EGY GRÁF k-FÁINAK ELŐÁLLITÁSÁRÓL

Doktori értekezés

Készitette

PÁVÓ IMRE

JÓZSEF ATTILA TUDOMÁNYEGYETEM TERMÉSZETTUDOMÁNYI KARA

1968.

T A R T A L O M J E G Y Z É K

B E V E Z E T É S

A villamos hálózatok elméletében az utóbbi évtizedben elterjedtek a gráfelmélet módszerei. Ezt az elterjedést három körülmény tette lehetővé: Az egyik körülmény egy olyan vizsgálati módszer kifejlesztésének szükségessége, amely alkalmazásával lehetséges a tanulmányozandó hálózat topológiájának, és a hálózatban szereplő áramköri elemek tulajdonságainak szétválasztása. A másik körülmény abból adódik, hogy sikerült számos villamos hálózatelméleti tételt olyan formulában megfogalmazni, amelynek alkalmazása gráfelméleti ismereteket kiván. Végül az a körülmény, hogy a gyakorlatban előforduló, bonyolult hálózatok tulajdonságainak vizsgálata ill. értékelése során olyan módszerre van szükség, amely könnyen átültethető digitális számitógépekre. Ilyen szempontból a gráfelméleti módszerek konkrét esetekben nagyságrendileg előnyösebben alkalmazhatók a korábbi (pl. algebrai) módszerekkel szemben.

Tekintsünk egy elektromos hálózatot, amely ellenállásokból, kapacitásokból és induktivitásokból épül fel [1]. Feleltessünk meg a hálózatnak egy gráfot a következőképpen: a hálózat csomópontjait a gráf pontjainak, a hálózatban szereplő ellenállásokat, kapacitásokat és induktivitásokat (áramköri elemeket) pedig a gráf éleinek fogjuk fel, mégpedig ugy, hogy egy gráfél éppen azokra a pontokra illeszkedjék, amelyeknek megfelelő csomópontok között helyezkedik el a hálózatban a tekintett áramköri elem. Igy nyerjük a konkrét hálózatból a hálózat gráfját, amely most már független a hálózatban szereplő konkrét áramköri elemek minőségétől és értékétől.

Természetes, hogy nem minden gráf jöhet számitásba hálózatgráfként. Igy pl. szokás a hálózatgráftól megkivánni, hogy minden pontja legalább másodfoku legyen, ne tartalmazzon hurkot. Sok esetben elegendő, ha csak egyszeres élü gráfokat engedünk meg, mert a többszörös él helyett egyszeres élet tekintve, ez villamos szempontból annak felel meg, hogy parallel kapcsolt áramköri elemeket helyettesitünk eredőjükkel.

Villamos hálózatok gráfelméleti módszerrel történő vizsgálata során, még a legegyszerübb vizsgálatok is [11], felvetik egy adott gráf összes fáinak, és adott feltételeknek eleget tevő 2-fák egyszeres és hiánytalan előállitását. A gráfelméletnek a villamos hálózatok elméletében ebből a szemponból való alkalmazhatóságát gyakorlatilag éppen az a tény dönti el, hogy az előbb felsorolt részgráfok vajon egyszerüen képezhetők-e, bonyolult esetben a képzés történhet-e digitális számológépen, s az előállitás nem komplikáltabb-e, mint más ismert módszer alkalmazása, amely ugyanazt a problémát oldja meg.

Igy villamosmérnökök és matematikusok igen sok energiát forditottak fák és kettőfák előállitására. E dolgozat röviden összefoglalja az ismert és elterjedt módszerek főbb tipusait, majd ismertet egy, a szerző által feltalált módszert. Ez uj módszert összehasonlitja a korábbi módszerekkel, végül pedig gyakorlati alkalmazást mutat be.

A DOLGOZATBAN FELHASZNÁLT FONTOSABB GRÁFELMÉLETI DEFINICIÓK ÉS TÉTELEK

Tekintsünk egy $P = \{P_1,\dots,P_n\}$ $(n \geqq 1)$ és egy $E = \{e_1,\dots,e_q\}$ $(q \geqq 0)$ halmazt. Legyen $f(x)$ olyan egyváltozós függvény, amelynek értelmezési tartománya az E halmaz, értékkészlete pedig a P halmaz elemeiből képezett rendezetlen párok halmazának nem üres részhalmaza.

1. Definició. A P, az E halmazok és az $f(x)$ függvény meghatároznak egy G (véges) gráfot. A P halmaz elemeit a G gráf pontjainak, az E halmaz elemeit pedig a G gráf éleinek nevezzük. Speciálisan, ha E az üres halmaz, ugy a G gráf neve üres gráf.

2. Definició. Legyen adott a G gráf a P és E halmazokkal, valamint az $f(x)$ függvénnyel. Akkor mondjuk, hogy az $e_j \in E$ él illeszkedik a P_{j_i} és P_{j_k} $(P_{j_i}, P_{j_k} \in P)$ pontokra, ha érvényes: $f(e_j) = (P_{j_i}, P_{j_k})$. Továbbá a P_{j_i} és P_{j_k} pontokat az e_j él végpontjainak nevezzük.

3. Definició. A G gráfot egyszeres élünek nevez-

zük, ha az f(x) függvény különböző argumentumok esetén különböző függvényértékeket vesz fel, ellenkező esetben a gráf többszörös élü.

Egyszeres élü gráf megadása ugy is lehetséges, hogy megadjuk a P halmazt, és az f(x) függvény értékkészletét, mint a P elemeiből képezett rendezetlen párok halmazának részhalmazát, az elemei felsorolásával. Ilyen megadásnál a gráf éleinek éppen a szóbanforgó párokat tekintjük.

Egy gráf a sikban igen egyszerü módon szemléltethető a következő eljárással: a $P_1,\dots,P_n$ pontoknak a sik különböző pontjait feleltetjük meg, a gráf éleit pedig az él végpontjainak összekötésével ábráoljuk. Ugyanazon végpontu különböző éleket különböző vonallal történő összekötéssel ábrázolunk. A gráfelméleti elnevezések tulajdonképpen a gráf ilyen módon való szemléltetéséből származnak.

4. Definició. A G gráf egy e_j élét huroknak nevezzük, ha $f(e_j) = (P_i,P_i)$, ahol P_i a G gráf egy pontja.

5. Definició. A gráf P_i pontjára illeszkedő (különböző) élek számát a P_i pont fokszámának nevezzük. A P_i pontot izoláltnak nevezzük, ha fokszáma 0.

Világos, hogy az üres gráf minden pontja izolált.

6. Definició. Legyen $P^s = \{P_1,\dots,P_s\}$, ahol $s \geq 2$. Azt mondjuk, hogy az S gráf a P_1 és P_s pontokat összekötő ut, ha S pontjainak halmaza P^s, S egyszeres élü gráf, és éleinek halmaza $E^s = \{(P_1,P_2),(P_2,P_3),\dots,(P_{s-1},P_s)\}$.

Látjuk, hogy az S ut P_1 és P_s pontjainak fokszáma 1, az összes többi pontjainak fokszáma 2.

7. Definició. Akkor mondjuk, hogy a G' gráf a G gráfnak részgráfja, ha G' összes pontja és éle egyben G-nek is pontja és éle, és ezt a tényt igy jelöljük: $G' \subseteq G$. A G' gráf valódi részgráfja a G gráfnak, ha $G' \subseteq G$, és $G' \neq G$. A valódi részgráf jelölése: $G' \subset G$.

Legyen $G' \subseteq G$. Adjuk meg G'-t a P' pontjai, E' élei halmazával, valamint az E'-n értelmezett $f'(x)$ függvénnyel az 1. definició szerint. Hasonlóképpen megadjuk a G gráfot a P és E halmazokkal és az $f(x)$ függvénnyel. Akkor a 7. definició nyilvánvalóan a következő tényeket jelenti: $P' \subseteq P$, $E' \subseteq E$ és $f'(x) = f(x)$ minden $x \in E' (\subseteq E)$ argumentumra.

8. Definició. Akkor mondjuk, hogy a G' gráf a G gráf szükebb értelemben vett részgráfja, ha $P' = P$ és $G' \subseteq G$ fennáll.

Nyilván minden G' szükebb értelemben vett részgráf egyben részgráf is. Továbbá a szükebb értelemben vett részgráf tartalmazza az eredeti gráf összes pontját. Sok szerző részgráfon eleve csak szükebb értelemben vett részgráfot tekint. A későbbiekben e fogalomnak nagy hasznát vesszük.

A 7. definicióból következik, ha G egy pontja P_i, akkor P_i egyben a G részgráfja is.

9. Definició. Egy G gráfot összefüggőnek nevezünk, ha létezik bármely tetszőleges két (különböző) pontját összekötő ut részgráfja. Az egyetlen izolált pontból álló

(üres) gráfot összefüggőnek tekintjük.

Egy gráf összefüggősége szemléletesen azt jelenti, hogy a sikbeli ábrájában bármely pontjából bármely másik pontjába él(ek) mentén eljuthatunk.

10. Definició. Egy C gráf neve kör, ha összefüggő, nem tartalmaz hurkot és minden pontjának fokszáma 2.

1. Tétel. Legyen C kör, pontjainak száma c. Akkor $c \geqq 2$, és C éleinek száma c.

11. Definició. Egy F gráf neve fa, ha összefüggő, és nincs kör vagy hurok részgráfja. Speciálisan az egyetlen pontból álló (üres) gráf fa.

Azt a tényt, hogy egy gráfnak nincs hurok ill. kör részgráfja, ugy is szokás mondani, hogy a gráf hurok- ill. körmentes.

Nyilván a fa nem lehet többszörös élü gráf. Továbbá érvényesek:

2. Tétel. Legyen F egy n pontu összefüggő gráf. $(n \geqq 1)$ Az F gráf akkor és csak akkor fa, ha éleinek száma pontosan $(n-1)$.

3. Tétel. Az F fának legalább két elsőfoku pontja van.

4. Tétel. Legyen F legalább két pontu fa, P_i és P_j pedig F két különböző pontja. Akkor egyetlen olyan $S \subseteqq F$ részgráfja létezik, amely a P_i és P_j pontokat összekötő ut.

12. Definició. Akkor mondjuk, hogy a K gráf a G gráfnak komponense, ha

1. $K \subseteqq G$, és

2. Valahányszor a P_k a K egy pontja, mindannyiszor a G gráfban a P_k-ra illeszkedő él a K gráfnak is éle.

Ez utóbbi definiciónál feltételeztük, hogy ha egy gráf tartalmaz egy élet, akkor tartalmazza annak végpontjait is. Ez a tény különben triviális módon következik az 1. definicióból.

5. Tétel. A G gráf K komponense mindig összefüggő.

6. Tétel. Ha G összefüggő gráf, akkor egyetlen komponense önmaga.

7. Tétel. Legyen a G gráf összes különböző komponense $K_1,\dots,K_r$. Akkor G előáll, mint a $K_1,\dots,K_r$ komponenseinek egyesitése. Ez utóbbin azt értjük, hogy G pontjai ill. élei halmaza a $K_1,\dots,K_r$ komponensek pontjai ill. élei halmazainak egyesitése, és $f_G(x) = f_{K_i}(x)$, ha $x \in P^{K_i}$, ahol $1 \leq i \leq r$. (f_G, f_{K_i} a G ill. K_i gráfok definiciójában szereplő függvények, P^{K_i} pedig a K_i komponens pontjainak halmaza).

13. Definició. Legyen F^k n pontu gráf, és $k \leq n$. Azt mondjuk, hogy az F^k gráf k-fa, ha

1. F^k különböző komponenseinek száma k,

2. F^k minden komponense fa.

8. Tétel. Az F^k n pontu körmentes gráf akkor és csak akkor k-fa, ha éleinek száma pontosan $n-k$ ($k \leq n$).

Speciálisan az F^1 gráf fa. Továbbá F^n éppen az n pontu üres gráf.

14. Definició. Akkor mondjuk, hogy az F^k gráf az

n pontu G gráf k-fája ($k \leq n$), ha F^k a G gráf szükebb értelemben vett részgráfja, és F^k k-fa.

Speciálisan az $F^1 = F$ a G gráf fája.

Villamos alkalmazás szempontjából igen fontos probléma a következő: Adott egy G gráf (hálózatgráf), pontjai $P_1, \dots, P_n$. Előállitandók rögzitett k esetén ($k \leq n$) a G gráf adott feltételeknek eleget tevő k-fái. A feltétel legtöbbször ugy fogalmazható meg, hogy az előállitandó k-fák mindegyike a G gráf előirt $P_{i_1}, \dots, P_{i_k}$ különböző pontjaiból ($\{P_{i_1}, \dots, P_{i_k}\} \subseteqq \{P_i, \dots, P_n\}$) komponensenként egyet és csak egyet tartalmaznanak. Speciálisan, ha csak egyetlen P_i pontot irunk elő ($i = 1, \dots, n$), akkor érdeklődünk a G gráf összes fája iránt. E dolgozat éppen ilyen F^k k-fa előállitási módszerekkel foglalkozik.

A dolgozatban szereplő k-fa előállitási módszerek egyike felhasználja az irányitott gráf fogalmát. Ezért az irányitott gráf definicióját itt adjuk meg.

15. Definició. Legyenek $P = \{P_1, \dots, P_n\}$, és $E = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_q\}$ véges halmazok ($n \geq 1$, $q \geq 0$), valamint $f^*(x)$ olyan függvény, amelynek értelmezési tartománya E, értékkészlete pedig a P elemeiből képezett rendezett elempárok halmazának egy (nem üres) részhalmaza. Akkor a P, E halmazok és az $f^*(x)$ függvény meghatároznak egy $\vec{G}$ irányitott (véges) gráfot, ahol a $\{P_1, \dots, P_n\}$ elemek a $\vec{G}$ irányitott gráf pontjai, az $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_q\}$ elemek pedig az (irányitott) élek.

Irányitott gráfok esetén is hasonlóképpen értelmezhetők az egyszeres és többszörös élü irányitott gráfok. Egyszeres élü irányitott gráf megadása is lehetséges olyan módon, hogy felsoroljuk az irányitott gráf pontjait, és éleit, ez utóbbiakat mindjárt, mint rendezett elempárokat. Hasonlóképpen lehet irányitott gráfot is a sikban ábrázolni. Mégpedig, ha $f^{*}(\vec{e}_j) = (\overrightarrow{P_i, P_j})$, akkor az $\vec{e}_j$ él "irányitottságát" a P_i és P_j-nek megfelelő sikbeli pontok összekötő vonalára rajzolt P_i-ből P_j-be mutató nyil feltüntetésével szemléltethetjük. A gráfelméletben általában nem teszünk különbséget a P_i és P_j pontokra illeszkedő él, és ugyanezekre a pontokra illeszkedő ellentétesen irányitott élek között. Igy minden gráfot "irányitott gráfnak" is tekinthetünk. Ebből a megállapitásból következik, hogy irányitott gráfokra is hasonló fogalmakat alkothatunk, és tételeket mondhatunk ki, mint irányitatlan gráfokra.

1 §. MÓDSZEREK EGY GRÁF k-FÁINAK ELŐÁLLITÁSÁRA

Legyen adva egy G irányitatlan véges gráf a P pontjai halmazával, az E élei halmazával és az f(x) függvénnyel, amelynek értelmezési tartománya E, értékkészlete pedig a P elemeiből alkotott rendezetlen párok halmazának egy nem üres részhalmaza. Akkor a $G' \subseteq G$ részgráf egyértelmüen jellemezhető a $P' \subseteq P$ pontjai és az $E' \subseteq E$ élei halmazával. Ha ezen kivül G' még a G gráfnak szükebb értelemben vett részgráfja, akkor G' <u>egyértelmüen jellemezhető az</u> E' <u>élek halmazával.</u> A későbbiekben félreértés veszélye nélkül beszélni fogunk a G' (szükebb értelemben vett)részgráfról, ahol G' mindjárt a G' részgráf éleinek halmazát is jelöli. Azaz, ha e_j a G' részgráf egy éle, akkor ezt a tényt igy irjuk: $e_j \in G'$. A G' részgráfnak halmazzal történő azonositása azt fogja eredményezni, hogy a G' és H' részgráfokhoz módunkban áll halmazelméleti operációval további G' o H' részgráfot rendelni, ahol a "o" jel halmazokkal való müvelet jele. G' o H' tehát olyan részgráf, amelynek élei halmaza a G' és H' élei halmazából a "o" müvelet alkalmazásával áll elő.

1. <u>Kombinatorikus módszer</u>

Legyen az adott G gráf pontjainak száma n, éleinek száma q. Mivel a k-fák éleinek száma pontosan n-k ($k \leq n$), igy tekintsük a q él (n-k) osztályu ismétlés nélküli kombinációit. Ezek száma, mint ismeretes: $\binom{q}{n-k}$. Legyen egy kombináció C^k. Ezután tekintsük a G gráf C^k (szükebb értelemben vett) részgráfját. Ha C^k körmentes részgráf, akkor máris egy keresett k-fája a G gráfnak. Tehát a q él (n-k)-ad osztályu ismétlés nélküli kombinációiból ki kell válogatni a k-fáknak megfelelőket.

A vázolt módszer elvileg a legegyszerübb a G gráf összes k-fáinak előállitására. A C^k kombinációk közül a k-fák kiválasztására eléggé bonyolult eljárást lehet csak megadni. E módszer a gyakorlatban nem terjedt el, mert "bonyolultabb gráfnál" (a gyakorlatban előforduló villamos hálózatok gráfjainál) már a k-fák száma is milliós nagyságrendre tehető, a kombinációk száma pedig még ennél is sokkal több.

2. Szintézis módszer

Egy ilyen eljárás található Hakimi és Green egy közös dolgozatában [2]. A módszer alapgondolata a következő:

Tekintsük az adott G gráfot. Bontsuk fel két olyan G' és G", az eredetinél kisebb rangu és nullitásu [11] részgráfra, amelyeknek összes fáit már ismerjük. Majd az ismert fákból előállithatók a G' és G" gráfokból összetett G gráf összes fája. Egy külön eljárással pedig a G összes fáiból előállithatók a feltételeknek megfelelő összes k-fák.

A módszert röviden vázolom:

Mindenekelőtt ez a szintézis módszer bevezet néhány uj fogalmat. Tekintsük az adott G gráf (szükebb értelemben vett) részgráfjait. Akkor mindenegyes részgráfból módunkban áll további részgráfokat képezni. A képzéshez felhasználjuk a részgráfok mint élek halmazának felfogását.

12.1. <u>Definició. Legyen</u> g <u>a</u> G <u>gráf egy (szükebb értelemben vett) részgráfja, és</u> e_i <u>a</u> G <u>gráf egy éle. Akkor a</u> g<u>-nek az</u> e_i <u>szerinti parciálisán a</u> G <u>gráfnak azt a (szükebb értelemben vett)</u> $\frac{\partial g}{\partial e_i}$ <u>részgráfját értjük, amely előáll a következő módon:</u>

$$\frac{\partial g}{\partial e_i} = \begin{cases} g \oplus e_i, \text{ ha } e_i \in g \\ 0, \text{ ha } e_i \notin g . \end{cases}$$

E definicióban a "$\oplus$" jel a halmazelméletből ismert szimmetrikus differencia operátor jele. (Két halmaz szimmetrikus differenciája azoknak az elemeknek az összessége, amelyek az egyik és csak az egyik halmaz elemei). A definicióban szereplő 0 pedig az üres halmaz jele. Természetesen a $\frac{\partial g}{\partial e_i} = 0$ az üres gráfot reprezentálja.

A g gráf parciálisának képzése tehát szemléletesen azt jelenti, hogy g-ből ujabb részgráfot képezünk, mégpedig ugy, hogy ha előfordul g élei között az e_i él, ugy azt töröljük, ha nem ugy a parciális az üres gráf lesz.

A parciális képzés fogalmát kiterjesztjük részgráfok halmazára is.

1.2.2. Definició. Legyen $H = \{h ; h \subseteq G\}$ a G gráf (szükebb értelemben vett) részgráfjainak halmaza, és e_i a G gráf egy éle. Akkor a H halmaz e_i szerint képezett $\frac{\partial H}{\partial e_i}$ parciálisán a

$$\frac{\partial H}{\partial e_i} = \left\{ \frac{\partial h}{\partial e_i} ; h \subseteq G \right\}$$

részgráfok halmazát értjük.

Továbbá a parciális képzés fogalmát általánositjuk olyan módon, hogy a parciális képzés egyetlen e_i él helyett egy részgráf szerint is lehetséges legyen.

1.2.3. Definició. Legyen H a G gráf(szükebb értelemben vett) részgráfjainak egy halmaza, h pedig a G-nek egy olyan részgráfja, amelynek élei rendre $e_1, e_2, \ldots, e_h$. Akkor H-nak h szerinti parciálisán a

$$\frac{\partial H}{\partial h} = \frac{\partial H}{\partial e_1} \oplus \frac{\partial H}{\partial e_2} \oplus \ldots \oplus \frac{\partial H}{\partial e_h}$$

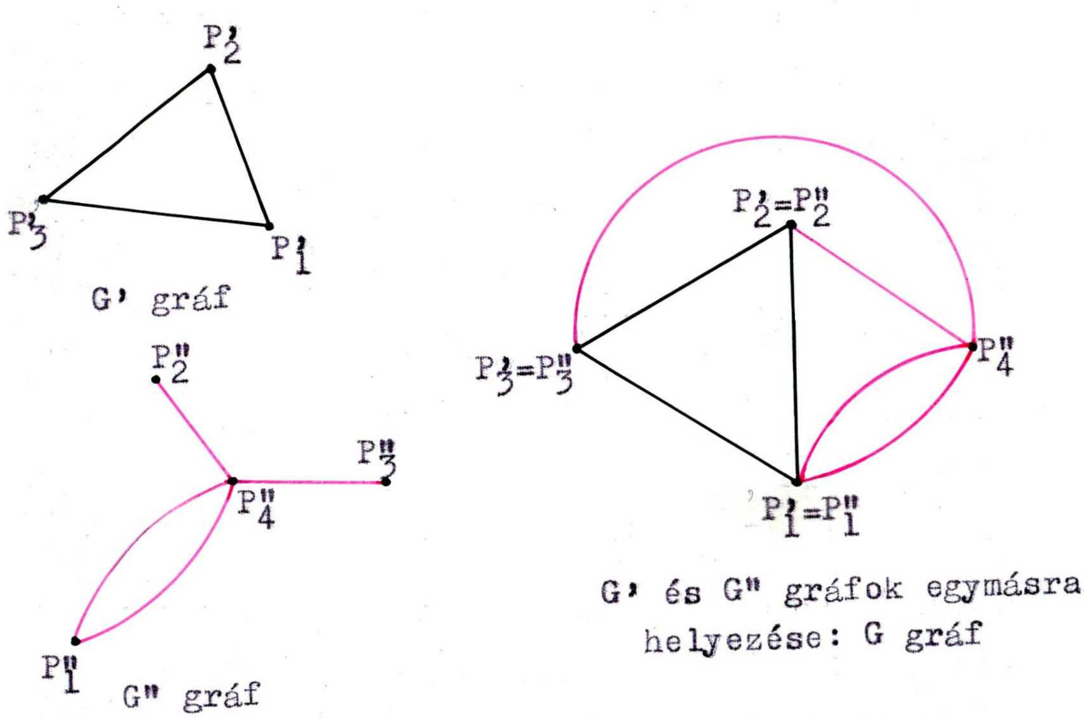
részgráf halmazt értsük.

Vezessük be még az ugynevezett "magasabb rendü parciálisok" fogalmát is:

1.2.4. Definició. Legyenek $h_1, h_2, \ldots, h_s$ a G gráf részgráfjai, és H a G gráf részgráfjainak egy halmaza. Akkor H-nak h_1 és h_2 szerinti parciálisán a $\frac{\partial^2 H}{\partial h_1 \partial h_2} = \frac{\partial}{\partial h_2}\left(\frac{\partial H}{\partial h_1}\right)$-et értjük, és ha már a $\frac{\partial^{s-1} H}{\partial h_1 \partial h_2 \ldots \partial h_{s-1}}$ értelmezve van, akkor legyen

$$\frac{\partial^s H}{\partial h_1 \partial h_2 \ldots \partial h_s} = \frac{\partial}{\partial h_s}\left(\frac{\partial^{s-1} H}{\partial h_1 \partial h_2 \ldots \partial h_{s-1}}\right) \quad (s \geqq 2)$$

Legyen G' és G" két (különböző) gráf a $P'_1, \ldots, P'_n$ és a $P''_1, \ldots, P''_m$ pont számozással. Válasszunk ki a G' pontjai közül is r-et, meg a G" pontjai közül is, ahol r = (min n,m). Az általánosság megcsorbitása nélkül feltehetjük, hogy a kiszemelt pontok: $P'_1, \ldots, P'_r$ illetve $P''_1, \ldots, P''_r$. Ezután tekintsük azt a G gráfot, amelyet a G'-ből és a G"-ből ugy nyerünk, hogy a kiszemelt pontok közül a megfelelő P'_i és P''_i pontokat egynek tekintjük (vagy másképpen "összeolvasztjuk"). (i = 1,...,r). <u>Azt mondjuk, hogy a G gráf a G' és G" alkalmas egymásra helyezésével állott elő.</u> Az egymásra helyezést az 1. ábra szemlélteti (1. ábra), ahol r = 3.



1. ábra

Jelentse p'_{ij} egy, a P'_i és a P'_j pontokat összekötő utat a G'-ben, mint élek halmazát. $(i,j = 1,\dots,n)$. Hasonló értelemben használjuk a p''_{ij} jelet is.

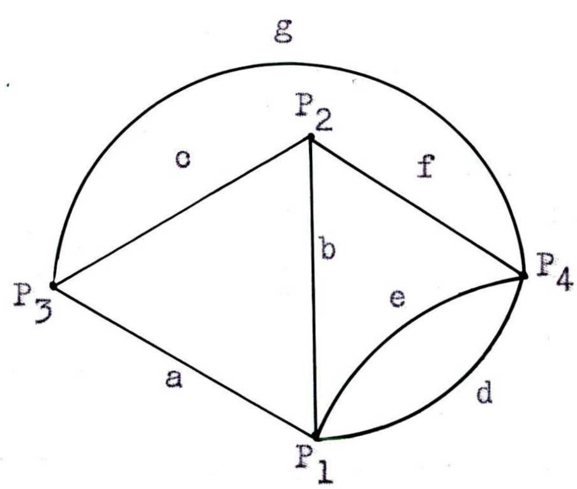
1.2.1. Tétel. Ha T' a G' gráf, T" a G" gráf, T pedig a G' és G" gráf egyesitéséből előállott G gráf összes fáinak halmaza, akkor érvényes:

$$T = \frac{\partial^{r-1}(T' \times T'')}{\partial(p'_{12} \cup p''_{12})\,\partial(p'_{23} \cup p''_{23})\dots\partial(p'_{r-1,r} \cup p''_{r-1,r})} \qquad (1.-1)$$

ahol "$\cup$" a halmazegyesités, "x" pedig a halmazok "Cartesian szorzatának" szimbóluma. (Legyenek A és B halmazok elemei is halmazok, továbbá $a \in A$, $b \in B$ tetszőleges, akkor $A \times B = \{a \cup b;\ a \in A,\ b \in B\}$).

Az (1.-1) formula alkalmazásával előállitható a G gráf összes fája.

Példaként tekintsük a 2. ábrán látható G gráfot. (2. ábra). Észrevesszük, hogy G előáll, mint az 1. ábrán

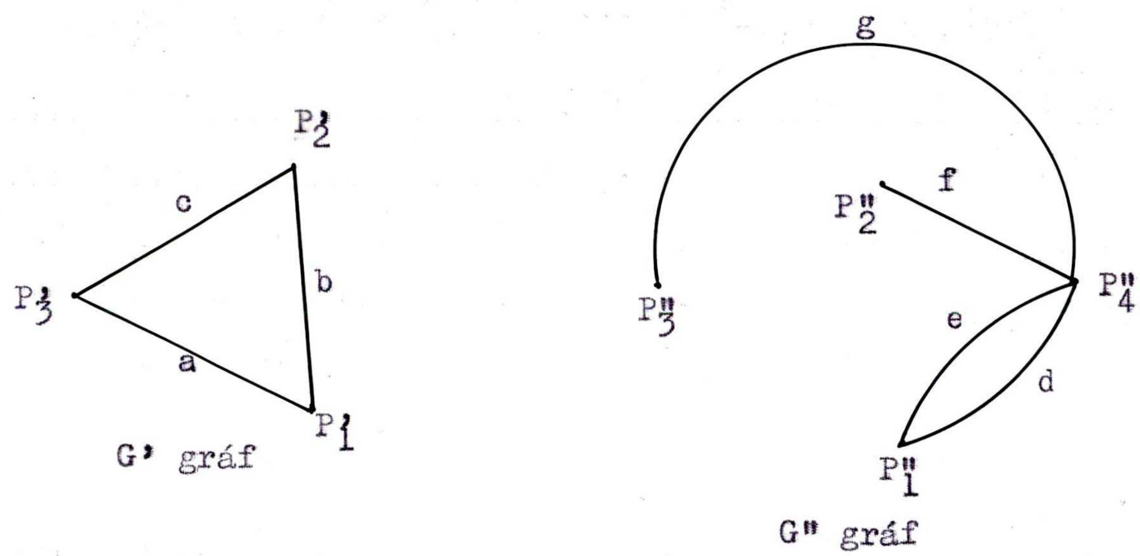


2. ábra

szereplő G' és G" alkalmas (3 pontban történő) egyesitése. Mégpedig most érvényes a következő

$$P_1 = P'_1 = P''_1,\ P_2 = P'_2 = P''_2,\ P_3 = P'_3 = P''_3 \text{ és } P_4 = P''_4 .$$

A G gráfot megfelelő módon "felbontva", a pontok jelölését összevetve, és megtartva mind a G'-ben, mind a G"-ben a G-beli élek a,b,...,f jelöléseit nyerjük a 3. ábrán látható gráfokat (3. ábra).



3. ábra

Irhatjuk: $T' = \{ab, ac, bc\}$, $T'' = \{dfg, efg\}$, ahol a megfelelő fákat az élek felsorolásával jellemeztük. (Itt egyszerüség kedvéért az (a,b) helyett röviden ab-t irtunk stb. Ilyen "egyszerü irásmódot" az áttekinthetőség kedvéért később is alkalmazunk.) Akkor:

$$T' \times T'' = \{abdfg, abefg, acdfg, acefg, bcdfg, bcefg\} \quad (1.-2)$$

a szóbanforgó "Cartesian szorzat". Továbbá $p'_{12} = b$, $p'_{23} = c$, és $p''_{12} = df$, $p''_{23} = fg$. Ebből:

$$p'_{12} \cup p''_{12} = bdf, \text{ valamint } p'_{23} \cup p''_{23} = cfg \quad (1.-2a)$$

Felhasználva az (1.-1) formulát a G gráf összes fái T halmazára nyerjük:

$$T = \frac{\partial^2(T' \times T'')}{\partial(p'_{12} \cup p''_{12})\,\partial(p'_{23} \cup p''_{23})} \qquad (1.-3)$$

Figyelembe véve az 12.1.-12.4. definiciókban leirt parciális képzés szabályait, valamint az (1.-2) és az (1.-2a) kifejezéseket számolás után nyerjük:

$$T = \{dfg, efg, afg, bdg, beg, bfg, cdg, ceg, abg, acg, bcg, adf, aef, cdf, cef, abf, acf, bcf, abd, abe, acd, ace, bcd, bce\} \qquad (1.-4)$$

A keresett fák száma 24.

Az eddigi eljárással a G gráf összes fája halmazát állithatjuk elő, ha a G-nek egy alkalmas felbontásához tartozó G' és G" gráfok (ezek szükségképpen G részgráfjai) összes fáit ismerjük. Adott esetben szükség lehet természetesen G'-t és G"-t is "tovább bontani" az összes fák meghatározásához. A továbbiakban azzal foglalkozunk, hogy miként lehet e módszerrel a G összes k-fáit ($k \geq 2$) előállitani.

1.2.2. Tétel. Válasszuk ki a G n pontu összefüggő gráf k különböző pontját ($k \geq n$), legyen ezek számozása rendre $P_{i_1}, \ldots, P_{i_k}$. Ha $T_{i_1,\ldots,i_k}$ jelöli a G gráf azon F^k k-fáinak halmazát, amelynek elemei rendelkeznek azzal a tulajdonsággal, hogy minden komponense a $P_{i_1}, \ldots, P_{i_k}$ pontokból egyet és csak egyet tartalmaz, akkor érvényes a következő formula:

$$T_{i_1,\ldots,i_k} = \frac{\partial^{k-1} T}{\partial p_{i_1,i_2}\,\partial p_{i_2,i_3} \cdots \partial p_{i_{k-1},i_k}} \qquad (1.-5)$$

ahol T a G gráf összes fáinak halmaza, $p_{i_j,i_{j+1}}$ pedig egy, a P_{i_j} pontot a $P_{i_{j+1}}$ ponttal összekötő ut a G-ben $(j = 1,\ldots,k-1)$.

Megjegyezzük, hogy $k = 1$ esetben az (1.-5) formula a $T_{i_1} = T$ nyilvánvaló egyenlőséget adja.

Példaként irjuk fel a 2. ábrán látható G gráf $T_{3,4}$ 2-fa halmazát. Most az (1.-5) formula igy fest:

$$T_{3,4} = \frac{\partial T}{\partial p_{3,4}} \qquad (1.-6)$$

A 2. ábrából látszik, hogy $p_{3,4} = g$ választás lehetséges. Ezt és (1.-4)-et felhasználva parciális képzéssel nyerjük a

$$T_{3,4} = \{df, ef, af, bd, be, bf, cd, ce, ab, ac, bc\} \qquad (1.-7)$$

2-fa halmazt.

Látjuk, hogy a Hakimi-Green módszernél a k-fák képzéséhez szükség van először a G gráf összes fái halmazának képzéséhez.

Szintézis módszert láthatunk még Mayeda egy dolgozatában is [5], ahol az előállitáshoz hasonló fogalmakra van szükség, mint az előbb emlitett módszernél (parciálisok, "Cartesian szorzatok", stb.).

3. Transzformációs módszerek

E módszerek segitségével általában egy G összefüggő gráf fáinak halmazát (tehát k = 1 eset!) lehet előállitani. Az előállitások közös vonása, hogy kiválasztanak a G gráf egyetlen fáját, ezt alapfának, vagy referencia fának nevezik, és ebből kiindulva állitják elő a G egy, az alapfától különböző fáját. Majd erre a fára az eljárást megismételve, ujabb fához jutunk, stb. mig végül rendelkezésre áll a G gráfnak összes fája. Egyik fáról a következőre ugynevezett <u>elemtranszformációval</u> történik az áttérés.

A tárgyalás során a továbbiakban is a részgráfot mint élek halmazát tekintsük, ahogyan ezt már korábban is megtettük.

1.3.1. <u>Definició. Legyen</u> g <u>a</u> G <u>gráf egy részgráfja,</u> e_i <u>a</u> G <u>gráf egy éle, és</u> $e_i \notin g$. <u>Akkor mondjuk, hogy a</u> g_1<u>(</u>$\subseteq G$ <u>rész)gráf a</u> g<u>-ből elemtranszformációval áll elő, ha</u> g_1 <u>ugy keletkezik</u> g<u>-ből, hogy</u> g <u>egy élét töröljük, és helyébe az</u> e_i <u>élet irjuk.</u>

Nyilván, ha a G gráf összes fáit egy alapfából kiindulva elemtranszformációk sorozatával kivánjuk előállitani akkor egyrészt biztositanunk kell, hogy egy fán elemtranszformációt végrehajtva olyan éllel "helyettesitsünk", hogy a nyert gráf továbbra is G-nek fája legyen, másrészt ügyelnünk kell arra, hogy az előállitás során minden fa előadódjék.

Egy ilyen eljárást szerkesztett Talbot [12]. Eljárásának komoly hátránya, hogy az előállitás során egy fa több példányban is szerepel. Gyakorlati szempontból ez azért kellemetlen, mert pl. digitális számológépen történő előállitásnál az előállitott gráfokat a számológép gyors memóriájában kell tárolni mindaddig, amig az előállitás be nem fejeződik, hogy a fák esetleges másodpéldányait kiküszöböljük.

Mayeda és Seshu is ad egy transzformációs eljárást, amely az említett hiányosságtól mentes [6]. E módszert, mint a transzformációval történő előállítás egy jellegzetes példáját vázlatosan ismertetem:

Tekintsünk egy G összefüggő gráfot a $P_1, \dots, P_n$ pont számozással. Soroljuk a G összes pontjait két (nem üres) A és B osztályba.

1.3.2. Definició. Azt mondjuk, hogy a V_{AB} gráf a G gráf egy, az A és B osztályok által definiált vágata, ha V_{AB} a G-nek részgráfja, és az összes olyan élből áll, amelyek a (P_i, P_j) pontokra illeszkednek, miközben P_i befutja az A, P_j pedig a B halmaz elemeit. [11] $(i,j = 1, \dots, n)$.

Legyen F a G-nek egy fája, e pedig az F egy éle. Ezt az e élet törölve a G pontjait egyértelmüen tudjuk két nem üres osztályba sorolni, mégpedig ugy, hogy egy osztályba éppen azok a pontok tartozzanak, amelyek a törlés után ugyanabban a komponensben vannak. A pontok ilyen osztályozása által definiált vágat neve alapvágat, pontosabban a G gráf F fájának az e éléhez tartozó alapvágata [11]. Ezt az alapvágatot igy jelöljük: $V_e(F)$.

Triviális, hogy F-nek és $V_e(F)$-nek egyetlen közös éle az e él [11].

Legyen F_0 a gráfnak egy rögzitett (különben tetszőleges) fája. Az F_0-t a következőkben alapfának nevezzük. Jelöljük az alapfa éleit az $e_1, \dots, e_{n-1}$-gyel. Akkor az F_0 fából egy elemtranszformációval ugy állithatunk elő egy másik fát, hogy kiszemeljük pl. az e_i élet $(i = 1,\dots,n-1)$, s azt helyettesitjük egy arra alkalmas e gráféllel. Világos, hogy helyettesitésre éppen a $V_{e_i}(F_o)$ az e_i-től különböző élei (és csak ilyen élek) jöhetnek számitásba. Ha ilyen helyettesitést az összes lehetséges módon minden e_i-re rendre elvégezünk, azokat a fákat nyerjük, amelyek az F_o-tól pontosan egy élben különböznek.

A következőkben a G gráf fáinak alkalmas halmazait fogjuk az elemtranszformáció felhasználásával definiálni, mégpedig a halmazok elemeit szolgáltató rekurziv formulával. Majd rámutatunk arra, hogy e fa halmazokból kiválaszthatók egy elv segitségével olyan halmazok, amelyeknek egyesitése az F_o alapfát is beleszámitva éppen a G gráf összes fáját adja, mégpedig ugy, hogy a fa halmazok elemeinek a formulával történő képzése során a G gráf mindegyik fája egyszer és csak egyszer adódik.

1.3.3. <u>Definició.</u> <u>Legyen</u> F_o <u>a G gráf egy alapfája:</u> $F_o = e_1,\dots,e_{n-1}$. <u>Ha</u> $e_i \in F_o$ $(i = 1,\dots,n-1)$, <u>akkor</u> T^{e_i} <u>jelentse a G gráf következő fa-halmazát:</u>

$$T^{e_i} = \left\{ F \ ; \ F = F_o \oplus (e,e_i) \ ; \ e \in V_{e_i}(F_o),\ e \neq e_i \right\} \qquad (1.-8)$$

<u>Továbbá, ha</u> $e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}$ <u>az</u> F_o <u>(különböző) elemei, és a</u> $T^{e_{i_1},\dots,e_{i_{k-1}}}$ <u>fa halmaz már definiált, akkor a</u> $T^{e_{i_1},\dots,e_{i_k}}$ <u>jelentse a G gráf következő fa-halmazát:</u>

$$T^{e_{i_1},\dots,e_{i_k}} = \left\{ F \ ; \ F=F' \oplus (e_j', e_{i_k}) \ ; \ F' \in T^{e_{i_1},\dots,e_{i_{k-1}}} \ ; \right.$$

$$\left. e_j' \in V_{e_{i_k}}(F') \cap V_{e_{i_k}}(F_o), \ e_j' \neq e_{i_k} \right\} \qquad (1.-9)$$

Könnyü észrevenni, hogy az 1.3.3. definicióban szereplő (1.-8) formula az (1.-9) formulának az a speciális esete, ahol $F' = F_o$. Figyeljük meg továbbá azt is, hogy a $T^{e_{i_1},\dots,e_{i_k}}$ elemei a G gráf olyan fái, amelyek az F_o alapfától éppen az $e_{i_1},\dots,e_{i_k}$ élekben különböznek. Mégpedig a $T^{e_{i_k},\dots,e_{i_k}}$ fa-halmaz elemei a $T^{e_{i_1},\dots,e_{i_{k-1}}}$ elemeiből elemtranszformációval állanak elő. Az elemtranszformáció során az $T^{e_{i_1},\dots,e_{i_{k-1}}}$ tetszőleges F' elemének e_{i_k} élét helyettesitjük egy arra alkalmas e_j' éllel. Az elemtranszformáció során bizonyos, hogy fát nyerünk, mert $e_j' \in V_{e_{i_k}}(F') \cap V_{e_{i_k}}(F_o)$, tehát még inkább $e_j' \in V_{e_{i_k}}(F')$. Az $e_j' \in V_{e_{i_k}}(F') \cap V_{e_{i_k}}(F_o)$ reláció teljesülését azért kivánjuk meg, hogy bizonyos többpéldányu fa előállitásokat elkerüljünk.

Mármost képezzük a G gráf összes $T^{e_{i_1},\dots,e_{i_k}}$ fahalmazait az összes lehetséges $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ választással rendre $k = 1,\dots,n-1$ esetekben, az (1.-8) és (1.-9) formula alkalmazásával. Bebizonyitható, hogy ezzel az eljárással, a G gráf F_o-tól különböző összes fája előállitható, de az előállitás során általában egy fa több példányban is keletkezhet.

A több példányu előállitás elkerülése végett bevezetjük az M-sorozat fogalmát.

1.3.4. Definició. Azt mondjuk, hogy G' $(\subseteq G)$ gráf éleinek egy $e'_1,\dots,e'_q$ sorozata M-sorozat, ha G-nek az a részgráfja, amely az $e'_1,\dots,e'_j$ halmaznak felel meg, összefüggő, ahol $j = 1,\dots,q$.

Megmutatható, hogy ha G' a G gráfnak egy fája, akkor élei mindig rendezhetők ugy, hogy M-sorozatot alkossanak. Igy az általánosság megsértése nélkül a G gráf egy $F_0 = e_1,\dots,e_{n-1}$ alapfa elemeiről mindig feltehető, hogy az $(e_1,\dots,e_{n-1})$ M-sorozat.

3.1. Tétel. Ha a G gráf egy (alap)fája $F_0 = e_1,\dots,e_{n-1}$, ahol az élek M-sorozatot alkotnak, akkor a G gráf összes fái halmazát az F_0 (egy elemü halmaz) és az összes lehetséges $T^{e_{i_1},\dots,e_{i_k}}$ halmazok egyesitésével nyerjük, ahol $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n-1$, és k felveszi rendre az $1,\dots,n-1$ számokat. Továbbá a $T^{e_{i_1},\dots,e_{i_k}}$ halmaz elemeinek az (1.-8), ill. (1.-9) formulával történő előállitása közben egy fa sem áll elő több példányban.

E tétel felhasználásával és az (1.-8) ill. (1.-9) formula alkalmazásával a G gráf fáinak előállitása ugy történhetik, hogy kiindulunk egy F_0 alapfából; első lépésben képezzük az összes lehetséges T^{e_i} halmazokat, ahol e_i az alapfa egy éle; majd T^{e_i} minden eleméből előállitjuk az összes lehetséges T^{e_i,e_j} halmazokat, ahol $1 \leq i < j \leq n-1$; ezután mindegyik T^{e_i,e_j} elemből képezzük a T^{e_i,e_j,e_m} halmazokat, ahol $1 \leq i < j < m \leq n-1$; és igy tovább ...; végül utolsó lépésként képezzük a $T^{e_1,\ldots,e_{n-1}}$ halmazt. A képezett halmazokat egyesitjük, hozzávéve az F_o alapfát, nyertük a G összes fáit.

Az eljárás áttekintését szolgálja a 4. ábra (4. ábra).

Példaként tekintsük a 2. ábrán látható G gráfot. Képezzük összes fáit a leirt elemtranszformációs eljárással.

Válasszuk az alapfát a következőképpen: F_o = abg.

Nyilván az (a,b,g) sorozat M-sorozat. Előállitandók a következő fa-halmazok:

1. T^a, T^b és T^g
2. $T^{a,b}$, $T^{a,g}$ és $T^{b,g}$
3. Végül a $T^{a,b,g}$.

1. lépés:

$T^a = \{F; F = \{a,b,g\} \oplus \{a,e\},\ e \in V_a(a,b,g),\ e \neq a\}$

De: $V_a(a,b,g) = \{a,c,e,f,d\}$, tehát a helyettesithető c,e,f és d élekkel. Azaz:

$T^a = \{bcg, beg, bfg, bdg\}$

$T^b = \{F; F = \{a,b,g\} \oplus \{b,e\},\ e \in V_b(a,b,g),\ e \neq b\}$

De: $V_b(a,b,g) = \{b,c,f\}$, tehát b helyettesithető c és f éllel igy:

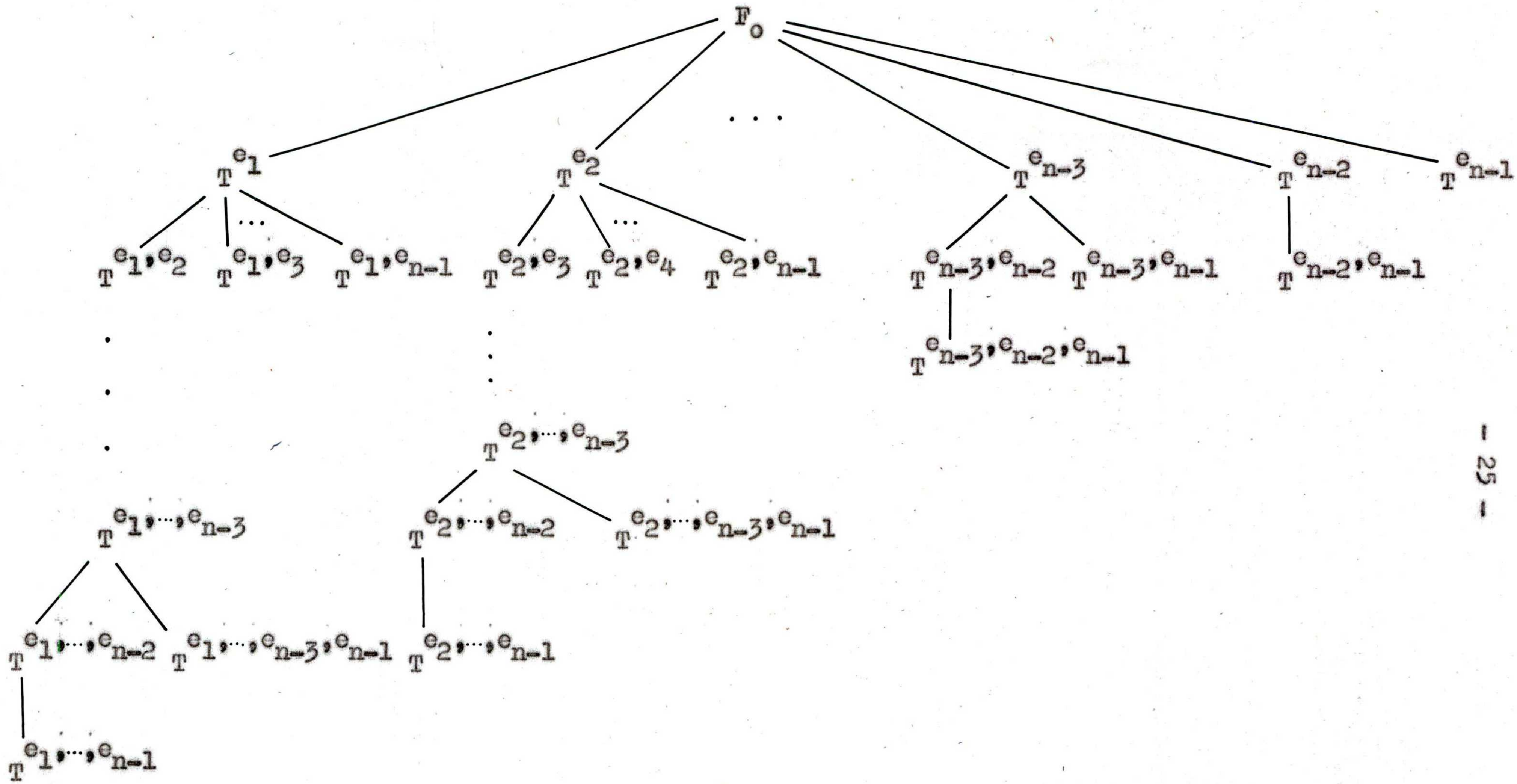
$T^b = \{acg, afg\}$.

Hasonlóképp belátható, hogy T^g előállitásához g helyettesithető d,e és f élekkel:

$T^g = \{abd, abe, abf\}$.

2. lépés

$T^{a,b} = \{F; F = F' \oplus \{b,e\},\ e \in V_b(F') \cap V_b(a,b,g), F' \in T^a,\ e \neq b\}$.


F_o
T^{e_1}
T^{e_2}
$T^{e_{n-3}}$
$T^{e_{n-2}}$
$T^{e_{n-1}}$
T^{e_1,e_2}
T^{e_1,e_3}
$T^{e_1,e_{n-1}}$
T^{e_2,e_3}
T^{e_2,e_4}
$T^{e_2,e_{n-1}}$
$T^{e_{n-3},e_{n-2}}$
$T^{e_{n-3},e_{n-1}}$
$T^{e_{n-2},e_{n-1}}$
$T^{e_{n-3},e_{n-2},e_{n-1}}$
$T^{e_2,\dots,e_{n-3}}$
$T^{e_1,\dots,e_{n-3}}$
$T^{e_2,\dots,e_{n-2}}$
$T^{e_2,\dots,e_{n-3},e_{n-1}}$
$T^{e_1,\dots,e_{n-2}}$
$T^{e_1,\dots,e_{n-3},e_{n-1}}$
$T^{e_2,\dots,e_{n-1}}$
$T^{e_1,\dots,e_{n-1}}$

4. ábra

T^a négyelemü halmaz. A helyettesitéshez szükséges vágatokat megkeresve:

$V_b(b,c,g) = \{a,b,e,d\}$, $V_b(b,e,g) = \{b,c,f\}$, $V_b(b,f,g) = \{a,b,e,d\}$ és

$$V_b(b,d,g) = \{b,c,f\}.$$

Az előirt közösrész-képzést végrehajtva az egyes F' fáknál a megfelelő helyettesitő élek lehetnek:

$\{b,c,g\}$-nél és $\{b,f,g\}$-nél $\emptyset$ (üres halmaz) $\{b,e,g\}$-nél és $\{b,d,g\}$-nél c és f.

Igy:

$$T^{a,b} = \{ceg, efg, cdg, dgf\}$$

Hasonlóképp nyerhető $T^{a,g}$ és $T^{b,g}$ halmaz is. Az eredmények:

$$T^{a,g} = \{bcd, bce, bcf\} \text{ és } T^{b,g} = \{acd, ace, acf, adf, aef\}.$$

3. lépés:

$$T^{a,b,g} = \{F;\, F = F' \oplus \{e,g\},\, F' \in T^{a,b},\ e \in V_g(F') \cap V_g(a,b,g),\, e \neq g\}.$$

A szükséges vágatokat képezve, figyelembe véve a $T^{a,b}$ 4 elemét, nyerjük a megfelelő helyettesitő éleket a g helyébe. A helyettesitést is elvégezve nyerjük:

$$T^{a,b,g} = \{cef, cdf\}.$$

Végeredményben G összes fáinak T halmazát

$$T = \{F_o\} \cup T^a \cup \ldots \cup T^{a,b,g}$$

alakban nyerjük. Az eredmény 24 fa, az (1.-4)-gyel egyezésben.

(Megjegyezzük, hogy az összes fák e módszerrel történő előállitásnál meglehet, hogy valamelyik $T^{e_{i_1},\ldots,e_{i_k}} = \emptyset$ az üres halmaz).

4. Egy algebrai módszer

A G gráf összes fáinak és 2-fáinak igen elegáns, algebrai előállitását találjuk Maxwell és Cline egy dolgozatában [4]. E módszert vázlatosan ismertetem.

Tekintsünk egy G gráfot a $P_1,\dots,P_n$ pont számozással és az $e_1,\dots,e_q$ élmegjelöléssel.

Definiáljuk a $\{0,1\}$ számhalmazban a következő "+" és "." müveleteket:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

.	0	1
0	0	0
1	0	1

(1.-10)

Az igy előállott strukturát jelöljük S-sel.

Továbbá az $\{e_1,\dots,e_q\}$ halmazt egészitsük ki egy e_0 elemmel, és az $\{e_0,e_1,\dots,e_q\}$ halmazban értelmezzünk egy kommutativ és asszociativ szorzást a következő kikötésekkel:

$$e_i \cdot e_i = e_0, \quad (i = 1,\dots,q) \tag{1.-11}$$

és e_0 legyen zéruselem.

A rövidség kedvéért e_0 helyett 0-t fogunk irni.

Ezután tekintsük az $S[e_0,e_1,\dots,e_q]$ polinomgyürüt. Legyen továbbá G' a G gráf egy részgráfja. Rendeljük hozzá a G'-hez az előbbi polinomgyürü következő elemét:

$$G' \longrightarrow \sum_{i=0}^{q} a_i e_i \tag{1.-12}$$

ahol $a_i = \begin{cases} 1, \text{ ha az } e_i \text{ előfordul a } G'\text{-ben} \\ 0, \text{ különben.} \end{cases}$

Az üres gráfhoz megállapodás szerint a 0-t rendeljük hozzá.

Világos, hogy az (1.-12) hozzárendelés a G összes részgráfjai és az $S[e_0,\dots,e_q]$ polinomgyürü lineáris elemei között egy-egy értelmü. Ezért szokás a lineáris polinomokat a megfelelő részgráf nevével is ellátni, ill. a megfelelő részgráf jelével jelölni.

Igy pl. legyen A és B a G gráf pontjainak diszjunkt halmaza ugy, hogy egyesitésük az összes pontok halmazát adja, akkor az A és B által meghatározott V_{AB} vágat polinom-megfelelőjét (1.-12) szerint vágatpolinomnak nevezzük. Speciálisan, ha $A = \{P_i\}$, $B = \{P_1,\dots,P_{i-1}, P_{i+1},\dots,P_n\}$, a V_{AB} részgráf neve P_i csucsvágat, vagy röviden csucsvágat, jele V_{P_i}, polinommegfelelője pedig a csucsvágat-polinom $(i = 1,\dots,n)$.

Tekintsük most az $S[e_0,\dots,e_q]$ polinomgyürü vágatpolinom elemeinek halmazát: $\{V_{AB}\}$-t. Érvényesek a következő állitások:

1. $\{V_{AB}\}$ a "+" müveletre nézve véges Abel csoportot alkot, e csoport egységeleme éppen az üres gráf polinommegfelelője.

2. A V_{P_i} csucsvágat-polinomok közül bármelyik (különböző) (n-1) lineárisan független, és a $\{V_{AB}\}$ strukturának egy minimális generátorrendszere.

3. <u>A $\{V_{AB}\}$ struktura bármely minimális generátorrendszerének tagszorzata invariáns.</u> Ez utóbbi az (1.-11) kikötésekből következik.

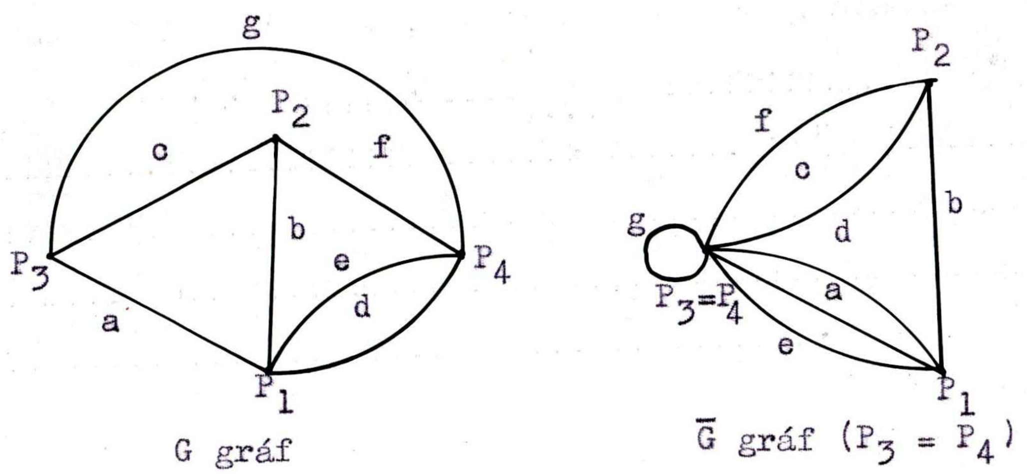
Ezeknek az állitásoknak birtokában a gráfelmélet elemeit felhasználva, bebizonyitható a következő

1.4.1. <u>Tétel. Ha a $\{V_{AB}\}$ strukturának a $\{V^*_{AB}\}$ egy minimális generátorrendszere, akkor a $\{V^*_{AB}\}$ elemeinek szorzata reprezentálja a G gráf összes fáit abban az értelemben, hogy a szorzat egy tagjában szereplő határozatlanok éppen a G gráf egy fájának az élei.</u>

E tétel és az előbbi állitások alkalmazásával a G gráf összes fáit a következőképpen állithatjuk elő: Képezzük a G gráf (n-1) különböző csucsvágatát, és vesszük a megfelelő csucsvágat-polinomokat. Ezeket összeszorozzuk a polinomszorzás szabályai szerint, figyelembe véve (1.-11)-et. Majd az egynemü tagokat összevonjuk az (1.-10) müveleti tábla alkalmazásával. A megmaradt tagok éppen a G összes fáit reprezentálják a kimondott tétel értelmében.

E módszer könnyen kiterjeszthető olyan 2-fák előállitására, amelyek két előre megadott pontot külön komponenseikben tartalmaznak. A kiterjeszthetéshez a következőket kell megmutatni.

Szemeljük ki a G gráf P_{i_1} és P_{i_2} különböző pontjait. Akkor a G gráf 2-fáinak $\{F^2_{i_1,i_2}\}$ halmaza megegyezik annak a $\bar{G}$ gráfnak összes fa halmazával, amelyet G-ből ugy nyerünk, hogy a P_{i_1} és P_{i_2} pontokat egyetlen pontnak tekintjük. Igy pl. a 2. ábrán levő G gráf $F^2_{3,4}$ kettőfa halmaza megegyezik az 5. ábrán látható $\overline{G}$ gráf fa halmazával (5. ábra).



5. ábra

Nyilvánvalóan, ha G gráf n pontu volt, akkor $\overline{G}$ gráf n-1 pontu. Továbbá az is igaz, hogy $\overline{G}$ gráfnak $\overline{V}_{P_{i_1} = P_{i_2}}$ csucsvágatpolinomja:

$$\overline{V}_{P_{i_1} = P_{i_2}} = V_{P_{i_1}} + V_{P_{i_2}} .$$

Tehát a $\left\{F^2_{i_1,i_2}\right\}$ kettőfák felkutatásához alkalmazni kell a korábbi eljárást a $\overline{G}$ gráfra.

Példaként tekintsük a 2. ábrán látható G gráfot. Állitsuk elő az összes fáit.

Alkalmas csucsvágat-polinomok:

$$V_{P_2} = b+c+f \qquad V_{P_3} = a+c+g \quad \text{és} \quad V_{P_4} = d+e+f+g$$

Ezek szorzata:

$$V_{P_4} \cdot V_{P_3} \cdot V_{P_2} = (d+e+f+g) \cdot (a+c+g) \cdot (b+c+f)$$

A szorzást részletesen elvégezve 36 tagot kapunk. Kihagyva a négyzetes tényezőt tartalmazó tagokat, majd az egyneműeket összevonva, nyerjük:

$$V_{P_4} \cdot V_{P_3} \cdot V_{P_2} = abd+abe+abf+abg+bcd+bce+bcf+bcg+bdg+beg+$$
$$+bfg+acd+ace+acf+acg+cdg+ceg+adf+aef+afg+$$
$$+cdf+cef+dfg+efg \; .$$

A 24 tag éppen 24 fát reprezentál, egyezésben az (1.-4)-gyel.

További példaként állitsuk elő a G gráf $F^2_{3,4}$ 2-fáit. Irhatjuk:

$$\bar{V}_{P_1} = V_{P_1} = a+b+d+e \; , \quad \bar{V}_{P_2} = V_{P_2} = b+c+f \; .$$

Tehát:

$$\bar{V}_{P_1} \cdot \bar{V}_{P_2} = (a+b+d+e) \cdot (b+c+f) = ab+bd+be+ac+bc+cd+ce+$$
$$+af+bf+df+ef$$

összeg reprezentálja a G gráf kivánt 2-fáit (lásd (1.-7)!).

2 §. UJ MÓDSZER EGY GRÁF k-FÁINAK ELŐÁLLITÁSÁRA

E paragrafusban megadok egy, az eddigi eljárásoktól különböző, és független eljárást, amelynek alkalmazásával egy gráf k-fáit elő tudjuk állitani. A módszer olyan k-fák előállitására lesz alkalmas, amely előre megadott $P_{i_1},\dots,P_{i_k}$ pontokat külön komponensekben tartalmaz. Speciális esetben (k=1) az eljárás a gráf összes fáit megadja. A tárgyalás egyszeres élü és hurokmentes gráfokra vonatkozik, de egy kevés kiegészitéssel alkalmazható többszörös élü gráfokra is. Ez az uj eljárás lényegében véve Ore egy közismert tételén alapul, ugy, hogy az eljárást elnevezhetnénk "Ore tételén alapuló módszernek".

1.

Legyen M egy n x n mátrix a következő tulajdonságokkal:

1) M bármely eleme 0 vagy 1

2) M bármely sorában legalább egy 1-es van.

Teljesitse $M_{i_1,\dots i_k}$ (ahol $1 \leqq i_1 < \dots < i_k \leqq n$) n x n tipusu mátrix az alábbi feltételeket:

1') $M_{i_1,\dots,i_k}$ i_j-edik sorában mindenütt 0 van ($j = 1,\dots,k$),

2') Ha $1 \leqq i \leqq n$, és $i \neq i_j$, akkor $M_{i_1,\dots,i_k}$ i-edik sorában n-1 darab 0 és pontosan egy 1-es van, 3') Ha $M_{i_1,\dots,i_k}$ valamely helyén 1-es van, akkor M megfelelő helyén is 1-es van.

2.1.1. <u>Definició. Ha</u> $M_{i_1,\dots,i_k}$ <u>teljesiti az 1'), 2') és 3') feltételeket, akkor azt mondjuk, hogy az</u> $M_{i_1,\dots,i_k}$ <u>mátrix az M mátrixnak</u> $(i_1,\dots,i_k)$<u>-egyszerüsitettje.</u>

Tegyen eleget az $M_{i_1,\dots,i_k}$ mátrix az 1') és 2') tulajdonságoknak. Rendeljük hozzá $M_{i_1,\dots,i_k}$ -hoz a következő 2xn méretü $\partial(M_{i_1,\dots,i_k})$ mátrixot:

$\partial(M_{i_1,\dots,i_k})$ felső sorában rendre az 1,2,...,n számok állnak, alsó sorában valamely i-edik helyén $(i \neq i_1,\dots,i_k)$ az a j szám áll, amelyre az $M_{i_1,\dots,i_k}$ mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának metszésében 1-es található. A "∂" hozzárendelés egy-egy értelmü kapcsolatot létesit egyfelől az összes 1') és 2') tulajdonsággal rendelkező nxn-es mátrixok, másfelől az összes olyan 2xn méretü mátrixok között, amelyekben

1") a felső sorban rendre 1,2,...,n számok állnak,

2") az alsó sor mindegyik eleme a 0,1,2,...,n számok egyike,

3") az alsó sorban pontosan k helyen áll 0.

2.

A továbbiakban irányitatlan gráfok is, és irányitott gráfok is fel fognak lépni. Hurkokat általában nem engedünk meg, kivéve, ha határozottan utalunk hurok létezésére. Továbbá az irányitatlan gráfokat egyszeres élüeknek tételezzük fel. Az irányitatlan él és az (ugyanazon pontokat összekötő) egymással ellentétesen irányitott élpár között nem teszünk különbséget.

Rendeljük hozzá a $P_1, P_2, \ldots, P_n$ számozott pontokat tartalmazó G irányitott gráfhoz azt a $\mu(G)$ n x n tipusu mátrixot, amelyben az i-edik sor és a j-edik oszlop metszésében 1-es áll, ha létezik a G-ben a (P_iP_j) él, és 0 áll, ha nincs (P_iP_j) él a G-ben. A $\mu(G)$ mátrixot a G adjacencia mátrixának nevezzük.

Észrevesszük, hogy a $G \to \mu(G)$ hozzárendelés egy-egy értelmü kapcsolatot létesit a $P_1, \ldots, P_n$ számozott pontokkal rendelkező (esetleg hurkot is tartalmazó) összes gráfok, és a 0,1 elemekkel rendelkező összes nxn tipusu mátrixok között. Hurokmentes gráf adjacencia mátrixában a főátlóban csupa 0 áll. Irányitatlan gráf adjacencia mátrixa szimmetrikus a főátlóra nézve.

Ore szerint [7], [8], [3] érvényes a következő

2.2.1. Tétel. Egy irányitott véges gráf, amelyben hurkok is lehetnek, akkor és csak akkor olyan tulajdonságu, hogy bármely pontjából egy és csak egy kifelé irányitott él indul, ha a gráf valamennyi összefüggő komponense eleget tesz az alábbi állitásoknak:

(a) a komponens pontosan egy kört tartalmaz (amely hurok is lehet),

(b) a komponens egyetlen körén az élek ciklikus irányitásuak,

(c) a komponensek körön kivüli élei a kör felé vannak irányitva.

2.2.2. <u>Definició.</u> <u>Egy irányitatlan, hurokmentes gráfot általánositott fának nevezünk, ha minden kom-ponense legfeljebb egy kört tartalmaz.</u> Speciálisan a k-fák egyben általánositott fák is.

Megállapodunk abban, hogy ha G egy irányitott gráf, ugy $\nu(G)$ jelölje azt az irányitatlan gráfot, a-melyben pontosan azok a pontpárok vannak összekötve él-lel, mint amelyek G-ben.

Végül a tárgyalás során a G gráf valamely rész-gráfján olyan gráfot értünk, amely tartalmazza a G ösz-szes pontját, és éleinek némelyikét. A részfa fogalmát is ennek megfelelő értelemben fogjuk használni. (Azaz részgráfon a bevezetésben megfogalmazott "szükebb érte-lemben vett részgráfot" értjük.)

3.

Tekintsünk egy G irányitatlan, egyszeres élü, hurokmentes és izolált ponttal nem rendelkező gráfot, amelynek pontjait a $P_1, \dots, P_n$- nel számoztuk. ($n \geq 1$). Legyen $M = \mu(G)$. Rögzitsük az $i_1, i_2, \dots, i_k$ számokat ($1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$). Ezután fussa be $M_{i_1, \dots i_k}$ az M mátrix összes $(i_1, \dots, i_k)$-egyszerüsitettjeit.

2.3.1. <u>Tétel.</u> <u>Az</u> $F^k = \nu(\mu^{-1}(M_{i_1, \dots, i_k}))$ <u>gráfok mindegyike eleget tesz az alábbi öt állitásnak:</u>

(A) F^k <u>részgráfja</u> G-<u>nek</u>,

(B) F^k <u>általánositott fa</u>,

(C) F^k-<u>nak a</u> P_{i_j}-<u>t tartalmazó összes komponense</u>

<u>fa</u>; P_{i_j} <u>esetleg izolált pont</u> ($j = 1,\dots,k$),

(D) F^k-<u>nak a</u> P_{i_j}-<u>től különböző egyik pontja sem izolált</u> ($j = 1,\dots,k$).

(E) F^k-<u>nak tetszőleges komponensében legfeljebb egy</u> P_{i_j} <u>pont szerepel</u> ($j = 1,\dots,k$).

<u>Forditva: Ha egy</u> F^k <u>gráf teljesiti az</u> (A), (B), (C), (D) <u>és</u> (E) <u>feltételeket, akkor</u> F^k <u>legalább egyféle módon előáll valamelyik</u> $M_{i_1,\dots,i_k}$-<u>ból</u> $\nu(\mu^{-1}(M_{i_1,\dots,i_k}))$ <u>alakban.</u>

<u>Bizonyitás:</u>

Legyen $M_{i_1,\dots,i_k}$ az $M = \mu(G)$ egy $(i_1,\dots,i_k)$-egyszerüsitettje. Triviális, hogy $F^k = \nu(\mu^{-1}(M_{i_1,\dots,i_k}))$ a G-nek részgráfja.

Képezzük azt a $M'_{i_1,\dots,i_k}$ mátrixot, amely $M_{i_1,\dots,i_k}$-ból ugy áll elő, hogy minden i_j-edik sora i_j-edik helyére a 0 helyett 1-est irunk ($j = 1,\dots,k$). Igy a $\mu^{-1}(M'_{i_1,\dots,i_k})$ olyan irányitott gráf, amelynek minden pontjából egyetlen él irányul kifelé. Ore tételét alkalmazva $\mu^{-1}(M'_{i_1,\dots,i_k})$ minden komponense pontosan egy kört (ill. hurkot) tartalmaz. Visszatérve $\mu^{-1}(M'_{i_1,\dots,i_k})$-ról $\mu^{-1}(M_{i_1,\dots,i_k})$-ra, el kell hagynunk az előbbiből éppen k számu hurkot, tehát $\nu(\mu^{-1}(M_{i_1,\dots,i_k}))$ valóban általánositott fa. Mivel pedig a hurkokat éppen a P_{i_j} pontból hagytuk el, szükségképpen (C) is teljesül ($j=1,\dots,k$).

Legyen $P \neq P_{i_j}$ tetszőleges pont G-ben. Tekintsük e pontot a $\mu^{-1}(M'_{i_1,\dots,i_k})$-ban. Szükségképp P egy olyan komponensben van, amelyik vagy kört, vagy hurkot tartalmaz. Ha e tekintett komponens kört tartalmaz, ugy e kör létezik a $\nu(\mu^{-1}(M_{i_1,\dots,i_k}))$-ban is, tehát P nem izolált. Ha viszont a szóbanforgó komponens hurkot tartalmaz, akkor P valamelyik P_{i_j}-vel összefügg, s ez az összefüggés a $\nu(\mu^{-1}(M_{i_1,\dots,i_k})$-ban is fennáll. Tehát valóban fennáll (D).

Mivel pedig minden P_{i_j}-re a $\mu^{-1}(M'_{i_1,\dots,i_k})$-ban hurok illeszkedik, ismét Ore tételére hivatkozva F^k egyetlen komponense sem tartalmazhat egynél több P_{i_j} pontot.

A tétel megforditásának bizonyitásához tegyük fel most már, hogy F^k teljesiti az (A), (B), (C), (D), (E) feltételek mindegyikét. Most F^k-hoz megadunk egy olyan $F^{k'}$ irányitott gráfot, amelyre egyrészt $F^k = \nu(F^{k'})$ teljesül, másrészt $\mu(F^{k'})$ megegyezik valamely $M_{i_1,\dots,i_k}$-val.

Vezessünk be az F^k komponenseiben egy irányitást az alábbi szabályok szerint: Ha a komponens tartalmazza valamelyik P_{i_j}-t ($j = 1,\dots,k$), tehát a komponens ((C) miatt) fa, annak éleit irányitsuk P_{i_j} felé (feltéve, ha P_{i_j} nem izolált pont). Ha a komponens tartalmaz kört, ugy annak éleit irányitsuk ciklikusan, a többi élet a kör felé. Ha pedig a komponens nem tartalmazza sem valamelyik P_{i_j}-t, sem kört, ugy (D) teljesülése miatt legalább egy élet tartalmaz. Legyen <u>e</u> a komponens egy (tetszőleges) éle. Most vegyünk fel <u>e</u> helyett két, ellentétesen irányitott élet, a komponens többi élét pedig (ha ilyen van) irányitsuk az igy keletkezett kör felé. Igy nyertünk egy $F^{k'}$ irányitott gráfot, amelyre triviálisan teljesül: $\nu(F^{k'}) = F^k$.

Tekintsük ezután azt az $F^{k''}$ irányitott gráfot, amely $F^{k'}$-ből ugy adódik, hogy minden P_{i_j} pontban felveszünk egy hurkot. Igy $F^{k''}$-re teljesül Ore tétele. Ezt azt jelenti, hogy $\mu(F^{k''})$ minden sora pontosan egy 1-est tartalmaz. $F^{k''}$-ről a hurkok törlésével visszatérhetünk $F^{k'}$-re; ez azt jelenti, hogy $\mu(F^{k''})$ minden i_j sorában az 1 helyett 0-t irva éppen $\mu(F^{k'})$-t nyertük. De akkor $\mu(F^{k'})$ éppen a $\mu(G)$ egy $(i_1,\dots,i_k)$- egyszerüsitettje, azaz $\mu(F^{k'}) = M_{i_1,\dots,i_k}$, amivel a bizonyitást befejeztük.

A bizonyitásból az is kiderül, hogy adott F^k-hoz általában több olyan $M_{i_1,\dots,i_k}$ szerkeszthető, amelyre érvényes: $F^k = \nu(\mu^{-1}(M_{i_1,\dots,i_k}))$. A többértelmü szerkeszthetőség az F^k olyan komponenseinek többféle irányithatóságából adódik, amelyikben kör van, illetve amelyik komponens egyik P_{i_j} pontot sem tartalmazza (ellentétesen irányitott $\underline{e}$ él megválasztása!).

Megjegyezzük, hogy a tételben szereplő F^k általánositott fák komponenseinek száma legalább k, éleinek száma legfeljebb (n-k).

A komponensekre tett megjegyzés következik a (C) tulajdonságból. Az élekre tett megjegyzés viszont onnan adódik, hogy $F^{k'}$ irányitott éleinek száma pontosan (n-k). Akkor a "ν" hozzárendelésből következik, hogy $\nu(F^{k'})$ éleinek száma nem lehet nagyobb (n-k)-nál.

A 2.3.1. tételben szereplő G gráftól azért kell megkivánnunk az izolált pont mentességet, hogy tetszőleges $i_1,\dots,i_k$ rögzitése esetén létezzék az $(i_1,\dots,i_k)$-egyszerüsitett. E feltételen lehet enyhiteni, ha az $(i_1,\dots,i_k)$-

egyszerüsitett fogalmát olyan M mátrixra is kiterjesztjük, amelynek csupa 0 elemből álló sora is van. Ilyen esetben meg kell kivánni, hogy a csupa 0 elemből álló sorok száma legfeljebb k lehet, és a rögzitett $i_1,\dots,i_k$ számok között az ilyen sorok sorindexe mind szerepeljen.

A 2.3.1. tételben szereplő F^k általánositott fa, mint ahogyan arra a bizonyitás befejezése után már rámutattunk, általában több $M_{i_1,\dots,i_k}$-ból előáll $\nu(\mu^{-1}(M_{i_1,\dots,i_k}))$ alakban. Ha azonban még az is igaz, hogy az F^k általánositott fa a G gráfnak egy k-fája, akkor az előállitás egyértelmü. Pontosabban, érvényes a következő

2.3.2. <u>Tétel.</u> <u>Ha</u> G <u>egyszeres élü, hurok- és izolált pont mentes irányitatlan gráf a</u> $P_1,\dots,P_n$ <u>számozott pontokkal, és</u> $P_{i_1},\dots,P_{i_k}$ <u>a</u> G <u>különböző pontjai</u> $(1 \leqq i_1 < \dots < i_k \leqq n)$, <u>valamint</u> $F^k_{i_1,\dots,i_k}$ <u>a</u> G <u>gráfnak olyan k-fája, amelynek mindegyik komponensére a</u> P_{i_j} <u>pontokból egyet és csak egyet tartalmaz</u> $(j = 1,\dots,k)$, <u>akkor az</u> $M = \mu(G)$<u>-nek pontosan egy olyan</u> $M_{i_1,\dots,i_k}$ $(i_1,\dots,i_k)$<u>-egyszerüsitettje van, amelyre érvényes</u> $F^k = \nu(\mu^{-1}(M_{i_1,\dots,i_k}))$.

<u>Bizonyitás:</u>

Az existencia bizonyitásához elegendő arra hivatkozni, hogy $F^k_{i_1,\dots,i_k}$ teljesiti az 1. tétel (A), (B), (C), (D) és (E) feltételeit. Akkor az 1. tétel megforditása éppen az existenciát biztositja.

Az egyértelmüség belátásához feltehető, hogy $k < n$. A továbbiakban tegyük fel, hogy $F^k_{i_1,\dots,i_k} = \nu(\mu^{-1}(M^{(1)}_{i_1,\dots,i_k}))$ =

$= \nu(\mu^{-1}(M^{(2)}_{i_1,\ldots,i_k}))$, ahol $M^{(1)}_{i_1,\ldots,i_k} \neq M^{(2)}_{i_1,\ldots,i_k}$. Megmutatjuk, hogy ez lehetetlen.

A feltevés folytán létezik olyan $j \neq i_1,\ldots,i_k$, $(j = 1,\ldots,n)$, hogy $M^{(1)}_{i_1,\ldots,i_k}$ j-edik sorában az ℓ_1-edik, $M^{(2)}_{i_1,\ldots,i_k}$ j-edik sorában pedig az ℓ_2-dik elem az 1-es, ahol $\ell_1 \neq \ell_2$ $(\ell_1,\ell_2 = 1,\ldots,n)$. Ez azt jelenti, hogy P_j, P_{ℓ_1} és P_{ℓ_2} az $F^k_{i_1,\ldots,i_k}$-nak ugyanahhoz a komponenséhez tartoznak. Tartozzék ehhez a komponenshez a P_{i_m} kiszemelt pont $(m = 1,\ldots,k)$. Akkor $\mu^{-1}(M^{(1)}_{i_1,\ldots,i_k})$-ban P_j-ből P_{i_m}-be P_{ℓ_1}-en keresztül $\mu^{-1}(M^{(2)}_{i_1,\ldots,i_k})$-ban pedig P_j-ből P_{i_m}-be P_{ℓ_2}-őn keresztül (irányitott) ut vezet. Ez azt jelenti, hogy $F^k_{i_1,\ldots,i_k}$ egyik komponensében P_j-ből P_{i_m}-be két különböző ut vezet, ami ellentmond annak, hogy $F^k_{i_1,\ldots,i_k}$ k-fa. Ezzel a bizonyitást befejeztük.

A 2.3.2. tétel G-re vonatkozó feltételét a 2.3.1. tétel után elmondottakhoz hasonlóan lehetne enyhiteni. Igy nyernénk, hogy a G gráf izolált pontjainak száma legfeljebb k lehet, és az $i_1,\ldots,i_k$ rögzitett számok ugy választandók, hogy köztük legyen G összes izolált pontjának indexe.

k = 1 esetben a 2.3.1. és a 2.3.2. tételek egy-egy speciális esetét nyerjük. E speciális eseteket külön is megfogalmazzuk a későbbi alkalmazás kedvéért:

2.3.3. <u>Tétel.</u> <u>Legyen</u> G <u>egy irányitatlan, egyszeres élü, hurokmentes és összefüggő gráf, a</u> $P_1,\ldots,P_n$ <u>pont számozással,</u> <u>továbbá</u> $M = \mu(G)$. <u>Rögzitsük az</u> i <u>számot</u> $(1 \leq i \leq n)$. <u>Ezután fussa be</u> M_i <u>az</u> M <u>mátrix összes</u> i-<u>egyszerüsitettjeit.</u>

Akkor az $F = \nu(\mu^{-1}(M_i))$ gráfok mindegyike eleget tesz az alábbi négy állitásnak:

(A) F részgráfja G-nek,

(B) F általánositott fa,

(C) F-nek a P_i-t tartalmazó komponense fa, P_i esetleg izolált pont, és

(D) F-nek a P_i-től különböző egyik pontja sem izolált.

2.3.4. Tétel. Ha G egyszeres élü, hurokmentes, összefüggő és irányitatlan gráf a $P_1,\dots,P_n$ számozott pontokkal, és P_i a G gráf egy rögzitett pontja $(i = 1,\dots,n)$, valamint F a G gráf egy fája, akkor az $M = \mu(G)$-nek pontosan egy olyan M_i i-egyszerüsitettje van, amelyre érvényes: $F = \nu(\mu^{-1}(M_i))$.

4.

A 2.3.2. tétel figyelembe vételével a G gráf összes $F^k_{i_1,\dots,i_k}$ k-fáit ugy kivánjuk előállitani, hogy képezzük a $\mu(G)$ mátrix összes lehetséges $(i_1,\dots,i_k)$-egyszerüsitettjeit. Ezek között az összes k-fát előállitó $M_{i_1,\dots,i_k}$ egyszerüsitettek előfordulnak, mégpedig egyszeres példányszámmal. A G gráf k-fái mellett természetesen fellépnek a 2.3.1. tétel (A), (B), (C), (D) és (E) feltételeinek eleget tevő egyéb F^k általánositott fák is. A továbbiakban megadunk egy olyan eljárást, amelynek alkalmazásával az $(i_1,\dots,i_k)$-egyszerüsitettekből kiválogathatók az $F^k_{i_1,\dots,i_k} = \nu(\mu^{-1}(M_{i_1,\dots,i_k}))$ egyenletnek eleget tevő $(i_1,\dots,i_k)$-egyszerüsitettek. Az eljárás lefolytatásához segitségül vesszük a $\mu(G)$-nek $(i_1,\ldots,i_k)$-egyszerüsitettjeihez rendelt $\delta(M_{i_1,\ldots,i_k})$ mátrixokat.

Jelöljük a tekintett k-fák halmazát $\{F^k_{i_1,\ldots,i_k}\}$-val, a $\mu(G)$ mátrix $(i_1,\ldots,i_k)$-egyszerüsitettjeinek halmazát $\{M_{i_1,\ldots,i_k}\}$ -val. A 2 §.1. pontjában már megjegyeztük, hogy minden $M_{i_1,\ldots,i_k}$ mátrixhoz egyetlen $\delta(M_{i_1,\ldots,i_k})$ 2 x n méretü mátrix tartozik. Igy, a $\{M_{i_1,\ldots,i_k}\}$ halmaz kölcsönösen egyértelmü módon leképezhető a $\{\delta(M_{i_1,\ldots,i_k})\}$ halmazra. Végeredményben a 2.3.2. tétel szerint az $\{F^k_{i_1,\ldots,i_k}\}$ halmaz egy-egy értelmü módon leképezhető a $\{\delta(M_{i_1,\ldots,i_k})\}$ egy részhalmazára. A továbbiakban megadunk egy eljárást a $\{\delta(M_{i_1,\ldots,i_k})\}$ halmaz elemeire, amelynek segitségével kiválogathatók azok a $\delta(M_{i_1,\ldots,i_k})$ elemek, amelyek az $F^k_{i_1,\ldots,i_k} \longrightarrow$ $\longrightarrow \delta(M_{i_1,\ldots,i_k})$ leképezésben szerepelnek. A kiválogatott $\delta(M_{i_1,\ldots,i_k})$ elemek éppen az $F^k_{i_1,\ldots,i_k}$ k-fákat reprezentálják, mégpedig az $F^k_{i_1,\ldots,i_k} = \nu(\overset{-1}{\mu}(M_{i_1,\ldots,i_k}))$ módon.

Tekintsünk egy $\delta(M_{i_1,\ldots,i_k})$ mátrixot.

2.4.1. <u>Definició.</u> <u>Legyen</u> $\varphi(x)$ <u>az</u> $\{1,\ldots,n\}$ <u>véges halmazon értelmezett egyváltozós függvény,</u> $\varphi(i)$ <u>jelentse éppen a</u> $\delta(M_{i_1,\ldots,i_k})$ <u>mátrix második sorának i-edik elemét</u> $(1 \leqq i \leqq n)$. <u>A</u> $\varphi(x)$ <u>függvényt a</u> $\delta(M_{i_1,\ldots,i_k})$ <u>mátrixhoz rendelt függvénynek nevezzük.</u>

Szemeljük ki ezután a $\delta(M_{i_1,\ldots,i_k})$ mátrix felső sorának egy (tetszőleges) i-edik elemét $(1 \leqq i \leqq n)$. Az i-edik elemből kiindulva képezzük a következő sorozatot:

$$i, \varphi(i), \varphi(\varphi(i)), \varphi(\varphi(\varphi(i))),\ldots$$

A következő esetek lehetségesek:

1. A sorozat képzése véges sok lépés után megszakad. Ez akkor és csak akkor következik be, ha a sorozat valamelyik tagja 0. (Ugyanis $\varphi(0)$ nincs értelmezve). Továbbá a sorozat tagjainak száma legfeljebb n.

2. A sorozat képzése vég nélkül folytatható. Ebben az esetben a sorozat egy olyan tagjához jutunk el, amely már a korábban képzett tagok között szerepelt. A legelső ismétlődő tagtól kezdve a sorozat további tagjai is rendre ismétlődnek ("szakaszos ismétlődés"). Világos, hogy az első ismétlődő sorozat tag tagszáma legfeljebb n.

2.4.2. <u>Definició.</u> <u>A</u> $\delta(M_{i_1,\ldots,i_k})$ <u>mátrixon végrehajtott, a felső sora i-edik elemén kezdett</u> $(i = 1,\ldots,n)$ <u>ciklusvizsgálaton az</u>

$$i, \varphi(i), \varphi(\varphi(i)), \varphi(\varphi(\varphi(i))),\ldots \qquad (2.-1)$$

<u>sorozat képzését nevezzük, ahol</u> $\varphi(x)$ a $\delta(M_{i_1,\ldots,i_k})$ <u>mátrixhoz rendelt függvény. A ciklusvizsgálatot véges kimenetelünek nevezzük, ha a</u> (2.-1) <u>sorozat véges; ellenkező esetben a ciklusvizsgálat nem véges kimenetelü.</u>

A korábbi megjegyzésekből következik, hogy "véges" ill. "nem véges kimenetelü ciklusvizsgálat" döntéshez a (2.-1) sorozatnak legfeljebb az első n tagját kell előállitani.

2.4.3. <u>Definició.</u> <u>A</u> $\delta(M_{i_1,\ldots,i_k})$ <u>mátrixon végrehajtott teljes ciklusvizsgálaton a ciklusvizsgálatok olyan sorozatát értjük, amelyek rendre a mátrix felső sorának</u>

1., 2.,...,n-edik elemén kezdődnek. A teljes ciklusvizsgálat véges kimenetelü, ha minden ciklusvizsgálata véges kimenetelü; ellenkező esetben a teljes ciklusvizsgálat nem véges kimenetelü.

Annak eldöntéséhez tehát, hogy a $\delta(M_{i_1,\dots,i_k})$ mátrixon végrehajtott teljes ciklusvizsgálat véges kimenetelü-e, mind az n ciklusvizsgálatot el kell végezni. Nem véges kimenetelü teljes ciklusvizsgálatot elég addig folytatni, amig találunk egy nem véges kimenetelü ciklusvizsgálatot. Végeredményben tehát "véges" ill. "nem véges kimenetelü teljes ciklusvizsgálat" döntéshez legfeljebb n^2 sorozat-tagot kell képeznünk.

2.4.1. Tétel. Legyen G egyszeres élü irányitatlan gráf a $P_1,\dots,P_n$ pontokkal. $F^k_{i_1,\dots,i_k}$ a G gráf olyan k-fája, amely az $i_1,\dots,i_k$ indexü pontokból komponensenként pontosan egyet tartalmaz, valamint $M_{i_1,\dots,i_k}$ a $\mu(G)$ egy $(i_1,\dots,i_k)$-egyszerüsitettje. Akkor és csak akkor $F^k_{i_1,\dots,i_k} = \nu(\mu^{-1}(M_{i_1,\dots,i_k}))$, ha a $\delta(M_{i_1,\dots,i_k})$-n végrehajtott teljes ciklusvizsgálat véges kimenetelü.

Bizonyitás:

Legyen $F^k_{i_1,\dots,i_k} = \nu(\mu^{-1}(M_{i_1,\dots,i_k}))$. A 2.3.2. tétel szerint egyetlen olyan $M_{i_1,\dots,i_k}$ van, amely az előbbi egyenletet kielégiti. Továbbá a $\mu^{-1}(M_{i_1,\dots,i_k})$ egy olyan irányitott gráf, amelynek a $P_{i_1,\dots,i_k}$ pontjait kivéve, minden pontjából egyetlen kifelé irányitott éle, és pontosan k komponense van. Vegyünk fel a $P_{i_1},\dots,P_{i_k}$ pontokban egy-egy hurkot. Az igy nyert irányitott gráfot jelöljük $F^{k'}$-vel. $F^{k'}$-re Ore tételét alkalmazva nyerjük, hogy minden komponensében az élek a komponensben lévő P_{i_j}

felé irányitottak. De akkor a $\mu^{-1}(M_{i_1,\dots,i_k})$ komponenseiben szereplő élekre hasonló igaz.

Hajtsunk végre a $\delta(M_{i_1,\dots,i_k})$ mátrixon teljes ciklusvizsgálatot. Vegyük észre, hogy a $\delta(M_{i_1,\dots,i_k})$-n végrehajtott, az i-edik elemmel kezdett ciklusvizsgálat éppen azt jelenti, hogy a $\mu^{-1}(M_{i_1,\dots,i_k})$ irányitott gráf P_i-dik pontjából az irányitásnak megfelelően élek mentén haladva a gráf egyéb pontjai "felé haladunk". Más szóval a ciklusvizsgálat éppen a P_i-ből kiinduló irányitott utat határoz meg. Triviális, hogy ez az irányitott ut éppen valamelyik P_{i_j} -ben végződik. $(j = 1,\dots,k)$. De a $\delta(M_{i_1,\dots,i_k})$ mátrixban a 2 §.1.pont 3" tulajdonsága folytán az alsó sor minden i_j-edik eleme 0 $(j = 1,\dots,k)$. Szükségképpen a $\delta(M_{i_1,\dots,i_k})$-n végrehajtott teljes ciklusvizsgálat véges kimenetelü.

Ezután tegyük fel, hogy $\delta(M_{i_1,\dots,i_k})$-n végrehajtott teljes ciklusvizsgálat véges kimenetelü. Akkor a ciklusvizsgálatról tett előbbi megjegyzés folytán a $\mu^{-1}(M_{i_1,\dots,i_k})$ irányitott gráf nem tartalmazhat (irányitott) kört. Még inkább érvényes, hogy $\nu(\mu^{-1}(M_{i_1,\dots,i_k}))$ körmentes gráf. A $\mu^{-1}(M_{i_1,\dots,i_k})$ gráf irányitott éleinek száma pontosan n-k. Továbbá $\mu^{-1}(M_{i_1,\dots,i_k})$ irányitott körmentessége folytán minden két különböző pontja között egyetlen irányitott él létezhet csak. Ebből következik, hogy $\nu(\mu^{-1}(M_{i_1,\dots,i_k}))$ éleinek száma is pontosan n-k. A bevezetés 8. tétele értelmében $\nu(\mu^{-1}(M_{i_1,\dots,i_k}))$ szükségképpen a G gráf egy $F^k_{i_1,\dots,i_k}$ k-fája. Ezzel a bizonyitást befejeztük.

A 2 §.1-4. pontjában elmondottak alapján nyerjük a

G <u>gráf</u> összes olyan k-<u>fáinak előállítására szolgáló algoritmust</u>, amelyek az előre kiszemelt $P_{i_1},\dots,P_{i_k}$ pontokat külön komponenseikben tartalmazzák ($k \leq n$):

I. Képezzük a G adjacencia mátrixát,

II. Ebből előállitjuk az összes lehetséges $M_{i_1,\dots,i_k}$ $(i_1,\dots,i_k)$-egyszerüsitetteket,

III. Az $M_{i_1,\dots,i_k}$ egyszerüsitettekből áttérünk a megfelelő $\delta(M_{i_1,\dots,i_k})$ mátrixokra,

IV. Ez utóbbiakon teljes ciklusvizsgálatot hajtunk végre. Véges kimenetelü teljes ciklusvizsgálat esetén a keresett k-fákat éppen $\nu(\mu^{-1}(M_{i_1,\dots,i_k}))$ alakban felleltük.

Megjegyezzük, hogy ha a G gráfnak nem létezik a feltételeknek megfelelő k-fája, ugy ez az algoritmus II. lépésénél kiderül. Az elmondottakból az is látszik, hogy a k-fák ilyen előállitása egy k-fát csak egyetlen példányban ad meg. Tehát az eljárás mentes a többpéldányu előállitástól.

k= 1 esetében az algoritmus éppen a G gráf összes fáját szolgáltatja. Most az előre kiszemelt pont a G gráf akármelyik pontja lehet. Látjuk tehát, hogy a G gráf fa előállitása az ismertetett algoritmussal pontosan n féleképpen történhet. Természetesen az előállitott fák minden esetben ugyanazok. Ez a körülmény módot nyujt arra, hogy a többféle előállitási lehetőségből a számitástechnikailag legmegfelelőbbet válasszuk. Erre a kérdésre a következő pontban még visszatérünk.

5.

A G gráf k-fái előállításának a 2 § 4. pontjában ismertetett módszeréhez még néhány számitástechnikai és egy elvi megjegyzést teszünk.

Számitástechnikai szempontból rendkivül fontos, hogy az algoritmus I, II és III. lépését összevonhatjuk. Tekintsük ugyanis a G gráf $\mu(G)$ adjacencia mátrixát. Ebből képezzük a következő M_G ugynevezett generáló mátrixot.

2.5.1. Definició. M_G legyen nxn mátrix, elemei a $0, 1, \dots, n$ számok, a következőképpen definiált:

1) ahol az adjacencia mátrixnak 0 az eleme, ott legyen M_G megfelelő eleme is 0,

2) ahol pedig az adjacencia mátrix eleme 1, ott az M_G megfelelő eleme legyen éppen a szóbanforgó 1 elem adjacencia mátrix-beli oszlopindexe.

Ezután egy $M_{i_1, \dots, i_k}$ egyszerüsitettnek megfelelő $\delta(M_{i_1, \dots, i_k})$ mátrix alsó sorát (a "hasznos információt tartalmazó sorvektort") közvetlenül elő tudjuk állitani M_G-ből a következő módon: válasszunk ki az M_G minden sorából rendre egy-egy elemet ugy, hogy

1') ha a j sorindex ($j = 1, \dots, n$) az $i_1, \dots, i_k$ számok egyikével sem egyezik meg, ugy a kiválasztott elem 0-tól különbözzék,

2') ha pedig a j sorindex az $i_1, \dots, i_k$ számok valamelyike, ugy a kiválasztott elem 0 legyen (a G hurokmentes!).

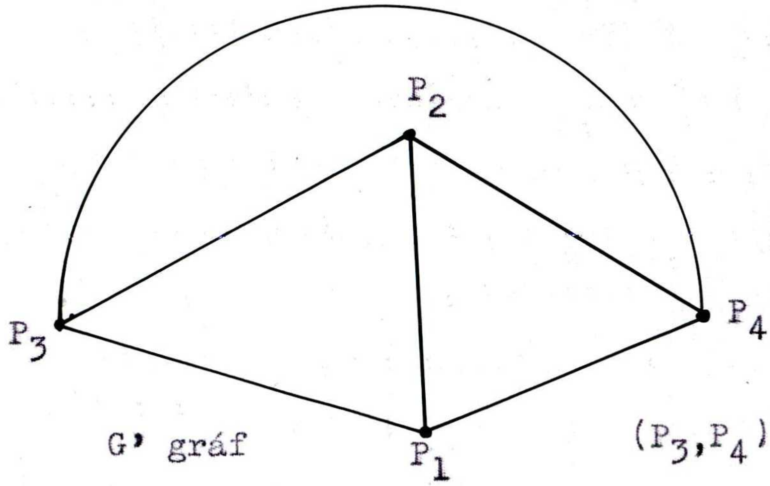
Az igy képezett sorvektoron a teljes ciklusvizsgálat értelemszerüen közvetlenül is végrehajtható.

Számitástechnikailag a teljes ciklusvizsgálat is sok esetben egyszerüsithető. Ugyanis belátható, hogy a teljes ciklusvizsgálat kimenetele nem változik, ha az egyes ciklusvizsgálatok során azokból az elemekből nem inditunk ciklusvizsgálatot, melyek a korábbi ciklusvizsgálatok során már előfordultak.

A G gráf fáinak előállitásánál (k = 1 eset) gyakorlatilag célszerü azt a P_i pontot rögziteni, amely i-re az M_G generáló mátrix i-edik sora a legtöbb nem 0 elemet tartalmazza. Ebben az esetben belátható, hogy M_G-ből képezve a $\delta(M_i)$ alsó sorát, e sorvektor szükségképpen tartalmaz az M_G i-edik oszlopából választott elemet. (Ellenkező esetben ugyanis a $\delta(M_i)$ mátrixon végrehajtott ciklusvizsgálat nem lehet véges kimenetelü.)

Elvileg lényeges a következő megjegyzés: e leirt eljárás alkalmas többszörös élü G gráf k-fáinak előállitására is. Ilyen esetben pl. ugy járhatunk el, hogy a többszörös éleket "egy élnek tekintjük". Az igy kapott G' gráf k-fáit már ismert módon előállitjuk. Előállitás után, azokból a fákból, amelyek az "egy élnek tekintett" élet tartalmazzák, külön nyerhetjük a G fáit, a többszörös élek figyelembe vételével.

Példaként állitsuk elő a 2. ábra G gráfjának összes fáit. A többszörös élet egynek tekintve nyerjük a 6. ábrán látható G' gráfot (6. ábra). Érvényes



G' gráf

(P_3,P_4) "többszörös él"

6. ábra

$$M(G') = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad M_{G'} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad (2.-2)$$

Most bármelyik pont rögzithető, számitástechnikaileg közömbös. Legyen a rögzitett pont pl. P_4, akkor a lehetséges (M_4) mátrixok alsó sorvektorai:

~~(2140)~~, (2340), (2410), (2420), (2440), (3140), (3340), ~~(3410)~~, (3420), (3440), $(\underline{4}110)$, $(\underline{4}120)$, $(\underline{4}310)$, $(\underline{4}310)$, ~~$(\underline{4}320)$~~, $(\underline{4}340)$, $(\underline{4}410)$, $(\underline{4}420)$ és $(\underline{4}440)$.

A (2.-2) felirásánál eleve elhagytuk azokat a sorvektorokat, melyek a 4 számot nem tartalmazzák, és az "egynek tekintett" éleket reprezentáló számokat aláhuztuk. (Ilyenek a 4 az első helyen)

Elvégezve (2.-3) minden megfelelő $\delta(M_4)$ mátrixán a teljes ciklusvizsgálatot, látható, hogy 3 esetben a teljes ciklusvizsgálat nem véges kimenetelü. A megfelelő sorvektorokat (2.-3)-ban áthuztuk. A megmaradt sorvektorok száma 16. De minden aláhuzott sorvektor a G-ben 2 különböző fát jelent, igy nyertük, hogy G összes fáinak száma 24. Az eredményt összevetve (1.-4)-gyel látjuk az egyezést.

Másik példaként állitsuk elő a 2. ábra G gráfjának olyan 2-fáit, amelyek a P_3 és P_4 pontokat külön komponenseikben tartalmazzák. Ehhez ismét tekintsük a (2.-2)-nél látható M_G, generáló mátrixot. Most a $\delta(M_{3,4})$ alsó sorvektorainak képzésénél az M_G, harmadik és negyedik sorából 0-t kell választanunk. Ismét csak azokat a sorvektorokat irjuk fel, amelyekben a 3 és a 4 számok közül legalább az egyik előfordul:

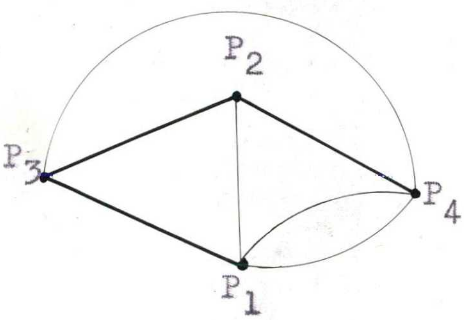
(2300), (2400), (3100), (3300), (3400), ($\underline{4}$100), ($\underline{4}$300)
($\underline{4}$400) (2.-4)

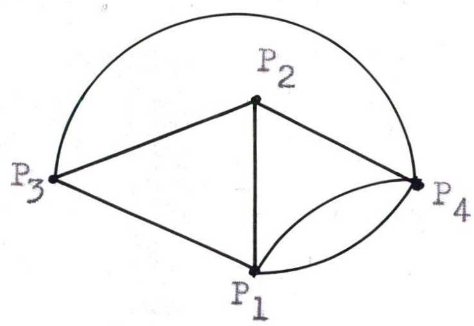
ahol az aláhuzás ismét kétszeres élre utal a G-ben.

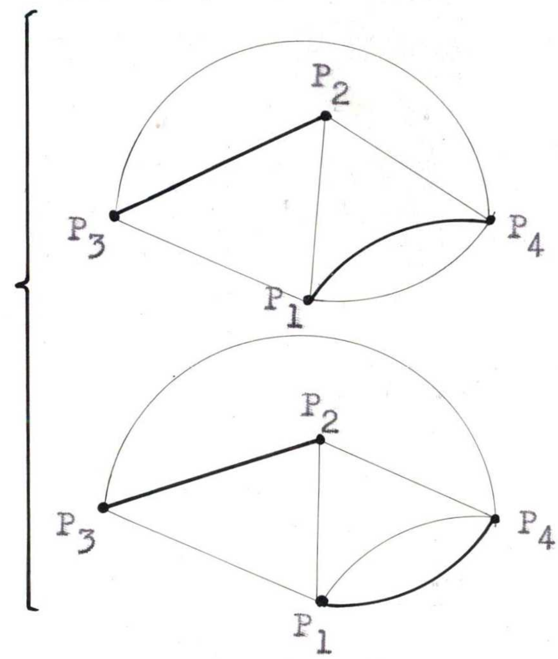
Most a teljes ciklusvizsgálat minden esetben véges kimenetelü. A kapott kettőfák száma G-ben, a kétszeres él figyelembevételével 11, az (1.-7)-tel egyezésben.

Megjegyezzük, hogy a k-fák "sorvektor alakjában" történő reprezentálásáról közvetlenül át lehet térni a megfelelő gráfra. Ehhez csak azt kell megfigyelnünk, hogy a $(k_1,\ldots,k_n)$ sorozat $k_i \neq 0$ eleme azt jelenti, hogy a tekintett k-fában előfordul a (P_i,P_{k_i}) él. Példaképpen a 7. ábrán szemléltettük a (3420) által reprezentált fát, és a ($\underline{4}$300) által reprezentált 2-fákat (7. ábra).

(3420):







7. ábra

3 §. k-FA ELŐÁLLITÁSI MÓDSZEREK ÖSSZEHASONLITÁSA

A továbbiakban összehasonlitjuk egy G gráf k-fáinak e dolgozatban ismertetett előállitási módszereit, mégpedig az 1 §-ban vázolt Hakimi-Green-féle szintézis, a Mayeda-Seshu-féle transzformációs, a Maxwell-Cline-féle algebrai és a 2 §-ban ismertetett, Ore tételét felhasználó módszert. Ez utóbbit a továbbiakban röviden "gráfelméleti módszer"-nek fogjuk nevezni.

Az összehasonlitás során figyelembe vesszük az egyes módszerek kifejtéséhez felhasznált elméletet: nevezetesen, a módszer elmélete milyen fogalmakat és tételeket használ fel előismeretül, milyen speciális fogalmakat vezet be, milyen tételeket állit fel a k-fa előállitásához, továbbá milyen feladatok megoldására alkalmas; továbbá vizsgálat tárgyává tesszük, hogy az egyes módszerek számitástechnikai felhasználása milyen sajátosságokat mutat: a k-fa előállitáshoz milyen kiinduló adatokra van szükség, mi jellemző a módszer alkalmazása során felhasznált algoritmusra, milyen az eredmény alakja (a k-fákat milyen alakban nyerjük), végül az adott módszerrel történő k-fa előállitásnak milyen digitális technikai tulajdonságai vannak.

1.

A k-fa előállitási módszerek a gráfelméleti módszer kivételével felhasználják a részgráf mint élek halmazának felfogását. A fogalom felhasználása a szintézis és a transzformációs módszernél közvetlen, mig az algebrai módszer erre épiti fel a részgráf polinom (speciális) fogalmát.

A részgráfnak mint élek halmazának tekintése azt eredményezi, hogy a szintézis és a transzformációs módszer felhasznál (közismert) halmazelméleti operációkat is, nevezetesen a szimmetrikus differencia operációt. E közös fogalmon kivül a szintézis módszer felhasználja még a "Cartesian szorzat" fogalmát, a transzformációs módszer pedig speciális gráfelméleti fogalmakat, ugy mint a vágat, alapvágat (és alapkör) fogalmakat [11]. Megjegyezzük, hogy az alapvágatok (és alapkörök) adott gráf esetén egyszerüen előállithatók alkalmasan definiált mátrixok szorzásával [11].

Az algebrai módszer egészen más jellegü fogalmakat használ fel kifejtéséhez. A vágatrészgráf fogalmán kivül (amely speciális fogalomként a transzformációs módszernél is jelentkezik) felhasználja a (véges) struktura, csoport, gyürü fogalmát, majd alkalmazza a véges Abel csoportok alaptételét.

A gráfelméleti módszer a teljes felépitésében szinte csak gráfelméleti fogalmakat alkalmaz. Igy felhasználja az irányitott gráfok fogalmát, és az ezekre érvényes Ore-féle tételt. Speciális fogalomként jelentkezik e módszerben az adjacencia mátrix fogalma is, ami szintén közismert a gráfelméletből.

A módszerek speciális fogalmait és tételeit megvizsgálva megállapitható, hogy a szintézis módszer fogalmai: parciálisok képzése, gráfok egyesitése a gyakorlati alkalmazás számára bonyolult fogalmak. E fogalmak segitségével már felirható egy olyan formula, (1.-1), amely szolgáltatja a G gráf összes fáit, és egy másik formula (1.-5), amellyel a G gráf keresett k-fái előállithatók. A formulák igazolása viszonylag egyszerüen történik. Az alapgondolat az, hogy a formulák speciális esetben való érvényessége triviális, a továbbhaladás pedig minden esetben teljes indukcióval lehetséges (Pl. megmutatható, hogy az (1.-5) formula k = 1-re triviális, majd k-ra alkalmazzuk a teljes indukciós következtetést, közben felhasználjuk a kettőfa halmazok parciális formában történő előállitását, amely külön segédtétel formájában megfogalmazható, stb.)

A transzformációs módszer speciális fogalmai a szintézis módszer hasonló fogalmainál egyszerübbek: elemtranszformáció (vagy éltranszformáció), alapfa, majd a tételei bizonyitása közben használt előre ill. hátrairányuló tulajdonságok (ezek a G gráf éleinek tulajdonságai, aszerint, hogy a transzformálás során a fa előállitásban "előre", ill. "hátra" haladunk). Végeredményben bonyolult a fa osztályok elemeit előállitó (1.-8) és (1.-9) formula, s a formula helyességének igazolása is nehézkes.

Igen elegáns és áttekinthető fogalmakat használ az algebrai módszer: részgráf polinomok, vágatpolinom halmaz, csucsvágat polinomok. A fa előállitás is elegáns: a fákat n-1 csucsvágat polinom "szorzata" szolgáltatja (1.4.1. tétel).

Hasonlóan elegáns fogalmakat mutat fel a gráfelméleti módszer is. Egyszerüsitett mátrixok, általánositott fa, teljes ciklusvizsgálat. E fogalmak felhasználásával egyszerüen bizonyitható tételek fogalmazhatók meg, és a keresett k-fákat szolgáltató tétel is könnyen igazolható (2.4.1. tétel).

Az ismertetett módszerek közül a szintézis és a gráfelméleti módszer a legnagyobb teljesitő képességü, mert alkalmazásukkal tetszőleges k esetén előállithatók a k-fák ($k \leqq n$ természetes), mig a transzformációs módszer csak fa előállitásra, az algebrai módszer pedig fa és 2-fa előállitására alkalmazhatók.

2.

Számitástechnikai szempontból megjegyezhető, hogy a legtöbb kiinduló adatot a szintézis módszer igényli. Itt ugyanis meg kell adni a G gráf egy alkalmas felbontásához tartozó G' és G" részgráfok összes fáit, és a felbontásnak megfelelő utakat. A kiinduló adatok száma nagymértékben növekszik, ha a feladat megoldásához nem elég a G gráf egyszeri felbontása.

Lényegesen kevesebb kiinduló adatot igényel a transzformációs módszer. Itt csupán induláskor csak az alapfa és az alapvágatok megadása szükséges, amely még "bonyolultabb gráfoknál" is viszonylag egyszerüen lehetséges. Megjegyezzük, hogy adott alapfa esetén az alapvágatokat jellemezni lehet számitástechnikai szempontból az un. alapvágat mátrixszal [11]. Ez a jellemzés digitális számológépen történő előállitás esetén rendkivül praktikus.

Igen kevés adat szükséges az algebrai módszer alkalmazásához: mindössze a G gráf (n-1) csucsvágat polinomját kell megadni (n a G gráf pontjainak száma). A csucsvágat polinomok vagy közvetlenül a gráf geometriai ábrájából felirhatók, vagy mátrix segitségével az alapvágatokhoz hasonlóan.

Legkevesebb és legkönnyebben megadható adat a gráfelméleti módszer alkalmazásához szükséges; itt csupán a generáló mátrix megadása kell, ami a gráf geometriai ábrájából közvetlenül felirható.

k-fa előállitási algoritmusok közül legnehézkesebb a szintézis és a transzformációs módszeren alapuló algoritmus. A szintézis módszeren felépülő algoritmus a szintézis módszer számitástechnikailag nehezen kezelhető fogalmai ("Cartesian szorzat", parciálisok) miatt válik nehézkessé, nem is szólva a "több lépéses szintézis" esetéről. A transzformációs módszer formulái ugyan a több lépéses generálást elkerülik, de rekurziv szerkezetük folytán a rájuk épülő algoritmus bonyolultságát eredményezik: a fa előállitás során korábbi eredményekhez kell visszatérni. E visszatérés a számitás folyamatát lassitja.

Az algebrai módszernek nemcsak az elmélete "elegáns", de a rája felépülő algoritmus is egyszerü. Ugyanis a csucsvágat polinomok "szorzása" az élek szorzatára vonatkozó kikötés figyelembe vételével nem sokban különbözik technikailag az elemi algebrából ismert polinomok szorzásától. A szorzást követő mod.2 összeadás ugyszintén rutinfeladat. Hasonlóképpen egyszerü a gráfelméleti módszeren felépülő algoritmus is: itt a generáló mátrix elemeiből sorozatot kell képezni, s azon teljes ciklusvizsgálatot végrehajtani. A sorozatképzés kissé "hasonlit" ahhoz, ahogyan a determináns érték számolásánál az egyes tagokat képezzük. Mint ahogyan azt már emlitettük, a teljes ciklusvizsgálat értelemszerüen végrehajtható a $\delta(M_{i_1,\dots,i_k})$ második során is (a képezett sorozaton).

Az egyes k-fa előállitási módszerek a keresett részgráfokat különböző formában adják meg: a szintézis és a transzformációs módszer megadja az eredmény k-fát az élek közvetlen felsorolásával, az algebrai módszer pedig a fát (vagy 2-fát) tag alakjában reprezentálja. A tag tényezői éppen a keresett részgráf élei. A gráfelméleti módszer szolgáltatja a k-fa éleinek végpontját, ami egyszeres élü gráfok esetében közvetlen és egyértelmü részgráf megadást jelent, többszörös élü gráfoknál még figyelembe kell venni az "ugyanazon végpontok által meghatározott él multiplicitását".

3.

Végül a 4 különböző módszert hasonlitsuk össze a digitális számitógép technikája szempontjából:

A kiinduló adatok "tárolhatósága" szempontjából vezet az algebrai és a gráfelméleti módszer. Gyakorlati feladat megoldása közben lényegesen több adatot kell tárolni a szintézis módszer és a transzformációs módszer használatánál. Itt megjegyzendő, hogy a leghátrányosabb helyzetben a szintézis módszer van, mert egy "bonyolult gráf" vizsgálata esetén szükség lehet a módszer többszöri alkalmazására is (a részgráfok fáinak megadása ujabb szintézist kiván).

Az előállitáshoz szükséges algoritmus a transzformációs módszernél a legbonyolultabb, a rekurziv formulák miatt. Elég bonyolult a szintézis módszer algoritmusa is a parciális képzés sajátossága miatt. Igen egyszerü az algebrai előállitás algoritmusa, és a gráfelméleti módszer algoritmusa. Az egyszerü algoritmus pedig könnyebb programozást jelent, másrészt rövidebb programot is.

Összevetve az algebrai és a gráfelméleti módszer programját, lényeges különbség mutatkozik a belső memória használatában: az algebrai módszer alkalmazása kivánja, hogy az összes lehetséges "élszorzatot" tároljuk a belső memóriában a program lefuttatása közben azért, hogy lehetségessé váljék a mod.2 összevonás. Hasonló a gráfelméleti módszernél nem szükséges. Itt ugyanis a könnyen programozható ciklusvizsgálat eldönti, hogy a talált egyszerüsitett a feltételeknek megfelelő k-fát reprezentál-e vagy sem. Ennek következménye, hogy jóllehet egy gráfelméleti módszer program futtatása több időt igényelhet, de kisebb belső memória kapacitást. A ciklusvizsgálat ügyes programozása azonban még a szükséges gépi időt sem növeli meg az algebrai program lefuttatásához képest.

Összegezve az összehasonlitást, megállapitható, hogy a k-fa előállitási módszerek közül a szintézis és a transzformációs módszer a gyakorlati alkalmazás számára bonyolult. Az algebrai módszer lényegesen egyszerü, tárgyalásához azonban felhasználja az algebra eredményeit, továbbá csak fák és 2-fák előállitására szolgál. A gráfelméleti módszer eleganciájában vetekszik az algebrai módszerrel, kifejtéséhez gráfelméleti fogalmakat és tételeket használ fel, és alkalmas tetszőleges k-fák előállitására. E módszer a többi módszerhez képest még digitális számitástechnikai szempontból is előnyösnek mondható, mert minimális belső memória kapacitást igényel.

A módszerek számitástechnikai összehasonlitása jól érzékelhető 1. és a 2 §-ban látott feladatok konkrét megoldásával. A példák ugyanannak a gráfnak az összes fái , és azonos feltételeknek megfelelő kettőfái előállitását mutatják be.

Végül a négy módszer összehasonlitását egy "összehasonlitó táblázattal" tesszük áttekinthetővé. (Összehasonlitó táblázat.)

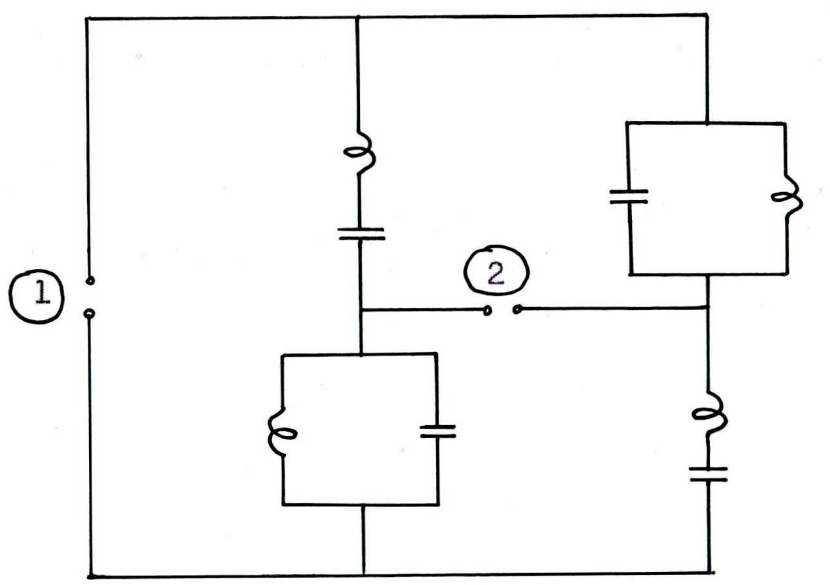
M Ó D S Z E R		szintézis (Hakimi-Green)	transzformációs (Mayeda-Seshu)	algebrai (Maxwell-Cline)	gráfelméleti (Pávó)
elmélet	kifejtésének elő-ismeretei	Szimmetrikus differencia, "Cartesian szorzat"	Szimmetrikus differencia, vágat, alapvágat, alapkör	struktura, csoport, gyürü; véges Abel csoportok alaptétele	irányitott gráfok, adjacencia mátrix; Ore tétele
	fogalmai és tételei	parciálisok, gráfok egyesitése; $T=\dfrac{\partial^{r-1}(T'\times T'')}{\partial(p'_{12}\cup p''_{12})\,\partial(p'_{23}\cup p''_{23})\ldots\partial(p'_{r-1,r}\cup p''_{r-1,r})}$ $T_{i_1,\ldots,i_k}=\dfrac{\partial^{k-1}T}{\partial p_{i_1,i_2}\,\partial p_{i_2,i_3}\ldots\partial p_{i_{k-1},i_k}}$	éltranszformáció, alapfa, előre és hátrairányuló tulajdonság, M sorozat; $T^{e_i}\stackrel{=}{=}\{F;\ F=F_0\oplus(e,e_i);\ e\in V_{e_i}(F_0),\ e\neq e_i\}$ $T^{e_{i_1},\ldots,e_{i_k}}\stackrel{=}{=}\{F;\ F=F'\oplus(e'_j,e_{i_k});\ F'\in T^{e_{i_1},\ldots,e_{i_{k-1}}};\ e'_j\in V_{e_{i_k}}(F')\cap V_{e_{i_k}}(F_0),\ e'_j\neq e_{i_k}\}$	részgráf polinomok, vágatpolinom halmaz, csucsvágat polinomok szorzata; $\prod V^{*}_{AB}=\sum$ élek szorzata	egyszerüsitett mátrixok, általánositott fa, teljes ciklusvizsgálat; $F^{k}_{i_1,\ldots,i_k}=\nu(\mu^{-1}(M_{i_1,\ldots,i_k}))$ a $\delta(M_{i_1,\ldots,i_k})$ -n végrehajtott teljes ciklusvizsgálat véges kimenetelü
	teljesitő képessége	k-fák előállitása, ha elő vannak irva a komponensek pontjai	fák előállitása	fák előállitása, és 2-fák előállitása, ha a komponensekben 1-1 pont adott	k-fák előállitása, ha adott a komponensek 1-1 pontja
számitástechnika	kiinduló adatok	G' és G" részgráf összes fái, és utak	alapfa, alapvágatok	n-1 csucsvágat polinom	generáló mátrix
	algoritmus	"Cartesian szorzat" és parciálisok képzése; bonyolult	Fa halmazok képzése a rekurziv formulák alapján; bonyolult	csucsvágat polinomok szorzása és mod 2 összevonás; egyszerü	sorozatképzés, teljes ciklusvizsgálat; egyszerü
	az eredmény alakja	k-fák éleinek közvetlen felsorolása	fák éleinek közvetlen felsorolása	fák és 2-fák élei megadása közvetett alakban	k-fák éleinek végpontjai
	digitális technika sajátosságai	sok kiinduló adat, terjedelmes program, részletprogramok többszöri megismétlésével	elég sok kiinduló adat, körülményes program, sok közbülső adat felhasználásával	kevés kiinduló adat, jól programozható eljárás, viszonylag nagy belső memóriaigény	igen kevés kiinduló adat, jól programozható eljárás, kis belső memóriaigény

Ö s s z e h a s o n l i t ó t á b l á z a t

4 §. ALKALMAZÁS

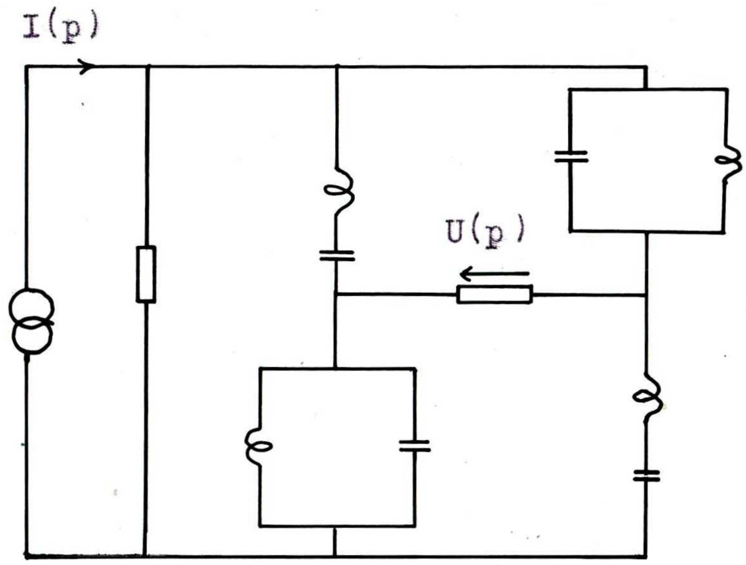
1. Kirchhoff 4. tétele

Tekintsük a 8. ábrán látható kapcsolási rajzot (8. ábra). A hiradástechnikában ez egy jól ismert másod-



8. ábra

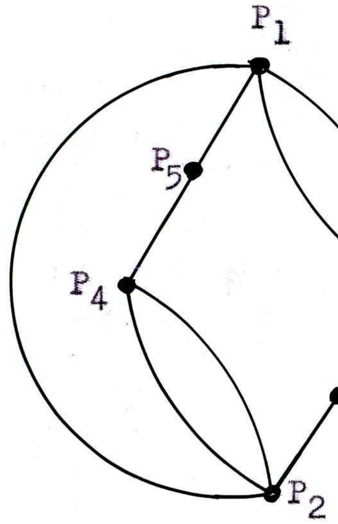
foku futási idő korrektor [1] kapcsolási rajza. Ilyen tipusu áramkörrel lehetséges egy villamos jel korrigálása a torzitatlan átvitel szempontjából. (Ilyen kapcsolást használnak pl. a szines televizió video jelének korrigálására vevőkészülékekben.) A torzult jelet az 1 bemeneti kapocspárra adva a 2 kapocspáron annak korrigáltja jelentkezik. Maga a kapcsolás lineáris, koncentrált paraméterü, passziv és invariáns áramköri elemekből épül fel [1]. A bemenő jelről tételezzük fel, hogy az egy ideális áramgenerátor jele, amellyel parallel kapcsolódik a meghajtó generátor ohmos belső ellenállása. Tegyük fel továbbá, hogy a kimenő jelet egy ohmos terhelés hasznositja, azaz a kapcsolás lezárása ohmos fogyasztó. A lezárási feltételeket a meghajtó generátorral együtt a 9. ábrán láthatjuk (9. ábra), ahol I(p) a meghajtó generátor



9. ábra

áramának, U(p) pedig a terhelő ellenállás kapcsain jelentkező feszültség Laplace transzformáltja, p pedig a komplex frekvencia jele [1].

Tekintsük a 9. ábrán látható hálózat G gráfját, amelyet ugy nyerünk, hogy az áramelágazási pontokat a gráf pontjainak, az áramköri elemeket pedig a gráf éleinek tekintjük. E hálózatgráf a 10. ábrán látható (10. ábra). A G gráf pontjait a $P_1, \ldots, P_6$ számozással láttuk el.



10. ábra

A bemeneti pontok a P_1 és P_2 számozást, a kimeneti pontok pedig a P_3, P_4 számozást kapták, az áram és a feszültség irányoknak megfelelően.

Jelöljük a gráf egy tetszőleges $\underline{e}$ élének megfelelő áramköri elem operátoros admittanciáját [1] $Y_e(p)$-vel. Akkor Kirchhoff 4. tétele [11] szerint az $\frac{U(p)}{I(p)}$ transzfer impedancia [1] a következőképpen irható fel:

$$\frac{U(p)}{I(p)} = \frac{\sum\limits_{\forall F^2} \left(\pm \prod\limits_{e \in F^2} Y_e(p) \right)}{\sum\limits_{\forall F} \left(\prod\limits_{e \in F} Y_e(p) \right)} \qquad (4.-1)$$

ahol F a hálózatgráf fája, F^2 a következő feltételnek eleget tevő kettőfája:

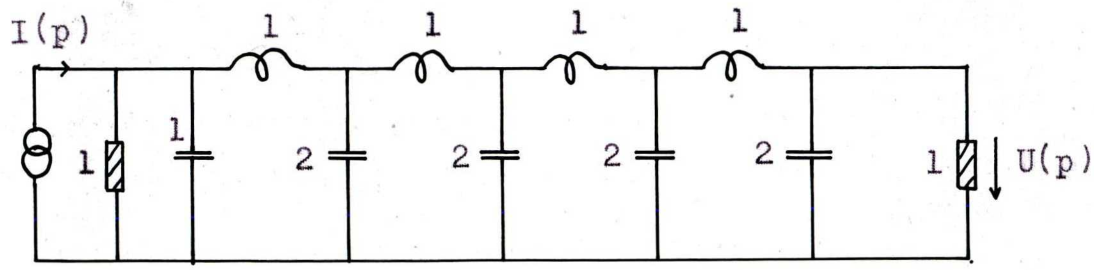
$$F^2 \in \left\{F^2_{1,2}\right\} \cap \left\{F^2_{3,4}\right\}$$

A szorzatképzés a számlálóban F^2 éleinek megfelelő admittanciák figyelembe vételével történik, és előjele pozitiv, ha F^2 a P_1 és P_3 pontokat egy komponensben tartalmazza, ellenkező esetben negativ. A szorzatképzés a nevezőben pedig a hálózatgráf F éleinek megfelelő admittanciák figyelembe vételével történik. Az összegezés mind a számlálóban, mind a nevezőben az összes megfelelő részgráfok szerint alakul (∀ az univerzális kvantor).

A (4.-1) formula példa a villamos hálózatok elméletében használt "topológiai formulára" [11]. Alkalmazásával fontos összefüggés nyerhető egy hálózat bemeneti és kimeneti jellemzői között. (Ebből az összefüggésből pl. következtetni lehet a kimeneti feszültség időfüggvényére, amplitudójára, fázisára, stb.). E szerény példa is jól mutatja, hogy milyen fontos az elméleti villamosságtanban egy gráf összes fáinak és adott feltételeknek eleget tevő 2-fáinak előállitása. (Ez az oka annak is, hogy a fák és 2-fák előállitására annyi különböző módszer született.) Bonyolultabb topológiai formuláknál egyéb k-fák ($k \geq 2$) (és egyéb részgráfok) képzése is szükséges (pl. hálózatérzékenység vizsgálatánál, [9]). Az is elképzelhető, hogy bonyolult kapcsolások analizise szükségessé teszi a gyakorlat számára számológép használatát.

2. Egy Wagner szürő transzfer átviteli függvénye [10]

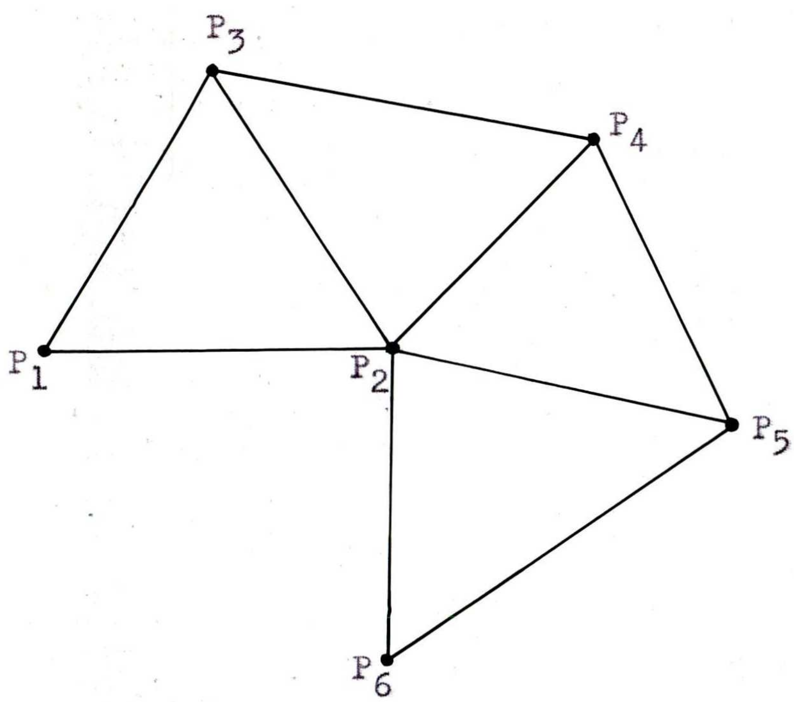
Tekintsünk egy aluláteresztő Wagner szürőt [1], amelynek elvi kapcsolási rajzát a 11. ábrán láthatjuk (11. ábra). A kapcsolási rajzon a meghajtási feltétel, kimeneti feszültség és lezárásokon kivül feltüntettük az áramköri elemek értékét is, mégpedig relativ egységekben [1]. Érdeklődünk a szürő transzfer impedancia függvénye



11. ábra

iránt. Ennek feliráshoz a (4.-1) formulát fogjuk alkalmazni.

A szükséges fákat és 2-fákat legcélszerübb az Ore tételén alapuló módszer segitségével képezni. Ehhez megadtuk a megfelelő hálózatgráfot a 12. ábrán (12. ábra). Az



12. ábra

itt látható gráfot szokás a gráfelméletben "kerék"-nek is nevezni. Nyilván a meghajtásnak megfelelő pontok a P_1 és P_2, a kimenetnek megfelelő pontok pedig a P_6 és P_2. A "kerék" generáló mátrixa:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \qquad (4.-2)$$

Nyilván az összes fa előállitásához most célszerü a 0 elemet a (4.-2)-nek a második sorából választani. Tehát a fa reprezentációk most $(k_1, 0, k_3, k_4, k_5, k_6)$ alakban állnak elő, $(k_i \neq 0,\ i = 1,3,4,5,6)$ teljes ciklusvizsgálat végrehajtása után.

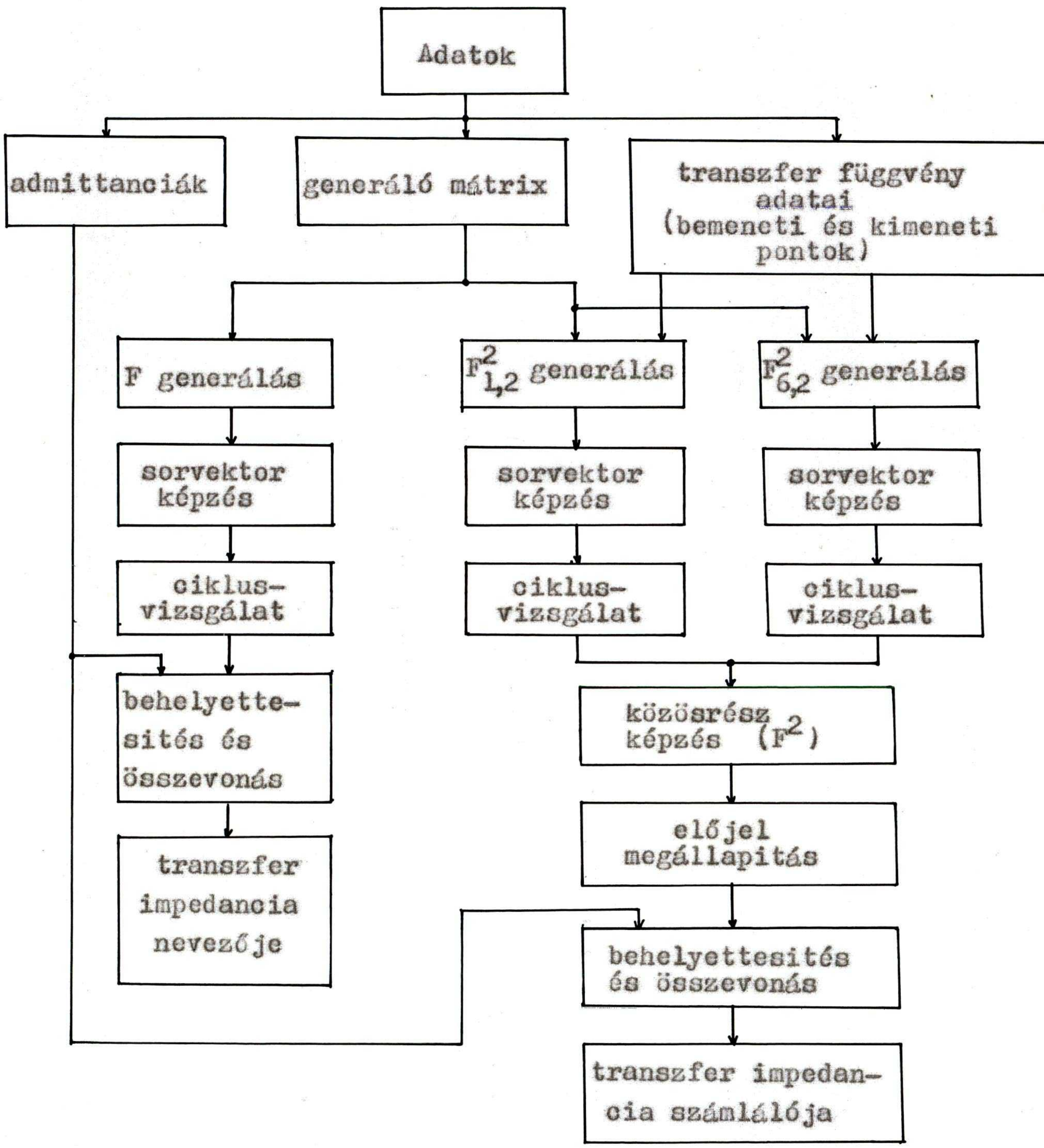
A feltételeknek megfelelő F^2 kettőfákat két lépésben nyerjük: Az 1. és 2. sorból a 0-t választva az ismert módon előáll $\{F^2_{1,2}\}$, majd a 2. és 6. sorból szemelve ki a 0 elemet, előáll a $\{F^2_{6,2}\}$ kettőfa halmaz, amelyek közös része éppen szolgáltatja az F^2 2-fákat. Megjegyezzük, hogy ebben a speciális esetben egyetlen F^2 2-fát nyerünk, mégpedig (001345) = (304560) ekvivalens sorvektorokkal reprezentálva, amely a 12. ábrából közvetlenül is látható. Az is világos, hogy a megfelelő admittancia szorzat pozitiv előjelü.

Ezután "behelyettesitve" a (4.-1) formulába a megfelelő admittanciák értékét, annak figyelembe vételével, hogy az induktivitások operátoros admittanciái $\frac{1}{p}$, a kapacitásoké a relativ értékeknek megfelelően p, illetve 2p, az ohmos admittanciák 1 értéküek, valamint azt is figyelembe véve, hogy a (P_1P_2) és a (P_6P_2) éleknek megfelelő admittanciák a parallel admittanciák eredőjeként számitva (1+p), nyerjük a kivánt transzfer impedancia függvényt.

A részgráf képzést és a megfelelő behelyettesitést digitális számitógépen célszerü elvégezni. Egy a program készitéséhez alkalmas tömbvázlatot láthatunk a 13. ábrán (13. ábra). Magát a programot a mult év májusában a József Attila Tudományegyetem Kibernetikai Laboratóriuma az M-3-M számológéphez gépi nyelven elkészittette és lefuttatta. A végeredmény:

$$\frac{U(p)}{I(p)} = \frac{1}{128p^9+256p^8+448p^7+512p^6+480p^5+336p^4+164p^3+60p^2+16p+2} \quad (4.-3).$$

A program lefuttatásához szükséges teljes memória igény kb. 350 gépi szó, amely a következőképpen oszlik meg: utasitásra 250 gépi szó, a munkarekeszek száma (gépi állandók, hálózat adatai, elemadmittanciák, meghajtási és lezárási feltételek) 100 gépi szó. A felhasznált számológép számolási sebessége 1000 müvelet/sec, a kiirás telexszel. A program futtatási ideje a kiirással együtt kb. 13 perc, ami a feladat más uton való megoldásához képest rendkivül kedvező idő. A gép közvetlenül a transzfer impedancia függvény számlálóját és nevezőjét irta fel.


Adatok
admittanciák
generáló mátrix
transzfer függvény adatai (bemeneti és kimeneti pontok)
F generálás
$F^2_{1,2}$ generálás
$F^2_{6,2}$ generálás
sorvektor képzés
sorvektor képzés
sorvektor képzés
ciklus-vizsgálat
ciklus-vizsgálat
ciklus-vizsgálat
behelyettesités és összevonás
közösrész képzés (F^2)
transzfer impedancia nevezője
előjel megállapitás
behelyettesités és összevonás
transzfer impedancia számlálója

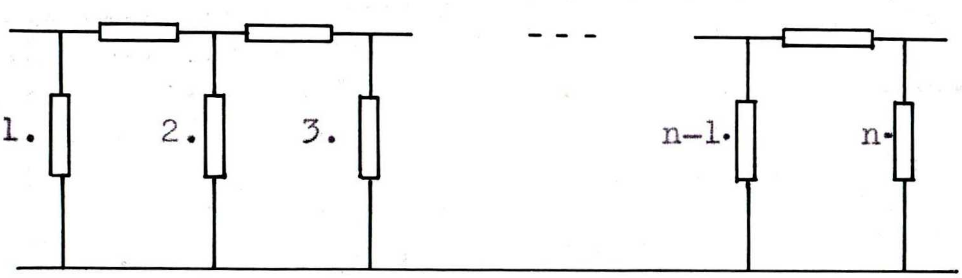
13. ábra

3. Földelt létrakapcsolás fáinak és adott feltételeknek megfelelő 2-fáinak száma

A villamosságtanban kitüntetett szerepet játszanak a földelt létrakapcsolások. Földelt létrakapcsolásra példa volt a 4 §. 2. pontjában szereplő Wagner szürő is.

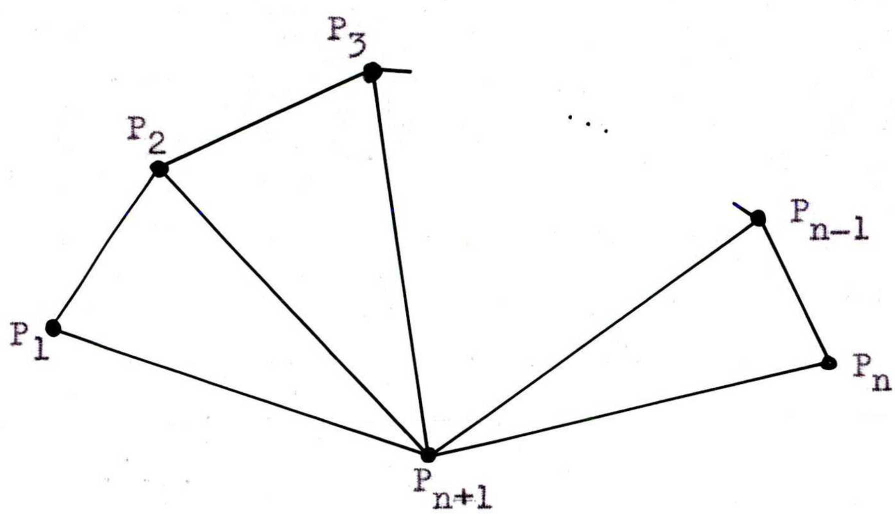
4.3.1. Definició. $n \geq 2$ foku földelt létrakapcsolásnak nevezzük azt a négypólust [1], amelynek egy bemeneti és egy kimeneti pontja közös (a "föld pont"), továbbá a jel a bemenetről a kimenetre csak egyféleképpen juthat el, valamint a keresztágak száma pontosan n.

A földelt létrakapcsolást a 14. ábra szemlélteti (14. ábra).



14. ábra

Egy földelt létrakapcsolás hálózatgráfja triviálisan $(n+1)$ pontu kerék (15. ábra). Mégpedig a kerék pontjainak fokszáma a 15. ábra megfigyeléséből: P_1 és P_n másodfoku, P_i harmadfoku $(i = 2,\dots,n-1)$ és P_{n+1} n-edfoku. E megfigyelésből adódik, hogy az n foku földelt létrakapcsolás



15. ábra

hálózatgráfjának generáló mátrixa:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & n+1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & n+1 \\ & & & & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n-2 & 0 & n & n+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n-1 & 0 & n+1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-2 & n-1 & n & 0 \end{pmatrix} \qquad (4.-4)$$

Részletesen: a generáló mátrix első és n-edik sorában 2, az i-edik sorában $(i = 2,\dots,n-1)$ 3, az (n+1)-edik sorában pedig pontosan n elem különbözik a 0-tól.

Mármost a generáló mátrixból a 0 elemet az (n+1)-edik sorból választva észrevesszük, hogy a teljes ciklusvizsgálat számára pontosan $2^2.3^{n-2}$ különböző sorvektort tudunk képezni. A 2 §. 5. pontjában tett egyik megjegyzés értelmében a teljes ciklusvizsgálat bizonyosan nem véges kimenetelü akkor, ha a 0 elemválasztásnak megfelelő oszlopvektorból a sorozat egyetlen elemet sem tartalmaz. Ilyen esetek száma a (4.-4)-ből láthatóan éppen 2^{n-2}. Nyertük a következőt:

4.3.1. Tétel. n foku földelt létrakapcsolás hálózatgráf fáinak ~~maximális~~ száma:

$$N \leqq 2^2 . 3^{n-2} - 2^{n-2} \qquad (4.-5)$$

Továbbá a 4 §. 2. pontjában elmondottak figyelembevételével az is igaz, hogy a földelt létrakapcsolás transzfer impedancia függvényében szereplő, a (4.-1) formulában adott F^2 2-fa pontosan egy, amelynek egyik komponense az izolált P_{n+1} pontból áll.

A (4.-5) formulához lényegében a fák gráfelméleti módszerrel való előállitása vezet. Maga a formula felhasználható egy földelt létrakapcsolás fái számának megbecsülésére, amely tájékoztat bennünket a transzfer impedancia "bonyolultságáról" (pl. a nevező fokszámáról, a külső memória kapacitás szükségletéről, illetve a program lefuttatásához szükséges gépi idő nagyságrendjéről.)

Például megállapitható, hogy a 4 §. 2. pontjában vizsgált Wagner felüláteresztő szürő hálózatgráfjának maximálisan

$$2^2 . 3^3 - 2^3 = 100$$

fája lehet.

A F^2 2-fa egyetlen volta pedig feleslegessé teszi létrakapcsolás vizsgálatánál a 13. ábrán látható tömbvázlat egy lényeges és a programozás számára nehézkes részét: helyette csupán az egyetlen F^2 2-fa adatait kell a számológéppel közölni.

*   *   *

Itt nyilvánitok köszönetet dr. Fodor Géza egyetemi tanárnak, aki tanácsaival lehetővé tette ennek az értekezésnek ebben a formában történő megirását, dr. Ádám András kandidátusnak, aki segitséget nyujtott a 2 §.ban leirt uj módszer gráfelméleti megfogalmazásában, és Makay Árpádné tudományos segédmunkatársnak, aki a 4 §-ban szereplő szürő transzfer impedancia függvényének felirását programozta, és számológépen lefuttatta.

IRODALOM

[1] Géher Károly: Lineáris hálózatok
BME Villamosmérnöki Kar jegyzet, 1967.

[2] Hakimi-Green: Generation and realization of trees and k-trees.
IEEE Trans. On Circuit Theory, vol. CT-11, jun 1964.

[3] Harary: The number of functional digraphs
Math. Annalea 138, 1959.

[4] Maxwell-Cline: Topological network analysis by algebrais methods.
Elektr. Rekord, IEE, London, 1966 aug.

[5] Mayeda: Reducing computation time in the analysis of networks by digital computer
IRE Trans. vol. CT-6, 1959 márc.

[6] Mayeda-Seshu: Generation of trees without duplications
IEEE Trans. vol. CT-12, 1965 márc.

[7] Ore: Theory of graphs I. 4.4.
American Math. Society Coll. Publ., vol. 38., 1962.

[8] Ore: Graphs and correspondences.
Festschrift f.d.60. Geburtstag von A. Speiser 184-191, 1945.

[9] Pávó: Hálózatanalizis gépi módszerrel
Diplomaterv a BME vezetékes hiradástechnikai tanszékén, 1967.

[10] Pávó: Hálózatfüggvény meghatározása topológiai formulával
Hiradástechnikai folyóirat, megjelenés alatt.

[11] Seshu-Reed: Linear graphs and electrical networks
Addison-Wesley Publ. Co., Reading Massachusette, 1961.

[12] Talbot: A new set of topological formulas
(to be published)