

EGY GALLAI TIBORTÓL SZÁRMAZO PROBLÉMÁRÓL

S t a c h ó L a j o s

1958

Szeged



Diss. B 522



1. Bevezetés.

Ismeretes E.HELLY következő tétele:

Ha az n dimenziós euklidesi térben lévő tetszőleges számú zárt konvex tartomány halmaza olyan, hogy bármely $n + 1$ tartománynak van közös pontja, akkor valamennyi tartománynak van legalább egy közös pontja.

E tételnek az irodalomban található első bizonyításai J.RADON-tól illetve KÖNIG DÉNES-től származnak.¹⁾

Helly tételének sokrétű alkalmazása és messzemenő általánosításai ismertek. Az idevonatkozó irodalommal kapcsolatban utalunk MOLNÁR JÓZSEF: "Helly tételének egyes általánosításairól" c. kandidátusi disszertációjára, amelyben MOLNÁR J. az M.A. KRASZNOSZELSZKIJ-től, C.V.ROBINSON-tól és SOÓS GY.-től származó vizsgálatok eredményeit fejleszti tovább.

Helly tételével rokon a RIESZ FRIGYES-től származó következő tétel:

Ha a korlátos és zárt ponthalmazok valamely $\{H\}$ rendszerének megvan az a tulajdonsága, hogy a rendszerbe tartozó bármely véges sok ponthalmaznak van közös pontja, akkor a rendszerbe tartozó valamennyi halmaznak van közös pontja. Riesz ezen tétele annyiban tér el a Hellyétől, hogy nem csupán konvex ponthalmazokat tekint, viszont megköveteli, hogy bármely véges sok ponthalmaznak legyen közös pontja.

Felmerülhet az a kérdés, hogy a Helly tétel feltételei nem gyengíthetők-e oly módon, hogy csupán azt kövjük ki, hogy bármely n tartománynak legyen közös pontja. Ez már $n = 2$ esetén sem igaz. Még az a gyengébb állítás sem érvényes, hogy a síkbeli konvex tartományok olyan rendszerénél, amelyben bármely két tartománynak van közös pontja, megadható véges sok pont oly módon, hogy ezek közül a pontok közül a rendszer mindegyik eleme legalább egyet tartalmaz.

Íme a példa:

1. példa: Tekintsük az $x^2 + y^2 = 1$ kör $(1,0)$ és $(0,1)$ pontok közötti ívét. Minden e negyedhez tartozó racionális abszcissájú pontbeli érintőre mérjünk fel az érintési pontból kiindulva egységnyi hosszúságú szakaszokat. Az így nyert 2 egységnyi hosszúságú szakaszok $\{s_k\}$ rendszere korlátos, és bármely két szakasznak van közös

pontja. E rendszerhez mégsem adható meg véges sok P_i ($i = 1, 2, \dots, m$) pont úgy, hogy a szakaszok bármelyike a P_i pontok közül legalább egyet tartalmazzon. Nincs ugyanis három olyan eleme az $\{s_k\}$ rendszernek, amelyeknek közös pontja volna és ezért egy ponton legfeljebb két szakasz mehet át. Fedjük le az s_k szakaszt 2 hosszúsága $\frac{1}{l} = \frac{1}{c}$ szélességű $\{T_k\}_l$ $l = 1, 2, \dots$ téglalapok rendszerével. Az így nyert téglalapok halmaza öröklí az $\{s_k\}$ szakaszok említett tulajdonságát.

A fenti tételek és az 1. példa azt mutatják, hogy ha a Helly tétel feltételeit a fenti értelemben gyengíteni akarjuk, akkor egyre speciálisabb tartományokat kell tekintenünk.

Az a sejtésünk azonban, hogy ha a konvex tartományok átmérőjének és szélességének aránya korlátos, akkor már megadható véges sok pontból álló letűző pontrendszer. Erre a problémára azonban későbbi dolgozatban szeretnénk visszatérni.

2. A Gallai probléma és vele kapcsolatban felmerülő néhány kérdés.

FEJES TÓTH LÁSZLÓ: Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum c. könyvében ²⁾ beszámol egy GALLAI TIBOR-tól származó problémáról és e problémával kapcsolatban eddig elért eredményekről.

A körlemezeknek olyan $\mathcal{K}$ rendszerében, melynek az a tulajdonsága, hogy bármely két körlemeznek van közös pontja, általában nincs egyetlen olyan pont, amely minden lemezhez hozzátartozik, vagy szemléletesen szólva a körrendszer összes lemezei egyetlen túlv még nem szúrhatók keresztül. Gallai Tibor azt a sejtést mondta ki, hogy létezik a körlemezek sugarától és számától független N természetes szám, úgy, hogy N számú tú segítségével átszúrható a fenti tulajdonságú $\mathcal{K}$ rendszer valamennyi lemeze.

SZEKERES GYÖRGY és UNGÁR PÉTER igazolták, hogy a sejtés helyes és hogy N értékeül 7 mindig választható. Szóbeli közlés alapján tudok arról, hogy HEPPES ALADÁR N értékét 6-ra csökkentette.

Gallai további sejtése szerint $N = 5$.

Pontosabb beszédmód kedvéért néhány definíciót vezetünk be:

- I. Körlemeznek nevezzük az euklidesi sík körét belsőjével együtt, vagy zárt félsíkját.
- II. Körlemezrendszernek nevezzük a körlemezek olyan halmazát, amely legalább egy korlátos elemet tartalmaz, és amely bármely két elemének van közös pontja.

- III. Ivháromszögnek nevezzük a sík korlátos, zárt tartományát, melyet három közös ponttal nem bíró körlemez körülzár és fedetlenül hagy.
- IV. Egy adott $\mathcal{K}$ körlemezrendszer alappontjainak nevezzük a sík véges sok P_i ($i = 1, 2, \dots, k$) pontját, amelyek közül a $\mathcal{K}$ minden egyes eleme legalább egyet tartalmaz.
- V. Az alappontok számának minimumát N_0 -al jelöljük és a $\mathcal{K}$ rendszer letűzési számának nevezzük.

E dolgozat célja annak igazolása, hogy $N_0 \leq 5$ mindig fennáll.

Felvethető az a kérdés, hogy milyen szabályosan lehet elhelyezni az alappontokat. Ezzel kapcsolatban kimutatjuk, hogy adott $\mathcal{K}$ körlemezrendszerhez választható a síknak olyan fix K_0 köre, hogy minden $m \geq 4$ érték esetén megválasztható a K_0 -ba beírt m -oldalú szabályos S_m sokszög úgy, hogy S_m szögpontjai és középpontja a $\mathcal{K}$ rendszer alappontjai.

Megjegyezzük, hogy a fent említett tételek mind érvényben maradnak akkor is, ha alappontokként a körlemezeknek csak a belső pontjait engedjük meg, határpontjait nem! Ebben az esetben jelöljük N'_0 -vel a letűzési számot.

H. HADWIGER az *Elemente der Mathematik* 1957. szeptemberi számában³⁾ igazolja, hogy egyenlő sugarú körlemezéből álló rendszerekre a letűzési szám $N_0 = 3$ és példát nyújt kilenc elemből álló rendszerre, amelynél $N_0 = 3$.

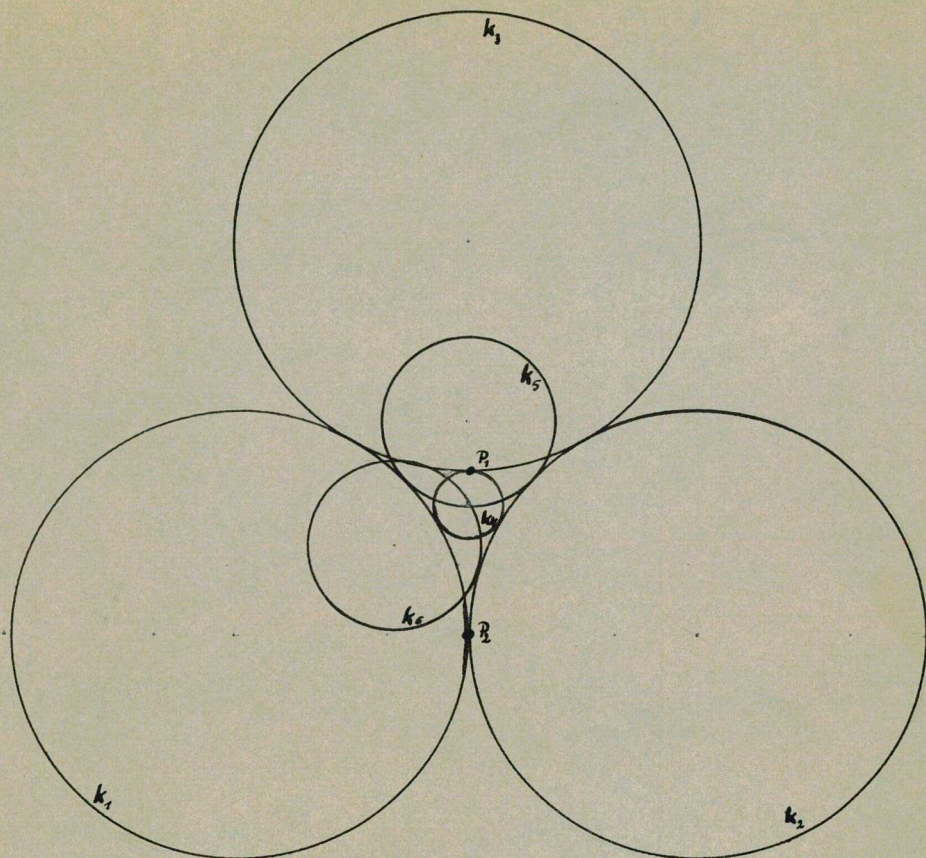
A következőkben olyan hat körlemezéből álló korlátos körlemezrendszert szerkesztünk, amelynél $N_0 = 3$; továbbá megadunk egy nem korlátos rendszert, amelynél $N_0 = 4$.

3. Néhány példa.

Azonnal belátható, hogy van olyan körlemezrendszer, amelynél $N'_0 = 4$. Ilyen rendszert alkot négy egymást páronként kívülről érintő kör lemeze. E körlemezrendszerénél azonban $N_0 = 2$.

2. példa: Van hat körlemezéből álló korlátos rendszer, amelynél $N_0 = 3$.

Legyen k_1, k_2, k_3 egyenlő sugarú páronként egymást érintő körlemez, k_4 az előbbiektől alkotott ivháromszög beírt körének lemeze, k_5 ill. k_6 pedig az a körlemez, amelynek határa átmegy a k_4 kör középpontján és kívülről érinti a k_1 és k_2 , illetve k_2 és k_3 körlemezeket.



1. ábra.

Állítjuk, hogy ezen rendszernél $N_0 = 3$. Az első négy körhöz háromféleképp választható két alappont. Az alappontok választható párjai közül csak a $P_1 = k_3 \cap k_4$ $P_2 = k_1 \cap k_2$ pontpár alappontja az első öt körlemezről álló rendszernek. A k_6 lemez a P_1, P_2 pontok egyikét sem tartalmazza, tehát $N_0 = 3$, amint állítottuk.

3. példa. Van nem-korlátos körlemezrendszer, amelynek $N_0 = 4$. A $\mathcal{K}$ rendszer álljon az egységkör $x^2 + y^2 \leq 1$ lemezéből, továbbá mindazon az egységkört kívülről érintő zárt félsíkokból, amelyeknek érintési pontja ~~abszisszája~~^{mag} ~~abszisszája~~ x racionális illetve irracionális aszerint, hogy $x > 0$ ill. $x < 0$.

Ezen $\mathcal{K}$ rendszer bármely két elemének van közös pontja, ugyanis a zárt félsíkoknak nincs olyan párja, amelyek az egységkört diametráisan ellentett pontokban érintik.

Az alappontok egyikének, - jelöljük ezt P_1 -gyel, - az egységkör lemezéhez kell hozzátartoznia, a további alappontokat viszont az egységkör lemezén kívül kell keresnünk. Legyen P egy az egységkörön kívül fekvő tetszőleges pont, továbbá jelölje A és B az egységkörhöz P -ből húzott érintők érintési pontjait. Ez a P pont a $\mathcal{K}$ rendszer azon elemeinek pontja, amelyeknek az egységkörön lévő pontja az $\widehat{AB}$

iven fekszik. Mivel $\widehat{AB} < \frac{\pi}{2}$, továbbá mivel a $\mathcal{K}$ rendszerbe tartozó félsíkoknak az egységkörön lévő érintési pontja az egységkörön mindenütt sűrűn helyezkednek el, ezért legalább további három P pontot (P_2, P_3, P_4) kell választani, hogy azok a $\mathcal{K}$ rendszer alappontrendszerét alkossák. Ha viszont a $P_2 P_3 P_4$ háromszög tartalmazza az egységkört, akkor $P_1 P_2 P_3 P_4$ máris a $\mathcal{K}$ rendszer alappontjai. Ezzel igazoltuk, hogy a tekintett nemkorlátos $\mathcal{K}$ rendszerre $N_0 = N'_0 = 4$.

Nyitott kérdés, hogy létezik-e korlátos körlemezrendszer, amelynél $N_0 > 3$, továbbá, hogy létezik-e olyan nemkorlátos rendszer, amelynél $N_0 > 4$.

4. Segédtételek.

Az 5. paragrafusban fogjuk igazolni, hogy az N_0 letűzési szám bármely körlemezrendszerre vonatkozólag legfeljebb 5.

A bizonyításnál elegendő olyan körlemezrendszereket vizsgálni, amelyben legalább egy ivháromszög van. Ellenkező esetben ugyanis, bármely három elemnek volna közös pontja, és ekkor Helly tétele értelmében valamennyi elemnek lenne közös pontja.

Peltehetjük továbbá, hogy egyetlen k elemet sem tartalmaz egy másik k' elem. Ha ugyanis $k \subset k'$, akkor k' a letűzési szám megváltoztatása nélkül elhagyható.

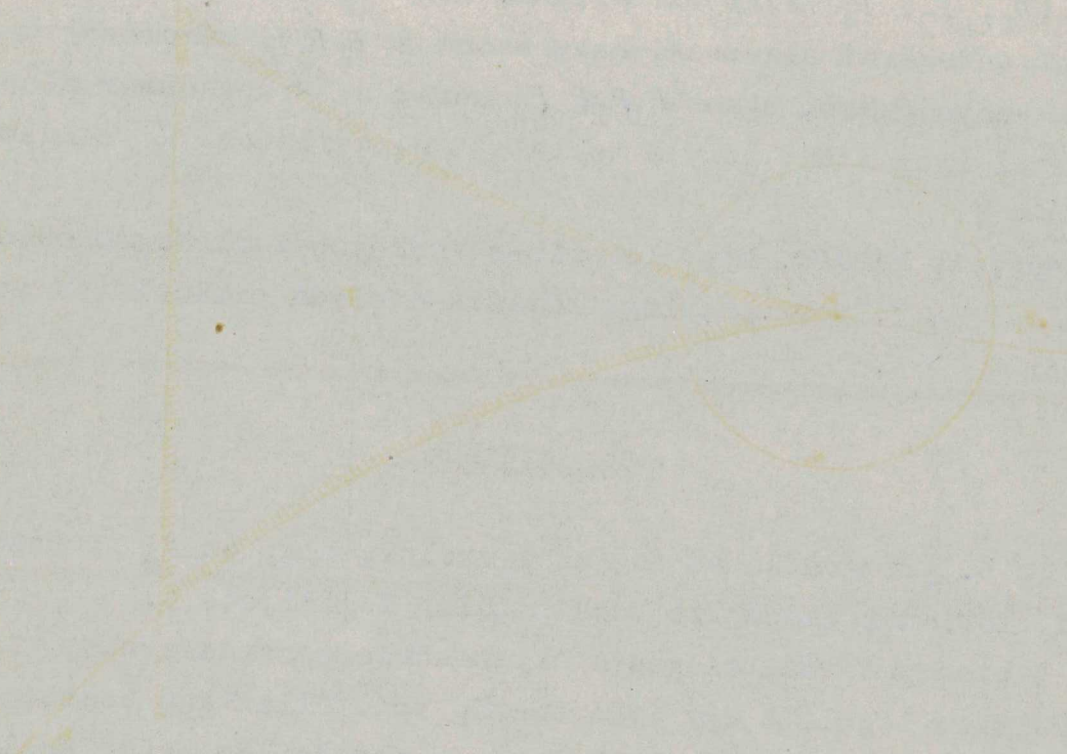
Előkészületként ebben a paragrafusban két segédtelet bizonyítunk be.

1. S e g é d t é t e l . Legyen k_1, k_2, k_3 három tetszőleges olyan eleme a $\mathcal{K}$ körlemezrendszernek, amelyek egy Δ ivháromszöget képeznek. Ha k egy további körlemeze $\mathcal{K}$ -nak, amely a Δ ivháromszöget nem tartalmazza, akkor kiválasztható a k_1, k_2, k_3 elemek egy párja, amelyekkel k is ivháromszöget alkot.

B i z o n y í t á s . Ha a segédétel állítása nem volna helyes, akkor található volna a síknak három P_{12}, P_{23}, P_{31} pontja, amelyekre

$$P_{ij} \in k \cap k_i \cap k_j \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

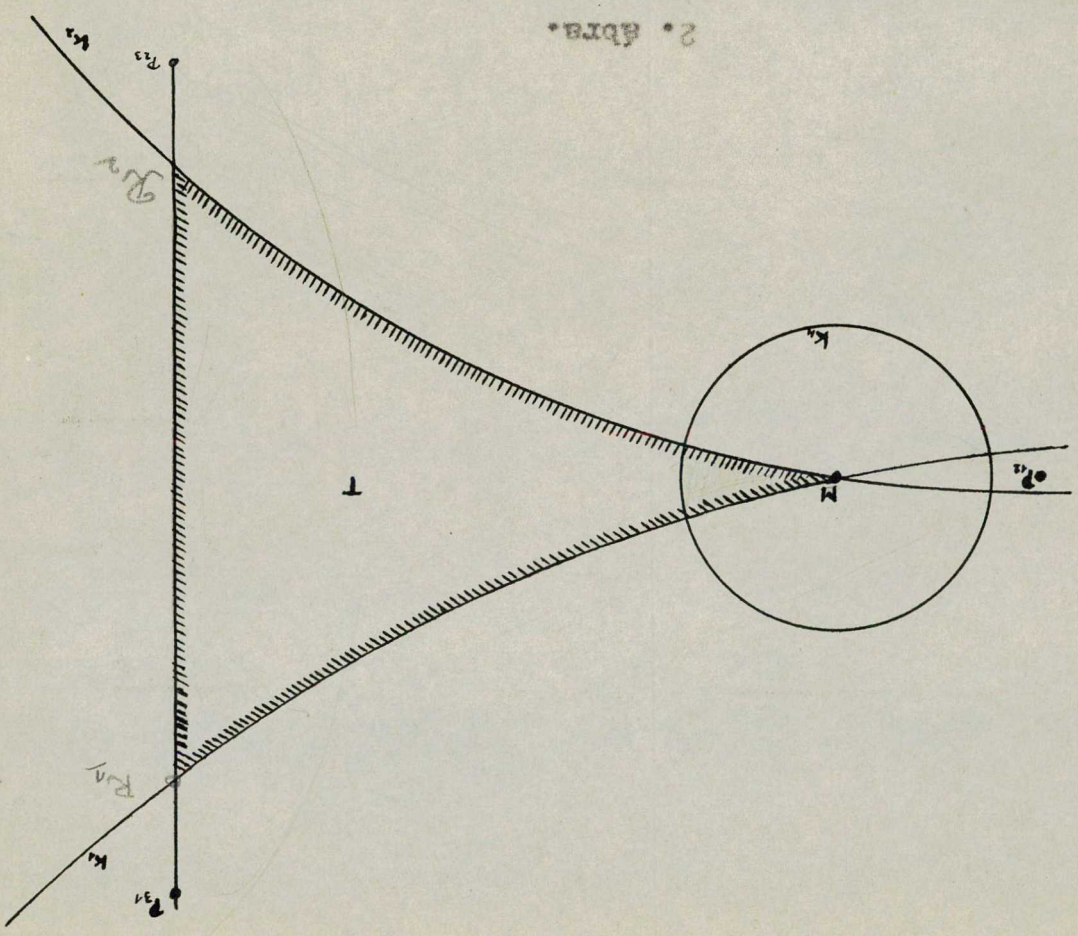
volna érvényes. Mivel a segédétel feltétele szerint a $k_1 \cap k_2 \cap k_3$ tartalmaz üres, $k_1 \cup k_2$ nem fedi a $P_{12} P_{23} P_{31}$ háromszöget, nevezetesen a $P_{23} P_{31}$ szakaszt, $k_1 \cup k_2$ nem tartalmazza. Ez azonban azt jelenti,



meljett

6 négy körlemez, k_0^* , ...

+ körlemezeket kívülről érintő
és



2. ábra.

hogy k_1 és k_2 határa a $P_{23}P$ -nek egy bizonyos térszakaszával Q_1, Q_2 -vel

olyan T tartományt zár körül, amelyen sem k_1 sem k_2 nem fed. Legyen

k_1 és k_2 határának T -hez tartozó metszéspontja M . Az M pontot k_3

nem tartalmazza, mivel $k_1 \cup k_2 \cup k_3$ üres. Van tehát olyan M körép-

pontu k_4 körlemez, amelyre $k_3 \cup k_4$ üres. Válassz továbbá, hogy $T \cup k_4$

belelő pontjai a k_1, k_2, k_3 körlemeznek egyikéhez sem tartoznak hozzá.

Mármost a sik azon pontjai, amelyeket $k_1 \cup k_2 \cup k_3$ nem tar-

talma, két tartományra bonthatók: az egyik korlátos, - heveszeseben

a Δ távháromszög, - a másik nem korlátos (vagy üres). Mivel a

$P_{23}P$ háromszög határának minden pontja a k_1, k_2, k_3 körlemeznek

legfeljebb egyikeben benne van, $T \cup k_4$ az előbbi tartományhoz tartozik;

ezért Δ teljesen benne van a $P_{23}P$ háromszögben, és még inkább

a k körben. Ez azonban ellentmond a feltételnek. Ezért az 1. segédte-

lelt igazoltuk.

2. s e g e d t e t e s 1. Bármely az említett két tulajdonság-

gal rendelkező Δ körlemezrendszerhez megadható három közös ponttal

nem rendelkező k_1, k_2, k_3 körlemez úgy, hogy k_1, k_2, k_3 a k_1, k_2, k_3

által alkotott távháromszöget behártyó körlemezre jöjjön, akkor

bármely $k \in \Delta$ körlemeznek/van közös pontja a k_1, k_2, k_3

Es a geometriai szemlélettel, hogy k_1, k_2, k_3

Ez közvetlenül
 n_0^* definíciójá-
 ból folyik.

ez levezetése

Hol tört, hol
körlevezet jól l.

Körörcsöp levezetése,
 ismét szintetizálás az
 általános Blaschke-tételre
 hivatkozni; Bolzano-Weier-
 strass helyett a gömbön.

körlemezek mindegyikével.

B i z o n y í t á s . Megszerkesztjük a sík azon legkisebb sugarú körét, amelynek a $\mathcal{K}$ minden elemével van közös pontja.

Ha a $\mathcal{K}$ rendszer véges sok elemből áll, kiválasztjuk a $\mathcal{K}$ rendszer ivháromszögeibe írt körök közül a legnagyobb sugarút. Ha a rendszer végtelen sok elemből áll, akkor a következőkép járunk el.

A $\mathcal{K}$ rendszerben a körlemezrendszer definíciója szerint van véges sugarú k_0 körlemez. Legyen k_0 középpontja O , sugara $r_0 (< \infty)$. A k_0 -al koncentrikus $3r_0$ sugarú kört jelöljük K -val. A $\mathcal{K}$ rendszer ivháromszögeibe írt azon köröknek a halmazát, amelyeknek egyetlen pontja sincsen a K körön kívül, jelöljük I -vel. Az I halmaz elemeinek sugarai felülről korlátos $\{r\}$ számhalmazt alkotnak; e sugaraknak $3r_0$ nyilvánvalóan felső korlátja. Bármely felülről korlátos számhalmaznak van egyértelműen meghatározott felső határa. Legyen

$$r_0^* = \sup \{r\}$$

Blaschke kiválasztási tétele⁴⁾ szerint az I halmazból kiválasztható a köröknek olyan

$$(1) \quad k_1, k_2, k_3, \dots$$

sorozata, hogy e körök sugarai r_0^* -hoz konvergáló monoton növekvő számsorozatot képezzenek.

Egyidejűleg minden az (1) sorozathoz tartozó k_i elemhez tekintünk egy olyan Δ_i ivháromszöget, amelynek éppen k_i a beírt köre.

Huzzuk meg a $k_i \cap \Delta_i$ pontokban a k_i és Δ_i oldalainak közös érintőit; így közöséges $\overline{\Delta_i}$ háromszöget nyerünk. A $\overline{\Delta_i}$ oldalait olyan módon jelöljük d_{i1}, d_{i2}, d_{i3} -mal, hogy $d_{i1} \geq d_{i2} \geq d_{i3}$ álljon fenn. Jelöljük továbbá a Δ_i ivháromszög oldalait oly módon k_{i1}, k_{i2}, k_{i3} -mal, hogy mindegyik k_{ij} érintője éppen d_{ij} legyen. Így a körlemeznek három újabb

$$k_{1j}, k_{2j}, k_{3j}, \dots \quad (j = 1, 2, 3)$$

sorozatot nyerjük. Ezekből alkossuk meg a

$$(2) \quad k_{1j} \cap K, k_{2j} \cap K, k_{3j} \cap K, \dots \quad (j = 1, 2, 3)$$

sorozatokat.

Az (1) ill. (2) sorozatok korlátosak, - közös felső korlátjuk K , - ezért Blaschke kiválasztási tételének ismételt alkalmazásával kiválaszthatók belőlük konvergens

Lehet jel. k_1^* és k_2^*
rövid (vörös) pont
néhány felület!

Rövid legalább
kettő,

$$(3) \quad \kappa_{\gamma_1}, \kappa_{\gamma_2}, \kappa_{\gamma_3}, \dots$$

illette

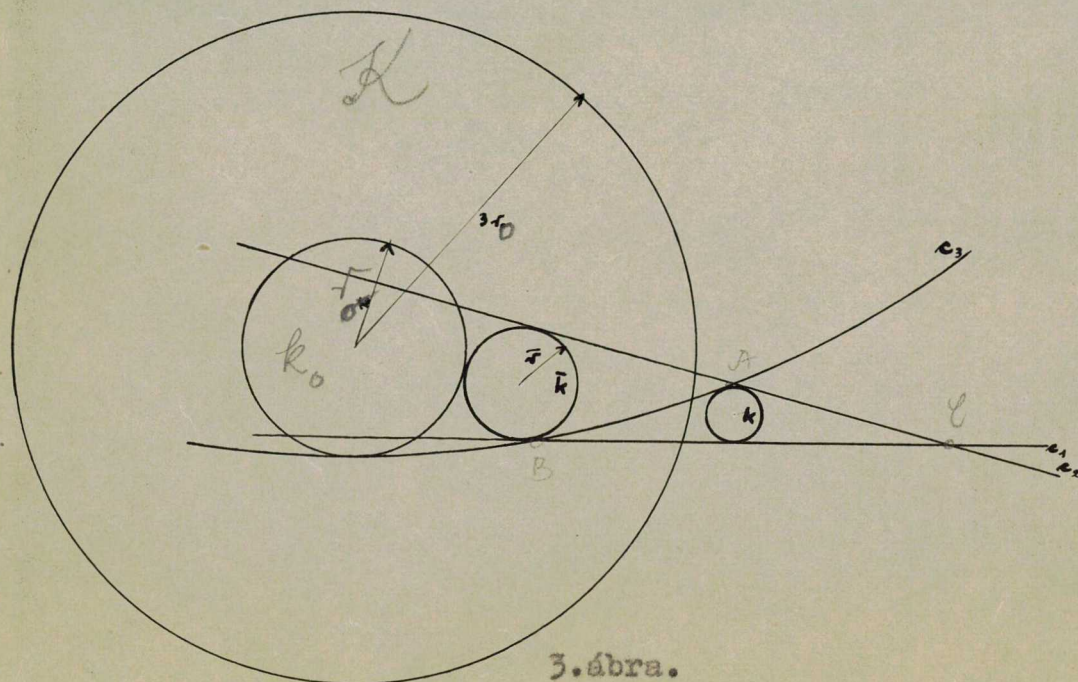
$$(4) \quad k_{\gamma_1^j} \cap K, k_{\gamma_2^j} \cap K, k_{\gamma_3^j} \cap K, \dots \quad (j = 1, 2, 3)$$

részsorozatok oly módon, hogy a $\{k_{\gamma_i j}\}$ ($j = 1, 2, 3$) háromas^{ok} k_{γ_i} be-
irt körrel rendelkező ivháromszöget alkossanak; továbbá a (3) sorozat
egy r_0^* sugarú k_0^* körlemezhez, a (4) sorozat^{ok} pedig egy-egy $k_j^* \cap K$
($j = 1, 2, 3$) tartományhoz konvergálnak, ahol a k_j^* mindegyike egy-egy
körlemez. [Mivel körök közötti érintkezési relációk határátmenetnél
érvényben maradnak, ezért k_1^*, k_2^*, k_3^* olyan Δ^* ivháromszöget alkotnak,
amelyek beirt köre k_0^* .]

Az (1) sorozat értelmezése szerint r_0^* felső határa az I hal-
mazba tartozó elemek sugarainak.

Igazoljuk most, hogy r_0^* felső határa a $\mathcal{R}^*$ elemeiből képezett összes ivháromszögekbe írt körök sugarainak. Jelölje $\bar{I}$ a $\mathcal{R}^*$ -ből képezett összes ivháromszögek beírt köreinek halmazát. Állításunk igazolására elegendő kimutatni, hogy minden olyan ivháromszögbeírt k körhöz, amelynek van pontja a K körön kívül, található olyan $k' \in I$, amelynek sugara nagyobb a k sugaránál.

Jelölje Γ azon ivháromszöget, amelynek beírt köre k , és c_1, c_2, c_3 pedig azokat a körlemezeket, amelyek Γ -t alkotják. Az 1. segédétel értelmében található a c_i ($i = 1, 2, 3$) körlemezeknek legalább egy párja, amelyek a k_0 körrel újabb $\bar{\Gamma}$ ivháromszöget alkotnak, amelynek beírt köre $\bar{k}$. Ábránkat úgy vettük fel, hogy c_1, c_2



3. ábra.

Ki Kellene mondani
valókat azt a tejt,
lesz egy írásmint
erősítőre a legkisebb nyári
olajtól, aminek az írá-
smint mindent kőbevéves
van rózsá pontja.

A "hordozatellátás"
nem működik. (A párhuz-
mos felülre rózsá pontja a
S-ben van, amit nem pá-
mit a peris a síkba!?)

l*?
ko

ilyen pár legyen. Mivel k sugara szükségképpen kisebb r_0 -nál, $k_0 \cap k$ üres. Ebből viszont következik, hogy Γ -t $\bar{\Gamma}$ tartalmazza. Ezért k sugara kisebb $\bar{k}$ sugaránál. Végül pedig $\bar{k} \subset K$, ugyanis $\bar{k}$ minden pontja közelebb van O -hoz, mint $r_0 + 2\bar{r} < r_0 + 2r_0 = 3r_0$.

Most igazolhatjuk, hogy

- (A) k_0^* -nak a $\mathcal{Q}$ minden elemével van közös pontja;
 (B) k_0^* a legkisebb sugaru a sik azon körei közül, amelyeknek megvan az (A) tulajdonságuk.

(A) bizonyítása. Először is megjegyezzük, hogy a k_j^* ($j = 1, 2, 3$) körlemez, mint a $\mathcal{Q}$ rendszer bizonyos részrendszereinek határlemezei vagy maguk is a $\mathcal{Q}$ rendszer elemei, vagy pedig a $\mathcal{Q}$ rendszerhez csatolhatók, tehát az általánosság megszorítása nélkül az előbbit feltelelezhetjük*. Tegyük most már fel, hogy van olyan $I \in \mathcal{Q}$, amelynek nincs közös pontja a k_0^* körlemezzel. Ekkor az 1. segédtétel értelmében választható a k_j^* ($j = 1, 2, 3$) elemek közül kettő, amelyek az I -lel egy Δ_I ivháromszöget alkotnak. A Δ_I ivháromszögnek az oldalai közül k_0^* csupán kettőt érint és $k_0^* \subset \Delta_I$, ebből viszont következik, hogy Δ_I beírt körének sugara nagyobb mint r_0^* . Ez azonban ellentmond annak, hogy r_0^* felső határa a rendszer ivháromszögeibe beírt körök sugarainak. Ezzel az (A) állítás igazolt.

(B) bizonyítása. Tegyük fel, hogy van olyan $r' (< r_0^*)$ sugaru k' körlemez, amelynek $\mathcal{Q}$ minden elemével ~~van~~ közös pontja. Ekkor r' nyilvánvalóan egy felső korlátja az összes ivháromszögekbe beírt körök sugarainak. Nevezetesen minden természetes i -re

$$r_{\gamma_i} \leq r',$$

ahol r_{γ_i} a (3) sorozat k_{γ_i} körlemezének a sugarát jelenti. Azonban így

$$r_0^* = \lim_{i \rightarrow \infty} r_{\gamma_i} \leq r' < r_0^*;$$

ellentmondásra jutunk. Ezzel a 2. segédtételt igazoltuk.

) Blaschke kiválasztási tételéből ugyanis következik, hogy bármely pozitív ε -hoz található pusztán az ε -tól függő N küszöbszám úgy, hogy mihelyt $n > N$ a $k_{\gamma_n} \cap K$ teljesen a $k_j^ \cap K$ tartomány ε -nyi paralleltartományában fekszen. Ebből pedig az állítás nyilvánvalóan következik.

$\int$ (A) és (B) által

~~egy problémára~~
~~forrás~~

?

miel leírásában
más helyen!

L. a "körlemezre" ~~definícióját!~~

?

Konstrukciónkból következik, hogy k_0^* egyértelműen meghatározott. Ha ugyanis volna ugyanezen tulajdonságokkal rendelkező k_0^{**} körlemez, akkor egyrészt ennek sugara r_0^* lenne, másrészt pedig k_0^{**} -nak a k_j^* ($j = 1, 2, 3$) körlemezek mindegyikével lenne közös pontja. Ez azonban csak $k_0^{**} = k_0^*$ esetén lehetséges.

A második segédétel alapján bevezetjük a következő definíciókat:

- VI. Egy adott $\mathcal{K}$ körlemezrendszer egységkörének nevezzük a sík azon legkisebb sugaru k_0 körét, amelynek a $\mathcal{K}$ minden elemével van közös pontja.
- VII. Egy adott $\mathcal{K}$ körlemezrendszer alapkörének nevezzük azon három k_1, k_2, k_3 körlemez, - amelyek vagy elemei $\mathcal{K}$ -nak, vagy elemeiként tekinthetők, - és amelyek olyan ivháromszöget alkotnak, - amelynek beírt köre a $\mathcal{K}$ rendszer k_0 egységköre.
- VIII. Az egységkör és az alapkörök közös pontjaiban húzott érintők egy háromszöget határoznak meg, amelyet a $\mathcal{K}$ rendszer alapháromszögének nevezünk.
- IX. Ha egy k körlemeznek valamely P alappont belső pontja, akkor a k körlemez a P alappont által rögzítettnek nevezzük.
- X. Ha az alappontok rendszere oly módon van megadva, hogy az adott $\mathcal{K}$ körlemezrendszer bármely körlemeze legalább egy alappontot belső pontként tartalmaz, akkor a belső alappontok számának N_0' minimumát a $\mathcal{K}$ rendszer belső letűzési számának nevezzük.

5. Az első tétel és bizonyítása.

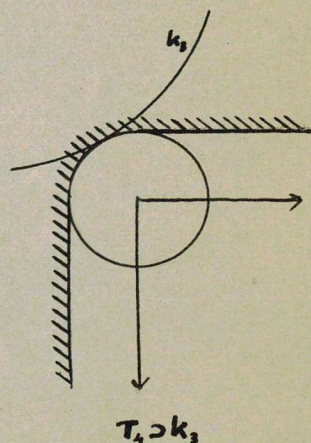
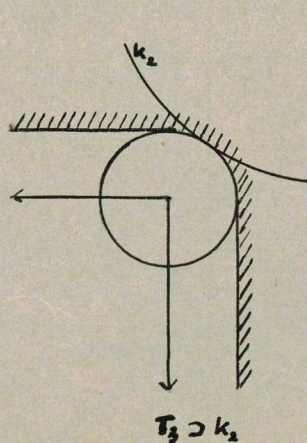
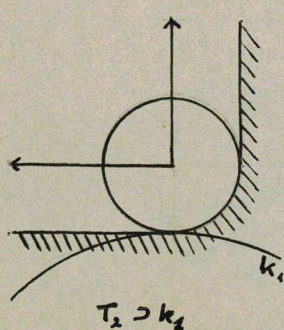
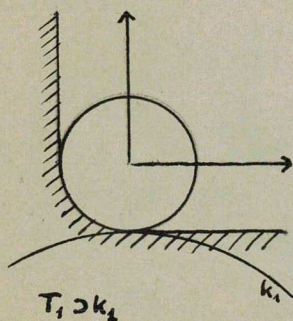
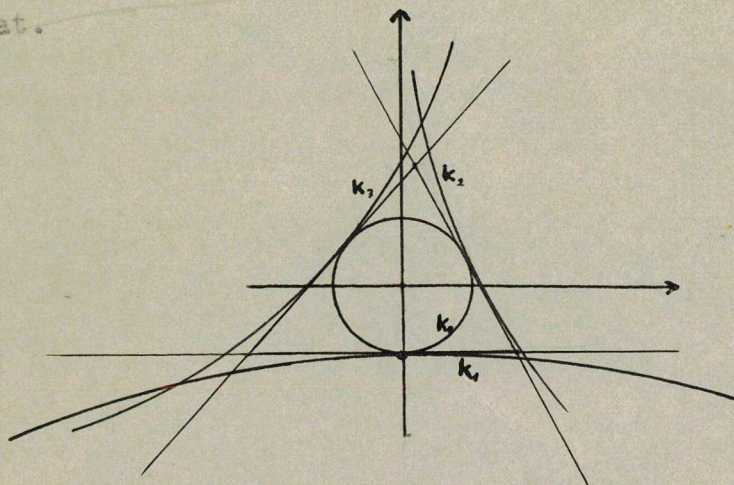
1. T é t e l . Ha a $\mathcal{K}$ körlemezrendszerben van korlátos körlemez, és $\mathcal{K}$ bármely két körlemezének van közös pontja, akkor a $\mathcal{K}$ rendszer letűzési száma N_0 legfeljebb 5.

B i z o n y í t á s . Legyen a $\mathcal{K}$ rendszer alapháromszögének legnagyobb (vagy egyik legnagyobb) oldala a . Azt az alapkört, amelynek az egységkörrel való közös (belső) érintőjén ez az oldal fekszik, jelöljük k_1 -gyel. Derékszögű (x, y) koordinátarendszert vezetünk be úgy, hogy a $(0, 0)$ pont a $\mathcal{K}$ rendszer k_0 egységkörének középpontja, a $(0, -1)$ pont pedig a $k_0 \cap k_1$ pont legyen.

Igazolni fogjuk, hogy a $\mathcal{K}$ rendszerbe tartozó körlemezek bármelyike a $P_0(0,0)$, $P_1 = (2,0)$, $P_2 = (0,2)$, $P_3 = (2,0)$, $P_4 = (0,-2)$ pontok legalább egyikét belső pontként tartalmazza.

Az alapháromszög legnagyobb oldalán fekvő szögei hegyesszögek, ezért a másik két alapkör az egységkört az $(1,0)$ és a $(0,1)$ pontok közötti, illetve a $(0,1)$ és a $(-1,0)$ közötti ívnegyedén érinti. Jelöljük ezeket az alapköröket rendre k_2 -vel illetve k_3 -mal.

Megállapíthatjuk, hogy nincsen olyan koordináтанegyed, amelyben mindhárom alapkörnek volna pontja. Az első és második negyedben nincs pontja k_1 -nek, a harmadik negyedben k_2 -nek, a negyedikben k_3 -nak. Tekintsük a koordináтанegyedek egységnyi széles párhuzamos tartományának belső pontjait. Jelöljük ezen pontthalmazok komplementerét rendre T_1, T_2, T_3, T_4 -gyel. A k_1 alapkör teljesen a T_1 -ben, és T_2 -ben, illetve T_2 -ben fekszik, k_2 a T_3 -ban, k_3 pedig a T_4 -ben. A $\mathcal{K}$ -beli körlemezeket rendre négy $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \mathcal{K}_3, \mathcal{K}_4$ osztályba soroljuk a szerint, hogy középpontjuk az első, második stb. koordináтанegyedben van. A P_0 pontot belső pontként tartalmazó körlemezeket és félköröket hagyjuk el a rendszerből. A megmaradó félköröket abba az osztályba soroljuk, amelyik koordináтанegyedbe határuk P_0 -ból húzott normálisa mutat.



4. ábra.

$\mathcal{K}$ rendszerbe tartozó körlemezeknek van közös pontja az alapkörök mindegyikével. A k_0 a legkisebb sugaru ilyen tulajdonságú körlemez, a k_0 kör kívülről érinti az alapköröket; ebből következik, hogy a $\mathcal{K}_i$ -beli körlemezek sugara nagyobb az egységnél.

Tekintsük az $\mathcal{K}_1$ osztály elemeit. Ezeknek mindhárom alapkörrel van közös pontjuk, nevezetesen k_1 -gyel. Mivel a k_1 alapkör teljesen a T_1 tartományban fekszik, megállapíthatjuk, hogy $\mathcal{K}_1$ minden elemének van közös pontja a T_1 tartomány g_1 határával. Mivel a $\mathcal{K}_2$ elemeinek ugyancsak van közös pontja a k_1 alapkörrel, k_1 pedig teljesen T_2 -ben fekszik, ezért minden $\mathcal{K}_2$ -beli elemnek van közös pontja a T_2 tartomány g_2 határával. Ugyanígy állapítható meg, hogy a $\mathcal{K}_3$ ill. $\mathcal{K}_4$ osztály elemeinek van közös pontja a T_3 ill. T_4 tartomány g_3 ill. g_4 határával.

Az eddigiek szerint a $\mathcal{K}_1$ osztály tetszőleges elemére érvényesek a következő kikötések.

- (A) Középpontja az első koordinátanegyedben van.
- (B) Sugara nagyobb az egységnél.
- (C) Van közös pontja a k_0 egységkörrel.
- (D) Van közös pontja a T_1 tartomány g_1 határával.

Az (A)-(D) követelményeket kielégíthetik olyan körlemezek is, amelyek nem tartoznak a $\mathcal{K}_1$ osztályba. A körlemezek $\mathcal{K}_1$ osztályát $\mathcal{H}_1$ halmazzá bővítjük úgy, hogy mindazon körlemezeket, amelyek az (A)-(D) követelményeknek eleget tesznek a $\mathcal{H}_1$ osztályba soroljuk. Hasonlóan végezzük, az (A) és (D) feltételek értelemszerű változtatásával a $\mathcal{K}_2 = \mathcal{H}_2$, $\mathcal{K}_3 = \mathcal{H}_3$, $\mathcal{K}_4 = \mathcal{H}_4$ bővitéseket. A bizonyítást a továbbiakban a $\mathcal{H}_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) osztályok elemeire végezzük.

A kijelölt P_i ($i = 0, 1, 2, 3, 4$) pontokat és a T_i tartományokat bármelyik koordinátatengelyen tükrözve, a szomszédos T_j tartományok valamelyikét nyerjük, ugyanekkor a P_i pontok rendszere önmagára képződik le. Ebből következik, hogy a bizonyítást elegendő a $\mathcal{H}_1$ osztály elemeire végezni.

A $\mathcal{H}_1$ osztály elemei az $y = x$ egyenesre vonatkozólag szimmetrikusan fekszenek, ezért elegendő azokat a $\mathcal{H}_1$ -beli elemeket tekintennünk, amelyek középpontja a $0 \leq y \leq x$ tartományban van. Mivel a (D) követelmény szerint ezeknek az elemeknek van közös pontja a g_1 -vonallal és mivel g_1 szimmetrikus az $y = x$ egyenesre, nyilvánvaló, hogy a $\mathcal{H}_1$ tekintett elemeinek van közös pontja a g_1 vonal $y \leq x$ félisikba

(2)

felnter
mit
sehr
köpfonten

eső részével is. Ekkor folytonossági okokból következik, hogy a tekintett elemeknek a P_0P_1 egyenessel való metszete nem üres, hanem vagy valamely D_1D_2 szakasz, vagy pedig valamely D_1x_∞ félegyenes, ahol x_∞ az x tengely $+\infty$ pontja. Ez a metszet nem fekszik az $y = 0; x \leq 0$ féltengelyen, ugyanis nincs olyan körlemez, amelynek hurja van a negatív féltengelyen és ugyanakkor középpontja pedig az $x > 0$ félsíkban van. Ha a $k \in \mathcal{H}_1$ elem x tengellyel való D_1D_2 illetve D_1x_∞ metszete a P_0P_1 pontok legalább egyikét belső pontként tartalmazza, akkor k máris rögzített. Ez akkor következik be, ha $\sqrt{D_1D_2} \supset P_1P_2, D_1x_\infty \supset P_1P_2$ relációk valamelyike áll fenn; vagy akkor, ha a D_1D_2 ill. D_1x_∞ pontpár elválasztja a P_1P_2 pontpárt.

Vizsgálunk kell az a.) $P_0P_1 \supset D_1D_2$ és b.) $P_1x_\infty \supset D_1D_2$ vagy $P_1x_\infty \supset D_1x_\infty$ relációkat.

Ad a.) A $P_0P_1 \supset D_1D_2$ és a (D) követelmény egyidejűleg egyedül a $k \equiv k\{xy: (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$ körlemezre teljesül. Ekkor azonban k sugara 1; tehát a k körlemezre a (B) követelmény nem teljesül, így $k \notin \mathcal{H}_1$. Ebből viszont következik, hogy $\mathcal{H}_1$ elemei között nincs olyan, amelynek az x tengellyel való metszetére az a.) reláció teljesül.

Ad b.) Állítjuk, hogy; ha valamely $k \in \mathcal{H}_1$ körlemez x tengellyel való metszetére a b.) relációk valamelyike teljesül, akkor k a P_2 pontot belső pontként tartalmazza.

B i z o n y í t á s . Tegyük fel, hogy P_2 nem belső pontja k -nak. Mivel a b.) relációk valamelyike teljesül, adódik:

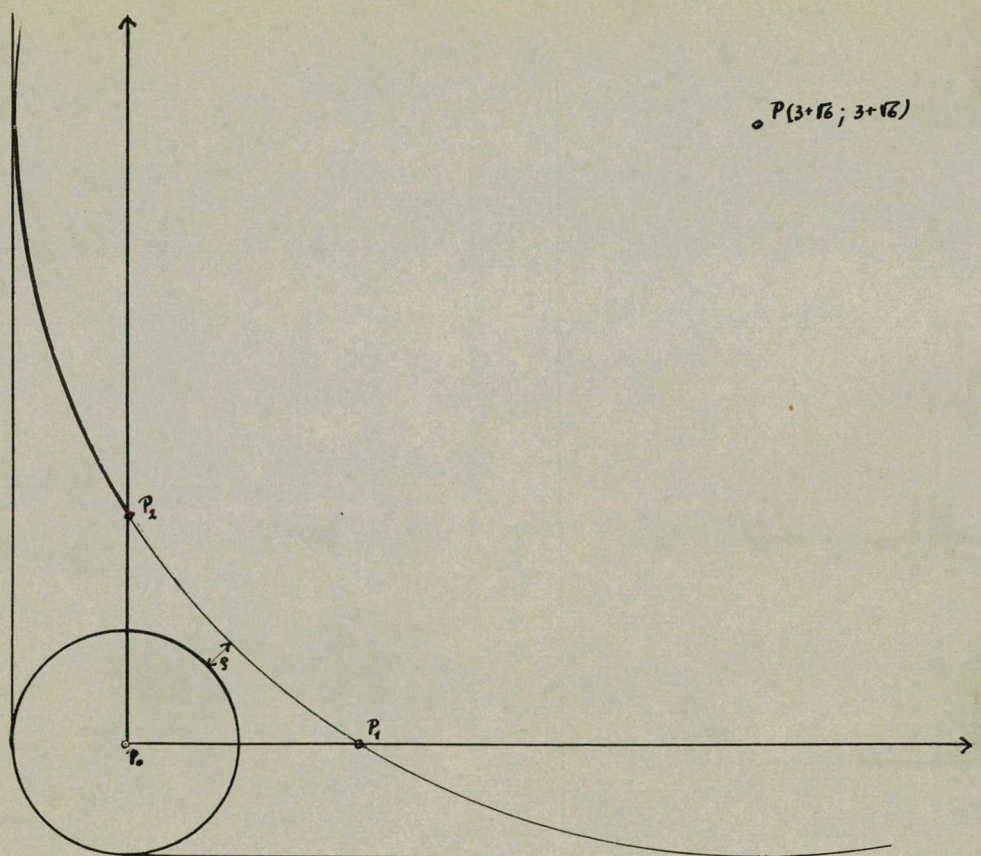
(E) A k elem középpontja a P_1P_2 egyenes ellenkező félsíkjában van, mint az egységkör.

Ekkor azonban a (C) követelmény szerint a $k \cap P_1P_2$ nem üres, hanem valamely $D_1'D_2'$ szakasz, amelyre mivel k nem tartalmazza belső-pontként a P_1P_2 pontok egyikét sem a $P_1P_2 \supset D_1'D_2'$ reláció teljesül. Így k -ra adódik a következő követelmény

(F) $P_1P_2 \supset D_1'D_2'$ ahol $D_1'D_2' = k \cap P_1P_2$

Tekintsük a sík azon körlemezeit, amelyekre, az (A), (B), (D), (E), (F) relációk mindegyike teljesül. Keresünk ezen körlemezek közül azt, amelynek a k_0 egységkörtől való távolsága minimális.

Ennek a feladatnak a megoldását szimmetria okokból következőleg



$$S = S(l_0, l_m)$$

5. ábra.

az a k_m körlemez szolgáltatja, amely átmegy a P_1 és P_2 pontokon és a T_1 tartomány g_1 határát érinti. Ebből következik, hogy

$$k_m \equiv k_m \{ (xy) : [x - (3+\sqrt{6})]^2 + [y - (3+\sqrt{6})]^2 \leq (4+\sqrt{6})^2 \}$$

Számítsuk ki a k_0 és k_m körlemezek $\rho(k_0, k_m)$ távolságát:

$$\rho(k_0, k_m) = (3+\sqrt{6}) \cdot \sqrt{2} - (5+\sqrt{6}) > 7,706 - 7,45 = 0,256.$$

Ebből következik, hogy az (A), (B), (D), (E), (F) relációt kielégítő körlemezek pozitív távolságra vannak az egységgörteől, így a (C) követelményt nem elégítik ki. Ebből következik, hogy minden olyan $\mathcal{H}_1$ -beli körlemez, amely a b.) relációk valamelyikét kielégíti, a P_2 pontot belső pontként tartalmazza.

Ezzel az I.tétel bebizonyítottuk. A bizonyításból kitűnik, hogy a $\mathcal{K}_1$ osztály bővítésével nyert $\mathcal{H}_1$ osztály bármely eleme belső pontként tartalmazza a P_0 , P_1 , P_2 alappontok legalább egyikét. Más szavakkal ez azt jelenti, hogy igazolt a következő

K o r o l l á r i u m: A két említett tulajdonsággal rendelkező körlemezrendszer N'_0 belső letűzési száma legfeljebb 5.

new village!

melzer?

nieb!

M e g j e g y z é s e k . 1. A $\rho(k, k)$ távolságra nyert eredmény így fogalmazható át: a k_m körlemez egy $(0,0)$ középpontu $r > 1,25$ sugaru kört érint. Ezért a P_k ($k = 1, 2, 3, 4$) alappontok P_0 -tól való távolsága 20 %-al csökkenthető, pl. a $P'_0 = (0,0)$ $P'_k = (1,6 \cos(k-1)\frac{\pi}{2}, 1,6 \sin(k-1)\frac{\pi}{2})$ pontok is belső alappontjai a $\mathcal{A}$ körlemezrendszernek. Ebből következik, hogy azon körlemezrendszereknél, amelyekben bármely elem sugara nagyobb a rendszer egységkörének 1,6-szeresénél, a P_0 pont az alappontok közül elhagyható. Ilyen körlemezrendszereknél $N_0 \leq 4$ és $N'_0 \leq 4$.

2. Amikor az N'_0 belső letűzési számra vonatkozó megállapításokat tettük, hallgatólagosan feltételeztük, hogy a $\mathcal{A}$ körlemezrendszer bármely elemének sugara egy $c > 0$ állandónál nagyobb, ellenkezőleg nem beszélhetnénk ivháromszögről, sem pedig bármely elem belső pontjáról.

6. A II. tétel és bizonyítása.

Geometriai szempontból nem tűnik érdektelennek, hogy milyen szabályosság szerint adhatók meg egy körlemezrendszer alappontjainak rendszerei. Ezzel kapcsolatban igazoljuk a következő tételt.

2. T é t e l . Ha a két említett tulajdonsággal rendelkező $\mathcal{A}$ körlemezrendszer bármely elemének a sugara egy tetszőlegesen adott $c > 0$ konstansnál nem kisebb, akkor van a síknak olyan K_0 köre, amelyen minden természetes $m \geq 4$ számhoz választható m oldalú szabályos S_m sokszög úgy, hogy ezen S_m szögpontjai és középpontja közül legalább egyet a $\mathcal{A}$ körlemezrendszer bármely eleme belső pontként tartalmaz.

B i z o n y í t á s . a.) Ha a $\mathcal{A}$ rendszerben ivháromszög nincs, akkor Helly tétele szerint valamennyi elemnek van közös pontja. Legyen egy ilyen közös pont P_0 . Ha P_0 a $\mathcal{A}$ bármely elemének belső pontja, akkor bármely P_0 középpontu körnek megvan a kívánt tulajdonsága. Ellenkező esetben hagyjuk el azokat az elemeket, amelyeknek P_0 belső pontja. A visszamaradó elemek határa átmegy a P_0 ponton.

Állítjuk, hogy a P_0 középpontu, $r = c$ sugaru kör választható K_0 kör gyanánt. Ezen K_0 körön válasszunk egy tetszőleges P_1 pontot az S_m sokszög egyik szögpontjául. P_0, P_1 és m teljesen meghatározza az S_m sokszöget. Tekintsük a sík minden olyan körlemezét, amelynek megvan a következő két tulajdonsága.

(A) Határa átmegy a P_0 ponton.

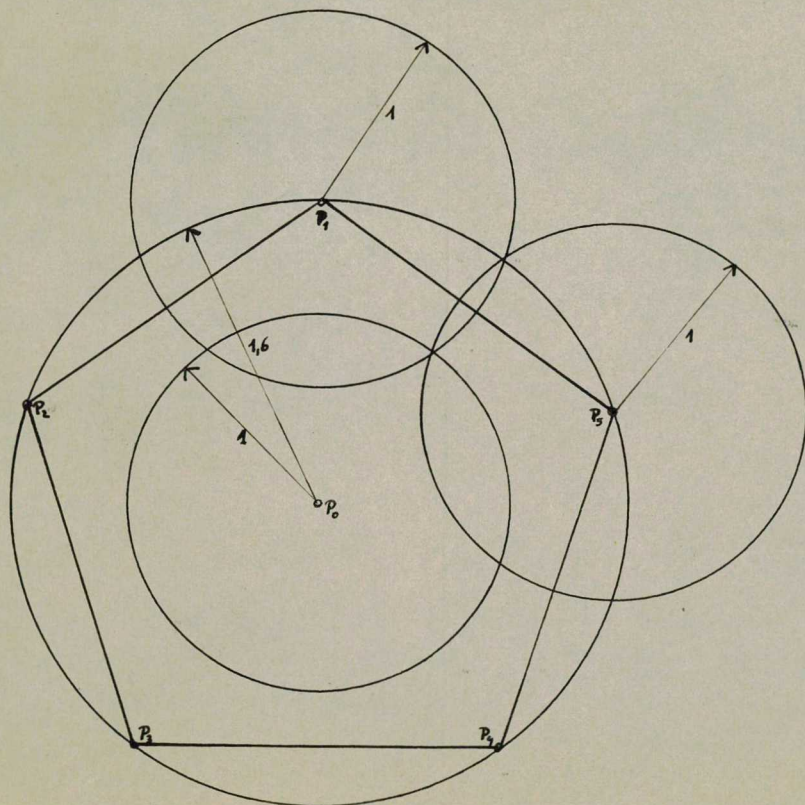
(B) Az S_m sokszög egyik szögpontját sem tartalmazza belső pontként.

Az (A) és (B) tulajdonsággal rendelkező körlemezek között minden rögzített $m (\geq 3)$ esetén van maximális ρ_m sugaru körlemez. Az m növekedtével ρ_m monoton fogy $\rho_{m'} > \rho_m$ ha $m' < m$, ezért $m \geq 4$ esetén ρ_4 a maximális. Mivel $\rho_4 = \frac{c}{\sqrt{2}} < c$, az összes (A) és (B) tulajdonságu körlemez c -nél kisebb sugaruak és így a II. tétel feltétele szerint nem tartozhatnak a $\mathcal{K}$ körlemezrendszerbe.

b.) Ha a $\mathcal{K}$ körlemezrendszerben van ivháromszög, akkor állítjuk, hogy a $\mathcal{K}$ körlemezrendszer K_0 egységkörével koncentrikus $r = 1,6$ sugaru kör választható K_0 kör gyanánt.

Az első tétel után tett 1 megjegyzés értelmében az állítás $m = 4$ -re már igazolt. A továbbiakban tehát $m \geq 5$.

c.) Először is igazoljuk: ha egy $k \in \mathcal{K}$ körlemez középpontja az S_m ($m \geq 5$) sokszögben van, akkor S_m szögpontjai és középpontja közül legalább egy pontot a k körlemez tartalmaz. Amint az első tétel bizonyításánál láttuk, - (5.§.(B) feltétel) - a k sugara > 1 ; továbbá $m \geq 5$ esetén az 1,6 sugaru körben S_m két szomszédos szögpontjának a távolsága 2-nél kisebb, végül a k kör konvexitása miatt állításunk igazolására elegendő kimutatni; hogy az S_m ($m \geq 5$) sokszög szögpontjai és középpontja körül írt egységnyi sugaru körök lefedik az S_m sokszöget,



6. ábra.

másszóval egy-egy szomszédos szögpont körül irt $r = 1$ sugaru kör egyik metszéspontja a k_0 egységgörbe esik, vagy pedig azt mutathatjuk meg, hogy a k_0 kör és az S_m egyik szögpontja körül irt $r = 1$ sugaru kör egyik metszéspontja egy szomszédos szögpont körül irt $r = 1$ sugaru körbe esik. Mivel m növekedtével a szomszédos szögpontok távolsága csökken, elég a legutóbbi állítást $m = 5$ esetén igazolni.

Legyen $P_1 = (0; 1,6)$ $P_5 = (1,6 \cos 18^\circ; 1,6 \sin 18^\circ)$ Az $x^2 + y^2 = 1$ és $x^2 + (y - 1,6)^2 = 1$ körök $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ metszéspontja a P_5 körüli $r = 1$ sugaru körben van. Ellenkezőleg

$$(0,6 - 1,6 \cos 18^\circ)^2 + (0,8 - 1,6 \sin 18^\circ)^2 > 1 \quad \text{amiből}$$

$$1,6 > 1,2 \cos 18^\circ + 1,6 \sin 18^\circ > 1,2 \cdot 0,95 + 1,6 \cdot 0,3 = 1,62$$

ellentmondás adódna.

d.) Azokat a körlemezeket vizsgáljuk a továbbiakban, amelyek középpontja rögzített $m \geq 5$ esetén az S_m sokszögön kívül van.

e. Tekintsük a sik minden olyan körlemezét, amely kielégíti az alábbi követeléseket:

(C) Középpontja valamely K_0 -ba irt S_m ($m \geq 5$) szabályos sokszögön kívül fekszik.

(D) Van közös pontja a k_0 egységgörrel.

(E) Az S_m sokszög P_k szögpontjai közül egyet sem tartalmaz belső pontként.

A tekintett körlemezek közül annak a körlemeznek az R_m sugara maximális rögzített m esetén, amelynek határa átmeny az S_m sokszög két szomszédos szögpontján, továbbá érinti a k_0 egységgört. Ebből adódik,

$$\text{hogy } R_m = \frac{(1,6^2 + 1) - 3,2 \cos \frac{\pi}{m}}{3,2 \cos \frac{\pi}{m} - 2}. \quad \text{Nevezetesen } R_5 \approx 1,65 \quad R_6 \approx 1,03$$

$R_m < 1$ ha $m \geq 7$; feltéve, hogy van olyan körlemez, amely mindhárom követelménynek megfelel.

$R_m < 1$, ha $m \geq 7$ alapján, az R_m sugaru kör sem tartozhat a $\mathcal{K}$ körlemezrendszerbe a (B) követelmény szerint, amely $\mathcal{K}$ minden körlemezére érvényes. Így előbbi eredményünkkel összevetve nyerjük, hogy $m \geq 7$ esetén bármely K_0 -ba irt szabályos S_m sokszög szögpontjai és középpontja a $\mathcal{K}$ körlemezrendszer belső alappontrendszeré.

d₁) Tekintsük a $\mathcal{K}$ körlemezrendszert alapháromszöggével, (melynek beírt köre a $\mathcal{K}$ rendszer k_0 egységgöre) megadottnak. Ezt úgy értjük, hogy a $\mathcal{K}$ rendszer elemének tekintjük a sik mindazon körlemezét,

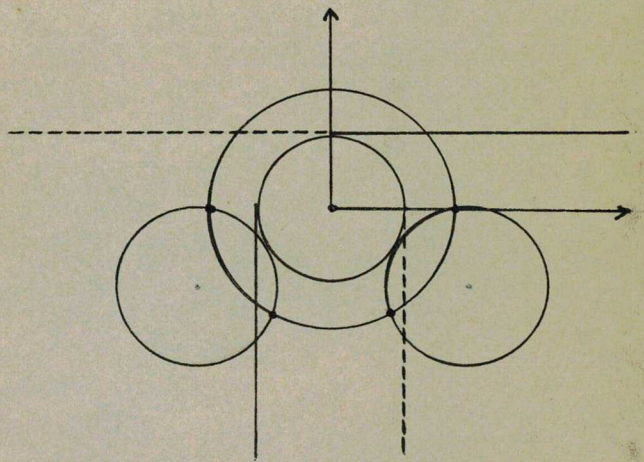
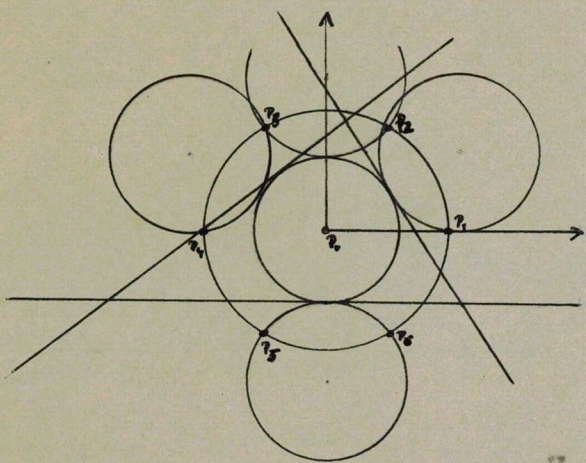
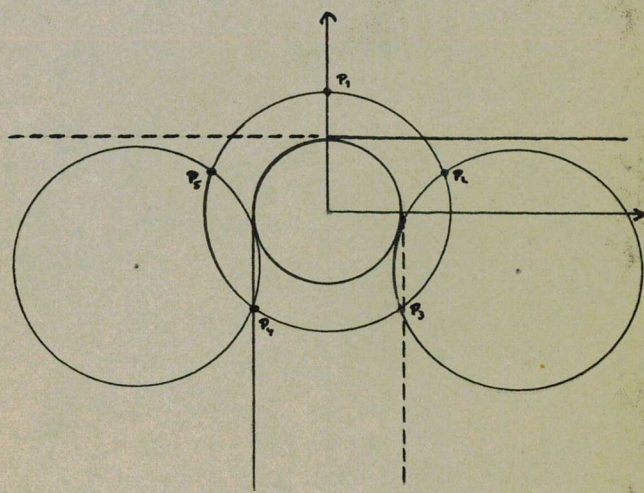
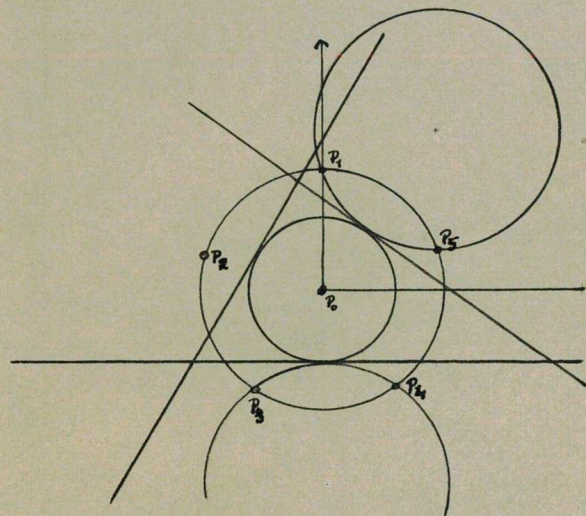
amelynek az alapháromszög minden oldalával és a k_0 egységkörrel van közös pontja. Vezessünk be derékszögű koordinátarendszert ugyanugy, mint az 5-ben.

Kimutatjuk, hogy

$$m = 5 \text{ esetén } P_0 = (0,0) \quad P_k = (1,6 \cos \frac{3\pi+2k\pi}{10}; 1,6 \sin \frac{3\pi+2k\pi}{10}) \quad k=1,2,3,4,5$$

$$m = 6 \text{ esetén } P'_0 = (0,0) \quad P'_k = (1,6 \cos \frac{(k-1)\pi}{3}; 1,6 \sin \frac{(k-1)\pi}{3}) \quad k=1,2,3,4,5,6$$

pontok képezik a $\mathcal{K}$ körlemezrendszer belső alappontjait.



7. ábra.

Bizonyítás ötszögre. Ha a $P_3 P_4$ pontokon átmenő (c) tulajdonságu, R_5 sugaru kör eleme volna a $\mathcal{K}$ körlemezrendszernek, akkor az alapháromszög legnagyobb szögét közre fogó oldalaknak ezzel közös pontja volna és így az alapháromszög legnagyobb szöge $\frac{\pi}{3}$ -nál kisebb lenne, ami lehetetlen. Ugyanigy nem tartozhatnak azok a körök a $\mathcal{K}$ körlemezrendszerbe azok a körlemez, amelyek sugara R_5 -nél kisebb és (c) tulajdonságuk. A R_5 -nél nagyobb sugaru köröknek viszont csak akkor lehet közös pontja a k_0 egységkörrel, ha az S_5 szögpontjainak valamelyikét

belső pontként tartalmazzák.

A P_2P_3 illetve P_4P_5 szögpontokon átmenő (C) tulajdonságu R_5 sugaru körnek nem lehet közös pontja az alapháromszög T_3 illetve T_4 tartományban fekvő oldalával. Az utóbbi kör T_4 tartománytól való távolsága $d = 2,6 \sin \frac{\pi}{10} + 1 - R_5 \approx 0,16 > 0$.

Hasonlóan állapítható meg, hogy az R_5 sugaru (C) tulajdonságu P_1P_5 illetve P_1P_2 pontokon átmenő kör pozitív távolsága van az alapháromszög legnagyobb oldalától. Ebből pedig fenti állításunk nyilvánvalóan következik.

Bizonyítás hatszögre. A P_5P_6 pontokon átmenő R_6 sugaru (C) tulajdonságu körlemez nem tartozhat a $\mathcal{X}$ rendszerbe, mert ellenkező esetben az alapháromszög legnagyobb szöge $\frac{\pi}{3}$ -nál kisebb lenne.

Az R_6 sugaru (C) tulajdonságu körök közül azok, amelyek a $P_1'P_2'$, $P_2'P_3'$, $P_3'P_4'$ pontpárok egyikén mennek át pozitív távolságra, vannak az alapháromszög legnagyobb oldalától, azok pedig amelyek a $P_4'P_5'$ illetve P_6P_1' pontokon mennek át pozitív távolságra vannak az alapháromszög T_3 illetve T_4 tartományban fekvő oldalától. Ebből már az állításunk következik.

Ezzel a II.tétel bizonyítása kész.

Hálás köszönetet mondok Szőkefalvi-Nagy Béla professzor urnak, aki dolgozatom elkészítésénél számos alkalommal nyújtott segítséget és Fejes Tóth László professzor urnak, aki a Gallai problémára felhívta figyelmemet.

I r o d a l o m .

- [1] E.HELLY: Über Mengen konvexer Körper mit gemeinschaftlichen Punkten. (Jahresbericht deutsch. Math.- Ver. 32. 175-176.o. 1923.)
- [2] L.FEJES TÓTH: Lagerungen in der Ebene auf der Kugel und im Raum (Springer-Verlag Berlin-Göttingen-Heidelberg 1953.) 97.o.
- [3] H.HADWIGER und H.DEBRUNNER: Ausgewählte Einzelprobleme der kombinatorischen Geometrie der Ebene. (Enseign. math. 1955. Heft 1, 56-89, nevezetesen S. 75, Nr. 37.)
- [4] W.BLASCHKE: Kreis und Kugel (Leipzig 1916) 62.o.

