcsu két lapra egy-egy tetraédert forrasztunk. Viszont az 5.tétel és a /9.5/ segítségével könnyű bizonyítani, hogy: Ha a G háromszögelt gráf egy lapjára egy G_1 elemi gráfot forrasztva H-körös gráfot kapunk, akkor G_1 helyett bármelyik más elemi gráfot vesszük is, szintén H-körös gráfot kapunk.

/9.7/ Megjegyzés: A /9.5/-tel és az 5.tétellel kapcsolatban még további következményeket sorolhatnánk fel. Egy elemi gráfban bizonyos fajta 3 vagy 4 háromszöglapra egy-egy elemi gráfot forrasztva, H-körös gráfot kaphatunk. /A 14.a és 14.b ábrán π jelöl ilyen lapokat./

/9.8/ A /9.6/ Megjegyzés szerint, ha egy bonyolultabb háromszögelt gráfot vizsgálunk, hogy van-e H-köre, akkor megtehetjük azt az egyszerűsítést, hogy az összes végső elemi gráfjait egy-egy tetraéderre cseréljük ki.

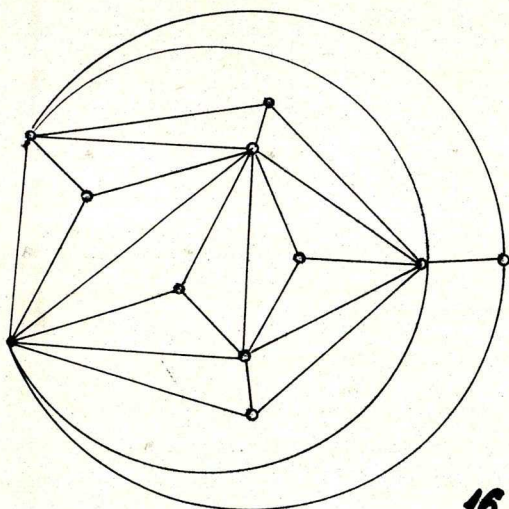
A /9.5/ alapján világos, hogy ha egy H-körös gráfnak van olyan háromszöglapja, amely minden H-körben o-típusu, akkor arra bármilyen háromszögelt gráfot is forrasztunk, mindig H-kör nélküli gráfot kapunk.

Végeredményben minden H-kör nélküli gráfnál ez a "baj" magyarázata: A gráfot állítsuk elő több lépésben az öt alkotó elemi gráfokból, minden lépésben csak egy elemi gráfot forrasztva a meglévőkhöz. Az első két elemi gráf összeforrasztásakor még volt H-kör. Az utolsót hozzáforrasztva, már nincs. Lesz egy lépés, amikor először nincs H-kör, és ekkor éppen egy o-típusu háromszögre forrasztottunk egy elemi gráfot.

Leírnia talán azt az esetet legegyszerűbb, amikor egy elemi gráf k darab háromszögére forrasztottunk egy-egy elemi gráfot. Ahhoz, hogy a létrejövő gráfnak legyen H -köre, a /9.5/ szerint az szükséges /és elegendő is/ hogy az eredeti gráfnak legyen olyan H -köre, amelyben ez a k darab forrasztásra kijelölt lap egyike sem o -típusu. Ez pedig bizonyos k értéktől kezdve teljesíthetetlen kívánság.

10.5. Whitney ellenpéldája. A példa variálása

/10.1/ Whitney /16/ dolgozata végén közöl egy, C.N. Reynoldstól származó példát H -kör nélküli háromszögelt gráfra. Ez lényegében ugyanaz, mint a 16. ábra gráfja. Whitney



16. ábra

ezzel hangsúlyozza: az a kikötés, hogy a gráf elemi legyen, a H -kör biztosítása szempontjából lényeges volt. Azt is megjegyezi, hogy ez a legkevesebb pontu H -kör nélküli háromszögelt gráf. Viszont nem indokolja, miért nincs ennek a gráfnak H -köre,

és azt sem, hogy miért igaz, hogy ebben minimális a pontok száma. Az utóbbit, egyszerű, de hosszú diszkusszióval lehetne igazolni. A következőkben megmutatjuk, hogy a 16. ábra gráfjának valóban nincs H -köre, sőt a példa további általánosításait adjuk meg. Ehhez felhasználjuk a H -kör létezésének egy szükséges feltételét. /Erre még: /6/. /

/10.2./ Egy H -körös $G = /X, U/$ gráf egy A pontthalmazát $/\emptyset \neq A \subseteq X/$ elhagyva, a

$$C_1, \dots, C_k / A /$$

összefüggő komponensekből álló $G - A$ gráfhoz jutunk. A G -ben

C_i és C_j -beli pontok /ha $i \neq j$ / nem lehetnek szomszédosak, mert akkor a $G-A$ -ban C_i és C_j egy komponenst alkotna. Ezért, ha egy C_i -beli a pont egy nem C_i -beli a ponttal szomszédos, akkor $a \in A$.

Tekintsük a G gráf egy H -körét. Legyen $\varphi/C_i/$ a H -kör azon éleinek száma, amelyek C_i -beli pontot A -belivel kötnek össze. Minden C_i -nél ezeket az éleket összeszámolva, az A -beli pontokat legfeljebb kétszer számoltuk meg:

$$\sum_{i=1}^{k(A)} \varphi(C_i) \leq 2 \cdot |A|$$

Itt két tény sajnálatos:

1/ Az egyenlőtlenségben szereplő $\varphi/C_i/$ érték csak H -kör létezése esetén létezik. /Ezt egy gráfról nem tudhatjuk előre./

2/ Ha több H -kör van, akkor a $\varphi/C_i/$ érték az egyes H -köröknél más és más lehet.

Biztos viszont, hogy $\varphi/C_i/ \geq 2$.

Az előbbi egyenlőtlenség lényeges tartalmát adja a

7.tétel: A $G = \langle X, U \rangle$ gráfban az $A \neq \emptyset \subseteq X$ halmazhoz tartozó / $G-A$ -beli/

$$C_1, \dots, C_k/A/$$

összefüggő komponensekre a H -kör létezésétől függetlenül definiáljunk egy $\alpha/C_i/$ függvényt, ahol $\alpha/C_i/ \geq 2$.

Ha az $\alpha/C_i/$ függvény olyan, hogy H -kör létezése esetén

$$\alpha/C_i/ \leq \varphi/C_i/ \text{ teljesül } /i=1, \dots, k/A/ /, \text{ akkor}$$

$$\sum_{i=1}^{k(A)} \alpha(C_i) \leq 2 \cdot |A| \quad /1/$$

is biztosan teljesül.

Nevezzük a gráfot α -tulajdonságúnak, ha bármely $A \neq \emptyset \subseteq X$ halmazára az /1/ teljesül.

A 7.tételnek megfelelő α függvényt definiálhatunk a

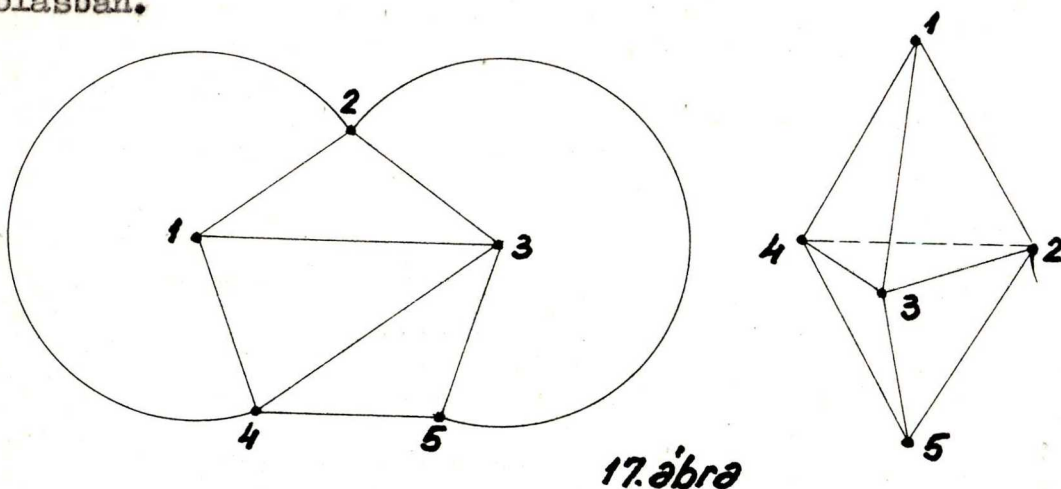
Következőképp: a $G-A$ gráf egy C_1 összefüggő komponensében /mint önálló gráfban/ legyen a végső tagok száma: v .
 /Tag: A gráf maximális kétszeresen összefüggő részgráfja. Bármely két tagnak legfeljebb egy közös pontja van, és ez a közös a pont szeparáló pont. Ha egy tagnak csak egy szeparáló pontja van, akkor végső tagnak nevezzük. Részletebben: /1/ és /8/-ban./

Legyen

$$\alpha /C_1/ = \begin{cases} 2, & \text{ha } v=0 \text{ /pl } C_1 \text{ egyetlen pont./} \\ v, & \text{ha } v>0 \text{ és páros} \\ v+1, & \text{ha } v \text{ páratlan} \end{cases}$$

Világos, hogy $\alpha /C_1/ \leq \varphi /C_1/$. Ezért minden H-körös gráf / /-tulajdonsága, az α ilyen definiálása mellett.

/10.3/ A 17.ábra ugyanazt a gráfot mutatja kétféle ábrázolásban.



A jobboldali rajzon jól látható, hogy a gráf két tetraéder összeforrasztásával áll elő. Ha ennek a gráfnak minden lapjára egy-egy tetraédert forrasztunk, akkor kapjuk a Whitney által említett H-kör nélküli gráfot /16.ábra/

1.variáns: A Whitney példa felfogható úgy, hogy egy ötpontu háromszögelt gráf 6 lapjára forrasztottunk egy-egy tetraédert. Általánosan igaz a következő:

Ha egy n -pontu háromszögelt G_0 gráf legalább $n+1$ lapjára egy-egy háromszögelt gráfot forrasztunk, akkor H-kör nélküli gráfot kapunk.

Bizonyítás: A kapott gráf legyen G , a G_0 -ra forrasztott

háromszögelt gráfok száma pedig $m / \geq n+1 /$. $A = \{G_0 \text{ pontjai}\}$ mellett $G-A$ -nak m darab összefüggő komponense lesz. Ezek mindegyikére $\alpha / C_1 / \geq 2$. Ezért

$$\sum_{i=1}^{K(A)} \alpha / C_i / \geq 2 \cdot m > 2 \cdot n = 2 \cdot |A|$$

ami azt jelenti, hogy G -nek nincs H -köre.

2. variáns: A Whitney példa felfogható úgy is, hogy a 17. ábrán látható $/2, 3, 4/$ háromlú körrel közös élű hat háromszöglapra forrasztottunk egy-egy tetraédert. A megfelelő általánosítás a következő:

A gömbön megrajzolt G_0 háromszögelt gráf egy K köre a gömb felületét két tartományra bontja. Ha

1/ K hossza $2k+1$ $/k \geq 1/$

2/ Mindkét tartományban $2k+1$ olyan háromszöglap van, amelynek van K -val közös éle,

akkor ezekre a lapokra egy-egy háromszögelt gráfot forrasztva, a keletkezett G gráf H -kör nélküli.

Bizonyítás: Legyen $A =$ a K kör pontjainak halmaza. $G-A$ két összefüggő komponensből C_1 -ből és C_2 -ből áll. Mindkettőnek $2k+1$ végső tagja van. Ezért

$$\alpha / C_1 / + \alpha / C_2 / = 2 \cdot (2k+2) > 2 \cdot |A|$$

A keletkezett G gráf tehát nem $/\alpha /$ -tulajdonsága, és így nincs H -köre.

Megjegyzés: Páros hosszúságú K körre hasonló nem érvényes.

3. variáns:

A Whitney példát származtathatjuk a következőképp is: a 17. ábra 1-es pontjára illeszkedő összes háromszöglapra, továbbá az 1 pont szomszédai által alkotott kör $/1$ -et nem tartalmazó/ külső oldalán is három háromszögre egy-egy tetraédert forrasztunk. A megfelelő általánosítás:

Legalább ötpontu háromszögelt G_0 gráf egy pontja legyen a , és e pont szomszédainak köre P/a . Az a csúcspon tu háromszöglapok mindegyikére, továbbá a P/a -val közös élű $/de$ nem a csúcspon tu/ háromszöglapok közül m számúra $/m \geq 3/$ egy-egy háromszögelt

gráfot forrasztva, H-kör nélküli G gráfot kapunk.

Bizonyítás: $\varphi/a=k$ jelölés mellett legyen $A=$ az a pont, és szomszédainak halmaza. $G-A$ -nak $k+1$ összefüggő komponense van, ezek közül egynek $m/\geq 3/$ végső tagja van. Az ehhez rendelt α -érték ≥ 4 . Így

$$\sum_{i=1}^{k+1} \alpha/C_i/ \geq 4 + 2k > 2./A/$$

ezért a G gráfnak nincs H-köre.

IV. Fejezet: Független ponthalmazok

11.§. A $\varphi/F=2./n-2/$ tulajdonságú független ponthalmazok

/11.1/ A $G=X, U/$ gráf egy $F \subseteq X/$ ponthalmazát függetlennek nevezzük, ha F bármely két pontja G-ben nem szomszédos. /azaz: $G/F=0/$

Az F lehet bővíthető: ha van olyan $x \in X/$ pont, amelyre $x \notin F$, és $F \cup \{x\}$ is független ponthalmaz. Ellenkező esetben F-et maximális független ponthalmaznak nevezzük. A G gráf legtöbb pontu maximális független ponthalmazában a pontok számát jelöljük φ -vel. A φ a gráf /pont/függetlenségi száma.

A független pontok nagy szerepet játszanak a gráfok pontjainak színezésében. Ha egy gráf pontjait k-szinnel színeztük úgy, hogy bármely két szomszédos pont különböző színű legyen, akkor az azonos színű pontok a gráf egy független ponthalmazát adják. A k minimális értékét a gráf kromatikus számának nevezzük, és χ -val jelöljük.

/11.2/ Ismeretes /Lásd: /3./, hogy a háromszögelt gráfoknál $\chi=3$ akkor és csak akkor, ha minden pont párosfokú.

Ekkor bármely háromszöglapot is tekintjük, annak összes csúcsa különböző színű. Azaz: az azonos színű pontok halmaza olyan független ponthalmaz, amelyben bármely háromszöglap egyik csúcsa szerepel.

Legyen $G = /X, U/$ egy n -pontu háromszögelt gráf, és F ennek egy független ponthalmaza. G -ben lehetnek olyan háromszöglapok, amelyeknek egyik csúcsa sem F -beli. Ezek száma legyen $h/F/$. Ha $a \in F$, akkor $\varphi/a/$ számú olyan háromszöglap van, amelyiknek egyik csúcsa az a pont. Ezeknek másik két csúcsa nem lehet F -beli. Ezért F -beli csúccsal $\varphi/F/$ számú háromszöglap rendelkezik. Emiatt a lapok száma a következőképp is adódik:

$$/11.3/ \quad \varphi/F/ + h/F/ = 2 \cdot /n-2/$$

Következmény: $\varphi/F/ \leq 2 \cdot /n-2/$ és $=$ akkor és csak akkor, ha $h/F/ = 0$.

A következőkben a $h/F/ = 0$, vagy ami ugyanaz, a $\varphi/F/ = 2 \cdot /n-2/ = \frac{2}{3} \varphi/X/$ tulajdonságú független ponthalmazokat fogjuk vizsgálni. /Ezekre tehát az jellemző, hogy a bennük szereplő pontok fokszámösszege eléri azt a maximális értékét, amit n -pontu háromszögelt gráfoknál egyáltalán el lehet érni./

Az ilyen F / $\varphi/F/ = 2 \cdot /n-2/$ / független ponthalmazzal rendelkező gráfokat egységesen lehet származtatni:

/11.4/ A $G = /X, U/$ háromszögelt gráfban akkor és csak akkor van $\varphi/F/ = 2 \cdot /n-2/$ tulajdonságú független pont-halmaz, ha teljesül a következő két feltétel:

- 1/ $G-F$ minden lapja körlappal homeomorf sokszög, melynek kerületén többszörös pont nem fordul elő.
- 2/ A $G-F$ /síkbeli/ gráfból a G úgy adódik, hogy minden lap belsőjében egy pontot felvéve, azt a lap csúcspontjaival összekötjük.

Bizonyítás: Az 1/ és 2/ feltételek mellett származtatott G háromszögelt gráfnak van ilyen F független ponthalmaza? a beiktatott pontok halmaza.

Ha a háromszögelt G gráfnak van $\varphi/F/ = 2 \cdot /n-2/$ tu-

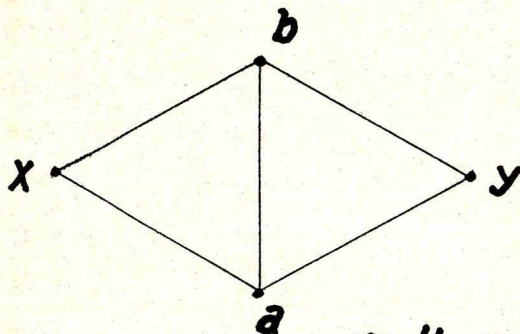
lajdonságu független pontthalmaza, akkor a háromszögtől-
ség, és $h/F=0$ miatt eleget tesz az 1/ és 2/-nek.

Következmény: $G-F$ minden pontja párosfokú. /A G -beli
fokszám a $G-F$ -belinek kétszerese./ Így ha G -ben van

$g/F=2/n-2/$ tulajdonságu független pontthalmaz, akkor
 G minden páratlan fokszámu pontja F -beli.

/11.5/ Ismertetünk egy eljárást, amellyel az ilyen F füg-
getlen pontthalmazokat megkereshetjük, vagy kimutathatjuk,
hogy ilyen F nem létezik.

Ha van ilyen F pontthalmaz, akkor $h/F=0$ miatt minden
háromszöglapnak egy és csak egy csúcsa F -beli. Pl az
 $/a,b,x/$ lapnál legyen $x \in F$. Az $/a,b/$ él másik partján
levő $/a,b,y/$ lapban ekkor az y kell, hogy legyen az F -beli
pont. /18.ábra/



Definiáljunk a gráf összes
pontjára értelmezett R re-
lációt a következőképp:

$/x R y$ azt jelenti, hogy
a reláció x és y -ra teljesül./

1/ Minden x pontra $x R x$.

2/ Ha x és y két, közös
élű háromszöglap nem

közös csúcsai, akkor $x R y$.

3/ Ha megadható olyan $x, x_1, \dots, x_k, y$ sorozat, amelyben bár-
mely két egymásután következő elem két, közös élű három-
szöglap nem közös csúcsa, akkor $x R y$.

Nyilvánvaló, hogy R ekvivalenciareláció.

Megmutatjuk, hogy az R által definiált osztályozásban
a gráf pontjait legfeljebb három osztályba soroltuk:

Tekintsünk egy $/a,b,c/$ háromszöglapot. Az a,b,c pontokat
jelöljük meg egy-egy számmal, pl rendre 0,1,2-vel. Ugyan-
csak 0-val jelöljük meg minden x pontot, amelyre $x R a$
teljesül. /Hasonlóképp: 1-gyel a b -vel ekvivalens pon-
tokat, 2-vel a c -vel ekvivalens pontokat./ Végezzük ugy ezt
a számozást, hogy először az $/a,b,c/$ háromszög pontjait,

majd az $/a, b, c/$ lappal közös élű háromszöglapok pontjait számozzuk be. Nyilvánvaló a következő: a/ Ha egy háromszöglap mindhárom pontját beszámoltuk, akkor a vele közös élű bármely háromszöglap még meg nem számozott pontját is meg tudjuk számozni. b/ Egy háromszögelt gráf bármely lapjába el tudunk jutni egy kiválasztott $/a, b, c/$ lapból úgy, hogy egy adott lapból mindig csak vele közös élű lapba lépünk át. Ezek miatt a gráf összes pontja beszámolható a $0, 1, 2$ -vel, az R relációnak megfelelően. Legfeljebb olyan probléma lép fel, hogy ugyanahhoz a ponthoz több szám is tartozik. Ekkor ezeket a jeleket azonosítjuk: azaz az osztályok száma 3-nál kevesebb lesz.

Igy ha a G háromszögelt gráfnak van $\varphi/F=2/n-2/$ tulajdonsága független ponthalmazra, akkor ez éppen az R reláció által definiált osztályozás egyik osztályának pontjaiból áll./ Ha $x \in F$, akkor az $x R y$ és az $y \in F$ ugyanazt jelenti./

8.tétel: Az n -pontú G háromszögelt gráfban $\varphi/F=2/n-2/$ tulajdonsága független ponthalmaz

1/ vagy nincs

2/ vagy egyetlen egy van /és ezt az összes páratlan fokú pontok, és a velük R -ben ekvivalens pontok adják/,

3/ vagy pedig három van /és ezek diszjunktak/

Bizonyítás: A $\varphi/F=2/n-2/$ tulajdonsága F független ponthalmaz pontjai az R relációban egymással ekvivalensek. Másrészt az ekvivalenciarelációhoz tartozó osztályok bármelyike egy elemével már meghatározott. Ezért ha több ilyen F van, akkor azok diszjunktak.

Ha van ilyen $\varphi/F=2/n-2/$ tulajdonsága független ponthalmaz, akkor abban bármely lapnak egy csúcsa szerepel. Mivel bármely lapnak három csúcsa van, ezért legfeljebb három ilyen F létezik. (Valóban létezik, ha a G kromatikus szám=3, azaz ha minden pont párosfokú.)

Ha két ilyen F független ponthalmaz lenne, pl F_1 és F_2 : Mivel ezek diszjunktak, minden háromszöglap egyik csúcsa F_1 -beli, egy másik csúcsa F_2 -beli. A sem F_1 -be, sem F_2 -be nem tartozó pontok egy F_3 halmazt alkotnak.

A $h/F_3=0$, ez világos. Az F_3 pontjai függetlenek is: ha két szomszédos pont, pl az a és b mindkettő F_3 -beli volna /18.ábra/, akkor az $/a,b/$ élű háromszöglapok bármelyikét is vesszük, abból vagy egy F_1 -beli, vagy egy F_2 -beli pont hiányozna. Ez lehetetlen.

Ezzel eljárást is adtunk a $\varphi/F=2/n-2/$ tulajdonságu független ponthalmazok megkeresésére.

12.5. Független ponthalmaz pontjainak maximális száma. Az extrém gráfok meghatározása

/12.1/ Az n -pontu háromszögelt G gráfban egy független ponthalmaz legyen F . Ha $n \geq 4$, akkor minden pont legalább harmadfoku. Emiatt

$$3/F/ \leq \varphi/F/ \leq 2/n-2/$$

amiből, figyelembevéve, hogy $/F/$ egész szám

$$/F/ \leq \left[\frac{2/n-2/}{3} \right]$$

Ha φ jelenti a független pontok maximális számát, akkor természetesen ez az egyenlőtlenség $/F/$ helyett φ -re is felírható.

/12.2/ A következőkben megkeressük azokat az n -pontu háromszögelt gráfokat, amelyekben a

$$\varphi = \left[\frac{2/n-2/}{3} \right]$$

bekövetkezik. /Az ilyen extrém gráfok meghatározása a gráfelméletben általánosan szokásos./

Egy ilyen extrém gráf legyen G , benne egy φ -pontu független ponthalmaz: F . Ha az n -et mod 3 vizsgáljuk, akkor a következő táblázat adta lehetőségek vannak:

n	φ	$n-\varphi$
$3k$	$2k-2$	$k+2$
$3k+1$	$2k-1$	$k+2$
$3k+2$	$2k$	$k+2$

Mindhárom esetben a $G-F$ gráfnak $k+2$ pontja van. $G-F$ sik-

beli gráf. Egy $k+2$ pontu síkbeli gráfnak legfeljebb $2/k+2 - 2 = 2k$ lapja lehet, és ez akkor van, ha a gráf háromszögelt.

G-F-nek kell, hogy legyen legalább φ lapja. Ezért a következő esetek lehetségesek:

1.eset: $n=3k$, $\varphi=2k-2$. A G-F-nek legalább $2k-2$ és legfeljebb $2k$ lapja van. Ez úgy lehet, hogy

- a/ G-F-nek $2k$ lapja van, ez mind háromszög, de csak $2k-2$ lappa iktattunk /F-beli/ pontot. Ekkor F minden pontja G-ben harmadfoku.
- b/ G-F-nek $2k-1$ lapja van. Ez úgy lehet, ha $2k-2$ lap háromszöglap, egy pedig négyszög. Megfelelően F-nek egy negyedfoku és $2k-3$ harmadfoku pontja van.
- c/ G-F-nek $2k-2$ lapja van. Ez úgy lehet, ha $2k-3$ lap háromszöglap, egy pedig ötszög, vagy pedig $2k-4$ lap háromszöglap, és kettő négyszög. Megfelelően F-nek $2k-3$ darab 3-adfoku és egy 5-ödfoku, vagy pedig $2k-4$ darab 3-adfoku és 2 negyedfoku pontja van.

2.eset: $n=3k+1$, $\varphi=2k-1$. Ekkor G-F-nek legalább $2k-1$ és legfeljebb $2k$ lapja van. Ez úgy lehet, ha

- a/ G-F-nek $2k$ lapja van és ez mind háromszög. Megfelelően F minden pontja 3-adfoku.
- b/ G-F-nek $2k-1$ lapja van. Ekkor $2k-2$ háromszög, egy pedig négyszög. Megfelelően F-nek $2k-2$ 3-adfoku pontja és egy 4-edfoku pontja van.

3.eset: $n=3k+2$, $\varphi=2k$. Ekkor G-F-nek $2k$ lapja van, és ez mind háromszög. Megfelelően F minden pontja harmadfoku.

Megjegyzés: Mivel $k+2 = 6$ -tól kezdve több, egymással nem izomorf $/k+2/-$ pontu háromszögelt gráf van, ezért az n pontu extrém gráfokból is több van.

Irodalomjegyzék

- 1/ Berge, C.: Théorie des graphes et ses applications
/Dunod, Paris, 1958/
- 2/ Brooks, R., L.: On colouring the nodes of a network
/Proc. Cambridge Phil. Soc. 37/1941/ 194-197.
- 3/ Dynkin, E. B. - Uspenski, W. A.: Mathematische Unter-
haltungen I. Mehrfarbenprobleme. /Deutscher Verlag
d. Wissenschaften. Berlin, 1955./
- 4/ Erdős, P.: Remarks on a paper of Pósa
/MTA Mat. Kut. Int. Közleményei VII.A./1962/227-
229./
- 5/ Gallai, T.: Neuer Beweis eines Tutte'schen Satzes
/MTA. Mat. Kut. Int. Közleményei VIII.A /1963/
135-139./
- 6/ Heteyi, G.: Hamilton kör létezésének egy szükséges
feltétele /Pécsi Tanárképző Főisk. Tudományos
Közleményei 1966. Széria 6, 3-11./
- 7/ König, D.: Theorie der endlichen und unendlichen
Graphen /Springer, Leipzig, 1936./
- 8/ Ore, O.: Theory of graphs. /American Math. Soc. Col-
loquium Publ. 38. Providence USA 1962./
- 9/ Ore, O.: Graphs and their Uses /Random House, New
York, 1963/
- 10/ Ore, O.: Note on Hamilton circuits /American Math.
Monthly 67/1960/ 55./
- 11./ Pósa, L.: A theorem concerning Hamilton lines
/MTA Mat. Kut. Int. Közleményei VII.A./1962/
225-226./
- 12/ Tutte, W. T.: On Hamiltonian circuits /The Journ.
of the London Math. Soc. XXI./1946/ 98-101./
- 13/ Tutte, W. T.: The factors of graphs /Canadian Journ.
of Math. 4/1952/ 314-328./
- 14/ Tutte, W. T.: A theorem on planar graphs /Transacti-
ons of the American Math. Soc. 82/1956/ 99-116/

- 15/ Tutte, W.T.: A census of planar triangulations
/Canad. Journ. of Math. 14/1962/ 21-38./
- 16/ Whitney, H.: A theorem on graphs. /Annals of Math.
32/1931/ 378-390./

