Kétváltozós periodikus függvények, általánosított Lipschitz és Zygmund osztályok

Doktori (PhD) értekezés tézisei

Sáfár Zoltán

TÉMAVEZETŐ:
Dr. Móricz Ferenc
PROFESSZOR EMERITUS

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI ÉS INFORMATIKAI KAR
BOLYAI INTÉZET
MATEMATIKA- ÉS SZÁMÍTÁSTUDOMÁNYOK
DOKTORI ISKOLA

SZEGED
2011

Bevezetés és előzmények

A Fourier-sorok elméletének kialakulása a XVIII. század közepére tehető, amikor az l hosszúságú, a két végén kifeszített rezgő húr alakját szerették volna meghatározni tetsző-leges t időpontban, azon feltevés mellett, hogy a húr transzverzális síkrezgést végez. Daniel Bernoulli 1750-ben azt találta, hogy megfelelő időegység választása esetén a megoldás egy

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

trigonometrikus sor. Bár a klasszikus Fourier-sorfejtések legegyszerűbb, és legfontosabb (a szakaszonként monoton és folytonos függvények) esetére már Dirichlet bebizonyította a pontonkénti konvergenciát, a problémakör máig élő, például a négyzetesen integrálható függvények klasszikus Fourier-sorának majdnem mindenütti konvergenciáját csak 1966-ban bizonyította be Carleson. Így érthető, hogy manapság is több matematikus kutatja az analízisnek ezt az ágát.

Az értekezés célja Móricz Ferenc [?], [?], [?], [?] és [?] eredményeinek általánosítása.

A disszertációban vizsgált kutatási problémák három nagy csoportba sorolhatók. Az első terület az egyváltozós Fourier sorok tagonkénti differenciálhatóságát, illetve az így kapott sor valamely Lipschitz osztályba tartozását fedi le. A következő részben a kétváltozós Fourier sorok együtthatóinak nagyságrendje és az összegfüggvény általánosított Lipschitz illetve Zygmund osztályba tartozásának kapcsolatát vizsgáljuk. Végül szükséges és elegendő feltételt adunk arra, hogy egy kétváltozós függvény Fourier transzformáltja eleget tegyen valamely "klasszikus" Lipschitz vagy Zygmund feltételnek.

Az értekezés a szerző következő négy publikációján alapszik: [?], [?], [?] és [?].

A tézisfüetekben található jelölések és számozások megegyeznek a disszertációban használtakkal.

Fourier sorok differenciálása és függvényosztályok

Ebben a részben a disszertáció 2. fejezetének eredményeit foglaljuk össze. Ezek az állítások általánosításai Boas [?] és Németh [?] megfelelő tételeinek. A vizsgálataink során feltesszük, hogy $\{c_k\} \subset \mathbb{C}$ abszolút konvergens sorozat, így a $\sum c_k e^{ikx}$ trigonometrikus sor egyenletesen konvergens, és a sorösszeget jelöljük $f(x)$-szel.

A 2.1.1. Tételben az f függvény Fourier együtthatóinak nagyságrendje segítségével szükséges és elegendő feltételt adunk az f függvény valamely $x \in \mathbb{T}$ pontban $r \geq 1$-szer való differenciálhatóságra. Továbbá megmutatjuk azt is, hogy a Fourier sor formá-lis r-szeres deriváltsorának egyenletes konvergenciája ekvivalens az $f^{(r)}$ deriváltfüggvény folytonosságával a tóruszon.

A 2.1.2. és 2.1.3. Tételekben ismét a Fourier együtthatók nagyságrendjének segítségével adunk elegendő feltételt arra, hogy az $f^{(r)}$ függvény valamely $\mathrm{Lip}(\alpha)$, $\mathrm{Zyg}(1)$, illetve $\mathrm{lip}(\alpha)$ vagy $\mathrm{zyg}(1)$ osztályba tartozzék (ahol $0 < \alpha < 1$).

Végül a 2.1.4. és 2.1.5. Tételekből kiderül, hogy a fenti feltétel nem csak elegendő, hanem szükséges is abban az esetben, ha az együtthatók nemnegatívak, vagy $kc_k \geq 0$. Tehát ezek a feltételek a lehető legjobbak.

Legyen $\{c_k : k \in \mathbb{Z}\}$ komplex számoknak tetszőleges olyan sorozata, amelyre a

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k| < \infty \tag{1.1}$$

összefüggés teljesül. Ekkor a $\sum c_k e^{ikx}$ sor egyenletesen konvergens, jelöljük az összegét $f(x)$-szel,

$$f(x) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}. \tag{1.2}$$

1.1.2. Definició (Lipschitz osztály). Egy f függvény akkor tartozik a $\mathrm{Lip}(\alpha)$ osztályba (vagy másképp kifejezve akkor tesz eleget az α-rendű Lipschitz feltételnek), ha van olyan csak a függvénytől függő $C = C(f)$ állandó, amelyre

$$|\Delta^1 f(x,h)| := |f(x+h) - f(x)| \leq Ch^\alpha =: O(h^\alpha) \quad \text{minden } x \in \mathbb{T}\text{-re és } h > 0\text{-ra.}$$

A $\mathrm{lip}(\alpha)$ osztályt azon f függvények összessége alkotja, amelyekre a

$$\lim_{h\to 0} h^{-\alpha} |\Delta^1 f(x,h)| = 0$$

határérték egyenletesen teljesül $x \in \mathbb{T}$-ben, vagy rövidebb jelöléssel

$$|\Delta^1 f(x,h)| = o(h^\alpha) \quad \text{egyenletesen teljesül } x \in \mathbb{T}\text{-ben.}$$

1.1.3. Definició (Zygmund osztály). Egy folytonos f függvény akkor tartozik a $\mathrm{Zyg}(\alpha)$ osztályba, ha

$$|\Delta^2 f(x,h)| := |f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)| = O(h^\alpha) \quad \text{minden } x \in \mathbb{T}\text{-re és } h > 0\text{-ra.}$$

A $\mathrm{zyg}(\alpha)$ osztályt azon folytonos f függvények összessége alkotja, amelyekre az

$$|\Delta^2 f(x,h)| = o(h^\alpha) \quad \text{egyenletesen teljesül } x \in \mathbb{T}\text{-ben.}$$

2.1.1. Tétel. *Ha valamely $r \geq 1$ egész számra a*

$$\sum_{|k|\geq n} |c_k| = o(n^{-r})$$

összefüggés teljesül, akkor az (1.2) sor r-szeres formális deriváltja pontosan akkor konvergens valamely $x \in \mathbb{T}$ pontban, ha az f összegfüggvény r-szer differenciálható x-ben, és ekkor

$$f^{(r)}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (ik)^r c_k e^{ikx}. \tag{2.1}$$

Továbbá az $f^{(r)}$ deriváltfüggvény akkor és csak akkor folytonos $\mathbb{T}$-n, ha a (2.1) formulában a trigonometrikus sor egyenletesen konvergens $\mathbb{T}$-n.

2.1.2. Tétel. *Ha valamely $r \geq 1$ egész és $0 < \alpha \leq 1$ számokra*

$$\sum_{|k| \geq n} |c_k| = O(n^{-r-\alpha}) \tag{2.2}$$

teljesül, akkor f r-szer differenciálható $\mathbb{T}$-n, a $0 < \alpha < 1$ esetben $f^{(r)} \in \mathrm{Lip}(\alpha)$ és az $\alpha = 1$ esetben $f^{(r)} \in \mathrm{Zyg}(1)$.

2.1.3. Tétel. *Ha valamely $r \geq 1$ egész és $0 < \alpha \leq 1$ számokra*

$$\sum_{|k| \geq n} |c_k| = o(n^{-r-\alpha}), \tag{2.3}$$

akkor f r-szer differenciálható $\mathbb{T}$-n, a $0 < \alpha < 1$ esetben $f^{(r)} \in \mathrm{lip}(\alpha)$ és az $\alpha = 1$ esetben $f^{(r)} \in \mathrm{zyg}(1)$.

2.1.4. Tétel. *Tegyük fel, hogy az együtthatókra a következő két feltétel egyike fennáll: $kc_k \geq 0$ minden k-ra vagy $c_k \geq 0$ minden k-ra. Legyen f r-szer differenciálható $\mathbb{T}$-n. Ha $f^{(r)} \in \mathrm{Lip}(\alpha)$ valamely $0 < \alpha < 1$ számra, akkor (2.2) fennáll ezzel az α-val; hasonlóan, ha $f^{(r)} \in \mathrm{Zyg}(1)$, akkor (2.2) fennáll az $\alpha = 1$ esetben.*

2.1.5. Tétel. *A* 2.1.4. *Tétel mindkét állítása igaz marad, ha a* $\mathrm{Lip}(\alpha)$ *és* $\mathrm{Zyg}(1)$ *osztályokat a* $\mathrm{lip}(\alpha)$ *és* $\mathrm{zyg}(1)$ *osztályokra, illetve* (2.2) *feltételt* (2.3)*-ra cseréljük.*

2.1.1. Következmény. (i) *Ha valamely $r \geq 1$-re*

$$\sum_{|k| \leq n} |k^{r+1} c_k| = O(1), \tag{2.4}$$

akkor f r-szer differenciálható $\mathbb{T}$-n és $f^{(r)} \in \mathrm{Lip}(1)$.

(ii) *Tegyük fel, hogy $k^{r+1} c_k \geq 0$ minden k indexre és f r-szer differenciálható $\mathbb{T}$-n valamely $r \geq 1$ számra. Ha $f^{(r)} \in \mathrm{Lip}(1)$, akkor (2.4) teljesül.*

Kétváltozós Fourier sorok és függvényosztályok

Ebben a részben a 4. fejezet eredményeit foglaljuk össze. Itt egyszerre több általánosítást is elvégzünk. Egyfelől Móricz Ferenc [?] és [?] egyváltozós tételeit ültetjük át kétváltozós esetre, másfelől [?] cikkének állításait terjesztjük ki bővebb függvényosztályra. A 2. fejezethez hasonlóan itt is feltesszük a $\{c_{kl}\} \subset \mathbb{C}$ együtthatók abszolút konvergenciáját, így vizsgálhatjuk az

$$f(x,y) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{l\in\mathbb{Z}} c_{kl} e^{i(kx+ly)}$$

összefüggvényt.

A 4.2.1. Tételben elegendő feltételt adunk az f függvény Fourier együtthatóinak nagyságrendjére ahhoz, hogy az f függvény valamely $\mathrm{Lip}(w_{\alpha\beta})$ függvényosztályba tartozzék, ahol $0 < \alpha, \beta \leq 1$. Ez a feltétel szükséges is speciális esetekben (lásd a 4.2.1-4.2.3. Tételeket).

A 4.2.2. Tétel állításai a $\mathrm{Zyg}(w_{\alpha\beta})$ függvényosztályra vonatkoznak. Elegendő feltételt adunk az f függvény Fourier együtthatóinak nagyságrendjére ahhoz, hogy az f függvény valamely kiterjesztett Zygmund osztály eleme legyen, ahol $0 < \alpha, \beta \leq 2$.

A 2. fejezethez hasonlóan itt is feltesszük a $\{c_{kl}\} \subset \mathbb{C}$ együtthatók abszolút konvergenciáját, vagyis a

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{l\in\mathbb{Z}} |c_{kl}| < \infty \tag{3.1}$$

fennállását. Ezért vizsgálhatjuk az

$$f(x,y) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{l\in\mathbb{Z}} c_{kl} e^{i(kx+ly)} \tag{3.2}$$

összefüggvényt.

Egy pozitív, az $[a,\infty)$ ($a > 0$ tetszőleges) intervallumon mérhető L függvényt Karatama értelemben *lassú változású függvény*nek nevezünk, ha

$$\frac{L(\lambda x)}{L(x)} \to 1, \quad \text{amint} \quad x \to \infty, \quad \text{minden} \quad \lambda > 0\text{-ra}.$$

Ekkor L kiterjeszthető az egész pozitív félegyenesre úgy, hogy továbbra is lassú változású maradjon, például $L(x) := L(a)$ minden $0 < x < a$ pontban.

Ha L nemcsökkenő függvény, akkor a fenti határérték teljesülését elegendő csak a $\lambda = 2$ esetre megkövetelni.

Mostantól legyen L kétváltozós függvény, amelyre

$$L(x,y) = L_1(x)L_2(y), \quad \text{ahol} \quad L_k(t) \to \infty \quad \text{és} \quad \frac{L_k(2t)}{L_k(t)} \to 1 \quad \text{amint} \quad t \to \infty. \tag{4.1}$$

3.1.1. Definició (Multiplikatív Lipschitz osztályok). Legyen $\alpha, \beta > 0$ két tetszőleges valós szám és

$$\Delta^{1,1} f(x,y;h_1,h_2) = f(x+h_1, y+h_2) - f(x+h_1, y) - f(x, y+h_2) + f(x,y) \tag{3.3}$$

az elsőrendű differencia x-ben és y-ban.

Egy folytonos $f(x,y)$ függvény akkor tartozik bele a $\mathrm{Lip}(\alpha,\beta)$ Lipschitz osztályba, ha az

$$|\Delta^{1,1} f(x,y;h_1,h_2)| = O(h_1^{\alpha} h_2^{\beta})$$

azonosság minden $x, y \in \mathbb{T}; h_1, h_2 > 0$ értékre teljesül.

Egy $f \in \mathrm{Lip}(\alpha,\beta)$ függvény a $\mathrm{lip}(\alpha,\beta)$ függvényosztálynak is eleme, ha

$$\lim_{h_1,h_2 \to 0} h_1^{-\alpha} h_2^{-\beta} |\Delta^{1,1} f(x,y;h_1,h_2)| = 0 \quad \text{egyenletesen} \quad (x,y) \in \mathbb{T}^2\text{-ben.}$$

3.1.2. Definició (Multiplikatív Zygmund osztályok). Teljesen hasonlóan, legyen $\alpha, \beta > 0$ két tetszőleges valós szám és

$$\Delta^{2,2} f(x,y;h_1,h_2) =$$

$$= f(x+h_1, y+h_2) + f(x+h_1, y-h_2) + f(x-h_1, y+h_2) + f(x-h_1, y-h_2) -$$
$$-2f(x, y+h_2) - 2f(x+h_1, y) - 2f(x, y-h_2) - 2f(x-h_1, y) + 4f(x,y)$$

a másodrendű differencia x-ben és y-ban.

Egy folytonos $f(x,y)$ függvény akkor tartozik bele a $\mathrm{Zyg}(\alpha,\beta)$ Zygmund osztályba, ha az

$$|\Delta^{2,2} f(x,y;h_1,h_2)| = O(h_1^{\alpha} h_2^{\beta})$$

egyenlőség minden $x, y \in \mathbb{T}; h_1, h_2 > 0$ értékre teljesül.

Egy $f \in \mathrm{Zyg}(\alpha,\beta)$ függvény a $\mathrm{zyg}(\alpha,\beta)$ függvényosztálynak is eleme, ha

$$\lim_{h_1,h_2 \to 0} h_1^{-\alpha} h_2^{-\beta} |\Delta^{2,2} f(x,y;h_1,h_2)| = 0 \quad \text{egyenletesen} \quad (x,y) \in \mathbb{T}^2\text{-ben.}$$

A későbbiekben használjuk a következő speciális sorozatokat: legyen $\{c_{kl}\}$ valós számoknak olyan sorozata, amelyre

$$c_{kl} \geq 0 \quad \text{minden} \quad k, l \geq 1 \tag{3.6}$$

és

$$c_{kl} = -c_{-k,l} = -c_{k,-l} = c_{-k,-l} \quad |k|, |l| \geq 1. \tag{3.7}$$

4.1.1. Definició (Általánosított kétváltozós Lipschitz osztályok). Legyenek $\alpha, \beta > 0$ adott számok és tegyük fel, hogy az $L(x, y)$ függvény teljesíti a (4.1) feltételt. Egy mindkét változójában 2π szerint pediodikus folytonos függvény eleme a $\mathrm{Lip}(\alpha, \beta; L)$ általánosított kétváltozós Lipschitz osztálynak, ha a (3.3)-ban definiált elsőrendű differenciaoperátorra fennáll az

$$|\Delta^{1,1} f(x, y; h_1, h_2)| = O\Big(h_1^\alpha h_2^\beta L\Big(\frac{1}{h_1}, \frac{1}{h_2}\Big)\Big)$$

egyenlőség minden $x, y \in \mathbb{T}; h_1, h_2 > 0$ értékre.

Adott $\alpha, \beta \geq 0$ számok és a (4.1)-et teljesítő L függvény esetén azt mondjuk, hogy f a $\mathrm{Lip}(\alpha, \beta; 1/L)$ osztály egy eleme, ha

$$|\Delta^{1,1} f(x, y; h_1, h_2)| = O\Big(\frac{h_1^\alpha h_2^\beta}{L(1/h_1, 1/h_2)}\Big)$$

fennáll minden $x, y \in \mathbb{T}; h_1, h_2 > 0$ értékre.

Legyen $\alpha, \beta \geq 0$ és jelöljük $W_{\alpha\beta}$-val azon mindkét változójában nemcsökkenő $w_{\alpha\beta} : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}_+$ függvények összességét, amelyekre

$$w_{\alpha\beta}(0, \delta_2) = w_{\alpha\beta}(\delta_1, 0) = 0 \quad \text{minden} \quad \delta_1, \delta_2 \geq 0\text{-ra}; \tag{4.2}$$

$$\sup_{0<\delta_1,\delta_2\leq 1} \frac{w_{\alpha\beta}(2\delta_1, \delta_2)}{w_{\alpha\beta}(\delta_1, \delta_2)} =: c_\alpha < \infty, \ \sup_{0<\delta_1,\delta_2\leq 1} \frac{w_{\alpha\beta}(\delta_1, 2\delta_2)}{w_{\alpha\beta}(\delta_1, \delta_2)} =: c_\beta < \infty, \tag{4.3}$$

$$\liminf_{m\to\infty} \frac{w_{\alpha\beta}(2^{-m-1}, \delta_2)}{w_{\alpha\beta}(2^{-m}, \delta_2)} > 2^{-\alpha'}, \ \limsup_{m\to\infty} \frac{w_{\alpha\beta}(2^{-m-1}, \delta_2)}{w_{\alpha\beta}(2^{-m}, \delta_2)} \leq 2^{-\alpha} \tag{4.4}$$

minden $\alpha' > \alpha$ és $0 < \delta_2 \leq 1$ számra, és

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{w_{\alpha\beta}(\delta_1, 2^{-n-1})}{w_{\alpha\beta}(\delta_1, 2^{-n})} > 2^{-\beta'}, \ \limsup_{n\to\infty} \frac{w_{\alpha\beta}(\delta_1, 2^{-n-1})}{w_{\alpha\beta}(\delta_1, 2^{-n})} \leq 2^{-\beta} \tag{4.5}$$

minden $\beta' > \beta$ és $0 < \delta_1 \leq 1$ számra.

Definiáljuk az f folytonossági és simasági modulusát az

$$\omega(f; \delta_1, \delta_2) := \sup_{0<h_j\leq\delta_j} ||\Delta^{1,1} f(x, y; h_1, h_2)||$$

és

$$\omega_2(f; \delta_1, \delta_2) := \sup_{0<h_j\leq\delta_j} ||\Delta^{2,2} f(x, y; h_1, h_2)||$$

mennyiségekkel, ahol $j = 1, 2$ és $||.||$ a szokásos maximum norma.

Megjegyzés. Bary és Stečkin [**?**] a következőképpen vezette be a folytonossági modulust: Legyen $0 \leq t \leq \pi$ és $\varphi(t) \in \Phi$, ha

- φ folytonos $[0,\pi]$-n, bár ezt nem használták ki,
- φ nemcsökkenő,
- $\varphi \neq 0,\ 0 < t \leq \pi$,
- $\varphi \to 0$, ha $t \to 0$.

4.1.2. Definició (Kiterjesztett kétváltozós Lipschitz osztályok). Legyen $w_{\alpha\beta} \in W_{\alpha\beta}$ valamely $\alpha, \beta \geq 0$ számokra, f pedig folytonos függvény. Ekkor

$$\mathrm{Lip}(w_{\alpha\beta}) := \{f : \omega(f;\delta_1,\delta_2) = O(w_{\alpha\beta}(\delta_1,\delta_2))\}.$$

4.1.3. Definició (Kiterjesztett kétváltozós Zygmund osztályok).

$$\mathrm{Zyg}(w_{\alpha\beta}) := \{f : \omega_2(f;\delta_1,\delta_2) = O(w_{\alpha\beta}(\delta_1,\delta_2))\}.$$

Fourier sorok és a kiterjesztett Lipschitz és Zygmund osztályok

A címben jelzett függvényosztályokba tartozás szükséges és elegendő feltételeit foglaljuk össze a következő három tételben.

4.2.1. Tétel. *Legyen* $w_{\alpha\beta} \in W_{\alpha\beta}$.

(i) *Ha* $\{c_{kl}\} \subset \mathbb{C}$ *tetszőleges sorozat, amelyre*

$$\sum_{|k|\leq m}\sum_{|l|\leq n} |klc_{kl}| = O(mnw_{\alpha\beta}(m^{-1},n^{-1})) \tag{4.6}$$

fennáll valamely $0 < \alpha, \beta \leq 1$ *esetén, akkor* (3.1) *teljesül, és a* (3.2) *összefüggéssel definiált* f *függvény eleme a* $\mathrm{Lip}(w_{\alpha\beta})$ *osztálynak.*

(ii) *Megfordítva, legyen* $\{c_{kl}\} \subset \mathbb{R}$ *olyan sorozat, amelyre* (3.1), (3.6) *és* (3.7) *fennáll. Ha* $f \in \mathrm{Lip}(w_{\alpha\beta})$ *valamely* $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ *számokra, akkor a* (4.6) *egyenlőség is fennáll.*

4.2.2. Tétel. *Legyen* $w_{\alpha\beta} \in W_{\alpha\beta}$.

(i) *Ha* $\{c_{kl}\} \subset \mathbb{C}$ *tetszőleges olyan sorozat, amelyre a*

$$\sum_{|k|\leq m}\sum_{|l|\leq n} k^2l^2|c_{kl}| = O(m^2n^2w_{\alpha\beta}(m^{-1},n^{-1})) \tag{4.7}$$

egyenlőség fennáll valamely $0 < \alpha, \beta \leq 2$ *esetén, akkor* (3.1) *teljesül, és a* (3.2) *összefüggéssel definiált* f *függvény eleme a* $\mathrm{Zyg}(w_{\alpha\beta})$ *osztálynak.*

(ii) *Megfordítva, legyen* $\{c_{kl}\} \subset \mathbb{R}$ *olyan sorozat, amelyre a* (3.1) *feltétel fennáll és*

$$c_{kl} \geq 0 \quad \textit{minden} \quad |k|, |l| \geq 1 \quad \textit{indexre.} \tag{4.8}$$

Ha $f \in \mathrm{Zyg}(w_{\alpha\beta})$ *valamely* $0 \le \alpha, \beta \le 2$ *számokra, akkor a* (4.7) *egyenlőség is fennáll.*

4.2.3. Tétel. *Legyen* $w_{\alpha\beta} \in W_{\alpha\beta}$.

(i) *Ha* $\{c_{kl}\} \subset \mathbb{C}$, *amelyre a*

$$\sum_{|k|\ge m} \sum_{|l|\ge n} |c_{kl}| = O(w_{\alpha\beta}(m^{-1}, n^{-1})) \tag{4.9}$$

azonosság valamely $0 \le \alpha, \beta < 1$ *számokra fennáll, akkor a* (3.2)*-ben definiált függvényre* $f \in \mathrm{Lip}(w_{\alpha\beta})$.

(ii) *Megfordítva, tegyük fel, hogy* $\{c_{kl}\} \subset \mathbb{R}$ *olyan számsorozat, amelyre* (3.1) *és* (4.8) *feltételek teljesülnek. Ha* $f \in \mathrm{Zyg}(w_{\alpha\beta})$ *valamely* $0 \le \alpha, \beta \le 2$ *számokra, akkor* (4.9) *is fennáll.*

Megjegyzés. A 4.2.1. és 4.2.3. Tételek (i) állítása a $0 < \alpha, \beta < 1$ esetben ekvivalens.

Hasonlóan a 4.2.2. és 4.2.3. Tételek (ii) állítása is ekvivalens a $0 < \alpha, \beta < 2$ esetben.

A 4.2.1. és 4.2.3. Tételek (ii) állítása viszont nem hasonlítható össze.

Megjegyzés. A fenti tételeket beláthatjuk úgy is a $0 < \alpha, \beta < 1$ esetben, ha használjuk Bary és Stečkin [?] tételeit. Az alábbi bizonyításainkban mi Lipschitz osztály esetében a $0 \le \alpha, \beta \le 1$, Zygmundnál pedig a $0 \le \alpha, \beta \le 2$ intervallumon dolgozunk. További különbség, hogy az alábbi lemmákban szereplő $\{a_{kl}\}$ sorozatról semmilyen monotonitást nem teszünk fel, míg a $\varphi \in \Phi$ függvények nemcsökkenőek. Továbbá a γ és δ kitevők tetszőleges valós számok lehetnek, amelyekre csak a $\gamma > \alpha \ge 0$ és $\delta > \beta \ge 0$ feltételeknek kell teljesülni. Végül a legfontosabb eltérés, hogy a $\gamma > \alpha > 0$ és $\delta > \beta > 0$ esetben bizonyítani tudjuk az állításaink (i) és (ii) részének ekvivalenciáját.

A 4.2.1, 4.2.2 és 4.2.3. Tételek bizonyításában alapvető fontosságú a következő három segédtétel:

4.4.1. Lemma *Legyen* $\{a_{kl} : k, l = 1, 2, \dots\} \subset \mathbb{R}_+$ *és* $w_{\alpha\beta} \in W_{\alpha\beta}$.

(i) *Ha valamely* $\gamma \ge \alpha > 0$ *és* $\delta \ge \beta > 0$ *számokra*

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} k^\gamma l^\delta a_{kl} = O(m^\gamma n^\delta w_{\alpha\beta}(m^{-1}, n^{-1})), \tag{4.12}$$

akkor $\sum\sum a_{kl} < \infty$ *és*

$$\sum_{k=m}^{\infty} \sum_{l=n}^{\infty} a_{kl} = O(w_{\alpha\beta}(m^{-1}, n^{-1})). \tag{4.13}$$

(ii) *Megfordítva, ha* (4.13) *fennáll valamely* $\gamma > \alpha \ge 0$ *és* $\delta > \beta \ge 0$ *számokra, akkor* (4.12) *is.*

4.4.2. Lemma *Legyen* $\{a_{kl}\} \subset \mathbb{R}_+$ *és* $w_{\alpha\beta} \in W_{\alpha\beta}$.

(i) *Ha* (4.12) *fennáll valamely* $\delta \geq \beta > 0$, *és tetszőleges* γ, α *számokra, akkor*

$$\sum_{k=m}^{\infty} \sum_{l=1}^{n} l^{\delta} a_{kl} = O(n^{\delta} w_{\alpha\beta}(m^{-1}, n^{-1})). \tag{4.29}$$

(ii) *Ha* (4.13) *fennáll valamely* $\delta > \beta \geq 0$ *és tetszőleges* γ, α *számokra, akkor* (4.29) *is.*

4.4.3. Lemma *Legyen* $\{a_{kl}\} \subset \mathbb{R}_+$ *és* $w_{\alpha\beta} \in W_{\alpha\beta}$.

(i) *Ha* (4.12) *fennáll valamely* $\gamma \geq \alpha > 0$, *és tetszőleges* δ, β *számokra, akkor*

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{l=n}^{\infty} k^{\gamma} a_{kl} = O(m^{\gamma} w_{\alpha\beta}(m^{-1}, n^{-1})). \tag{4.33}$$

(ii) *Ha* (4.13) *fennáll valamely* $\gamma > \alpha \geq 0$ *és tetszőleges* δ, β *számokra, akkor* (4.33) *is.*

Fourier sorok és az általánosított Lipschitz osztályok

Speciális esetként kapjuk a következő állításokat:

4.3.1. Tétel. *Legyen* $\{c_{kl}\}$ *komplex számok olyan sorozata, amelyre* (3.1) *fennáll, az* f *függvényt definiálja a* (3.2) *összefüggés és tegyük fel, hogy az* L *függvény eleget tesz a* (4.1) *határértékeknek.*

(i) *Ha valamely* $0 < \alpha, \beta \leq 1$ *számokra*

$$\sum_{|k| \leq m} \sum_{|l| \leq n} |klc_{kl}| = O(m^{1-\alpha} n^{1-\beta} L(m,n)), \tag{4.10}$$

akkor $f \in \mathrm{Lip}(\alpha, \beta; L)$.

(ii) *Megfordítva, legyen* $\{c_{kl}\} \subset \mathbb{R}$ *olyan sorozat, amelyben minden elem előjele megegyezik az indexei szorzatának előjelével, vagyis teljesítik a* (3.6) *és* (3.7) *feltételeket. Ha* $f \in \mathrm{Lip}(\alpha, \beta; L)$ *valamely* $0 < \alpha, \beta \leq 1$ *számokra, akkor* (4.10) *fennáll.*

4.3.2. Tétel. *Legyen* $\{c_{kl}\} \subset \mathbb{C}$, *melyre* (3.1) *fennáll, az* f *függvényt definiálja a* (3.2) *összefüggés és tegyük fel, hogy az* L *függvény eleget tesz a* (4.1) *határértékeknek.*

(i) *Ha valamely* $0 \leq \alpha, \beta < 1$ *számokra*

$$\sum_{|k| \geq m} \sum_{|l| \geq n} |c_{kl}| = O\Big(\frac{m^{-\alpha} n^{-\beta}}{L(m,n)}\Big), \tag{4.11}$$

akkor $f \in \mathrm{Lip}(\alpha, \beta; 1/L)$.

(ii) *Megfordítva, legyen* $\{c_{kl}\}$ *olyan valós számsorozat, amelyre* (3.6) *és* (3.7) *fennáll. Ha* $f \in \mathrm{Lip}(\alpha, \beta; 1/L)$ *valamely* $0 < \alpha, \beta < 1$ *számokra, akkor a* (4.11) *azonosság is teljesül.*

Probléma. A fenti tételet Móricz [?] bizonyításainak két változóra történő kiterjesztésével látjuk be, azonban a 4.2.2. Tétel (ii) állításában csak $0 < \alpha, \beta < 1$ szigorú egyenlőtlenség esetében tudjuk igazolni az állítást. Ha $\min\{\alpha, \beta\} = 0$, akkor a bizonyítás nem látható be ezen az úton.
Megjegyzés. A 4.2.1. Tétel a 4.3.1. Tétel általánosítása, ami a $w_{\alpha\beta}(\delta_1, \delta_2) := \delta_1^\alpha \delta_2^\beta L(\frac{1}{\delta_1}, \frac{1}{\delta_2})$ választással könnyen adódik.

Hasonlóan a 4.2.3. Tétel a 4.3.2. általánosítása a $\mathrm{Lip}(w_{\alpha\beta}) \subset \mathrm{Zyg}(w_{\alpha\beta})$ reláció miatt és az $w_{\alpha\beta}(\delta_1, \delta_2) := \frac{\delta_1^\alpha \delta_2^\beta}{L(1/\delta_1, 1/\delta_2)}$ választással.

Kétváltozós Fourier transzformáltak és függvényosztályok

Ebben a részben a 6. fejezet eredményeit foglaljuk össze. A záró részben azt vizsgáljuk, hogy egy kétváltozós függvény Fourier transzformáltja milyen feltételek mellett tartozik valamely Lipschitz illetve Zygmund osztályba. A következő két állítás Móricz Ferenc [?] eredményeinek kiterjesztése kétváltozós esetre.

A 6.2.1. Tételben elegendő feltételt adunk arra, hogy az $\hat{f}$ Fourier transzformált eleme legyen valamely $\mathrm{Lip}(\alpha, \beta)$ osztálynak, ahol $0 < \alpha, \beta \leq 1$. Ez a feltétel szükséges is abban az esetben, amikor $xf(x) \geq 0$ majdnem minden $x \in \mathbb{R}$-re.

A 6.2.2. Tételben az előző állítás megfelelőjét fogalmazzuk meg Zygmund osztályokra a $0 < \alpha, \beta \leq 2$ esetben.

6.2.1. Tétel. (i) *Tegyük fel, hogy az* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ *függvényre* $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ *és létezik olyan* s_0 *és* t_0 *pozitív konstans, amelyre*

$$f \in L^1(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \textit{vagy } |x| > s_0 \textit{ és } |y| < t_0, \ \textit{vagy } |x| < s_0 \textit{ és } |y| > t_0\}). \tag{6.1}$$

Ha valamely $0 < \alpha, \beta \leq 1$ *számokra*

$$\int_{|x|<s} \int_{|y|<t} |xyf(x, y)| \mathrm{d}x\mathrm{d}y = O(s^{1-\alpha} t^{1-\beta}), \quad s, t > 0, \tag{6.2}$$

akkor $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ *és* $\hat{f} \in \mathrm{Lip}(\alpha, \beta)$.

(ii) *Megfordítva, tegyük fel, hogy* $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ *és mindkét változójában páratlan, vagyis majdnem minden* $(x, y) \in \mathbb{R}^2_+$ *számpárra*

$$f(x, y) = -f(-x, y) = -f(x, -y) = f(-x, -y) \geq 0. \tag{6.3}$$

Ha $\hat{f} \in \mathrm{Lip}(\alpha, \beta)$ *valamely* $0 < \alpha, \beta \leq 1$ *számokra, akkor* (6.2) *fennáll.*

Megjegyzés. A (6.2)-ben szereplő egyenlőség ekvivalens a következővel:

$$f \in L^1(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| > s \text{ és } |y| > t\}), \quad s, t > 0. \tag{6.4}$$

Ahhoz, hogy az $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ feltevésből következtetni tudjunk az $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ (i)-beli állításra, mindenképp szükség van a (6.1) feltevésére.

Ha léteznek olyan $t_0 > 0$ és $\widetilde{C}$ konstansok, hogy

$$\int_{|x|<s} \int_{|y|<t_0} |xf(x,y)| \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq \widetilde{C} s^{1-\alpha}, \quad s > 0, \tag{6.5}$$

akkor

$$f \in L^1(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| > s \text{ és } |y| < t_0\}).$$

Hasonlóan, ha léteznek olyan $s_0 > 0$ és $\widetilde{C}$ konstansok, hogy

$$\int_{|x|<s_0} \int_{|y|<t} |yf(x,y)| \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq \widetilde{C} t^{1-\beta}, \quad t > 0, \tag{6.6}$$

akkor

$$f \in L^1(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < s_0 \text{ és } |y| > t\}).$$

Tehát a (6.5) és (6.6) feltételekből következik a (6.1) összefüggés.

6.2.2. Tétel. (i) *Legyen* $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ *és tegyük fel, hogy* (6.1) *fennáll. Ha valamely* $0 < \alpha, \beta \leq 2$ *számokra*

$$\int_{|x|<s} \int_{|y|<t} x^2 y^2 |f(x,y)| \mathrm{d}x\mathrm{d}y = O(s^{2-\alpha} t^{2-\beta}), \quad s, t > 0, \tag{6.7}$$

akkor $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ *és* $\hat{f} \in \mathrm{Zyg}(\alpha, \beta)$.

(ii) *Megfordítva, legyen* $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ *és* $f(x,y) \geq 0$ *majdnem minden* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *számpárra. Ha* $\hat{f} \in \mathrm{Zyg}(\alpha, \beta)$ *valamely* $0 < \alpha, \beta \leq 2$ *számokra, akkor* (6.7) *fennáll.*

Megjegyzés. Ismét, a (6.7) feltételből csak a (6.4) következik. Ahhoz, hogy az $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ állítást is be tudjuk látni, szükségünk van a (6.1) relációra is.

Ha léteznek olyan $t_0 > 0$ és $\widetilde{C}$ konstansok, hogy

$$\int_{|x|<s} \int_{|y|<t_0} x^2 |f(x,y)| \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq \widetilde{C} s^{2-\alpha}, \quad s > 0, \tag{6.8}$$

akkor

$$f \in L^1(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| > s \text{ és } |y| < t_0\}).$$

Hasonlóan, ha léteznek olyan $s_0 > 0$ és $\widetilde{C}$ konstansok, hogy

$$\int_{|x|<s_0} \int_{|y|<t} y^2 |f(x,y)| \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq \widetilde{C} t^{2-\beta}, \quad t > 0, \tag{6.9}$$

akkor

$$f \in L^1(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < s_0 \text{ és } |y| > t\}).$$

Tehát a (6.8) és (6.9) feltételekből következik a (6.1) összefüggés.

Hivatkozások

[1] N. K. Bary, and S. B. Stečkin, Best approximation and differential properties of two conjugate functions, *Trudy Moskov. Mat. Obšč.* **5** (1956), 483-522 (in Russian).

[2] N. H. Bingham, C. M. Goldie and J. L. Teugels, *Regular Variation,* Cambridge Univ. Press, 1987.

[3] R. P. Boas, Jr., Fourier series with positive coefficients, *J. Math. Anal. Appl.,* **17** (1967), 463-483.

[4] D. M. Dyachenko, On two-sided estimates of sums of absolute values of the Fourier coefficients of functions in $H^\omega(T^m)$, *Vestnik Moskov. Univ.* Ser. I. Mat., Mech., **3** (2008), 19-26 (in Russian).

[5] V. Fülöp, Double cosine series with nonnegative coefficients, *Acta Sci. Math. (Szeged),* **70** (2004), 91-100.

[6] V. Fülöp, Double sine series with nonnegative coefficients and Lipschitz classes, *Colloq. Math.,* **105** (2006), 25-34.

[7] V. Fülöp, F. Móricz and Z. Sáfár, Double Fourier transforms, Lipschitz and Zygmund classes of functions on the plane, *East J. Approx.,* **17** (2011), 111-124.

[8] G. Brown, F. Móricz and Z. Sáfár, Formal differentiation of absolutely convergent Fourier series and classical function classes, *Acta. Sci. Math. (Szeged),* **75** (2009), 161-173.

[9] L. Leindler, *Strong approximation by Fourier series,* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1985.

[10] F. Móricz, Absolutely convergent Fourier series, classical function classes and Paley's theorem, *Analysis Math.,* **34** (2008), 261-276.

[11] F. Móricz, Absolutely convergent Fourier series and generalized Lipschitz classes of functions, *Colloq. Math.,* **113** (2008), 105-117.

[12] F. Móricz, Absolutely convergent Fourier series, enlarged Lipschitz and Zygmund classes of functions, *East J. Approx.,* **15** (2009), 71-85.

[13] F. Móricz, Absolutely convergent multiple Fourier series and multiplicative Lipschitz classes of functions, *Acta Math. Hungar.,* **121** (2008), 1-19.

[14] F. Móricz, Best possible sufficient conditions for the Fourier transform to satisfy the Lipschitz or Zygmund condition, *Studia Math.,* **199** (2010), 199-205.

[15] F. Móricz and Z. Sáfár, Absolutely convergent double Fourier series, enlarged Lipschitz and Zygmund classes of functions of two variables, *East J. Approx.,* **16** (2010), 1-24.

[16] J. Németh, Fourier series with positive coefficients and generalized Lipschitz classes, *Acta Sci. Math. (Szeged),* **54** (1990), 291-304.

[17] Z. Sáfár,Absolutely convergent double Fourier series and generalized multiplicative Lipschitz classes of functions, *Acta. Sci. Math. (Szeged),* **75** (2009), 617-633.

[18] E. M. Stein and G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces,* Princeton Univ. Press, 1971.

[19] A. Zygmund, *Trigonometric Series,* Vol. *I,* Cambridge Univ. Press, 1959.