

4. oldal

JÓZSEF ATTILA TUDOMÁNYEGYETEM

TERMÉSZETTUDOMÁNYI KARA

Funkcionál differenciálegyenletek megoldásainak
stabilitási tulajdonságairól

Terjéki József
doktori értekezése

SZEGED
1976



B 1346

Tartalomjegyzék

	old.
I. Bevezetés	3
II. Az általános egyenlet leírása és a használt alapfogalmak definíciói	13
1. Alapfogalmak, egzisztencia és unicitás tételek	13
2. Stabilitási fogalmak	18
3. Ljapunov függvények	23
III. Első közelítésben való stabilitási vizsgálatok ..	27
1. Példák C. Corduneanu egyik tételéhez	29
2. Végtelen retardálási egyenletek vizsgálata első közelítésben	31
3. Egy autonóm differenciálegyenlet parciális stabilitásáról	42
4. Példák	50
IV. Stabilitási vizsgálatok Ljapunov függvények segítségével	52
1. Z. Mikolajoka módszerének kiterjesztése aszimptotikus stabilitás vizsgálatára	57
2. H. N. Kraszovszkij tételének általánosítása végtelen retardálási egyenletekre	65
3. Egy aszimptotikus (de nem egyenletes) sta- bilitást biztosító tétel	67

	old.
4. Póldák	72
V. Irodalomjegyzék	77

I. B E V E Z E T É S

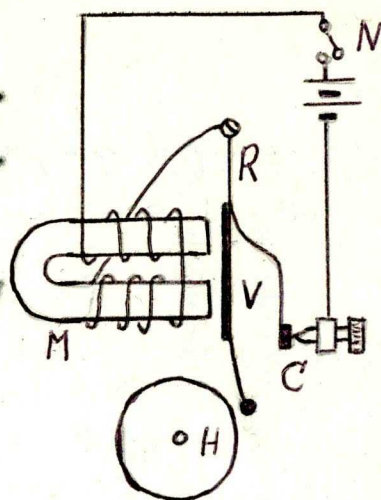
Az 1950-es években a differenciálegyenletek elméletén belül egy új vizsgálati terület alakult ki. Behatóan kezdtek tanulmányozni az olyan egyenleteket, amelyekben az ismeretlen függvény és deriváltjai az argumentum különböző értékeinél szerepelnek.

A XX. század, különösen az elmúlt néhány évtized gyakorlati problémái ösztönözték a matematikusokat arra, hogy ilyen, u.n. eltolott argumentumú differenciálegyenleteket vizsgáljanak. Ugyanis sok olyan jelenség, folyamat matematikai leírása, amelynek a jövője nemcsak a jelenétől, hanem a múltjától is függ, eltolott argumentumú differenciálegyenletre vezet. Nagyon sokszor a probléma természete olyan, hogy a múlttól való függést el lehet hanyagolni. Ez azonban nem mindig van így. Ennek alátámasztására megemlítünk néhány példát.

1. Az elektromágneses csengő kalapácsának mozgását eltolott argumentumú differenciálegyenlet írja le. Az argumentumok eltolása az önindukciós áram jelenléte miatt alakul ki, amelytől nem lehet eltekinteni.

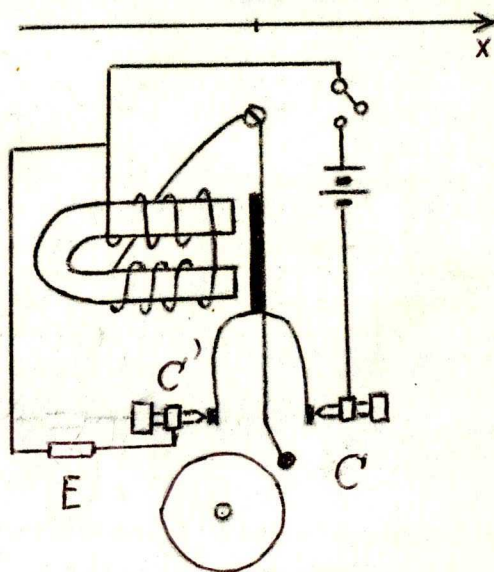
Az elektromágneses csengő legegyszerűbb típusa a következő: Ha az áramforrást az H nyomógombbal bekapcsoljuk, az H elektromágnesen áram halad át, s magához rántja az R rugóra erősitett V lágyvas lemezt és a kalapács a H harangra üt. Amikor C -nél az áramkör megszakad, akkor H tekercsében önindukciós áram ke-

lethetik, aminek lefutása csak a $\underline{Q}$ csőcs-
nál a megszakadáskor keletkező kis légré-
sen át lehetséges. Ekkor az áramerősség-
nek igen gyorsan kell csökkenni, ami nagy
feszültségkülönbséggel jár a $\underline{Q}$ csőcs és
az érintkezőt biztosító lemez között,
vagyis nagyfokú szikrázás, esetleg iv-
fény alakulhat ki. Ezt elkerülendő, be-
lehet építeni a csongóba egy *segédáramkört* a
2. ábrán látható módon.

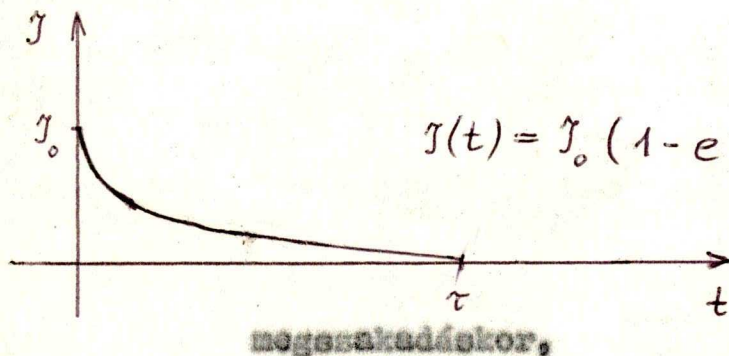


1. ábra

A 2. ábra esetén, ha a $\underline{Q}$ csőcsnél megszakad a nagy áramkör,
a $\underline{Q}'$ csőcsnél záródik, s így az önindukciós áram lefutása a
segédáramkörön át biztosított.
A $\underline{Q}$ -nál való zárásakor keletke-
ző önindukciós áram lefutása a
nagy áramkörön át történik. Ha
az $\underline{E}$ ellenállást jól választot-
tuk, akkor az önindukciós áram
ugyanolyan jellegű a nagy áram-
kör zárásakor, mint megszakadá-
sakor,

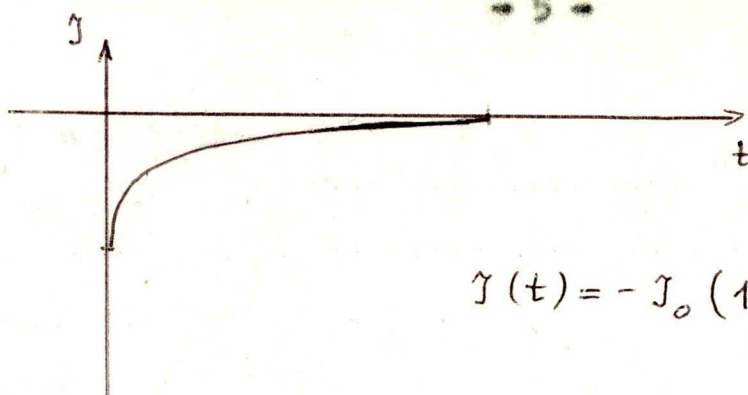


2. ábra.



$$i(t) = i_0 (1 - e^{-ct})$$

megszakadáskor,



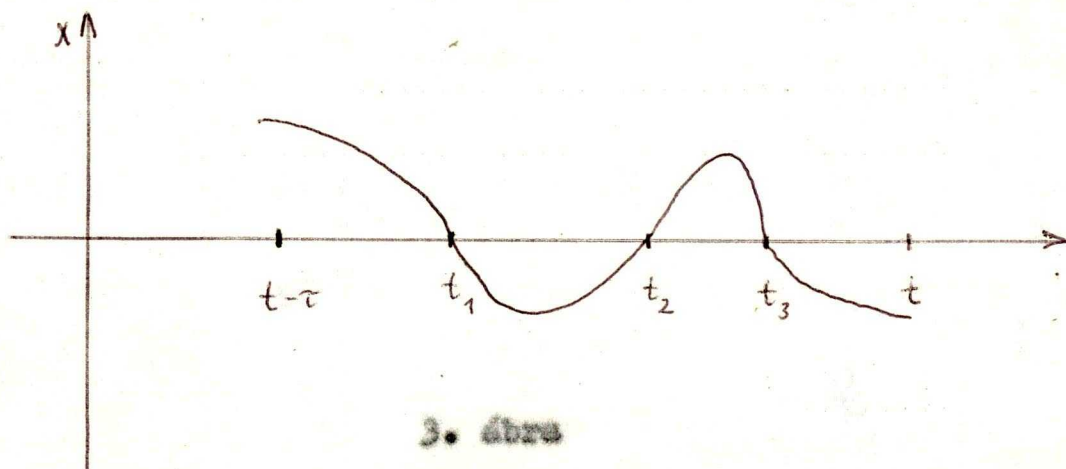
$$J(t) = -J_0(1 - e^{-ct})$$

sűrűségekor.

A τ idő elteltével az $I(t)$ elhanyagolható.

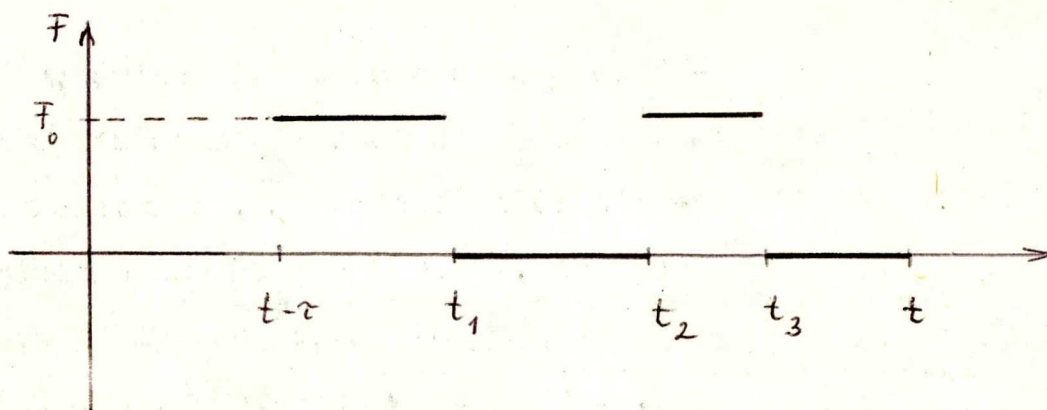
A $\underline{Y}$ -re ható elektromágneses erőről az egyszerűség kedvéért tételezzük fel, hogy arányos $I(t)$ -vel. (Ez akkor tehető fel, ha a kialakuló mágneses tér közelítőleg homogén, $\underline{Y}$ pedig dia- vagy paramágneses tulajdonságokat mutat. A kapcsolat általában bonyolultabb.)

Jelölje x a $\underline{Y}$ lágyvas egyensúlyi helyzetétől mért kitérést. (lásd a 2. ábrát!) Tegyük fel, hogy ismerjük $\underline{Y}$ mozgását a $[t, t-\tau]$ időintervallumban, mondjuk a 3. ábra szerint mozog a $\underline{Y}$.



3. ábra

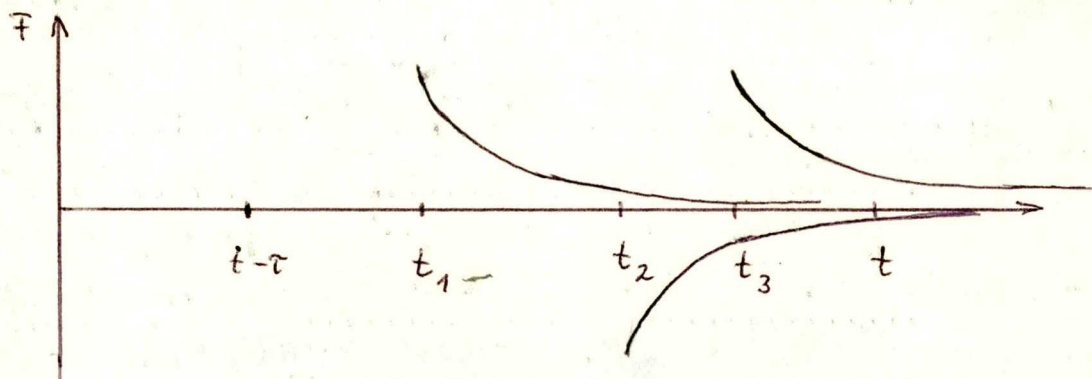
Ha az önindukciótól eltekintünk, az $\underline{M}$ által $\underline{Y}$ -re kifejtett erőhatás időbeli befutása a következő lenne (4. ábra).



4. ábra

Ehhez azonban még hozzájárulhatnak az önindukciós áramok által keltett erőhatások (5. ábra), melyek összege a $\underline{t}$ pontban:

$$F_0(1 - e^{-c(t-t_1)}) + F_0(1 - e^{-c(t-t_3)}) - F_0(1 - e^{-c(t-t_2)})$$



5. ábra

Az $e(x) = \begin{cases} F_0, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ függvény levezetésével a fenti összeg

$$= \int_{t-\tau}^t (1 - e^{-c(t-s)}) d_s e(x(s))$$

alakba írható. Így a mozgás egyenlete az

$$(1.1) \quad m\ddot{x}(t) + r\dot{x}(t) + kx(t) = e(x(t)) - \int_{t-\tau}^t (1 - e^{-c(t-s)}) d_s e(x(s))$$

eltolt (késleltetett) argumentumú differenciálegyenlet, ahol m a kalapács és γ együttes tömege, λ a rendszerre jellemző csillózási tényező, k pedig a rugóállandó.

B.Sz.Harkin [21] megmutatta, hogy (1.1) jobboldala közelíthető az $\ell x(t-\tau)$ (ℓ -konstans) mennyiséggel is. Ennek felhasználásával egyenletünk az

$$(1.2) \quad m\ddot{x}(t) + r\dot{x}(t) + kx(t) - \ell x(t - \tau) = 0$$

alakba írható. Bizonyos szabályozási problémák megoldása szintén az (1.2) egyenlet tanulmányozására vezet. (Lásd pl. L. Collatz [1], B.Sz.Razumikhin [25].)

2) Több biológiai rendszer matematikai leírása is eltolt argumentumú differenciálegyenlettel lehetséges. Első példaként egy járványterjedési modellt tekintünk, amelyet E.B.Wilson és H.H.Burke [34] közölt a Proc.Nat.Acad.Sci.USA folyóiratban.

Legyen adott egy nagy létszámú populáció és tegyük fel, hogy valamilyen ragályos betegség terjed az egyedek között. Vannak közöttük olyanok, akik a betegségben szenvednek és fertőzők, vannak akik hajlamosak a betegségre (elég nagy számú beteggel való találkozás után maguk is betegek lesznek), és vannak a betegséggel szemben immunisak. A járvány terjedése úgy történik, hogy ha egy hajlamos megkapja a betegséget, csak egy τ idő eltelte után jelentkeznek rajta a tünetek és ekkor válik fertőzővé, majd σ ideig marad az. E.B. Wildon és H.H.Burke szerint a fenti folyamatot jól leírják a következő egyenletek:

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = A - C(t) \\ C(t) = r I(t)S(t) \\ I(t) = \int_{t-\tau-\sigma}^{t-\tau} C(s)ds \end{cases}$$

Itt $I(t)$ a fertőző, $S(t)$ a betegségre hajlamos egyedek számát jelenti a t időpillanatban. A a hajlamosak keletkezésének, $C(t)$ pedig a fertőzöttek létszáma növekedésének sebességét jelöli. r egy arányossági tényező, amely változatlan környezeti feltételek mellett konstansnak tekinthető. τ a betegség leppangásának, σ pedig a betegség lefolyásának időtartama az egyes egyedeknél.

A fenti rendszerből $I(t)$ és $C(t)$ kiküszöbölhető. Ugyanis az elsőből $C(t) = A - \dot{S}(t)$, melyet a harmadik egyenletbe helyettesítve $I(t) = A\sigma - S(t-\tau) + S(t-\tau-\sigma)$ adódik. Ezeket egyenletünk második egyenletébe behelyettesítve az

$$(1.3) \quad \dot{S}(t) = A - rS(t)(A\sigma - S(t-\tau) + S(t-\tau-\sigma))$$

eltolt argumentumú differenciálegyenletre jutunk. A (3) egyenlet csak úgy lenne helyettesíthető közönséges differenciálegyenlettel, ha feltételeznénk, hogy $\sigma = 0$, vagyis az egyes egyedek betegsége csak pillanatnyi jellegű. Ezt viszont nyilván nem tekinthetjük fel.

További példaként megemlítjük az

$$(2.4) \quad \dot{x}(t) = (a - bx(t-\tau))x(t)$$

egyenletet, amelyet J. Cunningham [4] vizsgált, mint bizonyos szervesetek fejlődési törvénye. Dolgozata 1954-ben jelent meg a Proc. Nat. Acad. Sci. USA folyóiratban.

M.V. Volterra és M.U. D'Ancona [33] az

$$(1.5) \quad \begin{cases} \dot{N}_1(t) = N_1(t)(\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2(t)) \\ \dot{N}_2(t) = N_2(t)(-\varepsilon_2 + \int_{-\infty}^t f(t-\tau) N_1(\tau) d\tau) \end{cases}$$

rendszer, valamint az

$$(1.6) \quad \dot{N}(t) = \left[\varepsilon - N(t)h - \int_0^t N(\tau) f(t-\tau) d\tau \right] N(t)$$

egyenletet ($\varepsilon_1, \gamma_1, \varepsilon_2, h$ konstansok, $f(s)$ Lebesgue - integrálható $[0, \infty)$ -en) alkalmazták biológiai rendszerek matematikai leírására.

3. Az atomreaktorok különböző modelljeinek matematikai leírása is sok esetben eltolt argumentumú egyenletre vezet.

Például, ha a reaktort kétszeresen végtelen rúdnak tekintjük, és a késleltetett neutronok hatásától eltekintünk, a reaktor $T(x, t)$ hőmérséklet- és $p(t)$ energia-függvényére fizikai megfontolásokkal a

$$\begin{cases} \dot{p}(t) = -p(t) \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x) T(x, t) dx \\ T_t(x, t) = T_{xx}(x, t) + \eta(x)(p(t) - 1) \end{cases}$$

egyenletrendszer adódik (J.J. Levin és J.A. Mohel [15]). Ebből

$T(x, t)$ kiküszöbölésével. (C. Corduneanu [2]) az

$$(1.7) \quad \dot{u}(t) = - \int_0^t k(t-s) \varphi(u(s)) ds - b(t)$$

integró-differenciálegyenletre juthatunk. Ebben az egyenletben $u(t)$ deriváltja a t időpillanatban $u(t)$ -nek a $[0, t]$ intervallumon felvett értékeitől függ.

4. Végül egy matematikai problémát említünk meg, amely el-
tolt argumentumú differenciálegyenletre vezetett.

G. Hoffman de Visme [13] 1961-ben egy heurisztikus gondolat-
menet segítségével arra a következtetésre jutott, hogy a prin-
számok sűrűségét a

$$(1.8) \quad 2x \frac{\ddot{y}(x)}{\dot{y}(x)} + \dot{y}(\sqrt{x}) = 0$$

kéleltetett típusú differenciálegyenlet megoldásainak ω -ben
való viselkedéséből le lehet olvasni. A fenti egyenletet kapta
Lord Cherwell is 1947 körül (lásd E.M.Wright [35]). Ha (1.8)-
ban a $\log x = 2^v$, $\dot{y}(x) \log x = 1 + w(v)$ transzformációt el-
végessük, a

$$(1.9) \quad \dot{w}(v) = -\alpha w(v-1)(1+w(v)) \quad , \quad \alpha = \log 2$$

egyenletet nyerjük, amely ugyancsak kéleltetett típusú. Ezen
utóbbi egyenlet felhasználásával E.M.Wright [35] bebizonyította,
hogy (1.8) megoldásai aszimptotikus viselkedéséből valóban le-
olvasható a prímszámtétel.

A fenti példák mutatják, hogy a kéleltetett típusú egyenletek segítségével sok jelenség fejlődéstörvénye, viselkedése leírható. Ha ez a leírás megtörtént, a következő lépés az, hogy az eddigi információk és a fejlődéstörvény segítségével meg tudjuk jósolni a vizsgált jelenség várható kimenetelét. Ez elvben úgy lenne a legegyszerűbb, hogy az adott fejlődési törvényből, vagyis az adott differenciálegyenletből az ismeretlen mennyiségeket az ismertek segítségével kifejeznénk, vagy egyszerűen szólva megoldanánk az egyenletet. Ez azonban általában nem lehetséges. Ezért szokás vizsgálni a megoldások aszimptotikus viselkedését (pl.: korlátos marad-e, tart-e nullához).

Ebben a disszertációban mi is a fenti kérdéskörhöz tartozó problémákkal foglalkozunk, nevezetesen azzal, hogy egy adott megoldástól a többi mennyire tér el, feltéve, hogy a kezdeti időpillanatban kicsit térnek el egymástól (stabilitás).

A következő fejezetben definiáljuk egyenletek egy olyan osztályát, amely a fenti egyenletek mindegyikét tartalmazza, majd megadjuk a használt stabilitási fogalmak definícióját.

A stabilitási kérdések megoldásánál két egymástól különböző módon fogunk eljárni. A III. fejezetben első (lineáris) közelítésben tanulmányozzuk a problémákat, azaz az egyenlet jobboldalát először linearizáljuk, s az egyszerűbb szerkezetű lineáris egyenletek megoldásainak stabilitási tulajdonságaiból következtetünk a nemlineáris egyenlet megoldásainak stabilitására. Ezekkel összefüggésben tanulmányozni fogjuk néhány lineáris egyenlet megoldásainak stabilitását is. A IV. fejezet jellemzője, hogy segédfüggvényeket használ a stabilitás eldönté-

sére. A nyert eredmények a közösleges differenciálegyenletek elméletéből ismert Ljapunov féle második módszer kiterjesztései eltolt argumentumú egyenletekre. Az egyes fejezetek végén több példát mutatunk a kapott tételek alkalmazhatóságára.

A dolgozatban a tételek számozására római és arab számjegyeket használunk. A római számjegyekkel jelölt tételek az irodalomban bebizonyított, vagy ilyenekre könnyen visszavezethető eredmények. A tételek számozása fejezetenként ábrakésződik.

A többször felhasznált összefüggésekre két, ill. három, egymástól pontokkal elválasztott arab számjegyekkel hivatkozunk. Az első számjegy mindig azt a fejezetet jelenti, ahol az adott összefüggés található. Három számjegy esetén a második a szakaszra utal.

II. AZ ÁLTALÁNOS EGYENLET LEÍRÁSA ÉS A HASZNÁLT ALAPFOGALMAK DEFINÍCIÓI

2.1 Alapfogalmak.

existencia és unicitás tételek

Az egyszerűbb írásmód kedvéért bevezetjük az $R^+ = [0, \infty)$, $R^- = (-\infty, 0]$, $R = R^+ \cup R^-$ jelöléseket. R^n a valós szám n -esek tere az euklidesszi normával, melyet $|\cdot|$ -vel jelölünk. (x, y) az $x, y \in R^n$ vektorok skaláris szorzata. C_∞ az R^- szakasszon értelmezett R^n értékű, folytonos, korlátos függvények Banach tere a $\|\varphi\| = \sup_{s \in R^-} |\varphi(s)|$ normával. Ha $x: (-\infty, t] \rightarrow R^n$, folytonos és korlátos, x_t az $x_t(s) = x(t+s)$, $s \in R^-$ függvényt jelenti, $x_t \in C_\infty$.

Legyen $\mathcal{D}$ egy nyílt halmaz C_∞ -ben és legyen adott egy $F: R^+ \times \mathcal{D} \rightarrow R^n$ leképezés. Ez a disszertáció az

$$(2.1.1) \quad \dot{x}(t) = F(t, x_t)$$

készlített differenciálegyenlet stabilitási problémáit tanulmányozza. A bevezetésben említett egyenletek mindegyike felírható (2.1.1) alakba. Például, ha $\mathcal{D} = C_\infty$, $n=1$ és $F(t, \varphi) = A - r \varphi(0)(A\sigma - \varphi(-\tau) + \varphi(-\tau-\sigma))$, akkor (2.1.1) megegyeszik az (1.3) egyenlettel. Ha továbbra is $n=1$ és $F(t, \varphi) = (\varepsilon - \varphi(0)h - \int_{-t}^0 \varphi(s)f(-s)ds) \varphi(0)$, akkor (1.6) adódik a (2.1.1)

felírásból. Legyen

$$n = 2, F(t, \varphi) = \begin{pmatrix} F_1(t, \varphi_1, \varphi_2) \\ F_2(t, \varphi_1, \varphi_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(0)(\varepsilon - \gamma_1 \varphi_2(0)) \\ \varphi_2(0)(-\varepsilon_2 - \int_{-\infty}^0 f(-s)\varphi(s)ds) \end{pmatrix}$$

Ekkor (2.1.1) (1.5)-tel less ekvivalens.

A dolgozatban (2.1.1)-et több alkalommal speciális esetben vizsgáljuk. Az egyik ilyen eset az, amikor (2.1.1) közönséges differenciálegyenletté redukálódik, amin azt értjük, hogy bármely $\varphi, \gamma \in C_{\infty}$ -re, ha $\varphi(0) = \gamma(0)$, akkor $F(t, \varphi) = F(t, \gamma)$, $t \in \mathbb{R}^+$ teljesül. Ha viszont létezik olyan $h \in \mathbb{R}^+$, hogy a $\varphi, \gamma \in C_{\infty}$ és $\varphi(s) = \gamma(s)$, $s \in [-h, 0]$ feltételek teljesülése esetén $F(t, \varphi) = F(t, \gamma)$, $t \in \mathbb{R}^+$ is teljesül, akkor (2.1.1)-et véges retardálási egyenletnek, míg ha létezik olyan $\sigma: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ folytonos függvény, hogy minden $t \in \mathbb{R}^+$ -re $F(t, \varphi) = F(t, \gamma)$, ha csak $\varphi, \gamma \in C_{\infty}$ $\varphi(s) = \gamma(s)$, $s \in [-\sigma(t), 0]$, akkor (2.1.1)-et lokálisan véges retardálási egyenletnek nevezzük. Ha (2.1.1) se nem közönséges, se nem véges retardálási, akkor végtelen retardálási egyenletnek mondjuk (így a lokálisan véges, de nem véges retardálási egyenletek is végtelen retardálásúak).

Több esetben megengedjük, hogy az $x(t)$ függvény komplex értéket is felvegyen. Ez csak akkor lehetséges, ha $F(t, \varphi)$ értelmezését ki lehet terjeszteni komplex értékű φ függvényekre is. Pontosabban, jelölje $\mathbb{C}^n$ az n komplex komponensből álló szám

n -esek terét a $|\cdot|$ euklidessi normával, $\mathcal{C}_\infty$ pedig az $\mathbb{R}^n$ intervallumon adott $\mathcal{C}^n$ értékű folytonos, korlátos függvények Banach terét a $\|\cdot\|$ supremum normával. Értelmeszerűen, ekkor $x_t \in \mathcal{C}_\infty$. Legyen $F: \mathbb{R}^+ \times \mathcal{C}_\infty \rightarrow \mathcal{C}^n$. Ebben az esetben a (2.1.1) egyenletet komplex differenciálegyenletnek nevezzük. Analóg módon értelmezzük a véges retardálási komplex differenciálegyenleteket is.

Egy x függvényt (2.1.1) megoldásának nevezzük, ha van olyan $t_0 \in \mathbb{R}^+$ és $0 < A (\leq \infty)$, hogy x $(-\infty, A)$ -n folytonos; $x_t \in \mathcal{D}^{te}(-\infty, A)$; x abszolút folytonos (t_0, A) -n és itt kielégíti (2.1.1)-et. Ebben az esetben még azt is mondjuk, hogy $x(t)$ megoldása (2.1.1)-nek $(-\infty, A)$ -n. Adott $(t_0, \varphi_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{D}$ -re a (2.1.1) egyenlet (t_0, φ_0) -on átmenő megoldásának nevezzük azon x függvényeket amelyekhez van olyan $A > t_0$, hogy x megoldása (2.1.1)-nek $(-\infty, A)$ -n, továbbá teljesül az $x_{t_0} = \varphi_0$ reláció. Az előírt φ_0 mennyiséget szokás kezdőfüggvénynek is nevezni.

Ha x megoldása (2.1.1)-nek egy $(-\infty, a)$, y pedig egy $(-\infty, b)$ intervallumon, $0 < a \leq b$ és a $(-\infty, a)$ intervallumon, $y(t) = x(t)$ akkor azt mondjuk, hogy y folytatása x -nek. Ha egy megoldásnak nem létezik folytatása, nemfolytatható megoldásnak nevezzük. A Zorn lemma segítségével belátható, hogy bármely x megoldásnak létezik nemfolytatható folytatása.

Megjegyezzük, hogy véges retardálási egyenletek esetén a φ_0 kezdőfüggvényeket elég megadni csak a $[-h, 0]$ intervallumon, későbbes differenciálegyenletek esetén pedig csak a 0 pontban. Hasonlóan, a (2.1.1)-ben szereplő x_t függvényeket is elég csak $[-h, 0]$, ill. 0 -ban ismernünk. Ezért a továbbiakban vé-

ges retardálás esetén úgy tekintjük (2.1.1)-et, hogy $P: \mathbb{R}^+ \times C_h \rightarrow \mathbb{R}^n$, komplex esetben $\mathbb{R}^+ \times \mathcal{C}_h \rightarrow \mathcal{C}^n$, ahol C_h , ill. $\mathcal{C}_h$ a $[-h, 0]$ intervallumon értelmezett $\mathbb{R}^n$ ill. $\mathcal{C}^n$ folytonos függvények Banach tere a $\|\cdot\|_h$ supremum normával. Közösleges differenciálegyenletek esetén $P: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

További vizsgálatainkban mindig felteessük, hogy (2.1.1)-re lokális egzisztencia teljesül, azaz bármely $t_0 \in \mathbb{R}^+$, $\varphi_0 \in \mathcal{D}$ -re létezik legalább egy (t_0, φ_0) -on átmenő megoldás. Több alkalommal felteessük majd, hogy (2.1.1)-re unicitás teljesül, azaz ha mind $x(t)$, mind $y(t)$ (t_0, φ_0) -on átmenő megoldás, akkor $x(t) = y(t)$ a közös értelmezési intervallumon. Unicitás esetén a (t_0, φ_0) -on átmenő nemfolytatható megoldás jelölésére használni fogjuk az $x(t; t_0, \varphi_0)$ jelölést is. $x_t(t_0, \varphi_0)$ pedig a megfelelő C_∞ -beli elemet jelenti.

Analóg módon definiálhatók a fenti fogalmak komplex egyenletek esetére is.

Ezen disszertációnak nem célja a lokális egzisztencia és unicitás vizsgálata, legtöbbször felteessük azok teljesülését, néhány alkalommal pedig az alábbi tételekre hivatkozunk, amelyek a közösleges differenciálegyenletek elméletéből jól ismert Picard-Lindelöf-tétel és a Peano-tétel általánosításai.

Legyen adott $(t_0, \varphi_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{D}$, s definiáljuk az $S = S(t_0, \varphi_0, \varepsilon)$ halmast, mint azon $x: (-\infty, t_0 + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvények halmazát, amelyekre $x_{t_0} = \varphi_0$ valamint a $[t_0, t_0 + \varepsilon]$ szakaszon $x_t \in \mathcal{D}$ és $|x(t) - \varphi(0)| \leq \varepsilon$ teljesül.

I. Tétel (A.Halanay és J.A. Yorke [8]): Tegyük fel, hogy van olyan $\varepsilon > 0$ és $M > 0$, hogy $|F(t, x_t)| \leq M$ minden

$x \in S(t_0, \varphi_0, \varepsilon)$, $t \in [t_0, t_0 + \varepsilon)$, továbbá van olyan $L > 0$, hogy ha $x^1, x^2 \in S(t_0, \varphi_0, \varepsilon)$ és $|x^1(t) - x^1(s)| \leq M|t - s|$, $s, t \in [t_0, t_0 + \varepsilon)$, $i=1,2$, akkor $|F(t, x_t^1) - F(t, x_t^2)| \leq L\|x_t^1 - x_t^2\|$. Tegyük még fel, hogy $F(t, y_t)$ t -nek folytonos függvénye bármely $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(y_t \in \mathcal{D})$ folytonos függvény esetén. Ekkor (2.1.1)-re lokális egzisztencia és unicitás teljesül.

II. Tétel: Ha (2.1.1) lokálisan véges retardálási és $F(t, y_t)$ folytonos bármely $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(y_t \in \mathcal{D})$ folytonos függvény-re, akkor (2.1.1)-re lokális egzisztencia teljesül.

Ennek a tételnek egy bizonyítása véges retardálási egyenletek esetén J.Hale könyvében [9] található, az általános eset pedig erre visszavezethető, mert véges időintervallumon a lokálisan végtelen retardálási egyenletek véges retardálásának tekinthetők. (Lásd pl. [30])

III. Tétel (J.Hale [9]): Ha (2.1.1) véges retardálási, $F: \mathbb{R}^+ \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$, ahol $\mathcal{D}$ egy nyílt halmaz C_h -ben, F folytonos és Lipschitz tulajdonsággal rendelkezik $\mathbb{R}^+ \times \mathcal{D}$ bármely kompakt részhalmazon, akkor (2.1.1)-re lokális egzisztencia és unicitás teljesül.

IV. Tétel: Legyen $F: \mathbb{R}^+ \times C_{\infty} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Tegyük fel, hogy $F(t, \varphi)$ rögzített t -re φ -ben lineáris, és van olyan $\ell: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ folytonos függvény, hogy $|F(t, \varphi)| \leq \ell(t)\|\varphi\|$, $t \in \mathbb{R}^+$, $\varphi \in C_{\infty}$. Tegyük még fel, hogy $F(t, y_t)$ folytonos minden $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvény-re. Ekkor a (2.2.1) egyenletre lokális egzisztencia és unicitás teljesül, továbbá minden megoldásnak létezik folytatása $(-\infty, \infty)$ -en.



Es a tétel ugyanúgy látható be, mint a közösleges lineáris differenciálegyenletekről szóló hasonló tétel (L.32.Pontrjagin [24], 25-ik oldal), bizonyítását elhagyjuk.

2.2. Stabilitási fogalmak

A továbbiakban (2.1.1)-ről feltesszük, hogy az azonosan nulla függvény megoldása, azaz $0 \in \mathcal{D}$ és $F(t, 0) \equiv 0$, $t \in \mathbb{R}^+$, továbbá azt, hogy lokális egzisztencia teljesül rá. Ebben a szakaszban ezen alapvető feltételek mellett definiáljuk a szóbanforgó egyenlet különböző stabilitási tulajdonságait, s vizsgáljuk ezen fogalmak kialakulását.

A klasszikus stabilitáselmélet a dinamika egyik ága. Stabilitási kérdésekkel több matematikus és fizikus, többek között J.L.Lagrange, P.G.L.Dirichlet, W.Thomson, H.B.Zukoveskij foglalkozott. Igen jelentős állomása volt a stabilitáselmélet fejlődésének H.Poincaré [23], és A.M.Ljapunov [17] munkássága a múlt század végén. H. Poincarétól származik a differenciálegyenletek által definiált görbék geometriai tanulmányozásának néhány alapvető módszere, például a határciklusok elmélete a stabilitáselmélet mély tételei közé tartozik. A.M.Ljapunov az analitikus módszert alapozta meg, híres doktori disszertációja az első rendszeresített tanulmány a stabilitáselméletben.

A.M. Ljapunov közösleges differenciálegyenleteket vizsgált (unicitás mellett), s a megoldások aszimptotikus viselkedésének

jellemzésére a következő fogalmakat használta. Az azonosan nulla megoldás stabilis, ha minden $\varepsilon > 0$ és $t_0 \in \mathbb{R}^+$ -hoz található olyan $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$, hogy a (t_0, x_0) -on átmenő megoldásokra $|x_0| < \delta(\varepsilon, t_0)$ esetén $|x(t; t_0, x_0)| < \varepsilon$, $t \in [t_0, \infty)$ teljesül. Az azonosan nulla megoldás aszimptotikusan stabilis, ha stabilis és minden $t_0 \in \mathbb{R}^+$ -ra van olyan $\Delta(t_0) > 0$, hogy $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t; t_0, x_0)| = 0$, ha csak $|x_0| < \Delta(t_0)$. Ezeknek a tulajdonságoknak a vizsgálata sok mechanikai problémánál nélkülözhetetlennek bizonyult. Ha az adott mechanikai rendszert leíró differenciálegyenletre a fenti tulajdonságok valamelyike teljesül, akkor a rendszer $x(t; t_0, x_0)$ lehetséges állapotai közel maradnak az egyensúlyi állapothoz, ha a t_0 kezdeti időpillanatban is csak kicsit tértek el egymástól. Néhány mechanikai rendszerrel a fenti tulajdonságok nem teljesülhetnek. Például a

$$\dot{q}_1(t) = \frac{\partial H(t, q(t), p(t))}{\partial p_1}, \quad \dot{p}_1(t) = \frac{-\partial H(t, q(t), p(t))}{\partial q_1}$$

($i=1, 2, \dots, n$) alakú Hamilton rendszerek azonosan nulla megoldása ($H(t, 0, 0) \equiv 0$ és $H(t, q, p)$ elég sima) nem lehet aszimptotikusan stabilis (Dr. Hatvani László [11], IV. fejezet, 2.§.). Ezért szokás beszélni az azonosan nulla megoldás parciális stabilitásáról, aszimptotikusan parciális stabilitásáról, amelyek vizsgálhatóságáról maga A.M. Ljapunov is tett megjegyzést disszertációjában, de a pontos definíciókat csak 1957-ben adta meg V.V. Rumjancev [58]. Azt mondta, hogy az adott egyenlet azonosan nulla megoldása az $x_1, x_2, \dots, x_k$ ($k \leq n$) változók szerint

parciálisan stabilis, ha minden $\varepsilon > 0$ és $t_0 \in \mathbb{R}^+$ esetén van olyan $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$, hogy $\left(\sum_{i=1}^k x_i^2(t; t_0, x_0) \right)^{1/2} < \varepsilon$, $t \geq t_0$, ha

$$|x_0| = \left(\sum_{i=1}^n x_{0,i}^2 \right)^{1/2} < \delta(\varepsilon, t_0).$$

$$A \quad p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

vetítési operátor bevezetésével a parciális stabilitás definíciója a következő ekvivalens módon fogalmazható:

$\|p x(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon$, $t \in [t_0, \infty)$, ha csak $|x_0| < \delta(\varepsilon, t)$. A későbbiekben főleg ilyen formában használjuk majd a parciális stabilitás definícióját, és egyszerűen csak p -stabilitásnak emlitjük.

Ljapunov munkássága után, bizonyos megfordítási tételek során szükség volt finomabb tulajdonságok bevezetésére is, mint például az egyenletesen aszimptotikusan stabilis, exponenciálisan stabilis, stb. fogalmakra (lásd pl. Mahn [10]), s analóg módon a megfelelő parciális stabilitási fogalmakra (A.Sz.Ozirenyer, V.V.Rumjancev [23]).

Véges retardálási egyenletek esetén a fenti fogalmak megfelelőit kapjuk, ha az $x_0, x(t; t_0, x_0)$ $\mathbb{R}^n$ -beli pontok helyett a C_h -beli $\varphi_0, x_t(t_0, \varphi_0)$ pontokat helyettesítjük, annak megfelelően, hogy most $\mathbb{R}^n$ helyett C_h szerepel fázistérként (lásd. N. N. Kraszovszkij [14], parciális stabilitásra pedig [31], ill. C. Corduneanu [3]). Végtelen retardálási egyenletek esetére ez a

fogalomalkotás már nem vihető így át, hogy a C_{∞} -beli φ_0 , $x_t(t_0, \varphi_0)$ értékkel mondjuk ki a definíciókat, hiszen a C_{∞} -beli $\|\cdot\|$ norma esetén $x_t(t_0, \varphi_0) \geq \|\varphi_0\|$, $t \geq t_0$ teljesül, s így $\|x_t(t_0, \varphi_0)\| \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$ csak a $\varphi_0 = 0$ esetben lehetséges. Ezt elkerülendő, A.D. Miskisz monográfiájában [20] bizonyos lokálisan véges retardálási egyenletek nulla megoldását akkor nevezték stabilnak, ha minden $\varepsilon > 0$, $t_0 \in \mathbb{R}^+$ -hoz található olyan $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$, hogy $\|\varphi_0\| < \delta(\varepsilon, t_0)$ esetén $|x(t; t_0, \varphi_0)| < \varepsilon$, $t \geq t_0$ teljesül. Az azonosan nulla megoldást aszimptotikusan stabilisnak nevezték, ha stabilis és minden $t_0 \in \mathbb{R}^+$ -hoz van olyan $\Delta(t_0) > 0$, hogy $\|\varphi_0\| < \Delta(t_0)$ esetén $|x(t; t_0, \varphi_0)| \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$ teljesül. Könnyű látni, hogy ezek a definíciók közönséges ill. véges retardálási egyenletek esetén ekvivalensek a Ljapunov, ill. a Krassovszkij félével. Ilyen formában használjuk majd mi is a stabilitási fogalmakat. Az unicitás teljesülését általában nem követeljük meg (2.1.1)-től. Ilyen esetben az egyetlen $x(t; t_0, \varphi_0)$ függvény helyett a definíciókban az összes (t_0, φ_0) -on átmenő megoldást szokás tekinteni (lásd pl. Yoshizawa [36]). Kimondunk majd egy ún. t_0 -ban stabilis fogalmat is. Ilyen tulajdonságok vizsgálata különösen integro-differenciálegyenletek (pl. 1.7)) esetén fontos. O-ban való stabilitást vizsgált pl. G. Seifert [29] és Z. Mikolajski [19].

Most rátérünk az általunk használt stabilitási tulajdonságok leírására. A továbbiakban használjuk a $B_H = \{\varphi \in C_{\infty} : \|\varphi\| < H\}$ jelölést; $\overline{B}_H$ B_H lezárását jelenti.

Legyen adott még egy $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vetítési operátor.

Azt mondjuk, hogy (2.1.1) azonosan nulla megoldása

1) t_0 -ban p -stabilis ($t_0 \in \mathbb{R}^+$), ha

(i) található olyan $H(t_0) > 0$, hogy $\varphi_0 \in B_{H(t_0)}$ esetén bármely (t_0, φ_0) -on átmenő $x(t)$ megoldásnak létezik egy, a $(-\infty, \infty)$ intervallumon értelmezett folytatása.

(ii) minden $\varepsilon > 0$ -ra van olyan $0 < \delta(\varepsilon, t_0) \leq H(t_0)$, hogy $\varphi_0 \in B_{\delta(\varepsilon, t_0)}$ esetén a (t_0, φ_0) -on átmenő bármelyik $x(t)$ megoldásra $|px(t)| < \varepsilon$, $t \geq t_0$ teljesül.

2) p -stabilis, ha minden $t_0 \in \mathbb{R}^+$ esetén t_0 -ban stabilis.

3) egyenletesen p -stabilis, ha

(i) található olyan $H > 0$, hogy $\varphi_0 \in B_H$, $t_0 \in \mathbb{R}^+$ esetén bármely (t_0, φ_0) -on átmenő megoldásnak létezik egy folytatása $(-\infty, \infty)$ -en

(ii) minden $\varepsilon > 0$ -ra van olyan $0 < \delta(\varepsilon) \leq H$, hogy bármely (t_0, φ_0) -on átmenő $x(t)$ megoldásra $|px(t)| < \varepsilon$, $t \geq t_0$ teljesül, ha csak $t_0 \in \mathbb{R}^+$, $\varphi_0 \in B_{\delta(\varepsilon)}$.

4) asimptotikusan p -stabilis, ha p -stabilis és minden $t_0 \in \mathbb{R}^+$ -hoz található olyan $0 < \Delta(t_0) \leq H(t_0)$ ($H(t_0)$ a p -stabilitás definíciójában szereplő konstans), hogy $\varphi_0 \in B_{\Delta(t_0)}$ esetén bármelyik (t_0, φ_0) -on átmenő $x(t)$ megoldásra $\lim_{t \rightarrow \infty} |px(t)| = 0$ teljesül.

5) ekvi-asimptotikusan p -stabilis, ha p -stabilis, továbbá minden $t_0 \in \mathbb{R}^+$ -hoz van olyan $0 < \Delta(t_0) \leq H(t_0)$ és bármely $\eta > 0$ -hoz olyan $T(t_0, \eta) > 0$, hogy bármely $(t_0, \varphi_0) \in \mathbb{R}^+ \times B_{\Delta(t_0)}$ -ra a (t_0, φ_0) -on átmenő megoldásokra $|px(t)| < \eta$, $t \geq t_0 + T(t_0, \eta)$ teljesül.

6) egyenletesen aszimptotikusan p-stabilis, ha egyenletesen p-stabilis és van olyan $0 < \Delta \leq H$, $T > 0$, hogy bármely $(t_0, \varphi_0) \in \mathbb{R}^+ \times B_\Delta$ -ra a (t_0, φ_0) -on átmenő megoldásokra $|p x(t)| < \eta$, $t \geq t_0 + T$ teljesül.

7) exponenciálisan p-stabilis, ha egyenletesen p-stabilis és léteznek olyan $H \geq \Delta > 0$, $\alpha > 0$, $B \geq 1$ konstansok, hogy bármely $(t_0, \varphi_0) \in \mathbb{R}^+ \times B_\Delta$ esetén a (t_0, φ_0) -on átmenő $x(t)$ megoldásokra $|p x(t)| \leq B \|\varphi_0\| e^{-\alpha(t-t_0)}$ teljesül.

A $p = E$ (E egységmátrix) speciális esetben a fenti definíciókban p-stabilitás helyett egyszerűen csak stabilitást mondunk. Ha a vizsgált egyenlet komponensenként adott és $p x = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$ akkor p-stabilitás helyett $x_1, \dots, x_k$ -stabilitást, vagy az $x_1, \dots, x_k$ változók szerinti parciális stabilitást mondunk.

Analóg módon értelmezzük a fenti fogalmakat komplex egyenletek esetén is.

(2.3) Ljapunov függvények

A stabilitás elméletnek a feladata olyan feltételek megadása, amelyek biztosítják az adott egyenlet azonosan nulla megoldásának p-stabilitását, aszimptotikus p-stabilitását, stb. A.H. Ljapunov a stabilitás feladatának tanulmányozására két alapvető módszert fedezett fel. Az első módszer alkalmazása

abban áll, hogy az adott egyenletnek végtelen sor alakjában felépítünk egy megoldását, s ebből a felépítésből következtünk az egyenlet azonosan nulla megoldásának stabilitására.

A második módszer alkalmazásában bizonyos segédfüggvények játszanak alapvető szerepet. A jelen disszertációban alkalmazott módszerek Ljapunov második módszerének kiterjesztései eltolt argumentumú egyenletek esetére. Ezért a szakasz további részében definiáljuk a felhasznált segédfüggvények osztályát, majd kimondunk néhány, az eredetitől kissé eltérő módon megfogalmazott Ljapunov féle tételt.

Jelentse K (W.Mahn nyomán [10]) az R^+ -ot R^+ -ba képező szigorúan monoton növekvő, nullában nullát felvevő függvények osztályát. Azt mondjuk, hogy $V: R \times R^n \rightarrow R^+$ Ljapunov függvény, ha

(i) folytonos,

(ii) az $R \times (R^n \setminus \{0\})$ halmazon minden változója szerint folytonosan parciálisan differenciálható,

(iii) minden $t_0 \in R^+$ -hoz található olyan $b_{t_0} \in K$, hogy $V(t, x) \leq b_{t_0}(|x|)$, $t \in (-\infty, t_0]$, $x \in R^n$.

A V Ljapunov függvényt p -pozitív definitnek nevezünk, ha van olyan $a \in K$, hogy $a(|x|) \leq V(t, x)$, $t \in R^+$, $x \in R^n$ teljesül. A $p = E$ (E az egységmátrix) speciális esetben egyszerűen csak pozitív definitnek mondjuk.

Adott V Ljapunov függvényre definiáljuk a $\dot{V}: R^+ \times B_\rho \rightarrow R$ leképezést, az úgynevezett (2.1.1) egyenlet szerinti deriváltat

$$\dot{V}(t, \varphi) = \frac{\partial V}{\partial t}(t, \varphi(0)) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i}(t, \varphi(t)) F_i(t, \varphi)$$

formulával.

Nyilvánvaló a következő állítás (bizonyítását elhagyjuk):

V. Tétel. Legyen $x(t)$ (2.1.1) egy tetszőleges, (t_0, φ_0) -on átmenő megoldása, $x(t) \neq 0$, $t \in [t_1, t_2] \subset [t_0, \infty)$. Ha $P(t, x_t)$ mint t függvénye korlátos $[t_1, t_2]$ -n, akkor bármely V Ljapunov függvényre a $V(t, x(t))$ függvény abszolút folytonos, és

$$\frac{d}{dt} V(t, x(t)) = \dot{V}(t, x(t)), \quad t \in (t_1, t_2).$$

Ezek után kimondunk néhány, a Ljapunov féle második módszerben alapvető fontosságú tételt, amely közönséges differenciálegyenletek azonosan nulla megoldásának stabilitási tulajdonságairól szól.

VI. Tétel. (A.M.Ljapunov). Ha az adott differenciálegyenlet olyan, hogy lehet találni egy V Ljapunov függvényt a $\dot{V}(t, x) \leq 0$, $t \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}^n$ tulajdonsággal, akkor az azonosan nulla megoldás stabilis.

VII. Tétel (A.M.Ljapunov). Ha létezik egy olyan V Ljapunov függvény, amelyre $V(t, x) \leq b(|x|)$, $t \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}^n$, és $\dot{V}(t, x) \leq -c(|x|)$, $t \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}^n$ teljesül, ahol $b, c \in K$, akkor az azonosan nulla megoldás aszimptotikusan stabilis.

A következő tétel megfogalmazásához tekintsük az

$$(2.3.1) \quad \dot{y}(t) = A y(t)$$

és az

$$(2.3.2) \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + G(x(t))$$

egyenleteket, ahol A $n \times n$ típusú valós mátrix, $G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonos függvény, $G(0) = 0$.

VIII. Tétel (A.M. Liapunov). Ha (2.3.1) $y(t) \equiv 0$ megoldása aszimptotikusan stabilis és $|G(x)| \leq c|x|^2$, $x \in \mathbb{R}^n$ valamilyen $c > 0$ -ra, akkor a (2.3.2) egyenlet $x(t) \equiv 0$ megoldása is aszimptotikusan stabilis.

III. ELSŐ KÖZELÍTÉSBE VALÓ STABILITÁSI VIZSGÁLATOK

Ebben a fejezetben a (2.3) szakaszban harmadiknak kimondott Ljapunov tétel (VIII. Tétel) kiterjesztését adjuk meg az (1.1) egyenlet azonosan nulla megoldásának parciális stabilitására. Vizsgálataink közvetlen előménye G. Corduneanu [3] tétele, amely a következőképpen írható le.

Tegyük fel, hogy $P(t, \varphi) = L(t, \varphi) + G(t, \varphi)$, ahol $L, G: \mathbb{R}^+ \times C_h \rightarrow \mathbb{R}^n$, folytonosak, továbbá $L(t, \varphi)$ rögzített t -re korlátos, lineáris funkcionál C_h -n és $G(t, 0) \equiv 0$, azaz mind az

$$(3.1) \quad \dot{y}(t) = L(t, y_t) \quad ,$$

mind az

$$(3.2) \quad \dot{x}(t) = L(t, x_t) + G(t, x_t)$$

egyenlet véges retardálási.

I. Tétel (G. Corduneanu [3]). Ha a (3.1) egyenlet $y(t) \equiv 0$ megoldása exponenciálisan p -stabilis, azaz $|p y(t; t_0, \varphi_0)| \leq B e^{-\alpha(t-t_0)} \|\varphi_0\|$, $t_0 \in \mathbb{R}^+$, $\varphi_0 \in C_h$, $t \geq t_0$ teljesen valamilyen $B \geq 1$, $\alpha > 0$ konstansokkal; $|G(t, \varphi)| \leq g(t, \|\varphi\|_h)$, $t \in \mathbb{R}^+$, $\varphi \in C_h$,

ahol a $g: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ folytonos leképezés rögzített t -re a második változójában monoton nemcsökken, $g(t, 0) \equiv 0$, akkor az

$$(3.3) \quad \dot{u}(t) = -\alpha u(t) + g(t, u(t))$$

egyenlet $u(t) \equiv 0$ megoldásának bármilyen stabilitási tulajdonságából a (3.2) egyenlet sűrű megoldásának ugyanilyen p -stabilitási tulajdonsága következik.

C.Corduneanu nem jelzi, hogy milyen stabilitási tulajdonságokra gondol, valószínű, hogy a stabilis, egyenletesen stabilis, aszimptotikusan stabilis, egyenletesen aszimptotikusan stabilis és az exponenciálisan stabilis tulajdonságokat tartotta szem előtt. Megjegyezzük, hogy a (3.3) egyenlet $u(t) \equiv 0$ megoldásának aszimptotikus stabilitásából a (3.2) egyenlet $x(t) \equiv 0$ megoldásának ekvi-aszimptotikus stabilitása is következik.

Corduneanu fenti tételéből speciális esetként adódik a VIII. Tétel, mert ha a (2.3.1) egyenlet azonosan nulla megoldása aszimptotikusan stabilis, akkor exponenciálisan is stabilis, és az $\dot{u}(t) = -\alpha u(t) + C u^2(t)$ egyenlet $u(t) \equiv 0$ megoldása is (könnyen látható módon) bármely $\alpha, C' > 0$ mellett exponenciálisan stabilis.

Felmerül a kérdés, hogy C.Corduneanu tétele érvényes-e abban az esetben, amikor a (3.1) és (3.2) egyenletekről nem kútjuk ki, hogy véges retardálások. Az első szakaszban példán keresztül megmutatjuk, hogy az említett feltevés általában nem hagyható el. Megadható azonban Corduneanu tételének egy olyan

kiterjesztése, amely véges retardálási egyenletek esetén ekvivalens Corduneanu tételével. Ezt az általánosítást a 2. szakasz tartalmazza.

Az eddigiekből kitűnik, hogy az eredeti egyenlet megoldásai stabilitási tulajdonságainak vizsgálata visszavezethető a belőle linearizálással kapott egyszerűbb egyenlet azonosan nulla megoldása exponenciálisan p-stabilitására. A fejezet 3. szakaszában ezzel a kérdéskörrel foglalkozunk.

3.1. Példák C.Corduneanu egyik tételéhez

Tekintsük a skaláris

$$(3.1.1) \quad \dot{x}(t) = -x(t) + x^2(0)$$

egyenletet. Ez az egyenlet (2.1.1) típusú: legyen $F(t, \varphi) = -\varphi(0) + \varphi^2(-t)$. A fenti egyenlet lineáris része az $\dot{y}(t) = -y(t)$ egyenlet, amelynek $y(t) \equiv 0$ megoldása exponenciálisan stabilis. Az $R(t, \varphi) = \varphi^2(-t)$ függvényre $|G(t, \varphi)| \leq \|\varphi\|^2$ teljesül, s így C.Corduneanu tételében csak (3.1.1) véges retardáltsága nem teljesül. (3.1.1) $x(t) \equiv 0$ megoldása mégsem exponenciálisan stabilis, mert megoldásai - amiről egyszerű számolással meg lehet győződni - a következők:

$$x(t; t_0, \varphi_0) = \varphi^2(-t_0) + (\varphi(0) - \varphi^2(-t_0)) e^{-(t-t_0)}, \quad t \geq t_0$$

Ha $t \rightarrow \infty$, akkor $x(t; t_0, \varphi_0) \rightarrow \varphi^2(-t_0)$, azaz még a nullához tartás sem feltétlenül teljesül.

Vissgáljuk most az

$$(3.1.2) \quad \dot{x}(t) = -x(t) + \sigma(t)x^2(t)$$

egyenletet, ahol $\sigma(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$. Általában ennek az egyenletnek sem exponenciálisan stabilis a zéró megoldása (de egyenletesen aszimptotikusan stabilis, amint azt majd egy későbbi fejezetben belátjuk). Ugyanis 3.1.2 megoldásai $t \geq t_0$ -ra:

$$x(t; t_0, \varphi_0) = e^{-(t-t_0)} \varphi_0(0) + e^{-t} \int_{t_0}^t e^s \sigma(s) ds \varphi^2(-t_0).$$

Ahhoz tehát, hogy (3.1.2) exponenciálisan stabilis legyen, szükséges és elegendő, hogy

$$(3.1.3) \quad e^{-t} \left| \int_{t_0}^t e^s \sigma(s) ds \right| \leq B e^{-\alpha(t-t_0)}, \quad t \geq t_0$$

teljesüljön valamilyen pozitív α és B számokra.

Legyen most speciális esetben $\sigma(t)$ pozitív, monoton csökkenő. Ekkor (3.1.3) teljesüléséből

$$\sigma(t_0)(1 - e^{-(t-t_0)}) \leq B e^{-\alpha(t-t_0)}, \quad t \geq t_0$$

adódik, honnan ha $t=2t_0$ -t helyettesítjük és t_0 -t olyan nagyra választjuk, hogy $1 - e^{-t_0} \geq \frac{1}{2}$ teljesüljön, akkor $\sigma(t_0) \leq 2Be^{-\alpha t_0}$ adódik, azaz σ esükleésképpen exponenciális nagyságrendű.

Felmerül a kérdés, hogy végtelen retardálási egyenleteknél a jobboldal nemlineáris részének milyen becslése biztosíthatja, hogy a linearizált rendszer azonosan nulla megoldásának

exponenciális stabilitásából következzenek az eredeti egyenlet azonosan nulla megoldásának exponenciális stabilitása. A fenti példa azt sejteti, hogy a nemlineáris $G(t, \varphi)$ függvényre a $|G(t, \varphi)| \leq C \|e^{\beta \cdot} \varphi\| = C \sup_{s \in \mathbb{R}^+} \{ \|e^{\beta s} \varphi(s)\| \}$, (C konstans) becslés biztosítja az exponenciális stabilitást. A következő szakasz eredményei valóban igazolják majd ezt a sejtést.

3.2. Végtelen retardálási egyenletek vizsgálata első közelítésben

Ebben a szakaszban az

$$(3.2.1) \quad \dot{x}(t) = L(t, x_t) + R(t, x_t)$$

differentiálegyenlet $x(t) \equiv 0$ megoldásának stabilitási tulajdonságait vizsgáljuk a következő alapfeltevések mellett:

(i) $L(t, \varphi)$ rögzített t -re C_{00} -n értelmezett lineáris funkcionál,

(ii) $|L(t, \varphi)| \leq \ell(t) \|\varphi\|$, $t \in \mathbb{R}^+$, $\varphi \in C_{00}$, ahol $\ell: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ folytonos,

(iii) $L(t, \varphi_t)$ folytonos minden folytonos és korlátos $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvényre,

(iv) $R: \mathbb{R}^+ \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$, ahol $\mathcal{D} \subset C_{00}$ egy nyílt halmaz a $0 \in \mathcal{D}$ tulajdonsággal,

(v) $R(t, x_t)$ folytonos minden folytonos és korlátos

$x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvényre,

(vi) (3.2.1)-re lokális egzisztencia teljesül, s minden normában elég kicsi φ_0 esetén a (t_0, φ_0) -on átmenő $(t_0 \in \mathbb{R}^+)$ megoldásoknak létezik folytatása $(-\infty, \infty)$ -re.

Megjegyezzük, hogy az L-re tett feltevések a IV. tétel alapján biztosítják, hogy az

$$(3.2.2) \quad \dot{y}(t) = L(t, y_t)$$

egyenletre lokális egzisztencia és unicitás teljesül, valamint minden megoldásának létezik folytatása $(-\infty, \infty)$ -en.

1. Tétel. Tegyük fel, hogy

(i) a (3.2.2) egyenlet $y(t) \equiv 0$ megoldása exponenciálisan p-stabilis, azaz

$$|p y(t; t_0, \varphi_0)| \leq B \|\varphi_0\| e^{-\alpha(t-t_0)}, \quad t_0 \in \mathbb{R}^+, t \geq t_0, \varphi_0 \in C_\infty$$

teljesül, ahol $\alpha > 0$, $B \geq 1$ konstansok,

$$(ii) |R(t, \varphi)| \leq g(t, \|p e^{\beta \cdot} \varphi\|), \quad \varphi \in \mathcal{D}, t \in \mathbb{R}^+$$

ahol $g: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ folytonos, és a második változója szerint folytonosan differenciálható $g(t, 0) \equiv 0$, $e^{\beta \cdot} \in C_\infty$ pedig az $e^{\beta s}$, $s \in \mathbb{R}^+$ függvényt jelenti,

(iii) az $\dot{u}(t) = -\gamma u(t) + g(t, u(t))$ egyenlet $u(t) \equiv 0$ megoldása stabilis (ill. egyenletesen stabilis, aszimptotikusan stabilis, egyenletesen aszimptotikusan stabilis, exponenciálisan stabilis), ahol $\gamma = \min(\alpha, \beta)$,

Ekkor a (3.2.1) egyenlet $x(t) \equiv 0$ megoldása is p -stabilis (ill. rendre egyenletesen p -stabilis, equi-aszimptotikusan p -stabilis, egyenletesen aszimptotikusan p -stabilis, exponenciálisan p -stabilis).

Bizonyítás. Defináljunk egy $V: R^+ \times C_{\infty} \rightarrow R^+$ funkcionálsereget a $V(t, \varphi) = \sup_{\sigma \geq 0} \|e^{\beta \cdot} p y_{t+\sigma}(t, \varphi)\| e^{r\sigma}$ formulával. Mivel

$$\begin{aligned} \|e^{\beta \cdot} p y_{t+\sigma}(t, \varphi)\| e^{r\sigma} &= \sup_{s \in R^-} |e^{\beta s} p y(t+\sigma+s; t, \varphi)| e^{r\sigma} \leq \sup_{s \leq -\sigma} |e^{\beta s} p y(t+\sigma+s; t, \varphi)| e^{r\sigma} + \\ &+ \sup_{-\sigma \leq s \leq 0} |e^{\beta s} p y(t+\sigma+s; t, \varphi)| e^{r\sigma} \leq \sup_{s \leq -\sigma} |e^{\beta s} p \varphi(\sigma+s)| e^{r\sigma} + B \|\varphi\| e^{(r-\alpha)\sigma} \sup_{-\sigma \leq s \leq 0} e^{(\beta-\alpha)s} = \\ &= e^{(r-\beta)\sigma} \|\varphi\| + B \|\varphi\| e^{(r-\alpha)\sigma} \begin{cases} 1, & \text{ha } \beta-\alpha \geq 0 \\ e^{\alpha-\beta\sigma}, & \text{ha } \beta-\alpha < 0 \end{cases} \leq (1+B) \|\varphi\| \end{aligned}$$

bármely rögzített (t, φ) -re, $V(t, \varphi)$ létezik, és érvényes a

$$(3.2.3) \quad V(t, \varphi) \leq (1+B) \|\varphi\|$$

egyenlőtlenség. $V(t, \varphi)$ definíciójából rögtön adódik a

$$(3.2.4) \quad \|e^{\beta \cdot} p \varphi\| \leq V(t, \varphi)$$

egyenlőtlenség is.

Most be fogjuk bizonyítani, hogy

$$(3.2.5) \quad |V(t, \varphi) - V(t, \psi)| \leq (1+B) \|\varphi - \psi\|, \quad t \in R^+, \varphi, \psi \in C_{\infty}$$

is teljesül.

Mivel a (3.2.2) lineáris egyenlet $y(t; t_0, \varphi)$ megoldása φ -től lineárisan függ,

$$|V(t, \varphi) - V(t, \psi)| = \left| \sup_{\sigma \in R^+} \|e^{\beta \cdot} p y_{t+\sigma}(t, \varphi)\| e^{r\sigma} - \sup_{\sigma \in R^+} \|e^{\beta \cdot} p y_{t+\sigma}(t, \psi)\| e^{r\sigma} \right|$$

$$\begin{aligned}
 & - \sup_{\sigma \in \mathbb{R}^+} \| e^{\beta \cdot} p y_{t+\sigma}(t, \gamma) \| e^{\gamma \sigma} \mid \leq \\
 & \leq \sup_{\sigma \in \mathbb{R}^+} \| e^{\beta \cdot} p (y_{t+\sigma}(t, \varphi) - y_{t+\sigma}(t, \gamma)) \| e^{\gamma \sigma} = \\
 & = \sup_{\sigma \in \mathbb{R}^+} \| e^{\beta \cdot} p y_{t+\sigma}(t, \varphi - \gamma) \| e^{\gamma \sigma} = V(t, \varphi - \gamma) \leq (1 + \beta) \| \varphi - \gamma \|,
 \end{aligned}$$

azaz (3.2.5) valóban teljesül.

Adott $(t_0, \varphi_0) \in \mathbb{R}^+ \times C_\infty$ -re definiáljuk a

$$v(t) = V(t, y_0(t_0, \varphi_0)), \quad t \geq t_0$$

függvényt. Be fogjuk bizonyítani, hogy $v(t)$ folytonos és

$$(3.2.6) \quad D^+ v(t) \leq -\gamma v(t), \quad t_0 \leq t < \infty.$$

(Itt D^+ a Dini-féle jobboldali felső deriváltszámot jelenti.)

A (3.2.2) egyenlet megoldásainak unicitásából azonnal adódik az $y_{t_2}(t_1, y_{t_1}(t_0, \varphi_0)) = y_{t_2}(t_0, \varphi_0)$, $(t_2 \geq t_1 \geq t_0)$ formula, amelynek felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 v(t+h) &= \sup_{\sigma \in \mathbb{R}^+} \| e^{\beta \cdot} p y_{t+h+\sigma}(t+h, y_{t+h}(t_0, \varphi_0)) \| e^{\gamma \sigma} = \\
 &= \sup_{\sigma \in \mathbb{R}^+} \| e^{\beta \cdot} p y_{t+h+\sigma}(t_0, \varphi_0) \| e^{\gamma \sigma} = \sup_{\sigma \geq h} \| e^{\beta \cdot} p y_{t+\sigma}(t_0, \varphi_0) \| e^{\gamma(\sigma-h)} \\
 &\text{Ezen előállítás szerint } v(t) \text{ folytonossága } \| e^{\beta \cdot} y_{t+\sigma}(t_0, \varphi_0) \| \text{ folyto-} \\
 &\text{szerinti folytonosságából következik. } \| e^{\beta \cdot} y_{t+\sigma}(t_0, \varphi_0) \| \text{ folyto-} \\
 &\text{nosságának belátásához rögzítsünk egy tetszőleges } \varepsilon > 0 \text{ számot,}
 \end{aligned}$$

vezessük be a $M = \|y_{t+\sigma+1}(t_0, \varphi_0)\|$ jelölést, és válasszuk meg az A pozitív számot úgy, hogy $2e^{-\beta A} M \leq \varepsilon/2$ teljesüljön. Az $y(\tau; t_0, \varphi_0)$ függvény egyenletesen folytonos a $[t+\sigma-A-1, t+\sigma+1]$ intervallumon, tehát van olyan $\delta_0 > 0$, hogy ha τ', τ'' elemei ennek az intervallumnak és $|\tau' - \tau''| < \delta_0$, akkor $|y(\tau'; t_0, \varphi_0) - y(\tau''; t_0, \varphi_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Legyen $\delta = \min(\delta_0, 1)$. Így ha $|\sigma^* - \sigma| \leq \delta$, akkor

$$\begin{aligned} & \left| \|e^{\beta \cdot} y_{t+\sigma}(t_0, \varphi_0)\| - \|e^{\beta \cdot} y_{t+\sigma^*}(t_0, \varphi_0)\| \right| \leq \\ & \leq \|e^{\beta \cdot} (y_{t+\sigma}(t_0, \varphi_0) - y_{t+\sigma^*}(t_0, \varphi_0))\| \leq \\ & \leq \sup_{s \leq -A} e^{\beta A} |y(t+\sigma+s; t_0, \varphi_0) - y(t+\sigma^*+s; t_0, \varphi_0)| + \\ & + \sup_{-A \leq s \leq 0} |y(t+\sigma+s; t_0, \varphi_0) - y(t+\sigma^*+s; t_0, \varphi_0)| \leq \\ & \leq e^{-\beta A} \cdot 2M + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon. \text{ Ezzel } \|e^{\beta \cdot} y_{t+\sigma}(t_0, \varphi_0)\|, \text{ s egyidejűleg } v(t) \\ & \text{folytonosságát beláttuk.} \end{aligned}$$

$v(t+h)$ fenti előállítása szerint $h > 0$ -ra

$$v(t+h) \leq \sup_{\sigma \geq 0} \|e^{\beta \cdot} y_{t+\sigma}(t_0, \varphi_0)\| e^{\gamma \sigma} e^{-\gamma h} = e^{-\gamma h} v(t),$$

adódik, amelyből

$$\frac{v(t+h) - v(t)}{h} \leq \frac{e^{-\gamma h} - 1}{h} v(t).$$

Innen határátmenet segítségével (3.2.6) következik.

Legyen $\varrho > 0$ olyan, hogy $B_\varrho = \{\varphi \in C_\infty : \|\varphi\| < \varrho\} \subset \mathcal{D}$ teljesüljön és $\varphi_0 \in B_\varrho$ mellett a (t_0, φ_0) -on átmenő megoldások folytathatók $(-\infty, \infty)$ -re $x(t)$ jelentsen (3.2.1)-nek egy olyan nemfolytatható megoldását, amelyre $x_{t_0} = \varphi_0$ adott $(t_0, \varphi_0) \in \mathbb{R}^+ \times B_\varrho$ mellett, s definiáljuk a

$$w(t) = v(t, x_0), t \geq t_0$$

függvényt. Erről a $w(t)$ függvényről először bebizonyítjuk, hogy jobbról folytonos és

$$(3.2.7) \quad D^+w(t) \leq -\gamma w(t) + g(t, w(t)), \quad t \geq t_0$$

teljesül.

Ugyanis $h > 0$ -ra

$$\begin{aligned} w(t+h) - w(t) &= V(t+h, x_{t+h}) - V(t+h, y_{t+h}(t, x_t)) + \\ &+ V(t+h, y_{t+h}(t, x_t)) - V(t, x_t). \end{aligned}$$

(3.2.5) felhasználásával

$$\begin{aligned} |V(t+h, x_{t+h}) - V(t+h, y_{t+h}(t, x_t))| &\leq B \|x_{t+h} - y_{t+h}(t, x_t)\| = \\ &= B \sup_{0 \leq s \leq h} |x(t+s) - y(t+s; t, x_t)|. \end{aligned}$$

Ebből a becslésből, valamint a $V(\tau, y_\tau(t, x_t))$ függvénynek a $\tau = t$ helyen való τ szerinti jobbról való folytonosságából $w(t)$ jobbról való folytonossága adódik.

A (3.2.1) és a (3.2.2) egyenletek integrálásával

$$x(t+s) = x(t) + \int_t^{t+s} (L(s, x_s) + G(s, x_s)) ds$$

és

$$y(t+s; t, x_0) = x(t) + \int_t^{t+s} L(s, y_s(t, x_0)) ds$$

adódik, melyekből $0 \leq s \leq h$ ($h > 0$, konstans) mellett

$$|x(t+s) - y(t+s; t, x_0)| \leq \int_t^{t+h} L(s, x_s - y_s(t, x_0)) ds + \int_t^{t+h} |G(s, x_s)| ds$$

Innen a tétel feltételeinek felhasználásával:

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \sup_{0 \leq s \leq h} \frac{1}{h} |x(t+s) - y(t+s; t, x_0)| \leq$$

$$\leq |L(t, x_0 - y_0(t, x_0))| + |G(t, x_0)| = |G(t, x_0)| \leq$$

$$g(t, \|e^{\beta \cdot} p x_t\|).$$

Igy (3.2.4) és (3.2.6) figyelembe vételével $w(t+h) - w(t)$ fenti előállításból (3.2.7) következik.

Szükségünk lesz $w(t)$ folytonosságára is. Az eddigiek figyelembe vételével ehhez $w(t)$ balról való folytonosságát elég belátnunk. Most ennek igazolására térünk át.

Legyen $h > 0$, elég kicsi. Ekkor

$$|w(t-h) - w(t)| \leq |V(t-h, x_{t-h}) - V(t, y_t(t-h, x_{t-h}))| +$$

$$+ |V(t, y_t(t-h, x_{t-h})) - V(t, x_t)|.$$

Hasonlóan, mint a jobbról való folytonosság bizonyításakor, belátható, hogy

$$|V(t, x_{t-h}) - V(t, x_t)| \leq \sup_{-h \leq s \leq 0} |x(t+s) - y(t+s; t-h, x_{t-h})|.$$

Ugyanúgy, mint véges retardálódó egyenletek esetén bebizonyítható, hogy tetszőleges $-h \leq s \leq 0$, $(t_0, \varphi_0) \in \mathbb{R}^+ \times C$ -re

$$(3.2.8) \quad \|y_t(t_0, \varphi_0)\| \leq \|\varphi_0\| \exp \int_{t_0}^t l(s) ds$$

teljesül. Ennek és a (3.2.2) egyenlet integrálásával nyert

$$y(t+s; t-h, x_{t-h}) = x(t-h) + \int_{t-h}^{t+s} L(s, y_s(t-h, x_{t-h})) ds$$

kifejezés segítségével

$$\begin{aligned} \sup_{-h \leq s \leq 0} |x(t+s) - y(t+s; t-h, x_{t-h})| &\leq \sup_{-h \leq s \leq 0} |x(t-h) - x(t+s)| + \\ &+ \int_{t-h}^t l(s) \|x_{t-h}\| \exp \left(\int_{t-h}^s l(z) dz \right) ds \end{aligned}$$

következik, amelyből $\lim_{h \rightarrow 0+} |V(t, y_t(t-h, x_{t-h})) - V(t, x_t)| = 0$ adódik. $w(t)$ balról való folytonosságához így elég belátni, hogy

$$\Lambda(h) \stackrel{\text{def}}{=} |V(t-h, x_{t-h}) - V(t, y_t(t-h, x_{t-h}))| \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0+.$$

Ismét a jobbról való folytonosság bizonyításához hasonlóan:

$$V(t, y_t(t-h, x_{t-h})) = \sup_{\sigma \geq h} \| e^{\beta \cdot} p y_{t-h+\sigma}(t-h, x_{t-h}) \| e^{\gamma \sigma} e^{-\gamma h}$$

Innen

$$A(h) = V(t-h, x_{t-h}) - V(t, y_t(t-h, x_{t-h})).$$

Adott $h > 0$ -ra két eset lehetséges

$$1) \quad V(t-h, x_{t-h}) = \sup_{\sigma \geq h} \| e^{\beta \cdot} p y_{t-h+\sigma}(t-h, x_{t-h}) \| e^{\gamma \sigma},$$

$$2) \quad V(t-h, x_{t-h}) = \sup_{0 \leq \sigma \leq h} \| e^{\beta \cdot} p y_{t-h+\sigma}(t-h, x_{t-h}) \| e^{\gamma \sigma}$$

Ha 1) teljesül, akkor (3.2.3) felhasználásával

$$A(h) = V(t-h, x_{t-h})(1 - e^{-\gamma h}) \leq (1+B) \| x_{t-h} \| (1 - e^{-\gamma h}),$$

vagyis $A(h)$ kicsi, ha h kicsi.

A 2) esetben használjuk fel a

$$V(t, y_t(t-h, x_{t-h})) \geq \| e^{\beta \cdot} p y_t(t-h, x_{t-h}) \|^{\cdot}$$

egyenlőtlenséget. Ezzel

$$A(h) \leq \sup_{0 \leq \sigma \leq h} \| e^{\beta \cdot} p y_{t-h+\sigma}(t-h, x_{t-h}) \| e^{\gamma \sigma} -$$

$$= \| e^{\beta \cdot} p y_t(t-h, x_{t-h}) \|^{\cdot}$$

Igy elég belátni, hogy ha $h \rightarrow 0$, akkor

$$\sup_{0 \leq \sigma \leq h} \| e^{\beta^* \rho} y_{t-h+\sigma}(t-h, x_{t-h}) \| \rightarrow \| e^{\beta^* \rho} x_t \|$$

és

$$\| e^{\beta^* \rho} y_t(t-h, x_{t-h}) \| \rightarrow \| e^{\beta^* \rho} x_t \|.$$

Ezek közül csak az első relációt bizonyítjuk, a másik analóg módon adódik.

Ha $\sigma + s \geq 0$, akkor

$$y(t-h+\sigma+s; t-h, x_{t-h}) = x(t-h) + \int_{t-h}^{t-h+\sigma+s} L(s, y_s(t-h, x_{t-h})) ds,$$

s így (3.2.3) újbóli felhasználásával:

$$\begin{aligned} & \left| \| e^{\beta^* \rho} y_{t-h+\sigma}(t-h, x_{t-h}) \| - \| e^{\beta^* \rho} x_t \| \right| \leq \\ & \leq \| e^{\beta^* \rho} (y_{t-h+\sigma}(t-h, x_{t-h}) - x_t) \| = \\ & = \max \left\{ \max_{-\sigma \leq s \leq 0} |x(t-h) - x(t+s)| + \int_{t-h}^t l(s) \| x_{t-h} \| \exp \int_{t-h}^{\sigma+s} l(v) dv ds, \right. \\ & \left. \sup_{s \leq -\sigma} |e^{\beta^* \rho} (x(t-h+\sigma+s) - x(t+s))| \right\}. \end{aligned}$$

Ezek után elég annyit belátni, hogy

$$\sup_{0 \leq \sigma \leq h} \sup_{s \leq -\sigma} |e^{\beta^* \rho} (x(t-h+\sigma+s) - x(t+s))| \rightarrow 0, \text{ ha } h \rightarrow 0.$$

Es hasonlóan látható be, mint a $\|e^{\beta \cdot} y_{t_0, \delta}(t_0, \varphi_0)\|$ függvény δ -szerinti folytonossága, ezért elhagyjuk.

Ezzel $w(t)$ folytonosságát beláttuk.

Összefoglalva, azt nyertük, hogy $w(t)$ egy olyan folytonos függvény, amelyre

$$|p x(t)| \leq w(t),$$

$$w(t_0) \leq (1+B) \|\varphi_0\|,$$

és

$$D^+ w(t) \leq -\gamma w(t) + g(t, w(t))$$

teljesül. Ezen tulajdonságok felhasználásával tételünk állítása Sz.A. Csapligin tételéből következik, mely a következőképpen fogalmazható:

II. Tétel (Sz.A. Csapligin [5]). Legyen y egyetlen megoldása az $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$ egyenletnek, ahol $f: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos leképezés. Ha z egy olyan folytonos függvény, amelyre

$$z(t_0) \leq y(t_0)$$

és

$$D^+ z(t) \leq f(t, z(t)) \quad , \quad t \geq t_0$$

teljesül, akkor $z(t) \leq y(t)$, $t \geq t_0$.

Ugyanis, ha $u_0 \geq (1+B)\|\varphi_0\|$ akkor az idézett tételből

$$|p x(t)| \leq u(t; t_0, u_0) \quad , \quad t \geq t_0$$

következik, ahol $u(t_0, u_0)$ -on átmenő megoldása az $\dot{u}(t) = -\gamma u(t) + g(t, u(t))$ egyenletnek. Innen a tétel állítása a stabilitási tulajdonságok definíciójából közvetlenül adódik.

3.3. Egy autonóm differenciálegyenlet parciális stabilitásáról

Ebben a szakaszban az

$$(3.3.1) \quad \dot{x}(t) = L(x_t)$$

differenciálegyenlet p -stabilitási tulajdonságait vizsgáljuk, ahol $L: C_h \rightarrow C^m$ korlátos, lineáris funkcionál ($h > 0$), $p: R^n \rightarrow R^n$ vetítési operátor. A (3.3.1) egyenleten elvégezve egy alkalmas $x \rightarrow Tx$ transzformációt (ahol T ortogonális mátrix) feltehető, hogy $p = \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ahol E_k a $k \times k$ típusú egységmátrixot jelöli.

A Riesz féle reprezentációs tétel [27] szerint található olyan $n \times n$ típusú, a $[-h, 0]$ intervallumon korlátos változású $\eta(s)$ mátrix függvény, hogy

$$L(\varphi) = \int_{-h}^0 [d\eta(s)] \varphi(s).$$

Hegyenlítünk néhány olyan, a (3.4.1) egyenletre ismert eredményt, amelyet a továbbiakban használni fogunk.

A (2.1) szakasz IV. Tételéből rögtön adódik, hogy a (3.3.1) egyenletre lokális egzisztencia és unicitás teljesül, továbbá minden megoldása folytatható $(-\infty, \infty)$ -ra. Könnyen látható az is, hogy az egyenlet $x(t; t_0, \varphi_0)$ megoldásai folytonosan és lineárisan függenek φ_0 -tól, valamint $x(t; t_0, \varphi_0) = x(t - t_0, 0, \varphi_0)$ teljesül.

Vezessük be a $H(z) = zE - \int_{-\infty}^0 e^{z\sigma} d\eta(\sigma)$ és a $h(z) = \det H(z)$ jelöléseket.

III. Tétel (A.D. Miskisz [20]). Van olyan c valós szám, hogy $h(\lambda)$ minden zérushelyére $\operatorname{Re} \lambda \leq c$ teljesül.

IV. Tétel (V.I. Zubov [37]). $h(\lambda)$ -nak csak véges számú zérushelye teljesíti az $a \leq \operatorname{Re} \lambda \leq b$ összefüggést, ahol $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

V. Tétel (V.I. Zubov [37]). $h(\lambda)$ bármely $\hat{\lambda}$ zérushelyéhez hozzárendelhető (3.3.1) megoldásainak egy $S_{\hat{\lambda}}$ lineáris altére, nevezetesen ha G_{λ} egy olyan λ körüli körvonalat jelöl, a komplex síkon, amely nem megy át $h(\lambda)$ egyetlen zérushelyén sem és belsőjében $\hat{\lambda}$ -n kívül $h(\lambda)$ -nak nincs zérushelye, akkor $S_{\hat{\lambda}}$ azon függvények halmaza, amelyek $\frac{1}{2\pi i} \int_{G_{\hat{\lambda}}} e^{\sigma t} H^{-1}(\sigma) P(\sigma) d\sigma$, $t \in \mathbb{R}$ alakban állnak elő, ahol P tetszőleges, a komplex síkon értelmezett egész függvény (komponensei egészek).

VI. Tétel (A.D. Miskisz [20]). $S_{\lambda}(h(\lambda)=0)$ elemei $e^{\lambda t} P(t)$ alakú függvények, ahol $P(t)$ polinom.

Jelölje a továbbiakban $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ $h(\lambda)$ pozitív valós részesű zérushelyeit, $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_q$ pedig a zérus valós részesűket (minden más zérushelye negatív valós részesű). γ legyen egy olyan pozitív konstans, amelyre $\operatorname{Re} \lambda \leq -\gamma$ teljesül, akármilyen negatív

valós részű zérushelye is λ $h(\lambda)$ -nak.

VII. Tétel (A.D.Miskisz [20]). Minden φ_0 kezdőfüggvényhez van olyan $c > 0$ és vannak olyan $y_i \in S_i$, $i=1, \dots, q$ függvények, hogy elég nagy t -re érvényes az

$$\left| x(t, 0, \varphi_0) - \sum_{i=1}^q y_i(t) \right| \leq ce^{-rt}$$

egyenlőtlenség.

A most bizonyításra kerülő tétel a (3.3.1) egyenlet azonosan nulla megoldásának p -stabilitási fogalmai és a megoldások korlátossága között teremt kapcsolatot.

2. Tétel. A (3.3.1) egyenlet azonosan nulla megoldása akkor és csak akkor

1) egyenletesen p -stabilis, ha az $S_1 \oplus \dots \oplus S_q$ direct összeg elemeinek első k komponensei zérusok és $S_{p+1} \oplus \dots \oplus S_q$ elemeinek első k komponensei korlátosak $[0, \infty)$ -en.

2) exponenciálisan p -stabilis, ha $S_1 \oplus \dots \oplus S_q$ elemeinek első k komponensei zérusok.

Bizonyítás. 1) Tegyük fel, hogy (3.3.1) azonosan nulla megoldása egyenletesen p -stabilis. Ekkor $\varepsilon=1$ -hez található olyan $\delta > 0$, hogy $\varphi_0 \in \mathcal{C}_h$, $\|\varphi_0\|_h \leq \delta$ esetén $|px(t; t_0, \varphi_0)| \leq 1, t \geq t_0$.

Ezért tetszőleges $\varphi_0 \in \mathcal{C}_h$ -re, amennyiben $\varphi_0 \neq 0$,

$$\left| px(t; t_0, \varphi_0) \frac{\delta}{\|\varphi_0\|_h} \right| = \left| px(t; t_0, \frac{\delta \varphi_0}{\|\varphi_0\|_h}) \right| \leq 1 \text{ teljesül, amelyből}$$

$$|x_i(t; t_0, \varphi_0)| \leq |px(t; t_0, \varphi_0)| \leq \frac{\|\varphi_0\|_h}{\delta}, \quad t \geq t_0, \quad i=1, \dots, k$$

következik. Mivel az x_i megoldások folytonosak, S_{λ_i} , $i=1, \dots, q$ elemeknek folytonossága tüstént következik. A VI. tétel szerint $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$ esetén S_{λ_i} elemeknek komponensei csak úgy lehetnek korlátosak, ha zérusok. Ez éppen 1) feltételeinek szükségességét jelenti.

Másképp a VII. tétel felhasználásával azt nyerjük, hogy tetszőleges $\varphi_0 \in \mathcal{U}_h$ -ra

$$(3.3.2) \quad |p x(t; 0, \varphi_0)| \leq e^{-\gamma t} + \left| \sum_{i=1}^q p y_i(t) \right|, \quad t \in \mathbb{R}^+$$

Ha 1) feltételei teljesülnek, akkor a fenti összefüggés biztosítja, hogy $|p x(t; 0, \varphi_0)|$ korlátos $\mathbb{R}^+$ -on. Mivel $x(t; 0, \varphi_0)$ komponensei rögzített t -re $\mathcal{U}_h$ -et $\mathcal{C}^1$ -be képező korlátos, lineáris funkcionálok, ezért a Banach-Steinhaus tétel felhasználásával azt kapjuk, hogy létezik olyan M konstans, hogy $|p x(t; 0, \varphi_0)| \leq M \|\varphi_0\|_h$, $t \in \mathbb{R}^+$ teljesül. A már említett $x(t-t_0; 0, \varphi_0) = x(t; t_0, \varphi_0)$, $t \geq t_0$ összefüggés következtében $|p x(t; t_0, \varphi_0)| \leq M \|\varphi_0\|_h$ is teljesül, ami az egyenletes p -stabilitást jelenti.

2) A tétel második állításának szükséges része hasonlóan látható, mint 1) feltételeinek szükségessége. Ha pedig 2) feltételeinek teljesülését tételezzük fel, akkor 1) alkalmazásával (3.3.1) nulla megoldásának egyenletes p -stabilitása adódik. Mivel most még $|p y_i(t)| \equiv 0$, $i=1, \dots, q$ is teljesül, (3.3.2) felhasználásával a $|p x(t; t_0, \varphi_0)| \leq e^{-\delta(t-t_0)}$, $t \geq t_0$ egyenlőtlenséget nyerjük.

Ha az $x(t; 0, \varphi_0)e^{\gamma t}$ függvény komponenseire ismét alkalmazzuk a Banach-Steinhaus tételt, egy olyan t_0 és φ_0 -tól független $B > 0$

konstans létezését kapjuk, amellyel $|p\kappa(t; t_0, \varphi_0)| e^{\gamma(t-t_0)} \leq B \|\varphi_0\|_h$
 $t \geq t_0$ teljesül. Ez az egyenlőtlenség ekvivalens az exponenciális
 p -stabilitással.

Így a tétel bizonyítását befejeztük.

A fenti tétel következménye, hogy a (3.3.1) egyenlet zéró
 megoldása egyidejűleg egyenletesen p -stabilis, p -stabilis, ill.
 0-ban p -stabilis, egyidejűleg aszimptotikusan p -stabilis, equi-
 -aszimptotikusan p -stabilis, egyenletesen aszimptotikusan p -sta-
 bilis, exponenciálisan p -stabilis. Ez a tétel azonban nem ad
 gyakorlati eljárást a stabilitási tulajdonságok eldöntésére. Egy
 gyakorlati eljárás az V. tétel alapján lenne lehetséges, úgy,
 hogy S_{λ_1} elemeit az $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} e^{\sigma t} H^{-1}(\sigma) F(\sigma) d\sigma$ függvény felhasz-
 nálásával előállítjuk ($i=1, \dots, q$). Ehhez a $H^{-1}(\sigma)$ mátrix λ_1 kö-
 rüli Laurent sorát kellene kiszámítani, ami nagy dimenziószám
 esetén kényelmetlen feladat. A jelen szakasz további részéből
 kiderül, hogy S_{λ_1} ismerete nélkül is meg lehet választani a sta-
 bilitásról szóló kérdést, aminek $H(\sigma)$ λ_1 körüli sorát, és egy
 ebből konstruált mátrix rangját kell megállapítani. A következő
 tétellel közelebb jutunk a probléma megoldásához, megmutatjuk,
 hogy S_{λ} elemeinek kiszámítása közönséges (lineáris) differen-
 ciálegyenletek integrálására vezethető vissza. A továbbiakban
 E_j, O_j a j dimenziós egység, ill. zéró mátrixot jelöli.

3. Tétel. Ha λ n -szeres zérushelye $h(s)$ -nek, és

$$H(s) = H_0 + H_1(s-\lambda) + H_2(s-\lambda)^2 + \dots, \text{ akkor}$$

1) az $(m+1)n \times (m+1)n$ típusú

$$M_{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda E_n & E_n & 0_n & \dots & 0_n \\ 0_n & \lambda E_n & E_n & \dots & 0_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0_n & 0_n & 0_n & \dots & E_n \\ -H_0 & -H_1 & -H_2 & \dots & -H_m + \lambda E_n \end{pmatrix}$$

mátrixnak λ m -szeres sajátértéke, és

2) $f(t) \in S_{\lambda}$ akkor és csak akkor teljesül, ha a $T(f(t), f'(t), \dots, f^{(m)}(t))$ vektor $e^{\lambda t} p(t)$ alakú megoldása az $\dot{x}(t) = M_{\lambda} x(t)$ differenciálegyenletnek.

Bizonyítás. 1) Legyen $K(z) = H_0 + H_1(z-\lambda) + \dots + H_m(z-\lambda)^m + E_n(z-\lambda)^{m+1}$ és $g(z) = \det K(z)$. Könnyen látható, hogy $g(z) = \det(-M_{\lambda} + zE_n)$ és $g^{(i)}(\lambda) = h^{(i)}(\lambda)$, $i=0,1,\dots,m$, amelyből 1) azonnal adódik.

2) Vegyük először észre, hogy a $K^{-1}(z)h(z)$ és a $K^{-1}(z)g(z)$ mátrixok hatványsoraiban a $(z-\lambda)^i$, $i=0,\dots,m$ hatványok együtthatói megegyeznek. Így a residuumtétel alkalmazásával a következő összefüggéshez jutunk:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\lambda}} e^{\sigma t} K^{-1}(\sigma) P(\sigma) d\sigma &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\lambda}} e^{\sigma t} K^{-1}(\sigma) \frac{g(\sigma)}{h(\sigma)} P(\sigma) d\sigma = \\ &= e^{\lambda t} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} e^{\sigma t} K^{-1}(\sigma+\lambda) \frac{g(\sigma+\lambda)}{h(\sigma+\lambda)} P(\sigma+\lambda) d\sigma, \end{aligned}$$

ahol Γ_0 a Γ_{λ} kör λ -val való eltolása. Ebből az összefüggésből

látható, hogy $e^{-\lambda t} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\lambda} e^{st} H^{-1}(s) F(s) ds$ megoldása az

$$x^{(m+1)}(t) + H_m x^{(m)}(t) + \dots + H_1 x'(t) + H_0 x(t) = 0$$

$(x(t) \in \mathcal{C}^n)$ differenciálegyenletnek. A fenti egyenlet és az $\dot{x}(t) = (M_\lambda - \lambda E_{n(m+1)})x(t)$, $(x(t) \in \mathcal{C}^{n(m+1)})$ egyenlet ekvivalenciáját, valamint az $\exp((M_\lambda - \lambda E_{n(m+1)})t) = e^{-\lambda t} \exp(M_\lambda t)$ összefüggést felhasználva 2) adódik. Ezt akartuk bizonyítani.

Megjegyezzük, hogy a fenti tételnek egyszerű következménye B.W.Levinger [16] tétele, amely szerint S_λ dimenziója megegyezik λ multiplicitásával.

A következő tétel kimondása előtt bevezetünk egy jelölést. Legyen A egy $\nu \times \nu$ típusú mátrix, amelynek egy μ szám α -szoros sajátértéke. β jelölje az A mátrix minimálpolinomjában a $(s-\mu)$ tényező kitevőjét. Képezzük az $A=(a_{ij})$ mátrixból a μ sajátérték segítségével a következő mátrixokat:

$$A_1 = (a_{ij}), \quad i=1, \dots, k; \quad j=k+1, \dots, \nu,$$

$$A_2 = (a_{ij}), \quad i, j=k+1, \dots, \nu \quad \text{és}$$

$$A_3 = ({}^T A_1, {}^T A_2, {}^T A_1, \dots, ({}^T A_2) {}^T A_1^\alpha, {}^T (A_2 - \mu E_n)^\beta).$$

Az A_3 mátrix rangját jelölje $R(A, \mu)$.

4. Tétel. Ha $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ jelöli $h(s)$ pozitív valós részű, $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_q$ pedig a nulla valós részű zérushelyeit rendre az $m_1, \dots, m_q$ multiplicitásokkal, továbbá az $M_{\lambda_{p+1}}, \dots, M_{\lambda_q}$ mátrixok minimálpolinomjában $S_{p+1}, \dots, S_q$ jelöli a $s-\lambda_{p+1}, \dots, s-\lambda_q$ tényezők kitevőit, akkor a (3.3.1) egyenlet azonosan nulla meg-

oldásának.

1) exponenciális p -stabilitásához szükséges és elegendő, hogy

$$(3.3.3) \quad R(M_{\lambda_1}, \lambda_1) = (n-1)m_1 + n - k$$

teljesüljön $i=1, \dots, q$ -ra,

2) egyenletes p -stabilitásához (3.3.3) teljesülése szükséges $i=1, \dots, p$ -re,

3) egyenletes p -stabilitásához elegendő, hogy $i=1, \dots, p$ -re (3.3.3), $i=p+1, \dots, q$ -ra pedig vagy (3.3.3) vagy $\vartheta_1=1$ álljon.

A tétel bizonyítása során felhasználjuk a következő tételt.

VIII. Tétel (A.V. Lucenko és L.V. Sztednyikova [18]). Az

$\dot{x}(t) = Ax(t)$ egyenlet $e^{\mu t} p(t)$ ($p(t)$ polinom) alakú megoldásai első k komponense akkor és csak akkor nulla, ha $R(A, \mu) = \nu - k - \alpha$, ahol μ a $\nu \times \nu$ típusú A mátrix α -szoros sajátértéke.

A 4. Tétel bizonyítása. 1) A 2. Tétel szerint (3.3.1) nulla megoldásának p -stabilitásához $S_{\lambda_1}, i=1, \dots, q$ elemeinek első k komponensei zérus volta szükséges és $\dot{x}(t) = M_{\lambda_1} x(t)$ differenciálegyenlet $e^{\lambda_1 t} p(t)$, ($p(t)$ polinom) alakú megoldásaira is, ami a VIII. Tétel szerint (3.3.3)-val egyidejűleg áll.

2) A tétel második részének bizonyítása hasonlóan történik, mint 1) bizonyítása.

3) $\vartheta_1 = 1$ az $\dot{x}(t) = M_{\lambda_1} x(t)$ differenciálegyenlet $e^{\lambda_1 t} p(t)$ ($p(t)$ polinom) alakú megoldásainak korlátosságát jelenti (lásd pl. [7]). Ha valamelyik i -re ($1 \leq i \leq q$) (3.3.3) teljesül, akkor az említett $e^{\lambda_1 t} p(t)$ alakú függvények első k komponensei zérusok.



Igy a 2. Tétel biztosítja (3.3.1) sérus megoldásának egyenletes p -stabilitását.

Az ismerttetett tétel jól alkalmazható néhány speciális esetben. Az egyik ilyen eset az $\dot{x}(t) = A x(t-\tau)$ egyenlet. Ha ismerjük az A mátrix karakterisztikus egyenletét és minimálpolinomját, egyszerű eszközökkel eldönthető egyenletünk nulla megoldásának p -stabilis, vagy aszimptotikusan p -stabilis tulajdonsága. Az említett egyenletre való alkalmazás megtalálható a [31] dolgozatban. Hasonlóan tárgyalható az $\dot{x}(t) = A x(t) + B x(t-\tau)$ egyenlet is, ha található olyan f és g polinom, valamint olyan G mátrix, hogy $A = f(G)$ és $B = g(G)$ teljesül.

3.4. Példák

1) Tekintsük az

$$(3.4.1) \quad \dot{x}(t) = A(t)x(t) + \int_0^t K(t,s,x(s))ds$$

integro-differenciálegyenletet, ahol $A(t)$ $n \times n$ típusú folytonos mátrix függvény, K folytonos az $R^+ \times R^+ \times R^n$ halmazon. A 2.1 szakasz II. Tétele szerint erre az egyenletre lokális egzisztencia teljesül. Tegyük fel azt is, hogy (3.4.1) minden megoldásának létezik egy folytatása $(-\infty, \infty)$ -on.

5. Tétel. Ha az $\dot{y}(t) = A(t)y(t)$ egyenlet $y(t) \equiv 0$ megoldása exponenciálisan p -stabilis és léteznek olyan $\beta > 0$, $\mu > 0$, $\varrho > 0$

konstansok, hogy

$$(3.4.2) \quad \left| \int_0^t K(t,s,x(s))ds \right| \leq \mu e^{-\beta t} \sup_{0 \leq s \leq t} |px(s)|$$

bármely, a $[0, t]$ szakaszon folytonos, a $|px(s)| \leq \varepsilon$ egyenlőtlenséget kielégítő $x(s)$ függvényre, akkor elég kicsi μ értékekre (3.4.1) $x(t) \equiv 0$ megoldása exponenciálisan stabilis.

Bizonyítás. Vezessük be a $G(t, \varphi) = \int_{-t}^0 K(t, t+s, \varphi(s))ds$, $\varphi \in C$ jelölést. Ezzel a (3.4.1) egyenlet az $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + G(t, x_t)$ alakba írható. A (3.4.2) egyenlőtlenség biztosítja, hogy

$G(t, \varphi) \leq \mu e^{-\beta t} \sup_{-t \leq s \leq 0} |p \varphi(s)|$ teljesüljön. Mivel $\sup_{-t \leq s \leq 0} |p \varphi(s)| \leq \sup_{-t \leq s \leq 0} e^{\beta s} |p \varphi(s)| \sup_{-t \leq s \leq 0} e^{-\beta s} \leq \|e^{\beta \cdot} p \varphi\| e^{\beta t}$, tételünk állítása következik abból a tényből, hogy az $\dot{u}(t) = -\gamma u(t) + \mu u(t)$ egyenlet rögzített γ -ra, elég kicsi μ mellett exponenciálisan stabilis (az 1. Tétel alkalmazható).

2) Egy másik, az előzőnél egyszerűbb példaként tekintünk a bevezetésben említett

$$(3.4.3) \quad \dot{x}(t) = (a - bx(t-\tau))x(t)$$

egyenletet. Erre érvényes a következő állítás:

6. Tétel. Ha $a < 0$, akkor (3.4.3) nulla megoldása exponenciálisan stabilis.

Bizonyítás. A 2.1 szakasz III. Tétele egyenletünk esetén lok. egzisztenciát és unicitást biztosít. Ha $a < 0$, akkor az 1. Tételből, figyelembe véve, hogy az $\dot{u}(t) = a u(t) - bu^2(t)$ egyenlet bármely b mellett exponenciálisan stabilis, következik a (3.4.3) egyenlet zéró megoldásának exponenciális stabilitása.

IV. STABILITÁSI VIZSGÁLATOK LJAPUNOV FÜGGVÉNYEK SEGÍTSÉGÉVEL

Ebben a szakaszban a 2.3 szakasz VI. és VII. Tételének néhány kiterjesztését adjuk meg a (2.1.1) egyenletre. Véges és lokálisan véges retardálási egyenletek azonos nulla megoldásának különböző stabilitási tulajdonságainak vizsgálatára a VI. és VII. Tételeket két különböző módon terjesztették ki. Az egyik módszer Kraszovaskijtól [14] ered, aki véges retardálási egyenletek $e^{R^+} \times C_h$ -n értelmezett funkcionálok segítségével nyert eredményeket. A másik módszert Razumikhin-Ljapunov módszernek szokás említeni az irodalomban, mert ezen elmélet első alapos feldolgozója B.SZ. Razumikhin [26] volt, s Ljapunov függvények segítségével kapott stabilitási tételeket.

A jelen fejezet vizsgálatai az utóbb említett módszerhez kapcsolódnak, s ezért ismertetjük ezen elmélet eddig elért főbb eredményeit.

I. Tétel (B.SZ. Razumikhin [26]). Ha (2.1.1) véges retardálási és létezik egy pozitív definit V függvény úgy, hogy

$$(4.1) \quad \dot{V}(t, \varphi) \leq 0$$

a $\{(t, \varphi) : V(t+s, \varphi(s)) \leq V(t, \varphi(0)), s \in [-h, 0]\}$ halmazon, akkor (2.1.1) azonosan nulla megoldása stabilis.

II. Tétel (H.H. Kraszovaskij [14]). Ha (2.1.1) véges

retardálási és létezik egy olyan pozitív definit V függvény, amelyhez van olyan $b \in \mathbb{R}$, hogy

$$(4.2) \quad V(t, x) \leq b(|x|), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

teljesül, továbbá

$$\dot{V}(t, \varphi) \leq -c(|\varphi(0)|),$$

a

$$(4.3) \quad \{(t, \varphi) : V(t+s, \varphi(s)) \leq f(V(t, \varphi(0))), \quad s \in [-h, 0]\}$$

halmazon, ahol $c, f \in \mathbb{R}$ és $f(s) > s$ $s > 0$ -ra, akkor (2.1.1) azonosan nulla megoldása aszimptotikusan stabilis.

A II. Tétellel kapcsolatban R. Driver [6] bebizonyította, hogy a feltételekből az azonosan nulla megoldás egyenletesen aszimptotikus stabilitása is következik.

G. Seifert speciális logálisan véges retardálási egyenletek azonosan nulla megoldásának stabilitásáról nyert egy eredményt.

III. Tétel (G. Seifert [29]). Ha létezik olyan V pozitív definit Ljapunov függvény, amelyre teljesül a (4.2) egyenlőtlenség, továbbá (4.1) a (4.3) halmazon, akkor (2.1.1) azonosan nulla megoldása a 0-ban stabilis.

A fenti tételek egyenletek széles osztályára alkalmazhatók. Az alkalmazhatóság szempontjából szóba jövő egyenleteknek azonosban közös tulajdonsága, hogy a "retardált rész" mellett egy

"közös részt" is tartalmaznak, s az egyenlet közös része a domináns a retardált részhez viszonyítva. Például az $\dot{x}(t) = a x(t-\tau)$, $\tau > 0$ egyenlet esetén alkalmazhatatlan az I-III. Tétel, az $\dot{x}(t) = -a x(t) + b x(t-\tau)$ egyenletre pedig csak az $|b| \leq a$ feltétel mellett sikerült azokat alkalmazni. 1969-ben Z. Nikolajcska [19] - az I. Tétel bizonyításának finomításával - egy olyan eredményt bizonyított, amely könnyen alkalmazható az említett $\dot{x}(t) = a x(t-\tau)$ egyenletre is. Tételle skaláris egyenletekre a következőképpen fogalmazható:

Legyen adott az

$$\dot{x}(t) = g(t, x(t), x(t-\tau))$$

egyenlet, ahol τ pozitív konstans, $g: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, folytonos és $g(t, 0, 0) \equiv 0$, $t \in \mathbb{R}^+$.

IV. Tétel (Z. Nikolajcska [19]). Tegyük fel, hogy létezik egy $\omega: [-\tau, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény, és egy $0 < \alpha < 1$ konstans a következő tulajdonságokkal:

- (I) $|\omega(t, x)|$ pozitív definit,
- (II) $x\omega(t, x) > 0$, ha $x \neq 0$ és $t \in [-\tau, \infty)$,
- (III) $\varphi(0)\dot{\omega}(t, \varphi) < 0$ azon $(t, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times C_\tau$ értékekre amelyekre

$$\alpha \varphi(0)\omega(t, \varphi(0)) \leq \varphi(0)\omega(t-\tau, \varphi(-\tau)) < \varphi(0)\omega(t, \varphi(0)).$$

Vessünk be az $M(t, r) = \max_{\varphi \in Z_+(t, r)} \dot{\omega}(t, \varphi)$ és $m(t, r) = \min_{\varphi \in Z_-(t, r)} \dot{\omega}(t, \varphi)$ jelöléseket, ahol

$$Z_+(t, r) = \{ \varphi \in C_\tau : \alpha r \leq \omega(t, \varphi(0)) \leq r, |\omega(t-h, \varphi(-h))| \leq r \}$$

$$Z_-(t, r) = \{ \varphi \in C_\tau : -r \leq \omega(t, \varphi(0)) \leq -\alpha r, |\omega(t-h, \varphi(-h))| \leq r \}.$$

Tegyük még fel, hogy

$$\int_{t+h}^t m(s, r) ds < (1-\alpha)r, \text{ ha } t \in \mathbb{R}^+, r > 0, h \in [-\tau, 0],$$

$$\int_{t+h}^t m(s, r) ds > (\alpha-1)r, \text{ ha } t \in \mathbb{R}^+, r > 0, h \in [-\tau, 0].$$

is teljesül. Ekkor a fenti egyenlet azonosan nulla megoldása a 0-ban stabilis.

Hasonlítsuk össze a fenti tételek közül a stabilitásról szólókat (I, II és IV.). Észre lehet venni, hogy

1) a III. Tétel a (4.1) összefüggést bővebb halmazon követeli meg, mint az I. Tétel,

2) a III. és IV. Tétel csak 0-ban való stabilitást állít,

3) a IV. Tétel a (4.1)-nek megfelelő $\dot{\omega}(t, \varphi) < 0$ egyenlőtlenségben kisebb jelet használ, míg (4.1)-ben kisebb, vagy egyenlő szerepel.

A jelen fejezetben megmutatjuk, hogy a felsorolt tulajdonságok javíthatók, s egyetlen közös tételbe foglalhatók össze, sőt parciális stabilitás vizsgálatára is alkalmazhatók. Az egyszerűség kedvéért csak Ljapunov függvényekre szorítkozunk. Tételeink kiterjesztése előjelváltó függvényekre megtalálható a [32] dolgozatban. Ugyancsak megadjuk a II. Tétel kiterjesztését is végtelen retardálási egyenletekre. Ezzel kapcsolatban

eddig még csak egy negatív példa található az irodalomban.

Nevezetesen G. Seifert [29] mutatott egy lokálisan véges re-tartálási egyenletet, amelyhez található a II. Tételt kielégítő V Ljapunov függvény ((4.3)-ban $[-h, 0]$ helyett $(-\infty, 0]$ kell érteni), és az egyenlet azonosan nulla megoldása nem asszimptotikusan stabilis. Egy ilyen egyenlet az előző fejezet (3.1) szakaszában ismertetett $\dot{x}(t) = -x(t) + x^2(0)$ is. Ott láttuk, hogy ennek az egyenletnek nem asszimptotikusan stabilis az $x(t) \equiv 0$ megoldása.

Tekintsük a $V(t, x) = \frac{x^2}{2}$ Ljapunov függvényt és legyen $f(s) = qs$, ahol $q > 1$.

Erre a függvényre $\dot{V}(t, \varphi) = -\varphi^2(0) + \varphi(0) \varphi^2(-t)$, s így $\dot{V}(t, \varphi) \leq -\varphi^2(0) + |\varphi(0)| q \varphi^2(0) \leq 0$, ha $\frac{\varphi^2(-t)}{2} \leq q \frac{\varphi^2(0)}{2}$ és $\varphi \in C_{1/q}$, azaz a II. Tétel feltételei teljesülnek.

Bebizonyított tételünkből azonban majd következik, hogy az ugyancsak 3.1 szakaszban említett $\dot{x}(t) = -x(t) + \sigma(t)x^2(0)$ egyenlet $x(t) \equiv 0$ megoldása a $\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t) = 0$ feltétel mellett már egyenletesen asszimptotikusan stabilis.

A fejezet eredményei a (2.1.1) egyenletre vonatkoznak. Az egész fejezet folyamán a következő alapfeltevésekkel élünk:

(i) (2.1.1)-re lokális egzisztencia teljesül,

(ii) van olyan $\delta > 0$, hogy bármely $t_0 \in \mathbb{R}^+$, $\varphi_0 \in C_\infty$ -ra a (t_0, φ_0) -on átmenő megoldások folytathatók $(-\infty, \infty)$ -re,

(iii) $F(t, 0) \equiv 0$, $t \in \mathbb{R}^+$.

4.1 Z. Nikolajskaja módszerének kiterjesztése aszimptotikus stabilitás vizsgálatára

Ebben a szakaszban először megadjuk egy kiterjesztését a IV. Tételnek, majd a bizonyítás finomításával ekvi-aszimptotikus stabilitásról nyerünk egy eredményt. Tételünk kimondása előtt be kell vezetni néhány fogalmat.

Legyen $p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vetítési operátor. Legyen adott egy p -pozitív definit V Ljapunov függvény, $\alpha, \beta \in K$ az $\alpha(r) < \beta(r) \leq r$, $r > 0$ tulajdonságokkal, valamint $f: \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ úgy, hogy

- (i) $f(0, \sigma) \leq \sigma$, $\sigma \in \mathbb{R}^+$,
- (ii) $f(s, \sigma)$ rögzített σ -ra s -ben monoton nemcsökkenő.

Adott $r > 0$, $t \in \mathbb{R}^+$ és $\bar{t} \in \mathbb{R}^+$, $\bar{t} \leq t$ -re definiáljuk a

$$Z(t, \bar{t}, r) = \left\{ \varphi \in B_r : \alpha(r) \leq V(t+s, \varphi(s)) \leq r, s \in [\bar{t}-t, 0]; \right. \\ \left. f(s, V(t+s, \varphi(s))) \leq r, s \in \mathbb{R}^- \right\}$$

halmast és legyen

$$z(t, \bar{t}, r) = \sup \left\{ V(t, \varphi) : \varphi \in Z(t, \bar{t}, r) \right\}.$$

Legyen még adott egy $h: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ függvény a $h(t) \leq t$ tulajdonsággal és definiáljuk a

$$N(t) = \bigcup_{r>0} (Z(t, h(t), r) \cap \{\varphi \in B_r : V(t, \varphi(0)) = \beta(r)\})$$

halmazt.

1. Tétel. Tegyük fel, hogy léteznek a V, α, β, f, h függvények a fenti tulajdonságokkal. Ekkor, ha a $\{(t, \varphi) \in R^+ \times C_\infty : h(t) > 0, \varphi \in N(t)\}$ halmazon

$$(4.1.1) \quad \dot{V}(t, \varphi) \leq 0,$$

teljesül, továbbá bármely $r > 0, t \in R^+, \tau \in (h(t), t]$ -re $z(s, \tau, r)$ s szerint integrálható és

$$(4.1.2) \quad \int_{\tau}^t z(s, \tau, r) ds < \beta(r) - \alpha(r),$$

akkor (2.1.1) $x(t) \equiv 0$ megoldása p -stabilis.

Ebből a tételből a $h(t) = t$ és a $f(s, \sigma) = \sigma$ választással közvetlenül adódik, hogy az I. Tétel érvényes végtelen retardálási egyenletekre is (amely tény a III. Tétel kiterjesztése).

A tétel bizonyítása során felhasználunk néhány lemmát.

1. Lemma. Ha $v(t)$ folytonos $[a, b]$ -n, differenciálható (a, b) -n és $v(t_1) < v(t_2)$, akkor van olyan $t^* \in (a, b)$, hogy

$$v(t) < v(t^*), \quad t \in [a, t^*)$$

és $\dot{v}(t^*) > 0$. (Sőt az ilyen t^* -ok halmaza pozitív mértékű.)

Bizonyítás. Tekintsünk egy olyan $f(t)$ lineáris függvényt, amelyre $f'(t) = c > 0, f(t_1) > v(t_1), f(t_2) < v(t_2)$. Legyen t^* az

utolsó olyan pont, amelyre $v(t) \leq f(t)$, $t \in [a, t^*]$. Es a t^* teljesíti az 1. Lemma követelményeit.

Tekintsük (2.1.1) egy (t_0, φ_0) -on átmenő nemfolytatható $x(t)$ megoldását, ahol $\varphi_0 \in B_\varphi$. Vesszük be a $v(t) = V(t, x(t; t_0, \varphi_0))$ jelölést.

2. Lemma. Tegyük fel, hogy az 1. Tétel feltételei teljesülnek. Ha valamilyen r és t_1 -re ($0 < r < \alpha(\varphi)$, $t_1 \in [t_0, \infty)$)

$$f(s, v(t_1 + s)) \leq r, \quad s \in \mathbb{R}^+$$

és $v(t_1) \leq \alpha(r)$ teljesül, akkor $v(t) \leq \beta(r)$, $t \in [t_1, \infty)$.

Bizonyítás. Tegyük fel állításunkkal ellentétben, hogy a $Q = \{t: v(t) > \beta(r), t \in [t_1, \infty)\}$ halmaz nemüres. Legyen $t_3 = \inf Q$. Ekkor $v(t_3) = \beta(r)$. Válasszunk Q -nak egy tetszőleges t_5 elemét. Az első lemma biztosítja, hogy van olyan $t_4 \in (t_3, t_5)$ amelyre $\dot{v}(t_4) > 0$ és $v(t) < v(t_4)$, $t \in [t_3, t_4)$ teljesül. Legyen $r' = \beta^{-1}(v(t_4))$. t_3 választása értelmében $v(t_1) \leq \alpha(r) < \alpha(r')$ és $v(t) \leq \beta(r) < \beta(r')$, $t \in [t_1, t_3]$. Így van olyan $t_2 \in (t_1, t_4)$, amelyre $v(t_2) = \alpha(r')$ és

$$(4.1.3) \quad \alpha(r') < v(t) < \beta(r'), \quad t \in (t_2, t_4).$$

Most megmutatjuk, hogy bármely $t \in [t_1, t_4]$ -re

$$(4.1.4) \quad f(s, v(t + s)) < r', \quad s \in \mathbb{R}^+$$

Ugyanis, ha $s \in (t_1 - t, 0)$ akkor $v(t + s) < \beta(r')$ és így

$f(s, v(t+s)) \leq v(t+s) < \beta(r^*) \leq r^*$. Ha $s \in (-\infty, t_1 - t)$, akkor f monotonitását és a lemma feltételét használva $f(s, v(t+s)) = f((s+t-t_1) + t_1 - t, v(t+s)) \leq f(s+t-t_1, v((s+t-t_1) + t_1)) \leq r < r^*$.

Most bebizonyítjuk, hogy

$$(4.1.5) \quad h(t_4) \geq t_2 (> 0)$$

is teljesül.

Ha ez nem lenne így, (4.1.3) és (4.1.4) szerint $x_\tau \in Z(t_2, r^*)$, $\tau \in [t_2, t_4]$ is teljesülne, melyből $\dot{v}(\tau) \leq z(\tau, t_2, r^*)$ következne. Innen (4.1.2) felhasználásával a

$$\beta(r^*) - \alpha(r^*) = v(t_4) - v(t_2) = \int_{t_2}^{t_4} \dot{v}(\tau) d\tau \leq \int_{t_2}^{t_4} z(\tau, t_2, r^*) d\tau < \beta(r^*) - \alpha(r^*)$$

ellentmondáshoz jutunk.

Igy tehát (4.1.3), (4.1.4), (4.1.5) és r^* definíciója szerint $x_{t_4} \in z(t_4, h(t_4), r^*) \subset N(t_4)$, vagyis (4.1.1) felhasználásával $\dot{v}(t_4) = \dot{v}(t_4, x_{t_4}) \leq 0$, ami ellentmond t_4 definíciójának. Ezzel a 2. Lemmát beláttuk.

2.1. Tétel bizonyítása. Adott $0 < \varepsilon < \rho$ és $t_0 \in \mathbb{R}^+$ -re definiáljuk a $\delta(\varepsilon, t_0) = b_{t_0}^{-1}(\beta^{-1}(a(\varepsilon)))$ mennyiséget. Itt b_{t_0} a Ljapunov függvény definíciójában α, β a tétel feltételeiben szereplő függvények, $a \in K$ pedig olyan, hogy $a(|px|) \leq V(t, x)$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Be fogjuk bizonyítani, hogy ha $t_0 \in \mathbb{R}^+$ és $\varphi_0 \in \bar{B}_{\delta(\varepsilon, t_0)}$, akkor a (t_0, φ_0) -on átmenő $x(t)$ megoldásokra

$$(4.1.6) \quad |p x(t)| \leq \varepsilon, \quad t \geq t_0$$

teljesül. Ugyanis $v(t_0) = V(t_0, x(t_0)) = V(t_0, \varphi(0)) \leq \alpha(\beta^{-1}(a(\varepsilon)))$.
Használjuk most a 2. Lemmát $t_1 = t_0$ és $r = \beta^{-1}(a(\varepsilon))$ -val. Azt
kapjuk, hogy

$$(4.1.7) \quad v(t) = V(t, x(t)) \leq a(\varepsilon), \quad t \in [t_0, \infty).$$

Innen $\underline{V}$ p -pozitív definittségét felhasználva (4.1.6) adódik, amelynek közvetlen következménye (2.1.1) $x(t) \equiv 0$ megoldásának stabilitása.

Most az $x(t) \equiv 0$ megoldás ekvi-asszimptotikus p -stabilitásáról mondunk ki egy állítást.

2. Tétel. Tegyük fel, hogy az 1. Tétel feltételei teljesülnek, s tegyük fel, hogy minden $r > 0$ -ra $\lim_{s \rightarrow -\infty} (\sup_{0 \leq \sigma \leq r} f(s, \sigma)) = 0$ és $\beta(r) < r$ teljesül, valamint minden $0 < r < a(0)$ és $t_0 \in \mathbb{R}^+$ -ra van olyan $[T_1(t_0, r), T_2(t_0, r)] \subset (t_0, \infty)$ intervallum, hogy $z(s, t_0, r)$ s szerint integrálható $[T_1(t_0, r), T_2(t_0, r)]$ -en és

$$(4.1.8) \quad \int_{T_1(t_0, r)}^{T_2(t_0, r)} z(s, t_0, r) ds \leq \alpha(r) - r.$$

Ekkor (2.1.1) $x(t) \equiv 0$ megoldása ekvi-asszimptotikusan p -stabilis.

A tétel bizonyítása előtt ismét egy lemmát mutatunk meg.
Legyen $v(t)$ ugyanúgy definiálva, mint fentebb, azaz

$v(t) = V(t, x(t))$, ahol $x(t)$ egy adott $(t_0, \varphi_0) \in \mathbb{R}^+ \times B_\varphi$ -ra egy (t_0, φ_0) -on átmenő megoldást jelöl.

3. Lemma. Tegyük fel, hogy teljesülnek a 2. Tétel feltételei. Bármely $0 < r < a(\varphi)$ és $t_1 \in [t_0, \infty)$ -re, ha

$$f(s, v(t_1 + s)) \leq r, \quad s \in \mathbb{R}^+$$

és $v(t) \leq r, t \in [t_1, \infty)$, akkor létezik olyan $t_2 \in [t_1, T_2(t_1, r)]$, amelyre $v(t_2) \leq \alpha(r)$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy állításunk nem igaz valamilyen $0 < r$ és $t_1 \in [t_0, \infty)$ -re. Ekkor $\alpha(r) < v(t) \leq r, t \in [t_1, T_2(t_1, r)]$.

(4.1.4) bizonyításához analóg módon észköködve könnyű látni, hogy bármely $t \in [t_1, T_2(t_1, r)]$ esetén $f(s, v(t + s)) \leq r, s \in \mathbb{R}^+$. Tehát $x_t \in Z(t, t_1, r), t \in [t_1, T_2(t_1, r)]$. (4.1.8) értelmében így az $\alpha(r) < v(T_2(t_1, r)) = v(T_1(t_1, r)) +$

$$+ \int_{T_1(t_1, r)}^{T_2(t_1, r)} v(t) dt \leq r + \int_{T_1(t_1, r)}^{T_2(t_1, r)} Z(t, t_1, r) dt \leq r + \alpha(r) - r = \alpha(r)$$

ellentmondáshoz jutunk. Állításunk valóban teljesül.

A 2. Tétel bizonyítása.

Mivel az $x(t) \equiv 0$ megoldás stabilis tulajdonságát az 1. Tétel biztosítja és V p -pozitív definit, az ekvi-asszimptotikus p -stabilitás tényéhez elegendő bebizonyítani, hogy létezik egy $\{e_1\}$ és egy $\{\tau_1\}$ sorozat úgy, hogy $e_1 \rightarrow 0, 1 \rightarrow \infty$, valamint

$$(4.1.9) \quad v(t) \leq e_1, \quad t \in [\tau_1, \infty)$$

teljesül $i=1,2,\dots$ -re.

Ilyen $\{s_i\}$ és $\{\tau_i\}$ sorozat a következő módon konstruálható.

Legyen $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ tetszőlegesen adott. Definíáljuk $\{s_i\}$ -t rekursív módon $s_0 = \alpha(\varepsilon')$ és $s_i = \beta(s_{i-1})$, $i=1,2,\dots$ -val. Mivel $\beta \in K$, és $\beta(r) < r$, $r > 0$, könnyen látható, hogy $s_i \rightarrow 0$, $i \rightarrow \infty$ teljesül.

$\{\tau_i\}$ megkonstruálásához először egy pozitív $H(r)$ mennyiséget definíáljunk úgy, hogy $\sup_{0 \leq \sigma \leq \alpha(\varepsilon')} f(s, \sigma) \leq r$, $s \in (-\infty, -H(r))$ teljesüljön. Legyen $\tau_0 = t_0$ és $\tau_i = T_2(\tau_{i-1} + H(s_{i-1}), s_{i-1})$, $i=1,2,\dots$. (4.1.9)-et teljes indukcióval bizonyítjuk. $i=0$ -ra érvényessége a (4.1.7) formulából következik $\varepsilon = \varepsilon'$ -vel. Tegyük fel, hogy (4.1.9) teljesül $i=0,1,\dots,j-1$ -re ($1 \leq j$). Be fogjuk bizonyítani, hogy $i=j$ -re is igaz lesz.

Alkalmassuk először a 3. Lemmát $r = s_{j-1}$ és $t_1 = \tau_{j-1} + H(s_{j-1})$ -vel. A 3. Lemma feltételei teljesülnek, mert ha $s \in (-H(s_{j-1}), 0]$, akkor

$$f(s, v(\tau_{j-1} + H(s_{j-1}) + s)) \leq v(\tau_{j-1} + H(s_{j-1}) + s) \leq s_{j-1},$$

ha pedig $s \in (-\infty, -H(s_{j-1}))$, akkor $H(s_{j-1})$ definíciója szerint $f(s, v(\tau_{j-1} + H(s_{j-1}) + s)) \leq s_{j-1}$. Így kapunk egy $t_2 \in [\tau_{j-1} + H(s_{j-1}), T_2(\tau_{j-1} + H(s_{j-1}), s_{j-1})]$ mennyiséget, amelyre $v(t_2) \leq \alpha(s_{j-1})$. A 2. Lemma ($r = s_{j-1}$, $t_1 = t_2$) biztosítja, hogy $v(t) \leq \beta(s_{j-1}) = s_j$, $t \in [t_2, \infty)$. Mivel $t_2 \leq T_2(\tau_{j-1} + H(s_{j-1}), s_{j-1}) = \tau_j$, azt nyerjük, hogy (2.5) érvényes $i=j$ -re, s így minden $i=0,1,\dots$ -re is.

Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

As 1. és 2. Tétel bizonyításának nyilvánvaló módosításával beláthatók a következő eredmények is.

3. Tétel. Ha teljesülnek az 1. Tétel feltételei, és van olyan $b \in K$, amellyel

$$(4.1.10) \quad V(t, x) \leq b(|x|), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

teljesül, akkor (2.1.1) $x(t) \equiv 0$ megoldása egyenletesen p -stabilis.

4. Tétel. Tegyük fel, hogy az 3. Tétel feltételei teljesülnek, s minden $r > 0$ -ra $\beta(r) > r$ és $\lim_{s \rightarrow -\infty} (\sup_{0 \leq \sigma \leq r} f(s, \sigma)) = 0$ teljesül, valamint minden $0 < r < a(p)$ -hoz létezik olyan $T(r)$ pozitív valós szám és minden $t \in \mathbb{R}^+$ -ra olyan $I(t, r) \subset [t, t + T(r)]$ intervallum, hogy $\int_{I(t, r)} z(s, t, r) ds \leq \alpha(r) - r$.

Ekkor (2.1.1) $x(t) \equiv 0$ megoldása egyenletesen aszimptotikusan p -stabilis.

4.2. N.H. Krasovszkii tételének általánosítása végtelen retardálási egyenletekre.

Most a 4. Tétel következményeként bebizonyítjuk a következő tételt:

5. Tétel. Tegyük fel, hogy létezik egy p -pozitív definit V Lyapunov függvény, $b, c \in K$ és egy folytonos $\hat{f} : \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ függvény úgy, hogy: $\hat{f}(s, \sigma) < \sigma$, $\sigma > 0$, $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} (\sup_{|s| \leq r} \hat{f}(s, \sigma)) = 0$, $\hat{f}(s, \sigma)$ rögzített σ -ra s -ben monoton nemcsökkenő, $\hat{f}(0, \sigma)$ monoton nemcsökkenő, $V(t, x) \leq b(|x|)$, $x \in \mathbb{R}^n$ és $\dot{V}(t, \varphi) \leq -c(V(t, x))$ a

$$(4.2.1) \quad \{(t, \varphi) : \hat{f}(s, V(t+s, \varphi(s))) < V(t, \varphi(0)), s \in \mathbb{R}^-\}$$

halmazon. Ekkor (2.1.1) $x(t) \equiv 0$ megoldása egyenletesen aszimptotikusan stabilis.

Könnyű látni, hogy az 5. Tételből következik a II., hiszen ha $g(s)$ egy olyan szigorúan monoton növekvő függvény, amelyre $s < g(s) \leq f(s)$ teljesül és $\hat{f}(s, \sigma)$

$$\hat{f}(s, \sigma) = \begin{cases} f(\sigma), & s \in [-h, 0] \\ f(\sigma)e^{s+h}, & s \in (-\infty, -h) \end{cases}$$

-val van definiálva, akkor a (4.3) halmaz bővebb a (4.2.1)-nél, azaz II feltételeinek teljesüléséből 5. feltételeinek teljesülése ($p = \text{identitás}$) következik.

Véges retardálási egyenletek esetén az 5. Tétel nem állít többet a II. Tételnél, vagyis II. és 5. ekvivalens állítások.

Ugyanis, ha az 5. Tétel feltételei teljesülnek, akkor legyen $f(\sigma)$ az $f^{-1}(\sigma) = \hat{f}(0, \sigma)$ összefüggéssel definiálva. Ezzel a választással a (4.3) halmaz szűkebb (4.2.1)-nél.

5. Tétel bizonyítása. Legyen $\alpha(r) = \hat{f}(0, r)$. Definiáljunk egy $g : R^- \times R^+ \rightarrow R^+$ függvényt $\hat{f}(s, \sigma) = \hat{f}(0, g(s, \sigma))$ -val és legyen $f(s, \sigma) = \min(\sigma, g(s, \sigma))$. $\beta \in K$ -t válasszuk úgy, hogy teljesítse az $\alpha(r) < \beta(r) < r$ összefüggést. A $h(t)$ függvényt definiáljuk azonosan nullának. Könnyű látni, hogy ezek a függvények teljesítik a 4. Tételben kirótt követelményeket.

Ha $\varphi \in Z(t, \bar{t}, r)$, akkor $\alpha(r) = \hat{f}(0, r) \leq V(t, \varphi(0))$ és $\min(V(t+s, \varphi(s)), g(s, V(t+s, \varphi(s)))) \leq r$, $s \in R^-$. Az utóbbi feltételből rögzített $s \in R^-$ -ra két eset adódik:

- 1) $V(t+s, \varphi(s)) \leq r$,
- 2) $g(s, V(t+s, \varphi(s))) \leq r$.

Az első esetben: $\hat{f}(s, V(t+s, \varphi(s))) \leq \hat{f}(0, V(t+s, \varphi(s))) \leq \hat{f}(0, r) \leq V(t, \varphi(0))$, a hasonlóan a másodikban

$$\hat{f}(s, V(t+s, \varphi(s))) = \hat{f}(0, g(s, V(t+s, \varphi(s)))) \leq \hat{f}(0, r) \leq V(t, \varphi(0)).$$

Igy azt kaptuk, hogy $Z(t, \bar{t}, r)$ szűkebb a (4.2.1) halmaznál, melyből $z(t, \bar{t}, r) \leq -C(\alpha(r))$ adódik. Ezzel az 5. Tétel evidens módon következik a 4. Tételből.

4.3. Egy aszimptotikus (de nem egyenletes) stabilitás biztosító tétel.

Az előző szakaszban bebizonyított tételek lehetőséget adnak, hogy stabilitást biztosító feltételeket kapjunk a (2.1.1) egyenletre. Az 5. Tétel egy olyan p -pozitív definit V Ljapunov függvény megszerkesztését kívánja meg, hogy bizonyos (t, φ) értékekre $\dot{V}(t, \varphi) \leq -c(V(t, \varphi(0)))$ teljesüljön. Ebben a szakaszban egy olyan tételt ismertetünk, amely alkalmazásakor a $\dot{V}(t, \varphi)$ mennyiséget $V(t, \varphi(0))$ helyett $|p\varphi(0)|$ -val is elég felülről becsülni.

A tétel kimondása előtt bevezetünk még egy jelölést.

Adott $\nu > 0$ számra legyen $M(t, t_0) = \{ \varphi \in C_\infty : \text{található olyan } \varphi_0 \in B_\nu \text{ és olyan } (t_0, \varphi_0)\text{-on átmenő } x(t) \text{ megoldás, amelyre } x_{t_0} = \varphi_0 \text{ teljesül.} \}$

6. Tétel. Tegyük fel, hogy létezik egy p -pozitív definit V Ljapunov függvény, olyan $C: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f: \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ leképezések, hogy

(i) $\dot{V}(t, \varphi) \leq -c(t, |p\varphi(0)|)$ a
 $H = \{ (t, \varphi) : f(s, V(t+s, \varphi(s))) \leq V(t, \varphi(0)), s \in \mathbb{R}^-, \varphi \in B_\varphi \}$
 halmazon,

(ii) $c(t, x) \geq 0, t \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^+$,

(iii) $c(t, x)$ rögzített t -re x -ben monoton növekvő,

(iv) $\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{[0, t] \cap B} \int_0^t c(s, r) ds = \infty$ minden $r > 0$ konstansra

és minden ∞ mértékű, egymásba nem nyúló B intervallumrendszerre,

(v) $f(s, v) < v, v > 0, s \in \mathbb{R}^-$,

(vi) $\lim_{s \rightarrow -\infty} \sup_{0 \leq v \leq v_0} f(s, v) = 0$, minden rögzített t_0 -ra.

Tegyük fel, hogy van olyan $\nu \leq \rho$, hogy minden $t_0 \in \mathbb{R}^+$ -ra található olyan lokálisan integrálható γ_{t_0} függvény amelyre teljesülnek a következők:

$$(vii) \quad \sup \{ |pF(t, \varphi)| : \varphi \in M_\nu(t; t_0) \} \leq \gamma_{t_0}(t),$$

(viii) $\int \gamma_{t_0}(s) ds < \infty$, akármilyen egymásba nem nyúló véges mértékű intervallumrendszerét is jelenti $B [t_0, \infty)$ -nak.

Ekkor a (2.1.1) egyenlet $x(t) \equiv 0$ megoldása aszimptotikusan p -stabilis.

Eddigi tételeinkkel összehasonlítva a fenti tételt egy lényeges különbség található, nevezetesen az előző két szakasz tételeiben nem követeltük meg (2.1.1) jobboldalának semmiféle korlátossági tulajdonságát. Ez azonban most szükséges. Erre a tényre B.Sz. Oziraner és V.V. Rumjancev [22] mutatott rá közönséges differenciálegyenletek esetén. Ugyancsak az ő dolgozatukban szerepel a 6. Tétel alábbi következménye:

Következmény: Ha (2.1.1) közönséges differenciálegyenlet és létezik egy olyan p -pozitív definit V Ljapunov függvény, $c \in K$, amelyekre

$$V(t, x) \leq -c(|px|), \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

továbbá léteznek olyan pozitív ν és L konstansok, hogy

$$\sup \{ |pF(t, x)| : x \in M_\nu(t; t_0) \} \leq L, \quad t_0 \in \mathbb{R}^+, \quad t \in [t_0, \infty)$$

akkor az $x(t) \equiv 0$ megoldás aszimptotikusan p -stabilis.

Azt a tényt, hogy a fenti következményben (és közönséges differenciálegyenletekre vonatkozó általánosításaiban) az L konstans helyett függvény is szerepelhet, Dr. Hatvani László [11] vette észre.

A 6. Tétel bizonyítása. Az $x(t) \equiv 0$ megoldás stabilitása az 1. Tételből (az utána tett megjegyzésből) rögtön adódik, sőt

$$(4.3.1) \quad v(t) = V(t, x(t)) \leq b_{t_0}(\|\varphi_0\|), \quad t \geq t_0$$

is következik, ahol $x(t)$ (t_0, φ_0) -on átmenő tetszőleges nemfolytatható megoldás, $b_{t_0} \in K$ pedig a Ljapunov függvény definíciójában adott.

Be kell még látni, hogy $p \cdot x(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$. Tegyük fel, hogy ez nincs így. Ekkor $p \cdot x(t)$ valamelyik $x^*(t)$ komponensére

$$(4.3.2) \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} |x^*(t)| = 3\gamma$$

teljesül, ahol $0 < 3\gamma \leq b_{t_0}(\|\varphi_0\|)$. Tegyük fel egyenlőre azt is, hogy $\liminf_{t \rightarrow \infty} |x^*(t)| = 0$. A másik ($\liminf_{t \rightarrow \infty} |x^*(t)| > 0$) esettel később foglalkozunk. Mivel $x^*(t)$ folytonos (4.3.2) biztosítja, hogy található olyan $[t_1, t_1^*]$ intervallumsorozat, amelyre $\lim_{i \rightarrow \infty} t_1^* = \infty, |x^*(t_1)| = \gamma, |x^*(t_1^*)| = 2\gamma$ és $\gamma < |x^*(t)| < 2\gamma, t \in (t_1, t_1^*)$. Legyen $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} [t_1, t_1^*]$.

Bebizonyítjuk, hogy $m(B) = \infty$. Ugyanis (2.1.1)-ből a tétel feltételeit használva:

$$-\psi_{t_0}(t) \leq x^*(t) \leq \psi_{t_0}(t), \quad t \geq t_0,$$

amelyből integrálással

$$N\gamma = \sum_{i=1}^N |x^*(t_i^*) - x^*(t_i)| \leq \int_{B_N} \psi_{t_0}(s) ds$$

adódik, ahol $B_N = \bigcup_{i=1}^N [t_i, t_i^*]$. Es $N \rightarrow \infty$ esetén ellentmond (viii)-nak, mert $B = \infty$ valóban teljesül.

Legyen $a \in K$ olyan, hogy $a(|px|) \leq V(t, x)$, $t \in R$, $x \in R^n$ teljesüljön. Definíáljunk egy olyan T_1 mennyiséget, amelyre $\sup_{v \leq b_t(\|\varphi_0\|)} f(s, v) \leq a(\gamma)$, $s \leq -T_1$ teljesül, továbbá d jelölje a

$$d = \inf \{ v - f(s, v), a(\gamma) \leq v \leq b_{t_0}(\|\varphi_0\|), s \in [-T_1, 0] \}$$

pozitív mennyiséget.

Definíáljunk egy $c^*(t)$ függvényt a

$$c^*(t) = \begin{cases} -c(t, \gamma) & , t \in B \\ 0 & , t \notin B \end{cases}$$

összefüggéssel $c^*(t)$ definíciójából világos, hogy $(t, x_t) \in H$ esetén $\dot{v}(t) = \dot{V}(t, x_t) \leq c^*(t)$. A (iv) feltétel biztosítja, hogy $\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t c^*(s) ds = -\infty$. Így minden $\bar{t} \in R^+$ -ra van olyan $T_2(\bar{t}) > \bar{t}$, hogy

$$(4.3.3) \quad \int_{\bar{t}}^{T_2(\bar{t})} c^*(s) ds \leq -d.$$

Definíáljuk most a $\tilde{T}_0 = t_0$, $\tilde{T}_1 = \tilde{T}_{1-1} + T_1 + \tilde{T}_2(\tilde{T}_{1-1})$.

$i=1, \dots, N+1$ sorozatot, ahol N olyan, hogy $a(\gamma) + (N+1)d \geq b_{t_0}(\|\varphi_0\|)$.

Most bebizonyítjuk, hogy $i=0, \dots, N+1$ -re

$$(4.3.4) \quad v(t) \leq a(\gamma) + (N+1-i)d, \quad t \geq \tilde{T}_0 + \tilde{T}_1$$

teljesül. (4.3.4) érvényessége $i=0$ -ra (4.3.1)-ből következik.

Tegyük fel, hogy $i=1, \dots, j$ -re ($j \leq N$) is teljesül (4.3.4). Ha van olyan t , hogy $T_1 + \tilde{T}_j \leq \bar{t}$ és $v(\bar{t}) \leq a(\gamma) + (N-j)d$, akkor $t \geq \bar{t}$ esetén

$$v(t) \leq a(\gamma) + (N-j)d.$$

Ugyanis az ellenkező esetben a 4.1 szakasz 1. Lemmájának felhasználásával egy olyan $t^* > \bar{t}$ számot találunk, amelyre $\dot{v}(t^*) > 0$, $v(t^*) = a(\gamma) + (N-j)d$ és $v(t) < v(t^*)$, $t \in [\bar{t}, t^*)$ teljesül. Másrészt

$$(4.3.5) \quad f(s, v(t^* + s)) \leq \begin{cases} a(\gamma), & \text{ha } s \leq -T_1 \\ v(t^* + s) - d, & \text{ha } -T_1 \leq s \leq 0 \end{cases} < v(t^*).$$

Igy az (i) feltétel alapján ellentmondáshoz jutottunk. A kívánt tulajdonságú $\bar{t}$ létezik mert az ellenkező esetben $f(s, v(t+s)) < v(t)$ teljesülne $t \in [\tilde{T}_j + T_1, \tilde{T}_2(\tilde{T}_j + T_1)]$ -re (ami ugyanígy látható, mint (4.3.5)), azaz $(t, x_t) \in H$, ami ellentmond (4.3.3)-nak.

(4.3.4) tehát érvényes minden i -re, s így $i=N+1$ -re is, azaz

$$v(t) \leq b_{t_0}(\|\varphi_0\|) - (N+1)d \leq a(\gamma), \quad t \geq \tilde{T}_{N+1}.$$

Ez pedig ellentmond annak, hogy

$$a(2\gamma) \leq a(|x(t)|) \leq v(t_1^*) \quad , \quad t \rightarrow \infty .$$

A $\liminf |x^*(t)| = 3\gamma$ eset rögtön ellentmondásra vezet, mert ekkor elég nagy t -re $(t, x_t) \in H$, s így $\dot{v}(t) \leq -c(t, 3\gamma)$ teljesül. A $0 < \liminf |x^*(t)| < 3\gamma$ esetben a fentiekhez analóg módon kaphatunk ellentmondást.

Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

4.4. Példák

1) Tekintsük ismét a 3.4. szakaszban már vizsgált

$$(4.4.1) \quad \dot{x}(t) = A(t)x(t) + \int_0^t K(t,s,x(s))ds$$

integro-differenciálegyenletet, ahol $A(t)$ $n \times n$ típusú folytonos mátrix függvény, K pedig folytonos az $R^+ \times R^+ \times R^n$ halmazon. Az

5. Tétel felhasználásával bebizonyítjuk a következőt:

7. Tétel. Ha az $\dot{y}(t) = A(t)y(t)$ egyenlet $y(t) \equiv 0$ megoldása exponenciálisan p -stabilis, van olyan $\mu > 0$, $\delta > 0$ és $\sigma : R^+ \rightarrow R^+$ amelyre $\lim_{s \rightarrow \infty} \sigma(s) = 0$, $0 \leq \sigma(s) < s$ és minden $t \in R^+$ -ra

$$\left| \int_0^t K(t,s,x(s)) ds \right| \leq \mu \sup_{0 \leq s \leq t} |\sigma(t-s) p x(s)|, \quad t \in \mathbb{R}^+$$

teljesül a $0 \leq s \leq t$ szakaszon folytonos, a $|p x(s)| \leq \rho$ relációt teljesítő függvényekre, akkor elég kicsi μ értékekre (4.4.1) $x(t) \equiv 0$ megoldása egyenletesen aszimptotikusan p -stabilis.

Bizonyítás. Legyen $V(t,x) = \sup_{\sigma \geq 0} |p y(t+\sigma, t, x)| e^{\alpha \sigma}$, ahol $y(t, t_0, x)$ az $\dot{y}(t) = A(t)y(t)$ egyenlet (t_0, x) -en átmenő megoldása, α pedig ugyanezen egyenlet $y(t) \equiv 0$ megoldásának exponenciális p -stabilitási definíciójában, a kitevőben szereplő konstans. A 3.1 szakasz bizonyításának megismétlésével látható, hogy $V(t,x)$ -re teljesülnek a

$$|p x| \leq V(t,x) \leq B |x|,$$

$$\dot{V}(t, \varphi) \leq -\alpha V(t, \varphi(0)) + \left| \int_{-t}^0 K(t, t-s, \varphi(s)) ds \right|$$

összefüggések. A második egyenlőtlenségből $\dot{V}(t, \varphi) \leq -\alpha V(t, \varphi(0)) + \mu \sup_{-t \leq s \leq 0} |\sigma(-s) p \varphi(s)|$ adódik. Legyen $\hat{f}(s, v) = \sigma(-s)v$. Ekkor a $\{(t, \varphi) : \hat{f}(s, V(t+s, \varphi(s))) < V(t, \varphi(0)), s \in \mathbb{R}^-\}$ halmazon $\dot{V}(t, \varphi) \leq (-\alpha + \mu) V(t, \varphi(0))$ teljesül. Innen az 5. Tétel alkalmazásával evidens az állítás.

2) Vizsgáljuk most a skaláris

$$(4.4.2) \quad \dot{x}(t) = g(t)x(t-\tau(t))$$

egyenletet, ahol $g(t)$ és $\tau(t)$ folytonosan $\mathbb{R}^+$ -on, $0 \leq \tau(t) \leq \tau$

($\tau = \text{konstans}$). A vezetés IV. Tételéből következik, hogy erre az egyenletre lokális egzisztencia és unicitás teljesül, valamint minden megoldása folytatható $[-\tau, \infty)$ -re. Most a 2., 3. és 4. Tétel felhasználásával olyan feltételeket adunk $q(t)$ és $\tau(t)$ -re, amelyek (4.4.2) nulla megoldásának egyenletes stabilitását, ekvi-aszimptotikus stabilitását, ill. egyenletes aszimptotikus stabilitását biztosítják.

3. Tétel. Ha $\int_0^\infty q^+(s)ds < \infty$ és $\sup_{t \in \mathbb{R}^+} \int_{[t-\tau(t)]^+}^t q^-(s)ds < 1$, akkor (4.4.2) $x(t) \equiv 0$ megoldása egyenletesen stabilis. Ha még

$\int_0^\infty q^-(s)ds = \infty$ is teljesül, akkor az $x(t) \equiv 0$ megoldás equi-aszimptotikusan stabilis. Ha a legutolsó egyenlőség egyenletesen teljesül, azaz minden $r > 0$ -ra van olyan $T > 0$, hogy bármely $t_0 \in \mathbb{R}^+$ -re $\int_{t_0}^{t_0+T} q^-(s)ds \geq r$, akkor $x(t) \equiv 0$ egyenletesen aszimptotikusan stabilis. (Sőt ekkor exponenciális stabilitást is állíthatunk, ami következik a [32] dolgozat 2. Tételéből.)

Következmény. A 3. Tételből és a (3.1) szakasz 1. Tételéből evidens módon adódik, hogy a bevezetésben említett $w'(v) = -\alpha w(v-1) (1+w(v))$ (1.11) egyenlet $w(v) \equiv 0$ megoldása az $0 < \alpha < 1$ esetben exponenciálisan stabilis.

A 3. Tétel bizonyítása. Legyen $0 < \alpha < \beta < 1$ két olyan konstans, amelyekre $\sup_{t \in \mathbb{R}^+} \int_{[t-\tau(t)]^+}^t q^-(s)ds < (\beta - \alpha)/2$ teljesül. Definíáljuk a szükséges segédfüggvényeket a következő módon: $V(t, x) = \frac{x^2}{2} \exp(-\frac{1}{\alpha} \int_0^t q^+(s)ds)$, $\alpha(r) = \alpha r$, $\beta(r) = \beta r$, $f(s, v) = \begin{cases} v, & s \in [-\tau, 0] \\ 0, & s \in (-\infty, -\tau) \end{cases}$, $h(t) = [t - \tau(t)]^+$. Közvetlen számolással adódik, hogy $\dot{V}(t, \varphi) = q(t)\varphi(0) \varphi(-\tau(t)) \exp(-\frac{1}{\alpha} \int_0^t q^+(s)ds) - \frac{2}{\alpha} q^+(t)V(t, \varphi(0))$. A $Z(t, \bar{t}, r) \subset \{ (t, \varphi) : \alpha r \leq V(t, \varphi(0)) \leq r, \frac{\varphi^2(-\tau(t))}{2} \leq r \exp \frac{1}{\alpha} \int_0^{[t-\tau(t)]^+} q^+(s)ds \}$

reláció is teljesül, s így

$$z(t, \bar{t}, r) \leq 2 |q(t)| r \exp\left(-\frac{1}{2\alpha} \int_{t-\tau(t)}^t q^+(s) ds\right) - 2q^+(t)r \leq 2 |q^-(t)| r.$$

Ha $t - \tau(t) > 0$, akkor $\varphi \in Z(t, h(t), r)$ esetén $\varphi(0)$ és $\varphi(-\tau(t))$ egyenlő előjellű, s így $\dot{V}(t, \varphi) = (q^+(t) - q^-(t)) \varphi(0) \varphi(-\tau(t)) \exp\left(-\frac{1}{\alpha} \int_0^t q^+(s) ds\right) - \frac{2}{\alpha} q^+(t) V(t, \varphi(0)) \leq -\alpha q^-(t) r \exp\left(-\frac{1}{\alpha} \int_{t-\tau(t)}^t q^+(s) ds\right) \leq 0$.

A 2. Tétel feltételei teljesülnek.

Hasonlóan látható az állítás további része is.

3) Tekintsük az

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -a(t)x(t) + b(t)y(t) - b(t)z(t) + R(t, x(t-\tau), y(t-\tau), z(t-\tau)) \\ (4.4.3) \quad \dot{y}(t) &= c(t)x(t) + d(t)y(t) + (e(t) + \gamma(t))z(t) \\ \dot{z}(t) &= (b(t) + c(t))x(t) + (d(t) + \gamma(t))y(t) + e(t)z(t) \end{aligned}$$

egyenletet, ahol $a(t), b(t), c(t), d(t), e(t)$ folytonos skaláris függvényei t -nek, $R : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, folytonos függvény, τ pozitív konstans. Tegyük fel, hogy $a(t) \geq 0$, $\gamma(t) \leq a(t)$ és $|R(t, x, y, z)| \leq \theta \gamma(t) |x|$ teljesül, ahol $0 < \theta < 1$ egy konstans.

9. Tétel. Ha $\int_0^\infty \gamma(s) ds = \infty$, akkor a (4.4.3) egyenlet $x(t) = y(t) = z(t) \equiv 0$ megoldása equi-aszimptotikusan x -stabilis. Ha van olyan $\varepsilon > 0$, hogy $\text{mes} \{t : a(t) - \gamma(t) \leq \varepsilon\} < \infty$, továbbá $a(t), b(t), \gamma(t) \in \tilde{U}_{p=1}^p(0, \infty)$, akkor az $x(t) = y(t) = z(t) = 0$ megoldás aszimptotikusan x -stabilis.

Biszonyítás. Definíáljunk egy $V(x, y, z)$ Ljapunov függvényt a $V(x, y, z) = (x^2 + (y-z)^2)/2$ formulával. Legyen $f(s, v) =$

$$= \begin{cases} qv, & s \in [-h, 0] \\ 0, & s \in (-\infty, h) \end{cases}, \text{ ahol } q = \frac{4\theta^2}{(1+\theta)^2} \text{ f ilyen választás mellett}$$

$$\{(t, \varphi) : V(\varphi_1(s), \varphi_2(s), \varphi_3(s)) < \frac{1}{q} V(\varphi_1(0), \varphi_2(0), \varphi_3(0)), s \in [-h, 0]\} \subset \\ \subset H = \{(t, \varphi) : |\varphi_1(-\tau)| < \frac{1+\theta}{2} V(\varphi_1(0), \varphi_2(0), \varphi_3(0)), s \in [-h, 0]\}.$$

$(t, \varphi) \in H$ esetén az R -re vonatkozó feltételt használva

$$\dot{V}(t, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \leq -(a(t) - \gamma(t)) \varphi_1^2(0) - \gamma(t) \frac{1+\theta}{2} V(\varphi_1(0), \varphi_2(0), \varphi_3(0))$$

adódik. Ha $\int \gamma(t) dt = \infty$, akkor a 2. Tétel felhasználásával (az

5. Tétel bizonyítását követve) belátható állításunk. A másik

feltétel mellett a 6. Tétel alkalmazható. Ugyanis a 6. Tétel

bizonyításából kiderül (a (4.3.1) egyenlőtlenség), hogy (4.4.3)

tetszőleges $x(t) = x(t; t_0, \varphi)$, $y(t) = y(t; t_0, \varphi)$, $z(t) = z(t; t_0, \varphi)$

megoldására

$$x^2(t) = (y(t) - z(t))^2 \leq |\varphi_1| + (|\varphi_2| + |\varphi_3|)^2 = K, t \geq t_0$$

teljesül. Így

$$|-a(t)z(t) + b(t)y(t) - b(t)z(t) + R(t, x(t-\tau), y(t-\tau), z(t-\tau))| \leq \\ \leq (|a(t)| + |b(t)| + \theta |\gamma(t)|) K$$

teljesül. Az $a(t)$, $b(t)$, $\gamma(t)$ -re tett feltévéseink így biztosítják a 6. Tétel alkalmazhatóságát.

V. IRODALOMJEGYZÉK

- [1] Collatz, L., Über Stabilität von Regelungen mit Nachlaufzeit,
Z. Angew. Math. Phys. 25/27(1947), 60-61.
- [2] Corduneanu, C., Integral equations and stability of feedback
systems, New York and London, 1973.
- [3] Corduneanu, C., On partial stability for delay systems,
Ann. Pol. Math. 29(1975), 357-362.
- [4] Cunningham, W.J., A nonlinear differential difference
equation of growth, Proc. Nat. Acad. Sci. USA,
40(1954), 708-713.
- [5] Чаплыгин, С.А., Собрание сочинений, т. I., Москва и
Ленинград, 1948.
- [6] Driver, R., A functional-differential equation arising in
a two body problem of electrodynamics, International
Symposium of Nonlinear Differential Equations and Non-
linear Mechanics, Academic Press, 1963, 474-484.
- [7] Гантмахер, Ф.Р., Теория матриц, Москва, 1953.
- [8] Halanay, A. and Yorke, J.A., Some new results and problems
in the theory of differential-delay equations,
SIAM Review, 13(1971), 55-80.
- [9] Hale, J., Functional differential equations, New York,
Heidelberg and Berlin, 1971.
- [10] Hahn, W., Stability of motion, New York, Heidelberg and
Berlin, 1967.

- [11] Хатвани, Л., Некоторые задачи об устойчивости неустановившихся движений, Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, Москва 1975.
- [12] Хатвани, Л., О некоторых признаках устойчивости с двумя функциями Ляпунова, Прикл. Матх.Мех., 39(1975),
- [13] Hoffman de Visme, G., The density of prime numbers Math. Gaz., 45(1961),13-14.
- [14] Красовский, Н.Н., Некоторые задачи теории устойчивости движения, Москва, 1959.
- [15] Levin, J.J. and Nohel J.A., On a system of integrodifferential J. of Math. Mech, 9(1960),347-368.
- [16] Levinger, B.W., A folk theorem in functional differential equations, J. Diff. Eqs., 4(1968),612-619.
- [17] Ляпунов, А.М., Общая задача об устойчивости движения, Москва, 1950.
- [18] Луценко, А. В. и Стадникава, Л. В., О частичной устойчивости по первому приближению, Дифф. уравн., 8(1973),1530-1533.
- [19] Mikolajska, Z., Une modification de la condition de Liapunov pour les équations a paramètre retardé, Ann. Pol. Math., 21(1969),103-111.
- [20] Мышкис, А.Д., Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом, Москва, 1951.
- [21] Норкин, С.Б., Дифференциальные уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом, Москва, 1955.
- [22] Озирнер, А. С. и Румицев, В. В., Метод функций Ляпунова в задаче об устойчивости движений относительно части

- [23] Poincaré, H., Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle. J. Math. Pures Appl. 7(1881), 375-422.
- [24] Pontragin, L.S., Kösönéséges differenciálegyenletek, Budapest, 1972.
- [25] Разумихин, Б.С., Устойчивость по первому приближению систем с запаздыванием. Прикл. мат. мех., 22(1958).
- [26] Разумихин, Б.С., Об устойчивости систем с запаздыванием, Прикл. мат. мех. 20(1956), 500-512.
- [27] Riesz, F. et Sz.-Nagy, B., Leçons d'analyse fonctionnelle, Budapest, 1952.
- [28] Румянцев, В.В., Об устойчивости движения по отношению к части переменных, Вестник московского университета, 4(1957), 9-16.
- [29] Seifert, G., Liapunov-Razumikhin conditions for stability and boundedness of functional differential equations of Volterra type. J. Diff. Eqs. 14(1973), 424-430.
- [30] Terjéki, J., On the existence of the solutions of functional-differential equations, Topics on Differential equations, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 13. Vol. (megjelenés alatt)
- [31] Terjéki, J., On partial stability of linear autonomous functional-differential equations, Studia Sci. Math. Hungar. (elküldve)
- [32] Terjéki, J., On asymptotic stability of solutions of functional differential equations, Ann. Pol. Math. (megjelenés alatt)

- [33] Volterra, M.V. et D'Ancona, M.U., Les associations biologiques de von mathématique, Paris, 1935.
- [34] Wilson, E.V. and Burke, M.H., The epidemic curve, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 28(1942), 361-167.
- [35] Wright, E.M., A functional equation in the heuristic theory of primes, Math. Gaz. 45(1961), 15-16.
- [36] Yoshisawa, T., Stability theory by Liapunov's second method, The Mathematical Society of Japan, 1966.
- [37] Зубов, В.М. Лекции по теории управления I, Ленинградский Университет, 1972.

Köszönetet mondok a Differenciálegyenletek Szeminárium résztvevőinek az értékesésem elkészítéséhez nyújtott hasznos tanácsaikért, külön köszönöm Dr. Pintér Lajos docens és Dr. Hatvani László adjunktus uraknak a téma felvetését, sokoldalú támogatásukat.