

FIXPONT - TÉTELEK A NEUMANN - ALGEBRÁK
ELMÉLETÉBEN

Doktori disszertáció

Irta

SZÜCS JÓZSEF

Szeged

1967



Diss. B 576



B E V E Z E T É S

Legyen $\mathcal{H}$ komplex Hilbert-tér, $\mathcal{A}$ pedig Neumann-algebra $\mathcal{H}$ -ban.¹⁾ Tekintsük $\mathcal{A}$ automorfizmusainak valamely G csoportját. Jelöljük $\mathcal{A}^G$ -vel a G csoport által fixen hagyott T elemek Neumann-algebráját, tetszőleges $T \in \mathcal{A}$ elemre pedig $K(T, G)$ -vel a $\Theta(T)$ alakú elemek halmazának gyengén zárt konvex burkát, ahol Θ , rögzített T mellett, átfutja G összes elemeit. Ismeretes (l. a 3.7. tételt), hogy ha, speciálisan, G az $\mathcal{A}$ algebra összes belső automorfizmusának csoportja, akkor a $K(T, G) \cap \mathcal{A}^G$ halmaz sohasem üres és $\mathcal{A}$ akkor és csakis akkor véges,²⁾ ha ez a halmaz csupán egy elemet tartalmaz. Jelen dolgozatunk célja az, hogy kikutassuk, mi a helyzet (vagyis üres-e, vagy ha nem, hány elemet tartalmaz a $K(T, G) \cap \mathcal{A}^G$ halmaz) abban az esetben, amikor G nem szükségképpen azonos az $\mathcal{A}$ algebra összes belső automorfizmusának csoportjával. Bizonyos speciális esetekben erre vonatkozóan is ismeretesek eredmények. Legyen $\mathcal{B}$ egy másik Neumann-algebra a $\mathcal{H}$ térben, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ³⁾, G pedig a $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ algebra $T \rightarrow U T U^*$ alakú automorfizmusainak csoportja, ahol U átfutja $\mathcal{B}$ unitér elemeinek $\mathcal{B}_U$ csoportját. J. Schwartz [19]-ben

1)

A Neumann-algebrák elméletére és a terminológiára vonatkozóan l. [7]-et és a 3.paragrafust.

2) $\mathcal{A}$ definíció szerint akkor véges, ha minden izometrikus eleme unitér.

3) $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ jelöli $\mathcal{H}$ összes korlátos operátorának Neumann-algebráját.

bebizonyította, hogy ha $\mathcal{B}$ hipervéges faktor¹⁾, akkor a $K(T, G) \cap \mathcal{A}^G$ halmaz egyetlen $T \in \mathcal{A}$ elemre sem üres. J. Schwartz megmutatta továbbá azt is, hogy ha E diszkrét csoport, $h_g = \ell^2(E)$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(h_g)$, $\mathcal{B}$ pedig az E diszkrét csoportra épített Hilbert-algebra baloldali szorzásalgebrája²⁾, akkor G előző választása mellett a $K(T, G) \cap \mathcal{A}^G$ halmaz akkor és csak akkor tartalmaz minden T -re ($T \in \mathcal{A}$) legalább egy elemet, ha az E csoporton létezik egy jobbinvariáns, 1-re normált, pozitív, végesen additív mérték (l. szintén [19]-et!) [18]-ban J. Schwartz hasonló jellegű tételt bizonyít be egy Neumann János által definiált faktorcsaládra is (l. az 5.§. (β) pontját!).

A felvetett kérdés vizsgálatánál fontos szerepet játszanak az invariáns közepek. Erre már J. Schwartz ([18], [19]) és H. Choda és M. Echigo [5] cikkei is utalnak. Jelen dolgozatban azonban a probléma teljesen általános és rendszeres (ha nem is teljes) kidolgozást nyer, így módszereink is általánosabbak, és a legtöbb esetben különböznek az előbb említett szerzők módszereitől.

Az 1. §-ban ismertetjük a közép fogalmát és legegyszerűbb tulajdonságait. Ez a paragrafus nem tartalmaz saját eredményt. Nem találtuk meg azonban az irodalomban az 1.1. Tétel bizonyítását, ez a tétel csupán

¹⁾ Vagyis $\mathcal{B}$ véges lineáris dimenziós rész $\ast$ -algebrák növekvő sorozata által generált véges faktor.

²⁾ l. az 5.§ (α) pontját és [7]-et !

kimondva szerepel Day egy cikkében ([6], (D), 513. old.). Tételünkre N. Bourbaki [4] alatti könyve egyik bizonyítása (Chap. III. § 3, Théorème 1.) alapján adunk egyszerű bizonyítást. Az 1.2. Tétel szerepel J. Schwartznál is ([19], 21. oldal), ő azonban egy nehéz tételt, nevezetesen a gyengén folytonos lineáris funkcionálok Dixmier-féle előállítási tételét (3.4. Tétel, (i)) felhasználva, bizonyítja be állítását. Mi csupán a teljesen elemi 1.1. Tétel alapján okoskodunk.

A 2.§. elején az invariáns közepekre vonatkozó, a továbbiakban felhasználásra kerülő tényeket gyűjtöttük össze. A 2.1. Tétel egy egzisztencia-tétel invariáns közepekre. Ez az eredmény dolgozatunk egyik súlypontja. Tételünk speciális esete szerepel Th. Mitchellnél is ([14], Theorem 3. és 4.) Jelen bizonyításunk azonban ebben az általános esetben is egyszerűbb és inkább elemi, mint Th. Mitchellé, másrészt viszont Th. Mitchell eredményének ilyen általánosabb megfogalmazása lényeges a továbbiakra vonatkozóan. Egyébként az eredeti, Mitchell-féle gondolatmenetet ebben az általános esetben nem lehet alkalmazni.

A 3.§. összefoglalja azokat a Nuemann-algebrákra vonatkozó ismereteket, amelyek a továbbiakban felhasználásra kerülnek. Ez a paragrafus teljes mértékben összefoglaló jellegű.

A 4.§. tartalmazza egyik fő eredményünket, egy kritériumot arra vonatkozóan, hogy a $K(T, G) \cap A^G$ halmaz egyetlen $T \in A$ elemre se legyen üres, ahol G az A

algebra normális endomorfizmusainak tetszőleges félcsoporthja (l. a 4.1. Tételt!). Eredményünk egyik része a [19]-ben szereplő 5. Lemma általánosításának tekinthető. A 4.2. Tétel egy kritériumot tartalmaz arra vonatkozóan, hogy a $K(T, G) \cap \mathcal{A}^G$ halmaz pontosan egy elemet tartalmazzon. Mindkét tételünk a 2.1. Tétel következménye. Ezután a 4.1. és 4.2. Tétel korolláriumaként néhány kritériumot bizonyítunk be arra vonatkozóan, hogy egy $\mathcal{A}$ Neumann-algebra véges legyen.

Az 5.§-ban J. Schwartz már idézett tételeit bizonyítjuk be a 4.1. Tétel segítségével. Előbb az (α) és (β) pontokban emlékeztetünk J. Schwartz eredményeire, majd a 4.1. Tétel egy egyszerű következményét tárgyaljuk, ezután az (α') ill. (β') pontokban ennek alapján bizonyítjuk J. Schwartz (α) ill. (β) alatti eredményeit. Ez a bizonyítás a 4.1. Tétel korolláriumára alapján egyszerű "behelyettesítéssel" történik.

1.§. Számértékű és operátorértékű függvények közepei

Legyen E tetszőleges nem üres halmaz. Jelöljük $B(E)$ -vel az összes, E -n értelmezett, komplex értékű korlátos függvény halmazát. $B^*(E)$ -t alkossák $B(E)$ összes valós értékű elemei. Nyilvánvaló, hogy $B(E)$ ill. $B^*(E)$ a függvények pontonkénti összeadásával és számmal való szorzásával komplex ill. valós lineáris teret alkotnak. Az $\|f\|_\infty = \sup_{x \in E} |f(x)|$ normával együtt tekintett $B^*(E)$ ill. $B(E)$ pedig valós ill. komplex Banach-tér. Tekintsük $B(E)$ -nek egy H lineáris (nem szükségképpen zárt) alterét. H -t szimmetrikusnak nevezzük, ha bármely f elemével együtt annak komplex konjugáltját, $\bar{f}$ -t is tartalmazza (a konjugálást természetesen pontonként végezzük el). $B(E)$ maga szimmetrikus altér. Nyilvánvaló, hogy $B(E)$ egy H altere akkor és csakis akkor szimmetrikus altér, ha bármely f elemével együtt annak valós részét, $\operatorname{Re} f$ -et és képzetes részét, $\operatorname{Im} f$ -et is tartalmazza (a valós-ill. képzetes rész képzését is pontonként értjük).

A továbbiakban alapvető lesz a következő fogalomalkotás:

1.1. D e f i n i c i ó . Legyen H altere $B^*(E)$ -nek vagy szimmetrikus altere $B(E)$ -nek.¹⁾ A H -n értelmezett μ (valós ill. komplex) lineáris funkcionált

¹⁾ A közép fogalmát rendesen csak a $H \subseteq B^*(E)$ esetben szokás definiálni.

középnek (H -n értelmezett középnek) nevezzük, ha bármely f -re ($f \in H \cap B^+(E)$) $\mu(f)$ valós és

$$\inf_{x \in E} f(x) \leq \mu(f) \leq \sup_{x \in E} f(x) \quad (1)$$

Megjegyzések 1. Ha $H \subseteq B^+(E)$, akkor - mivel

$$\|f\|_\infty \leq \inf_{x \in E} f(x) \leq \sup_{x \in E} f(x) \leq \|f\|_\infty - \text{nyilván } \|\mu\| \leq 1.$$

Ha viszont H szimmetrikus altere $B(E)$ -nek, legyen H_0

a H valós elemeinek halmaza. μ -nek H_0 -ra való μ_0 megszorítása közép H_0 -on, tehát $\|\mu_0\| \leq 1$. Legyen

most $f \in H$ tetszőleges $\|f\|_\infty \leq 1$ tulajdonságú

elem. Ekkor $\operatorname{Re} f \in H_0$, $\operatorname{Im} f \in H_0$ és $\|\operatorname{Re} f\|_\infty \leq 1$,

$$\|\operatorname{Im} f\|_\infty \leq 1. \text{ Így } |\mu(f)| = \sqrt{(\mu_0(\operatorname{Re} f))^2 + (\mu_0(\operatorname{Im} f))^2} \leq \sqrt{2}.$$

Tehát μ ebben az esetben is korlátos és $\|\mu\| \leq \sqrt{2}$.

Megjegyezzük, hogy ha az $e(x) \equiv 1$ függvény is eleme

$$H \text{ -nak, akkor } 1 = \inf_{x \in E} e(x) \leq \mu(e) \leq \sup_{x \in E} e(x) = 1, \text{ tehát}$$

$$\mu(e) = 1. \text{ Ha tehát}$$

$$H \subseteq B^+(E) \text{ és } e \in H, \text{ akkor } \|\mu\| \geq \frac{|\mu(e)|}{\|e\|_\infty} = 1,$$

így $\|\mu\| = 1$. Megemlítjük még, hogy ha H szimmetrikus

altér, $B(E)$ -ben, akkor a μ normájára adott $\sqrt{2}$

korlát általában nem javítható.

2. Az 1.1. Definícióban (1) helyett elegendő feltenni a

$$\mu(f) \leq \sup_{x \in E} f(x) \quad (1')$$

vagy a

$$\mu(f) \geq \inf_{x \in E} f(x) \quad (1'')$$

egyenlőtlenségek valamelyikét.

3. Ha az 1-gyel azonosan egyenlő e függvény eleme H -nak, akkor az 1. 1. Definícióban az (1) alatti egyenlőtlenségek helyett elegendő azt kikötni, hogy $\mu(f) \geq 0$, ha $f \in H$ és $f(x) \geq 0$ ($x \in E$), továbbá azt, hogy $\mu(e) = 1$.

4. Legyen E tetszőleges nem üres halmaz. Ekkor a $H_0 \rightarrow H = H_0 + iH_0$ leképezés kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesít $B^*(E)$ H_0 lineáris alterei és $B(E)$ H szimmetrikus alterei között. Legyen μ_0 közép H_0 -on, és legyen $f \in H$. Ekkor $\operatorname{Re} f \in H_0$ és $\operatorname{Im} f \in H_0$. Definíáljuk a μ funcionált H -n a következő módon. Legyen $\mu(f) = \mu_0(\operatorname{Re} f) + i\mu_0(\operatorname{Im} f)$ minden $f \in H$ -ra. A $\mu_0 \rightarrow \mu$ leképezés kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesít a H_0 -n ill. H -n definiált közepek között. Ezért elegendő volna csupán valósértékű függvények közepeit tekintenünk. Hogy nem ezt tesszük, annak egyetlen oka az, hogy a továbbiakban alapvető módon szükségünk lesz a komplex Hilbert-térbeli korlátos operátorok közepének fogalmára.

5. Legyen most E tetszőleges nem üres halmaz, μ pedig közép $B^*(E)$ -n. Jelöljük $K(E)$ -vel E összes részhalmazának halmazát. Tetszőleges $F \in K(E)$ -re legyen χ_F az F karakterisztikus függvénye. A $\bar{\mu}(F) = \mu(\chi_F)$ ($F \in K(E)$) egyenlőség egy 1 -re normált, pozitív, végesen additív¹⁾ $\bar{\mu}$ mértéket definiál $K(E)$ -n. Fordítva, legyen $\bar{\mu}$ tetszőleges 1 -re nor-

¹⁾ Az 1 -re normáltság azt jelenti, hogy $\bar{\mu}(E) = 1$, a pozitivitás azt, hogy $\bar{\mu}(F) \geq 0$ minden $F \in K(E)$ elemre, a „végesen additív” kifejezés jelentése pedig a következő: ha $F_i \in K(E)$ ($1 \leq i \leq n$) és $F_i \cap F_j = \emptyset$, ha $i \neq j$, akkor $\bar{\mu}(F_1 \cup \dots \cup F_n) = \bar{\mu}(F_1) + \dots + \bar{\mu}(F_n)$.

mált, pozitív, végesen additív mérték $K(E)$ -n. Jelöljük $B_0(E)$ -vel az E -n definiált valós értékű lépcsős-függvények halmazát. Ez a χ_F ($F \in K(E)$) függvények által $B^T(E)$ -ben generált lineáris altér. Legyen

$f \in B_0(E)$. f egyértelműen írható az $f = c_1 \chi_{E_1} + \dots + c_n \chi_{E_n}$ alakban, ahol $c_1, \dots, c_n$ páronként különböző valós számok, $E_1, \dots, E_n$ pedig E páronként idegen nem üres részhalmazai és $E = E_1 \cup \dots \cup E_n$. Definiáljuk a μ funkcionált $B_0(E)$ -n a $\mu(f) = c_1 \bar{\mu}(E_1) + \dots + c_n \bar{\mu}(E_n)$ egyenlőséggel. Egyszerű számolással be lehet látni, hogy μ közép $B_0(E)$ -n. A $B_0(E)$ altér a $\|\cdot\|_\infty$ norma által indukált topológiában $B^T(E)$ sűrű részhalmaza, így μ -t a linearitás és a korlátosság megtartásával egyértelmű módon ki tudjuk terjeszteni az egész $B^T(E)$ térre. Jelöljük ezt a kiterjesztett funkcionált továbbra is μ -vel. A 3. pont szerint μ közép $B^T(E)$ -n. Másrészt viszont μ definíciója folytán $\mu(\chi_F) = \bar{\mu}(F)$ minden $F \in K(E)$ halmazra. Azt kaptuk tehát, hogy a $\mu \rightarrow \bar{\mu}$ leképezés kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesít a $B^T(E)$ -n definiált μ közepek és a $K(E)$ -n definiált $\bar{\mu}$ -re normált, pozitív, végesen additív $\bar{\mu}$ mértékek között. Ez a tény indokolja azt, hogy a továbbiakban a közepeket néha integráljellel jelöljük.

6. Legyen $E = \{1, 2, \dots, n\}$. Könnyen be lehet látni, hogy a $B(E)$ -n értelmezett közép és az n -tagú komplex számsorozatok nem-negatív számokkal súlyozott számtani közepének fogalma lényegében egybeesik.

Legyen most E tetszőleges és legyen a nem-negatív α_i ($i=1, 2, \dots$) számok összege 1 -gyel egyenlő. Tekintsük E elemeinek egy $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ sorozatát. Ekkor a

$$\mu(f) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i f(x_i) \quad (2)$$

módon $B(E)$ -n definiált μ funkcionál nyilván közép $B(E)$ -n. Az ilyen közep~~ek~~et azelőző megjegyzésben foglaltak analógiájára ebben az általános esetben is súlyozott számtani középnek nevezzük. Ha csak véges sok α_i különbözik zérustól, akkor a μ közepet végesnek nevezzük.

Általában nem minden közép áll elő (2) alakban. Legyen ugyanis E tetszőleges végtelen számosságú halmaz, H pedig az összes olyan valós értékű f függvény által alkotott lineáris altér $B^r(E)$ -ben, amelyik véges sok elem kivételével zérus értéket vesz fel. Nyilvánvaló, hogy $\sup_{x \in E} f(x) \geq 0$ ha $f \in H$. Legyen μ_0 a H -n értelmezett azonosan zérus lineáris forma. Mivel az $f \rightarrow \sup_{x \in E} f(x)$ funkcionál $B^r(E)$ -n szubadditív és pozitív homogén és mivel $\mu_0(f) \leq \sup_{x \in E} f(x)$ ha $f \in H$, a Hahn-Banach-féle kiterjesztési tétel szerint létezik egy olyan μ lineáris forma $B^r(E)$ -n, amelyre $\mu(f) \leq \sup_{x \in E} f(x)$ tetszőleges $f \in B^r(E)$ -re és $\mu(f) = 0$, ha $f \in H$. A Megjegyzések 2. pontja szerint μ közép $B^r(E)$ -n. Tegyük fel, hogy μ (2) alakú és legyen e_1 a H halmaznak az az eleme, amelyik az x_1 -en 1, Feltéhető, hogy $\alpha_1 \neq 0$. egyébként zérus értéket vesz fel. (2) szerint $\mu(e_1) = \alpha_1 \neq 0$, a μ konstruálása szerint pedig $\mu(e_1) = 0$, ami ellentmondás. Tehát μ nem lehet (2) alakú, vagyis

nem súlyozott számtani közép $B^r(E)$ -n.

Igaz azonban, hogy bármely közép megközelíthető (2) alakú, sőt véges közepekkel is. Pontosabban, fennáll a következő

4.1. Tétel. Legyen E tetszőleges nem-üres halmaz, H pedig $B^r(E)$ altere vagy $B(E)$ szimmetrikus altere, μ pedig egy közép H -n. Ekkor H -beli függvények tetszőleges véges $\{f_1, \dots, f_n\}$ rendszeréhez és bármely pozitív ε számhoz található olyan μ_0 véges közép, amelyre

$$|\mu(f_j) - \mu_0(f_j)| \leq \varepsilon \quad (1 \leq j \leq n)$$

Bizonyítás¹⁾. Elegendő a tételt csupán abban az esetben bebizonyítani, amikor $H \subseteq B^r(E)$. Így a továbbiakban ezt feltesszük. Mivel μ közép, $\mu(f) \leq \sup_{x \in E} f(x)$, ha $f \in H$. Az $f \rightarrow \sup_{x \in E} f(x)$ funkcionál $B^r(E)$ -n subadditív és pozitív homogén. A Hahn-Banach-féle kiterjesztési tétel szerint létezik tehát $B^r(E)$ -n egy olyan μ' lineáris funkcionál, amelyre $\mu'(f) \leq \sup_{x \in E} f(x)$ minden $f \in B^r(E)$ -re és $\mu'(f) = \mu(f)$, ha $f \in H$. Az 1.1. Definícióhoz fűzött Megjegyzések 2. pontja szerint μ' közép $B^r(E)$ -n. A továbbiakban tehát feltehetjük, hogy $H = B^r(E)$. Mivel az f_j függvények korlátosak, van olyan M szám, amelyre $|f_j(x)| \leq M$, ha $x \in E$ és $j = 1, 2, \dots, n$. Legyen az ℓ szám a $\frac{2M}{\varepsilon}$

¹⁾ Ez a tétel ismeretes ([6], (D), 513. old.), de a szerző sehol sem találta meg a bizonyítását. Jelen bizonyításunkat a [4] alatti könyv egy bizonyítása sugallta (Chap III. §.3. Théorème 1).

számban foglalt legnagyobb egész számnál 1-gyel nagyobb.

Tekintsünk egy f_j ($1 \leq j \leq n$) függvényt. Minden i -re 1 és l között legyen A_{ji} az f_j függvénynek a $[-M+(i-1)\varepsilon, -M+i\varepsilon)$ balról zárt, jobbról nyitott inter-

vallumhoz tartozó nivóhalmaza, vagyis legyen $A_{ji} =$

$$= \{x: -M+(i-1)\varepsilon \leq f_j(x) < -M+i\varepsilon\}.$$
 Nyilvánvaló, hogy

$A_{ji} \cap A_{ji'} = \emptyset$, ha $i \neq i'$ és $\bigcup_{1 \leq i \leq l} A_{ji} = E$. Másrészt, ha $x \in A_{ji}$ és $y \in A_{ji}$, akkor

$$|f_j(x) - f_j(y)| < \varepsilon.$$

Tekintsük az E halmaznak az $\{A_{j1}, \dots, A_{jl}\}$ ($1 \leq j \leq n$) particiók által meghatározott, ezek mindegyikénél finomabb $\{B_1, \dots, B_s\}$ particióját. Nyilvánvaló, hogy ha valamely k -ra $x \in B_k$, $y \in B_k$, akkor

$$|f_j(x) - f_j(y)| < \varepsilon \quad (1 \leq j \leq n) \quad (3)$$

Legyen e_k a B_k halmaz karakterisztikus függvénye

($1 \leq k \leq s$). Ekkor $\alpha_k = \mu(e_k) \geq 0$ ($1 \leq k \leq s$) és

$$\sum_{k=1}^s \alpha_k = 1, \text{ mivel minden } x \in E \text{-re } \sum_{k=1}^s e_k(x) = 1.$$

Rögzítsük most tetszés szerint mindegyik B_k -nak egy a_k elemét. Tekintsünk egy f_j függvényt ($1 \leq j \leq n$).

(3) alapján könnyen be lehet látni, hogy

$$\|f_j - \sum_{k=1}^s f_j(a_k) e_k\|_\infty \leq \varepsilon, \text{ tehát}$$

$$|\mu(f_j) - \sum_{k=1}^s \alpha_k f_j(a_k)| \leq \varepsilon \quad (1 \leq j \leq n),$$

így μ_0 gyanánt választhatjuk az $f \rightarrow \sum_{k=1}^s \alpha_k f(a_k)$ közepet. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Megjegyzés. Minden $| \cdot |$ -n értelmezett μ közép

korlátos, lineáris funkcionál a H -n mint normált lineáris téren, tehát eleme H adjungált terének, H^* -nak. Az előző tétel azt fejezi ki, hogy a véges közepek az összes közepek halmazában sűrűn fekszenek, a H tér által H^* -ban indukált gyenge topológia értelmében.

A továbbiakban bevezetjük az operátorértékű függvények közepének fogalmát.¹⁾ Legyen h_y tetszőleges komplex Hilbert-tér, és jelöljük $B(h_y)$ -val h_y összes korlátos lineáris operátorának halmazát. Tekintsünk egy E nem üres halmazt, és legyen $s \rightarrow T_s$ az E -nek $B(h_y)$ -ba való egyértelmű leképezése. Tegyük fel, hogy $M = \sup_{s \in E} \|T(s)\| < +\infty$. Ekkor bármely $x, y \in h_y$ vektorpárra az $s \rightarrow (T_s x, y)$ függvény korlátos (általában komplex értékű), mivel $|(T_s x, y)| \leq \|T_s\| \|x\| \|y\| \leq M \|x\| \|y\|$. Legyen H olyan szimmetrikus lineáris altere $B(E)$ -nek, amely tartalmazza az összes

$s \rightarrow (T_s x, y)$ alakú függvényt, ahol x és y átfutják h_y elemeit. Tekintsünk egy μ közepet H -n, és azt az integrállal való analóg tulajdonságai alapján jelöljük az integrálás jelével, vagyis bármely $f \in H$ elemre jelentse $\int f(x) dx$ az f függvény közepét, a $\mu(f)$ számot. Ekkor az

$$A(x, y) = \int (T_s x, y) ds$$

1)

Erre a fogalomalkotásra vonatkozóan l. [19] -et.

kifejezésnek bármely $x, y \in H$ vektorpár esetén értelme van, és A korlátos bilineáris forma H -n, mivel

$$| \int (T_s x, y) ds | \leq \sqrt{2} M \|x\| \|y\| \quad (4)$$

(1. az 1.1. Definícióhoz fűzött Megjegyzések 1. pontját!).

Tekintsük azt a korlátos lineáris operátort H -ban, amelynek bilineáris formája egyenlő A -val, és jelöljük azt $\int T_s ds$ -sel. Ezt az operátort az $s \rightarrow T_s$ operátorértékű függvény közepének vagy egyszerűen a T_s operátorok közepének nevezzük. A $\int T_s ds$ közepre tehát fennáll a

$$(\left[\int T_s ds \right] x, y) = \int (T_s x, y) ds \quad (x, y \in H)$$

definíciós egyenlőség.

Tekintsük E -nek egy másik $s \rightarrow S_s$ leképezését $B(H)$ -ba, és tegyük fel, hogy $\sup_{s \in E} \|S_s\| < +\infty$. Tegyük fel továbbá, hogy H tetszőleges két x, y elemére az $s \rightarrow (S_s x, y)$ függvény eleme H -nak. Legyen α és β két komplex szám. Ekkor fennállnak a következő relációk:

$$(i) \quad \int [\alpha T_s + \beta S_s] ds = \alpha \int T_s ds + \beta \int S_s ds ;$$

$$(ii) \quad \int T_s^* ds = \left[\int T_s ds \right]^*$$

$$(iii) \quad \text{minden } R \in B(H) \text{-ra} \quad \int [RT_s] ds = \\ = R \left[\int T_s ds \right] \text{ és } \int [T_s R] ds = \left[\int T_s ds \right] R,$$

beleértve az egyenlőségek baloldalainak létezését is,¹⁾

(i) triviális. Lássuk be (ii)-t! Legyen $x \in H$ és $y \in H$. Ekkor

¹⁾ Erre vonatkozóan l. [19]-et !

$$\begin{aligned}
 ([\int T_s ds]^* x, y) &= (x, [\int T_s ds] y) = \\
 &= \overline{([\int T_s ds] y, x)} = \overline{\int (T_s y, x) ds} = \int \overline{(T_s y, x)} ds = \\
 &= \int (x, T_s y) ds = \int (T_s^* x, y) ds = ([\int T_s^* ds] x, y),
 \end{aligned}$$

ami bizonyítja (ii) -t. (iii) is egyszerű számolással adódik. (ii) alapján nyilvánvaló, hogy önadjungált operátorok közepe is önadjungált. Könnyű belátni továbbá, hogy nem-negatív operátorok közepe is nem-negatív.

A (4) relációból következik, hogy $\|\int T_s ds\| \leq \sqrt{2} \sup_{s \in E} \|T_s\|$. A továbbiakban bebizonyítjuk, hogy a $\sqrt{2}$ korlát (a nyilván tovább már nem javítható) 1-re javítható. Sőt, fennáll az ennél sokkal többet mondó

1.2. T é t e l . Az $\int T_s ds$ operátorközép eleme a T_s operátorok $(s \in E)$ gyengén zárt konvex burkának.

B i z o n y í t á s . Legyen $x_1, \dots, x_n$ és $y_1, \dots, y_n$ a H tér elemeinek két (ugyanannyi elem-ből álló) véges rendszere, ε pedig adott pozitív szám. Jelöljük f_j -vel az $s \rightarrow (T_s x_j, y_j)$ függvényt $(1 \leq j \leq n)$. Az 1.1. Tétel szerint létezik olyan μ_0 véges közép $B(E)$ -n, amelyre

$$|\int f_j(s) ds - \mu_0(f_j)| \leq \varepsilon \quad (1 \leq j \leq n).$$

Mivel μ_0 véges közép, $\mu_0(f) = \sum_{i=1}^m \alpha_i f(s_i)$ minden $f \in B(E)$ elemre, alkalmasan választott egységnyi összegű

α_i pozitív számokkal és $\alpha_i \in E$ pozitív számokkal és elemekkel. Az operátorközép definíciója folytán ekkor

$$|(\{[\int T_s ds] - [\sum_{i=1}^m \alpha_i T_{s_i}]\} x_j, y_j)| \leq \varepsilon \quad (1 \leq j \leq n)$$

A gyenge operátortopológia definíciója szerint (l. a 3.§-t!) ezzel tételünket bebizonyítottuk.¹⁾

2.§. Invariáns közepek

Tekintsünk egy E félcsoporthat és használjuk az előző paragrafus jelöléseit. Tetszőleges $s \in E$ esetén definiáljuk $B(E)$ -ben az s -sel való baleltolás L_s , ill. az s -sel való jobbeltolás R_s operátorát a következő módon: $[L_s f](x) = f(sx)$ és $[R_s f](x) = f(xs)$ minden $f \in B(E)$ és $x \in E$ esetén. Legyen H a $B^+(E)$ tér lineáris altere vagy legyen H szimmetrikus altér

$B(E)$ -ben. Tekintsünk egy μ közepet H -n. μ -t balinvariánsnak nevezzük, ha bármely $f \in H$ és $s \in E$ esetén $\mu(L_s f) = \mu(f)$, amennyiben $L_s f$ is eleme H -nak. Hasonlóan definiáljuk a jobbinvariáns közepet. Egy közepet invariánsnak nevezünk, ha egyszerre bal- és jobbinvariáns is. $B(E)$ egy K részhalmazát balinvariánsnak nevezzük, ha $L_s K \subseteq K$ minden $s \in E$ -re. Hasonlóan definiáljuk a jobbinvariáns- ill. invariáns halmazokat is.

¹⁾ Ennek a tételnek a bizonyítása már szerepel [19]-ben is. Ott azonban a szerző a bizonyításban felhasználja J. Dixmiernek egy nehéz tételét (3.4. Tétel). Mi itt csupán a teljesen elemi 1.1. Tételt használtuk fel.

Legyen most μ tetszőleges közép $B^r(E)$ -n, $\bar{\mu}$ pedig a hozzá tartozó mérték $K(E)$ -n. (l. az 1.§-ban szereplő Megjegyzések 5. pontját!) μ aszerint bal-, jobb- ill. invariáns, miszerint $\bar{\mu}$ is az. Ha μ balinvariáns, μ' pedig jobbinvariáns közép $B(E)$ -n, akkor az

$f \rightarrow \mu_{(a)}(\mu'_{(x)}(f(ax)))$ funkcionál invariáns közép $B(E)$ -n.
Ha E csoport és μ balinvariáns közép $B(E)$ -n, akkor az
 $f \rightarrow \mu_{(x)}(f(x^{-1}))$ funkcionál jobbinvariáns közép $B(E)$ -n.

$B(E)$ mindig tartalmaz olyan triviális altereket, melyeken létezik invariáns közép. Ilyen pl. az összes konstans függvény tere. Az azonban már nem igaz, hogy $B(E)$ -n is mindig van invariáns közép, még akkor sem, ha E csoport. Erre egyszerű példaként szolgálhat a két elem által generált G szabad csoport (l. pl. [11]-et!).

Invariáns közép létezésére több feltétel ismert. Nyilvánvaló, hogy minden E véges csoport esetében létezik $B(E)$ -n invariáns közép, ami tetszőleges függvényre a függvényértékek számtani közepével egyenlő.

A Kakutani-Markov-féle fixpont-tétel alapján - mivel $B^r(E)$ duális térnek egységömbje w^* -kompakt-, be lehet látni, hogy ez a helyzet a kommutatív (sőt feloldható) E csoportok ill. kommutatív E félcsoporthok esetében is. Ha E csoport és G az E normális részcsoporthja, akkor $B(E)$ -n akkor és csak akkor létezik invariáns közép, ha $B(G)$ -n és $B(E/G)$ -n is létezik ([11], Chapt. IV., 17.14 Theorem). Továbbá, ha G tetszőleges részcsoporthja E -nek, és $B(E)$ -n létezik invariáns közép, akkor $B(G)$ -n

is létezik ([11], Chapt. IV. 17.12 Theorem).

Általános E csoportok ill. félcsoportok és $B^T(E)$ tetszőleges H alterei esetében is ismeretesek különböző feltételek invariáns közép létezésére vonatkozóan (l. [11]-et). Ebben a pontban egy olyan szükséges és elégséges feltételt bizonyítunk be, amely a továbbiakban alapvető szerepet fog játszani. Módszerünket J. Dixmiernek egy egyszerű bizonyítása sugallta ([10] Th.1.).

Tételünk egy speciális esetét Th. Mitchell is bebizonyította ([14], Theorem 3. és 4.). Az ő bizonyítása azonban bonyolultabb és kevésbé elemi. Mielőtt rátérnénk tételünkre, bevezetünk néhány jelölést. Legyen E a továbbiakban rögzített, egyébként tetszőleges félcsoport. Jelöljük K^R -rel ill. K^L -lel az összes jobbeltolási ill. baleltolási operátor konvex burkát. Legyen (T) a pontonkénti konvergencia topológiája $B(E)$ -n.¹⁾ Ha a továbbiakban $(T)\text{-lim}$ -t írunk, az ebben a (T) topológiában vett limeszt fog jelenteni. $B(E)$ a (T) topológiával topológikus vektorteret alkot. Minden $f \in B(E)$ esetén legyen K_f^L ill. K_f^R a K^L_f ill. K^R_f halmazok (T) - zárt burka. Jelöljük e -vel az E -n azonosan 1 függvényt. Tetszőleges $f \in B(E)$ esetén legyen C_f^L ill. C_f^R azoknak az α számoknak a halmaza, melyekre $\alpha e \in K_f^L$ ill. $\alpha e \in K_f^R$. Nyilvánvaló, hogy ha $f \in B^T(E)$ és $\alpha \in C_f^L$ vagy $\alpha \in C_f^R$, akkor

¹⁾ Ez a legdurvább olyan topológia $B(E)$ -n, amely mellett minden $f \rightarrow f(x)$ ($f \in B(E), x \in E$) függvény folytonos.

$$\inf_{x \in E} f(x) \leq \alpha \leq \sup_{x \in E} f(x) \quad (1)$$

Az imént bevezetett jelölésekkel igaz a következő

2.1. T é t e l . Legyen E félcsoporth, $N \subseteq B^+(E)$
és tegyük fel, hogy N rendelkezik a következő tulajdon-
ságokkal:

(i) minden $f \in N$ esetén $K_f^R \subseteq N$;

(ii) minden $f \in N$ esetén a C_f^R halmaz nem üres.

Legyen H a legszűkebb olyan balinvariáns altere $B^+(E)$ -nek, amely tartalmazza N -et. Ekkor bármely $f_0 \in N$ és $\alpha_0 \in C_{f_0}^R$ esetén létezik olyan μ balinvariáns közép H -n, amelyre $\mu(f_0) = \alpha_0$. Fordítva, ha H tetszőleges balinvariáns altere $B^+(E)$ -nek vagy balinvariáns szimmetrikus altere $B(E)$ -nek és μ balinvariáns közép H -n, akkor létezik egy olyan $\mathcal{F}$ filter K^R -en, amelyre

$$(T) \lim_{\mathcal{F}} V(f) = \mu(f)e$$

ha $f \in H$.

B i z o n y í t á s . Legyen N_0 a $B^+(E)$ -tér $\alpha L_s f$ alakú elemeinek halmaza, ahol α valós konstans, $s \in E$ és $f \in N$, legyen továbbá

$$N' = N_0 \cup \left(\bigcup_{-\infty < \alpha < \infty} \alpha N \right).$$

Ekkor N' is rendelkezik az (i) és (ii) tulajdonságokkal. Valóban, legyen f az N' tetszőleges eleme. Ha $f = \alpha g$, ahol α skalár és $g \in N$, akkor $K_f^R = \alpha K_g^R$ és így $K_f^R \subseteq \alpha N \subseteq N'$. Másrészt, ha $c \in C_g^R$, akkor $\alpha c \in C_f^R$. Legyen most $f = \alpha L_s g$, ahol α valamely szám, $s \in E$, $g \in N$,

és legyen h tetszőleges eleme K_f^R -nek. Tekintsünk egy olyan $\mathcal{F}$ filtert K^R -en, amelyre

$$(T) \lim_{\mathcal{F}} V(f) = h, \text{ ahol } V \in K^R, \text{ vagyis}$$

$V = \sum_{i=1}^n c_i R_{s_i}$, és itt n valamely pozitív egész szám, $s_i \in E$, $c_i > 0$ ($1 \leq i \leq n$), $\sum_{i=1}^n c_i = 1$; $V(f)$ pedig a $[V(f)](t) = \sum_{i=1}^n c_i f(t s_i)$ ($t \in E$) függvényt

jelenti. Legyen most $\mathcal{F}'$ egy $\mathcal{F}$ -nél finomabb ultrafilter K^R -en. Mivel a Tyihonov-tétel szerint K_g^R kompakt

a (T) topológiában, $(T) \lim_{\mathcal{F}'} V(g)$ létezik. Legyen

$k = (T) \lim_{\mathcal{F}'} V(g)$. Minthogy $g \in N$ és N teljesíti az (i) feltételt, ezért $k \in K_g^R \subseteq N$. Mivel K^L elemei felcserélhetők K^R elemeivel és folytonosak is a (T) topológiában¹⁾, tehát

$$h = (T) \lim_{\mathcal{F}} V(\alpha L_s g) = \alpha L_s [(T) \lim_{\mathcal{F}'} V(g)] = \alpha L_s k,$$

ami azt jelenti, hogy $h \in N'$. Másrészt, ha $c \in C_g^R$ és $\mathcal{F}_0$ egy olyan filter K^R -en, amelyre $(T) \lim_{\mathcal{F}_0} V(g) = ce$, akkor

$$\begin{aligned} (T) \lim_{\mathcal{F}_0} V(f) &= (T) \lim_{\mathcal{F}_0} V(\alpha L_s g) = \\ &= \alpha L_s [(T) \lim_{\mathcal{F}_0} V(g)] = \alpha ce, \end{aligned}$$

tehát $\alpha c \in C_f^R$. Összegezve, azt kaptuk, hogy N' is teljesíti az (i) és (ii) feltételeket.

Legyen most $h_1, \dots, h_n$ véges sok elem N' -ből,

$s_1, \dots, s_n$ pedig ugyanannyi elem E -ből, és tekintsük a

¹⁾ Bizonyításunk egyébként éppen ezen a két tényen mulik.

$$h_1 - L_{s_1} h_1 + \dots + h_n - L_{s_n} h_n \quad (2)$$

függvényt. Jelölje M az összes ilyen függvény halmazát.

Ha $f \in N'$ és $\alpha \in C_f^R$, akkor

$$\inf_{x \in E} [f(x) + h(x)] \leq \alpha \leq \sup_{x \in E} [f(x) + h(x)] \quad (3)$$

minden $h \in M$ függvényre¹⁾. Ahhoz, hogy (3) -at bebizonyítsuk, (1) miatt elég azt kimutatnunk, hogy $\alpha \in C_{f+h}^R$ minden $h \in M$ elemre. Legyenek f és $\alpha \in C_f^R$ rögzítettek és tekintsük M -nek tetszőleges

$$h = \sum_{i=1}^n [h_i - L_{s_i} h_i]$$

elemét. Minthogy $\alpha \in C_f^R$, a K^R halmazon ^{létezik} olyan $\mathcal{F}$ filter, amelyre $(T)\lim_{\mathcal{F}} V(f) = \alpha e$. Legyen $\mathcal{F}_1$ egy $\mathcal{F}$ -nél finomabb ultrafilter K^R -en. A Tyihonov-tétel szerint a $K_{h_i}^R$ halmazok $(1 \leq i \leq n)$ (T)-kompaktak, tehát a $(T)\lim_{\mathcal{F}_1} V(h_i)$ $(1 \leq i \leq n)$ határértékek léteznek. Legyen $h'_i = (T)\lim_{\mathcal{F}_1} V(h_i)$ $(1 \leq i \leq n)$ és $f' = (T)\lim_{\mathcal{F}_1} V(f+h)$, akkor $h'_i \in N'$ $(1 \leq i \leq n)$ és $f' \in K_{f+h}^{R_1}$. Minthogy K^L elemei folytonosak a (T) topológiában és felcserélhetők K^R elemeivel, azt kapjuk, hogy

$$L_{s_i} h'_i = (T)\lim_{\mathcal{F}_1} V(L_{s_i} h_i) \quad (1 \leq i \leq n),$$

tehát

$$f' = (T)\lim_{\mathcal{F}_1} V(f+h) = (T)\lim_{\mathcal{F}} V(f) +$$

¹⁾ A (3) egyenlőtlenség egész bizonyításunk kulcsa.

$$+ \sum_{i=1}^n [(T) \lim_{\mathcal{F}_1} V(h_i) - (T) \lim_{\mathcal{F}_1} V(L_{s_i} h_i)] = \\ = \alpha e + \sum_{i=1}^n [h'_i - L_{s_i} h'_i] .$$

Ámde N' rendelkezik az (ii) tulajdonsággal (és $h'_i \in N'$), tehát létezik olyan $\mathcal{F}'$ filter K^R -en, amelyre a

$(T) \lim_{\mathcal{F}'} V(h'_1)$ határérték létezik és egyenlő egy konstans függvénnyel. Nyilvánvaló, hogy $L_{s_1} [(T) \lim_{\mathcal{F}'} V(h'_1)] = (T) \lim_{\mathcal{F}_1} V(h'_1)$. Legyen $\mathcal{F}_1'$ egy $\mathcal{F}'$ -nél finomabb ultrafilter K^R -en. Mint ahogyan az előbb, azt kapjuk, hogy

a $h_i^{(2)} = h''_i = (T) \lim_{\mathcal{F}_1'} V(h'_i)$ ($2 \leq i \leq n$) és az $f^{(2)} = f'' = (T) \lim_{\mathcal{F}_1'} V(f')$ határértékek is léteznek, $h''_i \in N'$ ($2 \leq i \leq n$) és $f'' \in K_{f+h}^R$.

Másrészt

$$f'' = \alpha e + \sum_{i=2}^n [h''_i - L_{s_i} h''_i]$$

Ezt az eljárást folytatva, az $(n+1)$ -edik lépés után azt kapjuk, hogy $f^{(n+1)} = \alpha e$ és $f^{(n+1)} \in K_{f+h}^R$, vagyis hogy $\alpha \in C_{f+h}^R$. Ezzel (3)-at bebizonyítottuk.

Legyen most f_0 az N' , α_0 pedig $C_{f_0}^R$ rögzített eleme, és tekintsük H -nak az f_0 elem által kifeszített H_0 egydimenziós alterét. Másrészt tekintsük M -et. Nyilvánvaló, hogy M lineáris altere H -nak. Legyen $H'_0 = H_0 + M$. Ha $f_0 \notin M$, akkor a

$$\mu_0(h + c f_0) = c \alpha_0$$

(c valós szám és $h \in M$) egyenlőség egy μ_0 lineáris formát definiál H'_0 -n. Nyilvánvaló, hogy $c \alpha_0 \in C_{c f_0}^R$, tehát (3) értelmében

$$\mu_0(f) \leq \sup_{x \in E} f(x) ,$$

ha $f \in H'_0$. Minthogy az $f \rightarrow \sup_{x \in E} f(x)$ funkcionál szubadditív és pozitív homogén $B^+(E)$ -n, μ_0 -t ki lehet terjeszteni H -ra egy olyan μ lineáris formává, amelyre

$$\mu(f) \leq \sup_{x \in E} f(x) \quad (4)$$

ha $f \in H$. (4) azt jelenti (1. 1.§, Megjegyzések, 2.), hogy μ közép H -n. Legyen most $s \in E$ és $f \in H$. Mivel H az N' elemeinek összes lehetséges véges összegeiből áll, nyilvánvaló, hogy $f - L_s f$ az M eleme, és így $\mu(f - L_s f) = 0$, vagyis $\mu(L_s f) = \mu(f)$. Ez viszont $s \in E$ és $f \in H$ tetszőleges volta miatt azt jelenti, hogy μ balinvariáns H -n. A $\mu(f_0) = \alpha_0$ egyenlőség közvetlenül következik μ definíciójából. Így tételünket az $f_0 \notin M$ esetben bebizonyítottuk. Ha viszont $f_0 \in M$, akkor a (3) egyenlőtlenséget $f = f_0$ és $h = -f_0$ -ra alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$0 = \inf_{x \in E} [f_0(x) - f_0(x)] \leq \alpha_0 \leq \sup_{x \in E} [f_0(x) - f_0(x)] = 0,$$

tehát $\alpha_0 = 0$, és így (1) miatt $\sup_{x \in E} f_0(x) \geq 0$. Minthogy itt $f_0 \in M$ és $\alpha_0 \in C_{f_0}^R$ tetszőlegesek voltak, megállapíthatjuk, hogy $\sup_{x \in E} h(x) \geq 0$ minden $h \in M$ elemre¹⁾. Ismét a Hahn-Banach-tételt alkalmazva, az M -an azonosan zérus μ_0 funkcionál kiterjeszthető H -ra egy olyan μ lineáris funkcionállá, amelyre $\mu(f) \leq \sup_{x \in E} f(x)$ ($f \in H$). Ugy, mint az előbb, adódik, hogy μ

¹⁾ A következő, két mondatban összefoglalt okoskodás már szerepel J. Dixmier-nél is ([10], Th. 1.). Egyébként ez adta az alap gondolatot az egész bizonyításhoz.

balinvariáns közép H -n. Másrészt $\mu(f_0) = \mu_0(f_0) = 0 = \alpha_0$.
Ezzel tételünk első felét bebizonyítottuk.

Fordítva, tegyük fel, hogy μ balinvariáns közép
 H -n. Az 1.1. Tétel szerint ekkor létezik K^R részhal-
mazainak egy olyan $\mathcal{F}$ filtere, amelyre

$$\lim_{\mathcal{F}} [V(f)](x) = \mu(L_x f) \quad (5)$$

ha $f \in H$ és $x \in E$ ¹⁾. Mivel a μ közép balinvarian-
ciája miatt $\mu(L_x f) = \mu(f)$ minden $x \in E$ elemre, (5)
éppen azt jelenti, hogy

$$(T) \lim_{\mathcal{F}} V(f) = \mu(f) e$$

Ezzel tételünket teljes egészében bebizonyítottuk.

A 4. §-ban ennek a tételnek néhány következményét
fogjuk bebizonyítani. Mielőtt azonban rátérnénk erre, a
következő paragrafusban összefoglaljuk azokat a Neumann-
-algebrák elméletében használatos fogalmakat és tétele-
ket, amelyeket a továbbiakban alkalmazni fogunk.

3. §. Alapvető fogalmak és tételek a Neumann-algebrák elméletének köréből

Kezdjük a Neumann-algebra fogalmának meghatározá-
sával. A Neumann-algebra fogalmát algebrailag a kommutáns
segítségével lehet megadni. Legyen $\mathcal{H}$ komplex Hilbert-
-tér, $\mathcal{M}$ pedig $\mathcal{H}$ korlátos operátorainak valamely

¹⁾ $[V(f)](x)$ ugyanis $\sum_{i=1}^n \alpha_i f(x x_i)$ alakú kifejezés,
ahol $\alpha_i > 0$, $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ és $x_i \in E$.

halmaza. $\mathcal{M}$ kommutánsának az $\mathcal{M}$ -mel felcserélhető ($\mathcal{H}$ -ban értelmezett) korlátos operátorok halmazát nevezzük. Ezt a halmazt $\mathcal{M}'$ -vel jelöljük, $\mathcal{M}''$ pedig az $\mathcal{M}'$ kommutánsát jelenti. Általában $\mathcal{M}^{(n)} = (\mathcal{M}^{(n-1)})'$, ahol $n \geq 1$ természetes szám és $\mathcal{M}^{(0)} = \mathcal{M}$, definíció szerint. Nyilvánvaló, hogy $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}''$. Legyen most $\mathcal{N}$ a $\mathcal{H}$ tér korlátos operátorainak egy másik halmaza. Ha $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$, akkor nyilván $\mathcal{M}' \supseteq \mathcal{N}'$. Tehát $\mathcal{M}^{(0)} \subseteq \mathcal{M}^{(2)} = \mathcal{M}^{(4)} = \dots$ és $\mathcal{M}^{(1)} = \mathcal{M}^{(3)} = \dots$. Ezeket az összefüggéseket a továbbiakban hivatkozás nélkül fogjuk felhasználni.

3. 1. D e f i n i c i ó . ([7] Chap. I., §.1.

Déf. 1.) Legyen $\mathcal{A}$ a $\mathcal{H}$ komplex Hilbert-tér korlátos operátoraiból alkotott $*$ -algebra, vagyis legyen $\mathcal{A}$ olyan operátorhalmaz, amely bármely két elemével együtt azok lineáris kapcsolatát és szorzatát, továbbá bármely elemének adjungáltját is tartalmazza. $\mathcal{A}$ -t Neumann-algebrának nevezzük, ha $\mathcal{A}'' = \mathcal{A}$.

Neumann-algebrára egyszerű példa $\mathcal{H}$ összes operátorainak a halmaza, vagy a skaláris operátorok összessége. Ha $\mathcal{A}$ Neumann-algebra, akkor $\mathcal{A}'$ és $\mathcal{A}' \cap \mathcal{A}$, ami $\mathcal{A}$ és $\mathcal{A}'$ közös (algebrai értelemben vett) centruma, is az. A Neumann-algebrák két szélsőséges típusát képviselik azok a Neumann-algebrák, melyeknek centruma csupán a skaláris operátorokból áll, és azok, melyeknek centruma egyenlő az egész algebrával. Az előbbieket

faktoroknak nevezzük, az utóbbiak nyilván a kommutatív algebrával azonosak. A Neumann-algebrák ezen két típusának a tulajdonságai vannak a legjobban feltárva.

Ezután rátérünk a Neumann-algebra topológiai definíciójára. Mielőtt azonban ezt megtennénk, emlékeztetünk a leggyakrabban használt operátortopológiákra. Legyen H tetszőleges komplex Hilbert-tér, és jelöljük $B(H)$ -val H összes korlátos operátorainak a halmazát. A továbbiakban, ha mást nem mondunk, $B(H)$ -nak mindig ez lesz a jelentése. $B(H)$ egyik fontos topológiája az operátornormából leszármaztatott topológia. Ezt a topológiát egyenletesnek nevezzük. Egy másik topológiát kapunk, ha tekintjük az összes $T \rightarrow \|Tx\|$ ($x \in H$) alakú szeminorma által definiált Hausdorff-féle lokálisan konvex topológiát. Ez a topológia nyilván a pontonkénti konvergencia topológiája $B(H)$ -ban, ha H -t erős topológiájával tekintjük. Ezt a topológiát erősnek nevezzük. A pontonkénti gyenge konvergencia topológiáját gyengének nevezzük. A gyenge topológiát nyilván a $T \rightarrow |(Tx, y)|$ ($x \in H, y \in H$) alakú szeminormák definiálják, tehát ez a topológia is lokálisan konvex.

Felsoroljuk az eddig ismerttetett topológiák néhány fontos tulajdonságát. Először is nyilvánvaló, hogy mindegyik topológia Hausdorff-féle és lokálisan konvex. Az egyenletes topológiát kivéve egyik topológia sem tesz eleget a megszámlálhatóság első axiómájának, ha H dimenziója végtelen. $B(H)$ zárt egységgömbje, vagyis azon $T \in B(H)$ operátorok összessége, amelyekre $\|T\| \leq 1$,

gyengén kompakt. Ha h_Y megszámlálható dimenziós, $B(h_Y)$ egységgömbjének erős és gyenge topológiája is metrizálható és megszámlálható bázisú. Az $S \rightarrow ST$ és $S \rightarrow TS$ ($S, T \in B(h_Y)$) függvények bármely topológiában folytonosak. Az $(S, T) \rightarrow ST$ függvény $B_1(h_Y) \times B(h_Y)$ -n ($B_1(h_Y)$ jelöli $B(h_Y)$ egységgömbjét) erősen folytonos. Az $S \rightarrow S^*$ függvény gyengén folytonos.

Az egyes topológiák közötti finomsági kapcsolatot a következő táblázat illusztrálja, ahol a " $\supset$ " jel azt jelenti, hogy "nem durvább, mint":

egyenletes topológia $\supset$ erős topológia $\supset$ gyenge topológia

Ha h_Y végtelen dimenziós, " $\supset$ "-t úgy is lehet interpretálni, hogy "határozottan finomabb, mint".

A Neumann-algebrák topológiai jellemzése a Neumann-féle sűrűségi tételen alapul. Ez a következőképpen hangzik.

3.1. T e t e l . ([7] Chap. I. §3., Lemme 6.)

Legyen $\mathcal{A}$ a h_Y komplex Hilbert-tér korlátos operátoraiból alkotott olyan $*$ -algebra, amelyre igaz az $\mathcal{A}(h_Y) = h_Y$ egyenlőség. Ekkor $\mathcal{A}$ erősen sűrű $\mathcal{A}''$ -ben.

Ebből a tételből tüstént következik, hogy ha $\mathcal{A}$ a h_Y -tér tetszőleges $*$ -algebrája, akkor $\mathcal{A}$ -nak az erős, gyenge topológiákban való lezárásai megegyeznek. Ebből az észrevételből és J. Dixmiernek a folytonos lineáris formákra vonatkozó eredményeiből, melyeket később

ismertetni fogunk, következik az alább felsorolt két tétel.

3.2. T é t e l . ([7] Chap. I., §3., Th. 2.)

Legyen $\mathcal{A}$ a $\mathcal{H}$ térben tetszőleges $\ast$ -algebra, és jelöljük $\mathcal{A}_1$ -gyel $\mathcal{A}$ egységgömbjét. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:

- (1) [ill. (2)] $\mathcal{A}$ (ill. $\mathcal{A}_1$) gyengén zárt ;
- (3) [ill. (4)] $\mathcal{A}$ (ill. $\mathcal{A}_1$) erősen zárt .

3.3. T é t e l . ([7] Chap. I., §3., Th. 2. Cor.2.)

Legyen $\mathcal{A}$ olyan $\ast$ -algebra $\mathcal{H}$ -ban, amelyre $\mathcal{A}(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$. Ebben az esetben $\mathcal{A}$ akkor és csak akkor Neumann-algebra, ha teljesülnek rá a 3.2. Tétel egymással ekvivalens (1)-(4) feltételei.

A 3.3. Tétel a Neumann-algebrák topológiai definíciójául szolgálhat.

Miután ismertettük a Neumann-algebrák egymással ekvivalens algebrai és topológiai jellemzését, felsoroljuk ezeknek az algebráknak néhány fontos tulajdonságát. Evégből bizonyos fogalmakra állandó jelöléseket vezetünk be. Legyen $\mathcal{A}$ tetszőleges Neumann-algebra a $\mathcal{H}$ komplex Hilbert-térben. Ekkor $\mathcal{A}^+$ az $\mathcal{A}$ algebra pozitív önadjungált operátorainak a halmazát, $\mathcal{A}_1$ az $\mathcal{A}$ egységgömbjét, $\mathcal{A}_1^+$ pedig az $\mathcal{A}_1$ és az $\mathcal{A}^+$ metszetét jelöli. $\mathcal{A}^h$ -vel fogjuk jelölni $\mathcal{A}$ centrumát, $\mathcal{A}_u$ -val $\mathcal{A}$ unitér operátorainak a halmazát, $\mathcal{A}^R$ -rel pedig $\mathcal{A}$ összes önadjungált elemének összességét.

Könnyű kimutatni, hogy egy T önadjungált operátor akkor és csak akkor eleme egy $\mathcal{A}$ Neumann-algebrának, ha spektrálseregének minden eleme beletartozik $\mathcal{A}$ -ba. Ebből következik, hogy ha $T \in \mathcal{A}$, akkor T pozitív és negatív része is eleme $\mathcal{A}$ -nak, így $\mathcal{A}$ minden egyes eleme előállítható $\mathcal{A}^+$ elemeinek lineáris kombinációjaként. Hasonlóan, $\mathcal{A}$ minden eleme $\mathcal{A}_U$ elemeinek lineáris kombinációja. (Ezt a következőképpen lehet belátni: Ha $T \in \mathcal{A}$, és T önadjungált, akkor az $U = T + i(I - T^2)^{\frac{1}{2}}$ operátor unitér, $U \in \mathcal{A}$ és $T = \frac{1}{2}(U + U^*)$). Ebből a tényből következik, hogy egy T operátor akkor és csak akkor eleme $\mathcal{A}$ -nak, ha $UTU^{-1} = T$ minden $U \in (\mathcal{A}')_U$ -ra. Tehát ha $\mathcal{A}$ elemeiből kiindulva "unitér invariáns" módon új operátorokat képzünk, azok szintén elemei lesznek $\mathcal{A}$ -nak.

Most rátérünk a Neumann-algebrák elmélete egyik fontos fogalomalkotásának, a nyom fogalmának az ismertetésére. Az alább ismertetendő nyomfogalom a véges mátrixokra vonatkozó jól ismert nyom fogalmának általánosítása végtelen mátrixok esetére.

3.2. D e f i n i c i ó . ([7] Chap I., § 6. Déf.1.) Legyen $\mathcal{A}$ tetszőleges Neumann-algebra. $\mathcal{A}^+$ -on értelmezett nyomnak nevezünk minden olyan $\mathcal{A}^+$ -on definiált φ nem-negatív véges vagy végtelen értékű függvényt, amely eleget tesz a következő tulajdonságoknak:

(i) Ha $S \in \mathcal{A}^+$ és $T \in \mathcal{A}^+$, akkor $\varphi(S + T) = \varphi(S) + \varphi(T)$

(ii) Ha $S \in \mathcal{A}^+$ és $\lambda \geq 0$ szám, akkor

$$\varphi(\lambda S) = \lambda \varphi(S) \quad (\text{megegyezünk abban, hogy } 0 \cdot \infty = 0)$$

(iii) Ha $S \in \mathcal{A}^+$ és $U \in \mathcal{A}_U$, akkor

$$\varphi(USU^{-1}) = \varphi(S)$$

Ha az $S \in \mathcal{A}^+$, $\varphi(S) = 0$ feltételek maguk után vonják az $S = 0$ feltételt, akkor azt mondjuk, hogy φ hű.

Ha $\varphi(S) < \infty$ minden $S \in \mathcal{A}^+$ -ra, akkor azt mondjuk, hogy φ véges.

φ -t félig-végesnek nevezzük, ha $\mathcal{A}^+$ bármely 0 -tól különböző S eleméhez található $\mathcal{A}^+$ -nak egy olyan, az S által majorált, nullától különböző T eleme, amelyre fennáll az $\varphi(T) < \infty$ reláció.

φ -t normálisnak nevezzük, ha $\mathcal{A}^+$ bármely felfelé irányított, S legkisebb felső korláttal rendelkező $\mathcal{F}$ részhalmaza esetén $\varphi(S)$ a $\varphi(\mathcal{F})$ felső határa.

Ha a 3.2. Definícióban szereplő φ véges, akkor egyértelmű módon kiterjeszthető $\mathcal{A}$ -ra egy lineáris formává. Éppen ezért a továbbiakban a véges esetben mindig feltehetjük, hogy a φ az egész $\mathcal{A}$ algebrán van definiálva. Egy ilyen φ karakterisztikus tulajdonságai a következők:

(i) φ lineáris;

(ii) φ pozitív, vagyis ha $S \in \mathcal{A}^+$, akkor $\varphi(S) \geq 0$;

(iii) Ha $T \in \mathcal{A}$ és $U \in \mathcal{A}_U$, akkor

$$\varphi(UTU^{-1}) = \varphi(T).$$

A Neumann-algebrákat szokás nyomaik szerint osz-

tályozni. Ezt az osztályozást tartalmazza a következő

3.3. D e f i n i c i ó . ([7], Chap. I., §.6.,
Déf. 5.) Egy $\mathcal{A}$ Neumann-algebrát végesnek (ill. félig-
-végesnek) nevezünk, ha $\mathcal{A}^+$ minden nullától különböző T
eleméhez létezik olyan φ véges (ill. félig-véges)
normális nyom $\mathcal{A}^+$ -on, amelyre $\varphi(T) \neq 0$. $\mathcal{A}$ -t tisztán
végtelennek (ill. teljesen végtelennek) nevezzük, ha
egyetlen 0 -tól különböző véges (ill. félig-véges) normá-
lis nyom sem létezik $\mathcal{A}^+$ -on.

J. Dixmier megvizsgálta egy $\mathcal{A}$ Neumann-algebra
általános lineáris formáit is. Néhány eredményét, amelyre
a Neumann-algebrák topológiai definíciójánál már hivatkoz-
tunk, a következő tételben foglaljuk össze.

3.4. T é t e l . ([7] Chap. I., §3. Th. 1.) Legyen
 $\mathcal{H}$ komplex Hilbert-tér, $\mathcal{A}$ Neumann-algebra $\mathcal{H}$ -ban,
 $\mathcal{A}_r$ pedig $\mathcal{A}$ -nak a $\|T\| \leq r$ egyenlőtlenséggel meghatáro-
zott gömbje. Tekintsünk tetszőleges φ lineáris formát
 $\mathcal{A}$ -n.

(i) A következő feltételek ekvivalensek:

(i 1) φ gyengén folytonos;

(i 2) φ erősen folytonos;

(i 3) $\varphi(T) = \sum_{i=1}^n (Tx_i, y_i)$ ($x_i \in \mathcal{H}, y_i \in \mathcal{H}$ ha
 $1 \leq i \leq n$, n pozitív egész, $T \in \mathcal{A}$).

(ii) Legyen $\mathcal{K}$ az $\mathcal{A}$ -nak korlátos konvex része.

Ekkor a következő feltételek ekvivalensek:

(ii1) $\mathcal{K}$ gyengén zárt;

(ii2) $\mathcal{K}$ erősen zárt;

Tekintsünk most egy $\mathcal{A}$ Neumann-algebrát a $\mathcal{H}$ komplex Hilbert-térben, és jelöljön φ egy lineáris formát $\mathcal{A}$ -n. Akkor mondjuk, hogy φ pozitív, ha $\varphi(S) \geq 0$ minden $S \in \mathcal{A}^+$ -ra. Tegyük fel most, hogy φ pozitív. Azt mondjuk, hogy φ normális, ha $\mathcal{A}^+$ bármely felfelé irányított, S legkisebb felső korláttal rendelkező $\mathcal{F}$ részhalmaza esetén $\sup \varphi(\mathcal{F}) = \varphi(S)$.

Az imént tárgyalt fogalmak ismertetése után most már rátérhetünk a következő tétel kimondására, amely a pozitív normális lineáris formák jellemző sajátosságairól szól. Ez a tétel szorosan kapcsolódik a 3.4. Tételhez, egy része következik is belőle, másrészt újabb vizsgálatokat is igényel.

3.5. T é t e l . ([7] Chap. I., §4., Th. 1.) Legyen $\mathcal{A}$ Neumann-algebra, φ pedig pozitív lineáris forma $\mathcal{A}$ -n. Ekkor a következő feltételek ekvivalensek:

(i) φ normális;

(ii) φ az $\mathcal{A}$ korlátos részhalmazain gyengén folytonos;

(iii) $\varphi(T) = \sum_{i=1}^{\infty} (Tx_i, x_i)$, ahol $x_i \in \mathcal{H}$
ha $1 \leq i < \infty$, $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^2 < \infty$ és $T \in \mathcal{A}$.

Ezután rátérünk a Neumann-algebrák homomorfizmusainak az ismertetésére. Legyen $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ két Neumann-algebra a $\mathcal{H}_1$ ill. $\mathcal{H}_2$ térben. $\mathcal{A}$ -nak egy $\mathcal{B}$ -be

irányuló Φ egyértelmű leképezését homomorfizmusnak nevezzük, ha Φ lineáris és teljesíti a következő feltételeket:

$$\Phi(ST) = \Phi(S)\Phi(T), \text{ ha } S \in \mathcal{A} \text{ és } T \in \mathcal{A},$$

továbbá

$$\Phi(S^*) = (\Phi(S))^* \quad \text{ha } S \in \mathcal{A}.$$

Ha $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, akkor a Φ homomorfizmust endomorfizmusnak is nevezzük.

Nem nehéz igazolni, hogy ha Φ az $\mathcal{A}$ Neumann-algebrának a $\mathcal{B}$ algebrába való homomorfizmusa, akkor igazak a következő állítások ([7] Chap.I., §1., Prop.8.):

(i) $\Phi(\mathcal{A}^+) \subseteq \mathcal{B}^+;$

(ii) Ha E az $\mathcal{A}$ projekciója, akkor $\Phi(E)$ a $\mathcal{B}$ projekciója;

(iii) Minden $S \in \mathcal{A}$ -ra $\|\Phi(S)\| \leq \|S\|$, ha Φ kölcsönösen egyértelmű, akkor $\|\Phi(S)\| = \|S\|$

(iv) Ha $S \in \mathcal{A}$ önadjungált operátor, és f olyan folytonos valós függvény, amelyre $f(0) = 0$, akkor $\Phi(f(S))$ is önadjungált, és $\Phi(f(S)) = f(\Phi(S))$

Ha Φ $\mathcal{A}$ -nak $\mathcal{B}$ -re való kölcsönösen egyértelmű homomorfizmusa, akkor Φ^{-1} is homomorfizmus, és ebben az esetben Φ -t izomorfizmusnak nevezzük, az $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ algebrákról pedig azt mondjuk, hogy izomorfak. Ha $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, a Φ izomorfizmust automorfizmusnak nevezzük.

Tekintsünk most két komplex Hilbert-teret, h_1 -t és h_2 -t, és tegyük fel, hogy U a h_1 teret h_2 -re lineárisan és hosszúságtartó módon képezi le. Legyen $\mathcal{A}$

tetszőleges Neumann-algebra a $\mathcal{H}$ térben. Ekkor az UTU^{-1} alakú operátorok, ahol T átfutja $\mathcal{A}$ összes elemét, nyilván egy $\mathcal{B}$ Neumann-algebrát alkotnak a $\mathcal{H}$ térben, és a $T \rightarrow UTU^{-1}$ leképezés $\mathcal{A}$ -nak $\mathcal{B}$ -re való izomorfizmusa. Egy ilyen izomorfizmust térbelinek nevezünk, és azt mondjuk, hogy az $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ algebrák térbelileg izomorfak. Az egymással térbelileg izomorf Neumann-algebrák között lényegbevágó különbség nincs. Ha speciálisan $\mathcal{H} = \mathcal{H}$ és $U \in \mathcal{A}$, akkor $\mathcal{B} = \mathcal{A}$, tehát a $T \rightarrow UTU^{-1}$ leképezés automorfizmus. Egy ilyen automorfizmust belső automorfizmusnak nevezünk.

A homomorfizmusok között fontos szerepet kapnak a normális homomorfizmusok. Az $\mathcal{A}$ -ból $\mathcal{B}$ -be irányuló Φ homomorfizmust, vagy általánosabban $\mathcal{A}$ -nak $\mathcal{B}$ -be való Φ pozitív lineáris leképezését, vagyis olyan Φ lineáris leképezését, amelyre $\Phi(\mathcal{A}^+) \subseteq \mathcal{B}^+$, normálisnak nevezzük, ha $\mathcal{A}^+$ bármely felfelé irányított, S legkisebb felső korláttal rendelkező $\mathcal{F}$ részhalmaza esetén $\sup \Phi(\mathcal{F}) = \Phi(S)$. Nyilvánvaló, hogy minden izomorfizmus normális. A 3.5. Tételből könnyen következik, hogy ha Φ normális homomorfizmus, akkor Φ az $\mathcal{A}$ algebra korlátos részhalmazain gyengén és erősen is folytonos.

Ezután rátérünk J. Dixmiernek a véges Neumann-algebrákra vonatkozó vizsgálataira. Már J. von Neumannnak a faktorokról szóló alapvető munkái óta ismeretes volt, hogy minden véges faktoron konstans szorzótól eltekintve egyértelműen megadható egy véges hű normális nyom. Mivel ennek a nyomnak az értékei azonosíthatók a faktor centru-

mának az elemeivel, lévén ezek skaláris operátorok, felvethető az a kérdés, hogy egy általános véges Neumann-algebra esetében megkonstruálható-e egy olyan, a nyom tulajdonságaival rendelkező leképezése az adott algebrának, amely értékeit most már a centrumon veszi fel.

J. Dixmier erre a kérdésre vizsgálatai során pozitív választ kapott. Eredményeinek pontos megfogalmazását az alábbi tétel tartalmazza.

3. 7. T é t e l . ([7] Chap. III., §4., Th.3.; §5. Th.1. és Cor.; §8. Th.1. Cor 3. és Cor. 4.) Legyen $\mathcal{A}$ tetszőleges Neumann-algebra a $\mathcal{H}$ komplex Hilbert-térben, $\mathcal{Z}$ pedig az $\mathcal{A}$ centruma. Jelöljük tetszőleges $T \in \mathcal{A}$ esetén az UTU^{-1} ($U \in \mathcal{A}_U$) alakú elemek halmazának konvex burkát $\mathcal{K}_T$ -vel. Legyen $\mathcal{K}'_T$ a $\mathcal{K}_T$ zárt burka az egyenletes topológiában, és legyen $\mathcal{K}''_T = \mathcal{K}'_T \cap \mathcal{Z}$. $\mathcal{K}''_T$ nem üres és $\mathcal{A}$ akkor és csak akkor véges, ha $\mathcal{K}''_T$ csupán egy elemből áll. Tegyük fel most, hogy $\mathcal{A}$ véges, és jelöljük a $\mathcal{K}''_T$ egyetlen elemét $T^\natural$ -al. Ekkor igazak a következő állítások:

- (i) A $T \rightarrow T^\natural$ $\mathcal{A}$ -nak $\mathcal{Z}$ -be való lineáris leképezése;
- (ii) $T^\natural = T$, ha $T \in \mathcal{Z}$;
- (iii) $(UTU^{-1})^\natural = T^\natural$, ha $T \in \mathcal{A}$ és $U \in \mathcal{A}_U$;
- (iv) A $T \rightarrow T^\natural$ leképezés pozitív és normális;
- (v) A $T \rightarrow T^\natural$ leképezés hű, vagyis ha $T \in \mathcal{A}^+$ és $T^\natural = 0$, akkor $T = 0$;

(vi) Ha $S \in \mathcal{H}$ és $T \in \mathcal{A}$, akkor $(ST)^H = ST^H$.
 Legyen $T \mapsto \psi(T)$ egy másik olyan korlátos leképezés,
 amely rendelkezik az (i)-(iii) tulajdonságokkal. Ekkor
 $\psi(T) = T^H$ minden $T \in \mathcal{A}$ -ra. Ha $\mathcal{A}$ olyan,
 egyébként tetszőleges Neumann-algebra, amelyen létezik
 egy olyan $T \mapsto T^H$ leképezés, amely rendelkezik az
 (i)-(iii) tulajdonságokkal, akkor $\mathcal{A}$ véges.

3.4. Definíció ([7] Chap. III.§4. Déf.2.)

Legyen $\mathcal{A}$ véges Neumann-algebra. Az $\mathcal{A}$ -n értelmezett
 $T \mapsto T^H$ leképezést $\mathcal{A}$ kanonikus leképezésének nevezzük.

4.§. Fixpont-tételek Neumann-algebrákra

Legyen $\mathcal{H}$ komplex Hilbert-tér, $\mathcal{A}$ pedig tetsző-
 leges Neumann-algebra $\mathcal{H}$ -ban. [8] alatti dolgozatában
 J. Dixmier kimutatta, hogy rögzített $T \in \mathcal{A}$ esetén az UTU^*
 alakú elemek halmazának, ahol U az $\mathcal{A}$ unitér eleme, az
 egyenletes topológiában tekintett zárt konvex burka metszi
 $\mathcal{A}$ centrumát. Mivel az a centrum éppen $\mathcal{A}$ -nak a $T \mapsto$
 $\rightarrow UTU^* (T \in \mathcal{A}, U \in \mathcal{A} \text{ és } U \text{ unitér})$ belső automorfizmusok
 által fixen hagyott elemeiből áll, felvethető a következő
 általánosabb kérdés: Tekintsük $\mathcal{A}$ normális endomorfizmu-
 sainak tetszőleges G félcsoportját¹⁾, vagyis ha $\theta_1 \in G$
 és $\theta_2 \in G$, akkor a $\theta(T) = \theta_1(\theta_2(T))$ egyenlettel definiált

¹⁾ A félcsoporttulajdonság nem jelent lényeges megszorítást,
 ugyanis ha G nem félcsoport, akkor áttérhetünk az általa
 az összes normális endomorfizmus félcsoportjában generált
 félcsoportra.

θ homomorfizmus is eleme G -nek és definíció szerint $\theta = \theta_1 \theta_2$. Megvizsgálandó, hogy milyen feltételek mellett tartalmazza tetszőleges $T \in \mathcal{A}$ esetén a $\theta(T)$ alakú elemek gyengén zárt konvex burka, ahol θ átfutja G összes elemeit, $\mathcal{A}$ -nak egy olyan T' elemét, amelyik invariáns G összes elemével szemben, vagyis egy olyan T' elemet, amelyre $\theta(T') = T'$ ha $\theta \in G$. Erre a kérdésre a szokásos ergodelméleti módszerek segítségével nem tudunk válaszolni, ugyanis ha $\mathcal{A}$ lineáris dimenziója végtelen, akkor $\mathcal{A}$ mint valós Banach-tér nem reflexív ([7] Chap I., §8. Ex.7.), tehát nem lehet egyenletesen konvex sem, így nem alkalmazható a minimális norma módszerre. Sőt, ha $\mathcal{A}$ nem azonos a skaláris operátorok algebrájával, akkor $\mathcal{A}$ nem erősen konvex. Legyen ugyanis E és F két egymásra merőleges zérustól különböző projekció $\mathcal{A}$ -ban. Ekkor $\|E\| = 1$, $\|E + F\| = 1$, $\|E + \frac{F}{2}\| = 1$ és $E \neq E + F$, amiből tüstént következik, hogy $\mathcal{A}$ nem erősen konvex. Problémánkat tehát valamilyen direkt módszer segítségével kell megoldanunk. Egy ilyen módszert 4.1. Tételünkben dolgozunk ki, itt egy szükséges és elégséges feltételt adunk meg. A probléma kulcsa, mint látni fogjuk, az invariáns közepek elméletében rejlik. Éppen ezért a továbbiakban az 1. és 2. paragrafus jelöléseit és terminológiáját hivatkozás nélkül fogjuk felhasználni. Mielőtt rátérnénk tételünkre, bevezetünk néhány állandó jelölést; amelyet a továbbiakban hivatkozás nélkül fogunk felhasználni. Tetszőleges $T \in \mathcal{A}$ esetén jelölje $K_0(T, G)$ a $\theta(T)$ alakú elemek halmazának konvex burkát, ahol θ átfutja G -t. Legyen $K(T, G)$ a $K_0(T, G)$ halmaznak

a gyenge operátortopológiában tekintett zárt burka. Jelöljük továbbá $\mathcal{A}^G$ -vel $\mathcal{A}$ -nak a G^{fel} csoport elemei által fixen hagyott elemeinek halmazát. Könnyű belátni, hogy $\mathcal{A}^G$ Neumann-algebra. Tetszőleges $x \in \mathcal{H}_1, y \in \mathcal{H}_2$ és $T \in \mathcal{A}$ esetén jelölje $f_{x,y,T}$ a G -n értelmezett $\theta \rightarrow (\theta(T)x, y)$ függvényt. Mivel $|\langle \theta(T)x, y \rangle| \leq \|T\| \|x\| \|y\|$, $f_{x,y,T} \in B(G)$. Ha $x = y$, akkor $f_{x,x,T}$ helyett egyszerűen $f_{x,T}$ -t fogunk írni. Jelöljük $H(\mathcal{A}, G)$ -vel $B(G)$ -nek azt a legszűkebb szimmetrikus balinvariáns lineáris alterét, amely tartalmazza az összes $f_{x,y,T}$ függvényt. Ezekkel a jelölésekkel fennáll a következő

4.1. T e t e l . Ahhoz, hogy tetszőleges $T \in \mathcal{A}$ -ra a $K(T, G) \cap \mathcal{A}^G$ halmaz ne legyen üres, szükséges és elegendő, hogy létezzék egy balinvariáns közép $H(\mathcal{A}, G)$ -n. Ha egy ilyen közép létezik $H(\mathcal{A}, G)$ -n, akkor létezik $\mathcal{A}$ -nak egy olyan τ leképezése önmagába, amely teljesíti a következő feltételeket¹⁾:

- (i) τ lineáris és pozitív;
- (ii) $\tau(T) \in \mathcal{A}^G$ minden $T \in \mathcal{A}$ -ra;
- (iii) $\tau(T) \in K(T, G)$ minden $T \in \mathcal{A}$ elemre;
- (iv) $\tau(T) = T$ ha $T \in \mathcal{A}^G$;
- (v) ha $S \in \mathcal{A}^G$ és $T \in \mathcal{A}$, akkor $\tau(ST) = S\tau(T)$ és $\tau(TS) = \tau(T)S$.

¹⁾ J. Schwartz [19] -ben (5. Lemma) bebizonyította egy ilyen τ leképezés létezését abban a speciális esetben, amikor $\mathcal{A}$ az összes $\mathcal{H}_1$ -beli korlátos operátor halmaza, G egy $\mathcal{B}$ Neumann-algebra összes $\mathcal{U}$ unitér operátorai által a $T \rightarrow \mathcal{U}T\mathcal{U}^*$ képlet segítségével előállító térbeli izomorfizmusok csoportja, és a $K(T, G) \cap \mathcal{A}^G$ halmaz egyik $T \in \mathcal{A}$ -ra sem üres. J. Schwartz módszerei lényegesen eltérnek az alább alkalmazott módszerektől.

B i z o n y í t á s . Használjuk a 2.§ jelöléseit. Legyen N az összes lehetséges $f_{x,T}$ függvény halmaza, ahol $x \in \mathfrak{h}_\gamma$ és $T \in \mathfrak{a}^{R^1}$. Ekkor $N \subseteq B^*(G)$. Jelöljük H_0 -al $B^*(G)$ -nek azt a legszűkebb balinvariáns lineáris alterét, amely még tartalmazza N -et. Nem nehéz belátni, hogy $H(\mathfrak{a}, G) = H_0 + i H_0$, ahol i a komplex egységet jelöli. Legyen Q az olyan G -n értelmezett nem-negatív V függvények halmaza, melyek G csak véges sok elemén vesznek fel zérustól különböző értéket és $\sum_{\theta \in G} V(\theta) = 1$. Minden $V \in Q$ -ra tekintsük $\mathfrak{a}$ -nak a $V' = \sum_{\theta \in G} V(\theta) \theta$ egyenlőséggel meghatározott lineáris transzformációját.²⁾ Az összes ilyen V' ($V \in Q$) transzformáció halmaza megegyezik a G félcsoporth konvex burkával, ha G -t mint $\mathfrak{a}$ összes lineáris transzformációi vektorterének részhalmazaként tekintjük. Tetszőleges $V \in Q$ -ra legyenek a $B(G)$ tér $\hat{V}$ és $\tilde{V}$ operátorai a

$$\left. \begin{aligned} [\hat{V}f](\theta) &= \sum_{\theta' \in G} V(\theta') f(\theta\theta') \\ [\tilde{V}f](\theta) &= \sum_{\theta' \in G} V(\theta') f(\theta'\theta) \end{aligned} \right\} (\theta \in G, f \in B(G))$$

ill.

egyenlőségekkel definiálva. Ekkor a $\hat{V}$ ill. $\tilde{V}$ operátorok halmaza megegyezik a K^R ill. K^L halmazzal (l. a 2. paragrafust!) Ha $x \in \mathfrak{h}_\gamma$, $y \in \mathfrak{h}_\gamma$ és $T \in \mathfrak{a}$, akkor

1) $\mathfrak{a}^R$ a továbbiakban $\mathfrak{a}$ önadjungált elemeinek halmazát jelöli.

2) G elemei $\mathfrak{a}$ lineáris operátorai !

$$\text{ill. } \left. \begin{aligned} [\hat{V}f](\theta) &= \sum_{\theta' \in G} v(\theta') f(\theta\theta') \\ [\tilde{V}f](\theta) &= \sum_{\theta' \in G} v(\theta') f(\theta'\theta) \end{aligned} \right\} (\theta \in G, f \in B(G))$$

egyenlőségekkel definiálva. Ekkor a $\hat{V}$ ill. $\tilde{V}$ operátorok halmaza megegyezik a K^R ill. K^L halmazzal (l. a 2. paragrafust!). Ha $x \in h_y, y \in h_y$ és $T \in \mathcal{A}$, akkor

$$[\hat{V}f_{x,y,T}](\theta) = f_{x,y,T}(\theta) = f_{x,y,T}(v'(T)(\theta)) = f_{x,y,T}(\theta(v'(T))) \quad (1)$$

és

$$[\tilde{V}f_{x,y,T}](\theta) = f_{x,y,T}(v'(\theta(T))) \quad (2)$$

minden $v \in \mathcal{Q}$ és $\theta \in G$ elemre.

Tegyük fel, hogy bármely $T \in \mathcal{A}$ esetén a $K(T, G) \cap \mathcal{A}^G$ halmaz nem üres. Ahhoz, hogy bebizonyítsuk $H(\mathcal{A}, G)$ -n egy balinvariáns közép létezését, a 2.1. Tétel szerint elegendő belátnunk, hogy N rendelkezik az idézett tételben felsorolt (i) és (ii) tulajdonságokkal. Ekkor ugyanis a 2.1. Tétel szerint H_0 -on van egy balinvariáns közép, és ennek mint lineáris formának a $H(\mathcal{A}, G) = H_0 + iH_0$ halmazra való lineáris kiterjesztése nyilván invariáns közép lesz $H(\mathcal{A}, G)$ -n. Legyen $T \in \mathcal{A}^R$ és $x \in h_y$ két rögzített elem. Először azt bizonyítjuk be, hogy $K_{f_{x,T}}^R \subseteq N$. Nos, legyen f a $K_{f_{x,T}}^R$ halmaz tetszőleges eleme, $\mathcal{F}$ pedig olyan filter $\mathcal{Q}$ -n, amelyre

$$(T)\text{-}\lim_{\mathcal{F}} \hat{V}f_{x,T} = f$$

Tekintsünk egy $\mathcal{F}$ -nél finomabb $\mathcal{F}'$ ultrafiltert $\mathcal{Q}$ -n.

Mint hogy a_1 ¹⁾ kompakt a gyenge topológiában, a gyenge értelemben vett $\lim_{\mathcal{F}} V'(T)$ határérték létezik. Jelöljük ezt a határértéket T_1 -gyel. Mint hogy bármelyik $\theta \in G$ gyengén folytonos a_1 -en, azt kapjuk, hogy $\lim_{\mathcal{F}} \theta(V'(T)) = \theta(T_1)$, ahol a határértéket gyenge értelemben kell venni. Így (1) értelmében minden $\theta \in G$ -re

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \lim_{\mathcal{F}} [\hat{V} f_{x,T}] (\theta) = \lim_{\mathcal{F}} [\hat{V} f_{x,T}] (\theta) = \\ &= \lim_{\mathcal{F}} (\theta(V'(T)) x, x) = (\theta(T_1) x, x) = f_{x,T_1}(\theta). \end{aligned}$$

Mint hogy $T_1 \in \mathcal{A}^R$ és $x \in h_{\mathcal{F}}$, $T \in \mathcal{A}^R$ tetszőlegesek voltak, (i) -t bebizonyítottuk. Legyen most T és x ugyanaz, ami előbb, és tekintsük $K(T, G) \cap \mathcal{A}^G$ -nek egy T_0 elemét. Ilyen T_0 elem feltevésünk szerint létezik. Legyen $\mathcal{F}_0$ olyan filter $\mathcal{Q}$ -n, amelyre $\lim_{\mathcal{F}_0} V'(T) = T_0$, ahol a limesz gyenge értelemben veendő. Ekkor minden $\theta \in G$ -re $\lim_{\mathcal{F}_0} (\theta(V'(T)) x, x) = (\theta(T_0) x, x) = (T_0 x, x)$, vagyis (1) értelmében $(T) \lim_{\mathcal{F}_0} \hat{V} f_{x,T} = (T_0 x, x) e$ ²⁾, így $(T_0 x, x) \in C_{f_{x,T}}^R$. Mivel $x \in h_{\mathcal{F}}$ és $T \in \mathcal{A}^R$ tetszőleges volt, ez azt bizonyítja, hogy N rendelkezik az (ii) tulajdonsággal is. Eből viszont a fentebb mondottak szerint már következik egy balinvariáns közép létezése $H(\mathcal{A}, G)$ -n.

Tegyük most fel, hogy $H(\mathcal{A}, G)$ -n létezik egy balinvariáns közép, amelyet az integrálás jelével jelölünk. Ekkor bármely $T \in \mathcal{A}$ -ra a $\tau(T) = \int \theta(T) d\theta$ operátor létezik. Be fogjuk bizonyítani, hogy τ rendelkezik a

¹⁾ a_1 jelöli az $\mathcal{A}$ algebra $\|T\| \leq 1$ tulajdonságú T elemeinek halmazát.

²⁾ e a G -n azonosan 1 függvényt jelöli.

tételben felsorolt (i) - (v) tulajdonságokkal. Az (i) feltétel nyilvánvalóan teljesül. Másrészt az 1.1. Tétel értelmében létezik olyan $\mathcal{F}$ filter $\mathcal{Q}$ -n, amelyre

$$\lim_{\mathcal{F}} \sum_{\theta \in G} V(\theta) f(\theta) = \int f(\theta) d\theta \quad (3)$$

ha $f \in H(\mathcal{Q}, G)$. Legyen T az $\mathcal{Q}$ tetszőleges eleme. Ekkor (3)-at az $f_{x,y,T}$ függvényre alkalmazva, ahol x és y a $\mathcal{H}_T$ tetszőleges elemei, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} (\tau(T)x, y) &= ([\int \theta(T) d\theta] x, y) = \int (\theta(T)x, y) d\theta = \\ &= \lim_{\mathcal{F}} \sum_{\theta \in G} V(\theta) (\theta(T)x, y) = \lim_{\mathcal{F}} (V'(T)x, y). \end{aligned} \quad (4)$$

A 2.1. Tétel második részének bizonyítása szerint azonban

$$(T) \lim_{\mathcal{F}} \hat{V} f = [\int f(\theta) d\theta] e$$

ha $f \in H(\mathcal{Q}, G)$. Így tehát, ha θ_0 a G tetszőleges eleme, (1) szerint

$$(\tau(T)x, y) = \int (\theta(T)x, y) d\theta = \lim_{\mathcal{F}} (\theta_0(V'(T))x, y) \quad (5)$$

Mivel $x \in \mathcal{H}_T$ és $y \in \mathcal{H}_T$ tetszőlegesek voltak, (4) azt jelenti, hogy

$$\lim_{\mathcal{F}} V'(T) = \tau(T) \quad (6),$$

(5) pedig azt, hogy

$$\lim_{\mathcal{F}} \theta_0(V'(T)) = \tau(T) \quad (7),$$

ahol a határértékeket gyenge értelemben kell venni. Ámde

θ_0 gyengén folytonos $\mathcal{Q}$ korlátos részhalmazain, tehát

(6) miatt

$$\lim_{\mathcal{T}} \theta_0(V'(T)) = \theta_0(\tau(T)) \quad (8)$$

gyenge értelemben. (7) és (8) együtt azt jelenti, hogy $\theta_0(\tau(T)) = \tau(T)$. Mivel θ_0 tetszőleges eleme volt G -nek, ebből az következik, hogy $\tau(T) \in \mathcal{A}^G$. A (6) relációból viszont tüstént következik, hogy $\tau(T) \in K(T, G)$. Mivel okoskodásunk során $T \in \mathcal{A}$ tetszőleges volt, (ii)-t és (iii)-t bebizonyítottuk. ((iii) egyébként közvetlenül is adódik τ definíciójából és az 1.2. Tételből). A (iv) tulajdonság (iii) alapján triviális. (v) könnyen következik az operátorközép tulajdonságaiból. Ezzel a 4.1. Tételt bebizonyítottuk.

4.2. Tétel. Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy a $K(T, G) \cap \mathcal{A}^G$ halmaz tetszőleges $T \in \mathcal{A}$ -ra pontosan egy elemet tartalmazzon, az, hogy pontosan egy balinvariáns közép létezzék $H(\mathcal{A}, G)$ -n. Ebben az esetben ez a közép jobbinvariáns is és a 4.1. Tételben megkonstruált $T \rightarrow \tau(T)$ leképezés rendelkezik a következő tulajdonsággal:

$$(vi) \quad \tau(\theta(T)) = \tau(T) \quad \text{minden } T \in \mathcal{A} \text{ és } \theta \in G \text{-re.}$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy bármely $T \in \mathcal{A}$ -ra a $K(T, G) \cap \mathcal{A}^G$ halmaz pontosan egy elemet tartalmaz, és tekintsünk két, μ és μ' balinvariáns

közepet $H(A, G)$ -n. Legyenek $T \rightarrow \tau(T)$ ill.

$T \rightarrow \tau'(T)$ ill.

A -nak a 4.1. Tétel bizonyítása szerint a μ középhez ill. a μ' középhez tartozó leképezései. Ekkor (ii) és (iii) miatt bármely $T \in A$ -ra $\tau(T) = \tau'(T)$, tehát tetszőleges $x \in H$ vektorra $\mu(f_{x,T}) = (\tau(T)x, x) = (\tau'(T)x, x) = \mu'(f_{x,T})$. Minthogy μ és μ' balinvariánsak, ez azt jelenti, hogy $\mu(f) = \mu'(f)$ minden $f \in H(A, G)$ függvényre, tehát $\mu = \mu'$. Bebizonyítjuk, hogy $H(A, G)$ jobbinvariáns. Minthogy K^R elemei felcserélhetők K^L elemeivel, elegendő azt bebizonyítanunk, hogy N jobbinvariáns. Nos, legyen θ_0 a G félcsoporth tetszőleges eleme. $R_{\theta_0} N$ minden eleme $f_{x, \theta_0(T)}$ alakú, ahol $x \in H$ és $T \in A^R$ (1. (1) -et!). Minthogy $\theta_0(T) \in A^R$, állításunk triviális. Marmost a 2.1. Tétel szerint és μ unicitása miatt tetszőleges f -re ($f \in K$) a C_f^R halmaz pontosan egy elemet tartalmaz, nevezetesen $\mu(f)$ -et. Másrészt $C_{R_{\theta} f}^R \subseteq C_f^R$ minden $\theta \in G$ és $f \in N$ elemre, amiről könnyen meggyőződhetünk. Tehát tetszőleges $f \in N$ függvényre $C_{R_{\theta} f}^R = \{ \mu(f) \}$ ($\theta \in G$). Ebből a 2.1. Tétel szerint $\mu(R_{\theta} f) = \mu(f)$ következik tetszőleges $f \in N$ és $\theta \in G$ elemre. Ha most $f = L_{\theta_0} g$, ahol $g \in K$ és $\theta_0 \in G$, akkor az előbbiek szerint tetszőleges $\theta \in G$ endomorfizmusra $\mu(R_{\theta} f) = \mu(R_{\theta} L_{\theta_0} g) = \mu(L_{\theta_0} R_{\theta} g) = \mu(R_{\theta} g) = \mu(g) = \mu(L_{\theta_0} g) = \mu(f)$. Mivel μ lineáris, ebből tüstént következik, hogy μ jobbinvariáns $H(A, G)$ -n. A (vi) tulajdonság közvetlenül folyik az előző tételben felsorolt (ii), és (iii) tulajdonságokból, továbbá abból,

hogy tetszőleges $T \in \mathcal{A}$ -ra a $K(T, G) \cap \mathcal{A}^G$ halmaz pontosan egy elemből áll és $K(\theta(T), G) \subseteq K(T, G)$ tetszőleges $\theta \in G$ elemre.

Fordítva, tegyük most fel azt, hogy $H(\mathcal{A}, G)$ -n

~~Ha~~ pontosan egy balinvariáns közép létezik, és mégis, valamely $T \in \mathcal{A}$ operátorra a $K(T, G) \cap \mathcal{A}^G$ halmaz két különböző elemet tartalmaz, mondjuk T_1 -et és T_2 -t. Legyen x olyan eleme H -nak, amelyre $(T_1 x, x) \neq (T_2 x, x)$, és legyen $\mathcal{F}_1$ ill. $\mathcal{F}_2$ két olyan filter $\mathcal{Q}$ -n, amelyre $\lim_{\mathcal{F}_1} V'(T) = T_1$ ill. $\lim_{\mathcal{F}_2} V'(T) = T_2$, ahol a határértékek gyenge értelemben veendők. Vagy $\operatorname{Re}(T_1 x, x) \neq \operatorname{Re}(T_2 x, x)$ vagy $\operatorname{Im}(T_1 x, x) \neq \operatorname{Im}(T_2 x, x)$. Tegyük fel az előzőt. Tudjuk, hogy $\lim_{\mathcal{F}_1} V'(\operatorname{Re} T) = \operatorname{Re} T_1$ és $\lim_{\mathcal{F}_2} V'(\operatorname{Re} T) = \operatorname{Re} T_2$. Ennek alapján, mivel G elemei $\mathcal{A}$ korlátos részhalmazain gyengén folytonosak, és mivel T_1 és T_2 invariánsak G elemeivel szemben, tetszőleges $\theta \in G$ -re $\lim_{\mathcal{F}_1} \theta(V'(\operatorname{Re} T)) = \operatorname{Re} T_1$ és $\lim_{\mathcal{F}_2} \theta(V'(\operatorname{Re} T)) = \operatorname{Re} T_2$. Ebből tüstént adódik, hogy $\lim_{\mathcal{F}_1} (\theta(V'(\operatorname{Re} T)) x, x) = \operatorname{Re}(T_1 x, x)$ és $\lim_{\mathcal{F}_2} (\theta(V'(\operatorname{Re} T)) x, x) = \operatorname{Re}(T_2 x, x)$ vagy (1) alapján $(T) \lim_{\mathcal{F}_1} [\hat{V} f_{x, \operatorname{Re} T}] = \operatorname{Re}(T_1 x, x) e$ és $(T) \lim_{\mathcal{F}_2} [\hat{V} f_{x, \operatorname{Re} T}] = \operatorname{Re}(T_2 x, x) e$. Tehát $(\operatorname{Re} T_1 x, x)$ és $(\operatorname{Re} T_2 x, x)$ a $C_{f_{x, \operatorname{Re} T}}^R$ halmaz két különböző eleme, ez viszont a 2.1. Tétel szerint el-
lentmond annak, hogy $H(\mathcal{A}, G)$ -n pontosan egy balinvariáns közép van. Ha $\operatorname{Re}(T_1 x, x) = \operatorname{Re}(T_2 x, x)$, de $\operatorname{Im}(T_1 x, x) \neq \operatorname{Im}(T_2 x, x)$, akkor hasonlóképpen okoskodhatunk. Tehát valóban, tetszőleges $T \in \mathcal{A}$ elemre a

$K(T, G) \cap \mathcal{A}^G$ halmaz pontosan egy elemből áll. Ezzel a tételt teljes egészében bebizonyítottuk.

Jelöljük most $\mathcal{A}_U$ -val $\mathcal{A}$ unitér elemeinek csoportját. $\mathcal{A}_U$ tetszőleges U eleme a $\theta_U(T) = U T U^*$ ($T \in \mathcal{A}$) egyenlőséggel $\mathcal{A}$ egy belső automorfizmusát indukálja. Legyen $I(\mathcal{A})$ az $\mathcal{A}$ algebra összes belső automorfizmusának csoportja. Könnyű belátni, hogy az $U \rightarrow \theta_U$ leképezés $\mathcal{A}_U$ -nak $I(\mathcal{A})$ -ra való homomorfizmusa. Minthogy $I(\mathcal{A})$ minden eleme normális, tételeinket alkalmazhatjuk $H(\mathcal{A}, I(\mathcal{A}))$ -ra. Így nyerjük ezeknek a tételeknek következő kiegészítését.

K o r o l l á r i u m a 4.1. és 4.2. Tételhez.

Legyen $\mathcal{A}$ Neumann-algebra $\mathcal{Z}$ pedig $\mathcal{A}$ centruma. Ekkor $H(\mathcal{A}, I(\mathcal{A}))$ -n létezik balinvariáns közép, továbbá létezik $\mathcal{A}$ -nak egy olyan önmagába való τ leképezése, amelyre

- (i) τ lineáris és pozitív;
- (ii) $\tau(T) \in \mathcal{Z}$ minden $T \in \mathcal{A}$ -ra;
- (iii) $\tau(T) \in K(T, G)$ minden $T \in \mathcal{A}$ -ra;
- (iv) $\tau(T) = T$ ha $T \in \mathcal{Z}$
- (v) Ha $S \in \mathcal{Z}$ és $T \in \mathcal{A}$, akkor $\tau(TS) = \tau(T)S$
és $\tau(ST) = S\tau(T)$

Az $\mathcal{A}$ algebrára a következő állítások ekvivalensek

- (a) $\mathcal{A}$ véges;
- (b) $H(\mathcal{A}, I(\mathcal{A}))$ -n pontosan egy balinvariáns közép létezik;

- (c) $H(A, I(A))$ -n létezik egy invariáns közép;
 (d) Az A_U -n definiált $U \rightarrow (UTU^*, x, y)$ alakú függvények $(x \in \mathcal{H}, y \in \mathcal{H}, T \in A)$ által $B(A_U)$ -ban generált balinvariáns szimmetrikus lineáris altéren létezik egy invariáns közép.

Ebben az esetben fel lehet tenni, hogy τ rendelkezik a

$$(vi) \quad \tau(UTU^*) = \tau(T) \quad (T \in A, U \in A_U)$$

tulajdonsággal is.

B i z o n y í t á s . Könnyen be lehet látni, hogy $A^{I(A)} = \mathcal{Z}$. Ismeretes (3.7. Tétel), hogy tetszőleges $T \in A$ -ra a $K(T, I(A)) \cap \mathcal{Z}$ halmaz nem üres. Ebből tüstént adódik a korollárium első része. Másrészt a 3.7. Tétel és [7], Chap. III.§.5.Ex.1. szerint annak szükséges és elégséges feltétele, hogy A véges legyen, az, hogy a $K(T, I(A)) \cap \mathcal{Z}$ halmaz tetszőleges $T \in A$ elemre pontosan egy elemet tartalmazzon. Ennek alapján a 4.2. Tételből tüstént következik az (a) $\Leftrightarrow$ (b) ekvivalencia és az (a) $\Rightarrow$ (c) implikáció. Jelöljük H_1 -gyel a (d) pontban szereplő alteret. Legyen $\mathcal{Z}_U$ a $\mathcal{Z}$ algebra unitér elemeinek csoportja. Könnyen be lehet látni, hogy az $U \rightarrow \theta_U$ ($U \in A_U$) homomorfizmus magja éppen $\mathcal{Z}_U$. Bebizonyítjuk, hogy H_1 elemei az A_U csoport $\mathcal{Z}_U$ részcsoportha szerinti mellékosztályain állandó értékeket vesznek fel. Nem nehéz ugyanis belátni, hogy H_1 bármely eleme előáll véges sok $U \rightarrow (UTU^*, x, x)$ függvény összegeként, ahol

$T \in \mathcal{A}$ és $x \in \mathcal{H}_Y$. Mármint, ha $U_0 = UV$ és $U_0 \in \mathcal{A}_U$, $V \in \mathcal{A}_U$,
 $V \in \mathcal{Z}$, akkor

$$(U_0 T U_0^* x, x) = (U V T V^* U^* x, x) = (U T U^* x, x),$$

ebből viszont már triviálisan adódik állításunk. H_1 tetszőleges f elemének feleltessük meg $B(I(\mathcal{A}))$ -nak azt az $\hat{f}$ elemét, amelyre

$$\hat{f}(\theta_U) = f(U)$$

minden $U \in \mathcal{A}_U$ -ra. Ilyen egyértelműen meghatározott $\hat{f}$ függvény az előbb mondottak szerint minden $f \in H_1$ -re létezik. Nem nehéz belátni, hogy az $\hat{f}$ függvények halmaza megegyezik $H(\mathcal{A}, I(\mathcal{A}))$ -val, az $f \rightarrow \hat{f}$ leképezés lineáris és tetszőleges $U_0 \in \mathcal{A}_U$ elemre az $L_{U_0} f$ ($f \in H_1$) függvénynek megfelelő $H(\mathcal{A}, I(\mathcal{A}))$ -beli elem $L_{\theta_{U_0}} \hat{f}$, az $R_{U_0} f$ -nek megfelelő pedig $R_{\theta_{U_0}} \hat{f}$. Tegyük fel, hogy (c) teljesül, és legyen μ egy invariáns közép

$H(\mathcal{A}, I(\mathcal{A}))$ -n. Ekkor a $\mu'(f) = \mu(\hat{f})$ egyenlőség a fentebb mondottak szerint egy μ' invariáns közepet definiál H_1 -en. Tehát (c) $\Rightarrow$ (d). Tegyük most fel, hogy (d) teljesül és tekintsünk egy invariáns közepet H_1 -en, amelyet az integrálás jelével jelölünk. Ekkor tetszőleges

$T \in \mathcal{A}$ -ra létezik a $\tau(T) = \int U T U^* dU$ operátor.

Ugyanugy, ahogy a 4.1. Tételben tettük, be lehet látni, hogy a τ leképezés rendelkezik az (i)-(v) tulajdonságokkal. Bizonyítsuk most be a (vi) tulajdonságot is. Legyen

$T \in \mathcal{A}$, $x \in \mathcal{H}_Y$ és $y \in \mathcal{H}_Y$. Ekkor

$$\begin{aligned} (\tau(T)x, y) &= \left(\left[\int U T U^* dU \right] x, y \right) = \\ &= \int (U T U^* x, y) dU \end{aligned} \quad (9)$$

Másrészt, legyen U_0 az $\mathcal{A}_U$ csoport tetszőleges rögzített eleme. Ekkor

$$(\tau(U_0 T U_0^*)x, y) = \int (U U_0 T U_0^* U x, y) dU \quad (10)$$

Mivel az integrállal jelölt közép jobbinvariáns és x, y tetszőlegesen, (9) és (10) együtt azt jelenti, hogy

$\tau(U_0 T U_0^*) = \tau(T)$. Mivel itt $U_0 \in \mathcal{A}_U$ és $T \in \mathcal{A}$ tetszőleges volt, azt kaptuk, hogy τ teljesíti a (vi) feltételt is. Másrészt nyilvánvaló, hogy τ folytonos az egyenletes topológiában, és így (a) következik J. Dixmier egy tételéből ([7], Chap. III. §8. Th.1., Cor.3. vagy a 3.7. Tétel vége). Tehát (d) $\Rightarrow$ (a), és ezzel a korolláriumot bebizonyítottuk.

Megjegyzések 1. J. Dixmier bebizonyította (l. a 3.7. Tételt), hogy ha a Korolláriumban szereplő (a) feltétel teljesül, akkor $\mathcal{A}$ -nak egyetlen olyan korlátos τ leképezése van, amely teljesíti az (i), (ii), (iv) és (vi) feltételeket. Ez a τ leképezés normális és hű, és a véges Neumann-algebra kanonikus leképezésének nevezzük. A Korollárium szerint tehát ezt a leképezést sikerült "integrálalakban" előállítanunk, vagyis $\tau(T) = \int_{\mathcal{A}_U} U T U^* dU$, ahol az integrál jele egy invariáns közepet jelöl.

2. Megjegyezzük, hogy [14]-ben Th. Mitchell a 2.1. Tétel egy speciális esetének alkalmazásaként bebizonyította a Kakutani-Markov-féle fixponttétel következő általánosítását:

Legyen X szeparált lokálisan konvex tér, K pedig X kompakt konvex részhalmaza. Tekintsük K önmagába

való folytonos affin leképezéseinek egy E félcsoportját,
vagyis ha $T \in E$, $x \in K$, $y \in K$ és α zérus és 1 közé eső szám,
akkor $T(\alpha x + (1-\alpha)y) = \alpha Tx + (1-\alpha)Ty$. Ha
 $B^*(E)$ - n létezik balinvariáns közép, akkor K -nak
van olyan x_0 eleme, amelyre $Tx_0 = x_0$, ha $T \in E$.

A bizonyítás a $B^*(E)$ tér $T \rightarrow \mu(Tx)$ alakú
 elemeinek vizsgálatán mulik, ahol $x \in K$, μ pedig tetsző-
 leges folytonos lineáris forma X -en. Th. Mitchell
 gondolatmenetét megfigyelve megállapíthatjuk, hogy bizo-
 nyításában csupán azt használta fel, hogy a mondott

$T \rightarrow \mu(Tx)$ típusu függvények által $B^*(E)$ -ben gene-
 rált balinvariáns altéren létezik balinvariáns közép.

Mivel tetszőleges $\mathcal{A}$ Neumann-algebrán értelmezett gyen-
 gén folytonos φ lineáris forma $\varphi(T) = \sum_{i=1}^n (Tx_i, y_i)$
 alakú, ahol $T \in \mathcal{A}$, $x_i \in \mathcal{H}$, $y_i \in \mathcal{H}$ ($1 \leq i \leq n$) (l. a 3.4.
 Tételt!), ennek az észrevételnek az alapján rögtön adódik
 a 4.1. Tétel azon állítása, mely szerint ha G az $\mathcal{A}$ al-
 gebra normális endomorfizmusainak tetszőleges félcsoportja,
 akkor ha $H(\mathcal{A}, G)$ -n létezik balinvariáns közép, a

$K(T, G) \cap \mathcal{A}^G$ halmaz egyik $T \in \mathcal{A}$ elemre sem üres.

A 4.1. Tétel bizonyítása során ennek a ténynek mégis egy
 direkt igazolását adtuk, a τ leképezés tulajdonságainak
 bizonyítása során, mivel egy ilyen τ leképezés létezését
 ugysem lehetett volna bebizonyítani az előző tétel alapján.
 Megjegyezzük, hogy hasonlóan, mint a 4.1. Tételben, meg-
 lehet mutatni általánosabban is a Kakutani-Markov-féle
 fixponttétel következő megfordítását.



Legyen X tetszőleges (nem szükségképpen Hausdorff-féle) valós topológikus vektortér, K pedig X -nek egy kompakt konvex részhalmaza. Legyen X^* az X duális tere. Tekintsük K önmagába való folytonos T affin leképezéseinek tetszőleges E félcsoportját. Legyen $H(K, E)$ a $T \rightarrow \mu(Tx)$ ($T \in E, \mu \in X^*, x \in K$) alakú elemek által $B^+(E)$ -ben generált balinvariáns részvektortér. Ha tetszőleges $x \in K$ elemre a Tx alakú elemek zárt konvex burka, ahol T átfutja K elemeit, tartalmaz egy olyan x_0 elemet, amelyre $Tx_0 = x_0$ tetszőleges $T \in E$ -re, akkor $H(K, E)$ -n létezik balinvariáns közép.

5.§. A (P) tulajdonság

J. Schwartz [19] alatt idézett munkájában bevezette a következő fogalmat:

Legyen $\mathcal{A}$ Neumann-algebra a $\mathcal{H}$ Hilbert-térben. $\mathcal{A}$ -ról akkor mondjuk, hogy (P) tulajdonságú, ha $\mathcal{H}$ tetszőleges T korlátos operátorára az UTU^{-1} alakú elemek gyengén zárt konvex burka, ahol U átfutja $\mathcal{A}$ unitér elemeit, tartalmazza $\mathcal{A}'$ egy elemét.

J. Schwartz dolgozataiban ([18] és [19]) több tételt bizonyított be a (P) tulajdonságra vonatkozóan, és ezeket a Neumann-algebrák izomorfiavizsgálatára használta. Jelen paragrafus célja az, hogy ezeket a tételeket összefoglalja, és egységes módszerek segítségével egyetlen tételből vezesse le, továbbá egyiküket bizonyos irány-

ban általánosítjuk is ([18] Lemma 4.). A tétel, amelyből ezeket az eredményeket nyerni fogjuk, a 4.1. Tétel egy kiegészítése. Mielőtt azonban a kiegészítés megfogalmazására rátérnénk, bevezetünk néhány jelölést. Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, $\mathcal{A}$ pedig Neumann-algebra a $\mathcal{H}$ térben. Ugy, mint a 4. pontban, jelöljük $\mathcal{A}_U$ -val $\mathcal{A}$ unitér elemeinek csoportját, tetszőleges $U \in \mathcal{A}_U$ esetén pedig jelölje Θ_U a $B(\mathcal{H})$ algebra ($\mathcal{H}$ összes korlátos operátorainak algebraja)

$$\Theta_U(T) = U T U^{-1} \quad (T \in B(\mathcal{H}))$$

egyenlőséggel definiált térbeli automorfizmusát. A Θ_U automorfizmusok halmaza, ha U átfutja $\mathcal{A}_U$ összes elemét, egy $G^{\mathcal{A}}$ csoportot alkot, és az $U \rightarrow \Theta_U$ leképezés $\mathcal{A}_U$ izomorfizmusa $G^{\mathcal{A}}$ -ra. A 4.§ jelöléseivel élve, $[B(\mathcal{H})]^{G^{\mathcal{A}}} = \mathcal{A}'$. A (P) tulajdonság tehát azt jelenti, hogy tetszőleges $T \in B(\mathcal{H})$ -ra a $K(T, G^{\mathcal{A}}) \cap [B(\mathcal{H})]^{G^{\mathcal{A}}}$ halmaz nem üres (a 4.§ jelölései!). Alkalmazhatók tehát a 4.§ eredményei. J. Schwartz munkáiban azonban kissé más tételeket bizonyít be, mint amit a 4.§ eredményei tartalmaznak. (Egyik eredménye viszont triviálisan következik a 4.1. Tételből, erre ott utaltunk is.) J. Schwartz [19]-ben a következő, csoportra épített Neumann-algebrákat tekinti.

(α) Legyen G tetszőleges megszámlálható diszkrét csoport és legyen $\ell^2(G)$ az összes olyan G -n definiált komplex értékű f függvény Hilbert-tere, amelyre $\sum_{x \in G} |f(x)|^2 < +\infty$. Jelöljük $\mathcal{A}(G)$ -vel az $\ell^2(G)$ tér összes baleltolási transzformációinak D csoportja által

generált Neumann-algebrát. [19]-ben J. Schwartz bebizonyítja, hogy ha $\mathcal{A}(G)$ rendelkezik a (P) tulajdonsággal, akkor G -n létezik egy jobbinvariáns, 1-re normált, pozitív, végesen additív mérték. ([19], 7. Lemma).

[18]-ban J. Schwartz a következő algebrakonstrukciót vizsgálja:

(β) Legyen (X, S, μ) szeparábilis, véges pozitív mértéktér, Γ pedig X mérhető transzformációinak valamely csoportja. Γ elemeit a továbbiakban jobboperátorként írjuk. Tegyük fel, hogy teljesülnek a következő feltételek:

- (i) $\mu(E\gamma) = 0$ akkor és csak akkor, ha $\mu(E) = 0$, tehát a $\frac{d\mu_\gamma}{d\mu}$ Radon-Nikodym-deriváltak léteznek és

$$\mu(E\gamma) = \int_E \frac{d\mu_\gamma}{d\mu}(x) d\mu(x) \quad (\gamma \in \Gamma, E \in S)$$

- (ii) Ha $E \in S$ és $E\gamma = E$ minden $\gamma \in \Gamma$ -ra, akkor vagy $\mu(E) = 0$ vagy $\mu(X - E) = 0$ (ergodicitás).

- (iii) Ha $\gamma \in \Gamma$ és $\gamma \neq e$ (az egységelem), akkor $\mu(\{x \in X : x\gamma = x\}) = 0$ (szabad akció)

- (iv) S -en nem létezik olyan σ -véges ν mérték, amelyik ekvivalens μ -vel és invariáns Γ -val szemben (mérhetetlenség).

Tekintsük a $\Gamma \times X$ halmazelméleti szorzaton értelmezett olyan $F(\gamma, x)$ komplex értékű függvények Hilbert-terét, amelyek második változójukban μ -mérhetőek és amelyekre

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \int_X |F(\gamma, x)|^2 d\mu(x) < +\infty.$$

Legyen

$$[U_\gamma F](\gamma_0, x) = \left(\frac{d\mu_\gamma(x)}{d\mu}\right)^{\frac{1}{2}} F(\gamma_0 \gamma, x\gamma) \quad (\gamma \in \Gamma) \quad (1)$$

és

$$[L_\phi F](\gamma_0, x) = \phi(x) F(\gamma_0, x) \quad (2)$$

ha ϕ korlátos, μ -mérhető függvény X -en. Neumann János [15]-ben bebizonyította, hogy az U_γ ($\gamma \in \Gamma$) és L_ϕ operátorok által generált $\mathcal{A}$ Neumann-algebra III. típusú faktor.

Legyen most

$$[V_\gamma F](\gamma_0, x) = F(\gamma^{-1}\gamma_0, x) \quad (\gamma \in \Gamma) \quad (1')$$

$$[M_\phi F](\gamma_0, x) = \phi(x\gamma_0^{-1}) F(\gamma_0, x) \quad (2')$$

ha ϕ korlátos μ -mérhető függvény X -en. [15]-ben Neumann János bebizonyította, hogy $\mathcal{A}$ kommutánsa, $\mathcal{A}'$ a V_γ ($\gamma \in \Gamma$) és M_ϕ operátorok által generált Neumann-algebra. J. Schwartz [18]-ben megmutatta a következő állításokat: Ha Γ -n létezik jobbinvariáns, végesen additív, pozitív, 1-re normált mérték, akkor $\mathcal{A}'$ rendelkezik a (P) tulajdonsággal ([18], Lemma 3.) Fordítva, legyen G a Γ csoportnak mértéktartó részcsoportha, és tegyük fel, hogy a Γ csoportnak létezik olyan η homomorfizmusa a G csoportra, amelyre $\eta(\gamma) = \gamma$, ha $\gamma \in G$. Végül tegyük fel, hogy $\mathcal{A}'$ rendelkezik a

(P) tulajdonsággal. Ekkor G -n létezik egy jobbinvariáns, végesen additív, pozitív 1 -re normált mérték.

([18], Lemma 4.)

A továbbiakban az előbb felsorolt tételeket fogjuk levezetni 4.1. Tételünk alapján. Ehhez előbb, mint már említettük, a 4.1. Tétel egy kiegészítését bizonyítjuk be.

Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, $\mathcal{A}$ pedig Neumann-algebra $\mathcal{H}$ -ban. Használjuk a jelen paragrafus elején bevezetett jelöléseket!

(a) Legyen D az $\mathcal{A}_V$ csoport $\mathcal{A}$ -t generáló részcsoporthja.

(b) Legyen C tetszőleges nem üres halmaz. Minden $f \in B(C)$ -hez rendeljük hozzá $B(\mathcal{H})$ egy T_f elemét. Tegyük fel, hogy az $f \mapsto T_f$ leképezés lineáris és T_f önadjungált, ha $f \in B^{\sim}(C)$, sőt ekkor álljon fenn az

$$\left[\inf_{x \in C} f(x) \right] I_{\mathcal{H}} \leq T_f \leq \left[\sup_{x \in C} f(x) \right] I_{\mathcal{H}} \quad (3)$$

egyenlőtlenség is.

(c) Legyen $x_0 \in \mathcal{H}$ olyan vektor, amelyre $\|x_0\| = 1$, és tegyük fel, hogy

$$(U T_f V^* x_0, x_0) = 0, \quad (4)$$

ha $U \in D, V \in D, U \neq V$ és $f \in B(C)$.

Ezekkel a feltételekkel igaz a következő állítás.

K o r o l l á r i u m a 4.1. Tételhez. Legyen $\mathcal{A}$ Neumann-algebra $\mathcal{H}$ komplex Hilbert-térben. Tegyük fel, hogy (a), (b) és (c) teljesülnek, továbbá azt is, hogy $\mathcal{A}$ rendelkezik a (P) tulajdonsággal. Tekintsük $B(C)$ önmagába való leképezéseinek valamely $\{A_i\}_{i \in I}$

családját. Tegyük fel, hogy tetszőleges $i \in I$ indexre létezik olyan $U_i \in D$ elem, amelyre

$$(\theta_U(T_{A_i f}) x_0, x_0) = (\theta_{U_i}(\theta_U(T_f)) x_0, x_0) \quad (5)$$

minden $U \in D$ és $f \in B(C)$ elemre. Ekkor létezik

$B(C)$ -n olyan μ közép, amelyre $\mu(A_i f) = \mu(f)$ ha $i \in I$ és $f \in B(C)$. Fordítva, ha (a) teljesül és

$B(D)$ -n létezik invariáns közép, akkor $\mathcal{A}$ rendelkezik a (P) tulajdonsággal.

B i z o n y i t á s . Tegyük fel, hogy (a), (b), (c) és (5) teljesülnek és $\mathcal{A}$ rendelkezik a (P) tulajdonsággal. A 4.1. Tétel szerint létezik egy balinvariáns közép $H(B(\mathcal{H}), G^{\mathcal{A}})$ -n (l. a 4.1. Tételt, és ezen paragrafus elejét!). Jelöljük ezt a közepet az integrálás jelével. Definiáljuk a μ funkcionált $B(C)$ -n a

$$\mu(f) = \int (\theta_U(T_f) x_0, x_0) d\theta_U$$

egyenlőséggel ($f \in B(C)$). Minthogy az $f \rightarrow T_f$ leképezés lineáris és (3) teljesül, μ közép $B(C)$ -n. Tekintsük I -nek egy i és $B(C)$ -nek egy f elemét! Azt fogjuk bebizonyítani, hogy (5) igaz akkor is, ha U az $\mathcal{A}_U$ tetszőleges eleme, ezzel a korollárium első állítása igazolást fog nyerni. Legyen $V = \sum_{j=1}^n \alpha_j U_j$ a D csoport páronként különböző U_j elemeinek lineáris kombinációja. Ekkor (4) és (5) miatt

$$\begin{aligned}
 (6) \quad (V T_{A_i f} V^* x_0, x_0) &= \sum_{j=1}^n |\alpha_j|^2 (U_j T_{A_i f} U_j^* x_0, x_0) = \\
 &= \sum_{j=1}^n |\alpha_j|^2 (\theta_{U_j} (T_{A_i f}) x_0, x_0) = \\
 &= \sum_{j=1}^n |\alpha_j|^2 (\theta_{U_i} (\theta_{U_j} (T_f)) x_0, x_0) = (\theta_{U_i} (V T_f V^*) x_0, x_0)
 \end{aligned}$$

Legyen most $R \in \mathcal{A}$ tetszőleges. Minthogy D generálja $\mathcal{A}$ -t, D összes véges lineáris kombinációi $\mathcal{A}$ -ban erős értelemben sűrű rész $*$ -algebrát alkotnak, jelöljük ezt az algebrát L -lel, egységömbjét pedig L_1 -gyel! Kaplansky sűrűségi tétele szerint ([7] Chap.I.§3. Th.3.) létezik egy olyan $\mathcal{F}$ filter $\|R\| \cdot L_1$ -en, amelyre $\lim_{\mathcal{F}} V^* = R^*$, erős értelemben. Így $\lim_{\mathcal{F}} V = R$, gyenge értelemben, tehát

$$\lim_{\mathcal{F}} V T_{A_i f} V^* = R T_{A_i f} R^*$$

és

$$\lim_{\mathcal{F}} \theta_{U_i} (V T_f V^*) = \theta_{U_i} (R T_f R^*),$$

gyenge értelemben. (6) szerint tehát

$$(R T_{A_i f} R^* x_0, x_0) = (\theta_{U_i} (R T_f R^*) x_0, x_0) \quad (7)$$

Speciálisan, (7) igaz, ha $R \in \mathcal{A}_U$. Így μ definíciója és az „ $\int$ ” közép balinvarianciája miatt $\mu(A_i f) = \mu(f)$. Mivel $i \in I$ és $f \in \mathcal{B}(C)$ tetszőlegesek voltak, a korollárium első állítását bebizonyítottuk. A korollárium második állítását a 4.1. Tétel bizonyításában szereplő gondolatmenettel lehet igazolni.

A továbbiakban az (α) és (β) pont alatt foglalt állításokat fogjuk bebizonyítani az előbb felállított korollárium segítségével.

(α') Legyen G megszámlálható diszkrét csoport, és használjuk az (α) pont jelöléseit. Vegyük (b) -ben C gyanánt a G csoportot, $f \in B(G)$ -re T_f gyanánt pedig az f -fel való szorzás operátorát $\ell^2(G)$ -ben, vagyis legyen $[T_f g](x) = f(x)g(x)$, ha $g \in \ell^2(G)$ és $x \in G$. Az $f \rightarrow T_f$ leképezés nyilván lineáris, és (3) is teljesül, így az előző választások esetén (b) fennáll. Legyen, továbbá, x_0 az $\ell^2(G)$ tér azon eleme, amelyik G egységelemében, e -ben 1, egyébként zérus értéket vesz fel. Nyilvánvaló, hogy $\|x_0\| = 1$. Legyen most $U \in D, V \in D$ és $U \neq V$. Ekkor létezik G -nek két különböző g és h eleme, melyekre $L_g = U$ és $L_h = V$ (G tetszőleges x eleme esetén L_x legyen az x -szel való baleltolás operátora $\ell^2(G)$ -ben.) Tekintsük $B(G)$ tetszőleges f elemét. Ekkor

$$\begin{aligned} (L_g T_f L_h^* x_0, x_0) &= (T_f L_h^{-1} x_0, L_g^{-1} x_0) = \\ &= \sum_{x \in G} f(x) x_0 (h^{-1} x) \overline{x_0 (g^{-1} x)} = 0 \end{aligned}$$

Az imént definiált x_0 vektorral tehát teljesül (c) is.

(a) viszont automatikusan teljesül $\mathcal{A}(G)$ definíciója folytán, tehát alkalmazhatjuk az előbb bebizonyított korolláriumot. Válasszuk az ott szereplő I indexhalmaz gyanánt G -t, és minden $g \in G$ elemre legyen $A_g = R_g$, ahol R_g a $B(G)$ térben a g -vel való jobboldali eltolás operátora. Bebizonyítjuk, hogy ekkor (5) teljesül. Legyen u.is $g \in G, h \in G$

és $f \in B(G)$ tetszőleges. Ekkor

$$\begin{aligned} (L_g T_{R_h} f L_g^* x_0, x_0) &= \sum_{x \in G} f(xh) |x_0(g^{-1}x)|^2 = \\ &= f(gh) \end{aligned} \quad (8)$$

Másrészt viszont

$$\begin{aligned} (L_h L_g T_f L_g^* L_h^* x_0, x_0) &= \\ &= \sum_{x \in G} f(x) |x_0(gh^{-1}x)|^2 = f(gh) \end{aligned} \quad (9)$$

(8) és (9) együtt azt jelenti, hogy (5) teljesül, ha tetszőleges $h \in G$ elemre U_h gyanánt L_h -t választjuk. Tegyük most fel, hogy $\mathcal{A}(G)$ rendelkezik a (P) tulajdonsággal. Ekkor az előző korollárium szerint létezik egy olyan μ közép $B(G)$ -n, amelyre $\mu(R_g f) = \mu(f)$ fennáll, ha $f \in B(G)$ és $g \in G$. Ez éppen azt jelenti, hogy μ jobbinvariáns közép $B(G)$ -n. Ezzel az (α) pont állítását bebizonyítottuk.

(β') Használjuk a (β) pont jelöléseit, és tekintsünk egy olyan $\mathcal{A}'$ algebrát, amelyet az (i)-(iv) és (1'), (2') képletek definiálnak. Először is megjegyezzük, hogy a V_γ operátorok egy D_0 unitér csoportot alkotnak és a $\gamma \rightarrow V_\gamma$ leképezés Γ -nak D_0 -ra való izomorfizmusa. Másrészt, az M_ϕ operátorok kommutatív Neumann-algebrát alkotnak. Egyszerű számolással belátható, hogy

$$M_\phi V_\gamma = V_\gamma M_\psi \quad \text{ahol} \quad \psi(x) = \phi(x\gamma^{-1}) \quad (x \in X).$$

Igy az összes $V_\gamma M_\phi$ alakú operátorok, ahol M_ϕ unitér, egy $\mathcal{A}'$ -t generáló D unitér csoportot alkotnak.

Legyen D_1 az unitér M_ϕ -k csoportja. D_1 normális részcsoportja D -nek. Egyszerű számolás mutatja, hogy a $V_\gamma M_\phi = V_{\gamma'} M_{\phi'}$ és $M_\phi \in D, M_{\phi'} \in D$ feltételekből $V_\gamma = V_{\gamma'}$ következik, tehát a D/D_1 csoport izomorf Γ -val. Ha mármost Γ -n létezik egy 1-re normált végesen additív pozitív jobbinvariáns mérték, akkor $B(\Gamma)$ -n létezik egy jobbinvariáns közép (l. a 2.§ elejét!). Ekkor azonban $B(D)$ -n is létezik egy jobbinvariáns közép (l. szintén a 2. §. elejét!), mivel azonban D csoport, $B(D)$ -n balinvariáns közép is létezik. Az előző korollárium alkalmazásaként tehát azt kapjuk, hogy a' rendelkezik a (P) tulajdonsággal. Ezzel a (β) pont alatt szereplő első állítást, ami J. Schwartz [18]-beli 3. Lemmája, bebizonyítottuk.

Ahhoz, hogy a (β) alatt szereplő második állítást is bebizonyítsuk, ismét az előző korolláriumot alkalmazzuk. Válasszuk (b)-ben C gyanánt Γ -t, és legyen tetszőleges $f \in B(\Gamma)$ -ra a $\mathcal{H}_f$ -ban operáló T_f transzformáció a

$$[T_f F](\gamma_0, x) = f(\gamma_0) F(\gamma_0, x) \quad (F \in \mathcal{H}_f)$$

egyenlőséggel definiálva. Az $f \rightarrow T_f$ leképezés nyilván lineáris és (3) is teljesül, így (b) fennáll. Legyen most

$x_0 = F_0$ a $\mathcal{H}_f$ tér azon eleme, amelyre $F_0(e, x) = \sqrt{\frac{1}{\mu(x)}}$ és $F_0(\gamma, x) = 0$, ha $\gamma \neq e$. Ekkor $\|x_0\| = 1$.

Válasszuk I gyanánt G -t, és minden $\gamma \in G$ elemre legyen $A_\gamma = R_\gamma$, ahol R_γ a γ -val való jobboldali eltolás operátora $B(\Gamma)$ -ban. Rögtön azt bizonyítjuk be, hogy (6) teljesül minden $\gamma \in G$ elemre, ha U_γ gyanánt $V_{\gamma^{-1}}$ -et választjuk. Nos, legyen $V = \sum_{j=1}^n \alpha_j V_{\gamma_j} M_{\phi_j}$ a D csoport páronként különböző elemeinek lineáris kombinációja, $f \in B(\Gamma)$ és $\gamma \in G$. V nyilván a $V = \sum_{s=1}^t V_{\gamma_s} M_{\phi_s}$ alakban is írható, ahol már $\gamma_s \neq \gamma_{s'}$, ha $s \neq s'$. Ekkor

$$\begin{aligned} (V T_{R_\gamma f} V^* x_0, x_0) &= \sum_{s=1}^t (V_{\gamma_s} M_{\phi_s} T_{R_\gamma f} V_{\gamma_s}^* x_0, x_0) = \\ &= \sum_{s=1}^t \sum_{\gamma_0 \in \Gamma} \int_X |\phi_s(x \gamma_0^{-1})|^2 f(\gamma \gamma_0) |F_0(\gamma_s \gamma_0, x)|^2 d\mu(x) = \\ &= \sum_{s=1}^t \int_X |\phi_s(x \gamma_s)|^2 f(\gamma_s^{-1} \gamma) \frac{1}{\mu(x)} d\mu(x) \end{aligned}$$

Másrészt viszont

$$\begin{aligned} (V_{\gamma^{-1}} (V T_f V^*) V_{\gamma^{-1}}^* x_0, x_0) &= \sum_{s=1}^t (V_{\gamma^{-1} \gamma_s} M_{\phi_s} T_f V_{\gamma^{-1} \gamma_s}^* x_0, x_0) = \\ &= \sum_{s=1}^t \sum_{\gamma_0 \in \Gamma} \int_X |\phi_s(x \gamma_0^{-1})|^2 f(\gamma_0) |F_0(\gamma^{-1} \gamma_s \gamma_0, x)|^2 d\mu(x) = \\ &= \sum_{s=1}^t \int_X |\phi_s(x \gamma^{-1} \gamma_s)|^2 f(\gamma_s^{-1} \gamma) \frac{1}{\mu(x)} d\mu(x) . \end{aligned}$$

Tekintetbe véve G mértéktartó voltát, ezekből (6) tüstént következik. Korolláriumunk bizonyítása mutatja, hogy ha $\mathcal{A}'$ rendelkezik a (P) tulajdonsággal, akkor létezik $B(\Gamma)$ -n egy olyan μ közép, amelyikre $\mu(R_\gamma f) = \mu(f)$, ha $f \in B(\Gamma)$, $\gamma \in G$. Ekkor azonban a [11] alatt idézett könyv (17.11) tétele gondolatmenetével rögtön adódik, hogy $B(G)$ -n létezik egy jobbinvariáns közép. Ezzel a (β) alatti állítást is bebizonyítottuk.

Megjegyzés. Az (α) ill. (β) pont alatti eredményeket be lehet bizonyítani abban az esetben is, ha $\mathcal{A}'$ helyébe $\mathcal{A}$ -t írunk.

I R O D A L O M

- [1] ALAOGIU, L. - BIRKHOFF, G., General ergodic theorems,
Ann. Math., 41 (1940), 293-309.
- [2] BOURBAKI, N., Topologie générale Chap. I. Structures
topologiques (Paris, 1951).
- [3] BOURBAKI, N., Topologie générale, Chap. X. Espaces
fonctionels (Paris, 1949)
- [4] BOURBAKI, N., Intégration, Chap. I-IV. (Paris, 1952)
- [5] CHODA, H.,- ECHIGO, M., A New Algebraical Property of
Certain von Neumann Algebras, Proc. Jap.
Ac., XXXIX. (1963), 651-656.
- [6] DAY, M.M., Amenable semigroups, Illinois J. Math., 1
(1957), 509-544.
- [7] DIXMIER, J., Les algèbres d'opérateurs dans l'espace
hilbertien (Algèbres de von Neumann)
(Paris, 1957)
- [8] DIXMIER, J., Les anneaux d'opérateurs de classe finie,
Ann. Ec. Norm. Sup., 66 (1949), 209-261.
- [9] DIXMIER, J., Les fonctionelles linéaires sur l'ensemble
des opérateurs bornés d'un espace de
Hilbert, Ann. Math., 51 (1950), 387-408.
- [10] DIXMIER, J., Les moyennes invariantes dans les semi-
groupes et leurs applications, Acta Sci.
Math. Szeged, 12 A (1950), 213-227.

- [11] HEWITT, E. - ROSS, K., Abstract harmonic analysis
(Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1963)
- [12] KOVÁCS, I. - SZÜCS, J., Théorèmes de type ergodique
dans les algebres de von Neumann, C.R. Acad.
Sc. Paris, 262 (1966), 341-344.
- [13] KOVÁCS, I. - SZÜCS, J., Ergodic type theorems in von
Neumann algebras, Acta Sci. Math. Szeged,
27 (1966), 233-246.
- [14] MITCHELL, TH., Constant functions and left invariant
means on semigroups, Trans. Amer. Math.
Soc., 119 (1965), 244-261.
- [15] NEUMANN, J. von, On rings of operators, III., Ann.
Math., 41 (1940), 94-161.
- [16] PUKÁNSZKY, L., The theorem of Radon-Nikodym in operator
rings, Acta Sci. Math. Szeged, 15 (1954),
149-156.
- [17] RIESZ, F. - SZ.-NAGY, B., Leçons d'analyse fonction-
nelle 3. kiadás (Budapest - Paris, 1955).
- [18] SCHWARTZ, J., Non-Isomorphism of a Pair of Factors of
Type III., Comm. Pure Appl. Math., XVI
(1963), 111-120.
- [19] SCHWARTZ, J., Two Finite, Non-Hyperfinite, Non-
-Isomorphic Factors, Comm. Pure Appl. Math.,
XVI (1963), 19-26.
- [20] SZ.-NAGY, B., Spektraldarstellung linearer Transforma-
tionen des Hilbertschen Raumes (Ergebnisse der
Mathematik und ihrer Grenzgebiete, V/5, Berlin,
1942)