

FŐIDEÁLFELCSOPORTOK ÉS KVÁZIFŐIDEÁLFELCSOPORTOK

VIZSGÁLATA

MEGYESI LÁSZLÓ

doktori értekezése

1969.

Bolyai Intézet



Diss. B 363



Ez a dolgozat részben a főideálfélcsoportokra vonatkozó dr. Pollák Györggyel közös eredményeket, részben azok közül bizonyosaknak az általam definiált kvázifőideálfélcsoportokra való általánosítását tartalmazza. A főideálfélcsoportokkal kapcsolatos eredmények közül önálló részt képeznek azok, melyek a 8., 9. §-ban szerepelnek.

Egyidejűleg itt szeretném köszönetemet kifejezni dr. Pollák György tudományos főmunkatársnak, aki munkámat állandóan figyelemmel kísérte, és számos értékes tanácsot adott.

1. §. A főideálfélcsoport és a kvázifőideálfélcsoport definíciója

A főideálfélcsoport és a kvázifőideálfélcsoport definíciójának megadásához néhány, - az egész dolgozatban gyakran használt - fogalom ismertetésére van szükség.

Jelöljön H egy félcsoportot.

Az $L (\subseteq H)$ részhalmazt H balideáljának nevezzük, ha

$$(1) \quad H \cdot L \subseteq L$$

teljesül. Hasonlóképpen egy R részhalmazt H jobbideáljának nevezzük, ha

$$(2) \quad R \cdot H \subseteq R$$

Ha az (1) és (2) feltétel egyidejűleg teljesül egy $I (\subseteq H)$ részhalmazra, akkor I -t H kétoldali ideáljának, vagy röviden ideáljának nevezzük.

Ha az L balideálhoz /az R jobbideálhoz/ van olyan $a \in H$ /illetve $b \in H$ /, melyre $Ha \cup a = L$, /illetve $bH \cup b = R$,/ akkor azt mondjuk, hogy az L balideált az

a elem, /az R jobbideált a b elem/ generálja.

Megjegyezzük, hogy Ha^Ua bármely $a \in H$ -ra a legszűkebb olyan balideál, és bH^Ub bármely $b \in H$ -ra a legszűkebb olyan jobbideál, mely az a illetve a b elemet tartalmazza.

Az egy elem által generált bal- illetve jobbideálokat fő bal- illetve jobbideáloknak nevezzük. Ha a félcsoporth valamely eleme az I ideált bal- és jobbideálként generálja, akkor I főideál.

Az a elem által generált balideált $L(a)$ -val, jobbideált $R(b)$ -vel, ideált $I(a)$ -val jelöljük.

1. Definíció

Főideálfélcsoporthnak nevezünk egy olyan félcsoporthat, amelyben minden balideál, jobbideál (és így minden kétoldali ideál is) fő bal- illetve jobbideál.

A főideálfélcsoporthok, kvázifőideálfélcsoporthok vizsgálatánál szükségünk lesz a J , R , L és Q osztályok fogalmára. Ezeket a fogalmakat Green vezette be.

Legyen L_1 és L_2 két szomszédos balideál. Ezen azt értjük, hogy

$$\emptyset \subseteq L_1 \subset L_2$$

és nincs olyan L balideál, melyre

$$L_1 \subset L \subset L_2$$

lenne. Bármely két szomszédos balideál különbségalmazát L osztálynak nevezzük. Megjegyezzük, hogy ha egy L osztály az $L_2 - L_1$ különbségalmazból áll, akkor az L osztály minden eleme balideálként L_2 -t generálja. /lásd Ijapin [8] könyv 203-213. oldal/. Analóg módon értendő jobbideálokra vonatkozólag az R osztály, ideálokra a J osztály fogalma is.

Az L , R , J osztály elnevezés helyett használjuk a balideálréteg, jobbideálréteg, ideálréteg elnevezést is.

Egy Q osztály azokat az elemeket tartalmazza, melyek egy balideálréteg és egy jobbideálréteg metszetébe esnek.

A Q osztály elnevezés helyett használjuk a kváziideál elnevezést is.

Megjegyezzük, hogy a H félcsoport összes J osztálya, és ugyanígy az összes L , R , Q osztálya a félcsoportnak osztályozását adja.

Az ezekhez az osztályokhoz tartozó relációt is J , L , R , Q -val jelöljük.

Látható, hogy a jelölések lényegében egybeesnek a [2] könyvben találhatóakkal.

Egy ideál maximális balideáljának nevezzük azt a valódi /vagyis a megadott ideáltól különböző/ balideált, amely nem része egyetlen az ideálba eső balideálnak sem. Ilyen balideál nem minden ideálban létezik, s ha létezik, több is lehet. Ha egyetlen maximális balideál létezik, akkor annak minden valódi balideál része. Az ideál és egy maximális balideál különbségalmazát maximális balideálrétegnek / L osztálynak/ nevezzük. Ezt nemcsak az ideál, hanem a megfelelő ideálréteg maximális balideálrétegének tekintjük.

Analóg módon definiálható a maximális jobbideál, valamint a maximális jobbideálréteg fogalma.

Tekintsük most balideáloknak egy M halmazát. Akkor mondjuk, hogy az M halmazhoz tartozó balideálokra teljesül a maximum-feltétel, ha bárhogyan megadva M -hez tartozó balideáloknak növekvő sorozatát:

$$L_1 \subseteq L_2 \subseteq L_3 \subseteq \dots \subseteq L \subseteq \dots$$

a sorozatban csak véges sok különböző lehet.

Ha az M -hez tartozó bármely két L_1, L_2 ($L_1 \neq L_2$) balideálra vagy $L_1 \subset L_2$, vagy $L_1 \supset L_2$ teljesül, akkor azt mondjuk, hogy az M halmaz balideál-lánc.

Ha M balideál-lánc, és érvényes M -ben a maximumfeltétel, akkor megadható M elemeinek egy alkalmas rendszámnál kisebb rendszámokkal való indexezése olymódon, hogy $L_\alpha \supset L_\beta$ akkor és csakis akkor, ha $\alpha < \beta$. Ezért, ha M -ben az említett két követelmény teljesül, akkor azt mondjuk, hogy M jólrendezett balideál-lánc.

A balideálrétegekre is definiálhatunk hasonló fogalmat: balideálrétegek valamely halmaza jólrendezett láncot alkot, ha a balideálrétegek elemei által generált balideálok jólrendezett láncot képeznek.

Az utóbbi definíciók, melyeket balideálokra, balideálrétegekre mondtunk ki, értelemszerű változtatással érvényesek jobbideálokra, jobbideálrétegekre, valamint ideálokra, ideálrétegekre.

Most már megadhatjuk a kvázifőideálfélcsoport definícióját.

2. Definíció

A kvázifőideálfélcsoport olyan félcsoport, mely teljesíti a következő követelményeket:

- a.) Minden ideál főideál.
- b.) Minden ideálrétegnek van egyetlen maximális bal- és egyetlen maximális jobbideálrétege.

- c.) Mindazok a jobbideálrétegek /balideálrétegek/, amelyeknek van közös elemük a maximális balideálréteg /jobbideálréteg/ elemeivel jólrendezett láncot alkotnak.
- d.) Ha I_1 és I_2 két szomszédos ideál, $(I_1 \supset I_2)$ és az $I_1 \setminus I_2$ ideálréteg egynél több balideálréteget /jobbideálréteget/ tartalmaz, akkor $H \setminus I_1$ bármely a elemére $I_1 \cdot a \subseteq I_1$ / $aR_1 \subseteq R_1$ / teljesül, ahol L_1 I_1 maximális balideálja / R_1 I_1 maximális jobbideálja/.

Ebből a definícióból látható, hogy a kvázifőideálfélcsoport fogalma annyiban általánosabb a főideálfélcsoporténál, hogy itt csak az ideálokra követeljük meg ugyanazt, amit a főideálfélcsoportoknál a bal- és jobbideálokra. Ez a követelmény még kiegészül három új követelménnyel - amelyekről ki fog derülni, hogy a főideálfélcsoportok mindet teljesítik. Ezekre azért volt szükség, hogy a kvázifőideálfélcsoportok számos olyan tulajdonsággal rendelkezzenek, mint a főideálfélcsoportok.

A főideálfélcsoportok, kvázifőideálfélcsoportok definíciójában, és ugyanígy a továbbiakban sorra kerülő bármely problémában a balideálok és a jobbideálok, balideálrétegek és a jobbideálrétegek stb. teljesen szimmetrikus szerepet játszanak.

Az ebből eredő dualitást ki fogjuk használni. Könnyű látni, hogy egy tételnek és bizonyításának duálisát úgy kapjuk meg, hogy a tételben és bizonyításában a bal, jobb szavakat L , R betűket, szorzásnál a tényezők sorrendjét, stb. felcseréljük.

A továbbiakban két egymással duális állítás közül mindig csak az egyiket fogjuk kimondani és bizonyítani. A későbbiekben, ha egy már bebizonyított állítás duálisát akarjuk valamely bizonyítás során felhasználni, akkor külön megjegyzés nélkül a szóbanforgó bebizonyított állításra hivatkozunk.

2. §. A főideálfélcsoportok és kvázifőideálfélcsoportok kapcsolata

Ennek, és az ez után következő két paragrafusnak fő célja annak a bebizonyítása, hogy minden főideálfélcsoport kvázifőideálfélcsoport.

Legyen H főideálfélcsoport. Bizonyítandó, hogy H kvázifőideálfélcsoport. A kvázifőideálfélcsoport definíciójának a.) pontja triviálisan fennáll.

A definíció b.) és c.) pontjának teljesülése a Ljapin [8] könyvben található tétel következménye. /IV. fejezet 12. pont, 226. oldal /. A tétel a következőképpen hangzik:

2.1. Egy félcsoport összes ideáljai /valamint bal- illetve jobbideáljai/ akkor és csak akkor főideálok /fő bal illetve jobbideálok/ ha jólrendezett láncot alkotnak.

A Ljapin könyvben a tétel és bizonyítása csak ideálokra szerepel, de könnyen általánosítható jobb és bal-ideálokra is.

A 2. definíció b.) pontjának főideálfélcsoportokra való teljesülése következik abból, hogy jólrendezett lánc esetén érvényes a maximumfeltétel, a c) pont érvényessége pedig triviális.

Annak bizonyítása, hogy a H főideálfélcsoport teljesíti a kvázifőideálfélcsoport definíciójának d.) pontját is, a főideálfélcsoportok szerkezetének alapos vizsgálatát követeli meg. Ezért ennek bizonyítására csak a 4. §-ban kerül sor. A főideálfélcsoportok vizsgálata önmagában is fontos eredményekre vezet.

Kezdjük ezt 2.1. következményeinek megállapításával.

Ez a tétel lehetővé teszi, hogy minden balideálhoz, jobbideálhoz és ideálhoz egy rendszámot rendeljünk.

A hozzárendelés úgy történik, hogy $I_\alpha \supset I_\beta$ / $L_\alpha \supset L_\beta$, $R_\alpha \supset R_\beta$ / akkor és csak akkor, ha $\alpha < \beta$.

Ez a hozzárendelés már kijelöli a Green-féle osztályok megfelelő rendezését is. Ezeket az osztályokat a továbbiakban $\underline{I}_\alpha$, $\underline{L}_\alpha$, $\underline{R}_\alpha$, illetve $\underline{Q}_{\alpha\beta}$ jelöli.
 $\underline{I}_\alpha = I_\alpha \setminus I_{\alpha+1}$, $\underline{L}_\alpha = L_\alpha \setminus L_{\alpha+1}$, $\underline{R}_\alpha = R_\alpha \setminus R_{\alpha+1}$,
 $\underline{Q}_{\alpha\beta} = \underline{L}_\alpha \cap \underline{R}_\beta$ /ahol esetleg $I_{\alpha+1}$, $L_{\alpha+1}$, $R_{\alpha+1}$ üres szimbolumok, ha I_α , L_α , R_α minimális. I_α minimális, ha nincs önmagától különböző ideál, mely része lenne/.
 A bal és jobbideáldétegek indexei általában különböző rendtipusú halmazt alkotnak. /A rendszámhalmazt választjuk úgy, hogy hézagtalan legyen/. Legyen a balideálok indexeinek halmaza γ_l , a jobbideáloké γ_r , az ideáloké γ_i rendtipusú. /Természetesen a balideálok, jobbideálok sorozatában egyaránt helyet kapnak az ideálok/.

Nyilvánvaló, hogy fennáll: $\mathcal{I}_i \leq \mathcal{I}_e, \mathcal{I}_i \leq \mathcal{I}_r.$

2.1. alapján könnyű látni a következő állítás érvényességét:

2.2. Bármely főideálfélcsoportban
ha $I(a) \supseteq I(b)$, akkor $I(a) \supseteq I(b)$ és ha
 $I(a) \supset I(b)$ akkor $I(a) \supset I(b)$.

3. §. Főideálfélcsoportok ideálrétegeinek
tipusai

Tekintsünk egy főideálfélcsoportot. Ennek egy I ideálrétegét balról rétegezettnek nevezzük, ha egynél több balideálréteget tartalmaz. Bebizonyítjuk, hogy minden balról rétegezett ideálréteg jobbról is rétegezett, vagyis egynél több jobbideálrétegből áll. Ennek bizonyításához előbb néhány segéd-tételt és egy tételt kell bebizonyítani.

3.1. Bármely H félcsoportban az $L \rightarrow La$ ($a \in H$) leképezés a balideálhálónak önmagába való monoton leképezése és abból, hogy

$$(1) \quad L \subset L', \quad La \subset \bar{L} \subset La$$

következik egy olyan L'' ideál létezése, melyre

$$L \subset L'' \subset L', \quad L''a = L'.$$

Az állítás első része nyilvánvaló.

Tegyük fel, hogy (1) fennáll. Tekintsük azt a balideált, mely azokból az $x \in H$ elemekből áll, amelyekre $xa \in \bar{L}$. Jelöljük ezt L_0 -al. Legyen $L'' = L_0 \cap L'$. Nyilvánvaló, hogy $L''a \subseteq \bar{L}$. Másrészt $\bar{L} \subset La$ miatt

bármely $\bar{b} \in \bar{L}$ -hoz létezik olyan $b \in L'$, hogy $ba = \bar{b}$, és így $b \in L_0$ is teljesül, vagyis $b \in L''$, tehát $\bar{L} \subseteq L''$ a.

Megkaptuk azt, amit bizonyítani kellett.

3.2. Ha a H főideálfélcsoportban $L_\mu a = L_\alpha$, $L_{\mu+\nu} \cdot a = L_{\alpha+\beta}$ egyenlőségek érvényesek, akkor $\beta \leq \nu$. Speciálisan $L_\alpha b = L_\alpha$, $L_\alpha \supseteq L_\mu$ -ből $L_\mu b \supseteq L_\mu$ következik.

Ez a segédétel az előzőből következik, ha azt arra az esetre alkalmazzuk, amikor az

$\{L_{\mu+\xi}\}_{0 \leq \xi \leq \nu}$ halmazt az $\{L_{\alpha+\eta}\}_{0 \leq \eta \leq \beta}$ halmazra képezzük le.

3.3. Legyen I_1 és I_2 két azomszédos ideál ($I_1 \supset I_2$, $\underline{I} = I_1 \setminus I_2$). Ha $\underline{L}_0 \cup I_2$ balideál valamely $\underline{L}_0 \subseteq \underline{I}$ balideálrétegre, akkor $\underline{L} \cup I_2$ is balideál bármely $\underline{L} \subseteq \underline{I}$ balideálrétegre.

A bizonyítás megtalálható a Ljapin [8] könyv 233-235. oldalán.

3.4. Ha a H főideálfélcsoportban

$$I_\sigma = L_\alpha \quad I_{\sigma+1} = L_{\alpha+\xi} \quad (\xi \neq 1)$$

akkor ξ limeszszám.

Ez az előző segédtétel következménye.

Ha $\xi = \eta + 1$ akkor

$$L_{\alpha+\eta} = \underline{L_{\alpha+\eta}} \cup I_{\sigma+1}$$

balideál lenne, s ez pedig ellentmondásra vezet, mert az $\underline{L_{\alpha}} \cup \underline{L_{\alpha+\xi}} \cup I_{\sigma+1}$ balideálnak nem adható meg generáló eleme.

3.5. Ha a H félcsoporth I ideálrétegének balideálrétegei között van maximális, legyen ez $\underline{L_0}$, akkor bármely $\underline{L} \subseteq I$ balideálréteghez van olyan $a \in H^1$, melyre $\underline{La} \subseteq \underline{L_0}$ /azaz $L a = I$ /

$/H^1$ jelenti a félcsoporth egységelemes bővítését/.

A segédtétel bizonyítása a következőképpen történik.

Ha $\underline{L} \subseteq I$, $x \in \underline{L}$, $y \in \underline{L_0}$, akkor léteznek olyan $\underline{b}$, $\underline{a} \in H^1$ elemek, hogy $y = bxa$.

Nyilvánvaló, hogy az $\underline{xa}$ által generált balideál bővebb vagy legfeljebb egyenlő mint a $\underline{bxa}$ által generált, de $\underline{xa} \in I$ és $\underline{L_0}$ maximalitása miatt az egyenlőség kell, hogy fennálljon. Mivel $\underline{xa} \in \underline{L_0}$, így $\underline{La} \subseteq \underline{L_0}$ teljesül.

Nagyon fontos az, hogy ez a segédtétel tetszőszerinti félcsoporthra érvényes, így a kvázifőideálfélcsoporthokra vonatkozóan is felhasználható.

Ha a 3.5 segédtevélt főideálfélcsoportra alkalmazzuk, akkor azt kapjuk, hogy a főideálfélcsoport bármely balról rétegezett $\underline{I}_\sigma$ ideálrétegének $\underline{L}_\mu$ balideálrétegéhez van olyan $a \in H$, hogy $\underline{L}_\mu a \subseteq \underline{L}_\alpha$, azaz $\underline{L}_\mu a = \underline{I}_\sigma$ /amennyiben $\underline{I}_\sigma = \underline{L}_\alpha$ /. Egy ilyen elemet, az $\underline{L}_\mu$ balideálréteghez, vagy az $\underline{L}_\mu$ balideálhoz tartozó növelő elemnek nevezzük. Azt is mondjuk, hogy az a növelő elem az $\underline{L}_\mu$ -re, vagy az $\underline{L}_\mu$ -re nézve.

Bevezetjük az azonosító elem fogalmát is. Egy a elemet azonosítónak nevezünk /az $\underline{I}_\sigma$ ideálra, vagy az $\underline{I}_\sigma$ ideálrétegre nézve/, ha

$$\underline{I}_\sigma a = \underline{I}_\sigma$$

Az azonosítók tehát az $\underline{L}_\alpha = \underline{I}_\sigma$ balideálhoz tartozó növelő elemek.

Legyen a továbbiakban $\underline{I}_\sigma$ a H főideálfélcsoport balról rétegezett ideálrétege, $\underline{L}_\alpha = \underline{I}_\sigma$, $\underline{L}_{\alpha+\xi} = \underline{I}_{\sigma+1}$.

3.6. Ha $a \in \underline{L}_\mu$ az $\underline{L}_{\alpha+\lambda}$ ($0 \leq \lambda < \xi$) balideálhoz tartozó növelő elem, akkor $\underline{L}_\tau$ ($\tau \leq \mu$) bármely eleme azonosító.

$$\text{Legyen } b \in \underline{L}_\tau \quad (\tau \leq \mu)$$

Van olyan $x \in H$, melyre $xb = a$.

Fennáll:

$$\underline{I}_\sigma b \supseteq \underline{L}_{\alpha+\lambda} \times b = \underline{L}_{\alpha+\lambda} a = \underline{I}_\sigma$$

amiből következik b azonosító volta.

Ebből a segédteételből az is leolvasható, hogy minden növelő elem azonosító.

3.7. Bármely $a \in H$ elemhez található $\underline{I}_\sigma$ -nak olyan $\underline{L}_\mu$ balideálrétege, hogy $\underline{L}_\mu a \neq \underline{I}_\sigma$.

Ellenkező esetben ugyanis $\underline{L}_\mu a = \underline{I}_\sigma$, és így $\underline{L}_\mu a \subseteq \underline{L}_\alpha$ lenne bármely $0 \leq \mu < \xi$ -re, /míg $\underline{I}_{\sigma+1} \cdot a \subseteq \underline{I}_{\sigma+1}$ / és ez ellentmondás a 3.2 segédteétel miatt.

3.8. Legyen $\underline{I}_\xi$ a H főideálfélcsoport ideálrétege. Ha $xy \in \underline{I}_{\xi+1}$ érvényes valamely $x \in \underline{I}_\xi$ és $y \in H$ elemre, akkor $\underline{I}_\xi y \subseteq \underline{I}_{\xi+1}$.

Ha $\underline{I}_\xi$ nem balról rétegezett ideálréteg, akkor az állítás nyilvánvaló.

Legyen $\underline{I}_\xi = \underline{I}_\sigma$ vagyis balról rétegezett ideálréteg.

Tegyük fel, hogy $\underline{I}_\sigma \cdot y = \underline{L}_{\alpha+\tau} \supset \underline{I}_{\sigma+1}$, ($0 \leq \tau < \xi$)
Figyelembe véve 3.1-t, és azt, hogy $xy \in \underline{I}_\sigma$, kapjuk hogy van olyan $\underline{L}_{\alpha+v}$ ($0 < v < \xi$) balideál, melyre $\underline{L}_{\alpha+v} \cdot y \subseteq \underline{I}_{\sigma+1}$. Legyen $\underline{L}_{\alpha+v_0}$ az ilyen balideálok közül a maximális. ($v_0 > 0$) 3.5 szerint megadható olyan $b \in H$, hogy

$$(2) \quad \underline{I}_\sigma \cdot y b = \underline{L}_{\alpha+\tau} b = \underline{L}_\alpha \quad \text{érvényes.}$$

Másrészt

$$(3) \quad L_{\alpha+\nu_0} y b \subseteq I_{\sigma+1} b \subseteq I_{\sigma+1} = L_{\alpha+\xi}$$

(2) és (3) ellentmond 3.2-nek. Így $I_{\sigma} \cdot y \subseteq I_{\sigma+1}$.

1. tétel. Legyen I_{σ} a H főideálfélcsoport balról rétegezett ideálrétege $/I_{\sigma} = L_{\alpha}, I_{\sigma+1} = L_{\alpha+\xi} /$

Bármely $L_{\alpha+\lambda}$ ($0 \leq \lambda < \xi$) balideálhoz található az L_{α} balideálrétegben növelő elem.

A tétel bizonyítása három részben történik.

a.) Elsőként bebizonyítjuk, hogy ha L_{α} -ban valamely $L_{\alpha+\lambda_0}$ ($0 \leq \lambda_0 < \xi$) balideálhoz van növelő elem, akkor mindegyik $L_{\alpha+\lambda}$ -hoz is ($0 \leq \lambda < \xi$).

Legyen $\underline{a} \in L_{\alpha}$ és $L_{\alpha+\lambda_0} \cdot \underline{a} = I_{\sigma}$.

3.6. szerint $I_{\sigma} \underline{a} = I_{\sigma}$.

3.5 alapján bármely $L_{\alpha+\lambda}$ -hoz $/0 \leq \lambda < \xi /$ létezik $b \in H$, melyre $L_{\alpha+\lambda} b = I_{\sigma}$, és így

$$L_{\alpha+\lambda} b \underline{a} = I_{\sigma} \underline{a} = I_{\sigma}$$

Tehát $\underline{ba}$ az L_{α} -beli $L_{\alpha+\lambda}$ -hoz tartozó növelő elem.

b.) Tegyük fel, hogy L_{α} -ban egyetlen $L_{\alpha+\lambda}$ balideálhoz sincs növelő elem.

Bebizonyítjuk, hogy ekkor van olyan $L_\gamma \supset I_\sigma$ balideál, melyre

$$(4) \quad I_\sigma a = I_\sigma \quad \text{ha} \quad a \in H \setminus L_\gamma$$

és

$$(5) \quad I_\sigma a \subseteq I_{\sigma+1} \quad \text{ha} \quad a \in L_\gamma$$

A 3.6. segédétel figyelembe vételével elegendő azt bizonyítani, hogy ha egy $a \in H \setminus I_{\sigma+1}$ elemre (4) nem áll fenn, akkor (5) teljesül.

Megállapítható, hogy ha $a \in I_\sigma$, akkor $I_\sigma a = I_{\sigma+1}$, amiből

$$(6) \quad I_\sigma^2 \subseteq I_{\sigma+1} \quad .$$

Ha ugyanis $I_\sigma a = L_{\alpha+\mu}$ ($0 \leq \mu < \xi$) lenne, akkor 3.5. alapján, alkalmas $b \in H$ elemmel

$$I_\sigma ab = L_{\alpha+\mu} \quad b = I_\sigma$$

következne, és ez $ab \in L_\alpha$ miatt azt jelentené, hogy L_α -ban van növelő elem.

Tegyük fel mármost, hogy $I_\sigma \cdot a \neq I_\sigma$ ($a \in H \setminus I_\sigma$) és (5) nem teljesül, vagyis

$$(7) \quad I_\sigma \cdot a = L_{\alpha+\nu} \quad (0 < \nu < \xi)$$

áll fenn.

Megadható olyan L_{β_1} balideál, melyre $L_{\beta_1} \cdot a = I_\sigma$ és $L_{\beta_1} \supset I_\sigma$. /Ehhez 3.1-t és 3.2-t kell figyelembe venni/.

Ha $L(a) \supset L_{\beta_1}$, akkor létezik olyan L_{β_2} balideál, melyre $L_{\beta_2} \cdot a = L_{\beta_1}$ és $L_{\beta_2} \supset L_{\beta_1}$. Ezt az eljárást folytatva kapjuk balideáloknak monoton növekvő sorozatát:

$$I_\sigma \subset L_{\beta_1} \subset L_{\beta_2} \subset \dots \subset L \subset \dots$$

Ennek a sorozatnak csak véges sok eleme lehet. Van tehát olyan L_{β_n} , melyre $L_{\beta_n} \supseteq L(a)$. Így

$$I_\sigma = L_{\beta_1} \cdot a = L_{\beta_2} \cdot a^2 = \dots = L_{\beta_n} \cdot a^n$$

ahol $a \in L_{\beta_n}$ és $a^{n+1} \in I_\sigma$. Ezt egybevetve (3)-mal kapjuk, hogy

$$I_\sigma \cdot a^{n+1} \subseteq I_{\sigma+1}$$

tehát van olyan k kitevő, /figyelembe véve (7)-et is/ melyre

$$I_{\sigma} \supset I_{\sigma} \cdot a^k \supset I_{\sigma+1}$$

és

$$I_{\sigma} \cdot a^{k+1} \subseteq I_{\sigma+1} \quad \text{teljesül.}$$

Igy $xa \in I_{\sigma+1}$ ha $x \in I_{\sigma} a^k \setminus I_{\sigma+1}$

és

$$xa \notin I_{\sigma+1} \quad \text{ha} \quad x \in I_{\sigma} \setminus I_{\sigma} a^k$$

ami ellentmond a 3.8-nak.

Azt kaptuk tehát, hogy a (4), (5) feltételeknek megfelelő L_{χ} balideál létezik, azon feltevés mellett, hogy nincs $\underline{L}_{\alpha}$ -ban $\underline{I}_{\sigma}$ egyetlen balideálrétegéhez sem növelő elem.

c.) Most már a tétel bebizonyítása nem nehéz feladat.

Kimutatjuk, hogy az

$$M_m = I_{\sigma+1} \cup \left(\bigcup_{\nu=0}^m \underline{L}_{\alpha+\nu} \right) \quad \text{halmaz jobbideál.}$$

Ugyanis

$$I_{\sigma+1} H \subseteq I_{\sigma+1} \quad \text{és}$$

$$\left(\bigcup_{\nu=0}^m \underline{L_{\alpha+\nu}}\right)a \subseteq \left(\bigcup_{\nu=0}^m \underline{L_{\alpha+\nu}}\right) \quad \text{ha } a \in H - L_\gamma$$

valamint

$$\left(\bigcup_{\nu=0}^m \underline{L_{\alpha+\nu}}\right)a \subseteq I_{\sigma+1} \quad \text{ha } a \in L_\gamma$$

Látható, hogy

$$M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \dots \subset M_m \subset \dots$$

jobbideálok monoton növekvő sorozata. Ez az ellentmondás bizonyítja a tételt.

3.9. Ha $\underline{I_\sigma}$ balról rétegezett ideálréteg, és $I_\sigma = L_\alpha$, akkor $H \setminus L_{\alpha+1}$ és $\underline{L_\alpha}$ részfélcsoportok.

Legyen $a, a' \in H \setminus L_{\alpha+1}$. Tegyük fel, hogy $aa' \in L_{\alpha+1}$.

Ekkor

$$(8) \quad I_\sigma \cdot a' \subseteq I(a) \cdot a' \subset L_{\alpha+1}$$

Az 1. tétel szerint van olyan $b \in \underline{L_\alpha}$, melyre $I_\sigma \cdot b = I_\sigma$. Mivel $b \in I(a')$, azaz $b = xa'$ alkalmas $x \in H$ -ra, fennáll a következő:

$$\underline{I}_\sigma = \underline{I}_\sigma b = \underline{I}_\sigma \times a' \subseteq \underline{I}_\sigma a'$$

és ez ellentmond (8)-nak.

Legyen most már $a, a' \in \underline{L}_\alpha$. Az előbbi gondolatmenetet megismételve kapjuk, hogy $\underline{L}_\alpha$ is részfélcsoport.

3.10. Bármely $a \in H \setminus L_{\alpha+1}$ -re fennáll:

$$\underline{I}_\sigma a = \underline{I}_\sigma$$

Ez a segédtétel az 1. tételnek és 3.6-nak egyszerű következménye.

2. tétel. A H főideálfélcsoport minden balról rétegezett ideálrétege jobbról is rétegezett.

Legyen ismét $\underline{I}_\sigma = L_\alpha$ és $\underline{I}_\sigma$ balról rétegezett ideálréteg. Vegyünk egy $a \in \underline{L}_\alpha$ elemet. 3.7 szerint $\underline{I}_\sigma$ -nak van olyan $\underline{L}_\mu$ balideálrétege, hogy $L_\mu a \neq \underline{I}_\sigma$. Az 1. tétel szerint pedig létezik egy olyan $b \in \underline{I}_\sigma$, melyre $L_\mu b = \underline{I}_\sigma$. Ha $\underline{I}_\sigma$ egyetlen jobbideálrétegből állna, akkor $R(a) = R(b)$ lenne, vagyis létezne olyan x elem, melyre $a = bx$, és így $L(x) \supseteq L_\alpha$ azaz $x \in H \setminus L_{\alpha+1}$ állna. 3.10 figyelembe vételével kapjuk, hogy

$$L_\mu a = L_\mu b x = \underline{I}_\sigma x = \underline{I}_\sigma$$

ami ellentmond L_μ választásának.

A 2. tétel és 3.4 egybevetése alapján kimondhatjuk, hogy egy főideálfélcsoport bármely ideálrétegére a következő két lehetőség egyike teljesül.

a.) vagy egyetlen bal- és egyetlen jobb-ideálrétegből áll

b.) vagy végtelen sok bal- és végtelen sok jobbideálréteget tartalmaz, pontosabban, ha $I_\sigma = L_\alpha = R_\beta$ akkor $I_{\sigma+1} = L_{\alpha+\xi} = R_{\beta+\xi}$ ahol ξ és ζ limeszszám.

Az utóbbi esetben az ideálréteget nevezzük rétegezettnek, ha az első lehetőség teljesül, akkor egyszerűnek.

4. §. Főideálfélcsoportok kváziideáljairól
és a főideálfélcsoportok és a kvázifőideálfélcsoportok
kapcsolatáról

Legyen H főideálfélcsoport, I_σ rétegezett ideálrétege, $I_\sigma = L_\alpha = R_\beta$.

Ebben a paragrafusban az I_σ rétegezett ideálréteg kváziideáljai, és a félcsoport $H \setminus I_\sigma$ -beli elemei közötti kapcsolatra vonatkozó fontos tétel kerül sorra. Ebből a tételből következni fog az is, hogy a főideálfélcsoportok teljesítik a kvázifőideálfélcsoportok definíciójának d.) pontját is.

Mindenhez előbb néhány segédétel bizonyítása szükséges.

Elsőként megjegyezzük, hogy 3.10 duálisa szerint bármely $a \in R_\beta$ elemhez megadható olyan $e \in I_\sigma$ /nyilvánvalóan $e \in I_\sigma$ /, amelyre $a e = a$ teljesül. Könnyű látni, hogy $x e = x$ érvényes minden $x \in I(a)$ elemre. Egy ilyen $e \in I_\sigma$ elemet az $L(a)$ balideál külső egységelemének nevezünk. /Nem szükségszerű, hogy a külső egységelem az $I(a)$ balideálon kívüli elem legyen/.

Jelöljük L_σ -nal azt a maximális balideált, amelyre egy I_σ -beli/ külső egységelem létezik. Az

eddigiek szerint $I_\sigma \supseteq L_\varepsilon \supset I_{\sigma+1}$. $H_\varepsilon \supseteq L_\varepsilon$ miatt $c \in H \setminus L_{\varepsilon+1}$ is nyilvánvaló.

4.1. Ha egy jobbideálrétegnek van nem üres metszete $I_\sigma \setminus L_\varepsilon$ -nal, akkor a jobbideálréteg egyetlen kváziideálból áll.

Legyen $a, b \in R_\sigma \subset I_\sigma$ és $I(a) \neq I(b)$. Feltehető, hogy $I(a) \supset I(b)$, és így elegendő kimutatni, hogy $a \in L_\varepsilon$. Megadhatók olyan x, y elemek, mivel $a, b \in R_\sigma$, melyekre $ax=b$, $by=a$, azaz $axy=a$. Az x elemnek I_σ elemének kell lenni, mert különben 3.10 szerint $I_\sigma x = L_\alpha x = L_\alpha$ és 3.2 szerint $I(ax) \supseteq I(a)$ következne, ami ellentmond a feltevésnek. Kaptuk tehát azt, hogy $xy \in I_\sigma$ egy külső egységelem az $I(a)$ balideálra nézve, tehát $I(a) \subseteq L_\varepsilon$, s ez éppen az, amit bizonyítani kellett.

4.1 korolláriuma a következő segédétel:

4.2. Az L_α balideálréteg jobbideálrétegek egyesítése, ha $\alpha \leq \alpha' < \varepsilon$.

3. t é t e l . Legyen H főideálfélcsoport és I_σ rétegezett ideálrétege. Ha $a \in I_\sigma$, $b \notin I_\sigma$, akkor

$$\underline{abqa}$$

Ahhoz, hogy a tételben jelzett relációt bebizonyítsuk, előbb az $\underline{ab} \underline{Ra}$ reláció bizonyítására kerül sor.

Kimutatjuk, hogy $\underline{R}_\tau b \subseteq \underline{R}_\tau$ bármely $\underline{R}_\tau \subset \underline{I}_\sigma$ -ra. Ha $\tau = \beta$, akkor ez 3.9 duálisából következik. Tegyük fel, hogy $\underline{R}_\tau$ az a maximális jobbideál, amelyre $\underline{R}_\tau \cdot b \not\subseteq \underline{R}_\tau$ teljesül. Mivel

$$\underline{I}_\sigma b = \underline{I}_\sigma \quad \bigcup_{\beta \leq \tau < \sigma} \underline{R}_\beta b \subseteq \bigcup_{\beta \leq \tau < \sigma} \underline{R}_\beta \quad \underline{R}_{\tau+1} b \subseteq \underline{R}_{\tau+1}$$

összefüggések érvényesek, ezért $\underline{R}_\tau b \supset \underline{R}_\tau$ kell, hogy fennálljon. Tehát létezik olyan $a \in \underline{R}_\tau$, melyre $ab \in \underline{R}_\tau$.

Ha $\underline{R}_\tau \not\subseteq \underline{L}_\varepsilon$ lenne, akkor $\underline{R}_\tau$ 4.1. szerint egyetlen Q osztály lenne, és Green ismert lemmája [3] alapján $a \in \underline{R}_\tau$, $ab \in \underline{R}_\tau$ -ből kapjuk, hogy $\underline{R}_\tau b = \underline{R}_\tau$. Ezért $\underline{R}_\tau \subseteq \underline{L}_\varepsilon$. Mivel tetszőszerinti $a \in \underline{R}_\tau$ elemre $ae = a$ /ahol e a külső egységelem/ és $e \in R(b)$ miatt van olyan x , melyre $bx = e$, $abx = a$, tehát $ab \underline{Ra}$, azaz $\underline{R}_\tau b \subseteq \underline{R}_\tau$.

Abból a célból, hogy az $\underline{ab} \underline{La}$ relációt kimutassuk, megjegyezzük, hogy ha az $\underline{a}$ elem balideálrétege $\underline{I}_\sigma \setminus \underline{L}_\varepsilon$ - ban van, akkor 4.2 szerint $\underline{abRa}$ -ból következik, hogy $\underline{ab} \underline{La}$. Ha $a \in \underline{L}_\varepsilon$, akkor éppugy mint fent $a = ae = abx$ következik. Legyen $\underline{L}_\beta b \subseteq \underline{L}_{\beta'}$, / $\beta \geq \varepsilon$ /. Vizsgáljuk az $\underline{L}_\beta \rightarrow \underline{L}_{\beta'}$ leképezést. Mivel $e = bx$ miatt $\underline{L}_{\beta'} bx = \underline{L}_\beta$, így $\underline{L}_{\beta'} \times \subseteq \underline{L}_\beta$ /sőt pontosabban $\underline{L}_{\beta'} \times = \underline{L}_\beta$ /. Ez éppen azt jelenti, hogy az $\underline{L}_\beta \rightarrow \underline{L}_{\beta'}$ leképezés kölcsönösen egyértelmű 3.1 szerint még monoton és "folytonos" is/ az

ott szereplő értelemben/. Ha bebizonyítjuk, hogy

$\underline{L}_\varepsilon \cdot b \subseteq \underline{L}_\varepsilon$, akkor mindezekből már az $\underline{L}_\delta \rightarrow \underline{L}_{\delta'}$ leképezés $/\varepsilon \leq \delta, \underline{L}_\delta \subseteq \underline{I}_\varepsilon/$ identikus volta következik.

3.10 szerint $\underline{I}_\delta \cdot b = \underline{I}_\delta$ és így 3.2 alapján $\underline{L}_\varepsilon \cdot b \supseteq \underline{L}_\varepsilon$ állhat csak fenn. Ha $\underline{L}_\varepsilon \cdot b \supset \underline{L}_\varepsilon$ lenne, akkor a jelen bizonyítás első része alapján bármely az $\underline{L}_\varepsilon \cdot b \setminus \underline{L}_\varepsilon$ -ba eső Q osztály olyan jobbideálréteg része lenne, amelynek $\underline{L}_\varepsilon$ -ban is van eleme, s ez ellentmond 4.1.-nek.

Kaptuk, hogy $\underline{L}_\delta \rightarrow \underline{L}_{\delta'}$ az identikus leképezés, $/\varepsilon \leq \delta, \underline{L}_\delta \subseteq \underline{I}_\varepsilon/$ vagyis $\underline{L}_\delta \cdot b = \underline{L}_\delta$, amiből $ab \in I(a)$, $abLa$ következik.

Ezzel a tétel bizonyítása befejeződött.

Ez a tétel nagyon jól mutatja, hogy milyen szigorú követelmények érvényesülnek egy főideálfélcsoporthban. Nagyon fontos ennek figyelembe vétele akkor is, ha főideálfélcsoporthot akarunk konstruálni.

Ebből a tételből triviálisan következik az, hogy főideálfélcsoporthokra teljesül a kvázifőideálfélcsoporthok definíciójának d.) pontja is. Így befejeződött a következő tétel bizonyítása is.

4. t e t e l . Minden főideálfélcsoporth kvázifőideálfélcsoporth.

Felmerül a kérdés, hogy létezik-e olyan kvázifőideálfélcsoporth, mely nem főideálfélcsoporth.

Ilyen félcsoporth létezését a következő példa adja meg.

1. Példa

Tekintsük a biciklikus félcsoporthat. Jelöljük B-vel /Erről lesz szó a 8. §-ban, de megtalálható a Ljapin [8] könyvben is /170-176. oldal/ vagy az [5] cikkben/.

A biciklikus félcsoporthat generáló elemeit jelölje a, b, és legyen $a^0 = b^0 = ba = e$. / e az egységelem/.

Vegyünk egy növelő elemmel nem rendelkező ideálmentes félcsoporthat, mely nem csoport. /Ideálmentes a félcsoporthat ha nincs valódi ideálja/. Ilyen félcsoporthat létezik, pl. vehetjük azt a félcsoporthat, mely legalább kételemű, és bármely x, y elemére $xy=y$ teljesül. Jelöljük egy a fenti követelményeknek megfelelő félcsoporthat F-el. F elemei legyenek $f_1, f_2, \dots, f_\alpha, \dots$.

E két félcsoporthatból új félcsoporthat hozunk létre. Az új félcsoporthat jelölje BoF , és elemei legyenek $a^n f_\alpha b^m$ alakúak /ahol az f_α hiányozhat is/

/ $n \geq 0, m \geq 0, f_\alpha \in F$ / és az elemek szorzatát a következőképpen definiáljuk.

$$a^{n_1} f_{\alpha_1} b^{m_1} \cdot a^{n_2} f_{\alpha_2} b^{m_2} = \begin{cases} a^{n_1+n_2-m_1} f_{\alpha_2} b^{m_2} & \text{ha } m_1 < n_2 \\ a^{n_1} f_{\alpha_1} f_{\alpha_2} b^{m_2} & \text{ha } m_1 = n_2 \\ a^{n_1} f_{\alpha_1} b^{m_2+m_1-n_2} & \text{ha } m_1 > n_2 \end{cases}$$

/Ezáltal a szorzásszabályt megadtuk arra az esetre is, amikor f_{α_1} vagy f_{α_2} hiányzik, ekkor a megfelelőt tekintsük üres szimbólumnak./

Az asszociativitás könnyen ellenőrizhető. Látható, hogy a $B \circ F$ félcsoporth mindazon elemei, melyek $a^0 f_{\alpha} b^0$ alakúak F -el izomorf részfélcsoporthot alkotnak. Jelöljük ezt $\bar{F}$ -sal. Nyilvánvaló, hogy ha f_{α} és f_{β} ugyanabba a balideálrétegbe estek F -ben, akkor az $a^0 f_{\alpha} b^0$, $a^0 f_{\beta} b^0$ elemek szintén egy balideálrétegbe esnek $\bar{F}$ -ban. Ha pedig f_{α} és f_{β} különböző balideálréteg elemei, akkor $a^0 f_{\alpha} b^0$, $a^0 f_{\beta} b^0$ is különböző balideálréteg elemei lesznek $B \circ F$ -ban, hiszen $x \cdot a^0 f_{\gamma} b^0 \in \bar{F}$ akkor és csakis akkor ha $x \in \bar{F}$. Hasonló megállapítást tehetnénk a jobbideálrétegekre vonatkozólag.

Az eddigiekből már következik, hogy $B \circ F$ nem lehet főideálfélcsoporth.

F nem főideálfélcsoporth, mivel nincs növelő eleme, és mivel nem csoport, legalább két jobb vagy balideálrétegből áll, melyek nem alkotnak jólrendezett láncot, és így $B \circ F$ jobb ill. balideálrétegeinek halmaza közül legalább egyik nem lehet jólrendezett lánc, mert már azon bal vagy jobbideálrétegekre sem teljesül ez, amelyeknek $\bar{F}$ -sal van nem üres metszete.

BoF kvázifőideálfélcsoport.

Az a.) feltétel triviálisan teljesül, mivel mint az könnyen látható BoF ideálmentes.

Könnyen belátható az is, hogy BoF maximális balideálrétegének elemei az $\underline{a^i}$ ($i=0,1,2,\dots$) elemek, és a maximális jobbideálréteg elemei a $\underline{b^j}$ ($j=0,1,2,\dots$) elemek. Fennáll, hogy $R(\underline{a^i}) \supset R(\underline{a^k})$ ha $i < k$, ill. $R(\underline{b^j}) \supset R(\underline{b^m})$ ha $j < m$. Ebből már következik, hogy a kvázifőideálfélcsoport definíciójának b.) és c.) pontja fennáll BoF-re. A d.) pont az ideálmentesség miatt üres követelmény.

5. §. A kvázifőideálfélcsoportok rétegezett
ideálrétegei

A kvázifőideálfélcsoportok és a főideálfélcsoportok kapcsolatának tárgyalása után a kvázifőideálfélcsoportok vizsgálatára térünk rá. Legyen H a továbbiakban kvázifőideálfélcsoport. H egy ideálrétegét balról rétegezettnak nevezzük, ha egy-nél több balideálrétegből áll. Ki fogjuk mutatni, hogy minden balról rétegezett ideálréteg jobbról is rétegezett.

Mivel egy kvázifőideálfélcsoport ideáljai főideálok, ezért ideáljaihoz, ideálrétegeihez, a főideálfélcsoportoknál szokásos módon rendszámot rendelhetünk.

Jelöljön $\underline{I}_\sigma$ balról rétegezett ideálréteget $\underline{I}_\sigma = I_\sigma - I_{\sigma+1}$ /, $\underline{L}_0$ legyen a maximális balideálrétege, L_1 a maximális balideálja. A korábbi jelölésmóddal összhangban, ha $\underline{L}$ egy balideálréteg, akkor $\underline{L}$ jelöli az $\underline{L}$ elemei által generált balideált.

Ugyanígy aláhuzás különbözteti meg a jobbideálréteget a megfelelő jobbideáltól, az ideálréteget a megfelelő ideáltól. A fenti állítás bizonyítása előtt néhány segédétel igazolása szükséges.

5.1. Bármely $\underline{L} \subseteq \underline{I}_\sigma$ balideálréteghez van olyan $a \in \underline{L}_0$, melyre $\underline{L} a \subseteq \underline{L}_0$ /azaz $\underline{L} a = \underline{I}_\sigma$ /

A 3.5 segédtételt tetszésszerűen félcsoportha fogalmaztuk meg, és bizonyítottuk be.

3.5 szerint bármely $\underline{L} \subseteq \underline{I}_\sigma$ balideálréteghez H^1 -ben van olyan $\underline{a}$ melyre $\underline{L} a \subseteq \underline{L}_0$ teljesül.

Legyen $\underline{L} \neq \underline{L}_0$. A kvázifőideálfélcsoportha definíciójának d pontja szerint a $H \setminus \underline{I}_\sigma$ elemekre $\underline{L} a \subseteq \underline{L}_0$ nem állhat fenn, így szükségképpen $a \in \underline{L}_0$.

Legyen $\underline{L} = \underline{L}_0$. Ha $\underline{L}_0 a \subseteq \underline{L}_0$ egyetlen $a \in \underline{L}_0$ -ra sem teljesül, akkor bármely két $a, b \in \underline{L}_0$ elemre $ab \in \underline{L}_1$.

Ha $ab \in \underline{L}_1 \setminus \underline{I}_{\sigma+1}$, akkor a már bebizonyítottak alapján lenne olyan c , melyre $abc \in \underline{L}_0$, így az $\underline{a}, \underline{bc} \in \underline{L}_0$ elemek szorzata $\underline{L}_0$ -ba esne, s ez ellentmondás.

Tegyük fel, hogy $\underline{L}_0$ bármely két elemének szorzata $\underline{I}_{\sigma+1}$ -be esik. Vegyünk egy $x \in \underline{L}_1 \setminus \underline{I}_{\sigma+1}$ elemet, és legyen $a \in \underline{L}_0$. Van olyan $y \in H$, melyre $x = ya$. Az x elemhez található olyan $b \in \underline{L}_0$, a fenti bizonyítás szerint, melyre $xb \in \underline{L}_0$. Így egyrészt $yab = xb \in \underline{L}_0$, másrészt $ab \in \underline{I}_{\sigma+1}$ miatt $yab \in \underline{I}_{\sigma+1}$, ami ellentmondás.

5.2. Ha $a \in H \setminus L_1$, akkor

$$I_\sigma a = I_\sigma, \quad \underline{L}_0 a \subseteq \underline{L}_0$$

Az előző segédteétel szerint bármely $\underline{L} \subset \underline{I}_\sigma$ balideálréteghez van olyan $b \in \underline{L}_0$, melyre $Lb = I_\sigma$ és így $I_\sigma b = I_\sigma$ is teljesül. Bármely $a \in H \setminus L_1$ elemhez található olyan $x \in H$, melyre $xa = b$.

Fennáll:

$$I_\sigma = I_\sigma b = I_\sigma xa \subseteq I_\sigma a \quad \text{azaz } I_\sigma = I_\sigma a.$$

A segédteételben szereplő második állítás bizonyításához csak annyit kell megjegyezni, hogy ha $c \in \underline{L}_0$ és $a \in H \setminus L_1$, akkor

$$I_\sigma c a = I_\sigma, \quad \text{így} \quad ca \in \underline{L}_0, \quad \text{azaz } \underline{L}_0 a \subseteq \underline{L}_0$$

5.3. Ha $a \in H \setminus I_\sigma$, akkor

$$L_1 \cdot a = L_1, \quad \underline{L}_0 a = \underline{L}_0$$

Ez a segédteétel 5.2-nek, és a 2. definíció d pontjának egybevetéséből adódik.

5.4. Bármely $a \in \underline{L}_0$ -hoz van olyan $\underline{L}$ balideálrétege $\underline{I}_\sigma$ -nak, melyre $\underline{L} a \neq \underline{L}_0$.

Ha ugyanis $a \in \underline{L}_0$ olyan elem lenne, melyre $\underline{L} a \subseteq \underline{L}_0$ bármely $\underline{L} \subset \underline{I}_\sigma$ -ra, akkor

$\underline{I}_\sigma a \subseteq \underline{L}_0$ és $\underline{I}_{\sigma+1} a \subseteq \underline{I}_{\sigma+1}$ teljesülne, ami ellentmond az 5.2. segédállításnak.

5. tétel. Kvázifőideálfélcsoport bármely balról rétegezett ideálrétege jobbról is rétegezett.

Legyen az $\underline{I}_\sigma$ balról rétegezett ideálréteg, $\underline{L}_0$ maximális balideálrétege, és $a \in \underline{L}_0$.

5.4 alapján megadható $\underline{I}_\sigma$ -nak olyan $\underline{L}$ balideálrétege, melyre $\underline{L} a \neq \underline{L}_0$ azaz $\underline{L} a \not\subseteq \underline{I}_\sigma$. $\underline{L}$ -hez 5.1. szerint van olyan $b \in \underline{L}_0$, melyre $\underline{L} b \subseteq \underline{L}_0$ azaz $\underline{L} b = \underline{I}_\sigma$.

Ha $\underline{I}_\sigma$ egyetlen jobbideálrétegből állna, akkor $R(a) = R(b)$ miatt lenne olyan x , melyre $a = bx$.

Nyilvánvaló, hogy $x \in H \setminus \underline{L}_1$. 5.2. figyelembevételével adódik, hogy

$$\underline{L} a = \underline{L} b x = \underline{I}_\sigma x = \underline{I}_\sigma$$

ami ellentmond $\underline{L}$ választásának.

Az 5. tétel alapján az egynél több bal- ill. az egynél több jobbideálréteget tartalmazó ideálréteget nevezzük rétegezettnek. $\underline{I}_\sigma$ legyen most már rétegezett ideálréteg.

A további vizsgálat céljából egy új fogalmat vezetünk be. Nevezzük az $a \in H \setminus L_1$ elem hatástartományának azon elemek halmazát (balideál-rétegek halmazát) és jelöljük T_a -val, melyeket a -val jobbról szorozva L_0 -beli elemeket kapunk. Tehát fennáll: $T_a \cdot a = \underline{L_0}$.

Megjegyezzük, hogy $I_\sigma \setminus T_a$ /bármely $a \in H \setminus L_1$ -re/ balideál. Legyen ugyanis $b \in I_\sigma \setminus T_a$, $x \in H$. Mivel $ba \notin \underline{L_0}$, ezért $xba \notin \underline{L_0}$ és így $xb \in I_\sigma \setminus T_a$.

A hatástartományokra a következő tételeket bizonyítjuk be:

6. t e t e l .

a.) Legyen $a, b \in H \setminus L_1$.

1.) Ha $R(a) \supseteq R(b)$ akkor $T_a \subseteq T_b$

2.) Ha $T_a \subset T_b$ akkor $R(a) \supset R(b)$

b.) Legyen $a, b \in \underline{L_0}$

$R(a) = R(b)$ akkor és csak akkor, ha $T_a = T_b$

c.) Legyen $a, b \in L_0$

1.) Ha $R(a) \supset R(b)$ akkor $T_a \subset T_b$

2.) Ha $T_a \subseteq T_b$ akkor $R(a) \supseteq R(b)$

Elsőként az a.) 1.) állítást bizonyítjuk.

A feltétel szerint van olyan x , melyre $ax=b$.

Nyilvánvaló, hogy $x \in H \setminus L_1$. 5.2 felhasználásával kapjuk, hogy

$$T_a b = T_a \cdot ax = \underline{L_0} x \subseteq \underline{L_0}.$$

$$\text{Tehát } T_a \subseteq T_b.$$

Az a.) 2.) állítás visszavezethető a.) 1.)-re.

Ha $T_a \subset T_b$ és mégis $R(a) \subseteq R(b)$ lenne, akkor ebből a.) 1.) szerint $T_a \supseteq T_b$ következne.

$$\text{Igy } R(a) \supset R(b).$$

A b.) állítás azon része, mely szerint, $R(a) = R(b)$ -ből következik, hogy $T_a = T_b$, a.) 1.) alapján nyilvánvaló.

Legyen tehát $T_a = T_b$. $/a, b \in \underline{L_0}/$. Tegyük fel, hogy $R(a) = R(b)$ nem teljesül. A kvázifőideál-félcsoportok definíciójának c.) pontja alapján feltehető, hogy $R(a) \supset R(b)$. Van tehát olyan $x \in H$, melyre $ax=b$.

Fennáll a következő:

$$\underline{L_0} = T_b \cdot b = T_a \cdot b = T_a \cdot ax = \underline{L_0} \cdot x$$

Az itt kapott $\underline{L_0} x = \underline{L_0}$ egyenlőség miatt létezik olyan a_1 elem, melyre

$$a_1 x = a \quad \text{és} \quad R(a_1) \supset R(a)$$

Ha ugyanis $R(a_1) = R(a)$ lenne, akkor létezne olyan $y \in H$, hogy $ay = a_1$ és így $a_1 xy = a$ következne, amiből azt kapnánk, hogy I_σ bármely z elemére $z \cdot xy = z$, és így többek között $ax \cdot y = a$, azaz $by = a$. Ez pedig ellentmond az $R(a) \supset R(b)$ feltevésnek.

Az a_1 -hez hasonlóan kapjuk, hogy léteznek olyan $a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ elemek, melyekre az

$$a_2 x = a_1, \quad a_3 x = a_2, \dots, \quad a_n x = a_{n-1} \quad \dots \text{és}$$

$$R(a) \subset R(a_1) \subset R(a_2) \subset \dots \subset R(a_n) \subset \dots$$

összefüggések teljesülnek. Ez ellentmond a 2. definíció c.) pontjának.

A tétel c.) része az a.) és b.) rész következménye. A 6. tétel és a 2. definíció c.) pontjának következménye ez a segédtétel:

5.5. Ha $a, b \in \underline{L}_0$, akkor $a T_a \supset T_b$,
 $T_a = T_b$, $T_a \subset T_b$ lehetőségek egyike teljesül.

A hatástartományokra nézve nagyon fontos állítás a következő:

5.6. Legyen $a, b, c \in \underline{L}_0$

Ha $T_a \supset T_b$ akkor $T_{ca} \supset T_{cb}$

Mivel $T_a \supset T_b$ a 6. tétel alapján $R(a) \subset R(b)$ és ebből $R(ca) \subseteq R(cb)$ következik. Ismét a 6. tételt alkalmazva kapjuk, hogy $T_{ca} \supseteq T_{cb}$. Bebizonyítjuk, hogy az egyenlőség nem állhat fenn, vagyis T_{ca} -nak van olyan eleme, mely T_{cb} -nek nem eleme. Legyen $y \in T_a \setminus T_b$. Mivel $c \in \underline{L_0}$, és 5.2. alapján van olyan $x \in \underline{I_\sigma}$, melyre $xc=y$. Az x eleme T_{ca} -nak, de T_{cb} -nek nem.

5.7. Legyen $\bar{A}$ azon $\underline{L_0}$ -beli elemek összessége, melyeknek hatástartománya $\underline{L_0}$. Ha $\bar{A} \neq \emptyset$ akkor $\underline{I_\sigma}$ -nak van jobbegységeleme.

/I jobbegységének olyan $e_j \in \underline{I_\sigma}$ elemet nevezünk, melyre $x e_j = x$ bármely $x \in \underline{I_\sigma}$ -ra/

Legyen $T_a = \underline{L_0}$, $a \in \underline{L_0}$. 5.2. alapján $\underline{I_\sigma} a = \underline{I_\sigma}$, és $\underline{L_1} a \subseteq \underline{L_1}$ miatt $\underline{L_0} a = \underline{L_0}$ következik. Van tehát olyan $y \in \underline{L_0}$, melyre $ya=a$, Triviális módon $R(y) \supseteq R(a)$ és $y \in \underline{L_0}$ miatt $R(y) = R(a)$ teljesül. Innen következik, hogy létezik olyan z elem, melyre $az=y$ és így / $ya=a$ miatt/

$$aza=a$$

Könnyen látható, hogy $za=e_j$ az $\underline{I_\sigma}$ ideál jobbegységeleme. Nyilvánvaló, hogy $e_j \in \bar{A}$.

5.8. Ha $\bar{A} \neq \emptyset$, és $\underline{a}, \underline{b} \in \underline{L}_0$ elemekre $ax=b$,
 $/x=H \setminus I_\sigma /$, akkor van olyan $y \in L_0$, melyre $ay=b$
 teljesül.

Az állítás triviális $/y=e/x$ megfelelő/.

Az eddigiek alapján bebizonyítjuk H bi-
 zonyos részhalmazairól, hogy részfélcsoportok. A kö-
 vetkező két tétel ilyen típusú állítást tartalmaz!

7. tétel. Kvázifőideálfélcsoport bármely ré-
tegezett ideálrétege részfélcsoport.

Tegyük fel, hogy $x, y \in \underline{I}_\sigma$ és $xy \in \underline{I}_{\sigma+1}$. 5.1.
 szerint léteznek olyan $\underline{a}, \underline{b} \in \underline{L}_0$ elemek, melyekre
 $ya \in \underline{L}_0$, $xb \in \underline{L}_0$. $x \notin T_{ya}$, mert különben ellent-
 mondást kapnánk. 5.5 segítségével következik, hogy
 $T_{ya} \subset T_\ell$. A 6. tétel a. 2.) pontja alapján
 $R(ya) \supseteq R(b)$. Kaptuk, hogy létezik olyan z , melyre
 $yaz=b$. $/z \in H \setminus L_1 /$. Az eddigiek összegezéséeként adó-
 dik, hogy

$$xyaz = xb \in \underline{L}_0,$$

ami ellentmond az $xy \in \underline{I}_{\sigma+1}$ feltevésnek.

8. tétel. Ha $\underline{I}_\sigma$ a H kvázifőideálfélcsoport
rétegezett ideálrétege, akkor $H \setminus \underline{I}_{\sigma+1}$, $H \setminus L_1$, és
 $\underline{L}_0$ részfélcsoportok.

Elsőként a $H \setminus I_{\sigma+1}$ -re vonatkozó állítást bizonyítjuk. Legyen $x, y \notin I_{\sigma+1}$. Ha $xy \in I_{\sigma+1}$ lenne, azaz $L(x) \cdot R(y) \subseteq I_{\sigma+1}$, akkor $\underline{I}_{\sigma} \cap L(x) \neq \emptyset$ és $\underline{I}_{\sigma} \cap R(y) \neq \emptyset$ miatt lennének olyan $u, v \in \underline{I}_{\sigma}$ elemek, melyekre $uv \in I_{\sigma+1}$; s ellentmondásban a 7. tétellel.

Tegyük fel most már, hogy $x, y \in H \setminus L_1$, és $xy \in L_1$. Fennáll, a következő

$$(1) \quad \underline{I}_{\sigma} y \subseteq L(x) y \subseteq L_1.$$

Vegyünk egy $a \in \underline{L}_0$ elemet. 5.2. szerint $\underline{I}_{\sigma} a = \underline{I}_{\sigma}$. Mivel $a \in L(y)$, azaz $a = zy$, kapjuk, hogy

$$\underline{I}_{\sigma} = \underline{I}_{\sigma} a = \underline{I}_{\sigma} zy \subseteq \underline{I}_{\sigma} y$$

s ez ellentmond (1)-nek.

Az az állítás, hogy $\underline{L}_0$ részfélcsoport, következik abból, hogy $\underline{L}_0 = \underline{I}_{\sigma} \cap H \setminus L_1$.

Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Most térjünk rá a $H \setminus L_1$ -beli elemek, elsősorban az $\underline{L}_0$ -beli elemek közti kapcsolatok vizsgálatára. A $H \setminus L_1$ -beli elemek azok, melyekhez hatástartományt rendeltünk..

Ha $a \in H \setminus L_1$, akkor 5.3. alapján a hatástartomány csak $\underline{L}_0$ -ra terjed ki.

Legyen $A_0 = H \setminus I_\sigma$, ha $\underline{L}_0$ -ban nincsenek olyan elemek, melyeknek hatástartománya csak $\underline{L}_0$ -ra terjed ki, ha vannak, akkor pedig legyen $A_0 = \bar{A}$, azaz csak az olyan $\underline{L}_0$ hatástartományú elemek tartozzanak A_0 -hoz, melyek $\underline{L}_0$ -ban vannak. A definíció magyarázatát 5.8. adja.

Megjegyezzük, hogy $A_0 = \emptyset$ is előfordulhat. /Ha $H=I_\sigma$, és $\underline{L}_0$ -ban nincsenek olyan elemek, melyeknek hatástartománya csak $\underline{L}_0$ lenne/.

A 6. tétel szerint $\underline{L}_0$ valamely kváziideáljának elemeihez ugyanaz a hatástartomány tartozik. A_1 jelölje $\underline{L}_0$ -nak azon kváziideálját, melynek elemeihez az $\underline{L}_0$ -nál bővebb hatástartományok közül a legszűkebb tartozik. Ha $a_0 \in A_0$, $a_1 \in A_1$, akkor fennáll: $R(a_0) \supset R(a_1)$.

Könnyű látni, hogy a megkezdett eljárást tovább folytatva a 2. definíció c.) pontja és a 6. tétel alapján $\underline{L}_0$ megfelelő kváziideálját $A_2, A_3, \dots, A_\tau, \dots$ -val jelölhetjük, azaz minden egyes kváziideálhoz egy rendszámot rendelhetünk oly módon, hogy ez a hozzárendelés teljesíti a következőt:

ha $a_\tau \in A_\tau$, $a_\vartheta \in A_\vartheta$, és $\tau < \vartheta$,
akkor $R(a_\tau) \supset R(a_\vartheta)$, $T_{a_\tau} \subset T_{a_\vartheta}$.

Az $A_0, A_1, \dots, A_\tau, \dots$ duálisát $B_0, B_1, \dots, B_\tau, \dots$ -val jelöljük $B_\lambda \subseteq H \setminus R_1$. Az $A_0, A_1, \dots, A_\tau, \dots$ sorozatnál a rendszámhalmaz egy alkalmas ξ rendszámnál kisebb rendszámok halmaza, Fennáll $(H \setminus I_\sigma) \cup (\bigcup_{\tau \in \xi} A_\tau) = H \setminus L_1$.
Bebizonyítjuk a következőt:

9. tétel. Ha $(H \setminus I_\sigma) \cup (\bigcup_{\tau \in \xi} A_\tau) = H \setminus L_1$, akkor ξ limeszsám.

Tegyük fel, hogy ξ elsőfajú rendszám. A 6. tétel alapján az $A_{\xi-1}$ elemeihez maximális határtartomány tartozna, és 5.1 alapján ez a hatástartomány I_σ -val lenne egyenlő, s ez ellentmond 5.4-nek.

10. tétel. Legyen $a_\tau \in A_\tau \cap L_0$. Fennáll:

$$(2) \quad a_\tau A_\xi = A_{\tau+\xi}$$

A bizonyítás ξ szerinti transzfinit indukcióval történik.

a.) Legyen $\xi=0$, és $a_0 \in A_0$. /Feltesszük, hogy $A_0 \neq \emptyset$./

Mivel

$$T_{a_\tau} a_0 = \underline{L_0} \cdot a_0 = \underline{L_0}$$

másrészt $T \supset T_{a_\tau}$ -ra $T a_\tau \neq \underline{L_0}$ így $T \cdot a_\tau a_0 \neq \underline{L_0}$

is áll, ezért $T_{a_\tau a_0} = T_{a_\tau}$ vagyis a 6. tétel alapján
 $R(a_\tau a_0) = R(a_\tau)$ amiből

$$(3) \quad a_\tau A_0 \subseteq A_\tau$$

következik.

Vegyük figyelembe azt, hogy ha $b \in A_\sigma$ ($\sigma \geq 1$)
 akkor $T_b \supset L_0 = T_{a_0}$ és így 5.6 szerint $T_{a_\tau b} \supset T_{a_\tau a_0} = T_{a_\tau}$.
 Ebből látható, hogy

$a_\tau x \in A_\tau$, akkor és csak akkor,
 ha $x \in A_0 \cup (H \setminus I_\sigma)$ és ezért 5.8. figyelembevételével
 (3)-ban az egyenlőség jele teljesül.

b.) Legyen $\beta = 1$, $a_1 \in A_1$.

Elsőként megállapíthatjuk, hogy $a_\tau a_1 \in R(a_\tau)$
 miatt a 6. tétel alapján $a_\tau a_1 \in A_\nu$, ahol $\nu \geq \tau$.

Ebből következik az is, hogy $T_{a_\tau a_1} \supseteq T_{a_\tau}$.
 Bebizonyítjuk, hogy $T_{a_\tau a_1} \supset T_{a_\tau}$ áll fenn. Vegyünk egy
 $x \in T_{a_1} \setminus \underline{L_0}$ elemet. $/T_{a_1} \supset \underline{L_0}/$. Létezik olyan $y \in \underline{I_\sigma}$
 melyre $ya_\tau = x$. Ez az y elem eleme lesz $T_{a_\tau a_1}$ -nek,
 de T_{a_τ} -nak nem.

A most bebizonyított $T_{a_\tau a_1} \supset T_{a_\tau}$ következtében /6.tétel
 alapján/ $a_\tau a_1 \in A_\nu$, ahol $\nu > \tau$.

Az a_τ által generált jobbideálnak L_0 -al való metszetébe az $A_\tau, A_{\tau+1}, \dots$ tartozik. A bizonyítás a.) részében bebizonyítottuk, hogy $a_\tau \cdot A_0 = A_\tau$, /ha A_0 üres, akkor könnyű látni, hogy A_τ egyelemű/. Ezek szerint $a_\tau L_0$ szorzat az $A_{\tau+1}, \dots$ Q -osztályokat kell, hogy kiadja. Ha $b \in A_\kappa / \kappa \geq 2$, akkor $T_b \supset T_{a_1}$ miatt 5.6. alapján következik, hogy $T_{a_\tau b} \supset T_{a_\tau a_1}$. Innen a 6. tétel felhasználásával kapjuk, hogy a fent szereplő v rendszám a τ -nál nagyobb rendszámok közül a legkisebb, vagyis $v = \tau + 1$, azaz $a_\tau a_1 \in A_{\tau+1}$. Tehát fennáll: $a_\tau A_1 \subseteq A_{\tau+1}$ adódik. A Green lemmának / [3] / figyelembe vételéből kapjuk, hogy az utóbbi formulában az egyenlőség jele érvényes.

c.) Tegyük fel mostmár, hogy

$$(4) \quad a_\tau A_2 = A_{\tau+2}$$

valamennyi τ -nál kisebb ³ rendszámra érvényes.

Bizonyítandó, hogy (2) fennáll.

1.) Legyen τ elsőfajú rendszám.

A b.) pontban bebizonyítottak szerint

$$A_{\tau-1} A_1 = A_\tau \quad \text{valamint} \quad A_{\tau+(\tau-1)} A_1 = A_{\tau+\tau} \quad \text{fennáll.}$$

Ezt és az indukciófeltevést felhasználva kapjuk,
 hogy

$$a \in A_s = a_{\tau}(A_{s-1}) = (a_{\tau} A_{s-1}) \quad A_1 = A_{\tau+(s-1)} \quad A = A_{\tau+s}$$

2.) Legyen s másodfajú rendszám.

Legyen $a_\lambda \in A_\lambda$, $a_s \in A_s$ / $\lambda < s$ /

Mivel $T_{a_s} \supset T_{a_\lambda}$, 5.6 alapján fennáll:

$T_{a_\tau a_s} \supset T_{a_\tau a_\lambda}$ és így a 6. tétel, és az
 indukciófeltevés szerint $a_\tau a_s \in A_\mu$, ahol $\mu \geq \tau+s$.

Vegyük figyelembe, hogy ha $\mu > s$ / $a_\mu \in A_\mu$ /, akkor

$T_{a_\mu} \supset T_{a_s}$ miatt 5.6 alapján

$T_{a_\tau a_\mu} \supset T_{a_\tau a_s}$ és ebből következik,
 hogy a fenti μ rendszám az összes $\tau+s$ -nél nagyobb
 vagy egyenlő rendszámok közül a legkisebb, azaz
 $\mu = \tau+s$

Kaptuk, hogy $a_\tau a_s \in A_{\tau+s}$, amiből a Green
 lemma felhasználásával $a_\tau A_s = A_{\tau+s}$ következik.

Ezzel a tétel bizonyítása véget ért.

Korollárium. Ha $a \in A_0$, akkor

$$(5) \quad A_\lambda a = A_\lambda \quad \text{bármely } A_\lambda \subset \underline{L}_0 \text{ -ra,}$$

A 10. tétel alapján $A_\lambda a \subseteq A_\lambda$ következik, és az $\underline{L}_0 a = \underline{L}_0$ /5.3/ egyenlőség figyelembevételével kapjuk, hogy (5) fennáll.

6. §. A J és a Q osztályozás

Ebben a §-ban bebizonyítjuk, hogy a J osztályozás /az ideálrétegekre történő osztályozás/ a kvázifőideálfélcsoportok, a Q osztályozás /a kvázi-ideálokra való osztályozás/ a főideálfélcsoportok kompatibilis osztályozása. Elsőként tekintsük a J osztályozásra vonatkozó tételt.

11. t é t e l . Kvázifőideálfélcsoportban a Green féle J-reláció kongruencia.

Legyen H kvázifőideálfélcsoport. Bebizonyítjuk, hogy $\underline{I}_\beta \cdot \underline{I}_\sigma \subseteq \underline{I}_\tau$, tetszőesszerinti β, σ -ra, alkalmas τ rendszámmal.

Két esetet különböztetünk meg.

a.) $\underline{I}_\beta$, $\underline{I}_\sigma$ egyszerű /vagyis nem rétegezett/ J osztályok. Mivel $\underline{I}_\beta$ egyetlen balideálréteg, $\underline{I}_\sigma$ egyetlen jobbideálréteg, [10] cikk 1. lemmából következik, hogy $\underline{I}_\beta \cdot \underline{I}_\sigma$ egyetlen J osztályba esik.

b.) Legyen $\underline{I}_\sigma$ rétegezett. Bebizonyítjuk, hogy

$$(1) \quad \underline{I}_\beta \cdot \underline{I}_\sigma \subseteq \underline{I}_\tau \quad \text{ahol} \quad \tau = \max(\beta, \sigma).$$

Legyen ugyanis $\underline{I}_\sigma$ az a J -osztály, mely a legbővebb ideált generálja, azon J -osztályok közül, melyekre (1) nem teljesül. $\underline{I}_\sigma \not\subseteq H \setminus \underline{I}_{\sigma+1}$, mert a 8. tétel szerint $H \setminus \underline{I}_{\sigma+1}$ J -osztályaira (1) fennáll.

Legyen tehát $\underline{I}_\sigma \subset \underline{I}_{\sigma+1}$. Ha $\underline{I}_\sigma$ rétegezett, akkor a 8. tétel szerint ismét kapnánk, hogy (1) teljesül. Tehát $\underline{I}_\sigma$ egyszerű, és így egyetlen balideálrétegből áll. Az, hogy (1) nem teljesül, azt jelenti, hogy ha $a \in \underline{I}_\sigma$ akkor $\underline{I}_\sigma \cdot a \not\subseteq \underline{I}_\sigma$, azaz $\underline{I}_\sigma \cdot a \subseteq \underline{I}_{\sigma+1}$, amiből

$$(2) \quad \underline{I}_\sigma \cdot a \cap \underline{I}_\sigma = \emptyset$$

következik.

Vegyük tekintetbe, hogy $L(a)$ bővebb, mint az $\underline{I}_\sigma$ elemei által generált balideál, ezért minden $b \in \underline{I}_\sigma$ -hoz van olyan $x \in H$, melyre $xa=b$. (2) miatt $x \notin \underline{I}_\sigma$ és $x \in \underline{I}_{\sigma+1} \setminus \underline{I}_\sigma$ is lehetetlen, mert a feltevés szerint $H \setminus \underline{I}_\sigma$ bármely $\underline{I}_\nu$ J osztályára.

$$\underline{I}_\nu \cdot a \subseteq \underline{I}_\nu \underline{I}_\sigma \subseteq \underline{I}_\nu$$

érvényes, és triviális módon $x \in H \setminus \underline{I}_{\sigma+1}$ kizárt.

Ez az ellentmondás a tétel bizonyításának befejezését

jelenti, mert az az eset, amikor $\underline{I}_s$ rétegezett, a most tekintettnek a duálisa.

A most bebizonyított tétel lehetőséget nyújt a H/J faktorfélcsoporth megadására. Ez olyan félcsoporth lesz, melyben minden J osztály egyelemű. Nyilvánvaló, hogy ha egy kvázifőideálfélcsoporthnak olyan homomorf képét vesszük, amelyben minden J osztály egyelemű, akkor kvázifőideálfélcsoporthot, sőt főideálfélcsoporthot kapunk.

Az ilyen főideálfélcsoporthok könnyen leírhatók.

Vegyük egy transzfinit sorozatot:

$f = (n_0, n_1, \dots, n_\sigma, \dots)_{\sigma < \tau}$, amelynek tagjai természetes számok, és a ∞ szimbólumok.

Minden $\sigma < \tau$ -hoz rendeljük egy ciklikus H_σ félcsoporthot, melynek n_σ a rendje. Kikötjük, hogy $H_\vartheta \cap H_\sigma = \emptyset$ ha $\vartheta \neq \sigma$. Ha n_σ véges, akkor H_σ olyan ciklikus félcsoporth legyen, melynek indexe is n_σ . A különböző H_σ -beli elemek között a szorzást a következőképpen definiáljuk:

$$h_\sigma h_\vartheta = h_\vartheta h_\sigma = h_{\max(\vartheta, \sigma)} \quad (h_\vartheta \in H_\vartheta, h_\sigma \in H_\sigma)$$

Látható, hogy $H_f = \bigcup_{\sigma < \tau} H_\sigma$ kommutatív félcsoporth.



12. tétel. Bármely H_2 főideálfélcsoportban minden J osztály egyelemű. Minden olyan főideálfélcsoport, amelyben minden J osztály egyelemű, valamely H_2 -fel izomorf.

A tétel és bizonyítása megtalálható [9]-ben.

Most térjünk rá a Q osztályok szerinti osztályozással kapcsolatos tételre.

13. tétel. A H főideálfélcsoportban a Q reláció kongruencia.

Legyen aQa' , bQb' . Bizonyítandó, hogy $abQab'$. Tekintsük először az ab elemet.

Triviális, hogy

$$(3) \quad abRab'$$

Az $abLab'$ reláció fennállását bizonyítjuk. Megadhatók olyan x, y elemek, melyekre $b' = bx$, $b = by$.

Mivel $L(b) = L(b')$ így $L(b)x = L(b')$. Ha

$\underline{L}_s \subseteq L(b)$ akkor $\underline{L}_s x \subseteq L_{s'}$, úgy hogy $\underline{L}_{s'} \subseteq L(b)$.

Fennáll bármely $c \in L(b)$ -re, hogy $cxy = c$, ezért

$\underline{L}_s xy = \underline{L}_s$, amiből $\underline{L}_{s'} \cdot y = \underline{L}_s$ következik. Ez

azt jelenti, hogy az $\underline{L}_s \rightarrow \underline{L}_{s'}$ leképezés kölcsönösen egyértelmű 3.1. szerint monoton, és az ott leírt értelemben "folytonos". Erre a leképezésre még az

is teljesül, hogy $L(b)$ maximális balideálréteget önmagába viszi át, így az identikus leképezésnek kell lennie. Innen már következik, hogy $ablab'$. Ezt (3)-mal egybevetve kapjuk, hogy $abQab'$.

A bebizonyított állítás duálisa alapján $ab'Qab'$. Tehát $abQab'Qab'$ és ez az, amit bizonyítani kellett.

A most bebizonyított tétel fontos segéd-eszközt nyújt a főideálfélcsoportok vizsgálatához. Mutatja azt, hogy fontos feladat az olyan főideálfélcsoportok megadása, melyekben minden Q -osztály egyelemű, ugyanis az ilyen félcsoportok a főideálfélcsoportoknak homomorf képei.

A következő tétel az előbb említett feladatot egyszerűbbé teszi.

14. tétel. Ha a H főideálfélcsoport I_σ rétegezett J osztályának minden Q osztálya egyelemű, akkor I_σ főideálfélcsoport.

A 8. tétel alapján $H \setminus I_{\sigma+1}$ részfélcsoport. Könnyű látni, hogy főideálfélcsoport is. $H \setminus I_{\sigma+1}$ bal- illetve jobboldali ideáljai az $L \setminus I_{\sigma+1}$, $R \setminus I_{\sigma+1}$ halmazok, ahol $L(\supset I_{\sigma+1})$ illetve $R(\supset I_{\sigma+1})$ H -nak bal- illetve jobbideálja. A 3. tétel szerint az $a \in I_\sigma$ által generált jobbideál $H \setminus I_{\sigma+1}$ -ben és I_σ -ban egybeesik, mivel $a \cdot x$ akkor különbözhet

a-tól, ha $x \in \underline{I_\sigma}$.

Kaptuk, hogy $\underline{I_\sigma}$ -nak és $H \setminus I_{\sigma+1}$ -nek $\underline{I_\sigma}$ -ba eső fő jobbideáljai azonosak. Figyelembe véve, hogy $H \setminus I_{\sigma+1}$ főideálfélcsoport, és azt, hogy minden jobbideál fő jobbideálok egyesítési halmaza, kapjuk, hogy $\underline{I_\sigma}$ minden jobbideálja is fő jobbideál. A dualitás alapján kapjuk, hogy $\underline{I_\sigma}$ minden balideálja is fő balideál, így a tétel bizonyítását befejeztük.

A 14. tétel alapján a főideálfélcsoportok szerkezetének vizsgálatánál az olyan főideálfélcsoportokból kell kiindulni, melyek egyetlen ideálréteggel rendelkeznek, és minden Q osztályuk egyelemű. Az ilyen félcsoportok közül a legegyszerűbbeket a 8. §-ban megadjuk.

7. §. Kvázifőideálfélcsoport rétegezett
ideálrétegének jobbnövelő és balnövelő
elemei közötti kapcsolat

Legyen H ebben a §-ban kvázifőideálfélcsoport. H I_σ rétegezett ideálrétegének jobbnövelő elemeiként az L_0 , balnövelő elemeiként pedig az R_0 elemei tekintendők. Az elnevezés jogosságát 5.1. mutatja.

Jelen § célja azt megállapítani, hogy L_0 és R_0 Q osztályai azaz az $A_0 \cap L_0$, $A_1, \dots, A_\lambda, \dots$ valamint a $B_0 \cap R_0$, $B_1, \dots, B_\tau, \dots$ Q osztályok szorzata mit ad, pontosabban a kérdés az, hogy mivel egyenlő a $B_\tau A_\lambda$ szorzat.

A felvetett problémára teljes választ nem adunk, de ez is mutatni fogja, hogy az I_σ ideálrétegnek /az L_0 és R_0 szempontjából/ csak néhány tipusa lehetséges.

Előkészületként néhány segédétel igazolása szükséges.

7.1. Legyen $b_\tau \in B_\tau$. Megadható olyan alkalmas χ_τ rendszám, hogy az $A_\beta \rightarrow b_\tau A_\beta$ leképezés a $\bigcup_{\beta \geq \chi_\tau} (A_\beta \cap \underline{L}_0)$ halmaznak $\underline{L}_0$ -ra való kölcsönösen egyértelmű monoton és folytonos leképezése.

/Az A_λ csak $\lambda=0$ esetén különbözhet az $A_\lambda \cap \underline{L}_0$ -tól/.

A leképezés monotonossága azt jelenti, hogy ha $b_\tau A_\beta = A_\alpha$, $b_\tau A_\delta = A_\gamma$ és $\delta > \beta$, akkor $\gamma > \alpha$ is fennáll, folytonossága pedig azt, hogy ha $\delta > \chi > \beta$ akkor $b_\tau A_\chi = A_\lambda$ teljesül, úgy hogy $\gamma > \lambda > \alpha$.

A bizonyításnál induljunk ki a következőből:

5.2. szerint $b_\tau I_\sigma = I_\sigma$. Nyilvánvaló, hogy $b_\tau x \in \underline{L}_0$ és $x \in I_\sigma$ akkor és csak akkor teljesül, ha $x \in \underline{L}_0$.

Ezért

$$(1) \quad b_\tau \underline{L}_0 \cong \underline{L}_0.$$

Vezessük be a következő jelölést:

$$A = \begin{cases} A_0 & \text{ha } A_0 \subset L_0 \\ A_1 & \text{ha } A_0 = H \setminus I_\sigma \end{cases}$$

(1) szerint vannak olyan $z \in \underline{L}_0$ elemek, melyekre $b_\tau z \in A$. Vegyünk ezek közül egy olyan elemet, mely $\underline{L}_0$ -nak legkisebb indexű Q osztályába tartozik. Legyen ez $z = a \in A_\nu$.

Fennáll tehát

$$(2) \quad b_\tau a_\nu = a \quad a \in A$$

Mivel az a által generált balideálnak a_ν is eleme, ezért van olyan $x \in H$ melyre

$$(3) \quad xb_\tau \cdot a = xa = a_\nu$$

Bebizonyítjuk, hogy kölcsönösen egyértelmű leképezés adható meg $\underline{L}_0$ Q osztályai, és $R(a_\nu) \cap \underline{L}_0$ Q osztályai között. A 10. tétel alapján látható, hogy ha A_λ végigfutja az $A_0, A_1, \dots, A_\lambda, \dots$ halmazokat, $a A_\lambda = A_\kappa$ illetve $a_\nu A_\lambda = A_\vartheta$ megadja $\underline{L}$ illetve $R(a_\nu) \cap \underline{L}_0$ minden Q osztályát. Fennáll: / (2), (3) alapján/

$$x \times A_\kappa = xa A_\lambda = xb_\tau a_\nu A_\lambda = a_\nu A_\lambda = A_\vartheta$$

illetve

$$b_{\tau} A_{\delta} = b_{\tau} a_{\nu} A_{\lambda} = a A_{\lambda} = A_{\kappa}$$

E két egyenlőségből az $A_{\delta} \rightarrow b_{\tau} A_{\delta}$ leképezés kölcsönösen egyértelmű volta következik, és ugyancsak ezekből a 10. tétel felhasználásával adódik a monotonitás, folytonosság is. /Egyidejűleg kaptuk, hogy $\chi_{b_{\tau}} = \nu$./

7.2. Ha $b_{\tau} \in B_{\tau}$, és

$$b_{\tau} A_{\delta} = A_{\kappa} \subset \underline{L_0} \text{ akkor } \delta \geq \kappa.$$

Ez az előző segédtétel nyilvánvaló következménye.

7.3. Ha $b_{\tau} \in B_{\tau} \cap \underline{R_0}$ és

$b_{\tau} A_{\delta} = A_{\kappa}$, akkor ugyanez érvényes b_{τ} helyett B_{τ} bármely más elemére is.

Legyen $b_{\tau}, \bar{b}_{\tau} \in B_{\tau} \cap \underline{R_0}$. Létezik olyan $x, y \in B_0$, melyre $x \cdot b_{\tau} = \bar{b}_{\tau}$, $y \cdot \bar{b}_{\tau} = b_{\tau}$. Legyen $\bar{b}_{\tau} A_{\delta} = A_{\mu}$. Ha $\mu \neq \kappa$, akkor feltehetjük, hogy $\mu > \kappa$. Az eddigiek alapján fennáll:

$$A_{\kappa} = b_{\tau} A_{\lambda} = y \bar{b}_{\tau} A_{\lambda} = y A_{\mu}$$

és ez ellentmond 7.2.-nek.

7.4. Ha $b_{\tau} \in B_{\tau}$, $b_{\lambda} \in B_{\lambda}$ / $\tau > \lambda$ / és

$$b_{\tau} A_{\lambda} = A_{\kappa} \quad (\subset \underline{L_0})$$

$$b_{\lambda} A_{\lambda} = A_{\mu} \quad (\subset \underline{L_0}) \text{ fennáll, akkor}$$

$$\lambda \geq \mu \geq \kappa.$$

7.2. szerint $\lambda \geq \mu$ következik.

$\mu \geq \kappa$ állítás bizonyítását is 7.2-re vezetjük vissza.

A 1o. tétel duálisa alapján van olyan $b_{\nu} \in B_{\nu}$, melyre $b_{\nu} b_{\lambda} = b_{\tau}$ teljesül. Fennáll:

$$A_{\kappa} = b_{\tau} A_{\lambda} = b_{\nu} b_{\lambda} A_{\lambda} = b_{\nu} A_{\mu}$$

Innen 7.2. alapján adódik, hogy $\mu \geq \kappa$.

A segédtételek bebizonyítása után rátérhetünk az eredetileg kitűzött problémára, arra a kérdésre, hogy a $B_{\tau} A_{\lambda}$ szorzat mivel lesz egyenlő.

A vizsgálat során esetmegkülönböztetésre lesz szükség.

Az egyes esetekre betűjellel fogunk hivatkozni. A jelek és a jelentésük a következő:

$$A.) \quad A_0 \cap \underline{L_0} = \emptyset \quad B_0 \cap \underline{R_0} = \emptyset.$$

I_σ -nak nincs sem jobb-, sem balegységeleme./

$$B.) \quad A_0 \subset \underline{L_0}, \quad B_0 \cap \underline{R_0} = \emptyset$$

I_σ -nak van jobbegységeleme, de nincs egységeleme/.

$$C.) \quad A_0 \subset \underline{L_0}, \quad B_0 \subset \underline{R_0}$$

/Egységelemes eset/.

A negyedik lehetőséget /a balegységelemes eset/ külön nem tekintjük, mert B.) duálisa.

A bizonyítás során használjuk majd a már bevezetett

$$A = \begin{cases} A_0 & \text{ha } A_0 \subset \underline{L_0} \\ A_1 & \text{ha } A_0 = H - I_\sigma \end{cases}$$

jelölést és A duális megfelelőjét B-vel jelöljük.

A továbbiakban /az eddigi jelöléssel összhangban/ bármely λ -ra a_λ , $\bar{a}_\lambda$, $\overline{\bar{a}}_\lambda$, ... fogja

jelölni A_λ elemeit, és $b_\tau, \bar{b}_\tau, \overline{\bar{b}}_\tau, \dots$ jelöli B_τ elemeit./Hasonlóan $a, \bar{a}, \overline{\bar{a}}, \dots \in A, b, \bar{b}, \overline{\bar{b}}, \dots \in B$

Most térjünk rá a kitűzött probléma megoldására.

A 7.1. segédteétel, illetve annak duálisa alapján kapjuk, hogy megadhatók olyan λ, τ rendszámok, melyekre

$$(4) \quad B_\lambda \cdot a_1 = B$$

$$(5) \quad b_1 \cdot A_\tau = A$$

érvényes.

Vegyük sorra az egyes lehetőségeket.

1.) λ, τ végesek.

Legyen $\lambda = n, \tau = m$. Így (4), (5)

$$(6) \quad B_n \cdot a_1 = B$$

(7) $b_1 \cdot A_m = A$ alakú lesz. Először csak az A, B esetet tekintjük. Tegyük fel, hogy $n > 1$, és

vizsgáljuk a $b_1^n a_1^{m+1}$ szorzatot. /A 10. tételből következik, hogy $b_1^n \in B_n$, $a_1^{m+1} \in A_{m+1}$ /.

Felhasználva (6)-t (7)-et, kapjuk, hogy

$$(8) \quad b_1^n a_1^{m+1} = b_1^n a_1 a_1^m = b_1 a_1^m$$

másrészt

$$(9) \quad b_1^n a_1^{m+1} = b_1^{n-1} b_1 a_1^m a_1 = b_1^{n-1} a_1$$

(8) - (9)-ből az A esetben következik, hogy

$$b_1^{n-1} a_1 = \bar{a}_1 \in A_1$$

ahonnan A_0 -al való jobbszorzással $b_1^{n-1} A_2 = A_1$ adódik, és 7.4. alapján kapjuk, hogy

vagy
(10) $b_1 A_2 = A_1$

vagy

(11) $b_1 A_2 = A_2$

teljesül.

Ha (11) áll fenn, akkor 7.1. szerint

$$(12) \quad b_1 \cdot A_1 = A_1$$

következik.

B.) esetben (8), (9)-ből kapjuk, hogy

$$b_1^{n-1} \bar{a}_1 = a_0 \in A_0$$

ahonnan A_0 -lal való beszorzással $b_1^{n-1} A_1 = A_0$ adódik, és 7.4. alapján következik, hogy vagy

$$(13) \quad b_1 \cdot A_1 = A_0$$

vagy

$$(14) \quad b_1 \cdot A_1 = A_1 \quad \text{érvényes.}$$

Ha (14) áll fenn, akkor 7.1. szerint

$$b_1 \cdot A_0 = A_0$$

Összefoglalva az eddigieket:

Az A esetben a következő három lehetőség közül pontosan egy teljesül.

$$\begin{array}{lll} \alpha_1) & n=1, \text{ azaz} & B_1 a_1 = B_1 \\ \alpha_2) & n>1 \quad \text{és} & b_1 A_1 = A_1 \\ \alpha_3) & n>1 \quad \text{és} & b_1 A_2 = A_1 \end{array}$$

Hasonló gondolatmenettel nyerjük az előbbieket duálisait. Kapjuk, hogy az alábbiak egyike teljesül:

$$\begin{array}{lll} \beta_1) & m=1 \quad \text{azaz} & b_1 A_1 = A_1 \\ \beta_2) & m>1 \quad \text{és} & B_1 a_1 = B_1 \\ \beta_3) & m>1 \quad \text{és} & B_2 a_1 = B_1 \end{array}$$

A B.) esetben a fentivel analóg lehetőségekhez jutunk:

$$\begin{array}{lll} \alpha_1) & n=1 \quad \text{azaz} & B_1 a_1 = B_1 \\ \alpha_2) & n>1 \quad \text{és} & b_1 A_0 = A_0 \\ \alpha_3) & n>1 \quad \text{és} & b_1 A_1 = A_0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \beta_1) & m=0,1 \quad \text{azaz} & b_1 A_0 = A_0 \quad \text{vagy} \quad b_1 A_1 = A_0 \\ \beta_2) & m=1 \quad \text{és} & B_1 a_1 = B_1 \\ \beta_3) & m=1 \quad \text{és} & B_2 a_1 = B_1 \end{array}$$

/Megjegyezzük, hogy a B esetben a β -feltételeknél szükség van annak bebizonyítására, hogy $b_n a_0 \in B_n$, ami 7.3 alapján és a jobbegységelem létezéséből következik, továbbá egy másik lépésnél szükség van 7.2 igénybevételére is./

A következő célunk az lesz, hogy/egyszerre tekintve az A, B esetet/, kiválasszuk, melyek azok az α_i, β_j ($i, j = 1, 2, 3$) párok, melyeknél a két feltétel egyidejű teljesülése nem vezet ellentmondáshoz.

Vegyük sorra a lehetőségeket:

a.) α_1, β_1

Kapjuk, hogy $b_1 a_1 \in A_1 \cap B_1$ illetve $A_0 \cap B_1$.

/Figyelembe vesszük, hogy B esetben β_1 -nél

$b_1 A_0 = A_0$ -ből is $b_1 A_1 = A_1$ következik./

E-szerint létezne I_σ -nak olyan eleme, mely vagy valódi jobb és balnövelő, vagy valódi balnövelő és jobbazonosító /valódi jobbnövelő egy $x \in I_\sigma$ elem, ha $I' a = I_\sigma$ / $I' \subset I_\sigma$ / és jobbazonosító, ha $I_\sigma a = I_\sigma$ /. Ilyen elem Ljapin [8] III. fejezet 5.2 tétele alapján nem lehetséges.

b.) α_1, β_2

Fennáll:

$$b_1 a_1^m = b_1 a_1 a_1^{m-1} = \bar{b}_1 a_1^{m-1}$$

és ez ellentmond 7.1-nek.

c.) α_1, β_3 nem állhat fenn, mert ellentmond 7.1-nek.

d.) α_2, β_1

Ez a lehetőség A.) esetben α_1, β_2 duálisa. A B esetben a β_1 kikötés két lehetőségének megfelelően egyrészt 7.1 miatt, másrészt az α_1, β_2 -vel analóg módon ellentmondáshoz jutunk.

e.) α_2, β_2 , α_2, β_3 ; α_3, β_2 nem állhat fenn. Mindegyikben a két lehetőség elve ellentmond egymásnak.

f.) α_3, β_1

Az A esetben, és ugyanígy a B esetben, ha β_1 -nél $m=0$, akkor 7.1 miatt ellentmondáshoz jutunk. Ha a B esetben β_1 -nél $b_1 A_1 = A_0$, akkor nem kapunk ellentmondást, csupán $\underline{n}$ -re adódik egy feltétel: $/n > 1/$

Fennáll

$$b_1^n \cdot a_1 = b_1^{n-1} b_1 a_1 = b_1^{n-1} a_0 \in B_{n-1}$$

másrészt $b_1^n a_1 \in B_1$

Szükségképpen $n=2$.

/Megjegyezzük, hogy $b_1^{n-1} a_0 \in B_{n-1}$ 7.3. alapján következik abból, hogy A_0 -ban van jobbegységelem/.
Tehát a B esetben a $B_2 a_1 = B_1$
 $b_1 A_1 = A_0$ lehetőség fennállhat.

g.) α_3, β_3

Az A.) esetben nem vezet ellentmondásra,
B esetnél ez a lehetőség eleve nem állhat fenn.

Kaptuk, hogy az A esetben a $B_2 a_1 = B_1$
 $b_1 A_2 = A_1$ összefüggések egyidejűleg teljesülhetnek.

Most térjünk rá a C esetre. Elsőként megjegyezzük, hogy az egységelem $E = \underline{L}_0 \cap \underline{R}_0$ Q osztálynak az eleme.

(6) és (7) most a következőképp írható:

$$(15) \quad B_n a_1 = E$$

$$(16) \quad b_1 A_m = E$$

Látható, hogy $n \neq 0$, mert különben $\bar{e} a_1 \in E$ és $\bar{e} a_1 \in A_1$ ($\bar{e} \in E$) egyidejűleg teljesülne /7.1./.
/Az $\bar{e} a_1 \in A_1$ 7.3 és az egységelem létezése miatt áll fenn./

Hasonló okból $m \neq 0$.

Tekintsük a következőt:

$$b_1^n a_1^m = b_1^n a_1 a_1^{m-1} = \bar{e} a_1^{m-1} \in A_{m-1}$$

$$b_1^n a_1^m = b_1^{n-1} b_1 a_1^m = b_1^{n-1} \bar{e} \in B_{n-1}$$

Kaptuk, hogy $A_{m-1} \cap B_{n-1} \neq \emptyset$.

Szükségképpen $m=n=1$. Tehát a c.) esetben

a $\begin{matrix} B_1 a_1 = E \\ b_1 A_1 = E \end{matrix}$ egyenlőségek egyidejűleg teljesülhetnek.

2.) Legyen (4), (5)-ben λ végtelen, $\tau = m$ véges.

Igy (4) és (5) egyenlőség a következő alakú lesz:

$$(17) \quad B_\lambda a_1 = B$$

$$(18) \quad b_1 A_m = A.$$

Tekintsük $b_2 a_1^m$ -t.

Ha $m > 1$, akkor fennáll:

$$(19) \quad b_2 a_1^m = b_2 b_1 a_1^{m-1} = b_2 a_1$$

$$(20) \quad b_2 a_1^m = b_2 a_1 a_1^{m-1} = b_2 a_1^{m-1}$$

Az A esetben kapjuk, hogy $b_1 = b_2 a_1 = b_2 a_1^{m-1}$, amiből

7.4 szerint $b = b a_1$ következik, és ez ellentmond

(17)-nek 7.1. miatt. (17)(18) $m=1$ esetén teljesül.

Igy az A esetben $B_\lambda a_1 = B_1 / \lambda$ végtelen/

$b_1 A_1 = A_1$ lehetőség fennállhat.

A B esetben (19) (20)-ból $\bar{b}_\lambda = b_\lambda a = b_1 a_1^{m-1}$ következik, és ez ellentmondás 7.2. miatt. Ha $m=1$, akkor $b_\lambda a_1 = \bar{b}_\lambda b_1 a_1 = \bar{b}_\lambda a_0 = \bar{\bar{b}}_\lambda$ alapján ellentmondást kapunk. / (17) /. $m=0$, nem állhat fenn, mert a jobb-egységelem létezése miatt $b_1 a_0 \in B_1$ is következik, és így $A_0 \cap B_1 \neq \emptyset$. Ezt pedig Ljapin [8] III. fej. 5.2. tétele kizárja.

A C esetben (19) (20)-ból $\bar{b}_\lambda = \bar{a}_{m-1}$ következik, ami ellentmondás.

Ha $m=1$, akkor $b_\lambda a_1 = \bar{b}_\lambda b_1 a_1 = \bar{b}_\lambda a_0 = \bar{\bar{b}}_\lambda$ ad ellentmondást (17)-tel szemben, $n=0$ éppugy mint a B esethél nem állhat fenn, mert bebőle $A_0 \cap B_1 \neq \emptyset$ következik.

3.) Legyen $\lambda=n$ véges, τ végtelen.

A dualitás miatt csak a B esetet kell tekinteni.

(21) Fennáll: $b_1^n a_1 = \bar{b}_1$

(22) $b_1 a_\tau = a_0$

Az utóbbiból $b_1 \cdot a_{\tau+1} = \bar{a}_1$ következik.

Legyen $n > 1$. (21) és (22) alapján

$$b_1^n a_{\tau+1} = b_1^n \bar{a}_1 \bar{a}_{\tau+1} = b_1 \bar{a}_{\tau+1} = \bar{a}_1$$

$$b_1^n a_{\tau+1} = b_1^{n-1} b_1 a_{\tau+1} = b_1^{n-1} \bar{a}_1$$

egyenlőségeket kapjuk, amelyekből 7.4. szerint

$b_1 \bar{a}_1 = \bar{a}_1$ hoz jutunk ellentmondásban τ végtelenségével.

Az $n=1$, , esetet vizsgálva látható, hogy a

$$B_1 a_1 = B_1$$

$$b_1 A_\tau = A_0 \quad / \tau \text{ végtelen} /$$

lehetőség fennállhat.

4.) Legyen λ, τ egyaránt végtelen rendszám.

(4) és (5) alapján fennáll a következő:

$$(21) \quad b_\lambda a_\tau = \bar{b}_\lambda b_1 a_\tau = \bar{b}_\lambda a$$

$$(22) \quad b_\lambda a_\tau = b_\lambda a a_\tau = b a_\tau$$

(21) - (22)-ből az A esetben $\bar{b}_1 = b_\lambda a = b a_\tau = a_1$ a

B esetben $\bar{b}_\lambda = b_\lambda a = b a_\tau = a_0$, a C esetben

$\bar{b}_\lambda = b_\lambda a = b a_\tau = \bar{a}_\tau$ következik. Mind a három eset-

ben Ljapin [8] . III. feje. 5.2 tétele alapján ellentmondást kapunk.

Az eddigi eredmények összefoglalása a következő tétel.

15.) tétel. A H kvázifőideálfélcsoport

I_σ rétegezett ideálrétegének a maximális bal- és a maximális jobbideálréteg ($\underline{L}_0$ $\underline{R}_0$) Q osztályainak $/A_0, A_1, \dots /; /B_0, B_1, \dots /$ egymással való szorzata alapján csak néhány típusa lehetséges.

A.) Ha $\underline{I}_\sigma$ -nak nincs sem jobb, sem bal egységeleme, akkor vagy

$$B_2 a_1 = B_1$$

a.) $b_1 A_2 = A_1$

vagy

$$B_\lambda a_1 = B_1$$

/ λ végtelen/

b.) $b_1 A_1 = A_1$

illetve az utóbbi duálisa:

$$B_1 a_1 = B_1$$

c.) $b_1 A_\tau = A_1$ / τ végtelen/

teljesül.

B.) Ha $\underline{I}_\sigma$ -nak van jobbegységeleme, de nincs balegységeleme, akkor vagy

$$\begin{aligned} & B_2 a_1 = B_1 \\ \text{d.)} \quad & b_1 A_1 = A_0 \end{aligned}$$

vagy

$$\begin{aligned} & B_1 a_1 = B_1 \\ \text{e.)} \quad & b_1 A_\tau = A_0 \end{aligned} \quad \begin{array}{l} / \tau \text{ végtelen} / \\ \text{érvényes.} \end{array}$$

A balegységelemes esetben d.) vagy e.) duálisa állhat fenn.

C.) Ha $\underline{I}_\sigma$ -nak van egységeleme, akkor $(E = \underline{L}_0 \cap \underline{R}_0)$

$$\begin{aligned} \text{f.)} \quad & B_1 a_1 = E \\ & b_1 A_1 = E \end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy az itt szereplő feltételek a 10. tétel alapján általában megadják azt, hogy a $B_\tau A_\lambda$ szorzat mivel egyenlő, mégsem minden esetben. Pl. ha az a.) eset teljesül a $\underline{b_1 a_1}$ szorzatról csak annyit mondha-

tunk, hogy $b_1 a_1 \notin \underline{L_0}, b_1 a_1 \notin \underline{R_0}$.

Azt, hogy a fenti típusok mindegyike valóban előfordul, a 8. és a 9. §-ban bizonyítjuk be példákkal.

8. §. ω -egyszerű főideálfélcsoportok

Ebben a §-ban megadjuk a legegyszerűbbnek tekinthető főideálfélcsoportokat.

A sorrakerülő főideálfélcsoportok a következő tulajdonságokkal rendelkeznek.

egyszerűek /más néven ideálmentesek, vagyis nincs valódi kétoldali ideáljuk/,

két elemmel generáltak,

minden Q osztályuk egyelemű

és a maximális bal- és jobboldali réteg elemei ω rend-típusú halmazokat alkotnak. /Az eddigiekből következik az is, hogy egyetlen rétegezett ideálrétegből állnak/. Nevezzük mindazokat a félcsoportokat, melyek az említett követelményeknek eleget tesznek ω -egyszerű főideálfélcsoportoknak. Emlékeztetünk a 14. tételre, mely mutatja az ilyen típusú félcsoportok fontosságát, azt, hogy főideálfélcsoportok építőelemei lehetnek.

Az összes ω -egyszerű főideálfélcsoportot /izomorfia-tól eltekintve/ megadjuk.

A 15. tétel fontos segédeszközt jelent a sorrakerülő félcsoportok szerkezetének vizsgálatához.

Jelentsen H ebben a §-ban ω -egyszerű főideálfélcsoportot.

Jelölje H maximális bal- illetve maximális jobb ideálrétegének Q osztályait jelentő elemeket $A_0 = e_l$, $A_1 = a$, $A_2 = a^2, \dots, A_n = a^n, \dots$; $B_0 = e_r$, $B_1 = b$, $B_2 = b^2, \dots, B_m = b^m, \dots$.

Mivel az L_0 , ill. R_0 elemei ω -rendtipusú halmazt alkotnak, ezért a 15. tételben szereplő b) c) e) lehetőség eleve kiesik, és így kimondhatjuk a következőt:

16. tétel. Bármely ω -egyszerű főideálfélcsoportban az $a (= A_1 \in L_0)$; $b (= B_1 \in R_0)$ / elemekre a következő teljesül:

$$(1) \quad b^2 a = b$$

$$(2) \quad b a^2 = a$$

A 15. tétel szerinti a.) d.) f.) esetekben és d.) duálisában érvényes a fenti feltétel, ez a 10. tétel alapján látható.

Most foglalkozzunk a két generáló elem megválasztásának kérdésével.

17. tétel. Bármely ω -egyszerű főideálfélcsoportban generálóelemként $a (= A_1 \in L_0)$ és $b (= B_1 \in R_0)$ választható.

Tekintsünk egy H ω -egyszerű főideálfélcsoportot.
Tegyük fel, hogy f, g generáló elemek állítják elő.

Megállapítható, hogy f és g közül egyik L_o , másik R_o /bal- ill. jobbegységelemtől különböző/ eleme. Ez következik abból, hogy a félcsoporth bármely eleme beletartozik az $L=L(f) \cup L(g)$ balideálba, illetve az $R=R(f) \cup R(g)$ jobbideálba, mivel minden elem az f, g elemek megfelelő sorrendben történő szorzataként áll elő. Feltehetjük, hogy $f \in L_o$; $g \in R_o$. A 10. tétel alapján $f=A_n=a^n$, $g=B_m=b^m$. Ha az $f=a^n$, $g=b^m$ helyettesítést a félcsoporth elemeinek f , és g -vel való előállításában végrehajtjuk, az f, g -re érvényes összefüggések megfelelőjét a, b -re/ figyelembe vesszük, akkor megkaptuk a H félcsoporthnak az a, b generáló elemekkel való előállítását.

A most bebizonyított tétel alapján legyenek a H félcsoporth generáló elemei a, b .

Várható, hogy ω -egyszerű főideálfélcsoportot kapunk, akkor ha az a, b generáló elemekre /egyelőre szimbólumokra/ csak (1)(2) teljesülését követeljük meg.

Kimutatjuk, hogy valóban így van. Vezessük be a $ba=c$ jelölést, és jelöljük F -el az a és b

elemekből képzett véges tényezőszámu szorzatok halmazát. Könnyű látni, hogy F elemei egyértelműen állnak elő

$a^k c^l b^m$ alakban, ahol k, l, m nemnegatív egész számok, de $k=l=m=0$ nem lehetséges. a^0 -t, b^0 -t, c^0 -t üres jeleknek tekintjük.

F elemeire az (1) (2) összefüggések alapján a következő műveleti szabály adható meg:

$$(3) \quad a^{k_1} c^{l_1} b^{m_1} \cdot a^{k_2} c^{l_2} b^{m_2} = \begin{cases} a^{k_1+k_2-m_1} c^{l_2} b^{m_2} & \text{ha } m_1 < l_2 \\ a^{k_1} c^{l_1+l_2+1} b^{m_2} & \text{ha } m_1 = k_2 \neq 0 \\ a^{k_1} c^{l_1+l_2} b^{m_2} & \text{ha } m_1 = l_2 = 0 \\ a^{k_1} c^{l_1} b^{m_2+m_1-l_2} & \text{ha } m_1 > k_2 \end{cases}$$

Elsőként egyszerű számolással (sorra véve a lehetséges eseteket) kimutatható, hogy F -ben fennáll az asszociativitás.

Második lépésként bebizonyítjuk, hogy F egyszerű. Ehhez azt kell belátni, hogy léteznek olyan $x, y \in F$ elemek, tetszőszerinti $a^{k_1} c^{l_1} b^{m_1}$ illetve $a^{k_2} c^{l_2} b^{m_2}$ elemekhez, melyekre

$$x \cdot a^{k_1} c^{l_1} b^{m_1} \cdot y = a^{k_2} c^{l_2} b^{m_2}$$

érvényes.

Ha $k_2 \geq 1$, akkor

$$x = a^{k_2-1} b^{k_1+1}$$

$$y = a^{m_1+2} c^{l_2} b^{m_2}$$

ha $k_2 = 0$ de $m_2 \neq 0$, akkor

$$x = a^{k_2} c^{l_2} b^{k_1+2}$$

$$y = a^{m_1+1} b^{m_2-1}$$

és ha $k_1 = 0$, $m_2 = 0$ akkor

$$x = c^{l_2-1} b^{k_1+1}$$

$$y = a^{m_1+1}$$

választás megfelelő.

Bebizonyítjuk, hogy F főideálfélcsoport.

Nézzük meg a fő-balideálokat. A szorzásszabály alapján látható, hogy az $a^{k_0} c^{l_0} b^{m_0}$ elem által generált balideál a következőképpen adható meg:

ha $k_0 = 0$

$$L(c^{l_0} b^{m_0}) = \left\{ a^k c^l b^m \mid k \geq 0; l \geq 0; m > m_0 \text{ vagy } k \geq 0; l \geq l_0; m = m_2 \right\}$$

ha $k_0 \neq 0$

$$L(a^{k_0} c^{l_0} b^{m_0}) = \left\{ a^k c^l b^m \mid \begin{array}{l} k \geq 0; l \geq 0; m > m_0 \text{ vagy} \\ k \geq 0; l > l_0; m = m_0 \text{ vagy} \\ k \geq 1 \quad l = l_0 \quad m = m_0 \end{array} \right\}$$

Ezek szerint

$$L(a^{k_1} c^{l_1} b^{m_1}) \supset L(a^{k_2} c^{l_2} b^{m_2})$$

akkor és csakis akkor, ha

$$m_1 < m_2$$

$$\text{vagy } m_1 = m_2 \quad \text{és } l_1 < l_2$$

$$\text{vagy } m_1 = m_2, \quad l_1 = l_2 \quad \text{és } k_1 = 0 \quad (k_2 \neq 0)$$

Az eddigiekből már következik, hogy F főideálfélcsoport, mert fő bal ideáljai /a tartalmazás relációjára nézve/ jólrendezett láncot alkotnak, és a dualitás miatt ugyanez érvényes a fő jobbideálokra is.

F balideálrétegei a következőképpen adhatók meg:

$$L_i = \begin{cases} \{c^l\} & \text{ha } i = 2l-1 \\ \{a^k c^l \mid k \geq 1\} & \text{ha } i = 2l \end{cases}$$

ha i véges, és a további balideálrétegek pedig a következők: /ha $m \geq 1$ /

$$\underline{L}_{\omega m+i} = \begin{cases} \{c^l b^m\} & \text{ha } i=2l \\ \{a^k c^l b^m \mid k \geq 1\} & \text{ha } i=2l+1 \end{cases}$$

A dualitás miatt a jobbideálrétegek:

ha j véges

$$\underline{R}_j = \begin{cases} \{c^l\} & \text{ha } j=2l+1 \\ \{c^l b^m \mid m \geq 1\} & \text{ha } j=2l \end{cases}$$

ha $k \geq 1$

$$\underline{R}_{\omega k+j} = \begin{cases} \{a^k c^l\} & \text{ha } j=2l \\ \{a^k c^l b^m \mid m \geq 1\} & \text{ha } j=2l+1 \end{cases}$$

Mivel egy balideálréteg elemei legfeljebb a kitevőjében különböznek és olyan elemek, melyeknél a kitevője különböző, különböző jobbideálrétegbe tartoznak, így minden Q osztály egyelemű.

A fentiekből látható, hogy F maximális balideálrétegének elemei az $a, a^2, a^3, \dots, a^n, \dots$ elemek és így ω rendtipusú rendezett halmazt alkotnak.

Az eddigiekből következik, hogy F ω -egyszerű főideálfélcsoport.

Látható, hogy F -nek nincs sem jobb, sem balegységeleme.

Külön érdekessége az F félcsoportnak minden más ω -egyszerű főideálfélcsoporttal szemben az, hogy bal- illetve jobbideálrétegei ω^2 rendtipusú halmazt alkotnak.

A kapott F főideálfélcsoport szerkezetét az 1. ábra szemlélteti.

A később tárgyalásra kerülő főideálfélcsoportok ábráit is megadjuk a dolgozat függelékében.

Mindegyik a következőképpen értendő:

A lent balról ferdén jobbra felfelé haladó párhuzamos vonalak mindegyike egy-egy balideálréteget jelképez, mégpedig az ábra bal felső részéből elindulva az egymásután következő vonalak megadják a 0-adik, első, második, ... balideálréteget.

Hasonlóképpen lent jobbról ferdén felfelé haladó vonalak mindegyike egy-egy jobbideálréteget ad meg, és itt az ábra jobb felső részéből kiindulva állapíthatjuk meg a sorrendet.

Valamely ábrán a vonalak szaggatottsága azt jelzi, hogy közben végtelen sok bal illetve végtelen sok jobbideálréteget nem tüntettünk fel.

A balideálrétegeket megadó vonalak balra lefelé és a jobbideálrétegeket megadókat jobbra lefelé /gondolatban/ folytathatók.

Ha két elemet azonos balról ferdén felfelé haladó vonalon tüntettünk fel, akkor egy balideálrétegbe tartoznak.

Valamely elem által generált balideálba tartozó elemeket megkapjuk, ha vesszük a megadott elem balideálréteg vonalán, és ettől jobbra lefelé haladva minden balideálréteg vonalon lévő elemet.

Hasonló érvényes jobbideálréteg, jobbideál vonatkozásban is.

Az eddigiekből már következik, hogy minden elemet a balideálréteg és jobbideálréteg vonalának metszéspontjába helyezünk el, és így az ábra alapján könnyen leolvasható, hogy hányadik balideálrétegbe, hányadik jobbideálrétegbe esik.

Látható, hogy az ábrák igen jó jellemzését jelentik a főideálfélcsoportok ideálszerkezetének.

Bal- és jobbideálok, bal- és jobbideálrétegek, könnyen leolvashatók, Q -osztályok elhelyezkedése jól tanulmányozható az ábra alapján.

Természetesen mindig a főideálfélcsoport véges részét tudjuk ábrázolni, de ennek alapján az egészre tudunk következtetni.

Most térjünk vissza az eredeti problémára.

A célunk tehát az összes ω -egyszerű főideálfélcsoport megadása. Mivel az F félcsoport megalkotásakor az a, b generálóelemekre csak az (1) (2) feltétel teljesülését kívántuk meg, /amelyeknek minden ω -egyszerű főideálfélcsoportra fenn kell állniuk/ ezért bármely más ω -egyszerű főideálfélcsoport F homomorf képeként áll elő.

Nyilvánvaló, hogy bármely főideálfélcsoport homomorf képe is főideálfélcsoport. A F -nek olyan homomorf képeit keressük, melyben minden Q osztály egyelemű. Könnyen látható, hogy ily módon /az egyetlen triviális esettől eltekintve/ ω -egyszerű főideálfélcsoportot kapunk. F -nek ugyanis triviális homomorfizmusa az egyetlen idempotens elemből álló félcsoportra történő leképezés, csak az ettől különböző homomorf leképezéseket akarjuk megadni. /Természetesen kikötjük azt, is,

hogy a homomorfizmus ne legyen izomorfizmus/.

Jelöljük azt az F elemeire értelmezett relációt, mely F két elemére akkor és csak akkor áll fenn, ha a két elem képe a vizsgált homomorf leképezésnél ugyanaz, $\equiv$ -val, és nevezzük a relációt kongruenciának. /Ez a megfelelő kompatibilis osztályozáshoz tartozó kongruenciareláció/.

18. t é t e l . Ahhoz, hogy az F ω -egyszerű főideál-félcsoportnak a triviálistól eltérő olyan homomorf képét kapjuk, melyben minden Q osztály egyelemű, és

$$(4) \quad a^{k_1} c^{l_1} b^{m_1} \equiv a^{k_2} c^{l_2} b^{m_2}$$

/azaz a fenti két elem képe ugyanaz/, szükséges, hogy

$$k_1 = k_2, \quad m_1 = m_2 \quad \text{teljesüljön.}$$

Elsőként bizonyítjuk a következő segédételt.

8.1. Ha $x \equiv y$ ($x, y \in F$) akkor bármely olyan z elem, mely $I(x)$, $I(y)$ egyikénél /tágabb értelemben/ bővebb, másikánál /tágabb értelemben/ szűkebb balideált generál és hasonló áll jobbideál vonatkozásban is kongruens x, y -nal.

Jelöljük ' -vel valamely elem, vagy halmaz képét a tekintett homomorf leképezésnél. Feltehető, hogy $U(x) \supseteq U(z) \supseteq U(y)$.

$x \equiv y$ miatt

$$U(x) = U(y)$$

és így

$$U(x) = U(z) = U(y)$$

Hasonlóan kapjuk, hogy $R(x) = R(z) = R(y)$, amiből a segédétel állítása következik.

Térjünk rá a tétel bizonyítására.

(4)ben feltehető, hogy $k_1 \leq k_2$.

Szorozzuk meg a (4) kongruenciát balról b^{k_2+1} -el. Kapjuk:

$$(5) \quad b^{m_1+k_2-k_1+1} \equiv b^{m_2+1}$$

Ha $m_1 + k_2 \neq m_2 + k_1$ akkor

(5)-szerint b -nek két különböző kitevőjű hatványa kongruens. A segédétel alapján velük kongruensak azok a b^t elemek, melyeknek kitevője az előbbi két

b hatvány kitevője közé esik, és így van olyan b^{Δ} , melyre

$$b^{\Delta} \equiv b^{\Delta+1}$$

Ezt a kongruenciát rendre jobbról $a, a^2, \dots, a^n, \dots$ -nel, $b, b^2, \dots, b^m, \dots$ -nel beszorozva kapjuk, hogy az összes a^k, b^m , és így F minden eleme egy osztályba tartozik, vagyis F -nek triviális homomorfizmusa állt elő.

Tegyük fel most már, hogy (4)-ben

$$m_1 + k_2 = m_2 + k_1 \quad \text{és} \quad k_2 > k_1.$$

(4)-t szorozzuk meg balról b^{k_1} -el, jobbról a^{m_1} -el.

Kapjuk:

$$(6) \quad c^t \equiv a^{k_2 - k_1} c^{l_2} b^{m_2 - m_1}$$

ahol t vagy l_1 , vagy $l_1 + 1$ vagy $l_1 + 2$ /ha $t = l_1$, akkor $l_1 \neq 0$ /

Vezessük be a következő jelölést: $v = k_2 - k_1 = m_2 - m_1 > 0$. Az új jelölés szerint (6)-t így írhatjuk:

$$(7) \quad c^t \equiv a^v c^{l_2} b^v$$

Szorozzuk meg ezt a kongruenciát balról b^v -vel, jobbról a^v -vel. Előáll:

$$(8) \quad c \equiv c^D \quad \text{ahol} \quad D \geq 2$$

A segédétel szerint következik, hogy

$$(9) \quad c \equiv c^2$$

Ezt a kongruenciát rendre $c, c^2, \dots, c^l, \dots$ -
lel szorozva kapjuk, hogy valamennyi c^l ($l \geq 1$) egy
osztályba tartozik.

Legyen a c^k ($k=1,2,\dots$) elemek homomorf
képe c' .

(7)-t beszorozva jobbról a^v -vel, és a
képelemekre áttérve

$$(10) \quad a'^v = a'^v c' \quad \text{áll elő és hasonlóan}$$

(7)-t balról b^v -vel beszorozva és a képelemekre áttér-
ve

$$(11) \quad b'^v = c' b'^v$$

alakú egyenlőséghez jutunk.

(10)-ből következik, hogy c' F homomorf képének jobbegységeleme, (11)-ből, hogy balegységeleme, így egységeleme. Vezessük be a $c' = e$ jelölést.

(7) szerint

$$e = a'^{\nu} b'^{\nu}$$

A segéd-tétel alapján $a^t c$, cb^t ($t \leq \nu$) elemek képe is az egységelem.

Tehát $a' = e$, $b' = e$, amiből következik, hogy a megadott homomorfizmus triviális.

Kaptuk, hogy (4)ben $k_1 = k_2$, $m_1 = m_2$ teljesül, és ez éppen az, amit bizonyítani kellett.

A 18. tétel alapján könnyű megvizsgálni az F félcsoport összes olyan homomorf képét, melyben minden q -osztály egyelemű. A tétel szerint feltehetjük, hogy

$$(12) \quad a^k c^{\ell_1} b^m \equiv a^k c^{\ell_2} b^m$$

és a segéd-tétel szerint, ha $\ell_1 < \ell_2$ és $\ell_1 = \ell$, akkor

$$(13) \quad a^k c^{\ell} b^m \equiv a^k c^{\ell+1} b^m$$

is fennáll.

Ha $k \neq 0$, $m \neq 0$ akkor b^{k-1} -el balról és a^{k-1} -el jobbról való szorzás után

$$(14) \quad a c^l b \equiv a c^{l+1} b \quad (l \geq 0)$$

kongruencia következik. Ez ekvivalens (13)-mal.

Ha $k \neq 0$, $m = 0$, akkor (13) az

$$(15) \quad a c^l \equiv a c^{l+1} \quad (l \geq 0)$$

kongruenciával ekvivalens.

Ha $k=0$ és $m \neq 0$, akkor (13)-ból

$$(16) \quad c^l b \equiv c^{l+1} b \quad (l \geq 0)$$

következik, és (16)-ból is következik (13).

Végül ha $k = 0$, $m = 0$ akkor (13) ilyen alakú

$$(17) \quad c^l \equiv c^{l+1} \quad (l \geq 1)$$

Az eddigiek alapján kimondható a következő tétel:

19. tétel. Ahhoz, hogy H az F ω -egyszerű főideálfélcsoport olyan homomorf képe legyen, melyben minden Q osztály egyelemű, szükséges, hogy H -ban az a, b generáló elemekről $/ba=c/$ (1), (2)-n kívül még a következő feltételek közül egy vagy több teljesüljön /valamely n -re/:

$$(18) \quad c^n = c^{n+1} \quad (n \geq 1)$$

$$(19) \quad ac^{n-1} = ac^n \quad (n \geq 1)$$

$$(20) \quad c^{n-1}b = c^n b \quad (n \geq 1)$$

$$(21) \quad ac^{n-1}b = ac^n b \quad (n \geq 1)$$

Ez a tétel lehetőséget nyújt arra, hogy megadjuk F összes homomorf képét, mely ω -egyszerű főideálfélcsoport.

Látható, hogy ha a fenti négy lehetőség közül /esetleg különböző n -re/ több is teljesül, akkor általában

nem lesz mind független, egynek vagy kettőnek következménye lesz a többi.

Pl. ha (19) vagy (20) fennáll, akkor (18) is fennáll /ugyanarra az n -re/, ha (21) fennáll ($n-1$ -re), akkor (18) (19) (20) következik n -re.

Adjuk meg tehát a fenti négy követelményből megalkotható független rendszereket. /Mint látni fogjuk, ezek legfeljebb két követelményt tartalmaznak/.

Ki fog derülni, hogy minden ilyen rendszerhez ω -egyszerű főideálfélcsoport tartozik. Ha a rendszerhez tartozó követelményekben az n paraméter befutja a természetes számokat, azonos típusú főideálfélcsoportokat kapunk.

A sorraikerülő félcsoport típusok mindegyikénél a művelet asszociativitásának bizonyítása általában kicsit hosszadalmas /néhány eset végigvizsgálata szükséges/, de egyszerű számolási feladat, az egyszerűség kimutatása pedig igen könnyű, ezért ezeket mellőzzük.

A félcsoportok főideálfélcsoport voltának bizonyítását elvégezzük azáltal, hogy megadjuk az i -edik balideálréteg elemeit és nem önduális esetekben az i -edik jobbideálréteg elemeit is, vagyis megmutatjuk, hogy a bal, jobbideálrétegek jólrendezett láncot képeznek. Ebből egyidejűleg leolvasható az is, hogy minden Q osztály egyelemű. Az ω -egyszerűség további követelményeinek

teljesülése a sorrakerülő félcsoporthoz típusoknál nyilvánvaló.

Tekintsük most már az egyes főideálfélcsoporthoz típusokat:

a.) $\underline{F_n} \ (n \geq 1) \ /c^n = c^{n+1}/$

Az F_n félcsoporthoz akkor jutunk el, ha az $\underline{a}$, $\underline{b}$ generáló elemekre (1) - (2)-n kívül még (18)-t követeljük meg.

Látható, hogy F elemei egyértelműen állnak elő a következő alakban:

$$a^k c^\ell b^m, \text{ ahol } k \geq 0; \ n \geq \ell \geq 0; \ m \geq 0$$

de $k=\ell=m=0$ nem lehetséges.

$/a^0, b^0, c^0$ üres szimbólumok/.

(1), (2) és (18) alapján F_n -ben szorzásszabály a következő:

$$a^{k_1} c^{l_1} b^{m_1} \cdot a^{k_2} c^{l_2} b^{m_2} = \begin{cases} a^{k_1+k_2-m_1} c^{l_2} b^{m_2} & \text{ha } m_1 < k_2 \\ a^{k_1} c^{l_1+l_2+1} b^{m_2} & \text{ha } m_1 = k_2 \neq 0, l_1+l_2+1 \leq n \\ a^{k_1} c^n b^{m_2} & \text{ha } m_1 = k_2 \neq 0, l_1+l_2+1 \geq n \\ a^{k_1} c^{l_1+l_2} b^{m_2} & \text{ha } m_1 = k_2 = 0, l_1+l_2 \leq n \\ a^{k_1} c^n b^{m_2} & \text{ha } m_1 = k_2 = 0, l_1+l_2 \geq n \\ a^{k_1} c^{l_1} b^{m_2+m_1-k_2} & \text{ha } m_1 > k_2 \end{cases}$$

A szorzásszabály alapján látható, hogy

$$I(a^{k_1} c^{l_1} b^{m_1}) \supset I(a^{k_2} c^{l_2} b^{m_2})$$

- ha
- 1.) $m_1 < m_2$
 - 2.) $m_1 = m_2, l_1 < l_2$
 - 3.) $m_1 = m_2, l_1 = l_2 < n, k_1 = 0 (k_2 \neq 0)$

A balideálrétegek a következőképpen adhatók

meg:

ha $i < 2n$, akkor

$$L_i = \begin{cases} \{a^k c^l \mid k \geq 1\} & \text{ha } i = 2l \\ \{c^l\} & \text{ha } i = 2l-1, i \neq 2n-1 \\ \{a^k c^n \mid k \geq 0\} & \text{ha } i = 2n-1 \end{cases}$$

ha $i \geq 2n$ és $i-2n = (m-1)(2n+1) + r$, akkor

$$\underline{L}_i = \begin{cases} \{a^k c^l b^m \mid l \geq 1\} & \text{ha } r = 2l+1 \\ \{c^l b^m\} & \text{ha } r = 2l \quad r \neq 2n \\ \{a^k c^l b^m \mid k \geq 0\} & \text{ha } r = 2n \end{cases}$$

Az egyes jobbideálrétegek elemeit a dualitás miatt könnyen megállapíthatjuk. Látható, hogy F_n főideál-félcsoport, minden Q osztálya egyelemű, és az ω -egyszerűség további követelményei nyilvánvalók.

Könnyen ellenőrizhető, hogy F_n F homomorf képe.

A homomorf leképezés F -nek a $a^k c^l b^m$ ($l \geq n$) elemeit F_n egyetlen elemére a $a^k c^l b^m$ -re képezi le, míg a $a^k c^l b^m \in F$ ($l < n$) elemnek a képe $a^k c^l b^m \in F_n$.

A függelékben a 2. ábra F_5 , 3. ábra F_3 félcsoportot mutatja.

b.) $F_{n,0} \quad (n \geq 1) \quad (ac^{n-1} = a c^n)$

Az $F_{n,0}$ félcsoportot akkor kapjuk meg, ha az a, b generáló elemekre (1), (2), és (19)-t követeljük meg.

Látható, hogy az $F_{n,0}$ halmaz a következő:

$$F_{n,0} = \left\{ a^k c^l b^m \mid \begin{array}{l} k=0, \quad n \geq l > 0, \quad m=0 \quad \text{vagy} \\ k=0, \quad n \geq l \geq 0, \quad m>0 \quad \text{vagy} \\ k \geq 1, \quad n-1 \geq l \geq 0, \quad m \geq 0 \end{array} \right\}$$

$F_{n,0}$ -ban a műveleti szabály (1) (2) és (19) következménye, és ezek alapján könnyen felírható. Bármely két elem szorzatát azonban egyszerűbb közvetlenül (1), (2) és (19) figyelembe vételével kiszámítani.

Kimutatjuk, hogy $F_{n,0}$ főideálfélcsoport, és ebből a célból megadjuk bal és jobbideálrétegeit:
Ha $i \leq 2n-2$

$$(22) \quad \underline{L}_i = \begin{cases} \{a^k c^l \mid k \geq 1\} & \text{ha } i=2l \quad i \neq 2n-2 \\ \{c^l\} & \text{ha } i=2l-1 \\ \{c^n, a^k c^{n-1} \mid k \geq 1\} & \text{ha } i=2n-2 \end{cases}$$

Ha $i > 2n-2$ és $i - (2n-1) = (m-1)2n + r$ akkor

$$\underline{L}_i = \begin{cases} \{c^l b^m\} & \text{ha } r=2l \\ \{a^k c^l b^m \mid k \geq 1\} & \text{ha } r=2l+1 \quad r \neq 2n-1 \\ \{c^n b^m, a^k c^{n-1} b^m \mid k \geq 1\} & \text{ha } r=2n-1 \end{cases}$$

Ha $i \leq 2n-1$

$$\underline{R}_i = \begin{cases} \{c^l b^m \mid m \geq 1\} & \text{ha } i=2l \\ \{c^l\} & \text{ha } i=2l-1 \quad i \neq 2n-1 \\ \{c^n, c^n b^m \mid m \geq 1\} & \text{ha } i=2n-1 \end{cases}$$

Ha $i > 2n-1$, $i-2n = (k-1)(2n-1) + r$

$$R_i = \begin{cases} \{a^k c^l b^m \mid m \geq 1\} & \text{ha } r = 2l+1, \dots \\ \{a^k c^l\} & \text{ha } r = 2l, \quad r = 2n-2 \\ \{a^k c^{n-1}, a^k c^{n-1} b^m\} & \text{ha } r = 2n-2 \end{cases}$$

Mivel $F_{n,0}$ bal és jobbideálrétegei jólrendezett láncot alkotnak, kapjuk, hogy $F_{n,0}$ főideálfélcsoport. Balideálrétegek, jobbideálrétegek fenti előállításából látható az is, hogy minden Q osztály egyelemű. Nyilvánvaló, hogy $F_{n,0}$ ω -egyszerű főideálfélcsoport, és F homomorf képe. Megjegyezzük, hogy $F_{1,0}$ jobbegységelemes félcsoport.

A 4. ábra $F_{5,0}$ -t mutatja.

$$c.) \quad F_{0,n} \quad (n \geq 1) \quad (c^{n-1} b = c^n b)$$

Az $F_{0,n}$ félcsoportéhoz úgy jutunk el, hogy az a, b generáló elemekre (1) (2) és (2o) teljesülését követeljük meg. $F_{0,n}$ és $F_{n,0}$ egymásnak duálisai. Ezért $F_{0,n}$ -t külön nem vizsgáljuk, mindazon állítások duálisai érvényesek rá, melyeket $F_{n,0}$ -ra kimutattunk.

Az 5. ábra $F_{0,3}$ -t mutatja.

d.) $F_{n,n} \quad (n \geq 1) \quad (ac^{n-1} = ac^n, c^{n-1}b = c^n b)$

Az $F_{n,n}$ félcsoporthoz olymódon juthatunk el, ha az a, b generáló elemekre (1)(2), (19)(20) teljesülését követeljük meg. $F_{n,n}$ elemei a következő alakúak:

$$a^k c^\ell b^m,$$

ahol $\ell \leq n-1$ /de $k=m=\ell=0$ nem állhat, és $k=0, m=0$ esetén $\ell=n$ is fennáll. A szorzásszabály (1)(2)(19)(20) következménye. $F_{n,n}$ balideálrétegei a következők: Ha $i \leq 2n-2$, akkor L_i -t (22) adja meg.

Ha $i > 2n-2$ és ha $i - (2n-1) = (m-1)(2n-1) + r$, akkor

$$L_i = \begin{cases} \{c^\ell b^m\} & \text{ha } r=2\ell \text{ } r \neq 2n-2 \\ \{a^k c^\ell b^m \mid k \geq 1\} & \text{ha } r=2\ell+1 \\ \{c^{n-1} b^m, a^k c^{n-1} b^m\} & \text{ha } r=2n-2 \end{cases}$$

$F_{n,n}$ jobbideálrétegei duálisan kaphatók. Könnyen látható, a bal- illetve jobbideálrétegek megadása alapján, hogy $F_{n,n}$ főideálfélcsoport, és minden Q osztálya egyelemű. Nyilvánvaló, hogy ω -egyszerű, és F homomorf képe.

Megjegyezzük, hogy $F_{4,1}$ egységelemes, és azonos a biciklikus félcsoporthal.

A 6. ábrán $F_{5,5}$, a 7-en $F_{3,3}$ látható. A 12. ábra a biciklikus félcsoporthot mutatja.

$$e.) \quad \underline{F}_n^{(n)} \quad (n \geq 1) \quad /ac^{n-1} b = ac^n b, c^n = c^{n+1} /$$

Az $F_n^{(n)}$ félcsoporthoz úgy jutunk, hogy az a, b generáló elemekre (1), (2), (18), (21) teljesülését követeljük meg.

Az $F_n^{(n)}$ halmaz a következőképpen adható meg:

$$F_n^{(n)} = \left\{ a^k c^l b^m \left| \begin{array}{l} k \geq 1, m \geq 1, 0 \leq l \leq n-1 \\ k=0, m \geq 1 \\ k \geq 1, m=0 \end{array} \right. \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \text{vagy} \\ 0 \leq l \leq n \\ \text{vagy} \end{array} \right\}$$

$$k=0, m=0, 0 < l \leq n$$

A műveleti szabály (1) (2) (18) és (21) következménye.

$F_n^{(n)}$ i -edik balideálrétege a következőképpen áll elő:

Ha $i \leq 2n-1$

$$\underline{L}_i = \left\{ \begin{array}{ll} \{a^k c^l \mid k \geq 1\} & \text{ha } i = 2l \\ \{c^l\} & \text{ha } i = 2l-1 \quad i \neq 2n-1 \\ \{c^n, a^k c^{n-1} \mid k \geq 1\} & \text{ha } i = 2n-1 \end{array} \right.$$

Ha $l \geq 2n$ és $l-2n = (m-1)2n + r$, akkor

$$\underline{L}_i = \begin{cases} \{ c^l b^m \} & \text{ha } r=2l \\ \{ a^k c^l b^m \mid k \geq 1 \} & \text{ha } r=2l+1, r \neq 2n-1 \\ \{ c^n b^m, a^k c^{n-1} b^m \mid k \geq 1 \} & \text{ha } r=2n-1 \end{cases}$$

A jobbideálrétegek a dualitás alapján könnyen megadhatók. Mivel $F_n^{(n)}$ balideálrétegei /jobbideálrétegei/ jólrendezett láncot alkotnak, kapjuk, hogy főideálfélcsoport. A fentiekből az is nyilvánvaló, hogy $F_n^{(n)}$ minden Q osztálya egyelemű. Triviális, hogy F ω -egyszerű, és F homomorf képe.

A 8. ábra $F_4^{(4)}$ -t, a 9. $F_3^{(3)}$ -t mutatja.

$$f.) \quad \underline{F_n^{(n+1)}} \quad (n \geq 1) \quad /ac^{n-1}b = ac^n b/$$

/A felső $n+1$ arra utal, hogy (18) $(n+1)$ -re teljesül/.

Az $F_n^{(n+1)}$ félcsoportot akkor kapjuk meg, ha az $\underline{a}$, $\underline{b}$ generáló elemekre (1), (2), (21) teljesülését követeljük meg.

$$F_n^{(n+1)} = \left\{ a^k c^l b^m \mid \begin{array}{l} k \geq 1, m \geq 1, 0 \leq l \leq n-1 \quad \text{vagy} \\ k \geq 1, m=0 \\ k=0, m \geq 1 \\ k=0, m=0, 0 < l \leq n+1 \end{array} \right\}$$

$F_n^{(n+1)}$ -ben a műveleti szabály (1)(2)(21) következménye.

$F_n^{(n+1)}$ i -edik balideálrétege a következőképpen adható meg:

Ha $i \leq 2n$

$$\underline{L}_i = \begin{cases} \{a^k c^l \mid k \geq 1\} & \text{ha } i=2l \quad i \neq 2n \\ \{c^l\} & \text{ha } i=2l-1 \\ \{c^{n+1}, a^k c^n \mid k \geq 1\} & \text{ha } i=2n \end{cases}$$

Ha $i > 2n$ és $i - (2n+1) = (m-1) \cdot 2n + r$ akkor

$$\underline{L}_i = \begin{cases} \{a^k c^l b^m \mid k \geq 1\} & \text{ha } r=2l+1 \quad r \neq 2n-1 \\ \{c^l b^m\} & \text{ha } r=2l \\ \{c^n b^m, a^k c^{n-1} b^m \mid k \geq 1\} & \text{ha } r=2n-1 \end{cases}$$

A jobbideálrétegek duálisan állnak elő.

Az eddigiekből következik, hogy $F_n^{(n+1)}$ főideál-félcsoport, minden Q osztálya egyelemű. Nyilvánvaló, hogy ω -egyszerű, és F homomorf képe.

A 10. ábra $F_4^{(5)}$ -t, a 11. $F_2^{(3)}$ -t mutatja.

Látható, hogy a (18) - (21) követelményeknek a fentiektől különböző független rendszere nem adható meg, F -nek csakis a felsorolt ω -egyszerű homomorf képei léteznek.

A tárgyalt főideálfélcsoportoknak néhány közös jellemzőjét említhetjük meg:

a.) mindegyikben a bal és jobbideálrétegek ω rendtípusú halmazt alkotnak.

b.) mindegyiknek vannak idempotens elemei.
/Pl. F_n -ben c^n , $a c^n b$, $a^2 c^n b^2$, $F_{n,0}$ -ban c^n ,
 $a c^{n-1} b$, $a^2 c^{n-1} b^2$, ... stb./

Az a.) b.) tulajdonság egyike sem teljesül F -re.

A vizsgált félcsoport-típusokba tartozó egyes főideálfélcsoportokra a 13. ábra mutatja azt, hogy egy megadott félcsoportnak melyek homomorf képei, illetve, melyeknek homomorf képeként áll elő.

Ha egy félcsoportból előremutató nyilakon keresztül el tudunk jutni egy másik félcsoportba, akkor az elsőnek a második homomorf képe.

A homomorf leképezések kiindulópontja F , végpontja a biciklikus félcsoport.

9. §. Néhány főideálfélcsoport-példa

Ebben a §-ban néhány konkrét főideálfélcsoportot adunk meg, melyek az eddigi vizsgálat alapján felvethető egyes kérdésekre adnak választ.

Az első probléma az, hogy a 15. tételben megadott rétegezett ideálréteg-típusok közül mindegyik létezik-e?

28. tétel. A 15. tételben megadott kvázifőideálfélcsoport rétegezett ideálréteg-típusok mindegyike már főideálfélcsoportoknál előfordul.

A bizonyítás főideálfélcsoportok megadásával történik. Ezek mindegyike egyszerű főideálfélcsoport és teljesíti még azt a követelményt is, hogy minden Q osztálya egyelemű.

A 15. tételben lévő a.) esetnek eleget tesz az F főideálfélcsoport és annak minden ω -egyszerű homomorf képe az egységelemes, bal- ill. jobbegységelemes félcsoportokat kivéve.

A d.) lehetőségre példa F , az f -re pedig a biciklikus félcsoport.

A dualitás miatt elegendő a c.) illetve e.) követelménynek eleget tevő főideálfélcsoportot megadni.

A 15. tételben c.)-vel jelzett követelményeket teljesítő $F^{(c)}$ félcsoporthoz a következőképpen juthatunk.

Tekintsük az f, g, a generálóelemeket. Ezekre a következők teljesülését kívánjuk meg: /bevezetve az $fg=b, ba=c$ jelölést/:

- (1) $c^2=c$
- (2) $bc=b$
- (3) $ca=a$
- (4) $gc=g$
- (5) $fa=fc=fb=f$
- (6) $ag=cg=bg=g$

$F^{(c)}$ elemei

- (7) $g^k a^l b^m f^n$

illetve

- (8) $g^k a^l c^m b^n f^o$

alakban állnak elő, ahol $k, l, m, n \geq 0$, de $k=l=m=n=0$ csak (8) alakú előállításnál lehetséges, továbbá ha $l=0$ és $l \geq 1$ akkor csak (7) alakú elemek vannak.

$/g^0, a^0, b^0, f^0$ -t üres szimbólumnak tekintjük./

A szorzásszabályt $F^{(c)}$ -ben (1) - (6) határozza meg.

Az asszociativitás ellenőrzése számos esetmegkülönböztetéssel járó, de nem nehéz feladat. Könnyen bizonyítható, hogy $F^{(c)}$ egyszerű félcsoport.

Az $F^{(c)}$ félcsoporthat a 14. ábra mutatja. Az ábra és annak értelemszerű folytatása alapján megadható $F^{(c)}$ valamennyi balideálrétege, jobbideálrétege, és azok sorrendje. Ennek alapján belátható, hogy főideálcsoport, és innen következik az is, hogy minden Q osztálya egyelemű.

$F^{(c)}$ -ben a maximális balideálréteg elemei $a, a^2, a^3, \dots, ga, ga^2, ga^3, \dots, g^2a, g^2a^2, g^2a^3, \dots$ a maximális jobbideálréteg elemei $f, f^2, \dots, f^n, \dots$

A 15. tételben szereplő c.) pontbeli követelmények teljesülnek, ugyanis: $b_1 = B_1 = f$ $a_1 = a$
 $A_{\omega+1} = ga^2$, és

$$f \cdot a = f$$

$$f \cdot ga^2 = a$$

fennáll.

A 15. tételbeli e.) pont követelményeinek eleget tevő $F^{(e)}$ főideálfélcsoporthat a következőképpen kaphatunk.

Tekintsük f, g, a , generálóelemeket.

Ezekre a következők teljesülését kívánjuk meg:

/bevezetve az $fg=b$, $ba=e$; jelölést/:

- (9) $a \cdot e_j = a$ $e_j a = a$
 (10) $be_j = b$ $e_j b = b$
 (11) $g \cdot e_j = g$ $e_j g = g$
 (12) $fe_j = f$
 (13) $ag = bg = g$
 (14) $fa = fb = f$

$F^{(2)}$ elemei egyrészt

$$(15) \quad g^k a^l b^m f^n$$

másrészt

$$(16) \quad e_j f^n$$

alakban állnak elő, ahol $k, l, m, n \geq 0$ de $k=l=m=n=0$

(15).ben nem lehetséges, (16)-nál $n=0$ előfordul.

$/g^0, a^0, b^0, f^0$ -t üres szimbólumoknak tekintjük/.

$F^{(2)}$ -ben a szorzásszabályt (9) - (14) határozza meg.

Az asszociativitás ellenőrzése hosszadalmas, de nem nehéz feladat. Igen könnyű az egyszerűség bebizonyítása.

Az $F^{(2)}$ félcsoporthot a 15. ábra mutatja. Részben az ábra, részben annak értelemszerű folytatása alapján megadható $F^{(2)}$ valamennyi balideálrétege, jobbideálrétege, és azok megfelelő sorrendje, és így belátható, hogy főideál-

félcsoport. Innen következik az is, hogy minden Q osztálya egyelemű.

A maximális balideálréteg elemei $F^{(e)}$ -ben az $e_j, a, a^2, \dots, ga, ga^2, ga^3, \dots, g^2a, g^2a^2, g^2a^3, \dots$, a maximális jobbideálrétegé pedig az $f, f^2, \dots$ elemek.

A 15. tétel e.) pontja $F^{(e)}$ -re valóban teljesül, mert $b_1 = B_1 = f, a_1 = a, A_0 = e_j, A_\omega = ga$ és

$$f \cdot a = f$$

$$f \cdot ga = e_j \quad \text{fennáll.}$$

Ezzel a 20. tételt bebizonyítottuk.

Nagyon valószínűnek látszik, hogy a 15. tétel c.) illetve e.) pontjának nemcsak a fenti főideálfélcsoportokkal megadott ideálrétegek tesznek eleget.

A § további részében még a következő problémával foglalkozunk.

Látható, hogy $F^{(c)}, F^{(e)}$ olyan egyszerű főideálfélcsoportok, melyeknél a maximális balideálréteg elemei ω^2 rendtipusú rendezett halmazt alkotnak. Felvethető az a kérdés, hogy létezik-e olyan egyszerű főideálfélcsoport, melynek ideálrétege a legfontosabbnak tekinthető típusba tartozik, és maximális bal- vagy maximális jobbideálrétegének Q osztályai ω -nál nagyobb rendtipusú halmazt alkotnak. /A legfontosabb ideálréteg típusnak a 15.) tételbeli a.) pontnak megfelelőt vehetjük./

Ilyen félcsoporthoz létezik, és egy ilyen, melyet $F^{(a)}$ -val jelölünk, a következőképpen adhatunk meg:

Vegyük az f, g, a, b generálóelemeket, melyekre a következők teljesülését követeljük meg:

/bevezetve a $ba=c$ jelölést/:

$$(17) \quad c^2 = c \quad ca=a, \quad bc=b$$

$$(18) \quad fg=c$$

$$(19) \quad ag=bg=cg=g$$

$$(20) \quad fa=fb=fc=f$$

$$(21) \quad gc=g$$

$$(22) \quad cf=f$$

$F^{(a)}$ elemei egyrészt

$$(23) \quad g^k a^l c^m f^n$$

másrészt

$$(24) \quad g^k a^l c^m b^n f^n$$

alakban állnak elő, ahol $k, l, m, n \geq 0$, de $k=l=m=n=0$ csak (24) -nél lehetséges, továbbá ha $l=0$ vagy $m=0$ akkor csak (23) alakú előállítás adható meg.

A szorzásszabályt (17) - (22) határozza meg.

Az asszociativitás, egyszerűség könnyen ellenőrizhető.

$F^{(a)}$ -t a 16. ábra mutatja.

Az ábra és annak értelemszerű folytatása alapján megadható $F^{(a)}$ valamennyi balideálrétege, jobbideálrétege, és azok sorrendje. Innen következik, hogy $F^{(a)}$ főideálfélcsoport, és minden Q osztálya egyelemű.

A maximális balideálréteg elemei $a, a^2, \dots$
 $ga, ga^2, \dots$ $g^2a, g^2a^2, \dots$, a maximális jobbideálréteg elemei $b, b^2, \dots, bf, bf^2, \dots, bf^2, b^2f^2, \dots$.

Látható, hogy mind a két rendezett halmaz ω^2 rendtipusú.

Hasonló konstrukció megadható egységelemes esetben is.

Jelöljük az f, g, a, b , elemek által generált félcsoportot $F^{(f)}$ -el. A generáló elemekre az

$$(25) \quad f g = b a = e$$

$$(26) \quad f a = f b = f$$

$$(27) \quad a g = b g = g$$

teljesülését kívánjuk meg, ahol e a félcsoport egységeleme.

$$F^{(f)} = \left\{ g^k a^l b^m f^n \mid k, l, m, n \geq 0, \text{ és } g^0 = f^0 = a^0 = b^0 = e \right\}$$

A műveleti szabály (25) - (27) következménye. Az asszociativitás, az egyszerűség, $F^{(p)}$ főideál-félcsoport volta, könnyen bebizonyítható. Nyilvánvaló, hogy minden Q osztály egyelemű.

A maximális balideálréteg elemei

$$e, a, \dots \quad g, ga, ga^2, \dots \quad g^2, g^2 a, g^2 a^2, \dots$$

a maximális jobbideálrétegé pedig

$$e, b, \dots \quad f, bf, b^2 f, \dots \quad f^2, b f^2, b^2 f^2, \dots$$

Látható, hogy mind a két halmaz ω^2 rendtipusú. $F^{(p)}$ -t a 17. ábra mutatja.

Megjegyezzük, hogy $F^{(p)}$ mintegy a biciklikus félcsoport "folytatásának" tekinthető.

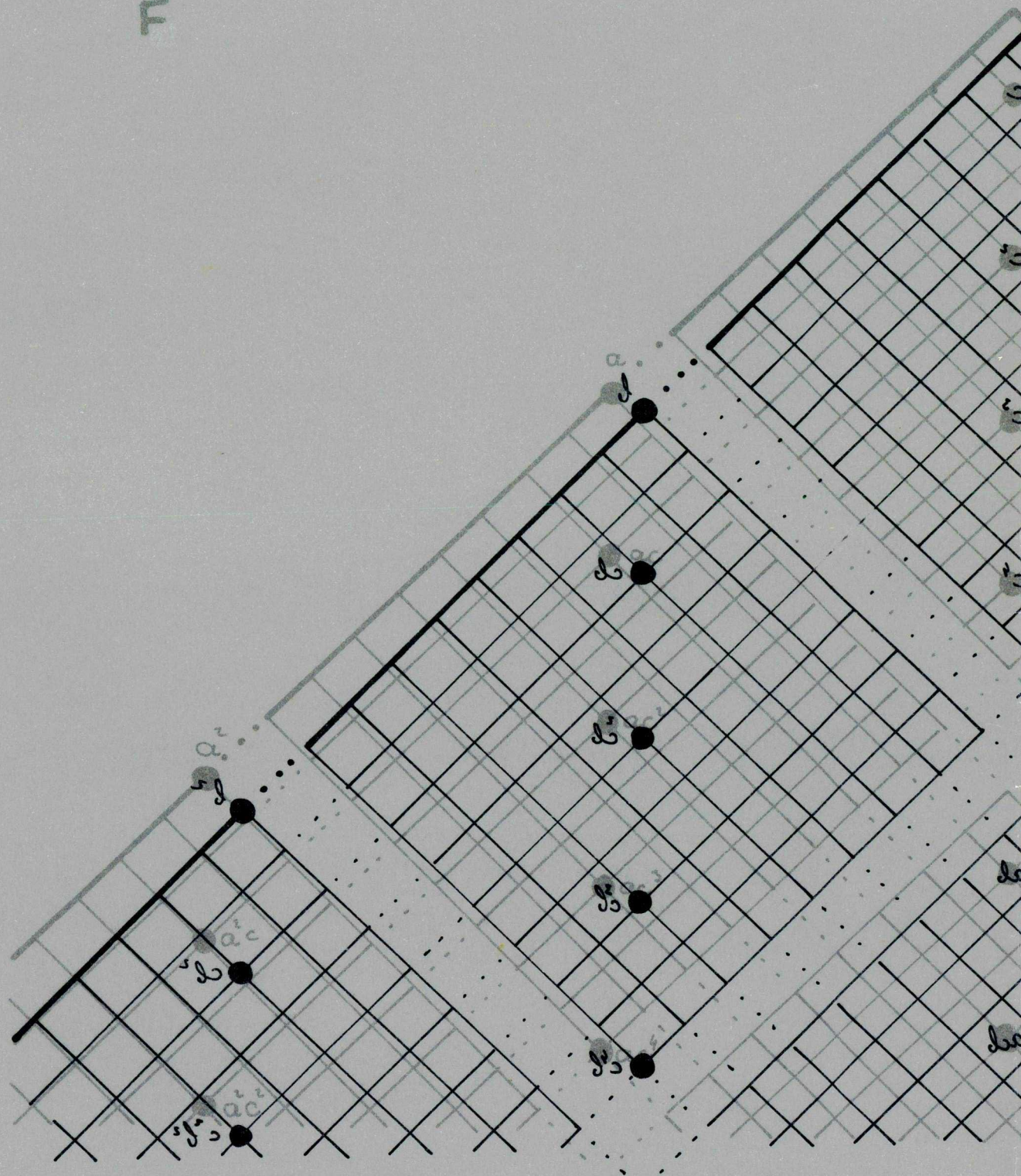
IRODALOMJEGYZÉK

- [1] A. H. Clifford, Semigroups without nilpotent ideals.
Amer. J. Math. 71 (1949), 834-844.
- [2] A. H. Clifford and G. B. Preston, The algebraic theory of semigroups. Vol. I.
(Providens 1961)
- [3] J. A. Green, On the structure of semigroups.
Annals of Math. 54 (1951), 163-172.
- [4] N. Jacobson, Lectures in abstract algebra. Vol. I.
(New York 1951)
- [5] Lajos Sándor, A félcsoporthok növelő elemeiről
MTA III. Osztályának Közleményei.
15 (1965) 3. 273-287.
- [6] Е. С. Ляпин, Увеличительные элементы ассоциативных систем. Уч. зап. Лен. Гос. пед. ин-та им. Герцена 89 (1953) 55-66.
- [7] Е. С. Ляпин, Обратимость элементов в полугруппах.
Уч. зап. Лен. Гос. пед. ин-та им. Герцена 166 (1958) 65-74.
- [8] Е. С. Ляпин, Полугруппы (Москва 1960)
- [9] L. Megyesi und G. Pollák, Über die Struktur der Hauptidealhalbgruppen I.
Acta Sci. Math., 29 (1968), 261-270.

- [10] D. D. Miller and A. H. Clifford, Regular D-classes in semigroups. Trans. Amer. Math. Soc. 82 (1956), 270-280.
- [11] O. Steinfield, Über die Quasiideale von Halbgruppen, Publ. Math. Debrecen 4. (1956) 262-275.

FÜGGELÉK

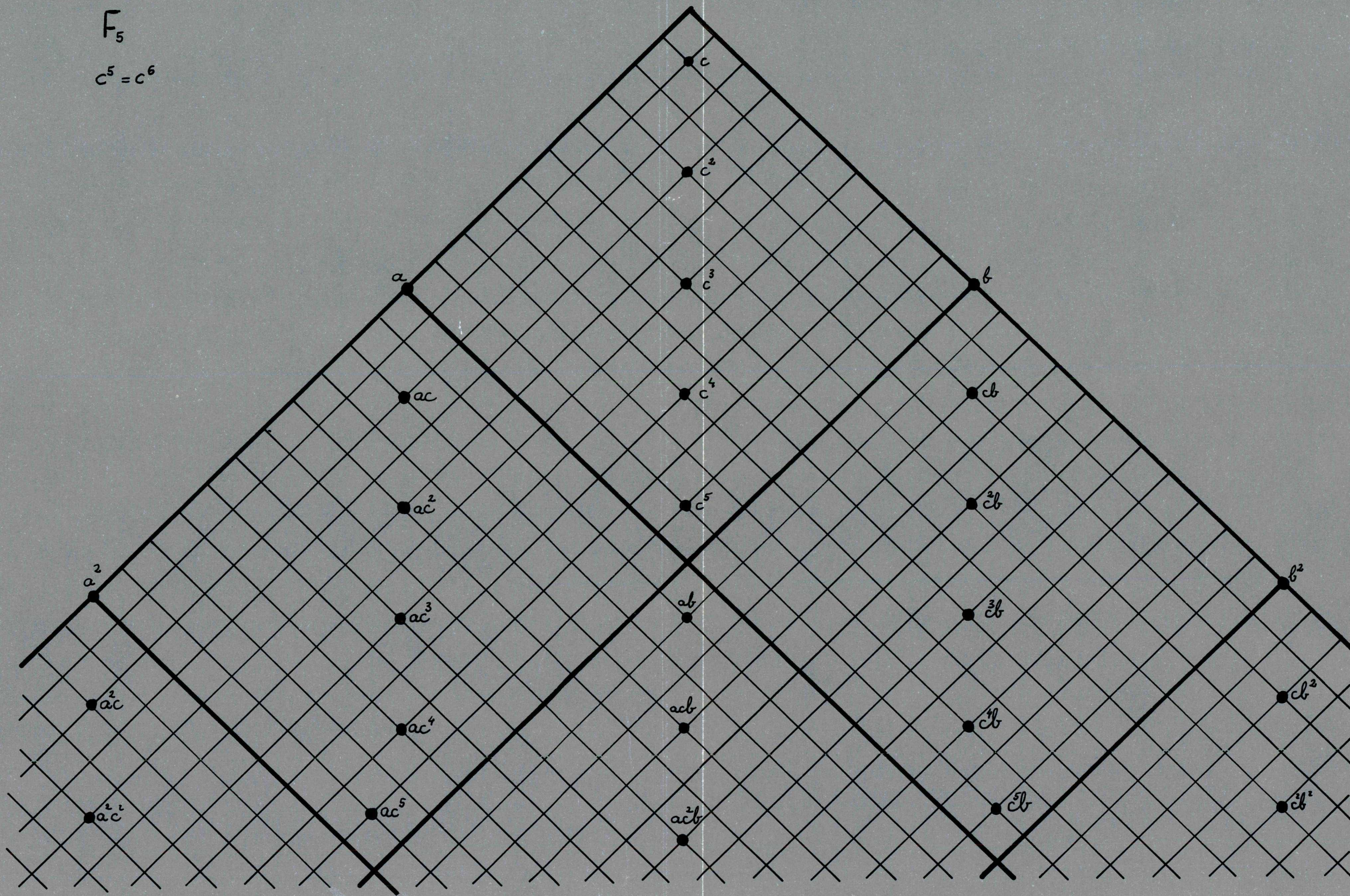
F



1. abra.

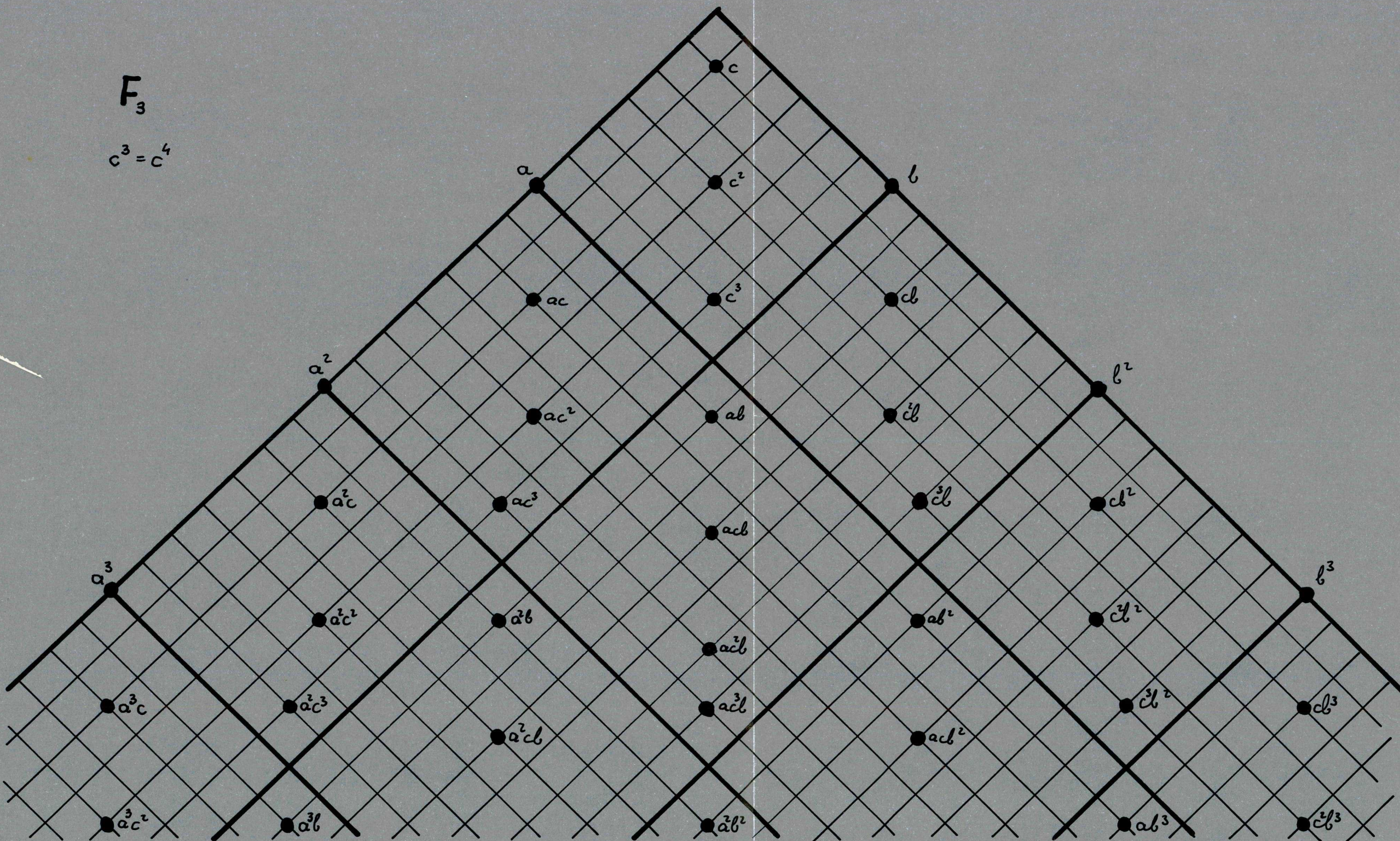
F_5

$$c^5 = c^6$$

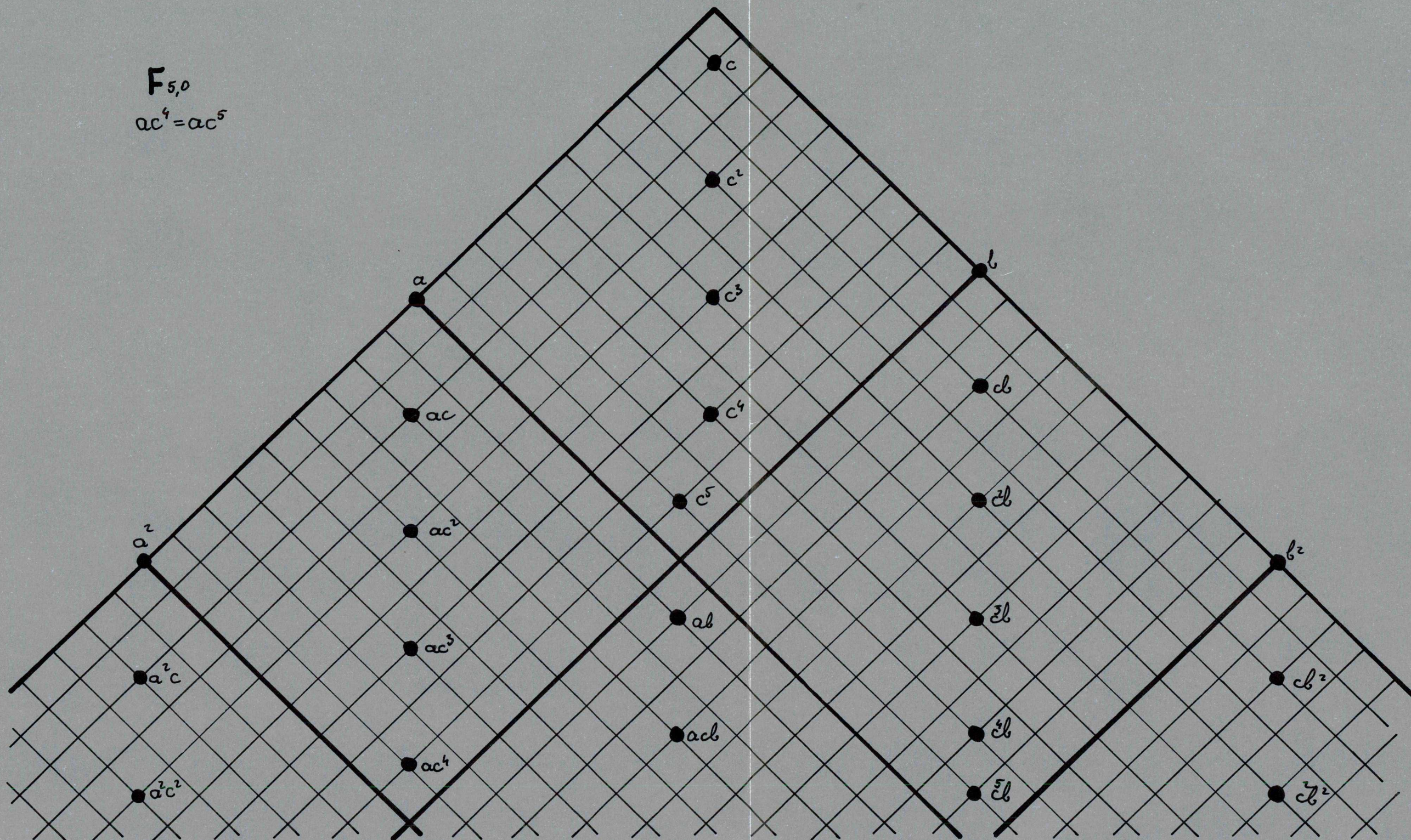


F_3

$$c^3 = c^4$$

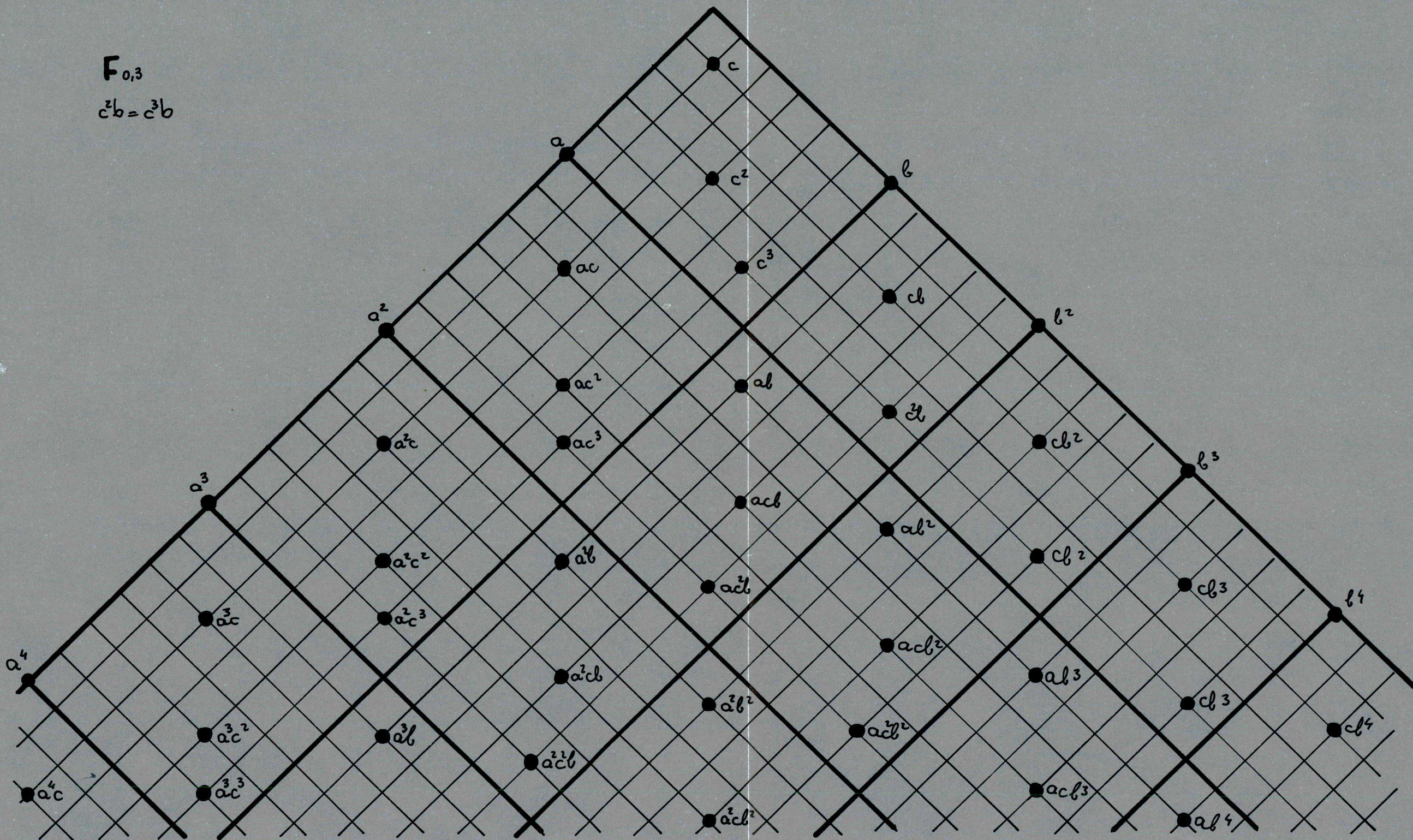


$F_{5,0}$
 $ac^4 = ac^5$



4. ábra.

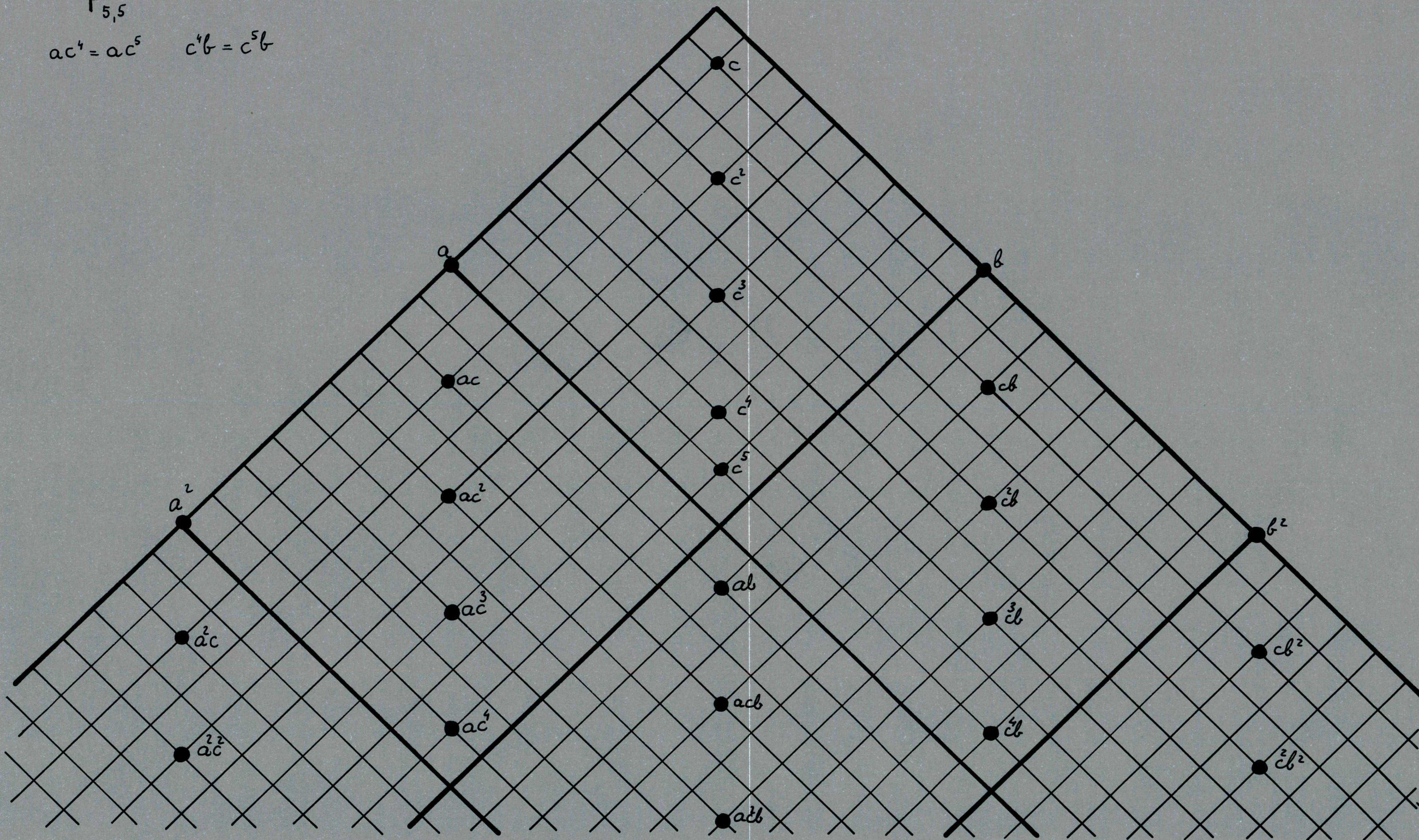
$F_{0,3}$
 $c^2b = c^3b$



5. ábra.

$$F_{5,5}$$

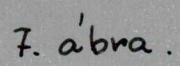
$$ac^4 = ac^5 \quad c^4b = c^5b$$

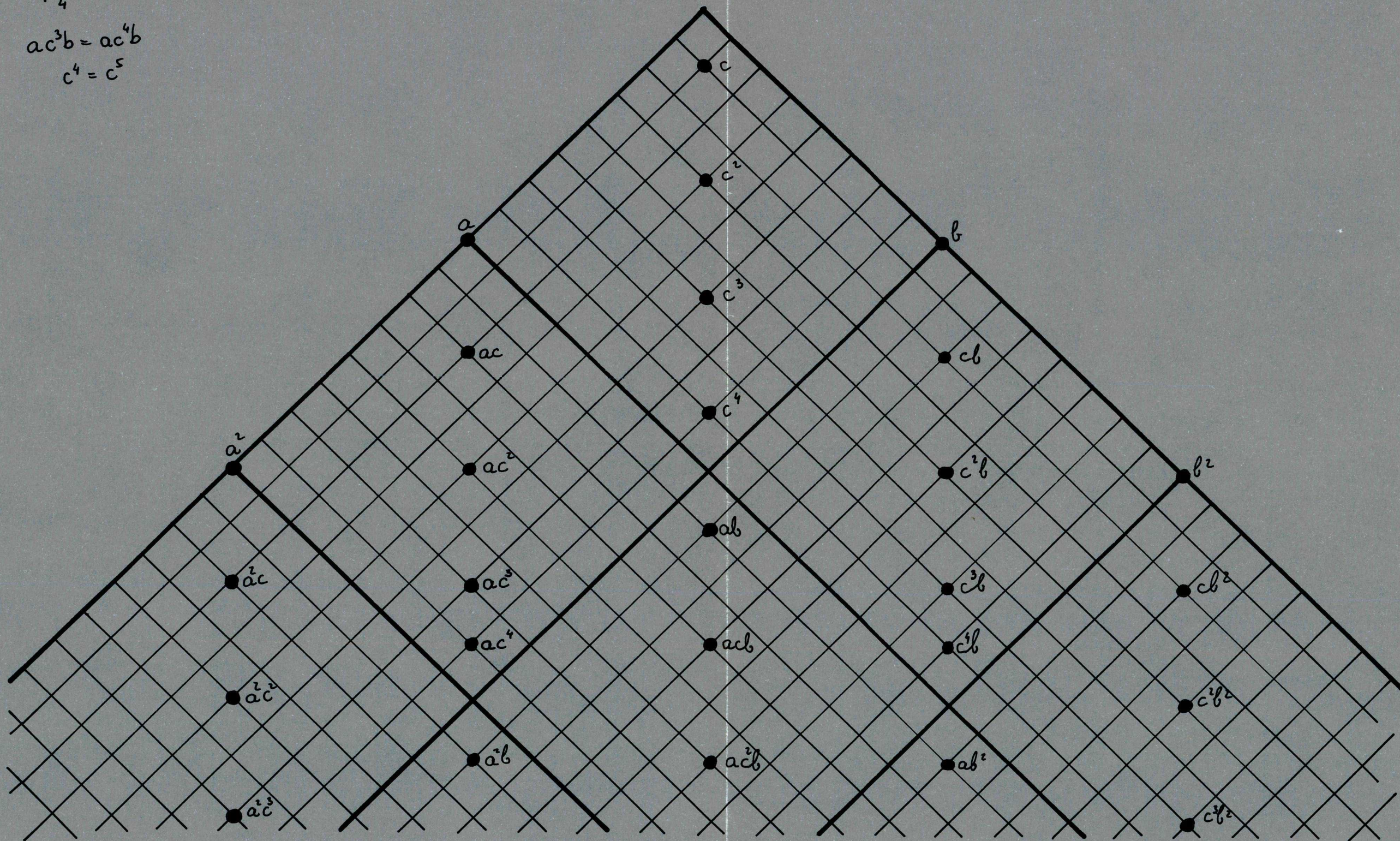


F 3.3

$$ac^2 = ac^3$$

$${}^2\mathcal{L} = {}^3\mathcal{L}$$

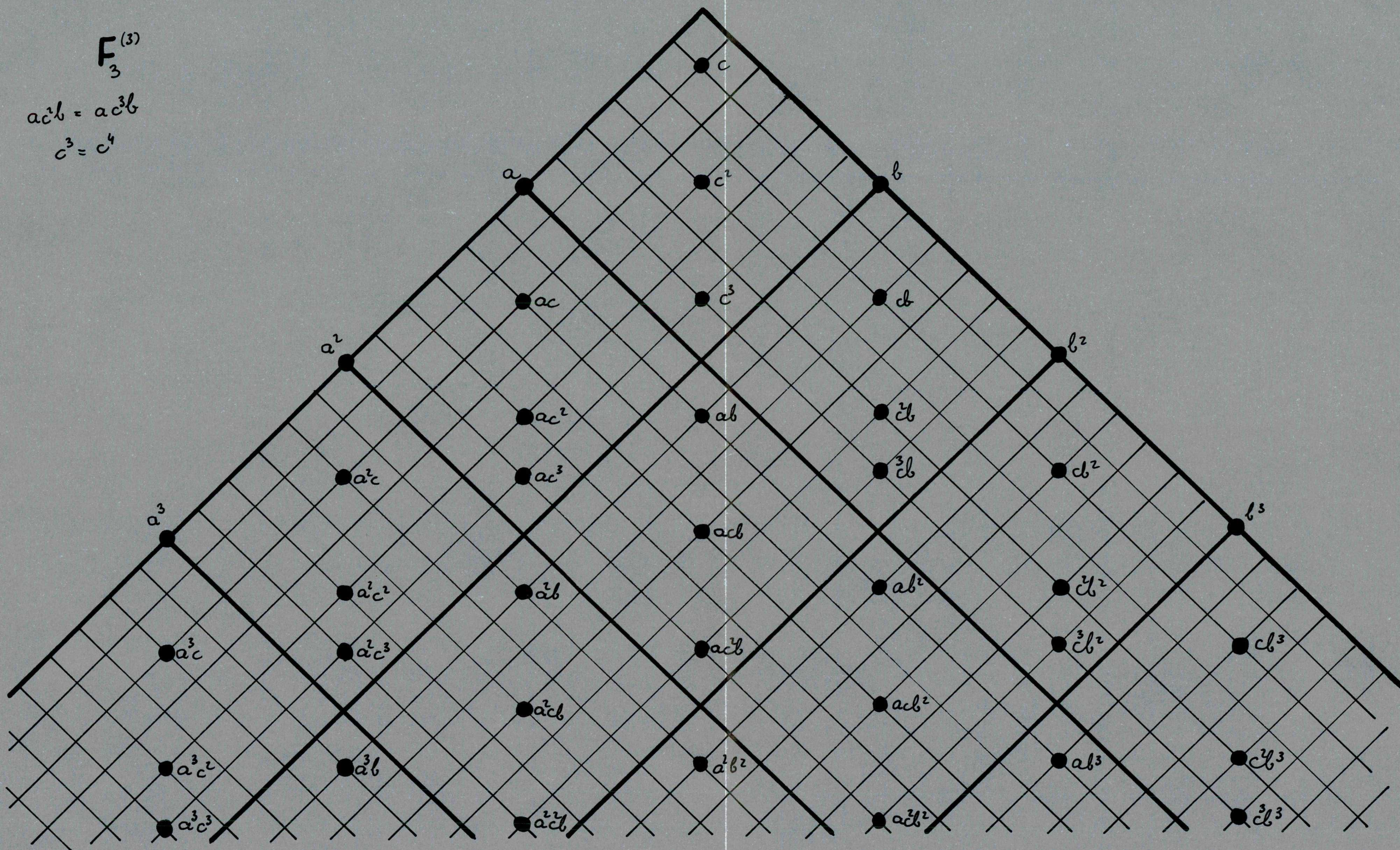


$$F_4^{(4)}$$
$$ac^3b = ac^4b$$
$$c^4 = c^5$$


$$F_3^{(3)}$$

$$ac^2b = ac^3b$$

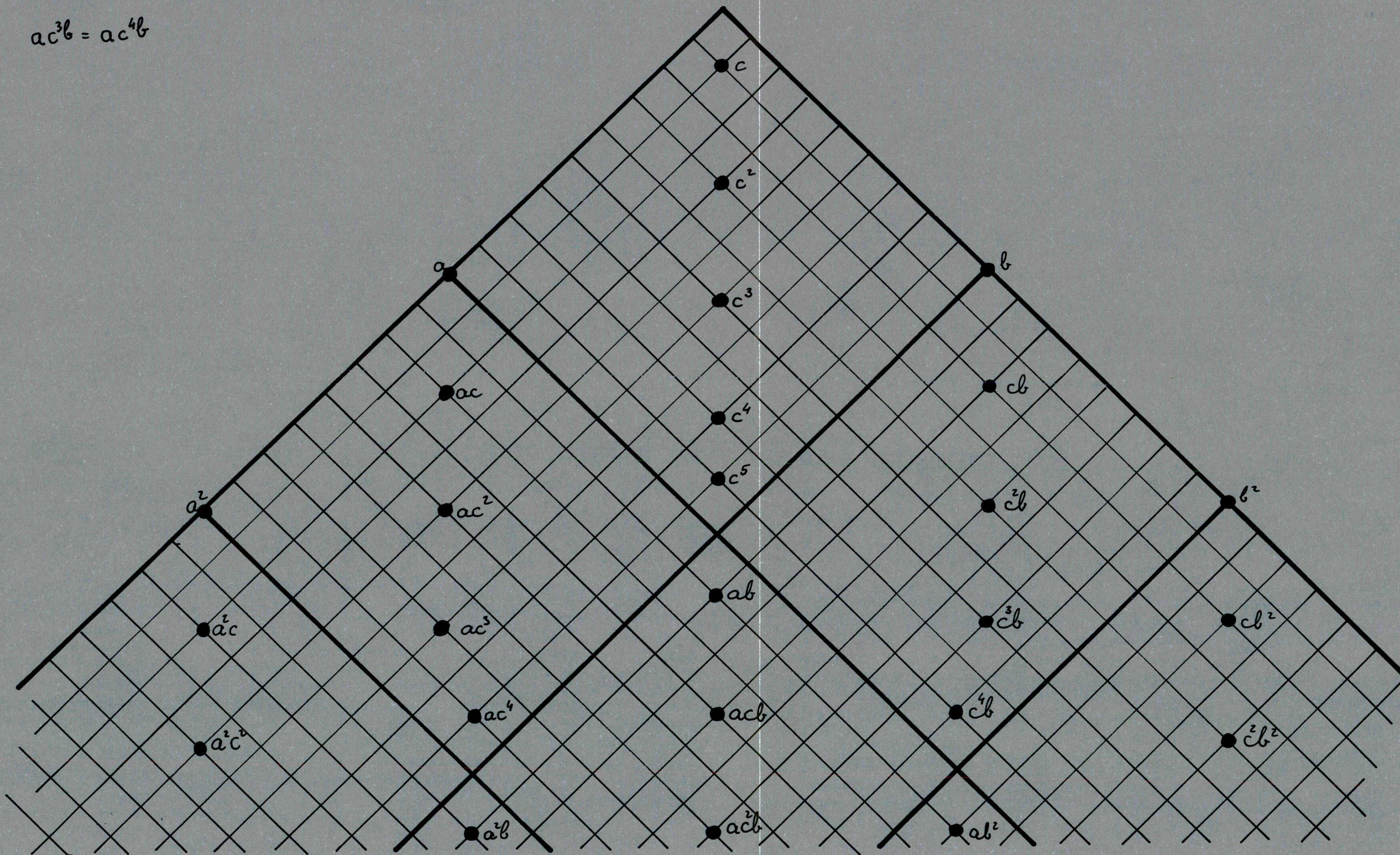
$$c^3 = c^4$$



g. ábra.

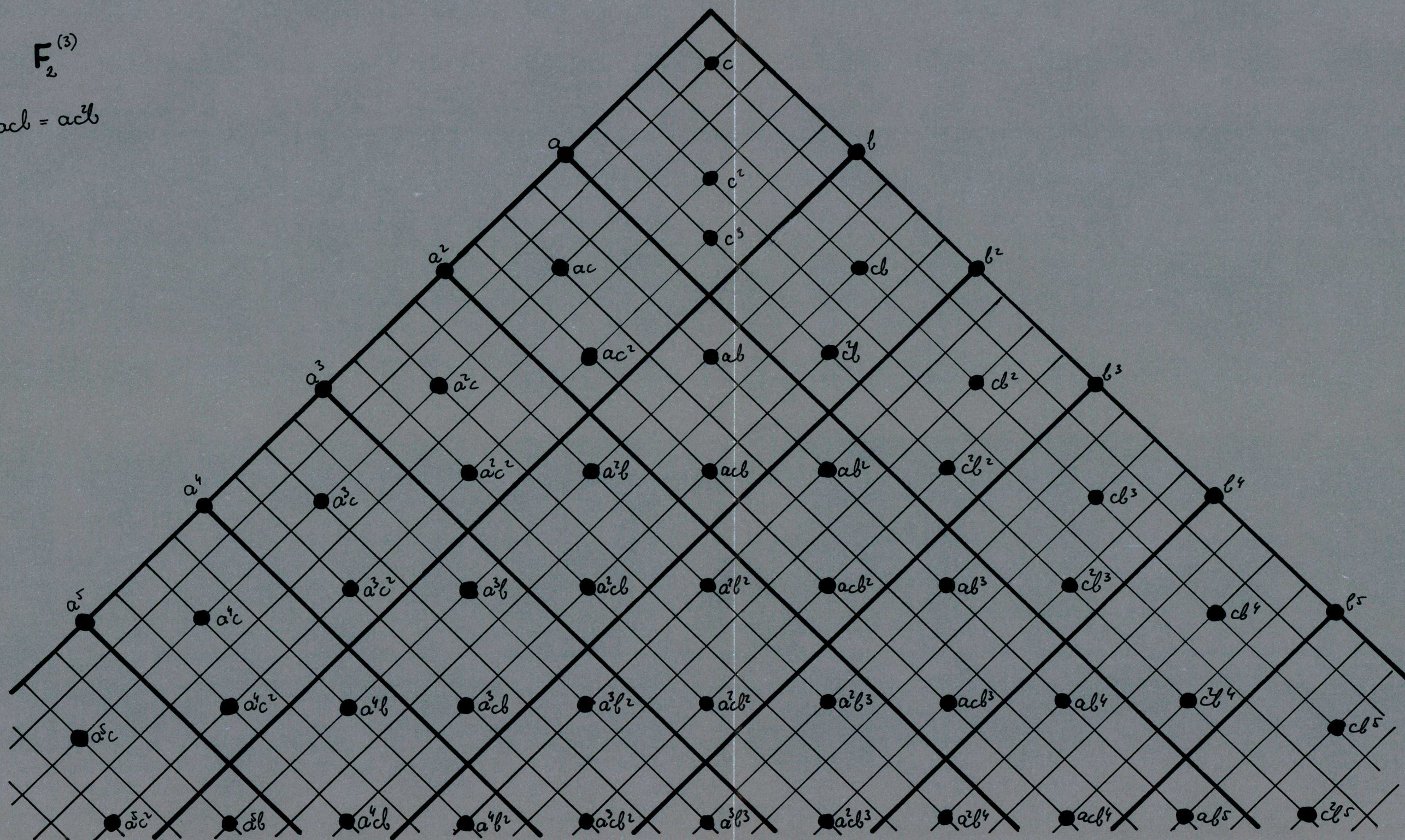
$$F_4^{(5)}$$

$$ac^3b = ac^4b$$

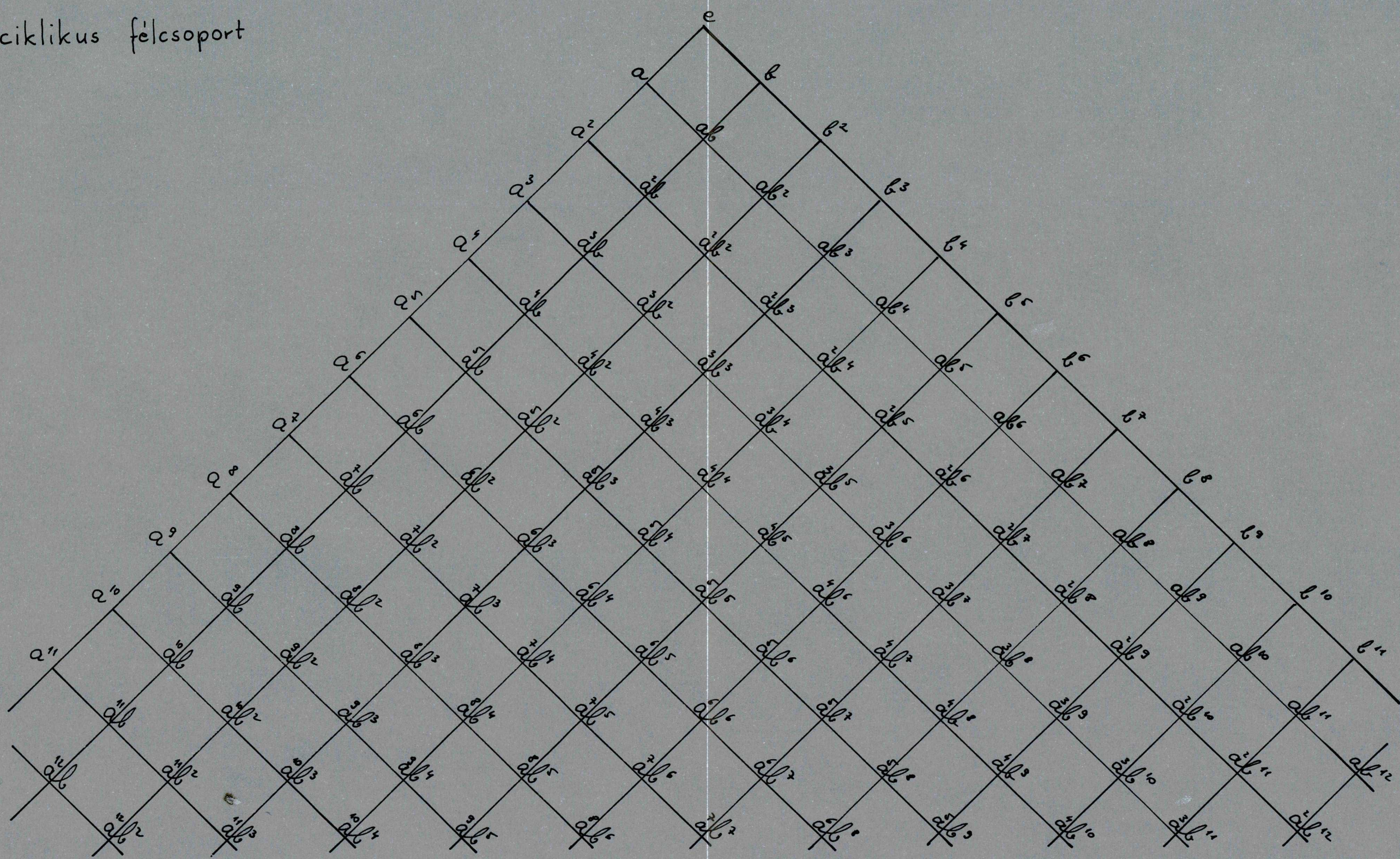


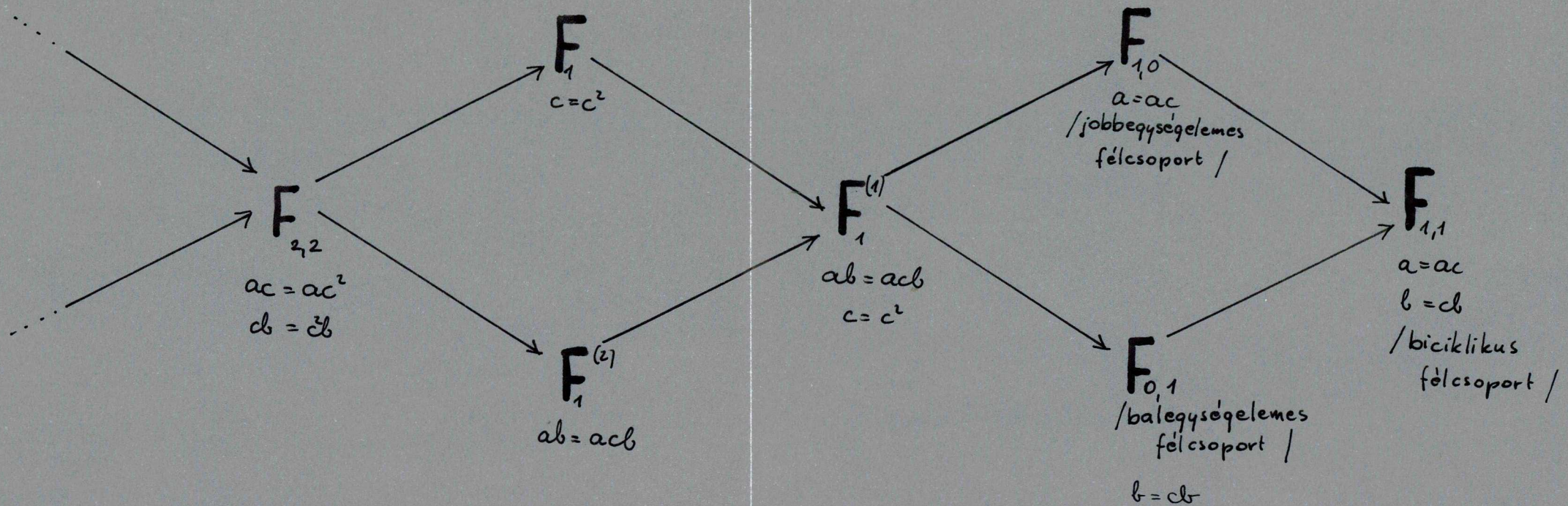
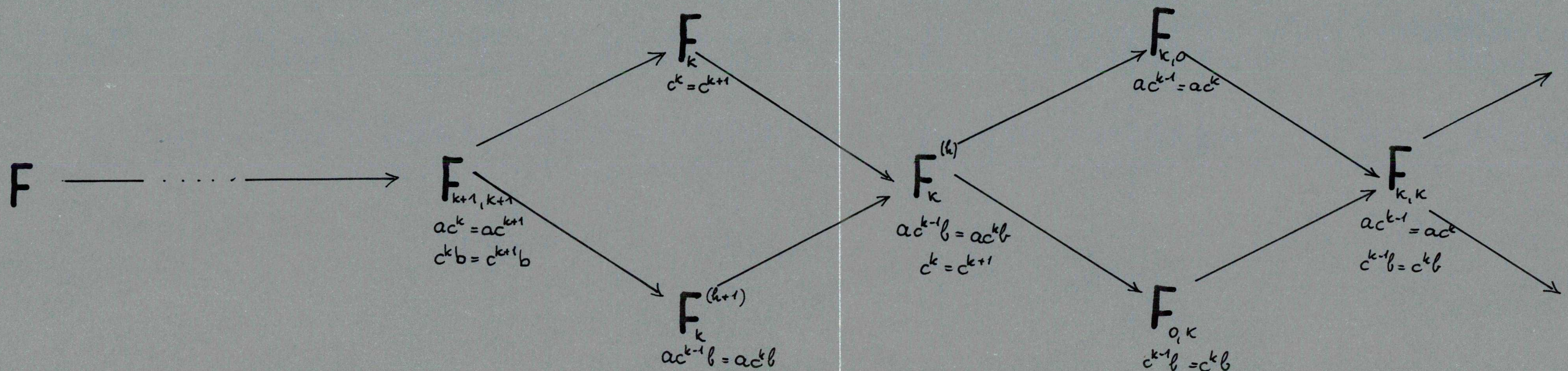
$$F_2^{(3)}$$

$$acb = ac^2b$$



Biciklikus felcsoport





F^(c)

$$ba=c$$

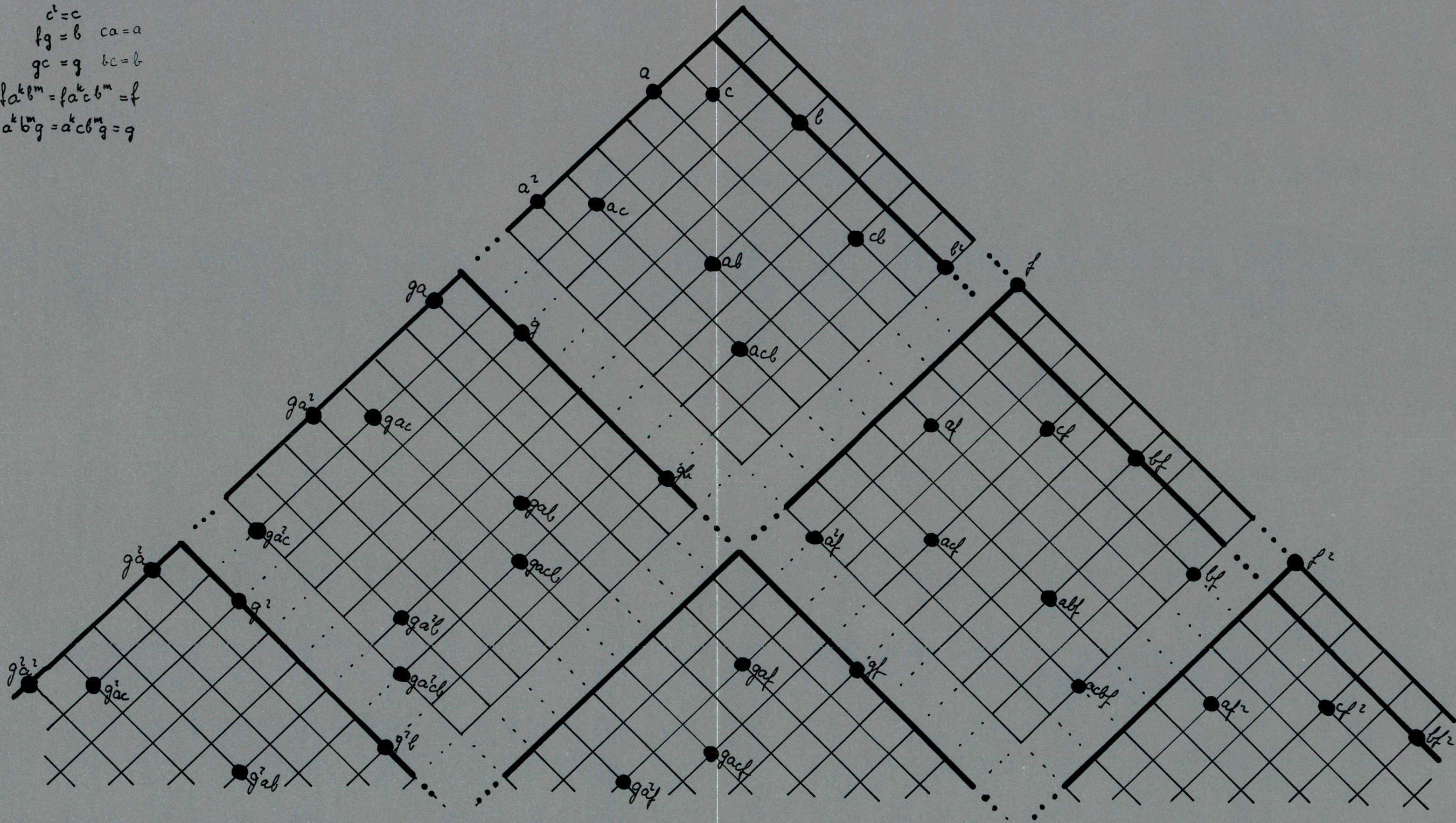
$$c^t=c$$

$$fg=b \quad ca=a$$

$$gc=g \quad bc=b$$

$$fa^kb^m = fa^kc^m = f$$

$$a^kb^mg = a^kc^mg = g$$



$F^{(e)}$

$ba = e_j$

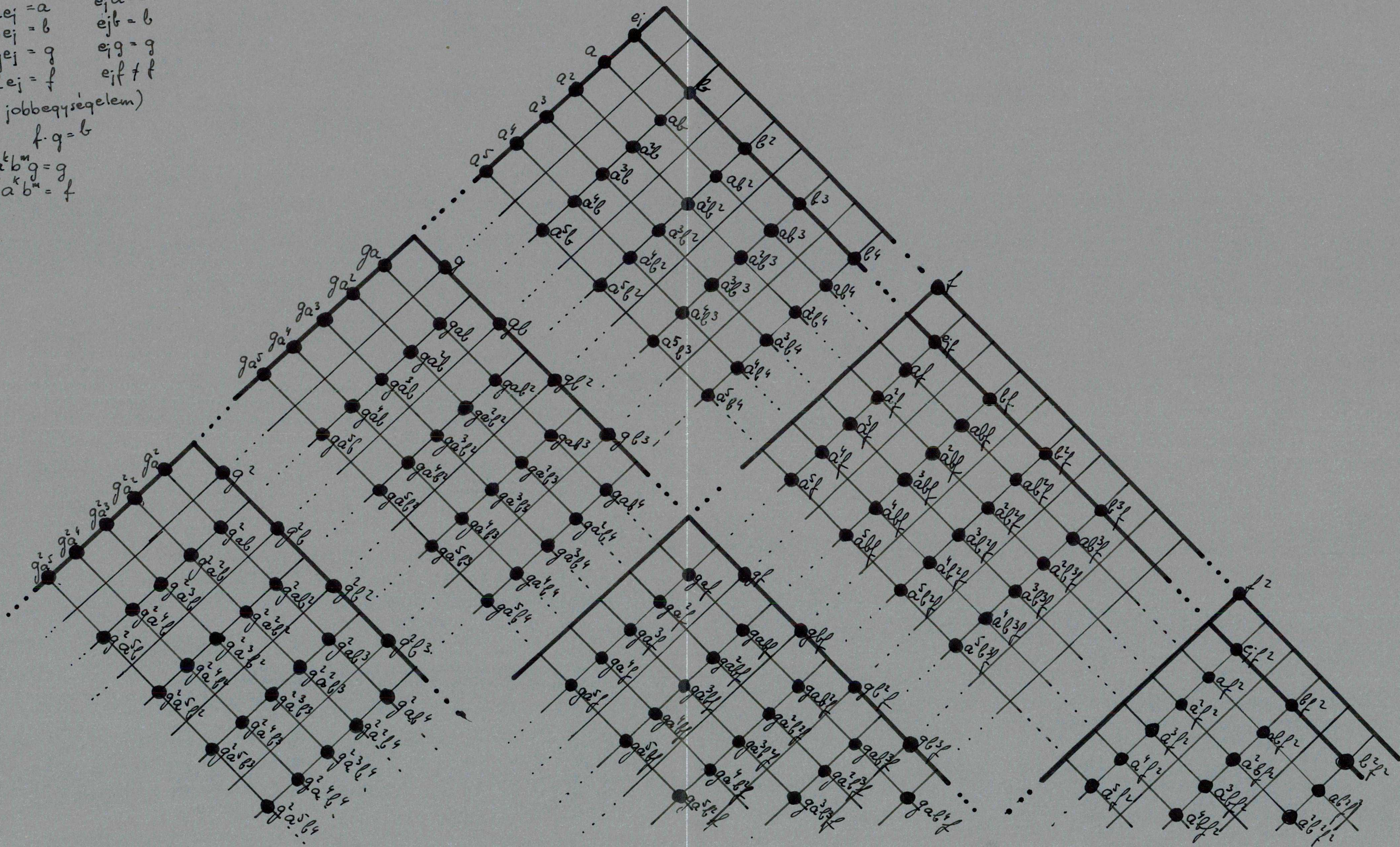
$ae_j = a$	$e_j a = a$
$be_j = b$	$e_j b = b$
$ge_j = g$	$e_j g = g$
$fe_j = f$	$e_j f = f$

(e_j jobbtagyságelem)

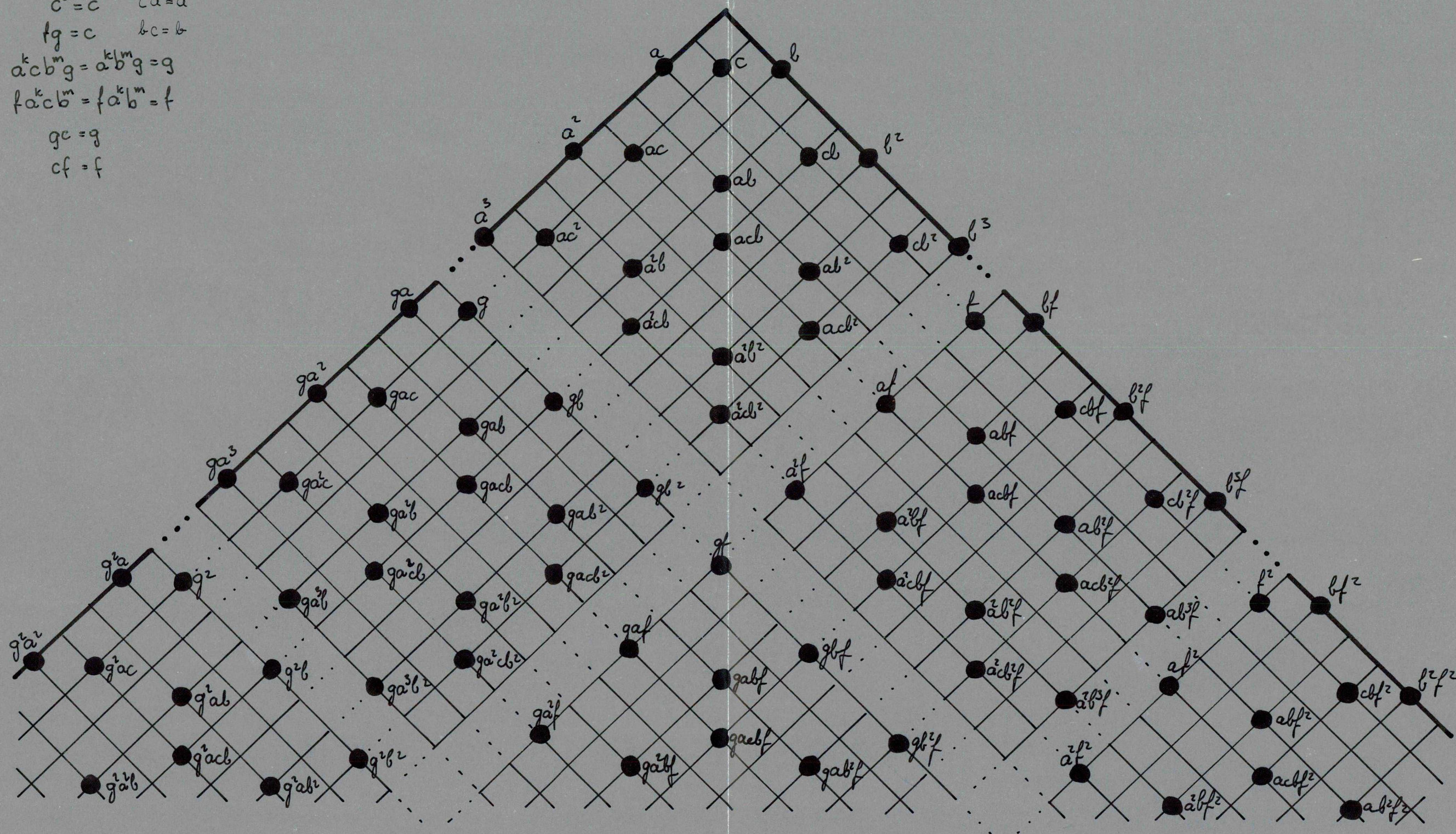
$f \cdot g = b$

$a^k b^m g = g$

$f a^k b^m = f$



$$\begin{aligned}
 &F^{(a)} \\
 &ba=c \\
 &c^2=c \quad ca=a \\
 &fg=c \quad bc=b \\
 &a^k c b^m g = a^k b^m g = g \\
 &f a^k c b^m = f a^k b^m = f \\
 &gc=g \\
 &cf=f
 \end{aligned}$$



$F(f)$
 $fg = ba = e$
 $|e \text{ egyszerűen}|$
 $fa = fb = f$
 $ag = bg = g$

