

JÓZSEF ATTILA TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Ortodox félcsoporthok részköteg-parcelláló
kongruenciái és bővitései

Bálintné Szendrei Mária
doktori értekezése



Tartalomjegyzék

	Oldal
Bevezetés	1
1. Az ortodox félcsoporthok alapvető tulajdonságai	4
2. Idempotens-ekvivalens kongruenciák	9
3. Részköteg-parcelláló kongruenciák	27
4. Erős részköteg-szeparáló bővitések	41
5. Erős részköteg-parcelláló bővitések	66
Irodalom	114

Bevezetés

Az utóbbi évtizedben számos olyan jellegű strukturátételt bizonyítottak, amelyben jellemezték az egy adott idempotens kötegű összes $(O-)\mathfrak{A}$ -egyszerű illetve $(O-)$ egyszerű ortodox félcsoportokat. Ezekben a tételekben az ortodox félcsoportokat egy bizonyos értelemben legnagyobb kongruencia - az esetek egy részében a legnagyobb idempotens-szeparáló kongruencia - szerinti bővítéseként adták meg. Ilyen jellegű eredmények fűződnek N.R.REILLY [13], B.P.KOCSIN [5], W.D.MUNN [10]-[12], G.LALLEMENT és M.PETRICH [7], J.E.AULT és M.PETRICH [1] és R.J.WARNE [20], [22]-[23] nevéhez.

Másrészt M.YAMADA [25] leírta az ortodox félcsoportok strukturáját inverz félcsoportok és kötegek segítségével. Az ehhez használt kvázi-direkt szorzat tulajdonképpen egy inverz félcsoportnak a legkisebb inverz kongruencia szerinti bővítése.

[15]-ben bevezettük a részköteg-parcelláló kongruencia fogalmát ortodox félcsoportokon. Ez egyrészt tartalmazza az idempotens-szeparáló kongruenciákat és a legkisebb inverz kongruenciát, amelyek kiemelt szerepet játszanak az ortodox félcsoportok elméletében, másrészt tartalmazza a fent említett strukturátételekben fellépő kongruenciákat. [16]-ban leírtuk a $O-\mathfrak{A}$ -egyszerű ortodox félcsoportok bizonyos részköteg-szeparáló bővítéseit. Ezeknek az eredményeknek a felhasználásával néhány strukturátételt adtunk [18]-ban, amelyek általánosítják a fent említett eredmények egy részét.

A jelen dolgozat 3. fejezetében összefoglaljuk [15] eredményeit, és kiegészítjük azokat. Például megadjuk az egy adott részköteget adott kongruencia szerint parcelláló kongruenciák közül a legkisebbet. Megvizsgáljuk, hogy egy köteg mely részkötegei léphetnek fel részköteg-parcelláló ill. részköteg-szeeparáló kongruenciákban. A 4. fejezetben H.D'ALARCAO [3] tételét általánosítva jellemezzük az ortodox félcsoportok összes erős részköteg-szeeparáló bővítéseit. Ez az eredményünk általánosítja [16]-ot is. A részköteg-szeeparáló kongruencia speciális részköteg-parcelláló kongruencia. Mégis érdemes külön foglalkozni az erős részköteg-szeeparáló bővítésekkel, mert sokkal egyszerűbb eszközökkel leírhatók, mint általában az erős részköteg-parcelláló bővítések. A dolgozat utolsó fejezetében jellemezzük az ortodox félcsoportok erős részköteg-parcelláló bővítéseit. Speciálisan a legkisebb inverz kongruenciára alkalmazva ezt a tételt, M.YAMADA [25] eredményéhez hasonló strukturátételt kapunk. Azonban az általa használt kvázi-direkt szorzatnál egyszerűbb konstrukcióval tudjuk megadni az ortodox félcsoportokat.

Az egy adott részköteget adott kongruencia szerint parcelláló kongruenciák idempotens-ekvivalensek abban az értelemben, hogy az idempotensek kötegén ugyanazt a particiót indukálják. Ezeket a kongruenciákat J.MEAKIN vizsgálta [8]-ban. A 2. fejezetben T.E.HALL [4] eredményét általánosítjuk két irányban. Közben J.MEAKIN [8]-étől eltérő módon megadjuk az egy adott particiót indukáló kongruenciák közül a legnagyobb és legkisebbet. Ezeket könnyebben alkalmazhatjuk a részköteg-parcelláló kongruenciákra, mint J.MEAKIN eredményeit.

Az 1. fejezetben összefoglaljuk az ortodox félcsoporthok legfontosabb tulajdonságait.

A dolgozat során [2] jelöléseit használjuk.

1. Az ortodox félcsoporthok alapvető tulajdonságai

Ebben a fejezetben definiáljuk az ortodox félcsoporthok fogalmát, és T.E.HALL [4] cikkére támaszkodva összefoglaljuk legfontosabb tulajdonságait.

1. DEFINÍCIÓ. Egy reguláris félcsoporthot ortodoxnak nevezünk, ha idempotens elemei részfélcsoporthot alkotnak.

Egy ortodox félcsoporthban tehát az idempotens elemek részköteget alkotnak. Ezt nevezzük az ortodox félcsoporth idempotens kötegének. Az ortodox félcsoporthoknak fontos részosztályát alkotják az inverz félcsoporthok. Az inverz félcsoporthok éppen azok az ortodox félcsoporthok, amelyek idempotens kötege félháló.

1. TÉTEL. (N.R.REILLY és H.E.SCHEIBLICH [14]) Ha adott egy T reguláris félcsoporth, akkor a következő három állítás ekvivalens.

(i) T ortodox.

(ii) T bármely két a, b elemére és azok bármely a' illetve b' inverzére $b'a'$ inverze ab -nek.

(iii) Valahányszor e egy idempotens eleme T -nek és x az e egy inverze, mindannyiszor x is idempotens.

Legyen adott egy T ortodox félcsoporth a B idempotens köteggel. McLEAN tétele értelmében B derékszögű kötegek félhálójá. Tegyük fel, hogy $B = \bigcup \{E_\alpha : \alpha \in Y\}$, ahol Y egy félháló, minden α -ra E_α egy derékszögű köteg, továbbá minden $\alpha, \beta (\in Y)$ -ra $E_\alpha \cap E_\beta = \emptyset$ ha $\alpha \neq \beta$, és $E_\alpha E_\beta \subseteq E_{\alpha\beta}$.

Ezt a továbbiakban úgy jelöljük, hogy $B = \bigcup_{\alpha \in Y} E_{\alpha}$. Ha $e \in E_{\alpha}$, akkor E_{α} -t $E(e)$ -vel is jelöljük.

Jelöljük $V_T(\alpha)$ -val, vagy ha félreértést nem okoz, röviden $V(\alpha)$ -val az α elem összes T -beli inverzének halmazát. Ha T egy ortodox félcsoportha B idempotens köteggel, továbbá $e \in B$, akkor R_e^B illetve L_e^B jelöli az e -t tartalmazó B -beli $\mathcal{Q}$ - illetve $\mathcal{L}$ -osztályt.

2. ÁLLÍTÁS. Legyen T egy ortodox félcsoportha $B = \bigcup_{\alpha \in Y} E_{\alpha}$ idempotens köteggel. Ekkor T tetszőleges a elemére és annak bármely a' inverzére érvényes, hogy

$$aV(\alpha) = aa' E(aa') = R_{aa'}^B, \quad V(\alpha)a = E(a'a)a'a = L_{a'a}^B$$

és

$$V(\alpha) = E(a'a)a' E(aa').$$

3. ÁLLÍTÁS. Legyen T egy ortodox félcsoportha B idempotens köteggel. Tekintsük B -nek két tetszőleges x, y elemét és T -nek egy a elemét. Legyen a' és a^* az a két inverze. Ha $L_x^B = L_y^B$, akkor $L_{a'xa}^B = L_{a^*ya}^B$, illetve, ha $R_x^B = R_y^B$, akkor $R_{axa'}^B = R_{aya^*}^B$.

Egy S félcsoportha $\mathcal{Q}$ kongruenciáját inverz kongruenciának hívjuk, ha $S/\mathcal{Q}$ inverz félcsoportha.

4. TÉTEL. Az

$$\eta = \{(a, b) \in T \times T : V(a) = V(b)\}$$

reláció a legkisebb inverz kongruencia a T ortodox félcsoporthon.

Legyen B egy tetszőleges köteg. Ha $e \in B$, akkor

$\Theta_e: B \rightarrow eBe$ legyen az a leképezés, amelyre $x\Theta_e = exe$.

Legyen T egy ortodox félcsoporth a B idempotens köteggel. Minden a, a' elempárra, amelyek egymás inverzei, definiáljunk egy $\Theta_{a',a}: aa'Baa' \rightarrow a'aBa'a$ leképezést úgy, hogy $x\Theta_{a',a} = a'xa$.

5. ÁLLÍTÁS. A $\Theta_{a',a}$ leképezés izomorfizmus $aa'Baa'$ -ről $a'aBa'a$ -ra és $\Theta_{a',a}^{-1} = \Theta_{a,a'}$.

Rendeljük hozzá a T ortodox félcsoporth minden a eleméhez azt a $\lambda_a \in \mathcal{I}_{B/\mathcal{Q}}$ illetve $\varrho_a \in \mathcal{I}_{B/\mathcal{L}}$ transzformációt, amely a következőképpen van definiálva. A B köteg minden x elemére

$$(1) \quad R_x \lambda_a = R_{axa'} (= R_x \Theta_{aa'} \Theta_{a,a'}) , \quad L_x \varrho_a = L_{a'xa} (= L_x \Theta_{aa'} \Theta_{a',a}) ,$$

ahol a' az a egy tetszőleges inverze. A 3. Állítás miatt λ_a és ϱ_a jól definiált. Definiáljuk a $\xi: T \rightarrow \mathcal{I}_{B/\mathcal{Q}}^* \times \mathcal{I}_{B/\mathcal{L}}$ leképezést úgy, hogy $a\xi = (\lambda_a, \varrho_a)$. Itt $\mathcal{I}_{B/\mathcal{Q}}^*$ a $\mathcal{I}_{B/\mathcal{Q}}$ félcsoporth duálisát jelenti.

6. TÉTEL. Az így definiált ξ leképezés homomorfizmus és $\xi \circ \xi^{-1}$ a legnagyobb idempotens-szeparáló kongruencia T -n.

Most legyen adott egy B köteg. Tekintsük rajta a következő ekvivalencia relációt:

$$\mathcal{U} = \{(e, f) \in B \times B: eBe \text{ izomorf } fBf\text{-fel}\}.$$

Ha $e\mathcal{U}f$, akkor $T_{e,f}$ jelölje az összes eBe -ről fBf -re való izomorfizmusok halmazát. Legyen $t_{e,f} \in T_{e,f}$. Jelölje $\varphi(\Theta_e t_{e,f})$ a $B/\mathcal{L}$ halmaznak az a transzformációját, amely L_x -hez $L_x \Theta_e t_{e,f}$ -et rendeli. Hasonlóan, legyen $\psi(\Theta_e t_{e,f})$ a $B/\mathcal{Q}$ halmaznak az a transzformációja, amely R_x -nek

$R_{\alpha} \otimes_e t_{e,f}$ -et felelteti meg.

7. TÉTEL. A

$$W(B) = \{ (\psi(\oplus_f t_{e,f}^{-1}), \varphi(\oplus_e t_{e,f})) : (e,f) \in \mathcal{U}, t_{e,f} \in T_{e,f} \}$$

halmaz ortodox részfélcsoporthot alkot $\mathcal{T}_{B/\mathcal{Q}}^* \times \mathcal{T}_{B/\mathcal{Q}}$ -ben. A
 $\xi^1: B \rightarrow W(B)$, $e\xi^1 = (\psi(\oplus_e), \varphi(\oplus_e))$ leképezés izomorfizmus B-ről
 $W(B)$ idempotens kötegére.

Az itt definiált $W(B)$ félcsoporthot Hall-félcsoporthnak nevezzük.

Egy S ortodox félcsoporth T ortodox részfélcsoporthját az S teljes ortodox részfélcsoporthjának nevezzük, ha T tartalmazza S minden idempotens elemét.

A fentiek alapján könnyen adódik az alábbi következmény:

8. TÉTEL. Legyen T egy ortodox félcsoporth a B idempotens köteggel. Az (1) alapján definiált $\xi: T \rightarrow W(B)$ leképezés homomorfizmus. $T\xi$ teljes ortodox részfélcsoporthja $W(B)$ -nek. A $\xi \circ \xi^{-1}$ kongruencia a legnagyobb idempotens-szeparáló kongruencia T -n.

Abban a speciális esetben, amikor B félháló, W.D.MUNN bizonyította [9]-ben a 6. Tétel, 7. Tétel és 8. Tétel megfelelőjét. Megjegyezzük, hogy ha T inverz félcsoporth, akkor $\tilde{\xi}: T \rightarrow \mathcal{T}_B$, $t\tilde{\xi} = \oplus_{t^{-1}, t}$ olyan homomorfizmus, amelynek $\tilde{\xi} \circ \tilde{\xi}^{-1}$ magja a T legnagyobb idempotens-szeparáló kongruenciája. Továbbá, ha B félháló, akkor $W(B)$ izomorf $\mathcal{T}_B$ -nek a

$$\tilde{W}(B) = \bigcup \{ T_{e,f} : (e,f) \in \mathcal{U} \}$$

részfélcsoporthjával. Tetszőleges B idempotens kötegu T inverz félcsoporthra teljesül, hogy $T\tilde{\xi}$ teljes inverz részfélcsoporthja $\tilde{W}(B)$ -nek.

Végül megemlítjük a reguláris félcsoportokon értelmezett kongruenciáknak egy fontos tulajdonságát.

9. TÉTEL (G.LALLEMENT [6]). Egy reguláris félcsoport minden olyan kongruencia-osztálya, amely részfélcsoport, tartalmaz idempotens elemet.

Az itt összefoglalt eredményeket a dolgozat során többnyire hivatkozás nélkül fogjuk használni.

2. Idempotens-ekvivalens kongruenciák

Ha egy S félcsoporth idempotenseinek halmaza nem üres, akkor S bármely kongruenciája egy partíciót határoz meg az idempotensek halmazán.

1. DEFINÍCIÓ. Az S félcsoporth két kongruenciáját idempotens-ekvivalensnek nevezzük, ha S idempotenseinek halmazán ugyanazt a partíciót indukálják.

Az inverz félcsoporthok idempotens-ekvivalens kongruenciáit N.R.REILLY és H.E.SCHEIBLICH vizsgálta [14]-ben. Ezeket az eredményeket általánosította J.MEAKIN [8]-ban:

1. TÉTEL. Legyen T egy ortodox félcsoporth. Tekintsük T idempotens kötegének egy $\mathcal{G} = \{\tau_i : i \in I\}$ partícióját. Akkor és csak akkor létezik T -n olyan kongruencia, amely B -n az $\mathcal{G}$ partíciót indukálja, ha a következő két tulajdonság teljesül:

- (a) minden $i, j (i \in I)$ -re létezik olyan $k \in I$, hogy $\tau_i, \tau_j \subseteq \tau_k$,
- (b) minden $i (i \in I)$ -re és minden olyan $t, t' (t \in T)$ elem-párra, amelyek egymás inverzei, létezik olyan $j \in I$, hogy $t' \tau_i t \subseteq \tau_j$.

Ha az $\mathcal{G}$ partícióra érvényes az (a) és (b) tulajdonság, akkor a

- (1) $\zeta = \{(s, t) \in T \times T : \text{létezik } s\text{-nek és } t\text{-nek olyan } s' \text{ ill. } t' \text{ inverze, hogy valahányszor } i \in I, \text{ mindannyiszor}$
 $s \tau_i s', t \tau_i t' \subseteq \tau_j \text{ és } s' \tau_i s, t' \tau_i t \subseteq \tau_k \text{ valamely } j, k (i \in I)\text{-re}\}$

reláció tranzitív lezártja a legnagyobb, az

- (2) $\eta = \{(s, t) \in T \times T : s \text{-nek és } t \text{-nek létezik olyan } s' \text{ ill. } t' \text{ inverze, valamint létezik olyan } i, j \in I, \text{ hogy}$
 $s s', t t' \in \mathcal{F}_i, s' s, t' t \in \mathcal{F}_j \text{ és valamely } e \in \mathcal{F}_i \text{ és } f \in \mathcal{F}_j$
 $\text{esetén } e s f = e t f \text{ és } f s' e = f t' e \}$

reláció tranzitív lezártja a legkisebb azok között a kongruen-
ciák között, amelyek T idempotens kötegén, $\mathcal{B}$ -n az $\mathcal{F}$
partíciót indukálják.

MEGJEGYZÉS. A (b) feltételben elég megkövetelni, hogy minden $i \in I$ -re, minden $t \in T$ -re és t -nek valamely t' inverzére létezik olyan $j \in I$, hogy $t' \mathcal{F}_i t \subseteq \mathcal{F}_j$. Ha ez teljesül, akkor t bármely t^* inverzére igaz, hogy minden $i \in I$ esetén $t^* \mathcal{F}_i t \subseteq \mathcal{F}_j$ valamely $j \in I$ -re. Ugyanis, ha $t^* t \in \mathcal{F}_{i_1}, t t^* \in \mathcal{F}_{i_2}$, akkor $t^* = (t^* t) t' (t t^*)$ miatt $t^* \mathcal{F}_i t = (t^* t) t' (t t^*) \mathcal{F}_i t \subseteq (t^* t) t' \mathcal{F}_{i_2} \mathcal{F}_{i_1} t$. Az (a) feltétel alapján $\mathcal{F}_{i_2} \mathcal{F}_{i_1} \subseteq \mathcal{F}_{j_2}$ valamely $j_2 \in I$ -re, másrészt $t' \mathcal{F}_{j_2} t \subseteq \mathcal{F}_{j_1}$ teljesül egy j_1 elemre I -ben. Ujra (a) miatt pedig $\mathcal{F}_{i_1} \mathcal{F}_{j_1} \subseteq \mathcal{F}_j$ valamely $j \in I$ -re. Így tehát $t^* \mathcal{F}_i t \subseteq \mathcal{F}_j$.

A következőkben két szempontból általánosítjuk T.E.HALL-nak az 1.8. Tételben megfogalmazott eredményét. Ha T egy ortodox félcsoport és $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_i : i \in I\}$ a T idempotens kötegének olyan partíciója, amely kielégíti az (a) és (b) feltételeket, akkor megadunk egy homomorfizmust T -ről egy Hall-félcsoportra úgy, hogy a homomorfizmus magja a legnagyobb $\mathcal{F}$ -et indukáló kongruencia lesz. Ezzel a T legnagyobb $\mathcal{F}$ -et indukáló kongruenciájára kapunk egy új összefüggést, amelynek az az előnye a fentivel szemben, hogy közvetlenül megadja a kongruenciát, tranzitív lezáráásra nincs szükség. Hasonló eredményt bi-

zonyitunk a legkisebb $\mathcal{F}$ -et indukáló kongruenciára is. Másrészt, ha B egy tetszőleges köteg, $\mathcal{F} = \{\pi_i : i \in I\}$ pedig egy olyan particiója, amely rendelkezik az (a) tulajdonsággal, akkor megadjuk $W(B)$ -nek egy olyan $W^{\mathcal{F}}(B)$ teljes ortodox részfélcsoportját, amelyre teljesül a következő: ha T egy B idempotens kötegyű ortodox félcsoport, akkor T -nek akkor és csak akkor van $\mathcal{F}$ -et indukáló kongruenciája, ha az (1.1) alapján definiált ξ homomorfizmus $T \xi$ képe teljes ortodox részfélcsoportja $W^{\mathcal{F}}(B)$ -nek.

Legyen B egy köteg, és $\mathcal{F} = \{\pi_i : i \in I\}$ olyan particiója B -nek, amely rendelkezik az (a) tulajdonsággal. Ekkor az I halmaz természetes módon ellátható a következő művelettel: ha $i, j \in I$, akkor $i \cdot j$ legyen az a $k \in I$, amelyre teljesül, hogy $\pi_i \pi_j \subseteq \pi_k$. Erre a műveletre I köteg, hiszen az az $\iota : B \rightarrow I$ leképezés, amely az $f \in \pi_i$ elemhez i -t rendeli, I -re való homomorfizmus. Tehát B az π_i ($i \in I$) kötegek I kötege, amit úgy jelölünk, hogy $B = \bigcup_{i \in I} \pi_i$. Fordítva, ha egy B köteg valamely π_i ($i \in I$) kötegek I kötege, akkor az (a) tulajdonság nyilvánvalóan teljesül. A következőkben ahelyett, hogy a B köteg $\mathcal{F} = \{\pi_i : i \in I\}$ particiójára érvényes az (a) tulajdonság, mindig azt fogjuk feltenni, hogy $B = \bigcup_{i \in I} \pi_i$.

Tekintsünk egy T ortodox félcsoportot. Idempotens köteget jelöljük B -vel. Tegyük fel, hogy a B köteg π_i ($i \in I$) részkötegeinek I kötege, azaz $B = \bigcup_{i \in I} \pi_i$, úgy hogy a (b) feltétel teljesül. Jelölje ι azt a $B \rightarrow I$ homomorfizmust, amely $f \in \pi_i$ -nek i -t felelteti meg. Minden olyan $t, t' (\in T)$ elempárra, amelyek egymás inverzei, a (b) tulajdonság alapján definiálhatunk egy $\mathcal{D}_{t', t} : (tt')\iota \cdot I \cdot (tt')\iota \rightarrow (t't)\iota \cdot I \cdot (t't)\iota$ leképezést úgy, hogy $i \mathcal{D}_{t', t}$ az a j eleme I -nek, amelyre

$t' \mathbb{F}_i t \subseteq \mathbb{F}_j$ teljesül. Szemléletesen, $\mathfrak{F}_{t',t}$ az az (egyértelműen meghatározott) leképezés, amelyre a következő diagram kommutatív:

$$\begin{array}{ccc} (t't')\mathbb{B}(t't') & \xrightarrow{\Theta_{t',t}} & (t't')\mathbb{B}(t't') \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ (t't')\mathbb{C} \cdot \mathbb{I} \cdot (t't')\mathbb{C} & \xrightarrow{\mathfrak{F}_{t',t}} & (t't')\mathbb{C} \cdot \mathbb{I} \cdot (t't')\mathbb{C} \end{array}$$

2. LEMMA. A $\mathfrak{F}_{t',t}$ leképezés izomorfizmus $(t't')\mathbb{C} \cdot \mathbb{I} \cdot (t't')\mathbb{C}$ -ről $(t't')\mathbb{C} \cdot \mathbb{I} \cdot (t't')\mathbb{C}$ -ra és $\mathfrak{F}_{t',t}^{-1} = \mathfrak{F}_{t,t'}$.

Bizonyítás. Legyen $i \in (t't')\mathbb{C} \cdot \mathbb{I} \cdot (t't')\mathbb{C}$. Mivel $t' \mathbb{F}_i t = (t't')t' \mathbb{F}_i t(t't') \subseteq \mathbb{F}_{(t't')\mathbb{C}} \cdot \mathbb{F}_i \mathfrak{F}_{t',t} \cdot \mathbb{F}_{(t't')\mathbb{C}} \subseteq \mathbb{F}_{(t't')\mathbb{C}} \cdot i \mathfrak{F}_{t',t} \cdot (t't')\mathbb{C}$, azért $i \mathfrak{F}_{t',t} \in (t't')\mathbb{C} \cdot \mathbb{I} \cdot (t't')\mathbb{C}$. Ha most $i, j \in (t't')\mathbb{C} \cdot \mathbb{I} \cdot (t't')\mathbb{C}$, akkor

$$(t' \mathbb{F}_i t)(t' \mathbb{F}_j t) \subseteq t' \mathbb{F}_i \mathbb{F}_{(t't')\mathbb{C}} \mathbb{F}_j t \subseteq t' \mathbb{F}_{ij} t.$$

Következésképpen $i \mathfrak{F}_{t',t} \cdot j \mathfrak{F}_{t',t} = (ij) \mathfrak{F}_{t',t}$, azaz $\mathfrak{F}_{t',t}$ homomorfizmus. Vegyük észre, hogy ha $i \in (t't')\mathbb{C} \cdot \mathbb{I} \cdot (t't')\mathbb{C}$, akkor

$$t(t' \mathbb{F}_i t)t' = (t't')\mathbb{F}_i(t't') \subseteq \mathbb{F}_{(t't')\mathbb{C}} \mathbb{F}_i \mathbb{F}_{(t't')\mathbb{C}} \subseteq \mathbb{F}_i.$$

Ebből adódik, hogy a $\mathfrak{F}_{t',t} \mathfrak{F}_{t,t'}$ leképezés $(t't')\mathbb{C} \cdot \mathbb{I} \cdot (t't')\mathbb{C}$ identikus transzformációja. Ugyanígy látható, hogy $\mathfrak{F}_{t,t'} \mathfrak{F}_{t',t}$ a $(t't')\mathbb{C} \cdot \mathbb{I} \cdot (t't')\mathbb{C}$ identikus transzformációja. Tehát $\mathfrak{F}_{t',t}$ valóban izomorfizmus és $\mathfrak{F}_{t',t}^{-1} = \mathfrak{F}_{t,t'}$. Ha most i egy tetszőleges $\mathbb{I}$ -beli elem, akkor

$$(3) \quad t' \mathbb{F}_i t = t'(t't')\mathbb{F}_i(t't')t \subseteq t' \mathbb{F}_{(t't')\mathbb{C}} \mathbb{F}_i \mathbb{F}_{(t't')\mathbb{C}} t \subseteq t' \mathbb{F}_{i \Theta_{(t't')\mathbb{C}}} t \subseteq \mathbb{F}_{i \Theta_{(t't')\mathbb{C}}} \mathfrak{F}_{t',t},$$

ahol $\Theta_{\mathbb{C}}$ jelenti $\mathbb{I}$ -nek azt a leképezését $\mathbb{C} \mathbb{I} \mathbb{C}$ -ra, amely $\alpha(e \mathbb{I})$ -hez $\mathbb{C} \alpha \mathbb{C}$ -t rendeli. Minden $t(e \mathbb{T})$ -re (1.1)-gyel analóg módon értelmezzünk egy $\mathfrak{A}_t^*$ ill. $\mathfrak{S}_t^*$ transzformációt $\mathbb{I}/\mathbb{C}$ -en



ill. $I/\mathcal{L}$ -en úgy, hogy minden $i \in I$ -re

$$(4) \quad R_i \lambda_t^* = R_i \Theta_{(t^!t)_\mathcal{L}} \mathfrak{P}_{t^!t^!} \quad \text{illetve} \quad L_i \mathfrak{Q}_t^* = L_i \Theta_{(tt^!)_\mathcal{L}} \mathfrak{P}_{t^!t} ,$$

ahol $t^!$ a t egy tetszőleges inverzét jelöli. A következő lemma mutatja, hogy λ_t^* ill. $\mathfrak{Q}_t^*$ definíciója korrekt.

3. LEMMA. Tegyük fel, hogy $\top$ egy ortodox félcsoporth a $B = \bigcup_{i \in I} \mathbb{F}_i$ idempotens köteggel, és (b) teljesül $\top$ -n. Legyen $t \in \top$ és legyen $t^!$ illetve t^* a t két inverze. Ha I -ben $i \mathcal{R} j$, akkor $i \Theta_{(t^!t)_\mathcal{L}} \mathfrak{P}_{t^!t^!} \mathcal{R} j \Theta_{(t^*t)_\mathcal{L}} \mathfrak{P}_{t^!t^*}$, valamint ha $i \mathcal{L} j$, akkor $i \Theta_{(tt^!)_\mathcal{L}} \mathfrak{P}_{t^!t} \mathcal{L} j \Theta_{(tt^*)_\mathcal{L}} \mathfrak{P}_{t^*t}$.

Bizonyítás. Mivel B -ben $t^!t \mathcal{L} t^*t$, azért I -ben is $(t^!t)_\mathcal{L} \mathcal{L} (t^*t)_\mathcal{L}$. A $\mathcal{Q}$ reláció kongruencia I -n, így $D_{(t^*t)_\mathcal{L}} \geq D_{(t^!t)_\mathcal{L} \cdot j} = D_{i \cdot (t^!t)_\mathcal{L}}$ érvényes I -ben. Tehát $i \mathcal{R} j$ miatt $(t^!t)_\mathcal{L} \cdot j \cdot (t^*t)_\mathcal{L} \cdot i \cdot (t^!t)_\mathcal{L} = (t^!t)_\mathcal{L} \cdot j \cdot i \cdot (t^!t)_\mathcal{L} = (t^!t)_\mathcal{L} \cdot i \cdot (t^!t)_\mathcal{L} = i \Theta_{(t^!t)_\mathcal{L}}.$

Ennek felhasználásával adódik, hogy

$$\begin{aligned} (t \mathbb{F}_j t^* \chi t \mathbb{F}_i t^!) &= t (t^!t) \mathbb{F}_j (t^*t) \mathbb{F}_i (t^!t) t^! \subseteq t \mathbb{F}_{(t^!t)_\mathcal{L} \cdot j \cdot (t^*t)_\mathcal{L} \cdot i \cdot (t^!t)_\mathcal{L}} t^! = \\ &= t \mathbb{F}_{i \Theta_{(t^!t)_\mathcal{L}}} t^! \subseteq \mathbb{F}_{i \Theta_{(t^!t)_\mathcal{L}} \mathfrak{P}_{t^!t^!}} \end{aligned}$$

Ebből pedig (3) alapján következik, hogy $j \Theta_{(t^*t)_\mathcal{L}} \mathfrak{P}_{t^!t^*} \cdot i \Theta_{(t^!t)_\mathcal{L}} \mathfrak{P}_{t^!t^!} = i \Theta_{(t^!t)_\mathcal{L}} \mathfrak{P}_{t^!t^!}$. Szimmetrikusan látható, hogy $j \Theta_{(t^*t)_\mathcal{L}} \mathfrak{P}_{t^!t^*} = i \Theta_{(t^!t)_\mathcal{L}} \mathfrak{P}_{t^!t^!} \cdot j \Theta_{(t^*t)_\mathcal{L}} \mathfrak{P}_{t^!t^*}$ is teljesül, azaz $i \Theta_{(t^!t)_\mathcal{L}} \mathfrak{P}_{t^!t^!} \mathcal{R} j \Theta_{(t^*t)_\mathcal{L}} \mathfrak{P}_{t^!t^*}$ az I kötegben. Ez éppen azt jelenti, hogy λ_t^* jól definiált. A $\mathfrak{Q}_t^*$ -ra az állítás duálisan adódik.

Definiáljuk a $\xi^*: \top \rightarrow W(I)$ leképezést úgy, hogy $t \xi^* = (\lambda_t^*, \mathfrak{Q}_t^*)$.

4. TÉTEL. Az így definiált $\xi^*: \top \rightarrow W(I)$, $t \xi^* = (\lambda_t^*, \mathfrak{Q}_t^*)$ leképezés homomorfizmus. $\top \xi^*$ teljes ortodox részfélcsoporthja

$W(I)$ -nek. A $\xi^* \circ \xi^{*-1}$ kongruencia a legnagyobb olyan kongruencia, amely τ idempotens kötegén az $\mathcal{F} = \{\tau_i : i \in I\}$ particiót indukálja.

Bizonyítás. (4)-ből a 2. Lemma alapján közvetlenül látható, hogy $(\lambda_t^*, \varrho_t^*) \in W(I)$. Az, hogy ξ^* homomorfizmus, közvetlenül adódik (3) és (4)-ből. Ha $f \in \tau_i$, akkor minden i -re $f \tau_i f \subseteq \tau_i = \tau_i \circ \tau_i = \tau_i \circ \tau_i$. Így (4) alapján $R_i \lambda_f^* = R_i \tau_i$ és $L_i \varrho_f^* = L_i \tau_i$. Az 1.7. Tétel jelöléseit használva ez azt jelenti, hogy $f \xi^* = (\lambda_f^*, \varrho_f^*) = (\psi(\tau_i), \varphi(\tau_i))$. Ebből következik egyrészt, hogy $\tau \xi^*$ teljes ortodox részfélcsoportja $W(I)$ -nek, másrészt pedig az, hogy a $\xi^* \circ \xi^{*-1}$ kongruencia az $\mathcal{F} = \{\tau_i : i \in I\}$ particiót indukálja τ idempotens kötegén. Tegyük fel, hogy σ egy $\mathcal{F}$ -et indukáló kongruencia τ -n. Ekkor τ/σ idempotens kötege, $\{\tau_i : i \in I\}$ izomorf I -vel. Feltehetjük, hogy I maga a τ/σ félcsoport idempotens kötege. Defináljuk $I/\mathcal{Q}$ -en illetve $I/\mathcal{L}$ -en a λ_s illetve ϱ_s transzformációkat minden $s \in \tau/\sigma$ -ra (1.1) szerint. Akkor a $\xi_\sigma : \tau/\sigma \rightarrow W(I)$, $s \xi_\sigma = (\lambda_s, \varrho_s)$ leképezés homomorfizmus. Ha t és t' egymás inverzei τ -ben, akkor $t\sigma$ és $t'\sigma$ egymás inverzei τ/σ -ban. Továbbá, ha $t' \tau_i t \subseteq \tau_j$, akkor $t'\sigma \cdot \tau_i \cdot t\sigma \subseteq \tau_j$, azaz $t'\sigma \cdot i \cdot t\sigma = j$ érvényes τ/σ -ban. Így (1.1) illetve (4) alapján $(\lambda_t^*, \varrho_t^*) = (\lambda_{t\sigma}, \varrho_{t\sigma})$, azaz $\xi^* = \sigma^h \xi_\sigma$. Ebből pedig nyilván következik, hogy $\xi^* \circ \xi^{*-1} \geq \sigma$. Ezzel tehát beláttuk, hogy $\xi^* \circ \xi^{*-1}$ a legnagyobb olyan kongruencia τ -n, amely az idempotensek kötegén az $\mathcal{F}$ particiót indukálja.

MEGJEGYZÉS. A 4. Tétel utolsó állítását ugy is beláthattuk volna, hogy észrevevesszük, hogy az (1)-ben definiált ξ reláció benne van $\xi^* \circ \xi^{*-1}$ -ben. Akkor a tranzitív lezártja, ξ^+ is benne van. És mivel $\xi^* \circ \xi^{*-1}$ az $\mathcal{F}$ particiót indukálja τ

idempotens kötegén, az 1. Tételből következik, hogy $\xi^* \circ \xi^{*-1} = \xi^t$ a legnagyobb $\mathcal{F}$ -et indukáló kongruencia T -n.

A 4. Tétel lehetőséget nyújt arra, hogy a legnagyobb $\mathcal{F}$ -et indukáló kongruenciát az 1. Tétel-belitől eltérő módon megadjuk.

5. KÖVETKEZMÉNY. Legyen T egy ortodox félcsoporth B idempotens köteggel. Tegyük fel, hogy $B = \bigcup_{i \in I} F_i$ úgy, hogy a (b) feltétel teljesül T -ben. Ekkor a

$\xi^* = \{(s, t) \in T \times T : s \text{ -nek és } t \text{ -nek létezik olyan } s' \text{ illetve } t' \text{ inverze, hogy valahányszor } i \in I, \text{ mindannyiszor } s' F_i s \subseteq F_{j_1}, t' F_i t \subseteq F_{j_1} \text{ és } s' F_i s \subseteq F_{j_2}, t' F_i t \subseteq F_{j_2} \text{ úgy, hogy } I \text{ -ben } j \mathcal{Q} \bar{j} \text{ és } k \mathcal{Q} \bar{k} \}$

reláció a legnagyobb azok között a kongruenciák között, amelyek B -n az $\mathcal{F} = \{F_i : i \in I\}$ particiót indukálják.

Bizonyítás. A ξ^* homomorfizmus definíciója alapján $s \xi^* \circ \xi^{*-1} t$ akkor és csak akkor, ha s ill. t tetszőleges s' ill. t' inverzére érvényes a következő: valahányszor $i \mathcal{Q} j$, $s' F_i s \subseteq F_{j_1}$, $t' F_i t \subseteq F_{j_1}$, mindannyiszor $i \mathcal{Q} j_1$, és valahányszor $i \mathcal{Q} j$, $s' F_i s \subseteq F_{j_2}$, $t' F_i t \subseteq F_{j_2}$, mindannyiszor $i \mathcal{Q} j_2$. A 3. Lemma következtében $\xi^* \subseteq \xi^* \circ \xi^{*-1}$. A fordított tartalmazás pedig nyilvánvaló. Így a 4. Tételből következik az állítás.

Mielőtt kimondanánk egy analóg állítást a T ortodox félcsoporth legkisebb $\mathcal{F}$ -et indukáló kongruenciájára, egy lemmát bizonyítunk.

6. LEMMA. Legyen T egy B idempotens köteggel ortodox félcsoporth. Tegyük fel, hogy $B = \bigcup_{i \in I} F_i$, és (b) teljesül T -ben. Legyenek s és s' illetve t és t' egymás inverzei T -ben úgy, hogy $s s' \in F_i, t t' \in F_i, s s' \in F_j, t t' \in F_j$, ahol $i \mathcal{Q} \bar{i}$

és $j \in \bar{j}$. Továbbá legyen $e \in \bar{F}_i$ és $f \in \bar{F}_j$, ahol $i \in \bar{i}$ és $j \in \bar{j}$. Ekkor

- (i) $sft' \in \bar{F}_i$ akkor és csak akkor, ha $tf s' \in \bar{F}_i$;
 (ii) ha $tf s' \in \bar{F}_i$ és $s'et \in \bar{F}_j$, akkor $q = ss^*e(tfs')ett^* \in \bar{F}_{i*}$,
 $k = t^*tf(s'et)f s^*s \in \bar{F}_{j*}$ és $qs k = qt k$, $k s'q = k t'q$, feltéve, hogy s^*
 és t^* az s és t inverzei úgy, hogy $tt^* \in \bar{F}_{i*}$ és $t^*t \in \bar{F}_{j*}$;
 (iii) ha $esf = etf$ és $fs'e = ft'e$, akkor $q = e(sft')e \in \bar{F}_i$,
 $k = f(t'es)f \in \bar{F}_j$ és $tk s' \in \bar{F}_i$, $s'qt \in \bar{F}_j$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $sft' \in \bar{F}_i$. Mivel $tf s'$ az sft' egy inverze, $tf s'$ is idempotens, azaz $tf s' \in \bar{F}_{i_1}$ valamely $i_1 (\in I)$ -re. Ekkor i_1 inverze $\bar{i}$ -nak I -ben, azaz $i_1 \in \bar{i}$. Viszont $tf s' = tt'(tf s')ss' \in \bar{F}_{i_1} \bar{i}_1 \bar{i} = \bar{F}_i$, hiszen $i \in \bar{i}$. Így $i = i_1$ és $tf s' \in \bar{F}_i$. A fordított állítás ugyanígy adódik. Ezzel (i)-t igazoltuk.

(ii) bizonyításához tegyük fel, hogy s^* és t^* az s ill. t inverze úgy, hogy $ss^* \in \bar{F}_{i*}$, $tt^* \in \bar{F}_{i*}$, $s^*s \in \bar{F}_{j*}$, $t^*t \in \bar{F}_{j*}$. Nyilván $i^* \in \bar{i}$ és $j^* \in \bar{j}$. Továbbá tegyük fel, hogy $tf s' \in \bar{F}_i$ és $s'et \in \bar{F}_j$. Ekkor nyilván $q = ss^*e(tfs')ett^* \in \bar{F}_{i*} \bar{i} \bar{i} \bar{i}^* = \bar{F}_{i*}$ és $k = t^*tf(s'et)f s^*s \in \bar{F}_{j*} \bar{j} \bar{j} \bar{j}^* = \bar{F}_{j*}$. Továbbá, mivel $(t^*tf)s'et = (t^*tf)s'(ett^*)t$ és $t^*(ett^*)s(t^*tf)$ egymás inverzei és $e(tfs')$ idempotens, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} qs k &= [ss^*e(tfs')ett^*]s[t^*tf(s'et)f s^*s] = \\ &= ss^*et[(t^*tf)s'et][t^*(ett^*)s(t^*tf)][(t^*tf)s'et]f s^*s = \\ &= ss^*(etfs')(etfs^*)s = ss^*(etfs')^2(etfs^*)s = \\ &= [ss^*e(tfs')ett^*]t[t^*tf(s'et)f s^*s] = qt k. \end{aligned}$$

Fordítva, az (iii) állítás igazolásához tegyük fel, hogy $esf = etf$ és $fs'e = ft'e$. Ekkor $g = e(sf't')e = e(sf's')e \in \mathcal{F}_{\bar{i}\bar{i}}; \bar{i} \in \mathcal{F}_{\bar{i}}$, ugyanis $sf's' = s(s'sf's')s'$, ahol $s'sf's' \in \mathcal{F}_{\bar{j}\bar{j}}; \bar{j} \in \mathcal{F}_{\bar{j}}$, és $s(s's)s' = ss' \in \mathcal{F}_{\bar{i}}$ miatt $s\mathcal{F}_{\bar{j}}s' \subseteq \mathcal{F}_{\bar{i}}$. Hasonlóan adódik, hogy $h \in \mathcal{F}_{\bar{j}}$. Továbbá $th's' = tf(t'es)f's' = (tft')e(sf's') \in \mathcal{F}_{\bar{i}\bar{i}}; \bar{i} \in \mathcal{F}_{\bar{i}}$, és ugyanígy $s'gt \in \mathcal{F}_{\bar{j}}$. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

E lemma közvetlen alkalmazásával adódik az 1. Tétel alapján az alábbi következmény:

7. KÖVETKEZMÉNY. Tegyük fel, hogy $\mathcal{T}$ egy ortodox félcsoporthat a $\mathcal{B}$ idempotens köteggel, $\mathcal{B} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i$ és a (b) feltétel teljesül $\mathcal{T}$ -ben. Ekkor az

$\hat{\eta} = \{(st) \in \mathcal{T} \times \mathcal{T} : s\text{-nek ill. } t\text{-nek létezik olyan } s' \text{ ill. } t' \text{ inverze, továbbá létezik olyan } i, j \in I, \text{ hogy } ss', tt' \in \mathcal{F}_i, s's, t't \in \mathcal{F}_j \text{ és valamely } e \in \mathcal{F}_i \text{ és } f \in \mathcal{F}_j \text{ esetén } tfs' \in \mathcal{F}_i \text{ és } s'et \in \mathcal{F}_j\}$

reláció tranzitív lezártja a legkisebb olyan kongruencia $\mathcal{T}$ -n, amely $\mathcal{B}$ -n az $\mathcal{A} = \{\mathcal{F}_i : i \in I\}$ particiót indukálja.

A következő tétel közvetlenül megadja $\mathcal{T}$ legkisebb $\mathcal{A}$ -et indukáló kongruenciáját.

8. TÉTEL. Legyen $\mathcal{T}$ egy ortodox félcsoporthat a $\mathcal{B}$ idempotens köteggel. Tegyük fel, hogy $\mathcal{B} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i$ és a (b) feltétel teljesül $\mathcal{T}$ -ben. Az

$\eta^* = \{(st) \in \mathcal{T} \times \mathcal{T} : s\text{-nek és } t\text{-nek létezik olyan } s' \text{ ill. } t' \text{ inverze, továbbá létezik olyan } i, \bar{i}, j, \bar{j} \in I, \text{ hogy } i\mathcal{Q}\bar{i}, j\mathcal{Q}\bar{j} \text{ teljesül } I\text{-ben és } ss' \in \mathcal{F}_i, tt' \in \mathcal{F}_{\bar{i}}, s's \in \mathcal{F}_j, t't \in \mathcal{F}_{\bar{j}}, \text{ továbbá valamely } e \in \mathcal{F}_{\bar{i}}, f \in \mathcal{F}_{\bar{j}} \text{ esetén } esf = etf \text{ és } fs'e = ft'e\}$

illette

$\hat{\eta}^* = \{(s, t) \in T \times T : s \text{-nek és } t \text{-nek létezik olyan } s' \text{ ill. } t' \text{ inverze, továbbá létezik olyan } i, \bar{i}, j, \bar{j} \in I, \text{ hogy } i \mathcal{Q} \bar{i}, j \mathcal{Q} \bar{j} \text{ teljesül } I \text{-ben és } ss' \in \mathcal{F}_i, tt' \in \mathcal{F}_{\bar{i}}, s's \in \mathcal{F}_j, t't \in \mathcal{F}_{\bar{j}}, \text{ továbbá valamely } e \in \mathcal{F}_{\bar{i}}, f \in \mathcal{F}_{\bar{j}} \text{ esetén } tfs' \in \mathcal{F}_i \text{ és } set \in \mathcal{F}_j\}$

relációk bármelyike megadja azt a legkisebb kongruenciát T -n, amely az $\mathcal{G} = \{\mathcal{F}_i : i \in I\}$ partíciót indukálja B -n.

Bizonyítás. A 6. Lemma (ii) és (iii) állításából következik, hogy $\eta^* = \hat{\eta}^*$. A továbbiakban az $\hat{\eta}^*$ relációra igazoljuk a tétel állítását. Nyilvánvalóan $\hat{\eta}^*$ reflexív reláció.

Tegyük fel most, hogy $s \hat{\eta}^* t$. Definíció szerint ekkor létezik s -nek ill. t -nek olyan s' ill. t' inverze, és léteznek olyan $i, \bar{i}, j, \bar{j}$ elemek I -ben, hogy $i \mathcal{Q} \bar{i}, j \mathcal{Q} \bar{j}, ss' \in \mathcal{F}_i, tt' \in \mathcal{F}_{\bar{i}}, s's \in \mathcal{F}_j, t't \in \mathcal{F}_{\bar{j}}$, és valamely $e \in \mathcal{F}_{\bar{i}}, f \in \mathcal{F}_{\bar{j}}$ esetén $tfs' \in \mathcal{F}_i$ és $set \in \mathcal{F}_j$. A 6. Lemma (i) állítása miatt ekkor $sft' \in \mathcal{F}_{\bar{i}}$ és $t'es \in \mathcal{F}_{\bar{j}}$. A 6. Lemma (ii) állítását (s és t szerepének felcserélésével) alkalmazva kapunk olyan $q \in \mathcal{F}_i$ és $k \in \mathcal{F}_j$ elemeket, hogy $qs k = gt k$ és $k s' q = k t' q$. Ennek segítségével pedig a 6. Lemma (iii) állítása alapján (s és t szerepének felcserélésével) adódnak olyan $\bar{e} \in \mathcal{F}_{\bar{i}}$ és $\bar{f} \in \mathcal{F}_{\bar{j}}$ elemek, hogy $s \bar{e} t' \in \mathcal{F}_{\bar{i}}$ és $t' \bar{f} s \in \mathcal{F}_{\bar{j}}$. Ezzel beláttuk, hogy $\hat{\eta}^*$ szimmetrikus.

Legyen most s és t ugyanolyan, mint az előbb, továbbá legyen $t \hat{\eta}^* u$. Definíció szerint ekkor t -nek és u -nak léteznek olyan t^* és u^* inverzei és léteznek olyan $i^*, \bar{i}^*, j^*, \bar{j}^*$ elemek I -ben, hogy $i^* \mathcal{Q} \bar{i}^*, j^* \mathcal{Q} \bar{j}^*, tt^* \in \mathcal{F}_{i^*}, uu^* \in \mathcal{F}_{\bar{i}^*}, t^* t \in \mathcal{F}_{j^*}, u^* u \in \mathcal{F}_{\bar{j}^*}$, és valamely $g \in \mathcal{F}_{\bar{i}^*}, k \in \mathcal{F}_{j^*}$ esetén $ukt^* \in \mathcal{F}_{i^*}$ és $t^* q u \in \mathcal{F}_{j^*}$. Világos, hogy ekkor $i \mathcal{Q} \bar{i}^*$, hiszen $tt' \mathcal{Q} tt^*$ miatt $\bar{i} \mathcal{Q} i^*$. Hasonlóan $j \mathcal{Q} \bar{j}^*$. Továbbá, $k t^* t f \in \mathcal{F}_{\bar{j}^*} j^* \bar{j} = \mathcal{F}_{\bar{j}^*}$ és

$ett^*q \in \bar{F}_{\bar{i}} * \bar{i}^* = \bar{F}_{\bar{i}}^*$. És mivel $u(k t^* t f) s' = (u k t^*)(t f s') \in \bar{F}_{\bar{i}} * \bar{i} = \bar{F}_{\bar{i}}$ és $s'(ett^*q)u = (s'et)(t^*q u) \in \bar{F}_{\bar{j}} * \bar{j} = \bar{F}_{\bar{j}}$, teljesül $s \hat{\eta}^* t$. Így $\hat{\eta}^*$ tranzitív, azaz ekvivalencia reláció.

Mielőtt a kompatibilitás bizonyítására rátérnénk, vegyük észre, hogy $\eta^* \subseteq \zeta^*$. (Ez utóbbit az 5. Következményben definiáltuk.) Ugyanis, ha $s \eta^* t$, akkor létezik s -nek és t -nek olyan s' ill. t' inverze, hogy $s s' \in \bar{F}_{\bar{i}}$, $t t' \in \bar{F}_{\bar{i}}$, $s' s \in \bar{F}_{\bar{j}}$ és $t' t \in \bar{F}_{\bar{j}}$, ahol $i \mathcal{Q} \bar{i}$ és $j \mathcal{Q} \bar{j}$, továbbá léteznek olyan $e \in \bar{F}_{\bar{i}}$ és $f \in \bar{F}_{\bar{j}}$ elemek, hogy

$$(5) \quad e s f = e t f \quad \text{és} \quad f s' e = f t' e.$$

Legyen k az I egy tetszőleges eleme és tételezzük fel, hogy $s' \bar{F}_k s \subseteq \bar{F}_m$ és $t' \bar{F}_k t \subseteq \bar{F}_n$. Nyilván ekkor (3) alapján $s' \bar{F}_{i k i} s \subseteq \bar{F}_m$ illetve $t' \bar{F}_{\bar{i} k \bar{i}} t \subseteq \bar{F}_n$ is érvényes. Másrészt a 2. Lemma szerint $n = \bar{j} n \bar{j}$. Így

$$f t' e \bar{F}_k e t f \subseteq f t' \bar{F}_{\bar{i} k \bar{i}} t f \subseteq f \bar{F}_n f \subseteq \bar{F}_{\bar{j}} n \bar{j} = \bar{F}_n.$$

Mivel $i k i \mathcal{Q} \bar{i} k \bar{i}$, a 3. Lemma alapján $s' \bar{F}_{i k i} s \subseteq \bar{F}_{\bar{m}}$, ahol $m \mathcal{Q} \bar{m}$. Ezért

$$f s' e \bar{F}_k e s f = f s' e \bar{F}_k (e s s') s f \subseteq f s' \bar{F}_{i k i} s f \subseteq f \bar{F}_{\bar{m}} f \subseteq \bar{F}_{\bar{j}} \bar{m} \bar{j}.$$

Az (5) egyenlőségek alapján ebből következik, hogy $n = \bar{j} \bar{m} \bar{j}$. Ugyanugy, mint fent, látható, hogy $\bar{m} = \bar{j} \bar{m} \bar{j}$. Ebből pedig közvetlenül adódik, hogy $\bar{m} \bar{j} = \bar{m} \bar{j} \bar{j} = \bar{m} \bar{j} = \bar{m}$. Így $n = \bar{j} \bar{m} \bar{j} \mathcal{Q} \bar{m} \bar{j} = \bar{m} \mathcal{Q} m$, és éppen ezt akartuk bizonyítani. Hasonlóan igazolható, hogy ha $s \bar{F}_k s' \subseteq \bar{F}_m$ és $t \bar{F}_k t' \subseteq \bar{F}_n$, akkor $m \mathcal{Q} n$.

Az $\hat{\eta}^*$ reláció kompatibilitását elegendő balról ellenőrizni, jobbról hasonlóan megy. Legyen x a T egy tetszőleges eleme, és legyen $s \hat{\eta}^* t$. Az $\eta^* = \hat{\eta}^*$ egyenlőség miatt

akkor s -nek ill. t -nek van olyan s' ill. t' inverze, hogy $ss' \in F_i, tt' \in F_{\bar{i}}, s's \in F_j, t't \in F_{\bar{j}}$, ahol $i \in I$ és $j \in J$, továbbá léteznek olyan $e \in F_{\bar{i}}, f \in F_{\bar{j}}$ elemek, hogy $esf = etf$ és $fse = fte$. A 3. Lemma biztosítja, hogy $rs s' r' \in F_m, r t t' r' \in F_{\bar{m}}$ úgy, hogy $m \in I$. Az $\hat{\eta}^* \subseteq \zeta^*$ egyenlőtlenség miatt pedig $s' r' r s \in F_n, t' r' r t \in F_{\bar{n}}$, ahol $n \in I$. A 2. Lemma és (3) alapján $\bar{n} = j \bar{n} j$. Mivel $t' r' r t \in F_{\bar{n}}$, azért a (b) tulajdonság következtében $h = [t'(r' r e) t] f \in F_{\bar{n} \bar{j}} = F_{\bar{n}}$. A 3. Lemma, a (b) tulajdonság és az

$$r t h s' r' = r t t' r' r (e t f) s' r' = (r t t' r') [r (e s f s') r']$$

egyenlőség miatt $r t h s' r' \in F_m$, mivel $e s f s' \in F_{\bar{i}} = F_i$ és $rs s' r' \in F_m$. Hasonlóan kapjuk, hogy (b) következtében $e t f t' e \in F_{\bar{i}}$ és $r t t' r' \in F_{\bar{m}}$ miatt $g = r e t f t' e r' \in F_{\bar{m}}$, $e s s' \in F_{\bar{i}} = F_i$ és $s' r' r s \in F_n$ miatt $s' r' r (e s s') s = s' r' r e s \in F_n$, valamint $t' r' r t \in F_{\bar{n}}$ miatt $t' e r' r t \in F_{\bar{n}}$. Így

$$s' r' g r t = s' r' r (e t f) t' e r' r t = (s' r' r e s) f (t' e r' r t) \in F_{n \bar{j} \bar{n}} = F_{n \bar{n}} = F_n.$$

Ezzel beláttuk, hogy $rs \hat{\eta}^* rt$, ami azt mutatja, hogy $\hat{\eta}^*$ balról kompatibilis.

Az $\hat{\eta}^*$ definíciójából közvetlenül látszik, hogy ha $a, b \in F_i$, akkor $a \hat{\eta}^* b$. Fordítva, tegyük fel, hogy $a \in F_i, b \in F_j$ úgy, hogy $a \hat{\eta}^* b$. Ekkor a ill. b minden a^* ill. b^* inverze idempotens, azaz $a^* \in F_{i^*}, b^* \in F_{j^*}$ és $i \in I, j \in J$ teljesül I -ben. Így $a \hat{\eta}^* b$ miatt $i \in J$, és létezik olyan $a' \in F_{i'}, b' \in F_{j'}$ inverze a -nak ill. b -nek, és léteznek olyan $e \in F_{j' j'}, f \in F_{j' j}$ idempotensek, hogy $b f a' \in F_{i' i'}$ és $a' e b \in F_{i' i'}$. Viszont $b f a' \in F_{j' j' j' i'} = F_{j' i'}$ és $a' e b \in F_{i' j' j' j} = F_{i' j}$, amiből következik, hogy $i' i' = j' i'$ és $i' i' = i' j$.

Mivel ezek az elemek az I egy $\mathcal{B}$ -osztályában vannak, $i \mathcal{Q} j$ és $i \mathcal{L} j$ adódik, azaz $i=j$. Ezzel igazoltuk, hogy $\hat{\eta}^*$ az $\mathcal{F}$ particiót indukálja $\mathcal{B}$ -n.

Hogy belássuk, hogy $\hat{\eta}^*$ a legkisebb ilyen kongruencia, tegyük fel, hogy σ egy tetszőleges $\mathcal{F}$ -et indukáló kongruencia. Legyen $s \hat{\eta}^* t$. Igazoljuk, hogy $s \sigma t$ ebből következik, azaz $\hat{\eta}^* \subseteq \sigma$. Az $\hat{\eta}^*$ definíciója miatt létezik s -nek ill. t -nek olyan s' ill. t' inverze, hogy $s s' \in \mathcal{F}_i$, $t t' \in \mathcal{F}_{\bar{i}}$, $s s' \in \mathcal{F}_j$, $t t' \in \mathcal{F}_{\bar{j}}$, ahol $i \mathcal{Q} \bar{i}$ és $j \mathcal{L} \bar{j}$, valamint találhatók olyan $e \in \mathcal{F}_{\bar{i}}$ és $f \in \mathcal{F}_{\bar{j}}$ elemek, hogy $t f s' \in \mathcal{F}_i$ és $s' e t \in \mathcal{F}_j$. Mivel σ az $\mathcal{F}$ particiót indukálja $\mathcal{B}$ -n, ebből következik, hogy

$$\begin{aligned} s' \sigma t \sigma &= s' \sigma \cdot (t t') \sigma \cdot t \sigma = s' \sigma \cdot e \sigma \cdot t \sigma = (s' e t) \sigma = (s' s) \sigma = \\ &= s' \sigma \cdot s \sigma \quad . \end{aligned}$$

Ebből pedig következik, hogy

$$(6) \quad s \sigma \cdot s \sigma = s' \sigma \cdot s \sigma \cdot t' \sigma \cdot t \sigma \quad .$$

Másrészt, a 6. Lemma (i) állítása biztosítja, hogy $s f t' \in \mathcal{F}_{\bar{i}}$, így az előző gondolatmenettel kapjuk, hogy $s \sigma \cdot t' \sigma = t \sigma \cdot t' \sigma$. Így (6) alapján

$$s \sigma = s \sigma \cdot s' \sigma \cdot s \sigma = s \sigma \cdot t' \sigma \cdot t \sigma = t \sigma \cdot t' \sigma \cdot t \sigma = t \sigma \quad .$$

Tehát $s \sigma t$, amit bizonyítani akartunk. Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

MEGJEGYZÉSEK 1. Az 5. Következmény bizonyításából kiderül, hogy ζ^* definíciójában a "létezik olyan s' ill. t' inverze, hogy" helyettesíthető a "minden s' ill. t' inverzére" fordú-

lattal. Ugyanez igaz az η^* ill. $\hat{\eta}^*$ relációkra is. Hiszen ha s és t egy-egy s' ill. t' inverzére igaz, hogy $ss' \in \mathcal{F}_i$, $tt' \in \mathcal{F}_{\bar{i}}$, $s's \in \mathcal{F}_j$, $t't \in \mathcal{F}_{\bar{j}}$, ahol $i \mathcal{Q} \bar{i}$ és $j \mathcal{Q} \bar{j}$, akkor nyilván minden s^*, t^* inverzre $ss^* \in \mathcal{F}_{i^*}$, $tt^* \in \mathcal{F}_{\bar{i}^*}$, $s^*s \in \mathcal{F}_{j^*}$, $t^*t \in \mathcal{F}_{\bar{j}^*}$ úgy, hogy $i^* \mathcal{Q} \bar{i}^*$ és $j^* \mathcal{Q} \bar{j}^*$. Továbbá, ha $tf's' \in \mathcal{F}_i$ és $s't \in \mathcal{F}_j$, akkor a 6. Lemma(ii) állítása miatt léteznek olyan $q \in \mathcal{F}_{\bar{i}^*}$ és $r \in \mathcal{F}_{\bar{j}^*}$ elemek, hogy $gs'h = gth$ és $hs'q = ht'g$. A 6. Lemma (iii) miatt ekkor léteznek olyan $\bar{e} \in \mathcal{F}_{\bar{i}^*}$, $\bar{f} \in \mathcal{F}_{\bar{j}^*}$ elemek, hogy $t\bar{f}s' \in \mathcal{F}_i$ és $s'\bar{e}t \in \mathcal{F}_j$. Ekkor pedig $\bar{f}s's \in \mathcal{F}_{\bar{j}^*}$, $j = \bar{j}^*$, $s's'\bar{e} = \mathcal{F}_{i\bar{i}^*} = \mathcal{F}_{\bar{i}^*}$ és $t(\bar{f}s's)^* = (t\bar{f}s')s^* \in \mathcal{F}_{i^*} = \mathcal{F}_{\bar{i}^*}$, $s^*(s's'\bar{e})t = s^*s(s'\bar{e}t) \in \mathcal{F}_{j^*} = \mathcal{F}_{\bar{j}^*}$. És éppen ezt akartuk bizonyítani.

2. A 8. Tétel alapján egyszerűbben bizonyíthatjuk J.MEAKIN-nek az 1. Tételben megfogalmazott, η -ra vonatkozó eredményét. Bizonyításunkból látható az $\eta = \hat{\eta}$ egyenlőség miatt, hogy η reflexív, szimmetrikus, kompatibilis. Továbbá, ha $a_i b_i \in \mathcal{F}_i$, akkor $a \eta b$. Másrészt nyilvánvalóan $\eta \subseteq \eta^*$, és η^* tranzitivitása miatt η tranzitív lezártja, $\eta^+ \subseteq \eta^*$. Akkor viszont η^+ éppen az $\mathcal{Q}$ partíciót indukálja $\mathcal{B}$ -n. És mivel η^* a legkisebb $\mathcal{F}$ -et indukáló kongruencia, $\eta^+ = \eta^*$.

Legyen most $\mathcal{B}$ egy olyan köteg, mely $\mathcal{F}_i (i \in I)$ részkötegeinek I kötege, azaz $\mathcal{B} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i$. Az $\{\mathcal{F}_i : i \in I\}$ partíciót jelöljük $\mathcal{F}$ -fel. Az $\mathcal{Q}$ partícióhoz tartozó ekvivalencia relációt jelöljük $\pi_{\mathcal{F}}$ -fel. Jelölje $\tau_{e_{ff}}^{\mathcal{F}}$ az összes olyan $e\mathcal{B}e$ -ről $f\mathcal{B}f$ -re való $t_{e_{ff}}$ izomorfizmus halmazát, amely rendelkezik a következő tulajdonsággal: minden $x, y (e \in \mathcal{B}e)$ -re $x\pi_{\mathcal{F}}y$ akkor és csak akkor, ha $x t_{e_{ff}} \pi_{\mathcal{F}} y t_{e_{ff}}$. Tekintsük a $W(\mathcal{B})$ Hall-féle félcsoporthnak a következő részhalmazát:

$$(7) \quad W^{\mathcal{F}}(\mathcal{B}) = \{ (\psi(\oplus_f t_{ef}^{-1}), \varphi(\oplus_e t_{ef})) : (e, f) \in \mathcal{U}, t_{ef} \in T_{ef}^{\mathcal{F}} \}.$$

Meg fogjuk mutatni, hogy $W^{\mathcal{F}}(\mathcal{B})$ teljes ortodox részfélcsoportja $W(\mathcal{B})$ -nek, és $W^{\mathcal{F}}(\mathcal{B})$ -n van olyan kongruencia, amely $W^{\mathcal{F}}(\mathcal{B})$ idempotens kötegén, $\mathcal{B}\xi^1$ -n az $\mathcal{F}' = \{\tau_i \xi^1 : i \in I\}$ particiót indukálja. Közben azonban szükségünk lesz a következő lemmára:

9. LEMMA. (T.E.HALL [4]). Legyen adott a $\mathcal{B}$ köteg négy eleme, e, f, g és h úgy, hogy $e \mathcal{U} f$ és $g \mathcal{U} h$ (definíciót lásd az 1.6. Tétel után). Legyen $t_{ef} \in T_{ef}$ és $t_{gh} \in T_{gh}$. Ekkor

$$\oplus_e t_{ef} \oplus_g t_{gh} = \oplus_h t_{h, l} \quad \text{és} \quad \oplus_h t_{gh}^{-1} \oplus_f t_{ef}^{-1} = \oplus_l t_{l, k},$$

ahol $k = (fgf)t_{ef}^{-1}$, $l = (gfg)t_{gh}$, valamint

$$t_{h, l} = (t_{ef} | k \mathcal{B} l) (\oplus_{fgf} | fgf \mathcal{B} fgf) (t_{gh} | gfg \mathcal{B} gfg) \in T_{h, l}$$

és

$$t_{l, k} = (t_{gh}^{-1} | l \mathcal{B} k) (\oplus_{fgf} | gfg \mathcal{B} gfg) (t_{ef}^{-1} | fgf \mathcal{B} fgf) \in T_{l, k}.$$

Továbbá, $t_{l, k} = t_{h, l}^{-1}$.

10. TÉTEL. Tegyük fel, hogy a $\mathcal{B}$ köteg τ_i ($i \in I$) részkötegeinek I kötege. Az $\mathcal{F} = \{\tau_i : i \in I\}$ particióra definiáljuk a $W^{\mathcal{F}}(\mathcal{B})$ halmazt (7) szerint. $W^{\mathcal{F}}(\mathcal{B})$ teljes ortodox részfélcsoportja $W(\mathcal{B})$ -nek, és $W^{\mathcal{F}}(\mathcal{B})$ -n létezik olyan kongruencia, amely az idempotensek kötegén, $\mathcal{B}\xi^1$ -n az $\mathcal{F}' = \{\tau_i \xi^1 : i \in I\}$ particiót indukálja. Továbbá, ha τ egy tetszőleges ortodox félcsoport a $\mathcal{B}$ idempotens köteggel, akkor ezen pontosan akkor létezik olyan kongruencia, amely az $\mathcal{F}$ particiót indukálja $\mathcal{B}$ -n, ha az (1.1) alapján definiált ξ homomorfizmus képe, $\tau \xi \subseteq W^{\mathcal{F}}(\mathcal{B})$.



Bizonyítás. Először mutassuk meg, hogy $W^{\mathcal{F}}(\mathcal{B})$ teljes ortodox részfélcsoportja $W(\mathcal{B})$ -nek. Tegyük fel, hogy $e \mathcal{U} f$ és $g \mathcal{U} h$ érvényes $\mathcal{B}$ -ben, továbbá $t_{e,f} \in T_{e,f}^{\mathcal{F}}$ és $t_{g,h} \in T_{g,h}^{\mathcal{F}}$. A 9. Lemma^{a)} alapján $\oplus_e t_{e,f} \oplus_g t_{g,h} = \oplus_k t_{k,l}$, ahol

$$t_{k,l} = (t_{e,f} | k \mathcal{B} k) (\oplus_{gfg} | fgf \mathcal{B} fgf) (t_{g,h} | gfg \mathcal{B} gfg) ,$$

$k = (fgf)t_{e,f}^{-1}$ és $l = (gfg)t_{g,h}$. Itt $(t_{e,f} | k \mathcal{B} k) \in T_{k,fgf}^{\mathcal{F}}$ és $(t_{g,h} | gfg \mathcal{B} gfg) \in T_{gfg,l}^{\mathcal{F}}$ nyilván teljesülnek, és mivel $\mathcal{B} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i$, azért $(\oplus_{gfg} | fgf \mathcal{B} fgf) \in T_{fgf,gfg}^{\mathcal{F}}$ is érvényes. Tehát $t_{k,l} \in T_{k,l}^{\mathcal{F}}$. Ebből következik a 9. Lemma alapján, hogy $\oplus_k t_{g,h}^{-1} \oplus_f t_{e,f}^{-1} = \oplus_l t_{k,l}^{-1}$, ahol $t_{k,l}^{-1} \in T_{l,k}^{\mathcal{F}}$. Így tehát $W^{\mathcal{F}}(\mathcal{B})$ zárt a szorzásra. Ha $(\psi(\oplus_f t_{e,f}^{-1}), \psi(\oplus_e t_{e,f}))$ egy tetszőleges eleme $W^{\mathcal{F}}(\mathcal{B})$ -nek, akkor $t_{e,f} \in T_{e,f}^{\mathcal{F}}$ és $t_{e,f}^{-1} \in T_{f,e}^{\mathcal{F}}$. Így $(\psi(\oplus_e t_{e,f}), \psi(\oplus_f t_{e,f}^{-1})) \in W^{\mathcal{F}}(\mathcal{B})$, és a 9. Lemma felhasználásával közvetlen számolással ellenőrizhető, hogy e két elem egymás inverze $W^{\mathcal{F}}(\mathcal{B})$ -ben. Ezért $W^{\mathcal{F}}(\mathcal{B})$ ortodox részfélcsoport $W(\mathcal{B})$ -ben. $W^{\mathcal{F}}(\mathcal{B})$ nyilvánvalóan tartalmazza $W(\mathcal{B})$ összes idempotens elemét, hiszen minden $e(e \in \mathcal{B})$ -re $e \mathcal{B} e$ identikus automorfizmus eleme $T_{e,e}^{\mathcal{F}}$ -nek. Ezzel beláttuk, hogy $W^{\mathcal{F}}(\mathcal{B})$ teljes ortodox részfélcsoportja $W(\mathcal{B})$ -nek.

Most bebizonyítjuk, hogy létezik $W^{\mathcal{F}}(\mathcal{B})$ -n olyan kongruencia, amely az idempotensek kötegén, $\mathcal{B} \mathcal{Z}^1$ -n az $\mathcal{F}^1 = \{\mathcal{F}_i \mathcal{Z}^1 : i \in I\}$ partíciót indukálja. Ehhez az 1. Tétel és az azt követő Megjegyzés értelmében elegendő ellenőriznünk, hogy tetszőleges $i(i \in I)$ -re és tetszőleges $t_{e,f} \in T_{e,f}^{\mathcal{F}}$ -re

$$(8) \quad (\psi(\oplus_e t_{e,f}), \psi(\oplus_f t_{e,f}^{-1})) \mathcal{F}_i \mathcal{Z}^1 (\psi(\oplus_f t_{e,f}^{-1}), \psi(\oplus_e t_{e,f})) \subseteq \mathcal{F}_j \mathcal{Z}^1$$

valamely $j(j \in I)$ -re. Legyen $g \in \mathcal{B}$. Ekkor a 9. Lemma alapján

$$\oplus_f t_{e,f}^{-1} \oplus_g = \oplus_k t_{k,geg} , \quad \text{ahol } k = (ege)t_{e,f} \quad \text{és} \quad t_{k,geg} =$$

$(t_{ef}^{-1} | \mathbb{B} \mathbb{B} \mathbb{B}) (\oplus_{geg} | ege \mathbb{B} ege) \in T_{\mathbb{B}, geg}^{\mathcal{F}}$. Továbbá $\oplus_{\mathbb{B}} t_{\mathbb{B}, geg} \oplus_e t_{ef} =$
 $= \oplus_{\mathbb{B}} t_{\mathbb{B}, geg} (\oplus_{ege} | geg \mathbb{B} geg) (t_{ef} | ege \mathbb{B} ege)$, hiszen $(geg)e(geg) =$
 $= geg$ és $e(geg)e = ege$. Mivel $(\oplus_{ege} | geg \mathbb{B} geg)$ és $(\oplus_{geg} | ege \mathbb{B} ege)$
 illetve $(t_{ef}^{-1} | \mathbb{B} \mathbb{B} \mathbb{B})$ és $(t_{ef} | ege \mathbb{B} ege)$ egymás inverzei, azért
 $t_{\mathbb{B}, geg} (\oplus_{ege} | geg \mathbb{B} geg) (t_{ef} | ege \mathbb{B} ege)$ a $\mathbb{B} \mathbb{B} \mathbb{B}$ köteg identikus automor-
 fizmusa. Így tehát $\oplus_f t_{ef}^{-1} \oplus_g \oplus_e t_{ef} = \oplus_{\mathbb{B}}$. Ebből következik, hogy
 $W^{\mathcal{F}}(\mathbb{B})$ -ben

$$(\psi(\oplus_e t_{ef}), \varphi(\oplus_f t_{ef}^{-1})) (\psi(\oplus_g), \varphi(\oplus_g)) (\psi(\oplus_f t_{ef}^{-1}), \varphi(\oplus_e t_{ef})) = (\psi(\oplus_{\mathbb{B}}), \varphi(\oplus_{\mathbb{B}})),$$

ahol $\mathbb{B} = (ege)t_{ef}$. Ha $g \mathbb{B} \bar{g}$, akkor nyilván $ege \mathbb{B} e\bar{g}e$,
 és így $t_{ef} \in T_{ef}^{\mathcal{F}}$ miatt $\mathbb{B} = (ege)t_{ef} \mathbb{B} (e\bar{g}e)t_{ef} = \bar{\mathbb{B}}$ is telje-
 sül. Tehát minden $i \in I$ -hez van olyan $j \in I$, hogy (8)
 fennáll. Éppen ezt akartuk bizonyítani.

A tétel utolsó állításának bizonyításához tegyük fel
 először, hogy T olyan $\mathbb{B}$ idempotens kötegű ortodox félcsop-
 port, amelyen létezik $\mathcal{F}$ -et indukáló kongruencia. A $\mathcal{F}$
 homomorfizmus definíciója alapján (1.1) miatt elegendő belát-
 nunk, hogy minden olyan $t, t' \in T$ elempárra, amelyek egymás
 inverzei, $\oplus_{t, t'} \in T_{t, t'}^{\mathcal{F}}$. Ha $x, y \in t t' \mathbb{B} t t'$ és $x \mathbb{B} y$,
 akkor $x \oplus_{t, t'} \mathbb{B} y \oplus_{t, t'}$, ugyanis az 1. Tétel szerint (b) teljesül
 T -n. Ugyanez áll a $\oplus_{t, t'}$ izomorfizmusra is. És mivel $\oplus_{t, t'}$
 és $\oplus_{t, t'}$ egymás inverzei, az $x, y \in t t' \mathbb{B} t t'$ elemekre $x \mathbb{B} y$
 akkor és csak akkor, ha $x \oplus_{t, t'} \mathbb{B} y \oplus_{t, t'}$. Ezzel beláttuk, hogy
 $T_{\mathcal{F}} \subseteq W^{\mathcal{F}}(\mathbb{B})$. Minthogy $T_{\mathcal{F}}$ teljes ortodox részfélcsoportja
 $W(\mathbb{B})$ -nek, teljes ortodox részfélcsoportja $W^{\mathcal{F}}(\mathbb{B})$ -nek is.

Fordítva, legyen most T egy olyan $\mathbb{B}$ idempotens köte-
 gű ortodox félcsoport, amelyre érvényes, hogy $T_{\mathcal{F}} \subseteq W^{\mathcal{F}}(\mathbb{B})$.
 Nyilván $T_{\mathcal{F}}$ ekkor teljes ortodox részfélcsoportja $W^{\mathcal{F}}(\mathbb{B})$ -nek,
 és így $T_{\mathcal{F}}$ -n létezik olyan $\mathcal{G}$ kongruencia, amely $T_{\mathcal{F}}$

idempotens kötegén, $\mathcal{B}\xi'$ -n az $\mathcal{F}' = \{\tau_i \xi' : i \in I\}$ particiót indukálja. Akkor a $(\xi \sigma^h) \circ (\xi \sigma^h)^{-1}$ kongruencia τ -n az $\mathcal{F}$ particiót indukálja, mivel ξ' izomorfizmus. Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

3. Részköteg-parcelláló kongruenciák

Legyen $\mathcal{B}$ egy tetszőleges köteg. Tegyük fel, hogy δ egy olyan kongruencia reláció $\mathcal{B}$ -n, hogy $\delta \subseteq \mathcal{D}$. Legyen $\bar{\mathcal{B}}$ a $\mathcal{B}$ olyan részkötege, amely δ -osztályok egyesítése. A rövidség kedvéért az ezeket a feltételeket kielégítő $(\bar{\mathcal{B}}, \delta)$ párt asszociált párnak nevezzük a továbbiakban.

Tegyük fel, hogy $\mathcal{T}$ egy ortodox félcsoporthoz a $\mathcal{B}$ idempotens köteggel. Legyen $(\bar{\mathcal{B}}, \delta)$ asszociált pár $\mathcal{B}$ -ben.

DEFINÍCIÓ. A $\mathcal{T}$ félcsoporthoz κ kongruenciáját $(\bar{\mathcal{B}}, \delta)$ -parcellálónak nevezzük, ha a következő feltételeket teljesíti:

(i) $\delta \subseteq \kappa|_{\mathcal{B}}$,

(ii) minden olyan κ -osztály, amely tartalmaz idempotens elemet, tartalmaz $\bar{\mathcal{B}}$ -beli elemet, és

(iii) egy κ -osztályhoz tartozó $\bar{\mathcal{B}}$ -beli elemek egy δ -osztályban vannak, és ez a legnagyobb δ -osztály ebben a κ -osztályban. (A δ -osztályok rendezésén a $\mathcal{B}/\delta$ köteg természetes rendezését értjük.)

Speciálisan, ha δ az identikus kongruencia, akkor κ -t $\bar{\mathcal{B}}$ -szeparáló kongruenciának hívjuk. Ebben az esetben (i) triviálisan teljesül, (ii) és (iii) pedig azt jelenti, hogy minden idempotens elemet tartalmazó κ -osztály tartalmaz pontosan egy $\bar{\mathcal{B}}$ -beli elemet, amely a legnagyobb idempotens ebben a κ -osztályban. Világos, hogy a $\bar{\mathcal{B}}$ -szeparáló kongruenciák éppen az idempotens-szeparáló kongruenciák. Másrészt, a $\mathcal{T}$ ortodox félcsoporthoz legkisebb inverz kongruenciája $(\mathcal{B}, \mathcal{D})$ -parcelláló. Ha egy $\mathcal{T}$ ortodox félcsoporthoz idempotens kötegében

van egy legnagyobb $\mathcal{D}$ $\mathcal{D}$ -osztály, akkor τ csoport-kongruenciái tekinthetők $(\mathcal{D}, \mathcal{D})$ -parcelláló kongruenciának. Az inverz félcsoporthok osztályában minden részköteg-parcelláló kongruencia részköteg-szeparáló, mivel félhálókön a $\mathcal{D}$ reláció identikus.

Ebben a fejezetben a részköteg-parcelláló kongruenciák tulajdonságait vizsgáljuk. Megmutatjuk, hogy egy τ ortodox félcsoporth $(\bar{\mathcal{B}}, \sigma)$ -parcelláló kongruenciái idempotens-ekvivalensek, és hogy a (2.1) és (2.2)-ben definiált ζ ill. η megadják a legnagyobb ill. legkisebb $(\bar{\mathcal{B}}, \sigma)$ -parcelláló kongruenciákat. Igazoljuk, hogy egy ortodox félcsoporthban minden részköteg-parcelláló kongruencia szerinti idempotens kongruencia-osztály ortodox részfélcsoporthot alkot. Definiáljuk a részköteg-parcelláló kongruenciák egy részosztályát, az ugynevezett erős részköteg-parcelláló kongruenciákat. Az ortodox félcsoporthok erős részköteg-szeparáló illetve erős részköteg-parcelláló kongruencia szerinti bővítéseit írjuk majd le a következő két fejezetben. Végül azt vizsgáljuk, hogy egy $\mathcal{B}$ köteg mely $\bar{\mathcal{B}}$ részkötegeihez létezik $(\bar{\mathcal{B}}, \sigma)$ -parcelláló ill. $\bar{\mathcal{B}}$ -szeparáló kongruencia.

A [15]-ben megjelenő eredményeket itt bizonyítás nélkül közöljük.

A részköteg-parcelláló ill. részköteg-szeparáló kongruenciák definiálása után rögtön felmerül a kérdés, hogy egy kongruencia mikor részköteg-parcelláló ill. részköteg-szeparáló.

1. ÁLLÍTÁS. Legyen τ egy $\mathcal{B}$ idempotens kötegu ortodox félcsoporth és α egy kongruencia τ -n.

(i) A κ kongruencia akkor és csak akkor részköteg-parcelláló, ha minden idempotens κ -osztály idempotens kötegében van legnagyobb $\mathcal{D}$ -osztály, és ezek egyesítése $\mathcal{B}$ -nek részkötege.

(ii) A κ kongruencia akkor és csak akkor részköteg-sze-
paráló, ha minden idempotens κ -osztályban van legnagyobb
idempotens elem, és ezek halmaza $\mathcal{B}$ -nek részkötege.

Bizonyítás. Az (i) állítás igazolásához először tegyük fel, hogy $\bar{\mathcal{B}}, \delta$ egy asszociált pár $\mathcal{B}$ -ben és κ egy $(\bar{\mathcal{B}}, \delta)$ -parcelláló kongruencia. Legyen K egy idempotens κ -osztály $\mathcal{T}$ -ben. Az 1.9. Tétel következtében K tartalmaz idempotens elemet. Definíció szerint ekkor K idempotens kötegében, E -ben van legnagyobb δ -osztály, ami tartalmazza az összes $\bar{\mathcal{B}} \cap E$ -beli elemet. Mivel $\bar{\mathcal{B}}, \delta$ asszociált pár, az E -beli legnagyobb δ -osztály éppen $\bar{\mathcal{B}} \cap E$. A definíció (i) feltétele alapján $\delta \subseteq \kappa|_{\mathcal{B}}$, így $\delta \subseteq \mathcal{D}_{\mathcal{B}}$ -ből következik, hogy $\delta|_E \subseteq \mathcal{D}_E$. Így ha $e_1 \delta \leq e_2 \delta$, akkor $e_1 \mathcal{D}_E \leq e_2 \mathcal{D}_E$. Tehát $\bar{\mathcal{B}} \cap E$ a legnagyobb $\mathcal{D}_E$ -osztály. Az összes idempotens κ -osztályra egyesítve ezeket a $\mathcal{D}$ -osztályokat éppen $\bar{\mathcal{B}}$ -t kapjuk.

Fordítva, tegyük fel, hogy a κ kongruencia rendelkezik a következő tulajdonsággal: minden idempotens κ -osztály idempotens kötegében van legnagyobb $\mathcal{D}$ -osztály, és ezek egyesítése $\mathcal{B}$ -nek egy $\bar{\mathcal{B}}$ részkötege. Tekintsük $\mathcal{B}$ -n a $\delta = (\kappa|_{\mathcal{B}}) \cap \mathcal{D}_{\mathcal{B}}$ kongruenciát. Ha E egy idempotens κ -osztály idempotens kötege, akkor $\delta|_E = \mathcal{D}_E$. Így E legnagyobb $\mathcal{D}$ -osztálya a legnagyobb δ -osztály E -ben, és $\bar{\mathcal{B}}, \delta$ asszociált pár $\mathcal{B}$ -ben. Ezek után a definícióból közvetlenül látszik, hogy κ $(\bar{\mathcal{B}}, \delta)$ -parcelláló kongruencia.

Az (iii) állítás a részköteg-szeparáló kongruencia definíciójának egyszerű átfogalmazása.

A következőkben megmutatjuk, hogy egy $\top$ ortodox félcsoporth $(\bar{\mathbb{B}}, \delta)$ -parcelláló kongruenciái idempotens-ekvivalensek, és kimondjuk a 2.1. Tétel analogonját.

Vezessük be a következő jelölést! Ha $\bar{\mathbb{B}}, \delta$ asszociált pár $\mathbb{B}$ -ben, akkor a δ kongruencia $\bar{\mathbb{B}}$ -ra való megszorítását jelölje $\bar{\delta}$.

2. TÉTEL ([15]). Tegyük fel, hogy $\top$ ortodox félcsoporth a $\mathbb{B}$ idempotens köteggel. Legyen $\bar{\mathbb{B}}, \delta$ egy asszociált pár $\mathbb{B}$ -ben. Ha létezik $(\bar{\mathbb{B}}, \delta)$ -parcelláló kongruencia $\top$ -n, akkor minden $\alpha \in \bar{\mathbb{B}}/\bar{\delta}$ -ra

$$(1) \quad \mathbb{F}_\alpha = \{ \beta \in \mathbb{B} : \beta \delta \leq \alpha \text{ és ha } \beta \delta \leq \gamma \text{ valamely } \gamma \in \bar{\mathbb{B}}/\bar{\delta} \text{-ra, akkor } \alpha \leq \gamma \}$$

egy köteg, és benne α a legnagyobb δ -osztály. Továbbá a $\mathbb{B}$ köteg az $\mathbb{F}_\alpha$ ($\alpha \in \bar{\mathbb{B}}/\bar{\delta}$) kötegek $\bar{\mathbb{B}}/\bar{\delta}$ kötege. Ha κ egy $(\bar{\mathbb{B}}, \delta)$ -parcelláló kongruencia $\top$ -n, akkor az α δ -osztályt tartalmazó κ -osztály olyan ortodox részfélcsoporthja $\top$ -nek, amelynek idempotens kötege $\mathbb{F}_\alpha$.

MEGJEJYZÉS. A [15] cikk 2.5. Tételében $\mathbb{F}_\alpha$ -et egy kicsit más formában adtuk meg, de a 2.2. Lemma bizonyításából látható, hogy (1) $\mathbb{B}$ -ben ugyanazt a részhalmazt határozza meg.

A 2. Tételből látható, hogy a $(\bar{\mathbb{B}}, \delta)$ -parcelláló kongruenciák idempotens-ekvivalensek. Másrészt, az 1.9. Tétel miatt az is következik, hogy ha κ egy $(\bar{\mathbb{B}}, \delta)$ -parcelláló kongruencia, akkor minden idempotens κ -osztály ortodox részfélcsoporthja $\top$ -nek.

3. TÉTEL ([15]). Legyen $\top$ egy ortodox félcsoporth a $\mathbb{B}$ idempotens köteggel. Legyen $\bar{\mathbb{B}}, \delta$ egy asszociált pár $\mathbb{B}$ -ben.

Tegyük fel, hogy

(a) $\mathcal{B} = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{B}/\bar{\delta}} \mathcal{F}_\alpha$, ahol $\mathcal{F}_\alpha$ ($\alpha \in \mathcal{B}/\bar{\delta}$) az (1) által definiált köteg,

(b) minden $\alpha \in \mathcal{B}/\bar{\delta}$ -ra és minden olyan $t, t' \in T$ elem-párra, amelyek egymás inverzei, létezik egy $\gamma \in \mathcal{B}/\bar{\delta}$ úgy, hogy $t' \mathcal{F}_\alpha t \subseteq \mathcal{F}_\gamma$. Ha (a) és (b) teljesül T -ben, akkor

(2) $\zeta = \{ (s, t) \in T \times T : \text{létezik } s\text{-nek és } t\text{-nek olyan } s' \text{ ill.}$

$t' \text{ inverze, hogy minden } \alpha \in \mathcal{B}/\bar{\delta} \text{ -hoz létezik olyan}$

$\gamma, z \in \mathcal{B}/\bar{\delta} \text{ , hogy } s \mathcal{F}_\alpha s', t \mathcal{F}_\alpha t' \subseteq \mathcal{F}_\gamma \text{ és } s' \mathcal{F}_\alpha s, t' \mathcal{F}_\alpha t \subseteq \mathcal{F}_z \}$

a legnagyobb,

(3) $\eta = \{ (s, t) \in T \times T : \text{létezik } s\text{-nek és } t\text{-nek olyan } s' \text{ ill.}$

$t' \text{ inverze, és létezik olyan } \alpha, \gamma \in \mathcal{B}/\bar{\delta} \text{ , hogy } s s', t t' \in \mathcal{F}_\alpha \text{ ,}$

$s s', t t' \in \mathcal{F}_\gamma \text{ , és valamely } e \in \mathcal{F}_\alpha, f \in \mathcal{F}_\gamma \text{ esetén } e s f = e t f$

$\text{és } f s' e = f t' e \}$

pedig a legkisebb $(\mathcal{B}/\bar{\delta})$ -parcelláló kongruencia T -n.

Bizonyítás. Ez a ζ és η reláció éppen a 2.1. Tételben definiált megfelelő reláció. A 2.1. Tétel, a 2.5. Következmény és a 2.8. Tétel szerint azt kell igazolnunk, hogy az $\mathcal{F} =$

$= \{ \mathcal{F}_\alpha : \alpha \in \mathcal{B}/\bar{\delta} \}$ partícióhoz tartozó ζ^* és η^* kongruenciákra

teljesül, hogy $\zeta^* \subseteq \zeta$ és $\eta^* \subseteq \eta$. A részköteg-parcelláló kongruenciák alábbi lemmában megfogalmazott és [15]-ben bebizonyított fontos tulajdonsága alapján ezek a tartalmazások könnyen

adódnak. Az η reláció esetében a 2.8. Tétel utáni 1. Megjegyzés $\eta = \hat{\eta}$ miatt biztosítja, hogy ha $s s' \in \mathcal{F}_\alpha, t t^* \in \mathcal{F}_\alpha$,

$s s' \in \mathcal{F}_\gamma, t^* t \in \mathcal{F}_\gamma$, valamint léteznek olyan $e \in \mathcal{F}_\alpha, f \in \mathcal{F}_\gamma$ elemek,

hogy $e s f = e t f$ és $f s' e = f t^* e$, akkor a t' inverz létezése miatt

léteznek olyan $\bar{e} \in \mathcal{F}_\alpha$ és $\bar{f} \in \mathcal{F}_\gamma$ idempotensek, hogy $\bar{e} s \bar{f} = \bar{e} t \bar{f}$

és $\bar{f} s' \bar{e} = \bar{f} t' \bar{e}$.

4. LEMMA. Tegyük fel, hogy $\bar{B}, \delta$ asszociált pár B -n, és a B idempotens kötegü T ortodox félcsoponton az (a) és (b) feltételek teljesülnek. Legyenek t és t^* egymás inverzei T -ben úgy, hogy $tt^* \in \mathcal{F}_x$ és $t^*t \in \mathcal{F}_y$. Ha $x \mathcal{Q} \bar{x}$ és $y \mathcal{L} \bar{y}$ a $\bar{B}/\delta$ kötegben, akkor létezik t -nek olyan t' inverze, hogy $tt' \in \mathcal{F}_x$ és $t't \in \mathcal{F}_y$.

Ha egy ortodox félcsoponton létezik egy adott részköteget parcelláló kongruencia, akkor azok az elemek, amelyek $\mathcal{Q}$ - és $\mathcal{L}$ -ekvivalensek e részköteg valamely elemével, ortodox részfélcsoportot alkotnak. Ezt a tulajdonságot fogalmazzuk meg a következő tételben.

5. TÉTEL ([15]). Legyen T egy B idempotens kötegü ortodox félcsoport, és legyen $\bar{B}, \delta$ egy asszociált pár B -n úgy, hogy az (a) és (b) feltételek teljesülnek T -ben. Ekkor

$$S_{\bar{B}} = \{t \in T : e \mathcal{Q} t \mathcal{L} f \text{ valamely } e, f \in \bar{B} \text{-ra}\}$$

ortodox részfélcsoport T -ben. $S_{\bar{B}}$ idempotens kötege $\bar{B}$, és az $S_{\bar{B}}$ -beli elemek inverzei is $S_{\bar{B}}$ -ba esnek.

Az $S_{\bar{B}}$ részfélcsoport jelentős szerepet játszik az un. erős részköteg-parcelláló kongruenciák esetében.

DEFINÍCIÓ. A B idempotens kötegü T ortodox félcsoport κ $(\bar{B}, \delta)$ -parcelláló kongruenciáját erősnek nevezzük, ha minden κ -osztály tartalmaz $S_{\bar{B}}$ -beli elemet.

Világos, hogy a $(\bar{B}, \delta)$ -parcelláló kongruenciák erősek.

Az erős részköteg-parcelláló kongruenciák alábbi tulajdonsága teszi lehetővé, hogy az idempotens-szeparáló bővitések illetve a minimális inverz kongruencia szerinti bővitések általánosításaként jellemezzük egy ortodox félcsoport tetszőleges részköteg-parcelláló bővitését a következő fejezetekben.

6. TÉTEL ([15]). Tegyük fel, hogy $\bar{\mathfrak{B}}, \delta$ egy asszociált pár a $\mathfrak{B}$ kötegen, és τ egy ortodox félcsoporth a $\mathfrak{B}$ idempotens köteggel. Legyen κ erős $(\bar{\mathfrak{B}}, \delta)$ -parcelláló kongruencia τ -n. Tekintsük τ -nek két elemét, t -t és t^1 -t, amelyek egymás inverzei. Továbbá legyen $s \in S_{\bar{\mathfrak{B}}}$ úgy, hogy $s\kappa t$. Ekkor létezik s -nek olyan s^1 inverze, hogy $s^1\kappa t^1$.

Ennek alapján nem nehéz szükséges és elegendő feltételt adni arra, hogy egy ortodox félcsoporthon létezzen egy adott köteget parcelláló erős kongruencia.

7. TÉTEL ([15]). Legyen τ egy $\mathfrak{B}$ idempotens kötegu ortodox félcsoporth. Tegyük fel, hogy $\bar{\mathfrak{B}}, \delta$ asszociált pár $\mathfrak{B}$ -ben. A τ félcsoporthon akkor és csak akkor létezik erős $(\bar{\mathfrak{B}}, \delta)$ -parcelláló kongruencia, ha a 3. Tételbeli (a) feltétel és a következő feltétel teljesül.

(b)' Ha t és t^1 egymás inverzei τ -ben, akkor léteznek olyan s, s^1 elemek $S_{\bar{\mathfrak{B}}}$ -ban, amelyek egymás inverzei, és $t^1 \tau_x t \subseteq \tau_{(s^1 u s)} \delta$ érvényes minden $x (\in \bar{\mathfrak{B}}/\delta)$ -ra és valamely $u (\in x)$ -re. Ha (a) és (b)' teljesül τ -ben, akkor a (2) által definiált legnagyobb $(\bar{\mathfrak{B}}, \delta)$ -parcelláló kongruencia erős.

A legkisebb $(\bar{\mathfrak{B}}, \delta)$ -parcelláló kongruencia azonban általában nem erős, ha (a) és (b)' teljesül. Könnyű olyan inverz félcsoporthot mondani, amelyen egy adott részfélhálót szeparáló legnagyobb kongruencia erős, a legkisebb viszont nem. Gondoljunk például a $\mathcal{C} = \langle \alpha, \beta : \beta\alpha = e \rangle$ biciklikus félcsoporth csoportkongruenciáira, amelyek tekinthetők az e egységelemet tartalmazó egyelemű részfélhálót szeparáló kongruenciáknak. Világos, hogy $S_{\{e\}} = \{e\}$. A legnagyobb csoport kongruencia szerint minden elem ekvivalens, tehát ez a kongruencia nyilván

erős. A legkisebb csoport kongruencia ϱ , ahol $a^{\eta} \varrho^m \varrho a^{\eta'} \varrho^{m'}$ akkor és csak akkor, ha $\eta - m = \eta' - m'$. Tehát $\mathcal{C}/\varrho$ nem egyelemű, így ϱ nem lehet erős.

Az 1. Állítás (i)-ből kiderül, hogy a $\mathcal{B}$ idempotens kötegű $\mathcal{T}$ ortodox félcsoporth egy $\bar{\mathcal{B}}$ részkötegét parcelláló kongruencia sok δ kongruenciához tartozhat.

8. ÁLLÍTÁS. Tegyük fel, hogy $\mathcal{T}$ egy $\mathcal{B}$ idempotens kötegű ortodox félcsoporth és $\bar{\mathcal{B}}, \delta$ egy asszociált pár $\mathcal{B}$ -ben úgy, hogy az (a) és (b) feltételek teljesülnek $\mathcal{T}$ -ben. Ekkor létezik egy legkisebb δ_0 kongruencia $\mathcal{B}$ -n azok között a $\tilde{\delta}$ kongruenciák között, amelyek eleget tesznek az alábbi három feltételnek:

(i) $\bar{\mathcal{B}}, \tilde{\delta}$ asszociált pár $\mathcal{B}$ -ben,

(ii) $\mathcal{T}$ egy kongruenciája akkor és csak akkor $(\bar{\mathcal{B}}, \delta)$ -parcelláló, ha $(\bar{\mathcal{B}}, \tilde{\delta})$ -parcelláló, és

(iii) létezik $(\bar{\mathcal{B}}, \tilde{\delta})$ -parcelláló kongruencia $\mathcal{T}$ -n.

Bizonyítás. A 3. Tétel miatt létezik $(\bar{\mathcal{B}}, \delta)$ -parcelláló kongruencia $\mathcal{T}$ -n. Így az 1. Tétel szerint $\mathcal{T}$ bármely $(\bar{\mathcal{B}}, \delta)$ -parcelláló kongruenciája ugyanazt a Δ kongruenciát indukálja a $\mathcal{B}$ kötegen. Az 1. Állítás (i) részének bizonyítása során éppen azt igazoltuk, hogy a $\tilde{\delta} = \Delta \cap \mathcal{D}_{\mathcal{B}}$ kongruencia teljesíti az (i) és (ii) feltételeket. Nyilvánvalóan (iii) is érvényes erre a $\tilde{\delta}$ kongruenciára, hiszen $\mathcal{T}$ egy $(\bar{\mathcal{B}}, \delta)$ -parcelláló kongruenciájának és legkisebb inverz kongruenciájának metszete $(\bar{\mathcal{B}}, \tilde{\delta})$ -parcelláló. Vegyük az (i)-(iii) feltételeket kielégítő kongruenciák δ_0 metszetét. Az (i)-(ii) feltételeknek eleget tevő δ^1 kongruenciákra láttuk, hogy teljesül $\tilde{\delta} | \bar{\mathcal{B}} = \delta^1 | \bar{\mathcal{B}}$. Továbbá minden Δ -osztályban a $\bar{\mathcal{B}}$ -beli elemek alkotják a legnagyobb δ^1 -osztályt, ami egyben a legnagyobb

$\mathcal{D}$ -osztály ebben a részkötegben. Ezek a tulajdonságok teljesülnek az (i)-(iii)-nek eleget tevő kongruenciák δ_0 metszetére is. Így δ_0 teljesíti (i)-t és (ii)-t. Az (iii) tulajdonság pedig azért lesz érvényes δ_0 -ra, mert az összes olyan $(\mathcal{B}, \tilde{\delta})$ -parcelláló kongruencia metszete, ahol $\tilde{\delta}$ kielégíti az (i)-(iii) feltételeket, $(\mathcal{B}, \delta_0)$ -parcelláló. Tehát δ_0 a legkisebb (i)-(iii)-nek eleget tevő kongruencia.

Ha S egy tetszőleges félcsoporthoz, ϱ és σ két kongruencia S -en úgy, hogy $\varrho \subseteq \sigma$, akkor σ/ϱ jelöli az S/ϱ faktorfélcsoporthoz azt a kongruenciáját, amelyre $(s_1, \varrho_1, s_2, \varrho_2) \in \sigma/\varrho$ akkor és csak akkor, ha $(s_1, s_2) \in \sigma$.

Most bebizonyítjuk, hogy egy $\mathcal{B}$ idempotens kötegű T ortodox félcsoporthoz minden κ részköteg-parcelláló kongruenciájához létezik egy α legkisebb $\mathcal{B}$ -t parcelláló kongruencia úgy, hogy $\alpha \subseteq \kappa$ és κ/α részköteg-szeparáló.

9. TÉTEL. Legyen T egy $\mathcal{B}$ idempotens kötegű ortodox félcsoporthoz, $(\mathcal{B}, \delta)$ pedig egy asszociált pár $\mathcal{B}$ -ben. Ha κ egy $(\mathcal{B}, \delta)$ -parcelláló kongruencia T -n, akkor a legkisebb $(\mathcal{B}, \delta_0)$ -parcelláló kongruencia, ahol δ_0 jelenti a 8. Állításban bevezetett kongruenciát, a legkisebb olyan α kongruencia T -n, amelyre a következők teljesülnek:

- (i) $\alpha \subseteq \kappa$,
- (ii) $\mathcal{B} \mid \alpha$ α -osztályok egyesítése,
- (iii) κ/α részköteg-szeparáló kongruencia T/α -ban.

Bizonyítás. Jelölje a legkisebb $(\mathcal{B}, \delta_0)$ -parcelláló kongruenciát η , a legkisebb $(\mathcal{B}, \delta_0)$ -parcelláló kongruenciát pedig $\bar{\eta}$. (3) alapján nyilvánvaló, hogy $\eta \subseteq \bar{\eta}$. Így a 8. Állítás következtében $\eta \subseteq \bar{\eta} \subseteq \kappa$. Világos az is, hogy $\eta \mid \mathcal{B} = \delta_0$, tehát az (i) és (ii) tulajdonságok teljesülnek η -ra.

A $\mathcal{T}/\eta$ ortodox félcsoporth idempotens kötege $\mathcal{B}/\eta|\mathcal{B} = \mathcal{B}/\delta_0$. Definíció szerint $\mathcal{T}$ minden idempotens κ -osztályában a $\bar{\mathcal{B}}$ -beli elemek alkotják a legnagyobb δ -osztályt, ami a 8. Állítás szerint egybeesik a legnagyobb δ_0 -osztállyal. Így $\mathcal{T}/\eta$ minden idempotens κ/η -osztályában van legnagyobb idempotens, és ezek halmaza $\bar{\mathcal{B}}/\delta_0|\bar{\mathcal{B}}$. Az 1. Állítás (ii) részállítása miatt tehát κ/η részköteg-szeparáló.

Tegyük fel most, hogy α olyan kongruencia $\mathcal{T}$ -n, amely teljesíti az (i)-(iii) feltételeket. A 2. Tétel alapján $\mathcal{B} = \bigcup_{x \in \bar{\mathcal{B}}/\delta_0} \mathcal{F}_x$, ahol $\mathcal{F}_x$ az (1) egyenlőséggel van definiálva. Mivel $\alpha \subseteq \kappa$ és κ/α részköteg-szeparáló, $\mathcal{B}/\alpha = \bigcup_{x \in \bar{\mathcal{B}}/\delta_0} \mathcal{F}_x/\alpha|\mathcal{F}_x$ és $\mathcal{F}_x/\alpha|\mathcal{F}_x$ egységelemes. Legyen $b \in \mathcal{F}_x$ úgy, hogy $b\alpha$ az $\mathcal{F}_x/\alpha|\mathcal{F}_x$ egységeleme, továbbá legyen $u \in x$. Ekkor $(bu)\alpha = b\alpha \cdot u\alpha = u\alpha$, mert $b\alpha$ egységelem. Tehát $bu\alpha u$. Mivel (ii) szerint $\bar{\mathcal{B}} = \alpha|\mathcal{B}$ -osztályok uniója, így $bu \in \bar{\mathcal{B}}$. Másrészt viszont $(bu)\delta_0 = b\delta_0 \cdot u\delta_0 = b\delta_0$, mert $u\delta_0 = x$ egységelem (1) miatt $\mathcal{F}_x/\delta_0|\mathcal{F}_x$ -ben. Így $bu\delta_0 b$, amiből $bu \in \bar{\mathcal{B}}$ miatt következik, hogy $b \in \bar{\mathcal{B}}$, hiszen $\bar{\mathcal{B}}, \delta_0$ asszociált pár. Ezzel tehát beláttuk, hogy a legnagyobb $\alpha|\mathcal{F}_x$ -osztály benne van x -ben. Mivel azonban x derékszögű köteg, $x'x'x' \subseteq x'$. Így x' csak úgy lehet a legnagyobb $\alpha|\mathcal{F}_x$ osztály, ha $x' = x$. Ebből következik, hogy $\bar{\mathcal{B}}, \alpha|\mathcal{B} \cap \mathcal{D}_{\mathcal{B}}$ asszociált pár $\mathcal{B}$ -ben, és az 1. Állítás (i) alapján κ egy $(\bar{\mathcal{B}}, \alpha|\mathcal{B} \cap \mathcal{D}_{\mathcal{B}})$ -parcelláló kongruencia. Világos, hogy az α kongruencia és $\mathcal{T}$ legkisebb inverz kongruenciájának, σ -nak $\alpha \cap \sigma$ metszete $(\bar{\mathcal{B}}, \alpha|\mathcal{B} \cap \mathcal{D}_{\mathcal{B}})$ -parcelláló. Így az $\alpha|\mathcal{B} \cap \mathcal{D}_{\mathcal{B}}$ reláció teljesíti a 8. Állítás (i)-(iii) feltételeit, amiből azonnal következik a 8. Állítás alapján, hogy $\delta_0 \subseteq \alpha|\mathcal{B} \cap \mathcal{D}_{\mathcal{B}}$. (3) alapján közvetlenül látható,

hogy $\eta \subseteq \tilde{\eta}$, ahol $\tilde{\eta}$ jelöli a legkisebb $(\mathcal{B}, \alpha | \mathcal{B} \cap \mathcal{D}_{\mathcal{B}})$ -parcelláló kongruenciát. És mivel $\tilde{\eta} \subseteq \alpha \cap \vartheta$, beláttuk, hogy $\eta \subseteq \alpha$. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

A fejezet hátralévő részében azt vizsgáljuk, hogy egy kötegen milyen feltételek mellett létezik egy adott $\bar{\mathcal{B}}$ részköteget parcelláló ill. szeparáló kongruencia. A 3. Tételben adott szükséges és elegendő feltételek semmitmondók kötegekre, hiszen az (a) feltétel éppen a definíció átfogalmazása, a (b) feltétel pedig az (a) triviális következménye.

Először választ adunk a felvetett problémára félhálók esetén.

10. ÁLLÍTÁS. Egy $\mathcal{Y}$ félhálón akkor és csak akkor létezik egy adott $\bar{\mathcal{Y}}$ részfélhálót szeparáló kongruencia, ha a következő két feltétel teljesül:

(c) minden $\mathcal{Y}$ -beli α elemnek van legkisebb majoránsa $\bar{\mathcal{Y}}$ -ban, (jelölje ezt $\bar{\alpha}$)

(d) az $\alpha \mapsto \bar{\alpha}$ leképezés $\mathcal{Y}$ endomorfizmusa.

Bizonyítás. A (c) és (d) feltételek szükségessége következik a 2. Tételből. Az elegendőséghez pedig azt kell észrevenni, hogy (d)-ből következik, hogy ha $\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \bar{\mathcal{Y}}$ és $\alpha \mapsto \bar{\alpha}$, $\beta \mapsto \bar{\beta}$, akkor $\alpha\beta \mapsto \bar{\alpha}\bar{\beta}$. Így $\mathcal{Y} = \bigcup_{\bar{\alpha} \in \bar{\mathcal{Y}}} \mathcal{Y}_{\bar{\alpha}}$, amit bizonyítani akartunk.

Térjünk át tetszőleges kötegek részköteg-parcelláló kongruenciáira.

11. LEMMA. Legyen $\mathcal{B}$ tetszőleges köteg és $(\bar{\mathcal{B}}, \delta)$ egy asszociált pár $\mathcal{B}$ -ben. Ha $\mathcal{B}$ -ben létezik $(\bar{\mathcal{B}}, \delta)$ -parcelláló kongruencia, akkor $\bar{\mathcal{B}}$ a $\mathcal{B}$ bizonyos $\mathcal{D}$ -osztályainak egyesítése.

Bizonyítás. Ha $\mathcal{B}$ -ben létezik $(\bar{\mathcal{B}}, \delta)$ -parcelláló kongruencia, akkor az 5. Tétel alapján egyrészt $\mathcal{S}_{\bar{\mathcal{B}}} = \bar{\mathcal{B}}$, másrészt

$\mathcal{S}_{\bar{\mathcal{B}}}$ tartalmazza $\bar{\mathcal{B}}$ elemeinek inverzeit. Így $\bar{\mathcal{B}}$ valóban $\mathcal{B}$ bizonyos $\mathcal{D}$ -osztályainak egyesítése.

Ennek alapján könnyű válaszolni arra a kérdésre, hogy mikor létezik egy köteg adott részkötegét parcelláló kongruencia.

12. ÁLLÍTÁS. Legyen $\mathcal{B}$ tetszőleges köteg, $\bar{\mathcal{B}}$ pedig egy részkötege. A $\mathcal{B}$ kötegen akkor és csak akkor létezik $\bar{\mathcal{B}}$ -t parcelláló kongruencia, ha $\bar{\mathcal{B}}$ a $\mathcal{B}$ bizonyos $\mathcal{D}$ -osztályainak uniója, és az $\mathcal{Y} = \mathcal{B}/\mathcal{D}_{\mathcal{B}}$ félháló $\bar{\mathcal{Y}} = \bar{\mathcal{B}}/\mathcal{D}_{\bar{\mathcal{B}}}$ részfélhálójára teljesíti a (c), (d) feltételeket.

Bizonyítás. Legyen $\bar{\mathcal{B}}, \delta$ asszociált pár, és tételezzük fel, hogy $\mathcal{B}$ -n létezik $(\bar{\mathcal{B}}, \delta)$ -parcelláló kongruencia, azaz $\mathcal{B} = \bigcup_{\alpha \in \bar{\mathcal{B}}/\delta} \mathcal{F}_{\alpha}$, ahol $\mathcal{F}_{\alpha}$ a $\mathcal{B}$ (1)-gyel definiált részkötege. A 11. Lemma alapján $\bar{\mathcal{B}}$ a $\mathcal{B}$ bizonyos $\mathcal{D}$ -osztályainak egyesítése. Mivel $\bar{\mathcal{D}} \subseteq \mathcal{D}_{\bar{\mathcal{B}}}$ és $\mathcal{D}_{\bar{\mathcal{B}}}$ kongruencia $\bar{\mathcal{B}}$ -n, $\bar{\mathcal{B}} = \bigcup_{\alpha \in \bar{\mathcal{Y}}} \mathcal{G}_{\alpha}$, ahol $\mathcal{G}_{\alpha} = \bigcup \{ \mathcal{F}_{\alpha} : \alpha \in \bar{\alpha} \}$. Ha $e \in \mathcal{G}_{\alpha}$, $f \in \mathcal{G}_{\beta}$ és $e \mathcal{D} f$, akkor e és f egymás inverzei $\mathcal{B}$ -ben. Ebből következik, hogy $\bar{\alpha}$ és $\bar{\beta}$ is egymás inverzei $\bar{\mathcal{Y}}$ -ban, ami azt jelenti, hogy $\bar{\alpha} = \bar{\beta}$ az $\bar{\mathcal{Y}}$ félhálóban. Így $\mathcal{Y} = \mathcal{B}/\mathcal{D}_{\mathcal{B}} = \bigcup_{\alpha \in \bar{\mathcal{Y}}} \mathcal{G}_{\alpha}/\mathcal{D}_{\mathcal{G}_{\alpha}}$. Itt $\mathcal{G}_{\alpha}/\mathcal{D}_{\mathcal{G}_{\alpha}}$ félháló, amelynek legnagyobb eleme $\bar{\alpha}$. A 10. Állítás értelmében tehát (c) és (d) teljesül $\mathcal{Y}$ - és $\bar{\mathcal{Y}}$ -ra.

Fordítva, tegyük fel, hogy $\bar{\mathcal{B}}$ a $\mathcal{B}$ bizonyos $\mathcal{D}$ -osztályainak uniója, és a (c), (d) feltételek teljesülnek az $\mathcal{Y}$ és $\bar{\mathcal{Y}}$ félhálókra. Ebből a 10. Állítás alapján kapjuk, hogy $\mathcal{Y} = \bigcup_{\alpha \in \bar{\mathcal{Y}}} \mathcal{Y}_{\alpha}$, ahol $\mathcal{Y}_{\alpha}$ azokat a $\mathcal{D}_{\mathcal{B}}$ -osztályokat tartalmazza, amelyek legkisebb $\bar{\mathcal{Y}}$ -beli majoránsa $\bar{\alpha}$. Ekkor nyilván $\bar{\mathcal{B}} = \bigcup_{\alpha \in \bar{\mathcal{Y}}} \mathcal{G}_{\alpha}$, ahol $\mathcal{G}_{\alpha}$ azokat az elemeket tartalmazza, amelyek $\mathcal{D}$ -osztálya $\mathcal{Y}_{\alpha}$ -ban van. Ez pedig éppen azt jelenti, hogy

$\mathfrak{B}$ -n van $(\bar{\mathfrak{B}}, \mathfrak{D}_{\mathfrak{B}})$ -parcelláló kongruencia.

Azt meghatározni, hogy mikor létezik egy kötegen egy adott részköteget szeparáló kongruencia, már sokkal nehezebb. Csak arra az esetre adunk szükséges és elegendő feltételt, amikor az adott részköteg normális.

Egy köteget normális kötegnek szokás nevezni, ha teljesül rajta az $xyzw = xzyw$ azonosság.

13. ÁLLÍTÁS. Legyen $\mathfrak{B}$ egy köteg és $\bar{\mathfrak{B}}$ ennek részkötege. Ha $\mathfrak{B}$ -n létezik $\bar{\mathfrak{B}}$ -szeparáló kongruencia, akkor teljesülnek a következők:

- (i) $\bar{\mathfrak{B}}$ a $\mathfrak{B}$ bizonyos $\mathfrak{D}$ -osztályainak egyesítése,
 - (ii) az $\mathcal{Y} = \mathfrak{B}/\mathfrak{D}$ félhálóra és ennek $\bar{\mathcal{Y}} = \bar{\mathfrak{B}}/\mathfrak{D}$ részfélhálójára teljesül a (c) és (d) feltétel,
 - (iii) $\mathfrak{B}$ minden $\mathfrak{d}$ elemének van egy legkisebb $\bar{\mathfrak{d}}$ majoránsa $\bar{\mathfrak{B}}$ -ban úgy, hogy $\bar{\mathfrak{d}} \mathfrak{d}$ a $\mathfrak{d}$ $\mathcal{Y}$ -beli elem legkisebb majoránsa $\bar{\mathcal{Y}}$ -ban, és
 - (iv) ha $e \mathfrak{d} f$ és $e \in \mathcal{T}_x, f \in \mathcal{T}_y$, ahol $\mathcal{T}_x$ jelöli azoknak a $\mathfrak{B}$ -beli elemeknek a halmazát, amelyek legkisebb $\bar{\mathfrak{B}}$ -beli majoránsa x , akkor $ef \in \mathcal{T}_{xy}$.
- Ha $\bar{\mathfrak{B}}$ normális részköteg $\mathfrak{B}$ -ben, és az (i)-(iv) feltételek teljesülnek, akkor $\mathfrak{B}$ -n létezik $\bar{\mathfrak{B}}$ -szeparáló kongruencia.

Bizonyítás. Az (i) és (ii) feltételek szükségessége következik a 12. Állításból, az (iv) feltétel szükségessége a 2. Tételből, az (iii) feltételé pedig a 2. Tételből és a 12. Állítás bizonyításából.

Tegyük fel most, hogy $\bar{\mathfrak{B}}$ normális részköteg $\mathfrak{B}$ -ben, és az (i)-(iv) feltételek teljesülnek. Legyen $e \in \mathcal{T}_x$ és $f \in \mathcal{T}_y$. Azt kell belátnunk, hogy ekkor $ef \in \mathcal{T}_{xy}$. Tegyük fel, hogy

$e f e \in \mathcal{F}_u$ és $f e f \in \mathcal{F}_v$. Ekkor $x u x e f e x u x = x u e f e u x = x e f e x = e f e$, azaz $e f e \leq x u x$. Itt $x u x \in \bar{\mathcal{B}}$ és $\mathcal{D}_{x u x} \leq \mathcal{D}_u$. Mivel azonban u az $e f e$ legkisebb $\bar{\mathcal{B}}$ -beli majoránsa, szükségképpen $u = x u x$. Hasonlóan $v = y v y$. Másrészt, $e f e \mathcal{D} f e f$ a $\mathcal{B}$ kötegben, így (iv) miatt $u \mathcal{D} v$ $\bar{\mathcal{B}}$ -ban. Ekkor (iv) következtében $e f = (e f e)(f e f) \in \mathcal{F}_{u v}$. Az (ii) és (iii) tulajdonság miatt $x y \mathcal{D} u$ és v . Így

$$u v = (x u x)(y v y) = x u v y$$

és

$$y x = y (x u v y) x = y u v x .$$

Ezeket az egyenlőségeket és $\bar{\mathcal{B}}$ normalitását felhasználva kapjuk, hogy

$$x (u v) x = x (x u v y) x = x (u v) y x = x y (u v) x = x (y u v x) x = x y x ,$$

illetve hasonlóan $y (u v) y = y x y$. Ebből pedig következik, hogy

$$x y = (x y x)(y x y) = x (u v) x y (u v) y = x u v y = u v .$$

Tehát $e f \in \mathcal{F}_{x y}$, azaz $\mathcal{B} = \bigcup_{x, y \in \bar{\mathcal{B}}} \mathcal{F}_{x y}$. Ez valóban azt jelenti, hogy létezik $\bar{\mathcal{B}}$ -szeparáló kongruencia $\mathcal{B}$ -n.

4. Erős részköteg-szeeparáló bővitések

Azt mondjuk, hogy a T ortodox félcsoporthoz az S ortodox félcsoporthoz erős részköteg-szeeparáló bővítése, ha van olyan κ erős részköteg-szeeparáló kongruencia T -n, hogy S izomorf T/κ -val. H.D'ALARCAO [3]-ban leírta az inverz félcsoporthoz idempotens-szeeparáló bővítéseit. [16]-ban jellemeztük a 0 - $\mathcal{D}$ -egyszerű ortodox félcsoporthoz olyan erős részköteg-szeeparáló bővítéseit, ahol a részköteg tartalmazza a 0 -elemet. Ebben a fejezetben ezeket az eredményeket általánosítva leírjuk az ortodox félcsoporthoz erős részköteg-szeeparáló bővítéseit.

A következő fejezetben ennél még általánosabb problémát oldunk meg: jellemezzük az ortodox félcsoporthoz erős részköteg-parcelláló bővítéseit. Ez azonban nem teszi feleslegessé jelen fejezetünket, ugyanis általában az erős részköteg-parcelláló bővitések sokkal bonyolultabbak, mint az erős részköteg-szeeparáló bővitések. Ezért érdemes külön foglalkozni az erős részköteg-szeeparáló bővitésekkel, és jóval egyszerűbb konstrukcióval jellemezni őket.

Először bevezetjük azt a konstrukciót, aminek segítségével leírjuk egy ortodox félcsoporthoz összes erős részköteg-szeeparáló bővítését.

Legyen S tetszőleges ortodox félcsoporthoz. Idempotens kötegét jelölje E . Tegyük fel, hogy E az E_α ($\alpha \in Y$) derékszögű kötegek Y félhálójára, azaz $E = \bigcup_{\alpha \in Y} E_\alpha$. Jelölje $\sim$ az

S félcsoporth legkisebb inverz kongruenciáját. Ha $s \in S$, akkor jelölje $\star(s)$ [ill. $\ell(s)$] az Y félhálónak azt az α elemét, amelyre teljesül, hogy F_α az s -et tartalmazó $\sim$ -osztály balegysége [jobbegysége]. Nyilván s tetszőleges s' inverze esetén $\star(s') = \ell(s)$ és $\ell(s') = \star(s)$, továbbá $ss' \in F_{\star(s)}$ és $s's \in F_{\ell(s)}$. Jelölje τ_s azt az $\star(s)Y \rightarrow \ell(s)Y$ leképezést, amely az α ($\leq \star(s)$) elemhez azt az $\alpha\tau_s$ elemet rendeli, amelyre teljesül, hogy $s'F_\alpha s \subseteq F_{\alpha\tau_s}$. Mivel $S/\sim$ homomorf módon képezhető le $\tilde{W}(E/D)$ egy teljes inverz ^(rész) félcsoporthjára úgy, hogy $s\sim$ -nek megfeleltetjük E/D -nek azt a π_s parciális izomorfizmusát, amely az $F_\alpha(\alpha \leq \star(s))$ D -osztálynak az $F_{\alpha\tau_s}$ D -osztályt felelteti meg, τ_s izomorfizmus $\star(s)Y$ -ről $\ell(s)Y$ -ra. Továbbá, ha $e \in S$ idempotens, akkor τ_e az $\star(e)Y$ identikus automorfizmusa, és ha $s, \bar{s} \in S$, akkor $\tau_s \tau_{\bar{s}} = \tau_{s\bar{s}}$. Speciálisan, ha s és s' egymás inverzei S -ben, akkor τ_s és $\tau_{s'}$ egymás inverzei, mint parciális izomorfizmusok. Ha $s, \bar{s} \in S$, akkor $\ell(s\bar{s}) = (\ell(s)\star(\bar{s}))\tau_{\bar{s}}$. A továbbiakban a τ_s ($s \in S$) parciális izomorfizmusok itt említett tulajdonságait hivatkozás nélkül használjuk.

Minden $\alpha \in Y$ -ra legyen Σ_α egy egységelemes ortodox félcsoporth. Jelölje ε_α a Σ_α egységelemét, $U(\Sigma_\alpha)$ pedig Σ_α egységcsoporthját. Tegyük fel, hogy Σ a Σ_α ($\alpha \in Y$) ortodox félcsoporthok olyan Y félhálójára, amelynek $\mathcal{L} = \{\varepsilon_\alpha : \alpha \in Y\}$ részfélcsoporthja. Ekkor nyilván $\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta = \varepsilon_{\alpha\beta}$ érvényes minden $\alpha, \beta \in Y$ -ra. Tehát $\mathcal{L}$ izomorf Y -nal. Ismert, hogy ekkor minden $\alpha \geq \beta$ elempárra Y -ban létezik olyan $\varphi_{\alpha, \beta} : \Sigma_\alpha \rightarrow \Sigma_\beta$ egységelemet egységelembe képező homomorfizmus, hogy (i) $\varphi_{\alpha, \beta} \varphi_{\beta, \gamma} = \varphi_{\alpha, \gamma}$, feltéve, hogy $\alpha \geq \beta \geq \gamma$, és (ii) ha $\varrho \in \Sigma_\alpha, \sigma \in \Sigma_\beta$, akkor $\varrho\sigma = \varrho\varphi_{\alpha, \beta} \cdot \sigma\varphi_{\beta, \alpha}$ érvényes Σ -ban. Ebből következik,

hogy Σ ortodox, hiszen minden $\alpha (\in Y)$ -ra Σ_α ortodox.

Minden S -beli s elemre legyen $h_s: \Sigma \rightarrow \Sigma$ olyan endomorfizmus, hogy tetszőleges $\alpha (\in Y)$ -ra $\varepsilon_\alpha h_s = \varepsilon_{(\alpha + (s))} \tau_s$. Továbbá, legyen $\chi_{s, \bar{s}} \in U(\Sigma_{\ell(s, \bar{s})})$ minden $s, \bar{s} (\in S)$ elempárra. Tegyük fel, hogy a $h: S \rightarrow \text{End } \Sigma; s \mapsto h_s$ és a $\chi: S \times S \rightarrow \Sigma; (s, \bar{s}) \mapsto \chi_{s, \bar{s}}$ leképezések rendelkeznek a következő tulajdonságokkal:

(A1) ha $s \sim s_1, \bar{s} \sim \bar{s}_1$, akkor $h_s = h_{s_1}$ és $\chi_{s, \bar{s}} = \chi_{s_1, \bar{s}_1}$;

(A2) tetszőleges $s, \bar{s}$ és $t (\in S)$ -re

$$\chi_{s, \bar{s}} h_t = \chi_{s, \bar{s}t}^{-1} \chi_{s, \bar{s}t} \chi_{\bar{s}, t};$$

(A3) tetszőleges $s, \bar{s} (\in S)$ -re és $\sigma (\in \Sigma)$ -ra

$$\sigma h_s h_{\bar{s}} = \chi_{s, \bar{s}}^{-1} (\sigma h_{s\bar{s}}) \chi_{s, \bar{s}};$$

(A4) ha $e \in E$ és $\sigma \in \Sigma_\alpha$, akkor

$$\sigma h_e = \sigma \cdot \varepsilon_{\ell(e)} / = \sigma \varphi_{\alpha, \alpha \ell(e)} /;$$

(A5) ha $s \in S$ és $e, f \in E$ úgy, hogy $e \mathcal{R} s \mathcal{L} f$, akkor

$$\chi_{e, s} = \chi_{s, f} = \varepsilon_{\ell(s)};$$

(A6) ha $e, f \in E$, akkor $\chi_{e, f} = \varepsilon_{\ell(ef)}$.

Itt χ^{-1} a $\chi \in U(\Sigma_\alpha)$ elem $U(\Sigma_\alpha)$ -beli inverzét jelöli.

Az (A1)-(A6) tulajdonságokkal rendelkező h, χ leképezés párt (S, Σ) -párnak fogjuk nevezni.

1. LEMMA. Ha h, χ egy (S, Σ) -pár, akkor minden $\alpha (\in Y)$ -ra $\Sigma_\alpha h_s \subseteq \Sigma_{(\alpha + (s))} \tau_s$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $q \in \Sigma_\alpha$. Ekkor

$$(1) \quad q h_s = (q \cdot \varepsilon_\alpha) h_s = q h_s \cdot \varepsilon_{(\alpha + (s))} \tau_s,$$

hiszen ε_α a Σ_α egységeleme, h_s homomorfizmus és

$$\varepsilon_\alpha h_s = \varepsilon_{(\alpha + (s))} \tau_s. \text{ Viszont } (\alpha + (s)) \tau_s \leq \tau_s \tau_s \text{ következtében}$$

$$\varepsilon_{(\alpha + (s))} \tau_s \cdot \varepsilon_{\tau_s \tau_s} = \varepsilon_{(\alpha + (s))} \tau_s, \text{ így } q h_s = q h_s \cdot \varepsilon_{\tau_s \tau_s} =$$

$$= q h_s \cdot \varepsilon_{\tau_s \tau_s} h_s = (q \cdot \varepsilon_{\tau_s \tau_s}) h_s. \text{ Itt } q \cdot \varepsilon_{\tau_s \tau_s} \in \Sigma_{\alpha + (s)}. \text{ Ezzel a}$$

bizonyítandó állítást visszavezettük arra, hogy minden $\alpha \leq \tau(s)$ elemre $\Sigma_\alpha h_s \subseteq \Sigma_{\alpha \tau_s}$. Legyen most $\sigma \in \Sigma_\alpha$, ahol $\alpha \leq \tau(s)$. Akkor (1) alapján $\sigma h_s \in \Sigma_\beta$, ahol $\beta \leq \alpha \tau_s$. Ha s' az s egy inverze, akkor (A3) és (A4) szerint $\sigma h_s h_{s'} = \chi_{s,s'}^{-1} (\sigma h_{ss'}) \chi_{s,s'} = \chi_{s,s'}^{-1} \cdot \sigma \cdot \varepsilon_{\ell(ss')} \cdot \chi_{s,s'}$. Itt $\ell(ss') = \ell(s') = \tau(s)$, tehát $\varepsilon_\alpha \varepsilon_{\tau(s)} = \varepsilon_\alpha$ miatt

$$(\sigma h_s) h_{s'} = \chi_{s,s'}^{-1} \cdot \sigma \cdot \chi_{s,s'} \in \Sigma_\alpha.$$

(1) szerint ebből következik, hogy $\alpha \leq (\beta \tau(s')) \tau_{s'}$. Mivel azonban $\beta \leq \alpha \tau_s \leq \ell(s) = \tau(s')$, ez azt jelenti, hogy $\alpha \leq \beta \tau_{s'}^{-1}$. Így $\beta \leq \alpha \tau_s \leq \beta \tau_{s'}^{-1} \tau_s = \beta$, azaz $\beta = \alpha \tau_s$. Megmutattuk tehát, hogy $\sigma h_s \in \Sigma_{\alpha \tau_s}$.

Az $\mathbf{S} = \{(s, \sigma) : s \in S, \sigma \in \Sigma_{\ell(s)}\}$ halmazon definiáljunk szorzást úgy, hogy ha $s, \bar{s} \in S$, $\sigma \in \Sigma_{\ell(s)}$ és $\bar{\sigma} \in \Sigma_{\ell(\bar{s})}$, akkor

$$(2) \quad (s, \sigma)(\bar{s}, \bar{\sigma}) = (s\bar{s}, \chi_{s,\bar{s}} \cdot \sigma h_{\bar{s}} \cdot \bar{\sigma}).$$

A második komponenseknél a szorzás a Σ félcsoporthban értendő. Definíció szerint $\chi_{s,\bar{s}} \in \Sigma_{\ell(s\bar{s})}$ és az 1. Lemma alapján $\sigma h_{\bar{s}} \in \Sigma_{(\ell(s)\tau(\bar{s}))\tau_{\bar{s}}}$. Mivel $\ell(s\bar{s}) = (\ell(s)\tau(\bar{s}))\tau_{\bar{s}} \leq \tau(\bar{s})\tau_{\bar{s}} = \ell(\bar{s})$, azért $\chi_{s,\bar{s}} \cdot \sigma h_{\bar{s}} \cdot \bar{\sigma} \in \Sigma_{\ell(s\bar{s})}$. Így a (2)-ben definiált szorzás valóban értelmezve van $\mathbf{S}$ -en.

2. LEMMA. A (2)-ben definiált szorzás asszociatív.

Bizonyítás. Legyen $s, \bar{s}, \bar{\bar{s}} \in S$ és $\sigma \in \Sigma_{\ell(s)}$, $\bar{\sigma} \in \Sigma_{\ell(\bar{s})}$ és $\bar{\bar{\sigma}} \in \Sigma_{\ell(\bar{\bar{s}})}$. Ekkor (2) alapján $[(s, \sigma)(\bar{s}, \bar{\sigma})](\bar{\bar{s}}, \bar{\bar{\sigma}}) = ((s\bar{s}), \sigma_1)(\bar{\bar{s}}, \bar{\bar{\sigma}})$ és $(s, \sigma)[(\bar{s}, \bar{\sigma})(\bar{\bar{s}}, \bar{\bar{\sigma}})] = (s(\bar{s}\bar{\bar{s}}), \sigma_2)$, ahol

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \chi_{s\bar{s}, \bar{\bar{s}}} \cdot (\chi_{s,\bar{s}} \cdot \sigma h_{\bar{s}} \cdot \bar{\sigma}) h_{\bar{\bar{s}}} \cdot \bar{\bar{\sigma}} \\ \sigma_2 &= \chi_{s, \bar{s}\bar{\bar{s}}} \cdot \sigma h_{\bar{s}\bar{\bar{s}}} \cdot (\chi_{\bar{s}, \bar{\bar{s}}} \cdot \bar{\sigma} h_{\bar{\bar{s}}} \cdot \bar{\bar{\sigma}}). \end{aligned}$$

Mivel S asszociatív, azt kell csak igazolnunk, hogy $\sigma_1 = \sigma_2$. Felhasználva, hogy $h_{\bar{s}}$ endomorfizmus, (A2) és (A3) alapján

kapjuk, hogy a Σ félcsoporthban

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \chi_{s, \bar{s}} \cdot \chi_{s, \bar{s}} h_{\bar{s}} \cdot \sigma h_{\bar{s}} h_{\bar{s}} \cdot \bar{\sigma} h_{\bar{s}} \cdot \bar{\sigma} = \\ &= \chi_{s, \bar{s}} \cdot \chi_{s, \bar{s}}^{-1} \cdot \chi_{s, \bar{s}} \cdot \chi_{s, \bar{s}} \cdot \chi_{s, \bar{s}}^{-1} \cdot \sigma h_{\bar{s}} \cdot \chi_{s, \bar{s}} \cdot \bar{\sigma} h_{\bar{s}} \cdot \bar{\sigma} = \\ &= \varepsilon_{\ell(s, \bar{s})} \cdot \chi_{s, \bar{s}} \cdot \varepsilon_{\ell(s, \bar{s})} \cdot \sigma h_{\bar{s}} \cdot \chi_{s, \bar{s}} \cdot \bar{\sigma} h_{\bar{s}} \cdot \bar{\sigma} .\end{aligned}$$

Itt $\chi_{s, \bar{s}} \in \Sigma_{\ell(s, \bar{s})}$. Így $\chi_{s, \bar{s}} = \varepsilon_{\ell(s, \bar{s})} \cdot \chi_{s, \bar{s}} = \chi_{s, \bar{s}} \cdot \varepsilon_{\ell(s, \bar{s})}$. És mivel $\ell(s, \bar{s}) \leq \ell(\bar{s})$, azért $\varepsilon_{\ell(s, \bar{s})} \cdot \varepsilon_{\ell(\bar{s})} = \varepsilon_{\ell(s, \bar{s})}$. Tehát

$$\sigma_1 = \chi_{s, \bar{s}} \cdot \sigma h_{\bar{s}} \cdot \chi_{s, \bar{s}} \cdot \bar{\sigma} h_{\bar{s}} \cdot \bar{\sigma} = \sigma_2 .$$

Éppen ezt akartuk bizonyítani.

Az **S** halmaz a (2)-ben definiált szorzással tehát félcsoporthot alkot, amit a továbbiakban $\mathcal{S}(S, \Sigma; h, \chi)$ -vel fogunk jelölni.

3. LEMMA. Az **S** = $\mathcal{S}(S, \Sigma; h, \chi)$ félcsoporth ortodox és idempotens kötege

$$(3) \quad \mathbf{B} = \{(e, \iota) : e \in S, \iota \in \Sigma_{\ell(e)} \text{ idempotensek} \} .$$

Az (e, ι) és $(\bar{e}, \bar{\iota})$ **B**-beli elemek szorzata $(e\bar{e}, \iota\bar{\iota})$.

Bizonyítás. Először belátjuk, hogy **S** reguláris. Legyenek s és s' egymás inverzei S -ben, továbbá legyen σ és $\sigma^* \in \Sigma_{\ell(s)}$. Nyilván akkor $\sigma^* h_{s'}$ benne van $\Sigma_{\ell(s')}$ -ben. A (2) definíció szerint $(s, \sigma \chi_{s'} \sigma^* h_{s'}) \chi_{s, \sigma} = (s s' s, \sigma_1) = (s, \sigma_1)$, ahol

$$\sigma_1 = \chi_{s, s' s} \cdot \sigma h_{s' s} \cdot \chi_{s, s' s} \cdot \sigma^* h_{s'} h_s \cdot \sigma .$$

Itt $s' s \in E_{\ell(s)}$, hiszen $s \mathcal{L} s' s$. Így (A4) és (A5) alapján $\chi_{s, s' s} = \varepsilon_{\ell(s)}$ és $\sigma h_{s' s} = \sigma \cdot \varepsilon_{\ell(s)}$, $\sigma^* h_{s' s} = \sigma^* \cdot \varepsilon_{\ell(s)}$. Továbbá, $\chi_{s' s} \cdot \chi_{s' s}^{-1} = \varepsilon_{\ell(s)}$. Mivel $\varepsilon_{\ell(s)}$ egységelem $\Sigma_{\ell(s)}$ -ben, (A3)-t kihasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \varepsilon_{\ell(s)} \cdot \sigma \cdot \varepsilon_{\ell(s)} \cdot \chi_{s',s} \cdot \chi_{s',s}^{-1} \cdot \sigma^* h_{s',s} \cdot \chi_{s',s} \cdot \sigma = \\ &= \sigma \cdot \varepsilon_{\ell(s)} \cdot \sigma^* \cdot \varepsilon_{\ell(s)} \cdot \chi_{s',s} \cdot \sigma = \sigma \cdot (\sigma^* \cdot \chi_{s',s}) \cdot \sigma ,\end{aligned}$$

ahol $\sigma^* \cdot \chi_{s',s} \in \Sigma_{\ell(s)}$. Mivel S és Σ reguláris, minden $s(\in S)$ -nek és $\sigma(\in \Sigma)$ -nak létezik s', σ' inverze. Ha $\sigma \in \Sigma_{\ell(s)}$, akkor σ' is $\Sigma_{\ell(s)}$ -ben van. És mivel $\chi_{s',s} \in U(\Sigma_{\ell(s)})$, a $\sigma^* = \sigma' \cdot \chi_{s',s}^{-1}$ elemre teljesül, hogy $\sigma^* \cdot \chi_{s',s} = \sigma' \cdot \varepsilon_{\ell(s)} = \sigma'$. A fenti gondolatmenet szerint ekkor

$$(s, \sigma)(s', (\sigma' \chi_{s',s}^{-1}) h_{s'}) (s, \sigma) = (s, \sigma) .$$

Ezzel tehát igazoltuk, hogy **S** reguláris.

Tegyük fel, hogy (e, ι) idempotens elem **S**-ben. Ekkor (2) alapján nyilván e idempotens, és $\chi_{e,e} \cdot \iota h_e \cdot \iota = \iota$. (A5) alapján $\chi_{e,e} = \varepsilon_{\ell(e)}$, (A4) miatt pedig $\iota h_e = \iota \cdot \varepsilon_{\ell(e)}$. És mivel $\iota \in \Sigma_{\ell(e)}$, kapjuk, hogy $\iota = \varepsilon_{\ell(e)} \cdot \iota \cdot \varepsilon_{\ell(e)} \cdot \iota = \iota^2$, azaz ι is idempotens. Fordítva, legyen most $e \in E$ és $\iota \in \Sigma_{\ell(e)}$ idempotens. Ekkor (A5) illetve (A4) miatt $\chi_{e,e} = \varepsilon_{\ell(e)}$ illetve $\iota h_e = \iota$. Tehát $\iota = \iota^2 = \chi_{e,e} \cdot \iota h_e \cdot \iota$, amiből definíció szerint következik, hogy (e, ι) idempotens. Így beláttuk, hogy a (3)-ban megadott **B** halmaz **S** idempotenseinek halmaza. Hátra van még annak az igazolása, hogy **B** zárt a szorzásra. Legyen (e, ι) és $(\bar{e}, \bar{\iota}) \in \mathbf{B}$. (2) alapján $(e, \iota)(\bar{e}, \bar{\iota}) = (e\bar{e}, \iota_1)$, ahol $\iota_1 = \chi_{e,\bar{e}} \cdot \iota h_{\bar{e}} \cdot \bar{\iota}$. Mivel S ortodox, $e\bar{e}$ idempotens. Másrészt, (A4) és (A6) következtében $\iota_1 = \varepsilon_{\ell(e)\ell(\bar{e})} \cdot \iota \cdot \varepsilon_{\ell(\bar{e})} \cdot \bar{\iota}$. Mivel $\iota_1 \in \Sigma_{\ell(e\bar{e})}$ és $\ell(e\bar{e}) = \ell(e) \cdot \ell(\bar{e}) \leq \ell(\bar{e})$, kapjuk, hogy $\iota_1 = \iota \cdot \bar{\iota}$. A Σ félcsoporth ortodox, így ι_1 is idempotens. Ezzel a lemma bizonyítását befejeztük.

Definiáljunk az $\mathbf{S}$ félcsoponton egy $\mathcal{C}$ relációt úgy, hogy

$$(4) \quad (s, \bar{s}) \mathcal{C} (\bar{s}, \bar{s}) \quad \text{akkor és csak akkor, ha} \quad s = \bar{s}.$$

Ez nyilván kongruencia reláció $\mathbf{S}$ -en, és $\mathbf{S}/\mathcal{C}$ izomorf $\mathbf{S}$ -sel.

Vegyük észre, hogy

$$\bar{\mathbf{B}} = \{(e, \varepsilon_{\ell(e)}) : e \in E\}$$

részkötege $\mathbf{B}$ -nek, hiszen $\ell(e) \cdot \ell(\bar{e}) = \ell(e\bar{e})$. Továbbá, minden $e \in E$ -re

$$\mathcal{F}_e = \{(e, \iota) : \iota \text{ idempotens } \Sigma_{\ell(e)}\text{-ben}\}$$

is részkötege $\mathbf{B}$ -nek. $\mathcal{F}_e$ egységeleme éppen $(e, \varepsilon_{\ell(e)})$. Így a $\mathcal{C}$ kongruencia $\bar{\mathbf{B}}$ -szeparáló.

4. LEMMA. A (4)-ben definiált $\mathcal{C}$ reláció erős $\bar{\mathbf{B}}$ -szeparáló kongruencia $\mathbf{S}$ -en.

Bizonyítás. Láttuk, hogy $\mathcal{C}$ $\bar{\mathbf{B}}$ -szeparáló kongruencia. Azt kell megmutatnunk tehát, hogy minden $\mathcal{C}$ -osztály tartalmaz olyan elemet, amely $\bar{\mathbf{B}}$ -beli idempotensekkel $\mathcal{L}$ - és $\mathcal{R}$ -ekvivalens. Megmutatjuk, hogy minden $s \in S$ -re $(s, \varepsilon_{\ell(s)})$ ilyen. Legyen e olyan idempotens S -ben, hogy $e \mathcal{R} s$. Ekkor (1) szerint $(e, \varepsilon_{\ell(e)}) \chi (s, \varepsilon_{\ell(s)}) = (e s, \chi_{e, s} \cdot \varepsilon_{\ell(e)} \kappa_s \cdot \varepsilon_{\ell(s)})$. Itt $e s = s$ és (A5) alapján $\chi_{e, s} = \varepsilon_{\ell(s)}$. Továbbá, $\varepsilon_{\ell(e)} \kappa_s = \varepsilon_{(\ell(e) \kappa(s)) \tau_s} = \varepsilon_{\ell(s)}$, hiszen $(\ell(e) \cdot \kappa(s)) \tau_s = \kappa(e s) \tau_s = \kappa(s) \tau_s = \ell(s)$. Így

$$(5) \quad (e, \varepsilon_{\ell(e)}) \chi (s, \varepsilon_{\ell(s)}) = (s, \varepsilon_{\ell(s)}).$$

Vegyük s -nek egy olyan s' inverzét, amelyre $s' \mathcal{L} e$, azaz $s s' = e$. Ilyen biztosan létezik. Ekkor $\ell(s') = \ell(e)$ és

$$\chi_{s, s'} \in \Sigma_{\ell(s s')} = \Sigma_{\ell(s')} \quad \text{Így } (s', \chi_{s, s'}^{-1}) \in \mathbf{S} \quad \text{és (1) szerint } (s, \varepsilon_{\ell(s)}) \chi (s', \chi_{s, s'}^{-1}) =$$

$= (e, \sigma)$, ahol $\sigma = \chi_{s, s'} \cdot \varepsilon_{\ell(s)} \cdot \chi_{s, s'}^{-1}$. Mivel $\varepsilon_{\ell(s)} \cdot \chi_{s, s'} = \varepsilon_{\ell(s')} \cdot \chi_{s, s'} =$
 $= \varepsilon_{\ell(s')} \cdot \chi_{s, s'} = \varepsilon_{\ell(s')} = \varepsilon_{\ell(e)}$, és $\chi_{s, s'} , \chi_{s, s'}^{-1}$ egymás inverzei
 $U(\Sigma_{\ell(e)})$ -ben, $\sigma = \varepsilon_{\ell(e)}$, azaz

$$(s, \varepsilon_{\ell(s)}) (\chi_{s, s'}^{-1}) = (e, \varepsilon_{\ell(e)}) .$$

Az (5) egyenlőséggel együtt ez azt jelenti, hogy $(s, \varepsilon_{\ell(s)}) \mathcal{Q}$
 $\mathcal{Q}(e, \varepsilon_{\ell(e)})$, ahol $(e, \varepsilon_{\ell(e)}) \in \bar{\mathbf{B}}$. Ugyanigy látható, hogy ha
 $s \mathcal{L} f$ és f idempotens, akkor $(s, \varepsilon_{\ell(s)}) \mathcal{L}(f, \varepsilon_{\ell(f)})$. Ezzel a
 bizonyítást befejeztük.

A 2.-4. Lemmákban tehát igazoltuk a következőt:

5. TÉTEL. Legyen S egy ortodox félcsoporth, amelynek
idempotens kötege derékszögű kötegek γ félhálója. Minden
 $\alpha \in \gamma$ -ra legyen Σ_α egy egységelemes ortodox félcsoporth, amely-
nek egységelemét ε_α jelöli. Legyen Σ a Σ_α félcsoporthok
olyan γ félhálója, amelyben $\mathcal{A} = \{\varepsilon_\alpha : \alpha \in \gamma\}$ részfélcsoporth. Ha
 χ, χ egy (S, Σ) -pár, akkor $\mathbf{S} = \mathcal{S}(S, \Sigma; \chi, \chi)$ ortodox félcsoporth,
a (4)-ben definiált $\mathcal{C}$ reláció erős részköteg-szeparáló
kongruencia $\mathbf{S}$ -en és $\mathbf{S}/\mathcal{C}$ izomorf S -sel.

A célunk e tétel megfordításának igazolása. Bebizonyítjuk,
 hogy ha T egy ortodox félcsoporth, κ egy erős részköteg-sze-
 paráló kongruencia T -n és $T/\kappa = S$, akkor T izomorf valamely
 $\mathcal{S}(S, \Sigma; \chi, \chi)$ félcsoporthtal, ahol Σ, χ, χ olyanok, mint fent.

Először a részköteg-szeparáló kongruenciák magját jelle-
 mezzük. Ehhez szükségünk van a spin-szorzat fogalmára, amit
 rögtön olyan általánosságban vezetünk be, hogy a következő
 fejezetben is alkalmazni tudjuk.

Nevezzünk egy A parciális grupoidot parciális félcsoporth-
 nak, ha teljesül a következő: valahányszor $a, b, c \in A$ úgy, hogy

$ab, bc, a(bc)$ és $(ab)c$ értelmezett, mindannyiszor $a(bc) = (ab)c$.

Legyen Y egy félháló. Azt mondjuk, hogy az A parciális félcsoporthoz az $A_\alpha (\alpha \in Y)$ parciális félcsoporthoz Y parciális félhálójára, ha $A = \bigcup \{A_\alpha : \alpha \in Y\}$, ahol (i) $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$ ha $\alpha \neq \beta$, és (ii) valahányszor $a \in A_\alpha$ és $b \in A_\beta$ úgy, hogy ab értelmezett A -ban, mindannyiszor $ab \in A_{\alpha\beta}$.

Legyen most az A parciális félcsoporthoz az $A_\alpha (\alpha \in Y)$ parciális félcsoporthoz Y parciális félhálójára, a B félcsoporthoz pedig a $B_\alpha (\alpha \in Y)$ félcsoporthoz Y félhálójára. Az A parciális félcsoporthoz és a B félcsoporthoz Y feletti spin-szorzatán A és B direkt szorzatának azt az

$$A \times_Y B = \bigcup \{A_\alpha \times B_\alpha : \alpha \in Y\}$$

parciális részfélcsoporthozát értjük, amelyben (a, b) és $(\bar{a}, \bar{b})$ szorzata akkor és csak akkor van értelmezve, ha $a\bar{a}$ értelmezve van A -ban. Speciálisan, ha A félcsoporthoz, akkor $A \times_Y B$ is félcsoporthoz.

6. TÉTEL. Legyen F egy köteg, amely az $F_\alpha (\alpha \in Y)$ derékszögű kötegek Y félhálójára. Minden $\alpha (\in Y)$ -ra jelöljön Σ_α egy egységelemes félcsoporthoz az ε_α egységelemmel. Legyen Σ a $\Sigma_\alpha (\alpha \in Y)$ félcsoporthoz olyan félhálójára, amelyben $\mathcal{F} = \{\varepsilon_\alpha : \alpha \in Y\}$ részfélcsoporthoz. Ekkor a $\tilde{\Sigma} = \mathcal{F} \times_Y \Sigma$ spin-szorzatban $\tilde{\mathcal{F}} = \{(e, \varepsilon_\alpha) : e \in F_\alpha\}$ részfélcsoporthoz, és $\tilde{\Sigma} = \bigcup_{e \in F} \tilde{\Sigma}_e$, ahol minden $e \in F_\alpha$ esetén $\tilde{\Sigma}_e = \{(e, \varepsilon) : \varepsilon \in \Sigma_\alpha\}$ egységelemes félcsoporthoz az (e, ε_α) egységelemmel.

Fordítva, ha $\tilde{\Sigma}$ a $\tilde{\Sigma}_e (e \in F)$ egységelemes félcsoporthoz F kötege, amelyben az egységelemek részfélcsoporthozot alkotnak, akkor $\tilde{\Sigma}$

izomorf $F \times_Y \Sigma$ -val valamely Σ -ra, ahol Σ olyan mint fent.

Bizonyítás. A tétel első állítása a spin-szorzat definíciójából közvetlenül következik. A második állítás bizonyításához tegyük fel, hogy $\tilde{\Sigma} = \bigcup_{e \in E} \tilde{\Sigma}_e$, ahol $\tilde{\Sigma}_e$ egységelemes félcsoporthoz tartozik az ε_e egységelemmel, és $\tilde{\Sigma} = \{\varepsilon_e : e \in E\}$ részfélcsoporthoz tartozik $\tilde{\Sigma}$ -ben. Mivel $\varepsilon_e \varepsilon_{\bar{e}} \in \tilde{\Sigma}_{e\bar{e}}$ teljesül tetszőleges $e, \bar{e} (e \in E)$ -re, ez utóbbi tulajdonságból következik, hogy $\varepsilon_e \varepsilon_{\bar{e}} = \varepsilon_{e\bar{e}}$. Minden $\alpha (e \in Y)$ -ra válasszunk ki és rögzítsünk le egy e_α elemet F_α -ban. Jelöljük $\tilde{\Sigma}_{e_\alpha}$ -t Σ_α -val. A $\Sigma = \bigcup \{\Sigma_\alpha : \alpha \in Y\}$ halmazon értelmezzük a $\circ$ műveletet úgy, hogy ha $\varrho \in \Sigma_\alpha, \sigma \in \Sigma_\beta$, akkor legyen $\varrho \circ \sigma = \varepsilon_{e_{\alpha\beta}} \cdot \varrho \cdot \sigma \cdot \varepsilon_{e_{\alpha\beta}}$. Mivel $\varrho \cdot \sigma \in \tilde{\Sigma}_{e_\alpha e_\beta}$ és $e_\alpha e_\beta \in F_{\alpha\beta}$, azért $\varrho \circ \sigma \in \Sigma_{\alpha\beta}$. Megmutatjuk, hogy a $\circ$ művelet asszociatív. Tegyük fel, hogy $\varrho \in \Sigma_\alpha, \sigma \in \Sigma_\beta$ és $\tau \in \Sigma_\gamma$. Definíció szerint $(\varrho \circ \sigma) \circ \tau = \varepsilon_{e_{\alpha\beta\gamma}} \cdot \varepsilon_{e_{\alpha\beta}} \cdot \varrho \circ \sigma \cdot \varepsilon_{e_{\alpha\beta}} \cdot \tau \cdot \varepsilon_{e_{\alpha\beta\gamma}}$. Mivel $e = e_\alpha e_\beta e_{\alpha\beta} e_\gamma \in F_{\alpha\beta\gamma}$, továbbá $\alpha\beta \geq \alpha\beta\gamma$, az F kötegben $e_{\alpha\beta\gamma} e_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta\gamma} e$. Így $\varepsilon_{e_{\alpha\beta\gamma}} \cdot \varepsilon_{e_{\alpha\beta}} \cdot \varepsilon_e = \varepsilon_{e_{\alpha\beta\gamma}} \cdot \varepsilon_e$. Ebből következik, hogy $(\varrho \circ \sigma) \circ \tau = \varepsilon_{e_{\alpha\beta\gamma}} \cdot \varrho \circ \sigma \cdot \varepsilon_{e_{\alpha\beta\gamma}} \cdot \tau \cdot \varepsilon_{e_{\alpha\beta\gamma}}$. Ugyanis $\varrho \cdot \sigma \cdot \varepsilon_{e_{\alpha\beta}} \cdot \tau \in \tilde{\Sigma}_e$ és ε_e a $\tilde{\Sigma}_e$ egységeleme. Hasonlóan, $\varepsilon_{e_{\alpha\beta\gamma}} \cdot \varrho \cdot \sigma \in \tilde{\Sigma}_f$ és $\tau \cdot \varepsilon_{e_{\alpha\beta\gamma}} \in \tilde{\Sigma}_g$, ahol $f = e_{\alpha\beta\gamma} e_\alpha e_\beta \in F_{\alpha\beta\gamma}$ és $g = e_\gamma e_{\alpha\beta\gamma} \in F_{\alpha\beta\gamma}$. Ekkor $f e_{\alpha\beta\gamma} g = fg$ érvényes F -ben, és így $(\varrho \circ \sigma) \circ \tau = \varepsilon_{e_{\alpha\beta\gamma}} \cdot \varrho \circ \sigma \cdot \tau \cdot \varepsilon_{e_{\alpha\beta\gamma}}$. Szimmetrikusan látható, hogy $\varrho \circ (\sigma \circ \tau) = \varepsilon_{e_{\alpha\beta\gamma}} \cdot \varrho \cdot \sigma \cdot \tau \cdot \varepsilon_{e_{\alpha\beta\gamma}}$, azaz a $\circ$ művelet asszociatív. Kaptuk tehát, hogy Σ a $\circ$ műveletre a $\Sigma_\alpha (\alpha \in Y)$ félcsoporthoz tartozó félhálóját. Σ_α egységelemes, hiszen $\tilde{\Sigma}_{e_\alpha}$ -ban ε_{e_α} egységelem. Továbbá, ha $\alpha, \beta \in Y$, akkor $\varepsilon_{e_\alpha} \circ \varepsilon_{e_\beta} = \varepsilon_{e_{\alpha\beta}} \cdot \varepsilon_{e_\alpha} \cdot \varepsilon_{e_\beta} \cdot \varepsilon_{e_{\alpha\beta}} = \varepsilon_{e_{\alpha\beta}}$, mert $e_\alpha e_\beta \in F_{\alpha\beta}$. Tehát Σ -ban $\tilde{\Sigma} = \{\varepsilon_{e_\alpha} : \alpha \in Y\}$ részfélcsoporthoz tartozik.

Definiáljunk egy $\phi : \tilde{\Sigma} \rightarrow F \times_Y \Sigma$ leképezést úgy, hogy ha $\sigma \in \tilde{\Sigma}_e$, ahol $e \in E_\alpha$, akkor legyen $\sigma \phi = (e, \varepsilon_{e_\alpha} \cdot \sigma \cdot \varepsilon_{e_\alpha})$. Nyilván $\varepsilon_{e_\alpha} \cdot \sigma \cdot \varepsilon_{e_\alpha} \in \Sigma_\alpha$, hiszen $e_\alpha e e_\alpha = e_\alpha$. Így ϕ valóban

$F \times_Y \Sigma$ -ba képez. Jelölje $\phi^!$ azt az $F \times_Y \Sigma \rightarrow \tilde{\Sigma}$ leképezést, amelyre ha $e \in F_\alpha, \sigma \in \Sigma_\alpha$, akkor $(e, \sigma)\phi^! = \varepsilon_e \cdot \sigma \cdot \varepsilon_e$. Itt $e e_\alpha e = e$ miatt $\varepsilon_e \cdot \sigma \cdot \varepsilon_e \in \tilde{\Sigma}_e$. A ϕ és $\phi^!$ leképezések egymás inverzei. Ugyan-
is ha $\sigma \in \tilde{\Sigma}_e$, ahol $e \in F_\alpha$, akkor

$$\sigma \phi \phi^! = (e, \varepsilon_{e_\alpha} \cdot \sigma \cdot \varepsilon_{e_\alpha}) \phi^! = \varepsilon_e \cdot \varepsilon_{e_\alpha} \cdot \sigma \cdot \varepsilon_{e_\alpha} \cdot \varepsilon_e = \sigma,$$

és ha $e \in F_\alpha, \sigma \in \Sigma_\alpha$, akkor

$$(e, \sigma) \phi^! \phi = (\varepsilon_e \cdot \sigma \cdot \varepsilon_e) \phi = (e, \varepsilon_{e_\alpha} \cdot \varepsilon_e \cdot \sigma \cdot \varepsilon_e \cdot \varepsilon_{e_\alpha}) = (e, \sigma).$$

Ebből következik, hogy ϕ kölcsönösen egyértelmű ráképezés.

Továbbá, ϕ izomorfizmus. Legyen ugyanis g és σ két $\tilde{\Sigma}$ -beli elem úgy, hogy $g \in \tilde{\Sigma}_e, \sigma \in \tilde{\Sigma}_f$, ahol $e \in F_\alpha, f \in F_\beta$. Ekkor $g\sigma \in \tilde{\Sigma}_{ef}$ és $ef \in F_{\alpha\beta}$. Definíció szerint $g\phi \cdot \sigma\phi =$
 $= (e, \varepsilon_{e_\alpha} \cdot g \cdot \varepsilon_{e_\alpha}) (f, \varepsilon_{f_\beta} \cdot \sigma \cdot \varepsilon_{f_\beta}) = (ef, \sigma_1)$, ahol

$$(6) \quad \sigma_1 = \varepsilon_{e_{\alpha\beta}} \cdot \varepsilon_{e_\alpha} \cdot g \cdot \varepsilon_{e_\alpha} \cdot \varepsilon_{e_\beta} \cdot \sigma \cdot \varepsilon_{e_\beta} \cdot \varepsilon_{e_{\alpha\beta}}.$$

Másrészt $(g \cdot \sigma)\phi = (ef, \varepsilon_{e_{\alpha\beta}} \cdot g \cdot \sigma \cdot \varepsilon_{e_{\alpha\beta}})$. Azt kell igazolnunk,

hogy $\sigma_1 = \varepsilon_{e_{\alpha\beta}} \cdot g \cdot \sigma \cdot \varepsilon_{e_{\alpha\beta}}$. Mivel $e_\alpha e_\beta \in F_{\alpha\beta}$ és $\alpha\beta \leq \alpha$, azért $e_{\alpha\beta} e_\alpha (e e_\alpha e_\beta) = e_{\alpha\beta} (e e_\alpha e_\beta)$. Így $\varepsilon_{e_{\alpha\beta}} \cdot \varepsilon_{e_\alpha} \cdot \varepsilon_{e e_\alpha e_\beta} = \varepsilon_{e_{\alpha\beta}} \cdot \varepsilon_{e e_\alpha e_\beta}$. Mivel $g \cdot \varepsilon_{e_\alpha} \cdot \varepsilon_{e_\beta} \in \tilde{\Sigma}_{e e_\alpha e_\beta}$, ebből következik, hogy $\varepsilon_{e_{\alpha\beta}} \cdot \varepsilon_{e_\alpha} \cdot g \cdot \varepsilon_{e_\alpha} \cdot \varepsilon_{e_\beta} =$
 $= \varepsilon_{e_{\alpha\beta}} \cdot g \cdot \varepsilon_{e_\alpha} \cdot \varepsilon_{e_\beta}$. Hasonlóan látható, hogy $\varepsilon_{e_\alpha} \cdot \varepsilon_{e_\beta} \cdot \sigma \cdot \varepsilon_{e_\beta} \cdot \varepsilon_{e_{\alpha\beta}} =$
 $= \varepsilon_{e_\alpha} \cdot \varepsilon_{e_\beta} \cdot \sigma \cdot \varepsilon_{e_{\alpha\beta}}$. Így (6)-ból kapjuk, hogy

$$(6)', \quad \sigma_1 = \varepsilon_{e_{\alpha\beta}} \cdot g \cdot \varepsilon_{e_\alpha} \cdot \varepsilon_{e_\beta} \cdot \sigma \cdot \varepsilon_{e_{\alpha\beta}}.$$

Itt $\varepsilon_{e_{\alpha\beta}} \cdot g \in \tilde{\Sigma}_{e_{\alpha\beta} e}$, $\sigma \cdot \varepsilon_{e_{\alpha\beta}} \in \tilde{\Sigma}_{f e_{\alpha\beta}}$ és $e_{\alpha\beta} e, f e_{\alpha\beta} \in F_{\alpha\beta}$. Ezért $(e_{\alpha\beta} e)(f e_{\alpha\beta}) = (e_{\alpha\beta} e)(f e_{\alpha\beta})$, és így $\varepsilon_{e_{\alpha\beta} e} \cdot \varepsilon_{e_\alpha} \cdot \varepsilon_{e_\beta} \cdot \varepsilon_{f e_{\alpha\beta}} = \varepsilon_{e_{\alpha\beta} e} \cdot \varepsilon_{f e_{\alpha\beta}}$. Ebből pedig (6)' alapján adódik, hogy $\sigma_1 = \varepsilon_{e_{\alpha\beta}} \cdot g \cdot \sigma \cdot \varepsilon_{e_{\alpha\beta}}$,
amit bizonyítani akartunk.

Ez a tétel általánosítja M.YAMADA-nak azokra az ortodox félcsoporthoz vonatkozó [24] eredményét, amelyek csoportok kötegei.

Mielőtt az erős részköteg-szeparáló bővítésekre vonatkozó általános tételt kimondjuk, egy lemmát bizonyítunk. A lemmát rögtön erős részköteg-parcelláló kongruenciákra igazoljuk, hogy a következő fejezetben is alkalmazhassuk.

7. LEMMA. Legyen T egy B idempotens kötegi ortodox félcsoporthoz. Legyen $\bar{B}, \delta$ egy asszociált pár B -ben. Tegyük fel, hogy π egy erős $(\bar{B}, \delta)$ -parcelláló kongruencia T -n. Jelölje T/π -t S . Ekkor a π -osztályoknak létezik egy olyan $\{u_s: s \in S, u_s \pi = s\}$ reprezentáns rendszere, hogy $u_s \in S_{\bar{B}}$ minden $s \in S$ -re, $u_e \in \bar{B}$ hacsak e idempotens, és valahányszor s és s' egymás inverzei S -ben, mindannyiszor u_s és $u_{s'}$ egymás inverzei T -ben úgy, hogy $u_s u_{s'} = u_{ss'}$.

Bizonyítás. Legyen az S félcsoporthoz idempotens kötege $E = \bigcup_{\alpha \in Y} E_\alpha$. Válasszunk ki és rögzítsünk le minden $\alpha \in Y$ -ra E_α -ból egy e_α elemet. Az e_α -t tartalmazó π -osztály valamely $\bar{B}$ -beli elemét rögzítsük le és jelöljük i_α -val. Ha $e \in E_\alpha$ S -ben, akkor az e π -osztály bármely $\bar{B}$ -beli j elemére teljesül, hogy $i_\alpha j \pi j$ és $i_\alpha j \in E_\alpha$. Ugyanis $e_\alpha e = e$ miatt $i_\alpha j \pi j$ valóban érvényes. Világos, hogy $i_\alpha (i_\alpha j) = i_\alpha j$. Az $(i_\alpha j) i_\alpha = i_\alpha$ egyenlőség pedig abból következik, hogy $\pi|_{\bar{B}} = \delta|_{\bar{B}} \subseteq \delta$ és így $(i_\alpha j) i_\alpha \delta i_\alpha$ teljesül $[(i_\alpha j) i_\alpha] \pi = e_\alpha$ miatt. Így beláttuk, hogy minden e π -osztályban, ahol $e \in E_\alpha$, található olyan $i \in \bar{B}$, hogy $i \in E_\alpha$. Hasonló állítás igazolható az e_α -val $\mathcal{L}$ -ekvivalens e -kre. Válasszunk ki és rögzítsünk le minden e π -osztályban, ahol $e \in [\mathcal{L}]e_\alpha$, egy



$\bar{B}$ -beli i_e^* elemet úgy, hogy $i_e^* \mathcal{Q}[\mathcal{L}] i_\alpha$. Ha $f \in e_\alpha$, akkor létezik pontosan egy e_1 és $e_2 \in F$ úgy, hogy $e_1 \mathcal{Q} f \mathcal{L} e_2$ és $e_1 \mathcal{L} e_\alpha \mathcal{Q} e_2$. Ekkor $e_1 e_2 = f$. Definiáljuk i_f^* -et úgy, hogy legyen egyenlő $i_{e_1}^* \cdot i_{e_2}^*$ -vel. Mivel az $\cup \{f(\kappa^q)^{-1} : f \in e_\alpha\}$ halmaz $\bar{B}$ -beli elemei derékszögű köteget alkotnak, az így definiált $\{i_f^* : f \in e_\alpha\}$ halmaz ennek egy részkötege, ami szintén derékszögű köteg. Az S félcsoporth idempotensein definiáljuk u -t úgy, hogy $u_e = i_e^*$ minden $e \in F$ esetén.

Legyen most s egy nem idempotens elem S -ből úgy, hogy $e_\alpha \mathcal{Q} s \mathcal{L} e_\beta$. Jelölje s' az s -nek azt az inverzét, amelyre $e_\alpha \mathcal{L} s' \mathcal{Q} e_\beta$ teljesül. A 3.6. Tétel alapján az s és s' κ -osztályokban léteznek olyan $t, t' \in S_{\bar{B}}$ elemek, amelyek egymás inverzei és $(tt')\kappa = e_\alpha$, $(t't)\kappa = e_\beta$. Itt tt' és $t't \in \bar{B}$, így $u_s = i_\alpha^* t i_\beta$ és $u_{s'} = i_\beta^* t' i_\alpha$ szintén $S_{\bar{B}}$ -ban vannak, egymás inverzei és $u_s u_{s'} = i_\alpha^*$, $u_{s'} u_s = i_\beta^*$. Nyilván $u_s \kappa = s$ és $u_{s'} \kappa = s'$. Ezzel definiáltuk u_s -et azokra az $s \in S$ -ékre, ahol $e_\alpha \mathcal{Q} s \mathcal{L} e_\beta$. Legyen most $\tilde{s}$ az s egy tetszőleges eleme. Tegyük fel, hogy $e \mathcal{Q} \tilde{s} \mathcal{L} f$, ahol $e \in F_\alpha$ és $f \in F_\beta$. Akkor $s = e_\alpha \tilde{s} e_\beta$ -ra teljesül, hogy $e_\alpha \mathcal{Q} s \mathcal{L} e_\beta$. Definiáljuk $u_{\tilde{s}}$ -t úgy, hogy $u_{\tilde{s}} = i_e^* u_s i_f^*$. Nyilván $u_{\tilde{s}} \kappa = \tilde{s}$. Az $\{i_e^* : e \in F\}$ idempotensek megválasztása miatt $u_{\tilde{s}}$ definíciója független e és f választásától. Ha $\tilde{s}$ és $\tilde{s}'$ egymás inverzei S -ben úgy, hogy $\tilde{s} \tilde{s}' = e$, $\tilde{s}' \tilde{s} = f$, akkor $u_{\tilde{s}}$ és $u_{\tilde{s}'}$ egymás inverzei $S_{\bar{B}}$ -ban és $u_{\tilde{s}} u_{\tilde{s}'} = i_e^*$, $u_{\tilde{s}'} u_{\tilde{s}} = i_f^*$. A kívánt tulajdonságok tehát teljesülnek az így definiált reprezentáns rendszerre.

A következő tétel a fejezet fő eredménye, amely az 5. Tétellel együtt az ortodox félcsoporthok összes erős részköteg-szeparáló bővítéseit jellemzi.

8. TÉTEL. Legyen T ortodox félcsoporth. Legyen κ egy erős részköteg-szeparáló kongruencia T -n, és jelölje S a

$\mathcal{T}/\kappa$ faktorfélcsoportot. Tegyük fel, hogy $\mathcal{S}$ idempotens kötege $E = \bigcup_{\alpha \in Y} E_\alpha$. Ekkor léteznek olyan $\Sigma_\alpha (\alpha \in Y)$ egységelemes ortodox félcsoportok az E_α egységelemmel, és létezik a $\Sigma_\alpha (\alpha \in Y)$ -k olyan Σ -val jelölt Y félhálójára, amelyben $\mathcal{K} = \{\varepsilon_\alpha : \alpha \in Y\}$ részfélcsoport, hogy $\mathcal{T}$ izomorf $\mathcal{S}(\Sigma, \mathcal{K}; \mathcal{R}, \chi)$ -vel valamely $\mathcal{R}, \chi$ (Σ, Σ) -párra.

Bizonyítás. A tétel bizonyítása során használjuk a fejezet elején bevezetett $\ell(s), \kappa(s), \tau_s$ jelöléseket az $\mathcal{S}$ félcsoporton a megfelelő tulajdonságokkal együtt.

Tegyük fel, hogy $\mathcal{T}$ idempotens kötege $\mathcal{B}$, és κ ennek a $\mathcal{B}$ részköteget szeparálja. Definíció szerint minden e κ -osztály pontosan egy i_e^* $\mathcal{B}$ -beli elemet tartalmaz, amely az adott κ -osztályban a legnagyobb idempotens. A 7. Lemma biztosítja, hogy a κ -osztályoknak van egy olyan $\{u_s : s \in S, u_s \kappa = s\} \subseteq S_{\mathcal{B}}$ reprezentáns rendszere, hogy valahányszor s és s' egymás inverzei $\mathcal{S}$ -ben, mindannyiszor u_s és $u_{s'}$ egymás inverzei $\mathcal{T}$ -ben. Továbbá $u_e = i_e^*$, és valahányszor s, s' egymás inverzei $\mathcal{S}$ -ben úgy, hogy $ss' = e, s's = f$, akkor $u_s u_{s'} = i_e^*$ és $u_{s'} u_s = i_f^*$. A κ reláció idempotens osztályai egységelemes ortodox félcsoportok a 3.2. Tétel értelmében. Az e κ -osztályt mint $\mathcal{T}$ részfélcsoportját jelölje $\tilde{\Sigma}_e$. A $\tilde{\Sigma}_e$ egységeleme nyilván i_e^* . A 3.2. Tétel alapján az idempotens κ -osztályok $\tilde{\Sigma}$ uniója a $\tilde{\Sigma}_e$ egységelemes ortodox félcsoportok E kötege. Továbbá, $\mathcal{B} = \{i_e^* : e \in E\}$ részkötege $\tilde{\Sigma}$ -nek. Minden $\alpha (\in Y)$ -ra válasszunk ki és rögzítsünk le egy e_α elemet E_α -ban. A $\tilde{\Sigma}_{e_\alpha}$ félcsoportot jelölje Σ_α , $i_{e_\alpha}^*$ -t i_α , $\bigcup \{\Sigma_\alpha : \alpha \in Y\}$ -t pedig Σ . Értelmezzünk szorzást Σ -ban úgy, hogy ha $\varrho \in \Sigma_\alpha, \sigma \in \Sigma_\beta$, akkor $\varrho \cdot \sigma = i_{\alpha\beta} \cdot \varrho \cdot \sigma \cdot i_{\alpha\beta}$. A 6. Tételből következik, hogy Σ a Σ_α egységelemes ortodox félcsoportok Y félhálójára, és

$\mathcal{X} = \{\iota_\alpha : \alpha \in Y\}$ a Σ -nak részfélcsoportja. Továbbá, az a $\phi: \tilde{\Sigma} \rightarrow F \times_Y \Sigma$ leképezés, ami a $\sigma \in \tilde{\Sigma}_e$, ahol $e \in F_\alpha$, elemnek az $(e, \iota_\alpha \cdot \sigma \cdot \iota_\alpha)$ elemet felelteti meg, izomorfizmus.

Megmutatjuk, hogy ha $t \in T$ és $\alpha \in S_{\tilde{B}}$ úgy, hogy $t\alpha = \alpha t = s$, akkor t egyértelműen előáll $\alpha \sigma \iota_e^*$ alakban, ahol $e \in F$, $s \mathcal{L} e \mathcal{R} e_{\ell(s)}$ és $\sigma \in \Sigma_{\ell(s)}$. Legyen $f \in F$ úgy, hogy $s \mathcal{R} f$. Jelölje s^1 az s -nek azt az inverzét, amelyre $e \mathcal{R} s^1 \mathcal{L} f$ áll. Ekkor $s^1 s = f$ és $s^1 s = e$. Mivel $e \mathcal{R} e_{\ell(s)}$, azért $\iota_e^* \mathcal{R} \iota_{\ell(s)}$. A 3.6. Tétel alapján α -nek létezik olyan α^1 inverze, hogy $\alpha^1 \alpha = s^1$. Ha α^1 ilyen, akkor $\alpha \alpha^1 = \iota_f^*$ és $\alpha^1 \alpha = \iota_e^*$. Tegyük fel, hogy $\mathcal{E}$ olyan idempotens T -ben, hogy $\mathcal{E} \mathcal{R} t$. Legyen $\mathcal{E} \alpha$ -ban a legnagyobb idempotens ι_f^* . Mivel $\iota_f^* \alpha = \mathcal{E} \alpha \mathcal{R} t \alpha = s$, azért $\tilde{f} \mathcal{R} s$. Így tehát $f \mathcal{R} \tilde{f}$, amiből következik, hogy $\iota_f^* \mathcal{R} \iota_{\tilde{f}}^*$. Akkor pedig

$$t = \mathcal{E} t = \iota_{\tilde{f}}^* \mathcal{E} t = \iota_{\tilde{f}}^* t = \iota_f^* \iota_{\tilde{f}}^* t = \iota_f^* t.$$

Hasonlóan igazolható, hogy $t = t \iota_e^*$. Ezek felhasználásával adódik, hogy $t = \alpha \alpha^1 t \iota_e^* = \alpha (\alpha^1 t \iota_{\ell(s)}) \iota_e^*$. Itt $(\alpha^1 t \iota_{\ell(s)}) \alpha = s^1 s \mathcal{E}_{\ell(s)} = e \mathcal{E}_{\ell(s)} = e_{\ell(s)}$, tehát $\sigma = \alpha^1 t \iota_{\ell(s)} \in \Sigma_{\ell(s)}$. Ezzel t -t előállítottuk a kívánt módon. Ha t előállna kétféle módon, akkor az csak úgy lehetne, hogy $t = \alpha \sigma \iota_e^* = \alpha \tilde{\sigma} \iota_e^*$, hiszen $s = t \alpha$ és $s \mathcal{L} e \mathcal{R} e_{\ell(s)}$ egyértelműen meghatározza e -t. Az $\alpha \sigma \iota_e^* = \alpha \tilde{\sigma} \iota_e^*$ egyenlőséget balról α^1 -vel, jobbról pedig $\iota_{\ell(s)}$ -sel megszorozva kapjuk, hogy $\iota_e^* \sigma \iota_e^* \iota_{\ell(s)} = \iota_e^* \tilde{\sigma} \iota_e^* \iota_{\ell(s)}$. Ebből pedig következik $\sigma = \tilde{\sigma}$. Ugyanis σ és $\tilde{\sigma} \in \Sigma_{\ell(s)}$. Ezért $\sigma = \iota_{\ell(s)} \sigma$, $\tilde{\sigma} = \iota_{\ell(s)} \tilde{\sigma}$ és $\iota_e^* \iota_{\ell(s)} = \iota_{\ell(s)}$. Ezzel az előállítás egyértelműségét is igazoltuk. Megjegyezzük, hogy a gondolatmenetből az is kiderült, hogy ha $t = \alpha \sigma \iota_e^*$, ahol $\alpha \in S_{\tilde{B}}$, $t\alpha = \alpha t = s$, valamint $\sigma \in \Sigma_{\ell(s)}$ és

$e \in E$ úgy, hogy $sLeRe_{\ell(s)}$, akkor $\sigma = \alpha' t \iota_{\ell(s)}$ érvényes α tetszőleges olyan α' inverzére, amelyre $\iota_{\ell(s)} R \alpha'$.

Duálisan igazolható, hogy ha $t \in T$ és $\alpha \in S_{\bar{3}}$ úgy, hogy $t\alpha = \alpha\pi = s$, akkor t egyértelműen előállítható $\iota_f^* \sigma \alpha$ alakban, ahol $\sigma \in \Sigma_{\pi(s)}$ és $sLeRe_{\pi(s)}$. Továbbá, $\sigma = \iota_{\pi(s)} t \alpha'$ az α -nek minden olyan α' inverzére, amelyre $\iota_f^* R \alpha'$.

Speciálisan, minden $t \in T$ egyértelműen előáll $t = u_s \sigma \iota_e^*$ alakban, ahol $s = t\pi$, $\sigma \in \Sigma_{\ell(s)}$ és $sLeRe_{\ell(s)}$. Tehát értelmezhetünk egy $\Psi: T \rightarrow \{(s, \sigma) : s \in S, \sigma \in \Sigma_{\ell(s)}\}$ kölcsönösen egyértelmű ráképezést úgy, hogy ha $t = u_s \sigma \iota_e^*$, ahol $s = t\pi$, $\sigma \in \Sigma_{\ell(s)}$ és $sLeRe_{\ell(s)}$, akkor $t\Psi = (s, \sigma)$. A következőkben megadunk egy R, χ (S, Σ) -párt úgy, hogy a Ψ leképezés T -nek $\mathcal{S}(S, \Sigma, R, \chi)$ -re való izomorfizmusa lesz.

Legyen $\sigma \in \Sigma_\alpha$, $e \in E$ úgy, hogy eRe_α és $s \in S$. Ekkor $(\iota_e^* u_s)\pi = es$ és $\iota_e^* u_s \in S_{\bar{3}}$. Továbbá $(\sigma \iota_e^* u_s)\pi = e_\alpha e s = es$. Így $\sigma \iota_e^* u_s$ egyértelmű módon előáll $\iota_e^* u_s \tilde{\sigma} \iota_f^*$ alakban, ahol $\tilde{\sigma} \in \Sigma_{\ell(es)}$ és $esLeRe_{\ell(es)}$. Az is teljesül, hogy $\tilde{\sigma} = \iota_{\ell(es)} (\iota_e^* u_s)' (\sigma \iota_e^* u_s) \iota_{\ell(es)}$ az $\iota_e^* u_s$ tetszőleges $(\iota_e^* u_s)'$ inverzére. Speciálisan, ha s' az s , e' pedig az e egy tetszőleges inverze, akkor $u_{s'} \iota_{e'}^*$ az $\iota_e^* u_s$ egy inverze, így

$$(7) \quad \tilde{\sigma} = \iota_{\ell(es)} u_{s'} \iota_{e'}^* \sigma \iota_e^* u_s \iota_{\ell(es)}$$

Legyen s' az s , e' pedig az e egy-egy inverze. Tegyük fel, hogy $e'Le_\alpha$. A duális előállítást használva ugyanígy látható, hogy $u_{s'} \iota_{e'}^* \sigma$ egyértelmű módon előáll $\iota_q^* \tilde{\sigma} u_{s'} \iota_{e'}^*$ alakban, ahol $\tilde{\sigma} \in \Sigma_{\pi(s'e')}$ és $s'e'LeRe_{\pi(s'e')}$. Továbbá

$$(8) \quad \tilde{\sigma} = \iota_{\pi(s'e')} u_{s'} \iota_{e'}^* \sigma \iota_{(e')}^* u_{(s')} \iota_{\pi(s'e')}$$

érvényes e' tetszőleges $(e')'$ és s' tetszőleges $(s')'$ inverzére. Nyilván $(\alpha \pi(s))\tau_s = l(es) = \pi(s'e')$. Így ha (7)-ben e' -t úgy választjuk, hogy $e' \in e_\alpha$, (8)-ban pedig $(e')'$ -t e -nek, $(s')'$ -t pedig s -nek választjuk, akkor látható, hogy $\tilde{\sigma} = \hat{\sigma}$. Ha (8)-ban $e' = (e')' = e_\alpha$, akkor $\tilde{\sigma} = i_{(\alpha \pi(s))\tau_s} u_{s'} \sigma u_{(s')'} i_{(\alpha \pi(s))\tau_s}$. Tehát

$$(9) \quad \tilde{\sigma} = i_{(\alpha \pi(s))\tau_s} u_{s'} \sigma u_{(s')'} i_{(\alpha \pi(s))\tau_s}$$

az egyetlen olyan elem $\Sigma_{(\alpha \pi(s))\tau_s}$ -ben, amelyre $\sigma i_e^* u_s = i_e^* u_s \tilde{\sigma} i_f^*$ teljesül, ahol $e s \in f \in e_{(\alpha \pi(s))\tau_s}$. Ebből egyrészt következik, hogy $\tilde{\sigma}$ független e -től. Másrészt, ha s_1 és s_2 -nek van közös s' inverze S -ben, azaz $s_1 \sim s_2$, akkor $s'_1 = s'$ és $(s')' = s_2$ választással látható, hogy a hozzájuk tartozó $\tilde{\sigma}$ egyenlő. Ha $s \in S$, akkor definiálhatunk tehát egy olyan $k_s: \Sigma \rightarrow \Sigma$ transzformációt, hogy ha $\sigma \in \Sigma_\alpha$, akkor σk_s a (9)-ben megadott $\tilde{\sigma}$. Nyilván $\sigma k_s \in \Sigma_{(\alpha \pi(s))\tau_s}$, és σk_s az egyetlen olyan $\Sigma_{(\alpha \pi(s))\tau_s}$ -beli elem, hogy ha $\sigma \in \Sigma_\alpha$ és $e \in e_\alpha$, akkor

$$(10) \quad \sigma i_e^* u_s = i_e^* u_s (\sigma k_s) i_f^*,$$

ahol $e s \in f \in e_{(\alpha \pi(s))\tau_s}$. Láttuk, hogy az így definiált k rendelkezik az (A1) tulajdonsággal.

Most igazoljuk, hogy minden $s(e \in S)$ -re k_s endomorfizmus. Legyen $\varrho \in \Sigma_\alpha, \sigma \in \Sigma_\beta$. Ekkor $\varrho k_s \in \Sigma_{(\alpha \pi(s))\tau_s}$ és $\sigma k_s \in \Sigma_{(\beta \pi(s))\tau_s}$. Ebből következik, hogy $\varrho k_s \circ \sigma k_s \in \Sigma_\gamma$, ahol $\gamma = (\alpha \beta \pi(s))\tau_s$. Így (9) alapján $(s')' = s$ választással kapjuk, hogy

$$\varrho k_s \circ \sigma k_s = i_\gamma i_{(\alpha \pi(s))\tau_s} u_{s'} \varrho u_s i_{(\alpha \pi(s))\tau_s} i_{(\beta \pi(s))\tau_s} u_{s'} \sigma u_s i_{(\beta \pi(s))\tau_s} i_\gamma.$$

Itt $(u_{s'} \varrho u_s) \phi = (s' e s, \hat{\sigma})$, ahol $\hat{\sigma} = i_{(\alpha \pi(s))\tau_s} u_{s'} \varrho u_s i_{(\alpha \pi(s))\tau_s}$,

hiszen $s e_{\alpha} s \in E_{(\alpha \pi(s)) \tau_s}$. Hasonlóan $(u_s, \sigma u_s) \phi = (s e_{\beta} s, \hat{\sigma})$, ahol $\hat{\sigma} = i_{(\beta \pi(s)) \tau_s} u_{s'} \sigma u_s i_{(\beta \pi(s)) \tau_s}$. Mivel ϕ izomorfizmus $\tilde{\Sigma}$ -ről $E \times_Y \Sigma$ -ra, ebből kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} (\varrho h_s \circ \sigma h_s) \phi &= \\ &= (e_f, i_f)(e_{(\alpha \pi(s)) \tau_s}, i_{(\alpha \pi(s)) \tau_s}) \chi(s e_{\alpha} s, \hat{\sigma})(e_{(\alpha \pi(s)) \tau_s}, i_{(\alpha \pi(s)) \tau_s}) \cdot \\ &\cdot (e_{(\beta \pi(s)) \tau_s}, i_{(\beta \pi(s)) \tau_s}) \chi(s e_{\beta} s, \hat{\sigma})(e_{(\beta \pi(s)) \tau_s}, i_{(\beta \pi(s)) \tau_s})(e_f, i_f) = \\ &= (e_f, i_f \circ \hat{\sigma} \circ \hat{\sigma} \circ i_f) = \\ &= (e_f, i_f \chi(s e_{\alpha} s, \hat{\sigma}) \chi(s e_{\beta} s, \hat{\sigma})(e_f, i_f) = \\ &= (i_f(u_s, \varrho u_s) \chi(u_s, \sigma u_s) i_f) \phi, \end{aligned}$$

és ezért

$$\varrho h_s \circ \sigma h_s = i_f u_{s'} \varrho u_s u_{s'} \sigma u_s i_f.$$

Mivel u_s és $u_{s'}$ egymás inverzei T -ben, $i_f u_{s'}$ és $u_s i_f$ is egymás inverzei T -ben. Így

$$(11) \quad \varrho h_s \circ \sigma h_s = i_f u_{s'} (u_s i_f u_{s'}) \varrho u_s u_{s'} \sigma (u_s i_f u_{s'}) u_s i_f.$$

Itt $u_s i_f u_{s'} = i_{s e_f s'}^*$, ahol $s e_f s' \in E_{\sigma \tau_s^{-1}} = E_{\alpha \beta \pi(s)}$. Ugyanis $u_s i_f u_{s'} \in \tilde{B}$ és $(u_s i_f u_{s'}) \pi = s e_f s'$. Továbbá, $u_s u_{s'} = i_{s s'}^*$. Mivel ϕ izomorfizmus, felhasználva, hogy $\varrho \circ i_{\pi(s)} = i_{\pi(s)} \circ \varrho$ és $i_{\pi(s)} \circ i_{\alpha \beta \pi(s)} = i_{\alpha \beta \pi(s)}$, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} [(u_s i_f u_{s'}) \varrho u_s u_{s'} \sigma (u_s i_f u_{s'})] \phi &= \\ &= (s e_f s', i_{\alpha \beta \pi(s)})(e_{\alpha}, \varrho \chi e_{\pi(s)}, i_{\pi(s)})(e_{\beta}, \sigma \chi s e_f s', i_{\alpha \beta \pi(s)}) = \\ &= (s e_f s', i_{\alpha \beta \pi(s)} \circ \varrho \circ \sigma \circ i_{\alpha \beta \pi(s)}) = \\ &= (s e_f s', i_{\alpha \beta \pi(s)} \chi e_{\alpha \beta}, \varrho \circ \sigma \chi s e_f s', i_{\alpha \beta \pi(s)}) = \\ &= [(u_s i_f u_{s'}) \chi \varrho \circ \sigma (u_s i_f u_{s'})] \phi. \end{aligned}$$

Φ kölcsönösen egyértelmű, így $(u_\lambda \cdot i_\gamma u_{\lambda'}) \circ u_\lambda u_{\lambda'} \circ (u_\lambda \cdot i_\gamma u_{\lambda'}) =$
 $= (u_\lambda \cdot i_\gamma u_{\lambda'}) (\varrho \circ \sigma) (u_\lambda \cdot i_\gamma u_{\lambda'})$. Ezt felhasználva (11) alapján adó-
 dik, hogy

$$\varrho h_\lambda \circ \sigma h_\lambda = i_\gamma u_{\lambda'} (\varrho \circ \sigma) u_\lambda i_\gamma.$$

A jobboldal pedig (9) alapján nem más, mint $(\varrho \circ \sigma) h_\lambda$, hiszen
 $\varrho \circ \sigma \in \Sigma_{\alpha\beta}$. Ezzel beláttuk, hogy $\varrho h_\lambda \circ \sigma h_\lambda = (\varrho \circ \sigma) h_\lambda$,
 azaz h_λ endomorfizmus Σ -n. (9) alapján közvetlenül lát-
 ható, hogy $i_\alpha h_\lambda = i_{(\alpha \pi(\lambda)) \tau_\lambda}$, hiszen $(u_\lambda \cdot i_\alpha u_\lambda) \pi = s' e_\alpha s$,
 ahol $s' e_\alpha s \in F_{(\alpha \pi(\lambda)) \tau_\lambda}$. Másrészt $u_{\lambda'} i_\alpha u_\lambda \in \bar{B}$. Így $u_{\lambda'} i_\alpha u_\lambda =$
 $= i_{s' e_\alpha s}^*$. Ekkor pedig nyilván $i_{(\alpha \pi(\lambda)) \tau_\lambda} \cdot i_{s' e_\alpha s}^* \cdot i_{(\alpha \pi(\lambda)) \tau_\lambda} = i_{(\alpha \pi(\lambda)) \tau_\lambda}$.

Az (A4) tulajdonság bizonyításához legyen $e \in F_\alpha$ és $\sigma \in \Sigma_\beta$.
 (9) következtében $\sigma h_e = i_{\alpha\beta} i_e^* \sigma i_e^* i_{\alpha\beta}$, hiszen $\pi(e) = \alpha$, τ_e
 pedig az $\alpha\gamma$ félháló identikus automorfizmusa. Mivel $i_\alpha \circ \sigma =$
 $= \sigma \circ i_\alpha \in \Sigma_{\alpha\beta}$, azért

$$\begin{aligned} (i_{\alpha\beta} i_e^* \sigma i_e^* i_{\alpha\beta}) \Phi &= \\ &= (e_{\alpha\beta}, i_{\alpha\beta}) (e, i_\alpha) (e_\beta, \sigma) (e, i_\alpha) (e_{\alpha\beta}, i_{\alpha\beta}) = \\ &= (e_{\alpha\beta}, i_{\alpha\beta} \circ i_\alpha \circ \sigma \circ i_\alpha \circ i_{\alpha\beta}) = \\ &= (e_{\alpha\beta}, \sigma \circ i_\alpha) = \\ &= (\sigma \circ i_\alpha) \Phi. \end{aligned}$$

Így Φ kölcsönös egyértelműsége miatt $\sigma h_e = \sigma \circ i_\alpha$, amit bi-
 bizonyítani akartunk.

Legyen s és $\bar{s}$ az S két tetszőleges eleme. Mivel
 $(u_\lambda u_{\bar{\lambda}}) \pi = s \bar{s}$, azért $u_\lambda u_{\bar{\lambda}}$ egyértelmű módon írható $u_{\lambda \bar{\lambda}} \circ i_e^*$
 alakban, ahol $e \in \Sigma_{\ell(s \bar{s})}$ és $s \bar{s} \mathcal{L} e \mathcal{R} e_{\ell(s \bar{s})}$. Ezt az egyértelműen
 meghatározott σ elemet jelölje $\chi_{s, \bar{s}}$. Tudjuk, hogy

$$(12) \quad \chi_{s, \bar{s}} = i_{\ell(s \bar{s})} u_{(s \bar{s})'} u_\lambda u_{\bar{\lambda}} i_{\ell(s \bar{s})}$$

teljesül $s\bar{s}$ tetszőleges $(s\bar{s})'$ inverzére, mivel $u_{(s\bar{s})'}$ és $u_{s\bar{s}}$ egymás inverzei $S_{\bar{s}}$ -ban, feltéve, hogy $(s\bar{s})'$ és $s\bar{s}$ egymás inverzei S -ben. (12)-ből látható, hogy $\chi_{s\bar{s}} \in S_{\bar{s}}$, következésképpen $\chi_{s\bar{s}} \in U(\Sigma_{\ell(s\bar{s})})$. A duális előállítással ugyanígy igazolható, hogy ha s' ill. $\bar{s}'$ az s ill. $\bar{s}$ tetszőleges inverzei, akkor létezik pontosan egy $\tilde{\chi} \in \Sigma_{\chi(\bar{s}'s')}$ úgy, hogy $u_{\bar{s}'} u_{s'} = i_f^* \tilde{\chi} u_{\bar{s}'s'}$, ahol $\bar{s}'s' \notin \mathcal{L} \in \chi(\bar{s}'s')$. Ezt a $\tilde{\chi}$ -t $\tilde{\chi}_{\bar{s}'s'}$ -vel jelölve az is adódik, hogy

$$(13) \quad \tilde{\chi}_{\bar{s}'s'} = i_{\chi(\bar{s}'s')} u_{\bar{s}'} u_{s'} u_{(\bar{s}'s')'} i_{\chi(\bar{s}'s')}$$

érvényes $\bar{s}'s'$ tetszőleges $(\bar{s}'s')'$ inverzére, és $\tilde{\chi}_{\bar{s}'s'} \in U(\Sigma_{\chi(\bar{s}'s')})$. Nyilván $\ell(s\bar{s}) = \chi(\bar{s}'s')$. (13)-ban $(\bar{s}'s')'$ -t $s\bar{s}$ -nak választva közvetlenül látható (12) és (13)-ból, hogy $\chi_{s\bar{s}}$ és $\tilde{\chi}_{\bar{s}'s'}$ egymás inverzei Γ -ben, és minthogy ugyanannak az $U(\Sigma_{\ell(s\bar{s})})$ csoportnak az elemei, nyilván $\tilde{\chi}_{\bar{s}'s'} = \chi_{s\bar{s}}^{-1}$. Ha $s_1 \sim s_2$ és $\bar{s}_1 \sim \bar{s}_2$, akkor s_1 és s_2 egy közös s' illetve $\bar{s}_1$ és $\bar{s}_2$ egy közös $\bar{s}'$ inverzét választva (12) és (13)-ból kapjuk, hogy $\tilde{\chi}_{\bar{s}'s'} = \chi_{s_1\bar{s}_1}^{-1} = \chi_{s_2\bar{s}_2}^{-1}$. Tehát $\chi_{s_1\bar{s}_1} = \chi_{s_2\bar{s}_2}$, azaz az (A1) tulajdonság teljesül χ -re.

Egyszerűen látható, hogy (A5) és (A6) is érvényes. Ha $s \in S$ és $e, f \in E$ úgy, hogy $e \mathcal{Q} s \mathcal{Q} f$, akkor $es = sf = s$ és $i_e^* u_s = u_s i_f^* = u_s$. Így (12) alapján nyilván $\chi_{e,s} = \chi_{s,f} = i_{\ell(s)}$, hiszen $u_s u_s = i_{s'}^* u_s$, ahol $s's' \in E_{\ell(s)}$. Legyen most e és f két tetszőleges idempotens S -ben. Ekkor (12) szerint $\chi_{e,f} = i_{\ell(ef)} i_{ef}^* i_e^* i_f^* i_{\ell(ef)} = i_{\ell(ef)}$. Ugyanis $i_{ef}^* i_e^* i_f^* = i_{ef}^*$ és $ef \in E_{\ell(ef)}$.

Hátra van még az (A2) és (A3) tulajdonságok igazolása. Legyen $s, \bar{s}$ és $t \in S$. (12) és (13) alapján a Σ -beli $\circ$ művelet definícióját alkalmazva kapjuk, hogy

$$(14) \quad \begin{aligned} \chi_{s\bar{s}t}^{-1} \circ \chi_{s, \bar{s}t} \circ \chi_{\bar{s}t} &= i_{\ell(s\bar{s}t)} u_t u_{(s\bar{s})} u_{s\bar{s}t} i_{\ell(s\bar{s}t)} \cdot \\ &\cdot i_{\ell(s\bar{s}t)} u_{(s\bar{s}t)} u_s u_{\bar{s}t} i_{\ell(s\bar{s}t)} \cdot \\ &\cdot i_{\ell(\bar{s}t)} u_{(\bar{s}t)} u_{\bar{s}} u_t i_{\ell(\bar{s}t)} i_{\ell(s\bar{s}t)} \cdot \end{aligned}$$

Vezessük be a következő jelöléseket: legyen $\sigma_1 = u_{\bar{s}t} i_{\ell(s\bar{s}t)} i_{\ell(\bar{s}t)} u_{(\bar{s}t)}$ és $\sigma_2 = u_{\bar{s}} u_t i_{\ell(\bar{s}t)} i_{\ell(s\bar{s}t)} u_t u_{s\bar{s}}$. Mivel $\ell(s\bar{s}t) \circ \ell(\bar{s}t) = \ell(s) \star (\bar{s}t)$, azért $\sigma_1 \in \tilde{\Sigma}_{e_1}$ és $\sigma_2 \in \tilde{\Sigma}_{e_2}$, ahol $e_1, e_2 \in F_{\ell(s) \star (\bar{s}t)}$. Felhasználva, hogy $\ell(s) \star (\bar{s}t) \leq \ell(s)$, a Φ izomorfizmus alkalmazásával látható, hogy

$$\begin{aligned} (\sigma_1 \sigma_2) \Phi &= \sigma_1 \Phi \cdot \sigma_2 \Phi = (e_1, i_{\ell(s) \star (\bar{s}t)}) (e_2, i_{\ell(s) \star (\bar{s}t)}) = \\ &= (e_1 e_2, i_{\ell(s) \star (\bar{s}t)}) = (e_1 s' s e_2, i_{\ell(s) \star (\bar{s}t)} \circ i_{\ell(s)} \circ i_{\ell(s) \star (\bar{s}t)}) = \\ &= (e_1, i_{\ell(s) \star (\bar{s}t)}) (s' s, i_{\ell(s)}) (e_2, i_{\ell(s) \star (\bar{s}t)}) = \\ &= \sigma_1 \Phi \cdot (u_s u_{\bar{s}}) \Phi \cdot \sigma_2 \Phi = \\ &= (\sigma_1 u_s u_{\bar{s}} \sigma_2) \Phi. \end{aligned}$$

Φ kölcsönösen egyértelmű, ezért $\sigma_1 \sigma_2 = \sigma_1 u_s u_{\bar{s}} \sigma_2$. Ugyancsak Φ definíciója alapján $(u_{s\bar{s}} u_t i_{\ell(s\bar{s}t)} u_t u_{(s\bar{s})}) \Phi =$
 $= (s\bar{s}t e_{\ell(s\bar{s}t)} t' (s\bar{s})', i_{\star(s\bar{s}t)}), \quad (u_{s\bar{s}t} i_{\ell(s\bar{s}t)} u_{(s\bar{s}t)}) \Phi =$
 $= (s\bar{s}t e_{\ell(s\bar{s}t)} (s\bar{s}t)', i_{\star(s\bar{s}t)}), \quad (u_s u_{\bar{s}t} i_{\ell(s\bar{s}t)} i_{\ell(\bar{s}t)} u_{(\bar{s}t)} u_{s'}) \Phi =$
 $= (s\bar{s}t e_{\ell(s\bar{s}t)} e_{\ell(\bar{s}t)} (\bar{s}t)' s', i_{\star(s\bar{s}t)}) \quad \text{és} \quad (u_s u_{\bar{s}} u_t i_{\ell(\bar{s}t)} i_{\ell(s\bar{s}t)} u_t u_{\bar{s}} u_{s'}) \Phi =$
 $= (s\bar{s}t e_{\ell(\bar{s}t)} e_{\ell(s\bar{s}t)} t' \bar{s}' s', i_{\star(s\bar{s}t)})$. Itt az első komponensek mind $F_{\star(s\bar{s}t)}$ -ben vannak. Így

$$\begin{aligned} &[(u_{s\bar{s}} u_t i_{\ell(s\bar{s}t)} u_t u_{(s\bar{s})}) (u_{s\bar{s}t} i_{\ell(s\bar{s}t)} u_{(s\bar{s}t)}) (u_s u_{\bar{s}t} i_{\ell(s\bar{s}t)} i_{\ell(\bar{s}t)} u_{(\bar{s}t)} u_{s'}) \cdot \\ &\cdot (u_s u_{\bar{s}} u_t i_{\ell(\bar{s}t)} i_{\ell(s\bar{s}t)} u_t u_{\bar{s}} u_{s'})] \Phi = \\ &= (s\bar{s}t e_{\ell(s\bar{s}t)} t' (s\bar{s})' s\bar{s}t e_{\ell(\bar{s}t)} e_{\ell(s\bar{s}t)} t' \bar{s}' s', i_{\star(s\bar{s}t)}) = \\ &= [(u_{s\bar{s}} u_t i_{\ell(s\bar{s}t)} u_t u_{(s\bar{s})}) (u_s u_{\bar{s}} u_t i_{\ell(\bar{s}t)} i_{\ell(s\bar{s}t)} u_t u_{\bar{s}} u_{s'})] \Phi. \end{aligned}$$

Ha két elem Φ melletti képe egyenlő, akkor maguk az elemek is egyenlők. Mivel $u_{s\bar{s}} u_t i_{\ell(s\bar{s}t)}$ és $i_{\ell(s\bar{s}t)} u_t u_{(s\bar{s})}$, vala-

mint $u_s u_{\bar{s}} u_t \dot{v}_{\ell(\bar{s}t)} \dot{v}_{\ell(st)}$ és $\dot{v}_{\ell(st)} u_t u_{\bar{s}} u_s$ egymás inverzei, (14)-ből ennek alapján adódik, hogy

$$\chi_{s\bar{s},t}^{-1} \circ \chi_{s,\bar{s}t} \circ \chi_{\bar{s},t} = \dot{v}_{\ell(st)} u_t u_{(\bar{s})} u_s u_{\bar{s}} u_t \dot{v}_{\ell(\bar{s}t)} \dot{v}_{\ell(st)} .$$

Itt $u_t u_{(\bar{s})} u_s u_{\bar{s}} u_t \in \sum_{t'(\bar{s})'s\bar{s}t} \dot{v}_{\ell(st)} \dot{v}_{\ell(\bar{s}t)}$ és $t'(\bar{s})'s\bar{s}t \in F_{\ell(st)}$.

Mivel $\ell(\bar{s}t) \geq \ell(st)$, azért $\dot{v}_{t'(\bar{s})'s\bar{s}t}^* \dot{v}_{\ell(st)} \dot{v}_{\ell(\bar{s}t)} = \dot{v}_{t'(\bar{s})'s\bar{s}t}^* \dot{v}_{\ell(st)}$. Így

$$(15) \quad \chi_{s\bar{s},t}^{-1} \circ \chi_{s,\bar{s}t} \circ \chi_{\bar{s},t} = \dot{v}_{\ell(st)} u_t u_{(\bar{s})} u_s u_{\bar{s}} u_t \dot{v}_{\ell(st)} .$$

Vegyük észre, hogy $(u_t \dot{v}_{\ell(st)} u_t) \Phi = (t e_{\ell(st)} t^1, \dot{v}_{\ell(st)} \kappa(t))$ és $(u_{(\bar{s})} u_s u_{\bar{s}}) \Phi = ((s\bar{s})' s\bar{s}, \vartheta)$, ahol $\vartheta \in \sum_{\ell(s\bar{s})}$. Így

$$\begin{aligned} & [(u_t \dot{v}_{\ell(st)} u_t) (u_{(\bar{s})} u_s u_{\bar{s}}) (u_t \dot{v}_{\ell(st)} u_t)] \Phi = \\ & = ((t e_{\ell(st)} t^1) ((s\bar{s})' s\bar{s}) (t e_{\ell(st)} t^1), \dot{v}_{\ell(st)} \kappa(t) \circ \vartheta \circ \dot{v}_{\ell(st)} \kappa(t)) = \\ & = ((t e_{\ell(st)} t^1) e_{\ell(s\bar{s})} ((s\bar{s})' s\bar{s}) e_{\ell(s\bar{s})} (t e_{\ell(st)} t^1), \dot{v}_{\ell(st)} \kappa(t) \circ \dot{v}_{\ell(s\bar{s})} \circ \vartheta \circ \dot{v}_{\ell(s\bar{s})} \circ \dot{v}_{\ell(st)} \kappa(t)) = \\ & = [(u_t \dot{v}_{\ell(st)} u_t) \dot{v}_{\ell(s\bar{s})} (u_{(\bar{s})} u_s u_{\bar{s}}) \dot{v}_{\ell(s\bar{s})} (u_t \dot{v}_{\ell(st)} u_t)] \Phi . \end{aligned}$$

Ha két elem Φ melletti képe egyenlő, akkor maguk az elemek is egyenlők. Ennek alapján, felhasználva, hogy $\dot{v}_{\ell(st)} u_t$ és $u_t \dot{v}_{\ell(st)}$ egymás inverzei, (15)-ből kapjuk, hogy

$$\chi_{s\bar{s},t}^{-1} \circ \chi_{s,\bar{s}t} \circ \chi_{\bar{s},t} = \dot{v}_{\ell(st)} u_t (\dot{v}_{\ell(s\bar{s})} u_{(\bar{s})} u_s u_{\bar{s}} \dot{v}_{\ell(s\bar{s})}) u_t \dot{v}_{\ell(st)} .$$

A jobboldal (12) és (9) alapján éppen $\chi_{s,\bar{s}} \dot{v}_t$. Ezzel az (A2) tulajdonság teljesülését igazoltuk.

Mielőtt az (A3) tulajdonság teljesülését bizonyítanánk két egyenlőséget igazolunk. Először megmutatjuk, hogy ha $\alpha \in F_\alpha$, $s, \bar{s} \in S$ és $\vartheta \in \sum_\beta$, ahol $\beta = (\alpha \kappa(s\bar{s})) \tau_{s\bar{s}}$, akkor

$$(16) \quad \dot{v}_\alpha^* u_s u_{\bar{s}} \vartheta = \dot{v}_\alpha^* u_{s\bar{s}} (\chi_{s,\bar{s}} \circ \vartheta) .$$



A $\chi_{s, \bar{s}}$ definíciója alapján $u_s u_{\bar{s}} = u_{s\bar{s}} \chi_{s, \bar{s}} i_e^*$, ahol $s\bar{s} \in \mathcal{Q} e_{\ell(s\bar{s})}$. Ezért

$$(17) \quad i_h^* u_s u_{\bar{s}} \sigma = i_h^* u_{s\bar{s}} \chi_{s, \bar{s}} i_e^* \sigma = i_h^* u_{s\bar{s}} (i_\beta u_{(s\bar{s})} i_h^* u_{s\bar{s}}) \chi_{s, \bar{s}} i_e^* \sigma.$$

Az utóbbi egyenlőség azért teljesül, mert $i_\beta u_{(s\bar{s})} i_h^*$ az $i_h^* u_{s\bar{s}}$ inverze. A Φ izomorfizmust alkalmazva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} [(i_\beta u_{(s\bar{s})} i_h^* u_{s\bar{s}}) \chi_{s, \bar{s}} i_e^* \sigma] \Phi &= \\ &= (e_\beta, i_\beta \chi_{(s\bar{s})} i_h s\bar{s}, i_\beta) (e_{\ell(s\bar{s})}, \chi_{s, \bar{s}} \chi_e, i_{\ell(s\bar{s})}) (e_\beta, \sigma) = \\ &= (e_\beta, i_\beta \circ \chi_{s, \bar{s}} \circ \sigma) = (e_\beta, \chi_{s, \bar{s}} \circ \sigma) = \\ &= (\chi_{s, \bar{s}} \circ \sigma) \Phi. \end{aligned}$$

Közben kihasználtuk, hogy $(s\bar{s})' i_h s\bar{s} \in F_\beta$ és $e \in F_{\ell(s\bar{s})} \geq F_\beta$, illetve $\chi_{s, \bar{s}} \circ \sigma \in \Sigma_\beta$. Ebből Φ kölcsönös egyértelmősége miatt (17) alapján éppen a bizonyítandó (16) egyenlőséget kapjuk.

Másodszor belátjuk, hogy ha $g \in \Sigma_\alpha, \sigma \in \Sigma_\beta$, továbbá $e \in \mathcal{Q} e_\alpha, f \in \mathcal{Q} e_\beta$ úgy, hogy $fe = f$, akkor

$$(18) \quad \sigma i_f^* g i_e^* = (\sigma \circ g) i_f^*.$$

Világos, hogy $\beta \leq \alpha$ az $fe = f$ egyenlőség következtében. A Φ izomorfizmust alkalmazva látható, hogy

$$\begin{aligned} (\sigma i_f^* g i_e^*) \Phi &= \\ &= (e_\beta, \sigma) (f, i_\beta \chi_{e_\alpha, g}) (e, i_\alpha) = \\ &= (e_\beta f e_\alpha e, \sigma \circ i_\beta \circ g \circ i_\alpha) = \\ &= (f, \sigma \circ g) = (e_\beta f, \sigma \circ g \circ i_\beta) = \\ &= (e_\beta, \sigma \circ g) (f, i_\beta) = \\ &= ((\sigma \circ g) i_f^*) \Phi. \end{aligned}$$

Ebből pedig következik a (18) egyenlőség, ugyanis Φ kölcsönösen egyértelmű.

Legyen most $s, \bar{s} \in S$ és $\sigma \in \Sigma_\alpha$. (10) alapján

$$(19) \quad \begin{aligned} \sigma u_s u_{\bar{s}} &= (\sigma v_\alpha u_s) u_{\bar{s}} = (v_\alpha u_s (\sigma h_s) v_f^*) u_{\bar{s}} = \\ &= v_\alpha u_s ((\sigma h_s) v_f^*) u_{\bar{s}} = v_\alpha u_s v_f^* u_{\bar{s}} (\sigma h_s h_{\bar{s}}) v_g^* , \end{aligned}$$

ahol $e_\alpha s \mathcal{L} f \mathcal{Q} e_{(\alpha r(s))\tau_s}$ és $f \bar{s} \mathcal{L} g \mathcal{Q} e_{((\alpha r(s))\tau_s + (\bar{s}))\tau_{\bar{s}}}$.

Itt $((\alpha r(s))\tau_s + (\bar{s}))\tau_{\bar{s}} = (\alpha r(s\bar{s}))\tau_{s\bar{s}}$. Nyilván

$\sigma h_s h_{\bar{s}} \in \Sigma_{(\alpha r(s\bar{s}))\tau_{s\bar{s}}}$. Mivel $e_\alpha s f = e_\alpha s$ és $u_s v_\alpha u_s = v_s^* e_\alpha s = v_s^* e_\alpha s v_f^*$, azért $v_\alpha u_s = v_\alpha u_s (u_s v_\alpha u_s) = v_\alpha u_s (u_s v_\alpha u_s) v_f^* = v_\alpha u_s v_f^*$. Továbbá, $e_\alpha s \mathcal{L} f$ miatt $e_\alpha s \bar{s} \mathcal{L} f \bar{s}$. (19) tehát azt jelenti, hogy

$$\sigma u_s u_{\bar{s}} = v_\alpha u_s u_{\bar{s}} (\sigma h_s h_{\bar{s}}) v_g^* ,$$

ahol $e_\alpha s \bar{s} \mathcal{L} g \mathcal{Q} e_{(\alpha r(s\bar{s}))\tau_{s\bar{s}}}$. (16) alapján ebből azt kapjuk, hogy

$$(20) \quad \sigma u_s u_{\bar{s}} = v_\alpha u_{s\bar{s}} (\chi_{s, \bar{s}} \circ \sigma h_s h_{\bar{s}}) v_g^* .$$

Másrészt, mivel $u_s u_{\bar{s}} = u_{s\bar{s}} \chi_{s, \bar{s}} v_e^*$, ahol $s \bar{s} \mathcal{L} e \mathcal{Q} e_{\ell(s\bar{s})}$, (10) alapján

$$\sigma u_s u_{\bar{s}} = \sigma u_{s\bar{s}} \chi_{s, \bar{s}} v_e^* = (\sigma v_\alpha u_{s\bar{s}}) \chi_{s, \bar{s}} v_e^* = v_\alpha u_{s\bar{s}} (\sigma h_{s\bar{s}}) v_g^* \chi_{s, \bar{s}} v_e^* .$$

Mivel $e_\alpha s \bar{s} \mathcal{L} g$ és $s \bar{s} \mathcal{L} e$, azért $g = ge$. Így (18) alapján

$$\sigma u_s u_{\bar{s}} = v_\alpha u_{s\bar{s}} (\sigma h_{s\bar{s}} \circ \chi_{s, \bar{s}}) v_g^* .$$

Mivel $\sigma u_s u_{\bar{s}}$ egyértelműen állítható elő $v_\alpha u_{s\bar{s}} g v_g^*$ alakban, ahol $g \in \Sigma_\beta$, ezért (20) következtében Σ -ban érvényes a

$$\chi_{s_1 \bar{s}} \circ \sigma h_s h_{\bar{s}} = \sigma h_{s \bar{s}} \circ \chi_{s_1 \bar{s}}$$

egyenlőség. Ebből az egyenlőségből $\chi_{s_1 \bar{s}}^{-1}$ -gyel való szorzással adódik az (A3)-ban megkivánt egyenlőség, mert $\chi_{s_1 \bar{s}}^{-1} \circ \chi_{s_1 \bar{s}} = \iota_{\ell(s \bar{s})} \geq \iota_{(\alpha \chi(s \bar{s})) \tau_{s \bar{s}}}$. Ezzel tehát beláttuk, hogy $h_1 \chi$ egy (S, Σ) -pár.

A tétel bizonyításának befejezésekképpen igazoljuk, hogy a bizonyítás elején definiált Ψ kölcsönösen egyértelmű leképezés izomorfizmus $\mathcal{T}$ -ről $\mathcal{S}(S, \Sigma; h_1 \chi)$ -re. Azt kell csak bizonyítanunk, hogy ha $s_1 \bar{s} \in S$, $\sigma \in \Sigma_{\ell(s)}$ és $\bar{\sigma} \in \Sigma_{\ell(\bar{s})}$, akkor

$$(21) \quad (u_s \sigma \iota_e^*) (u_{\bar{s}} \bar{\sigma} \iota_{\bar{e}}^*) = u_{s \bar{s}} (\chi_{s_1 \bar{s}} \circ \sigma h_{\bar{s}} \circ \bar{\sigma}) \iota_f^*,$$

ahol $e, \bar{e}$ és f olyan idempotenseket jelölnek, hogy $s \mathcal{L} e \mathcal{R} e_{\ell(s)}$, $\bar{s} \mathcal{L} \bar{e} \mathcal{R} e_{\ell(\bar{s})}$ és $s \bar{s} \mathcal{L} f \mathcal{R} e_{\ell(s \bar{s})}$. A $h_{\bar{s}}$ definíciója miatt (9) alapján $\sigma \iota_e^* u_{\bar{s}} = \iota_e^* u_{\bar{s}} (\sigma h_{\bar{s}}) \iota_f^*$, ugyanis $e \mathcal{L} s \mathcal{L} s \bar{s} \mathcal{L} f$. Így $u_s \iota_e^* = u_s$, tehát

$$(u_s \sigma \iota_e^*) (u_{\bar{s}} \bar{\sigma} \iota_{\bar{e}}^*) = u_s u_{\bar{s}} \sigma h_{\bar{s}} \iota_f^* \bar{\sigma} \iota_{\bar{e}}^*.$$

A (16) egyenlőséget $h = s s'$ -re alkalmazva kapjuk, hogy $\iota_{s s'}^* u_s u_{\bar{s}} \sigma h_{\bar{s}} = \iota_{s s'}^* u_{s \bar{s}} (\chi_{s_1 \bar{s}} \circ \sigma h_{\bar{s}})$. Itt $\iota_{s s'}^* u_s = u_s$ és $\iota_{s s'}^* u_{s \bar{s}} = u_{s \bar{s}}$, tehát

$$(u_s \sigma \iota_e^*) (u_{\bar{s}} \bar{\sigma} \iota_{\bar{e}}^*) = u_{s \bar{s}} (\chi_{s_1 \bar{s}} \circ \sigma h_{\bar{s}}) \iota_f^* \bar{\sigma} \iota_{\bar{e}}^*.$$

Itt $s \bar{s} \mathcal{L} f$ és $s \mathcal{L} \bar{e}$, így $f \bar{e} = f$. Tehát (18)-ból következik a bizonyítandó (21) egyenlőség. Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

5. Erős részköteg-parcelláló bővitések

Ebben a fejezetben jellemezzük egy ortodox félcsoporth összes részköteg-parcelláló bővitéseit. Az itt használt konstrukció általánosítása azoknak, amelyeket R.J.WARNE [22]-[23]-ban bevezetett.

A fejezet végén tételünket alkalmazzuk a legkisebb inverzkonvergencia szerinti bővítésre. Ezzel jellemezzük az ortodox félcsoportokat legnagyobb inverz homomorf képük és idempotens kötegük segítségével. Az így kapott strukturatétel egyszerűbb a hasonló M.YAMADA [25] eredményénél.

R.J.WARNE [21]-ben jellemezte azokat a félcsoportokat, amelyek csoportok uniói. Itt csak a kötegek strukturájára vonatkozó eredményére lesz szükségünk, ezért csak ezt ismertetjük.

Legyen $\mathcal{Y}$ egy félháló, minden $\alpha (\in \mathcal{Y})$ -ra pedig legyen I_α egy balzéró félcsoporth. Az $I = \bigcup \{I_\alpha : \alpha \in \mathcal{Y}\}$ parciális grupoidot az $I_\alpha (\alpha \in \mathcal{Y})$ balzéró félcsoporthok alsó asszociatív $\mathcal{Y}$ félhálójának nevezzük, ha (i) I -ben az $a \in I_\alpha$ és $b \in I_\beta$ elemek szorzata akkor és csak akkor van definiálva, ha $\alpha \geq \beta$, (ii) ha $\alpha \geq \beta$, akkor $I_\alpha I_\beta \subseteq I_\beta$, és (iii) ha $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ és $a \in I_\alpha$, $b \in I_\beta$, $c \in I_\gamma$, akkor $a(bc) = (a \& b)c$. A jobbzeró félcsoporthok felső asszociatív félhálójának fogalma duálisan definiálható.

Legyen I az $I_\alpha (\alpha \in \mathcal{Y})$ balzéró félcsoporthok alsó asszociatív $\mathcal{Y}$ félhálója, $\mathfrak{J}$ pedig a $\mathfrak{J}_\alpha (\alpha \in \mathcal{Y})$ jobbzeró félcsoporthok felső asszociatív $\mathcal{Y}$ félhálója. Minden $u \in \mathfrak{J}$ -re legyen adott

egy $A_u: I \rightarrow I$ transzformáció, és minden $a \in I$ -re legyen adott egy $B_a: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$ transzformáció úgy, hogy ha $a \in I_\alpha$ és $u \in \mathcal{Y}_\beta$, akkor $a A_u \in I_{\alpha\beta}$ és $u B_a \in \mathcal{Y}_{\alpha\beta}$, továbbá a következő tulajdonságok teljesülnek:

(W1) ha $a \in I_\alpha, b \in I_\beta$ úgy, hogy $\alpha \geq \beta$, valamint $u \in \mathcal{Y}$, akkor

$$(a) \quad u B_{ab} = u B_a B_b,$$

$$(b) \quad (ab) A_u = a A_u \cdot b A_u B_a;$$

(W2) ha $u \in \mathcal{Y}_\alpha, v \in \mathcal{Y}_\beta$ úgy, hogy $\alpha \leq \beta$, valamint $a \in I$, akkor

$$(a) \quad a A_{uv} = a A_v A_u,$$

$$(b) \quad (uv) B_a = u B_{a A_v} \cdot v B_a.$$

Az ezeknek a követelményeknek eleget tevő A, B párt $(I, \mathcal{Y})$ -párnak fogjuk nevezni.

Definiáljunk szorzást az $E = \bigcup \{I_\alpha \times \mathcal{Y}_\alpha : \alpha \in \mathcal{Y}\}$ halmazon úgy, hogy

$$(a, u)(b, v) = (a \cdot b A_u, u B_b \cdot v)$$

Belátható, hogy E ezzel a szorzással köteg. Ezt a köteget az I és $\mathcal{Y}$ általánosított szemidirekt szorzatának nevezzük és $\mathcal{B}(I, \mathcal{Y}; A, B)$ -vel jelöljük.

1. TÉTEL (R.J.WARNE [21]). Tetszőleges köteg izomorf egy I és egy $\mathcal{Y}$ parciális grupoid valamely általánosított szemidirekt szorzatával, ahol I balzéró félcsoporthoz alsó asszociatív $\mathcal{Y}$ félhálójához, $\mathcal{Y}$ pedig jobbzéró félcsoporthoz felső asszociatív $\mathcal{Y}$ félhálójához.

Először a jobbzéró félcsoporthoz felső asszociatív félhálójának fogalmát terjesztjük ki, bevezetve a jobbtodox parciális félcsoporthoz fogalmát. Majd bevezetjük azt a konstrukciót, amely segítségével egy ortodox félcsoporthoz összes erős, részköteg-parcelláló bővítése jellemezhető.

Legyen $\bar{Y}$ egy félháló. Legyen $\bar{\mathfrak{F}}$ a $\bar{\mathfrak{F}}_{\alpha} (\alpha \in \bar{Y})$ jobbzeró félcsoporthok egy felső asszociatív $\bar{Y}$ félhálójára. Minden $\alpha \in \bar{Y}$ -ra jelöljön $Y_{\alpha} (\alpha \in \bar{Y})$ egy olyan félhálót, amelynek α az egységeleme. Tegyük fel, hogy Y az $Y_{\alpha} (\alpha \in \bar{Y})$ félhálók $\bar{Y}$ félhálójára, amelyben $\bar{Y}$ részfélháló. Legyen $\mathfrak{F}$ egy parciális grupoid a „ $\cdot$ ” műveletre. Azt mondjuk, hogy $\mathfrak{F}$ egy σ eleme idempotens, ha $\sigma \cdot \sigma$ értelmezett és $\sigma \cdot \sigma = \sigma$. Tegyük fel, hogy $\mathfrak{F} = \bigcup \{ \mathfrak{F}_{\alpha}^{\bar{j}} : (\bar{j}, \alpha) \in \bar{\mathfrak{F}} \times_{\bar{Y}} Y \}$, ahol $\mathfrak{F}_{\alpha}^{\bar{j}} \cap \mathfrak{F}_{\beta}^{\bar{k}} = \emptyset$ ha csak $(\bar{j}, \alpha) \neq (\bar{k}, \beta)$. Vezessük be a következő jelöléseket: minden $\alpha \in Y_{\alpha}$ -ra legyen $\mathfrak{F}_{\alpha} = \bigcup \{ \mathfrak{F}_{\alpha}^{\bar{j}} : \bar{j} \in \bar{\mathfrak{F}}_{\alpha} \}$ és minden $\bar{j} \in \bar{\mathfrak{F}}_{\alpha}$ -ra legyen $\mathfrak{F}^{\bar{j}} = \bigcup \{ \mathfrak{F}_{\alpha}^{\bar{j}} : \alpha \in Y_{\alpha} \}$. Tegyük fel, hogy $\mathfrak{F}$ -n létezik egy „ $'$ ” egyváltozós művelet úgy, hogy a következő tulajdonságok teljesülnek:

- Tetszőleges $\varrho \in \mathfrak{F}_{\alpha}^{\bar{j}}, \sigma \in \mathfrak{F}_{\beta}^{\bar{k}}$ és $\tau \in \mathfrak{F}_{\gamma}^{\bar{l}}$ elemekre, ahol $\varrho \in \mathfrak{F}_{\alpha'}$, $\sigma \in \mathfrak{F}_{\beta'}$ és $\tau \in \mathfrak{F}_{\gamma'}$,
- (B1) α és α' ugyanabban az Y_{α} -ban van, valamint $\varrho' \in \mathfrak{F}_{\alpha}$;
 - (B2) $\varrho \cdot \sigma$ akkor és csak akkor van értelmezve $\mathfrak{F}$ -ben, ha $\alpha' \leq \beta$; és ekkor $\varrho \cdot \sigma \in \mathfrak{F}_{\alpha}^{\bar{j} \cdot \bar{k}}$ és $(\varrho \cdot \sigma)' \in \mathfrak{F}_{\xi}^{\bar{l}}$, ahol $\xi \leq \beta'$;
 - (B3) ha $\alpha' \leq \beta$ és $\beta' \leq \gamma$, akkor $(\varrho \cdot \sigma) \cdot \tau = \varrho \cdot (\sigma \cdot \tau)$;
 - (B4) $\varrho \cdot \varrho' \cdot \varrho = \varrho$ és $\varrho' \cdot \varrho \cdot \varrho' = \varrho'$;
 - (B5) $\mathfrak{F}_{\alpha} (\alpha \in Y)$ idempotensei jobbzeró félcsoporthot alkotnak;
 - (B6) ha ϱ és σ idempotens és $\alpha \leq \beta, \beta \leq \gamma'$ akkor $(\varrho \cdot \tau)' \in \mathfrak{F}_{\beta}$ akkor és csak akkor, ha $(\sigma \cdot \tau')' \in \mathfrak{F}_{\alpha}$.

Megjegyezzük, hogy a (B3)-beli egyenlőség mindkét oldalának van értelme (B2) szerint. (B4)-ben a zárójeljelezés nem szükséges (B3) miatt. Továbbá, minden $\alpha \in Y$ -ra $\mathfrak{F}_{\alpha}$ -ban van idempotens, hiszen ha $\varrho \in \mathfrak{F}_{\alpha}$, akkor (B4) alapján $\varrho \cdot \varrho'$ idempotens, (B2) alapján pedig $\varrho \cdot \varrho' \in \mathfrak{F}_{\alpha}$. A (B2) tulajdonság-

ban $\bar{j} \cdot \bar{k}$ -nak van értelme $\bar{\mathfrak{A}}$ -ban, ugyanis ha $\alpha \in Y_{\bar{\alpha}}$ és $\beta \in Y_{\bar{\beta}}$, akkor $\alpha' \in Y_{\bar{\alpha}}$. Így $\alpha' \leq \beta$ -ból következik $\bar{\alpha} \leq \bar{\beta}$.

Ha a $\mathfrak{A}$ parciális grupoid a fenti követelményeket kielégíti, akkor azt mondjuk, hogy $\mathfrak{A}$ egy jobbortodox parciális félcsoporth $\bar{\mathfrak{A}} \times_{\bar{Y}} Y$ felett. Duálisan definiálhatók a balortodox parciális félcsoporthok valamely $\bar{I} \times_{\bar{Y}} Y$ felett, ahol $\bar{I}$ balzéró félcsoporthok egy alsó asszociatív $\bar{Y}$ félhálójá. A (B1)-(B6) tulajdonságok duálisára a (B1)*-(B6)* jelekkel fogunk hivatkozni. Ha $\mathfrak{A}$ illetve $\bar{I}$ minden eleme idempotens, parciális jobbkötegről illetve parciális balkötegről beszélünk.

Ha $q \in \mathfrak{A}_{\alpha}, q' \in \mathfrak{A}_{\alpha'}, \sigma \in \mathfrak{A}_{\beta}$ és $\sigma' \in \mathfrak{A}_{\beta'}$ úgy, hogy $\alpha' \leq \beta$ és $\beta' \leq \alpha$, valamint $q \cdot \sigma = q$ és $\sigma \cdot q = \sigma$, akkor azt mondjuk, hogy q és σ egymás inverzei $\mathfrak{A}$ -ben. A (B4) tulajdonság éppen azt fejezi ki, hogy a „'” művelet minden elemnek kijelöli egy inverzét. Vegyük észre, hogy ha q és σ egymás inverzei $\mathfrak{A}$ -ben, akkor $q \cdot \sigma$ és $\sigma \cdot q$ idempotens elemek.

A következőkben a $\mathfrak{A}$ jobbortodox parciális félcsoporth alapvető tulajdonságait állapítjuk meg 11 lemmában.

Vezessük be a következő jelöléseket. Ha $\alpha \leq \beta$ teljesül Y -ban, akkor ezt úgy is írjuk, hogy $\mathfrak{A}_{\alpha} \leq \mathfrak{A}_{\beta}$. Ha $\sigma \in \mathfrak{A}_{\alpha}$, akkor $\mathfrak{A}_{\alpha}$ -t $\mathfrak{A}(\sigma)$ -val is jelöljük.

2. LEMMA. Ha $q \in \mathfrak{A}_{\alpha}, q' \in \mathfrak{A}_{\alpha'}$, és $\sigma' \in \mathfrak{A}_{\alpha'}$, akkor $(q \cdot \sigma)' \in \mathfrak{A}_{\alpha'}$.

Bizonyítás. A (B1) és (B2) tulajdonság alapján $q' \cdot (q \cdot \sigma)$ értelmezve van és $\mathfrak{A}((q' \cdot (q \cdot \sigma))') \leq \mathfrak{A}((q \cdot \sigma)')$. Másrészt (B3) alapján $(q' \cdot q) \cdot \sigma = q' \cdot (q \cdot \sigma)$. Továbbá értelmezve van $\mathfrak{A}$ -ben a $q \cdot ((q' \cdot q) \cdot \sigma)$ szorzat is és (B3)-(B4) következtében egyenlő $q \cdot \sigma$ -val. Így újra a (B2) alkalmazásával adódik, hogy $\mathfrak{A}((q \cdot \sigma)') \leq \mathfrak{A}((q' \cdot (q \cdot \sigma))')$. Tehát kaptuk, hogy $\mathfrak{A}((q \cdot \sigma)') =$

$= \mathfrak{I}(((q' \cdot q) \cdot \sigma)')$. (B2)-(B3)-ból következik, hogy $q' \cdot q \in \mathfrak{I}_{\alpha'}$ és $\sigma' \cdot \sigma \in \mathfrak{I}_{\alpha''}$ idempotensek. A (B6) tulajdonság alapján így $\mathfrak{I}(((q' \cdot q) \cdot \sigma)') = \mathfrak{I}_{\alpha''}$ teljesül, hiszen $((\sigma' \cdot \sigma) \cdot \sigma')' = \sigma'' \in \mathfrak{I}_{\alpha'}$ a (B1) és (B4) tulajdonságok miatt. Így $\mathfrak{I}((q \cdot \sigma)') = \mathfrak{I}_{\alpha''}$, és éppen ezt akartuk bizonyítani.

3. LEMMA. Ha $q \in \mathfrak{I}_{\alpha}$, $q' \in \mathfrak{I}_{\alpha'}$, $\sigma \in \mathfrak{I}_{\beta}$, $\sigma' \in \mathfrak{I}_{\beta'}$ és $\alpha' \leq \beta$, akkor $(q \cdot \sigma)' \in \mathfrak{I}_{\beta'}$ -ből következik, hogy $\alpha' = \beta$.

Bizonyítás. A (B2) tulajdonság alapján $q \cdot \sigma \in \mathfrak{I}_{\alpha}$. Így a 2.Lemma szerint $(q' \cdot (q \cdot \sigma))' = ((q' \cdot q) \cdot \sigma)' \in \mathfrak{I}_{\beta'}$. Mivel (B4) következtében $q' \cdot q \in \mathfrak{I}_{\alpha'}$ és $\sigma' \cdot \sigma \in \mathfrak{I}_{\beta}$ idempotensek, a (B6) tulajdonság biztosítja, hogy $((\sigma' \cdot \sigma) \cdot \sigma')' \in \mathfrak{I}_{\alpha'}$. Viszont (B1) és (B4) szerint $((\sigma' \cdot \sigma) \cdot \sigma')' = \sigma'' \in \mathfrak{I}_{\beta}$. Tehát $\alpha' = \beta$.

4. LEMMA. Ha q és q^* egymás inverzei $\mathfrak{I}$ -ben, akkor $\mathfrak{I}(q) = \mathfrak{I}(q^{*'})$ és $\mathfrak{I}(q^*) = \mathfrak{I}(q')$. Speciálisan, ha ε idempotens $\mathfrak{I}$ -ben, akkor $\mathfrak{I}(\varepsilon) = \mathfrak{I}(\varepsilon')$.

Bizonyítás. Ha q és q^* egymás inverzei $\mathfrak{I}$ -ben, akkor definíció szerint $\mathfrak{I}(q') \leq \mathfrak{I}(q^*)$ és $\mathfrak{I}(q^{*'}) \leq \mathfrak{I}(q)$. Továbbá, $q \cdot q^* \cdot q = q$ és $q^* \cdot q \cdot q^* = q^*$. A 3. Lemma értelmében $q \cdot q^* \cdot q = q$ -ből következik, hogy $\mathfrak{I}((q \cdot q^*)') = \mathfrak{I}(q)$. Viszont (B2) alapján $\mathfrak{I}((q \cdot q^*)') \leq \mathfrak{I}(q^{*'})$. Így $\mathfrak{I}(q) \leq \mathfrak{I}(q^{*'})$ is fennáll, tehát valóban $\mathfrak{I}(q) = \mathfrak{I}(q^{*'})$. A $q^* \cdot q \cdot q^* = q^*$ egyenlőségből kiindulva ugyanígy adódik, hogy $\mathfrak{I}(q^*) = \mathfrak{I}(q')$. Ha ε idempotens, akkor önmagának inverze, tehát $\mathfrak{I}(\varepsilon) = \mathfrak{I}(\varepsilon')$ nyilvánvaló az előzőekből.

Ez a lemma biztosítja, hogy a parciális jobbkötegek (és duálisan a parciális balkötegek) esetében a „ $'$ ” művelet választható az identikus leképezésnek. A későbbiekben parciális jobbkötegekben ill. balkötegekben mindig feltesszük, hogy „ $'$ ” az identikus leképezés.

5. LEMMA. Ha ε idempotens elem $\mathfrak{Y}$ -ben és ξ az ε egy inverze, akkor ξ is idempotens.

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon \in \mathfrak{Y}_\alpha$. A 4. Lemma következtében $\varepsilon' \in \mathfrak{Y}_\alpha$. Így az inverz definíciója alapján ξ és $\xi' \in \mathfrak{Y}_\alpha$, valamint $\varepsilon^2 = \varepsilon$ miatt $\xi = \xi \cdot \varepsilon \cdot \xi = (\xi \cdot \varepsilon) \cdot (\varepsilon \cdot \xi)$. Itt $\xi \cdot \varepsilon, \varepsilon \cdot \xi \in \mathfrak{Y}_\alpha$ és mindkettő idempotens. Ezért (B5) biztosítja, hogy szorzatuk, ξ is idempotens.

6. LEMMA. Tegyük fel, hogy $q \in \mathfrak{Y}_\alpha, q' \in \mathfrak{Y}_{\alpha'}, r \in \mathfrak{Y}_{\alpha'}$ és $r' \in \mathfrak{Y}_\alpha$. Legyen q^* a q , r^* pedig a r egy-egy inverze. Ekkor $q \cdot r$ és $r^* \cdot q^*$ értelmezve van $\mathfrak{Y}$ -ben, mindkettő eleme $\mathfrak{Y}_\alpha$ -nak és egymás inverzei.

Bizonyítás. A 4. Lemma miatt $q^* \in \mathfrak{Y}_{\alpha'}, q' \in \mathfrak{Y}_\alpha, r^* \in \mathfrak{Y}_\alpha$ és $r' \in \mathfrak{Y}_{\alpha'}$. A (B2) tulajdonság alapján $q \cdot r$ és $r^* \cdot q^*$ valóban értelmezve van $\mathfrak{Y}$ -ben, továbbá $q \cdot r$ és $r^* \cdot q^* \in \mathfrak{Y}_\alpha$. A 2. Lemma biztosítja, hogy $(q \cdot r)'$ és $(r^* \cdot q^*)' \in \mathfrak{Y}_\alpha$. Így értelmezve van a $(q \cdot r) \cdot (r^* \cdot q^*) \cdot (q \cdot r)$ szorzat. A (B3) tulajdonság mellett felhasználva még, hogy $q^* \cdot q, r \cdot r^* \in \mathfrak{Y}_{\alpha'}$ idempotensek, és így (B5) következtében $(r \cdot r^*) \cdot (q^* \cdot q) = (q^* \cdot q)$, kapjuk, hogy

$$(q \cdot r) \cdot (r^* \cdot q^*) \cdot (q \cdot r) = q \cdot (r \cdot r^*) \cdot (q^* \cdot q) \cdot r = q \cdot (q^* \cdot q) \cdot r = q \cdot r.$$

Duálisan látható, hogy $(r^* \cdot q^*) \cdot (q \cdot r) \cdot (r^* \cdot q^*) = (r^* \cdot q^*)$. Ezzel az állítást bizonyítottuk.

7. LEMMA. Ha $q \in \mathfrak{Y}_\alpha$ és q^*, q^{**} a q két tetszőleges inverze, akkor $q^* = q^{**} \cdot \varepsilon$, ahol $\varepsilon \in \mathfrak{Y}_\alpha$ idempotens elem.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $q' \in \mathfrak{Y}_{\alpha'}$. A 4. Lemma miatt $q^*, q^{**} \in \mathfrak{Y}_{\alpha'}$ és $q'^*, q^{**'} \in \mathfrak{Y}_\alpha$. Az inverz definíciójából közvetlenül látható, hogy $q^* \cdot q$ és $q^{**} \cdot q$ idempotens elem $\mathfrak{Y}_{\alpha'}$ -ben. (B5) miatt akkor $(q^* \cdot q) \cdot (q^{**} \cdot q) = (q^{**} \cdot q)$. Másrészt (B3) felhasználva

nálásával kapjuk, hogy $(\varrho^* \cdot \varrho) \cdot (\varrho^{**} \cdot \varrho) = \varrho^* \cdot (\varrho \cdot \varrho^{**} \cdot \varrho) = \varrho^* \cdot \varrho$. Tehát $\varrho^* \cdot \varrho = \varrho^{**} \cdot \varrho$. Így $\varrho^* = \varrho^* \cdot \varrho \cdot \varrho^* = \varrho^{**} \cdot (\varrho \cdot \varrho^*)$. Itt $\varrho \cdot \varrho^* \in \mathfrak{I}_\alpha$ idempotens, s ezzel a lemmát igazoltuk.

8. LEMMA. Ha $\varrho, \varrho' \in \mathfrak{I}_\alpha$, $\varrho', \varrho'^1 \in \mathfrak{I}_{\alpha'}$ és $\varrho = \varrho \cdot \varepsilon$ teljesül valamely $\mathfrak{I}_{\alpha'}$ -beli ε idempotensre, akkor ϱ tetszőleges ϱ^* inverze inverze ϱ -nak.

Bizonyítás. (B2) alapján $\varrho \cdot \varepsilon \in \mathfrak{I}_\alpha$, a 2. és 4. Lemma szerint pedig $(\varrho \cdot \varepsilon)^1 \in \mathfrak{I}_{\alpha'}$. Továbbá $\varrho^* \cdot \varrho$ idempotens elem $\mathfrak{I}_{\alpha'}$ -ben, hiszen a 4. Lemma alapján $\varrho^* \in \mathfrak{I}_{\alpha'}$, $\varrho^{*1} \in \mathfrak{I}_\alpha$. Így (B5) miatt $\varepsilon \cdot (\varrho^* \cdot \varrho) = (\varrho^* \cdot \varrho)$. Ezért (B3) alkalmazásával adódik, hogy

$$\varrho \cdot \varrho^* \cdot \varrho = (\varrho \cdot \varepsilon) \cdot \varrho^* \cdot (\varrho \cdot \varepsilon) = \varrho \cdot (\varepsilon \cdot (\varrho^* \cdot \varrho)) \cdot \varepsilon = \varrho \cdot (\varrho^* \cdot \varrho) \cdot \varepsilon = \varrho \cdot \varepsilon = \varrho$$

illetve

$$\varrho^* \cdot \varrho \cdot \varrho^* = \varrho^* \cdot (\varrho \cdot \varepsilon) \cdot \varrho^* = (\varrho^* \cdot \varrho) \cdot \varepsilon \cdot (\varrho^* \cdot \varrho) \cdot \varrho^* = (\varrho^* \cdot \varrho) \cdot (\varrho^* \cdot \varrho) \cdot \varrho^* = \varrho^* \cdot \varrho \cdot \varrho^* = \varrho^*.$$

Ezt akartuk bizonyítani.

Definiáljuk a $\sim$ relációt $\mathfrak{I}$ -n úgy, hogy $\varrho \sim \tau$ akkor és csak akkor, ha ϱ -nak és τ -nak van közös inverze $\mathfrak{I}$ -ben.

9. LEMMA. (i) A $\sim$ reláció ekvivalencia.

(ii) Ha $\varrho, \tau \in \mathfrak{I}$, akkor $\varrho \sim \tau$ akkor és csak akkor, ha $\mathfrak{I}(\varrho) = \mathfrak{I}(\tau)$, $\mathfrak{I}(\varrho^1) = \mathfrak{I}(\tau^1)$ és létezik olyan $\varepsilon \in \mathfrak{I}(\varrho^1)$ idempotens, hogy $\varrho = \tau \cdot \varepsilon$.

(iii) Ha $\varrho, \tau \in \mathfrak{I}$, akkor $\varrho \sim \tau$ akkor és csak akkor, ha ϱ inverzeinek halmaza egyenlő τ inverzeinek a halmazával.

Bizonyítás. (ii) és (iii) közvetlenül következik a 7. és 8. Lemmából. Az (iii) állítás alapján pedig (i) triviális.

10. LEMMA. Tegyük fel, hogy $\varrho \in \mathfrak{I}_\alpha$, $\varrho' \in \mathfrak{I}_{\alpha'}$, ahol $\alpha' \leq \alpha$, valamint $\varrho \in \mathfrak{I}_\alpha$. Ekkor $\varrho \cdot \varrho = \varrho$ akkor és csak akkor teljesül, ha ϱ idempotens.

Bizonyítás. Ha $\varrho \in \mathfrak{I}_\alpha$ idempotens, akkor a 4. Lemma alapján



$\alpha' = \alpha$. És mivel $\sigma \cdot \sigma' \in \mathfrak{F}_\alpha$ szintén idempotens, a (B5) tulajdonság alapján $\varrho \cdot (\sigma \cdot \sigma') = (\sigma \cdot \sigma')$. Ennek következtében (B3) és (B4) alapján

$$\varrho \cdot \sigma = (\varrho \cdot (\sigma \cdot \sigma')) \sigma = (\sigma \cdot \sigma') \cdot \sigma = \sigma.$$

Fordítva, most tegyük fel, hogy $\varrho, \sigma \in \mathfrak{F}_\alpha$, $\sigma' \in \mathfrak{F}_{\alpha'}$, $\sigma' \in \mathfrak{F}_\beta$ és $\alpha' \leq \alpha$. Legyen

$$(1) \quad \varrho \cdot \sigma = \sigma.$$

Ekkor $(\varrho \cdot \sigma)' = \sigma' \in \mathfrak{F}_\beta$. Így a 3. Lemma szerint $\alpha' = \alpha$. Mivel $\varrho' \cdot \varrho$ és $\sigma \cdot \sigma'$ idempotens elemek $\mathfrak{F}_\alpha$ -ban, (B5)-ből következik, hogy $(\sigma \cdot \sigma')(\varrho' \cdot \varrho) = \varrho' \cdot \varrho$. (1) és (B3) alkalmazásával ennek alapján adódik, hogy

$$\begin{aligned} \varrho &= \varrho \cdot \varrho' \cdot \varrho = \varrho \cdot ((\sigma \cdot \sigma')(\varrho' \cdot \varrho)) = \varrho \cdot \sigma \cdot (\sigma' \cdot (\varrho' \cdot \varrho)) = \\ &= \sigma \cdot (\sigma' \cdot (\varrho' \cdot \varrho)) = (\sigma \cdot \sigma') \cdot (\varrho' \cdot \varrho) = \varrho' \cdot \varrho. \end{aligned}$$

Így ϱ valóban idempotens.

11. LEMMA. Ha $\varrho, \sigma \in \mathfrak{F}$ úgy, hogy $\mathfrak{F}(\varrho) = \mathfrak{F}(\sigma')$, akkor σ tetszőleges σ^*, σ^{**} inverzeire $\sigma^* \cdot \varrho = \sigma^{**} \cdot \varrho$.

Bizonyítás. A 7. Lemma alapján $\sigma^* = \sigma^{**} \cdot \varepsilon$ érvényes valamely $\mathfrak{F}(\sigma')$ -beli idempotens elemre. Így $\sigma^* \cdot \varrho = \sigma^{**} \cdot \varepsilon \cdot \varrho$. De a 10. Lemma biztosítja, hogy $\varepsilon \cdot \varrho = \varrho$. Tehát $\sigma^* \cdot \varrho = \sigma^{**} \cdot \varrho$.

12. LEMMA. Ha $\varrho \sim \sigma$ és τ egy közös inverzük, akkor $\varrho \cdot \tau \cdot \sigma = \sigma$.

Bizonyítás. Nyilván $\varrho \cdot \tau \in \mathfrak{F}(\sigma)$ idempotens a 9. Lemma (ii) állítása következtében. Így a 10. Lemma alapján a kívánt egyenlőség valóban teljesül.

R.J.WARNE [21]-ben bevezette balzéró félcsoporthok egy alsó asszociatív $\mathcal{Y}$ félhálójának és jobbsoporthok egy felső

asszociativ $\bar{Y}$ félhálójának általánosított szemidirekt szorzatát. Ezt a fogalmat jobbcsoportok helyett jobbzeró félcsoporthokra ismertettük a fejezet elején. Ennek általánosításaképpen most bevezetjük egy $\bar{I} \times_{\bar{Y}} Y$ feletti parciális balköteg és egy $\bar{\mathfrak{Y}} \times_{\bar{Y}} Y$ feletti jobbtodox parciális félcsoporth általánosított szemidirekt szorzatát.

Legyen adott egy $\bar{Y}$ félháló. Tegyük fel, hogy $\bar{I}$ az $\bar{I}_{\alpha} (\alpha \in \bar{Y})$ balzeró félcsoporthok alsó asszociativ $\bar{Y}$ félhálója, $\bar{\mathfrak{Y}}$ pedig a $\bar{\mathfrak{Y}}_{\alpha} (\alpha \in \bar{Y})$ jobbcsoportok felső asszociativ $\bar{Y}$ félhálója. Továbbá, minden $\alpha \in \bar{Y}$ -ra Y_{α} legyen egy egységelemes félháló az α egységelemmel. Jelölje Y az $Y_{\alpha} (\alpha \in \bar{Y})$ félhálóknak egy $\bar{Y}$ félhálóját, amelyben $\bar{Y}$ részfélháló. Legyen I egy parciális balköteg $\bar{I} \times_{\bar{Y}} Y$ felett, $\mathfrak{Y}$ pedig egy jobbtodox parciális félcsoporth $\bar{\mathfrak{Y}} \times_{\bar{Y}} Y$ felett. Tegyük fel, hogy $\bar{A}, \bar{B}$ egy $(\bar{I}, \bar{\mathfrak{Y}})$ -pár.

Legyen adva I transzformációinak egy $A_{\alpha} (\alpha \in \mathfrak{Y})$ serege illetve $\mathfrak{Y}$ transzformációinak egy $B_{\alpha} (\alpha \in I)$ serege úgy, hogy az alábbi követelményeknek eleget tesznek:

- (C1) ha $\alpha \in \bar{I}_{\alpha}^{\bar{I}}, \varphi \in \bar{\mathfrak{Y}}_{\beta}^{\bar{\mathfrak{Y}}}$ és $\varphi' \in \bar{\mathfrak{Y}}_{\beta'}$, akkor
- (a) $\alpha A_{\varphi} \in \bar{I}_{\alpha_1}^{\bar{I}}, \varphi B_{\alpha} \in \bar{\mathfrak{Y}}_{\alpha_1}^{\bar{\mathfrak{Y}}}$ és $(\varphi B_{\alpha})' \in \bar{\mathfrak{Y}}_{\alpha_1'}$, ahol $\alpha_1 \leq \beta$ és $\alpha_1' \leq \alpha$,
 - (b) ha φ idempotens, akkor $\alpha_1 = \alpha_1' = \alpha \beta$,
 - (c) ha $\alpha = \beta'$, akkor $\varphi B_{\alpha} \sim \varphi$,
 - (d) ha $\alpha < \beta'$, akkor α_1 az az Y -beli elem, amelyre teljesül, hogy $(\varepsilon \cdot \varphi')' \in \bar{\mathfrak{Y}}_{\alpha_1'}$, feltéve, hogy $\varepsilon \in \bar{\mathfrak{Y}}_{\alpha}$ idempotens;
- (C2) ha $\alpha \in \bar{I}_{\alpha}, \beta \in \bar{I}_{\beta}$ úgy, hogy $\alpha \geq \beta$, valamint $\varphi \in \bar{\mathfrak{Y}}$, akkor
- (a) $\varphi B_{\alpha \cdot \beta} = \varphi B_{\alpha} B_{\beta}$,
 - (b) $(\alpha \cdot \beta) A_{\varphi} = \alpha A_{\varphi} \cdot \beta A_{\varphi B_{\alpha}}$;

(C3) ha $\varrho \in \mathfrak{Y}_\alpha, \sigma \in \mathfrak{Y}_\beta$ úgy, hogy $\alpha \leq \beta$, valamint $a \in I$, akkor

$$(a) \quad a \cdot A_{\varrho \cdot \sigma} = a \cdot A_\sigma \cdot A_\varrho,$$

$$(b) \quad (\varrho \cdot \sigma) \cdot \mathfrak{B}_\alpha = \varrho \cdot \mathfrak{B}_\alpha \cdot A_\sigma \cdot \sigma \cdot \mathfrak{B}_\alpha.$$

Nevezzük az ilyen tulajdonságu $A, \mathfrak{B}$ párt általánosított $(I, \mathfrak{Y})$ -párnak $\bar{A}, \bar{\mathfrak{B}}$ felett.

Megjegyezzük, hogy ha $\alpha \in Y_{\bar{\alpha}}$ és $\beta \in Y_{\bar{\beta}}$, akkor (C1) (a)-ban $\alpha_1 \in Y_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$, hiszen $\bar{i}\bar{A}_j \in \bar{I}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$ és $\bar{j}\bar{\mathfrak{B}}_i \in \bar{\mathfrak{Y}}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$. A (C1) (d) tulajdonságban az ε idempotens tetszőlegesen választható $\mathfrak{Y}_\alpha$ -ban, ugyanis (B6) szerint $\mathfrak{Y}((\varepsilon_1 \cdot \varrho')') = \mathfrak{Y}((\varepsilon_2 \cdot \varrho')')$, hacsak $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathfrak{Y}_\alpha$ idempotensek. Továbbá, a (C1) (a) tulajdonság alapján közvetlenül ellenőrizhető, hogy a (C2) (b) és (C3) (b) egyenlőségek jobboldala értelmezve van I -ben ill. $\mathfrak{Y}$ -ben.

Definiáljunk szorzást az $\cup\{I_\alpha \times \mathfrak{Y}_\alpha : \alpha \in Y\}$ halmazon úgy, hogy ha $a \in I_\alpha, \varrho \in \mathfrak{Y}_\alpha$ illetve $b \in I_\beta, \sigma \in \mathfrak{Y}_\beta$, akkor

$$(2) \quad (a, \varrho)(b, \sigma) = (a \cdot b \cdot A_\varrho, \varrho \cdot \mathfrak{B}_\sigma \cdot \sigma).$$

A (C1) (a) tulajdonság alapján $b \cdot A_\varrho \in I_{\alpha_1}, \varrho \cdot \mathfrak{B}_\sigma \in \mathfrak{Y}_{\alpha_1}$ és $(\varrho \cdot \mathfrak{B}_\sigma)' \in \mathfrak{Y}_{\beta_1}$, ahol $\alpha_1 \leq \alpha$ és $\beta_1 \leq \beta$. Tehát $a \cdot b \cdot A_\varrho$ értelmezett szorzat I -ben és $\varrho \cdot \mathfrak{B}_\sigma \cdot \sigma$ értelmezett szorzat $\mathfrak{Y}$ -ben. Továbbá $a \cdot b \cdot A_\varrho \in I_{\alpha_1}$ és $\varrho \cdot \mathfrak{B}_\sigma \cdot \sigma \in \mathfrak{Y}_{\alpha_1}$ a (B2) tulajdonság alapján. Tehát (2) valóban művelet az $\cup\{I_\alpha \times \mathfrak{Y}_\alpha : \alpha \in Y\}$ halmazon. Az így definiált grupoidot az I és $\mathfrak{Y}$ általánosított szemidirekt szorzatának fogjuk nevezni, és $\mathfrak{L}(I, \mathfrak{Y}; A, \mathfrak{B})$ -vel fogjuk jelölni.

Mielőtt bebizonyítjuk, hogy $\mathfrak{L}(I, \mathfrak{Y}; A, \mathfrak{B})$ ortodox fél-csoport, négy lemmát igazolunk az $A, \mathfrak{B}$ általánosított $(I, \mathfrak{Y})$ -párra.

13. LEMMA. Ha $a \in I_\alpha$ és $\varrho \in \mathfrak{Y}_\beta, \varrho' \in \mathfrak{Y}_{\beta'}$ úgy, hogy $\beta' \leq \alpha$,

akkor $\mathfrak{B}_\alpha \sim \mathfrak{C}$.

Bizonyítás. A (C3) (b) tulajdonság alapján

$$(3) \quad \mathfrak{B}_\alpha = (\mathfrak{C} \cdot (\mathfrak{C}' \cdot \mathfrak{C})) \mathfrak{B}_\alpha = \mathfrak{B}_{\alpha \wedge \mathfrak{C}' \cdot \mathfrak{C}} \cdot (\mathfrak{C}' \cdot \mathfrak{C}) \mathfrak{B}_\alpha .$$

Mivel $\mathfrak{C}' \cdot \mathfrak{C} \in \mathfrak{F}_{\beta'}$ idempotens, (C1) (b) következtében $\alpha \wedge \mathfrak{C}' \cdot \mathfrak{C} \in I_{\alpha\beta'} = I_{\beta'}$, $(\mathfrak{C}' \cdot \mathfrak{C}) \mathfrak{B}_\alpha \in \mathfrak{F}_{\beta'}$ és $((\mathfrak{C}' \cdot \mathfrak{C}) \mathfrak{B}_\alpha)' \in \mathfrak{F}_{\beta'}$. Így (C1) (c) szerint $\mathfrak{B}_{\alpha \wedge \mathfrak{C}' \cdot \mathfrak{C}} \sim \mathfrak{C}$. Továbbá, $\alpha \cdot \alpha \wedge \mathfrak{C}' \cdot \mathfrak{C} \in I_{\beta'}$ a (B2) tulajdonság szerint. Így (C1) (c) biztosítja, hogy egyrészt

$$(\mathfrak{C}' \cdot \mathfrak{C}) \mathfrak{B}_\alpha \cdot \alpha \wedge \mathfrak{C}' \cdot \mathfrak{C} \sim \mathfrak{C}' \cdot \mathfrak{C} ,$$

másrészt

$$((\mathfrak{C}' \cdot \mathfrak{C}) \mathfrak{B}_\alpha) \mathfrak{B}_{\alpha \wedge \mathfrak{C}' \cdot \mathfrak{C}} \sim (\mathfrak{C}' \cdot \mathfrak{C}) \mathfrak{B}_\alpha .$$

Ezekből a 9. Lemma (i) állításának felhasználásával a (C2) (a) tulajdonság alapján következik, hogy $\mathfrak{C}' \cdot \mathfrak{C} \sim (\mathfrak{C}' \cdot \mathfrak{C}) \mathfrak{B}_\alpha$. Az 5. Lemma ekkor biztosítja, hogy $(\mathfrak{C}' \cdot \mathfrak{C}) \mathfrak{B}_\alpha \in \mathfrak{F}_{\beta'}$ idempotens. Láttuk, hogy $\mathfrak{B}_{\alpha \wedge \mathfrak{C}' \cdot \mathfrak{C}} \sim \mathfrak{C}$. Ezek alapján a 9. Lemma alkalmazásával könnyen látható, hogy (3)-ból következik $\mathfrak{B}_\alpha \sim \mathfrak{C}$.

14. LEMMA. Legyen $\alpha \in I_\alpha$ és $\mathfrak{C} \in \mathfrak{F}_\beta$, $\mathfrak{C}' \in \mathfrak{F}_{\beta'}$. Tegyük fel, hogy $\mathfrak{B}_\alpha \in \mathfrak{F}_{\alpha_1}$ és $(\mathfrak{B}_\alpha)' \in \mathfrak{F}_{\alpha_1}$. Ha $\beta' \neq \alpha$, akkor $\alpha_1 < \beta$ és $\alpha_1' < \alpha$.

Bizonyítás. A (3) egyenlőségben, ami nyilván érvényes (C3) (b) alapján, most $\alpha \wedge \mathfrak{C}' \cdot \mathfrak{C} \in I_{\alpha\beta'}$ és $(\mathfrak{C}' \cdot \mathfrak{C}) \mathfrak{B}_\alpha \in \mathfrak{F}_{\alpha\beta'}$ teljesül, ahol $\beta' \neq \alpha$ miatt $\alpha\beta' < \beta'$. (3)-ból (B2) szerint adódik, hogy $\mathfrak{F}_{\alpha_1} = \mathfrak{F}(\mathfrak{B}_\alpha) = \mathfrak{F}(\mathfrak{B}_{\alpha \wedge \mathfrak{C}' \cdot \mathfrak{C}})$. A (C1) (d) tulajdonság következtében így $\mathfrak{F}_{\alpha_1} = \mathfrak{F}((\mathfrak{C}' \cdot \mathfrak{C})')$, ahol $\mathfrak{C}' \cdot \mathfrak{C} \in \mathfrak{F}_{\alpha\beta'}$ idempotens. Ekkor a (B1)-(B2) tulajdonság és a 3. Lemma biztosítja, hogy $\alpha_1 < \beta$. Másrészt nyilván $\alpha\beta' \leq \alpha$. Itt $\alpha\beta' = \alpha$ csak úgy teljesülhet $\beta' \neq \alpha$ miatt, hogy $\alpha < \beta'$. Tehát két eset lehetséges: vagy $\alpha\beta' < \alpha$ vagy $\alpha < \beta'$. Az utóbbi esetben (C1) (c)

biztosítja az $\alpha'_1 < \alpha$ egyenlőtlenséget. A (B2) tulajdonság alapján (3)-ból következik, hogy $\alpha'_1 < \alpha\beta'$. Így ha $\alpha\beta' < \alpha$, akkor szintén teljesül az $\alpha'_1 < \alpha$ egyenlőtlenség. Ezzel a lemmát bizonyítottuk.

15. LEMMA. Legyen α_1, α_2 és $\beta_1, \beta' \in \gamma$ ugy, hogy $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \beta'$. Tegyük fel, hogy $\varphi \in \mathfrak{F}_{\beta}$ és $\varphi' \in \mathfrak{F}_{\beta'}$. Ekkor

(i) valahányszor $a_1 \in I_{\alpha_1}$ és $a_2 \in I_{\alpha_2}$, mindannyiszor $I(a_1 A_{\varphi}) \leq I(a_2 A_{\varphi})$.

(ii) valahányszor $\varepsilon_1 \in \mathfrak{F}_{\alpha_1}$ és $\varepsilon_2 \in \mathfrak{F}_{\alpha_2}$ idempotensek, mindannyiszor $\mathfrak{F}((\varepsilon_1 \cdot \varphi'))' \leq \mathfrak{F}((\varepsilon_2 \cdot \varphi'))'$.

Bizonyítás. (B2)* alapján I -ben az $a_2 \cdot a_1$ szorzat értelmezve van és $a_2 \cdot a_1 \in I_{\alpha_1}$. Így a (C1) (a) és (d) tulajdonságok miatt $I((a_2 \cdot a_1) A_{\varphi}) = I(a_1 A_{\varphi})$. Viszont (C2) (b) szerint $(a_2 \cdot a_1) A_{\varphi} = a_2 A_{\varphi} \cdot a_1 A_{\varphi} \mathfrak{B}_{a_2}$, amiből (B2)* és (C1) (a) alapján következik, hogy $I((a_2 \cdot a_1) A_{\varphi}) = I(a_1 A_{\varphi} \mathfrak{B}_{a_2}) \leq I(a_2 A_{\varphi})$. Ezzel tehát beláttuk, hogy $I(a_1 A_{\varphi}) \leq I(a_2 A_{\varphi})$. Figyelembe véve (C1) (d)-t az (ii) állítás közvetlenül következik (i)-ből.

16. LEMMA. Legyen $a \in I_{\alpha}$, $\varphi \in \mathfrak{F}_{\beta}$ és $\varphi' \in \mathfrak{F}_{\beta'}$ ugy, hogy $\alpha \leq \beta'$. Ha $\varphi \mathfrak{B}_a \in \mathfrak{F}_{\alpha_1}$ és ε egy tetszőleges $\mathfrak{F}_{\alpha_1}$ -beli idempotens elem, akkor $\varepsilon \cdot \varphi \sim \varphi \mathfrak{B}_a$. Következésképpen $\varepsilon_1 \cdot \varphi \sim \varepsilon_2 \cdot \varphi$ minden $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ idempotensre $\mathfrak{F}_{\alpha_1}$ -ben.

Bizonyítás. Ha $\varphi \mathfrak{B}_a \in \mathfrak{F}_{\alpha_1}$, akkor $\alpha_1 \leq \beta$, így $\varepsilon \cdot \varphi$ valóban értelmezve van. Továbbá $a A_{\varphi} \in I_{\alpha_1}$. Így $\varepsilon \mathfrak{B}_{a A_{\varphi}} \sim \varepsilon$ a (C1) (c) tulajdonság szerint. Ebből az 5. Lemma alapján következik, hogy $\varepsilon \mathfrak{B}_{a A_{\varphi}}$ idempotens, a 10. Lemma alapján pedig így $\varepsilon \mathfrak{B}_{a A_{\varphi}} \cdot \varphi \mathfrak{B}_a = \varphi \mathfrak{B}_a$. (C3) (b) értelmében tehát $(\varepsilon \cdot \varphi) \mathfrak{B}_a = \varphi \mathfrak{B}_a$. A (C1) (c) ill. (d) tulajdonság biztosítja, hogy ha $\iota \in \mathfrak{F}_{\alpha}$ idempotens, akkor $(\iota \cdot \varphi')' \in \mathfrak{F}_{\alpha_1}$, hiszen $\varphi \mathfrak{B}_a \in \mathfrak{F}_{\alpha_1}$. Másrészt (B6) miatt $(\iota \cdot \varphi')' \in \mathfrak{F}_{\alpha_1}$ -ből következik, hogy

$(\varepsilon \cdot \varrho)' \in \mathfrak{Y}_\alpha$. Így (C1) (c) következtében $(\varepsilon \cdot \varrho) \mathfrak{B}_\alpha \sim \varepsilon \cdot \varrho$.

A 9. Lemma (i) biztosítja, hogy valóban $\varrho \mathfrak{B}_\alpha \sim \varepsilon \cdot \varrho$. Továbbá $\varepsilon_1 \cdot \varrho \sim \varepsilon_2 \cdot \varrho$, feltéve, hogy $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathfrak{Y}_{\alpha_1}$ idempotensek.

Ezek után rátérhetünk annak igazolására, hogy $\mathfrak{L}(I, \mathfrak{Y}; A, \mathfrak{B})$ olyan ortodox félcsoporth, amely ortodox félcsoporthok $\mathfrak{B}(\bar{I}, \bar{\mathfrak{Y}}; \bar{A}, \bar{\mathfrak{B}})$ kötege.

17. LEMMA. $\mathfrak{L}(I, \mathfrak{Y}; A, \mathfrak{B})$ félcsoporth.

Bizonyítás. A (2)-ben definiált művelet asszociativitását kell ellenőriznünk. Tegyük fel, hogy $a \in I_\alpha$, $\varrho \in \mathfrak{Y}_\alpha$, $\mathfrak{b} \in I_\beta$, $\sigma \in \mathfrak{Y}_\beta$ és $c \in I_\gamma$, $\tau \in \mathfrak{Y}_\gamma$. Ekkor definíció szerint

$$\begin{aligned} &[(a, \varrho)(\mathfrak{b}, \sigma)](c, \tau) = \\ &= ((a \cdot \mathfrak{b} A_\varrho) \cdot c A_\sigma \mathfrak{b}_\sigma \cdot \sigma, (\varrho \mathfrak{b}_\sigma \cdot \sigma) \mathfrak{B}_c \cdot \tau) = \quad \quad \quad / (C3)(a)-(b) \text{ miatt} / \\ &= ((a \cdot \mathfrak{b} A_\varrho) \cdot c A_\sigma A_\mathfrak{b}_\sigma, (\varrho \mathfrak{b}_\sigma \mathfrak{B}_{c A_\sigma} \cdot \sigma \mathfrak{B}_c) \cdot \tau) = \quad \quad \quad / (C1)(a), (B3)^* \text{ és } (B3) \text{ miatt} / \\ &= (a \cdot (\mathfrak{b} A_\sigma \cdot c A_\sigma A_\mathfrak{b}_\sigma), \varrho \mathfrak{b}_\sigma \mathfrak{B}_{c A_\sigma} \cdot (\sigma \mathfrak{B}_c \cdot \tau)) = \quad \quad \quad / (C2)(a)-(b) \text{ miatt} / \\ &= (a \cdot (\mathfrak{b} \cdot c A_\sigma) A_\varrho, \varrho \mathfrak{b}_\sigma \cdot c A_\sigma \cdot (\sigma \mathfrak{B}_c \cdot \tau)) = (a, \varrho)[(\mathfrak{b}, \sigma)(c, \tau)] \quad . \quad . \end{aligned}$$

Ezzel a lemmát igazoltuk.

18. LEMMA. A $\mathfrak{L}(I, \mathfrak{Y}; A, \mathfrak{B})$ félcsoporthban (a, ϱ) és $(\mathfrak{b}, \sigma)$ akkor és csak akkor egymás inverzei, ha ϱ és σ egymás inverzei $\mathfrak{Y}$ -ben.

Bizonyítás. Definíció szerint az $(a, \varrho)(\mathfrak{b}, \sigma)(a, \varrho) = (a, \varrho)$ és $(\mathfrak{b}, \sigma)(a, \varrho)(\mathfrak{b}, \sigma) = (\mathfrak{b}, \sigma)$ egyenlőségek fennállása a következő két I -beli és két $\mathfrak{Y}$ -beli egyenlőséggel ekvivalens:

$$(4) \quad a \cdot \mathfrak{b} A_\varrho \cdot a A_\sigma A_\mathfrak{b}_\sigma = a \quad ,$$

$$(5) \quad \varrho \mathfrak{b}_\sigma \cdot a A_\sigma \cdot \sigma \mathfrak{B}_a \cdot \varrho = \varrho \quad ,$$

$$(4)' \quad \mathfrak{b} \cdot a A_\sigma \cdot \mathfrak{b} A_\varrho A_\sigma \mathfrak{b}_\sigma = \mathfrak{b} \quad ,$$

$$(5)' \quad \sigma \mathfrak{B}_a \cdot \mathfrak{b} A_\varrho \cdot \varrho \mathfrak{b}_\sigma \cdot \sigma = \sigma \quad .$$

Tegyük fel először, hogy az (a, ϱ) és $(\mathfrak{b}, \sigma)$ $\mathfrak{L}(I, \mathfrak{Y}; A, \mathfrak{B})$ -

beli elemekre e négy egyenlőség teljesül. A (C1) (a) tulajdonság szerint $I(\alpha) \geq I(\&A_\varrho) \geq I(\alpha A_\varrho A_\varrho B_\&)$. A (4) egyenlőség miatt (B2)* alapján adódik, hogy $I(\alpha A_\varrho A_\varrho B_\&) = I(\alpha)$. Így $I(\alpha) = I(\&A_\varrho) = I(\alpha A_\varrho A_\varrho B_\&)$. Hasonlóan (4)' következtében $I(\&) = I(\alpha A_\varrho) = I(\&A_\varrho A_\varrho B_\alpha)$. Mivel $I(\alpha)$ és $I(\&)$ balzéró félcsoport, így érvényesek az $\alpha \cdot \&A_\varrho = \alpha$ és $\& \cdot \alpha A_\varrho = \&$ egyenlőségek. Az (5) egyenlőségben (B2) alapján $\mathfrak{V}(\varrho) = \mathfrak{V}(\xi)$, ahol $\xi = \varrho B_\& \cdot \& B_\alpha$. Továbbá, (B2) és (C1) (a) szerint $\mathfrak{V}(\xi') \leq \mathfrak{V}((\& B_\alpha)') \leq \mathfrak{V}(\varrho)$. Így a 10. Lemma alkalmazásával adódik, hogy ξ idempotens elem $\mathfrak{V}(\varrho)$ -ban. A 4. Lemma biztosítja, hogy $\mathfrak{V}(\xi') = \mathfrak{V}(\xi)$. Tehát $\mathfrak{V}(\varrho) = \mathfrak{V}((\& B_\alpha)')$ is érvényes. Ebből viszont a 14. Lemma alapján következik, hogy $\mathfrak{V}(\varrho) \geq \mathfrak{V}(\&')$, a 13. Lemma alapján pedig az, hogy $\& B_\alpha \sim \&$. Ezért $\mathfrak{V}(\&') = \mathfrak{V}((\& B_\alpha)')$, és így $\mathfrak{V}(\varrho) = \mathfrak{V}(\&')$. Ugyanigy (5)'-ből kiindulva látható, hogy $\eta = \& B_\alpha \cdot \varrho B_\& \in \mathfrak{V}(\&)$ idempotens, $\mathfrak{V}(\&) = \mathfrak{V}(\varrho')$ és $\varrho B_\& \sim \varrho$. Mivel a 10. Lemma szerint $\varrho B_\& = \xi \cdot \varrho B_\& = \varrho B_\& \cdot \& B_\alpha \cdot \varrho B_\&$ és $\& B_\alpha = \eta \cdot \& B_\alpha = \& B_\alpha \cdot \varrho B_\& \cdot \& B_\alpha$, azért $\varrho B_\&$ és $\& B_\alpha$ egymás inverzei $\mathfrak{V}$ -ben. Következésképpen a 9. Lemma (i) állítása szerint ϱ és $\&$ is egymás inverzei $\mathfrak{V}$ -ben, amint azt bizonyítani akartuk.

Fordítva, tegyük fel, hogy $\alpha \in I_\alpha, \varrho \in \mathfrak{V}_\alpha, \& \in I_{\alpha'}$ és $\& \in \mathfrak{V}_{\alpha'}$, továbbá ϱ és $\&$ egymás inverzei. Ekkor (C1) (c) alapján $\varrho B_\& \sim \varrho$ és $\& B_\alpha \sim \&$. Ebből következik (C1) (a) szerint, hogy $\& A_\varrho \in I_\alpha$ és $\alpha A_\& \in I_{\alpha'}$, és ugyanigy akkor $\alpha A_\& A_\varrho B_\& \in I_\alpha$ és $\& A_\varrho A_\& B_\alpha \in I_{\alpha'}$. Mivel I_α és $I_{\alpha'}$ balzéró félcsoport, a (4) és (4)' egyenlőségek valóban teljesülnek. Az is igaz lesz, hogy (5)-ben illetve (5)'-ben $\& \cdot \alpha A_\& = \&$ illetve $\alpha \cdot \& A_\varrho = \alpha$. Ekkor $\varrho B_\& \sim \varrho$ és $\& B_\alpha \sim \&$ miatt (5) és (5)' következik a 12. Lemma felhasználásával. Így (α, ϱ) és $(\&, \&)$

egymás inverzei $\mathcal{L}(I, \mathcal{Y}; A, B)$ -ben.

19. LEMMA. $\mathcal{L}(I, \mathcal{Y}; A, B)$ ortodox félcsoport, amelynek idempotens kötege

$$(6) \quad \mathbf{B} = \{(a, \varepsilon) : \text{valamely } \alpha \in \mathcal{Y} \text{ -ra } a \in I_\alpha \text{ és } \varepsilon \in \mathcal{Y}_\alpha \text{ idempotens}\}.$$

Bizonyítás. (B4) szerint $\mathcal{Y}$ minden elemének van inverze, így a 18. Lemmából közvetlenül következik, hogy $\mathcal{L}(I, \mathcal{Y}; A, B)$ reguláris.

Megmutatjuk, hogy $\mathbf{B}$ valóban $\mathcal{L}(I, \mathcal{Y}; A, B)$ idempotenseinek halmaza. Tegyük fel először, hogy (a, ε) idempotens elem $\mathcal{L}(I, \mathcal{Y}; A, B)$ -ben. Definíció szerint akkor

$$(7) \quad a \cdot a A_\varepsilon = a$$

és

$$(8) \quad \varepsilon B_\alpha \cdot \varepsilon = \varepsilon.$$

A (7) egyenlőség biztosítja (B2)* alapján, hogy $I(a A_\varepsilon) = I(a)$. Ekkor $\mathcal{Y}(\varepsilon B_\alpha) = \mathcal{Y}(\varepsilon)$. Másrészt (C1) (a) szerint $\mathcal{Y}((\varepsilon B_\alpha)') \neq \mathcal{Y}(\varepsilon)$. Így (8)-ból a 10. Lemma értelmében következik, hogy $\varepsilon B_\alpha \in \mathcal{Y}(\varepsilon)$ idempotens. Ekkor (B5) szerint $\varepsilon B_\alpha \sim \varepsilon$. Az 5. Lemma felhasználásával ebből adódik, hogy ε idempotens.

Fordítva, ha $a \in I_\alpha$ és $\varepsilon \in \mathcal{Y}_\alpha$ idempotens, akkor (C1) (b) alapján $a A_\varepsilon \in I_\alpha$, (C1) (c) szerint pedig $\varepsilon B_\alpha \sim \varepsilon$. Az előbbiből (7) következik, ugyanis I_α balzéró félcsoport. Az utóbbiból pedig az 5. Lemma alkalmazásával kapjuk, hogy $\varepsilon B_\alpha \in \mathcal{Y}_\alpha$ idempotens. Így (8) teljesül (B5) miatt. Tehát (a, ε) idempotens elem $\mathcal{L}(I, \mathcal{Y}; A, B)$ -ben.

Az 5. Lemma szerint a $\mathcal{Y}$ -beli idempotens elemek inverzei is idempotensek. Így a 18. Lemma alapján a $\mathbf{B}$ -beli elemek

inverzei is $\mathbf{B}$ -ben vannak. Ez pedig azt jelenti, hogy $\mathcal{L}(I, \mathfrak{Y}; A, \mathfrak{B})$ ortodox félcsoporth. Ezzel a lemma bizonyítását befejeztük.

20. LEMMA. $\mathcal{L}(I, \mathfrak{Y}; A, \mathfrak{B})$ idempotens kötege, $\mathbf{B}$ a

$\mathbf{D}_\alpha = \{(a, \varepsilon) : a \in I_\alpha, \varepsilon \in \mathfrak{Y}_\alpha \text{ idempotens}\}, (\alpha \in Y)$
derékszögű kötegek $\vee$ félhálója.

Bizonyítás. A 18. Lemma szerint egy $(a, \varepsilon) \in \mathbf{B}$ -beli elemnek, ahol $a \in I_\alpha, \varepsilon \in \mathfrak{Y}_\alpha$, az összes inverzei éppen a $\mathbf{D}_\alpha$ halmaz elemei. Így $\mathbf{B}$ $\mathcal{D}$ -osztályai valóban a $\mathbf{D}_\alpha (\alpha \in Y)$ halmazok. Ha $(a, \varepsilon) \in \mathbf{D}_\alpha$ és $(b, \zeta) \in \mathbf{D}_\beta$, akkor $(a, \varepsilon)(b, \zeta) = (a \cdot b \cdot a_\varepsilon, \varepsilon \mathfrak{B}_\varepsilon \cdot \zeta) \in \mathbf{D}_{\alpha\beta}$. Ugyanis (C1) (b) alapján $b \cdot a_\varepsilon \in I_{\alpha\beta}$ és $\varepsilon \mathfrak{B}_\varepsilon \in \mathfrak{Y}_{\alpha\beta}$. Így (B2)* és (B2) szerint $a \cdot b \cdot a_\varepsilon \in I_{\alpha\beta}$ és $\varepsilon \mathfrak{B}_\varepsilon \cdot \zeta \in \mathfrak{Y}_{\alpha\beta}$. Ezzel beláttuk, hogy $\mathbf{D}_\alpha \mathbf{D}_\beta \subseteq \mathbf{D}_{\alpha\beta}$, ami bizonyítja a lemma állítását.

Tekintsük a $\mathbf{B}$ köteg következő részhalmazát:

$$(9) \quad \bar{\mathbf{B}} = \{(a, \varepsilon) : \text{valamely } \bar{\alpha} (\in \bar{Y})\text{-ra } a \in I_{\bar{\alpha}} \text{ és } \varepsilon \in \mathfrak{Y}_{\bar{\alpha}} \text{ idempotens}\}.$$

Mivel $\bar{Y}$ részfélháló Y -ban, a 20. Lemmából következik, hogy $\bar{\mathbf{B}}$ a $\mathbf{B}$ -nek részkötege, és $\bar{\mathbf{B}}$ a $\mathbf{B}$ bizonyos $\mathcal{D}$ -osztályainak az egyesítése. A $\mathcal{L}(\bar{I}, \bar{\mathfrak{Y}}; \bar{A}, \bar{\mathfrak{B}})$ köteg minden $(\bar{a}, \bar{\varepsilon})$ elemére definiáljuk $\mathcal{L}(I, \mathfrak{Y}; A, \mathfrak{B})$ -ben a következő részhalmazt: ha $\bar{a} \in \bar{I}_{\bar{\alpha}}, \bar{\varepsilon} \in \bar{\mathfrak{Y}}_{\bar{\alpha}}$, ahol $\bar{\alpha} \in \bar{Y}$, akkor legyen

$$(10) \quad \mathbf{F}_{(\bar{a}, \bar{\varepsilon})} = \{(a, \varepsilon) : a \in I_{\bar{\alpha}}, \varepsilon \in \mathfrak{Y}_{\bar{\alpha}} \text{ valamely } \alpha (\in Y_{\bar{\alpha}})\text{-ra}\}.$$

21. LEMMA. A $\mathcal{L}(I, \mathfrak{Y}; A, \mathfrak{B})$ félcsoporth a (10)-ben definiált $\mathbf{F}_{(\bar{a}, \bar{\varepsilon})} ((\bar{a}, \bar{\varepsilon}) \in \mathcal{L}(\bar{I}, \bar{\mathfrak{Y}}; \bar{A}, \bar{\mathfrak{B}}))$ ortodox félcsoporthok $\mathcal{L}(\bar{I}, \bar{\mathfrak{Y}}; \bar{A}, \bar{\mathfrak{B}})$ kötege. Minden $(\bar{a}, \bar{\varepsilon}) (\in \mathcal{L}(\bar{I}, \bar{\mathfrak{Y}}; \bar{A}, \bar{\mathfrak{B}}))$ -ra $\mathbf{F}_{(\bar{a}, \bar{\varepsilon})}$ idempotenseinek legnagyobb $\mathcal{D}$ -osztálya éppen $\mathbf{F}_{(\bar{a}, \bar{\varepsilon})} \cap \bar{\mathbf{B}}$.

Bizonyítás. Legyen $(\alpha, \varrho) \in \mathbb{F}_{(\bar{\alpha}, \bar{j})}$ és $(\beta, \sigma) \in \mathbb{F}_{(\bar{\beta}, \bar{l})}$. Definíció szerint $(\alpha, \varrho)(\beta, \sigma) = (\alpha \cdot \beta_{\varrho}, \varrho\beta_{\sigma} \cdot \sigma)$, ahol (C1) (a) szerint $\beta_{\varrho} \in I_{\alpha_1}^{\bar{\beta}, \bar{\alpha}_1}$ és $\varrho\beta_{\sigma} \in \mathcal{Y}_{\alpha_1}^{\bar{j}, \bar{\beta}_1}$. Így (B2)* illetve (B2) alapján $\alpha \cdot \beta_{\varrho} \in I_{\alpha_1}^{\bar{\alpha}, \bar{\alpha}_1}$ és $\varrho\beta_{\sigma} \cdot \sigma \in \mathcal{Y}_{\alpha_1}^{\bar{j}, \bar{\beta}_1}$. Tehát $(\alpha, \varrho)(\beta, \sigma) \in \mathbb{F}_{(\bar{\alpha}, \bar{j})(\bar{\beta}, \bar{l})}$. Ez azt bizonyítja, hogy az $\{\mathbb{F}_{(\bar{\alpha}, \bar{j})}\}$ osztályozás kompatibilis. A lemma második állítása közvetlenül következik a 20. Lemmából. Így az említett osztályozáshoz tartozó kongruencia a 3.1. Állítás (i) része értelmében részköteg-parcelláló. A 3.2. Tétel ekkor biztosítja, hogy $\mathbb{F}_{(\bar{\alpha}, \bar{j})}$ ortodox félcsoporth. Ezzel a lemmát bebizonyítottuk.

A következő tételben összefoglaljuk egy parciális balköteg és egy jobbortodox parciális félcsoporth általánosított szemidirekt szorzatának legfontosabb tulajdonságait.

22. TÉTEL. Legyen $\bar{Y}$ egy félháló, $\bar{I}$ az $\bar{I}_{\bar{\alpha}}$ ($\bar{\alpha} \in \bar{Y}$) balzéró félcsoporthok egy alsó asszociatív $\bar{Y}$ félhálójaja, $\bar{\mathcal{Y}}$ pedig a $\bar{\mathcal{Y}}_{\bar{\alpha}}$ ($\bar{\alpha} \in \bar{Y}$) jobbzéró félcsoporthok egy felső asszociatív $\bar{Y}$ félhálójaja. Minden $\bar{\alpha} \in \bar{Y}$ -ra legyen $\bar{Y}_{\bar{\alpha}}$ egy egységelemes félháló az $\bar{\alpha}$ egységelemmel. Legyen Y az $Y_{\bar{\alpha}}$ ($\bar{\alpha} \in \bar{Y}$) félhálóknak olyan $\bar{Y}$ félhálójaja, amelyben $\bar{Y}$ részfélháló. Legyen I parciális balköteg $\bar{I} \times_{\bar{Y}} Y$ felett, $\mathcal{Y}$ pedig jobbortodox parciális félcsoporth $\bar{\mathcal{Y}} \times_{\bar{Y}} Y$ felett. Legyen $\bar{A}, \bar{B}$ egy $(\bar{I}, \bar{\mathcal{Y}})$ -pár, A, B pedig általánosított $(I, \mathcal{Y})$ -pár $\bar{A}, \bar{B}$ felett. Ekkor I -nek és $\mathcal{Y}$ -nek a $\mathcal{K}(I, \mathcal{Y}; A, B)$ általánosított szemidirekt szorzata ortodox félcsoporth, amelynek idempotens kötege a (6)-ban megadott B . A (9)-ben definiált $\bar{B}$ a B részkötege. Továbbá $\mathcal{K}(I, \mathcal{Y}; A, B)$ a (10)-ben értelmezett $\mathbb{F}_{(\bar{\alpha}, \bar{j})}$ ($(\bar{\alpha}, \bar{j}) \in \mathcal{B}(\bar{I}, \bar{\mathcal{Y}}; \bar{A}, \bar{B})$) ortodox félcsoporthok $\mathcal{B}(\bar{I}, \bar{\mathcal{Y}}; \bar{A}, \bar{B})$ kötege, ahol $\mathbb{F}_{(\bar{\alpha}, \bar{j})}$ idempotenseinek legnagyobb $\mathcal{O}$ -osztálya $\mathbb{F}_{(\bar{\alpha}, \bar{j})} \cap \bar{B}$.



Legyen $\bar{Y}, \bar{I}, \bar{\mathfrak{Y}}, \bar{A}, \bar{B}, \bar{\gamma}, \bar{I}, \bar{\mathfrak{Y}}, \bar{A}$ és $\mathfrak{B}$ olyan, mint a 22. Tételben. Tegyük fel, hogy

(C4) minden $\alpha \in \bar{Y}$ -ra $I_\alpha \cap \mathfrak{Y}_\alpha = \{\iota_\alpha\}$, és ha $\alpha, \beta \in \bar{Y}$ úgy, hogy $\alpha \leq \beta$, $\alpha \in I_\alpha$ ill. $\mathfrak{e} \in \mathfrak{Y}$ úgy, hogy $\mathfrak{e} \in \mathfrak{Y}_\alpha$, akkor $\alpha A_{\iota_\beta} = \iota_\beta \alpha$ ill.

$$\mathfrak{e} B_{\iota_\beta} = \mathfrak{e} \cdot \iota_\beta.$$

Ha $\bar{\alpha} \in \bar{Y}$, akkor jelöljük $\bar{\iota}_{\bar{\alpha}}$ -sal azt az $\bar{I}$ -beli $\bar{\iota}$ elemet, amelyre $\iota_{\bar{\alpha}} \in \bar{I}_{\bar{\alpha}}$ teljesül. Hasonlóan legyen $\bar{j}_{\bar{\alpha}}$ az a $\bar{\mathfrak{Y}}$ -beli $\bar{j}$ elem, amelyre $\iota_{\bar{\alpha}} \in \bar{\mathfrak{Y}}_{\bar{\alpha}}$. A (C4) tulajdonságból (C1) (a) alapján következik, hogy ha $\bar{\alpha} \leq \bar{\beta}$ az $\bar{Y}$ -ban, akkor $\bar{\iota}_{\bar{\alpha}} \bar{A}_{\bar{j}_{\bar{\beta}}} = \bar{\iota}_{\bar{\beta}} \cdot \bar{\iota}$ illetve $\bar{j}_{\bar{\beta}} \bar{B}_{\bar{\iota}_{\bar{\alpha}}} = \bar{j} \cdot \bar{j}_{\bar{\beta}}$ fennáll $\bar{I}_{\bar{\alpha}}$ tetszőleges $\bar{\iota}$, illetve $\bar{\mathfrak{Y}}_{\bar{\alpha}}$ tetszőleges $\bar{j}$ elemére. Legyen S egy ortodox félcsoporthat, amelynek idempotens kötege $E = \mathcal{B}(\bar{I}, \bar{\mathfrak{Y}}, \bar{A}, \bar{B})$. Az E köteg az $E_{\bar{\alpha}} = \bar{I}_{\bar{\alpha}} \times \bar{\mathfrak{Y}}_{\bar{\alpha}}$ ($\bar{\alpha} \in \bar{Y}$) derékszögű kötegek $\bar{Y}$ félhálójára. Az előző fejezethez hasonlóan egy tetszőleges $\iota \in S$ -re jelölje $\iota(\iota) [\ell(\iota)]$ azt az $\bar{Y}$ -beli $\bar{\alpha}$ elemet, amelyre teljesül, hogy $E_{\bar{\alpha}}$ tartalmazza ι baleyegységeit [jobbégységeit]. Ha $\iota \in S$, akkor ι -nek létezik egyetlen olyan ι^{-1} -vel jelölt inverze, amelyre $(\bar{\iota}_{\iota(\iota)}, \bar{j}_{\iota(\iota)}) \mathcal{L} \iota^{-1} \mathcal{L} (\bar{\iota}_{\ell(\iota)}, \bar{j}_{\ell(\iota)})$ fennáll.

Az S félcsoporthat tetszőleges ι elemére τ_ι jelöljön egy izomorfizmust $\iota(\iota)Y$ -ról $\ell(\iota)Y$ -ra. Tegyük fel, hogy valahányszor ι és ι^* egymás inverzei S -ben, mindannyiszor $\tau_{\iota^*} = \tau_\iota^{-1}$. Továbbá, valahányszor $\bar{\alpha} \in \bar{Y}$, $\bar{\alpha} \leq \iota(\iota)$ és ι^* az ι egy inverze, mindannyiszor $\iota^* E_{\bar{\alpha}} \iota \subseteq E_{\bar{\alpha}} \tau_\iota$. Mivel $Y = \bigcup_{\bar{\alpha} \in \bar{Y}} Y_{\bar{\alpha}}$, ahol $Y_{\bar{\alpha}}$ egységelemes félháló az $\bar{\alpha}$ egységelemmel, és $\bar{Y}$ részfélháló Y -ban, a 4.1. Lemmához hasonlóan igazolható, hogy minden olyan $\bar{\alpha} \in \bar{Y}$ esetén, amelyre $\bar{\alpha} \leq \iota(\iota)$, érvényes, hogy $Y_{\bar{\alpha}} \tau_\iota \subseteq Y_{\bar{\alpha}} \tau_\iota$.

Legyenek adottak minden $\iota \in S$ -re a $R_\iota: \bigcup \{I_\alpha: \alpha \leq \ell(\iota)\} \rightarrow \rightarrow \bigcup \{I_\alpha: \alpha \leq \iota(\iota)\}$ illetve $\chi_\iota: \bigcup \{\mathfrak{Y}_\alpha: \alpha \leq \iota(\iota)\} \rightarrow \bigcup \{\mathfrak{Y}_\alpha: \alpha \leq \ell(\iota)\}$

leképezések, továbbá minden $s, \bar{s}$ elempárra S -ben a $c_{s, \bar{s}} \in I_{\kappa(s, \bar{s})}^{(s, \bar{s})(s, \bar{s})'}$ illetve $\gamma_{s, \bar{s}} \in \mathfrak{Y}_{\ell(s, \bar{s})}^{(s, \bar{s})'(s, \bar{s})}$ konstansok úgy, hogy az alábbi tulajdonságok fennállnak:

(D1) (a) ha $a \in I_{\alpha}^{\bar{\alpha}}$, ahol $\bar{\alpha} \in \bar{I}_{\alpha}$ és $\alpha \leq \ell(s)$, akkor $a h_s \in I_{\alpha \tau_s^{-1}}^{\bar{\alpha}}$, ahol $(s(\bar{\alpha}, \bar{j}_{\bar{\alpha}}))(s(\bar{\alpha}, \bar{j}_{\bar{\alpha}}))' = (\bar{\alpha}, \bar{j}_{\bar{\alpha}} \tau_s^{-1})$,
 (b) ha $\sigma \in \mathfrak{Y}_{\alpha}^{\bar{j}}$, $\sigma' \in \mathfrak{Y}_{\alpha'}$, ahol $\bar{j} \in \bar{\mathfrak{Y}}_{\alpha}$ és $\alpha, \alpha' \leq \kappa(s)$, akkor $\sigma \chi_s \in \mathfrak{Y}_{\alpha \tau_s}^{\bar{\ell}}$, ahol $((\bar{\alpha}, \bar{j}) s)'((\bar{\alpha}, \bar{j}) s) = (\bar{\alpha} \tau_s, \bar{\ell})$, és $(\sigma \chi_s)' \in \mathfrak{Y}_{\alpha' \tau_s}$;

(D2) (a) ha $a \in I_{\alpha}, b \in I_{\beta}$ úgy, hogy $\ell(s) \geq \alpha \geq \beta$, akkor $a h_s \cdot b h_s = (a \cdot b A_{i_{\alpha \tau_s^{-1}} \chi_s}) h_s$,
 (b) ha $\varrho \in \mathfrak{Y}_{\alpha}, \varrho' \in \mathfrak{Y}_{\alpha'}$ és $\sigma \in \mathfrak{Y}_{\beta}$ úgy, hogy $\alpha' \leq \beta \leq \kappa(s)$, akkor $\varrho \chi_s \cdot \sigma \chi_s = (\varrho B_{i_{\beta \tau_s} h_s} \cdot \sigma) \chi_s$;

(D3) ha $a \in I_{\alpha}, \alpha \leq \ell(s)$ és $\sigma \in \mathfrak{Y}_{\beta}, \beta \leq \kappa(s)$, akkor
 (a) $a A_{\sigma \chi_s} h_s = i_{\beta \tau_s} h_s \cdot a h_s A_{\sigma}$,
 (b) $\sigma B_{a h_s} \chi_s = \sigma \chi_s B_a \cdot i_{\alpha \tau_s^{-1}} \chi_s$;

(D4) (a) ha $a \in I_{\alpha}$ és $\alpha \leq \ell(\bar{s})$, akkor $a h_s h_{\bar{s}} = c_{s, \bar{s}} \cdot a A_{\gamma_{s, \bar{s}}} h_{\bar{s}}$,
 (b) ha $\varrho \in \mathfrak{Y}_{\alpha}$ és $\alpha \leq \kappa(s, \bar{s})$, akkor

$$(i_{\alpha \tau_{s, \bar{s}}} \cdot \gamma_{s, \bar{s}}) \varrho \chi_s \chi_{\bar{s}} = \varrho B_{c_{s, \bar{s}}} \chi_{s, \bar{s}} \cdot \gamma_{s, \bar{s}};$$

(D5) ha $\alpha \leq \ell(s, \bar{s})$, akkor $(i_{\alpha} \cdot \gamma_{s, \bar{s}})' \in \mathfrak{Y}_{\alpha \tau_{s, \bar{s}}^{-1} \tau_s \tau_{\bar{s}}}$;

(D6) ha $s, \bar{s}, \bar{\bar{s}} \in S$ és $\alpha \in Y_{\ell(s, \bar{s}, \bar{\bar{s}})}$, akkor $i_{\alpha} [\gamma_{s, \bar{s}, \bar{\bar{s}}} \cdot (i_{\kappa(s, \bar{s}, \bar{\bar{s}}) \tau_{s, \bar{s}}} \cdot \gamma_{s, \bar{s}}) \chi_{\bar{\bar{s}}}] \sim i_{\alpha} [\gamma_{s, \bar{s}, \bar{\bar{s}}} \cdot \gamma_{s, \bar{s}}]$;

(D7) ha $e \in E, \alpha \leq \kappa(e)$ és $a \in I_{\alpha}$ illetve $\sigma \in \mathfrak{Y}_{\alpha}$, akkor

(a) $a h_e = c_{e, e} \cdot a A_{\gamma_{e, e}}$,
 (b) $\sigma \chi_e = \sigma B_{c_{e, e}} \cdot \gamma_{e, e}$;

(D8) $\gamma_{s, s'} = i_{\kappa(s)}$, és valahányszor $\alpha \in Y_{\ell(s)}$ és s^* az s inverze, mindannyiszor $\gamma_{s s^*, s} B_{i_{\alpha}} = i_{\alpha}$.

Ha h, χ, c, γ kielégítik ezeket a feltételeket, akkor azt mond-

juk, hogy k, χ, c, γ egy (S, I, γ) -négyes.

Megjegyezzük, hogy a (D1) (a) ill. (b) tulajdonságokban $\bar{\alpha} \tau_s^{-1}$ ill. $\bar{\alpha} \tau_s$ értelmezve van, ugyanis $\alpha \in Y_{\bar{\alpha}}$, $\alpha \leq \ell(s)$ -ből következik $\bar{\alpha} \leq \ell(s)$ illetve $\alpha \in Y_{\bar{\alpha}}$, $\alpha \leq \tau(s)$ -ből $\bar{\alpha} \leq \tau(s)$. Nem nehéz leellenőrizni, hogy a (C1) (a) és a (D1) (a)(b) feltételekből következik, hogy a (D2)-(D4) és (D7) tulajdonságokban szereplő egyenlőségek mindkét oldala értelmezve van. Hasonlóan a (D5) feltétel biztosítja, hogy (D6) baloldalának van értelme.

Mielőtt a k, χ, c, γ struktúra-leképezések segítségével bevezetjük azt a konstrukciót, amely segítségével jellemezni fogjuk az ortodox félcsoporthok erős részköteg-parcelláló bővítéseit, néhány lemmát bizonyítunk az (S, I, γ) -négyesekkel kapcsolatban. Ezek meg fogják könnyíteni a későbbi bizonyításokat.

23. LEMMA. Ha $\varepsilon \in Y_{\alpha}$ idempotens és $s \in S$ ugy, hogy $\alpha \leq \tau(s)$, akkor $\varepsilon \chi_s$ is idempotens.

Bizonyítás. Definíció szerint $i_{\alpha \tau_s} k_s \in I_{\alpha}$, így (C1) (c) alapján $\varepsilon \mathcal{B}_{i_{\alpha \tau_s} k_s} \sim \varepsilon$. Ezért az 5. Lemma biztosítja, hogy $\varepsilon \mathcal{B}_{i_{\alpha \tau_s} k_s}$ szintén Y_{α} -beli idempotens, tehát (B5) miatt $\varepsilon \mathcal{B}_{i_{\alpha \tau_s} k_s} \cdot \varepsilon = \varepsilon$. Ennek következtében (D2) (b) szerint adódik, hogy

$$\varepsilon \chi_s \cdot \varepsilon \chi_s = (\varepsilon \mathcal{B}_{i_{\alpha \tau_s} k_s} \cdot \varepsilon) \chi_s = \varepsilon \chi_s.$$

Ezt akartuk bizonyítani.

24. LEMMA. Ha $\varphi \in Y_{\alpha}$, $\varphi^* \in Y_{\alpha'}$, a φ egy inverze és $s \in S$ ugy, hogy $\alpha \leq \tau(s)$, akkor $\alpha' \leq \tau(s)$ szintén fennáll, és $\varphi \chi_s$, $\varphi^* \chi_s$ egymás inverzei Y -ben.

Bizonyítás. Ha $\alpha \in Y_{\bar{\alpha}}$, akkor az inverz definíciója és (B1) alapján α' is $Y_{\bar{\alpha}}$ -ban van. Mivel $\tau(s) \in \bar{Y}$, azért $\alpha \leq \tau(s)$ -ből következik, hogy $\bar{\alpha} \leq \tau(s)$. Így $\alpha' \leq \bar{\alpha}$ miatt nyilván $\alpha' \leq \tau(s)$ is teljesül. Tehát $\varphi\chi_s$ és $\varphi^*\chi_s$ értelmezve van. Definíció szerint $i_{\alpha\tau_s}h_s \in I_{\alpha}$ és $i_{\alpha'\tau_s}h_s \in I_{\alpha'}$. Továbbá (C1) (a),(c) következtében $i_{\alpha\tau_s}h_s A_{\varphi^*} \in I_{\alpha'}$. Mivel $I_{\alpha'}$ balzéró félcsoport, így $i_{\alpha'\tau_s}h_s \cdot i_{\alpha\tau_s}h_s A_{\varphi^*} = i_{\alpha'\tau_s}h_s$. Másrészt, (C1) (c) szerint $\varphi B_{i_{\alpha'\tau_s}h_s} \sim \varphi$ és $\varphi^* B_{i_{\alpha\tau_s}h_s} \sim \varphi^*$. Ezek alapján a (D2) (b) egyenlőséget kétszer alkalmazva a (C3) (b) és (C2) (a) tulajdonságok és a 12. Lemma felhasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \varphi\chi_s \cdot \varphi^*\chi_s \cdot \varphi\chi_s &= (\varphi B_{i_{\alpha'\tau_s}h_s} \cdot \varphi^*)\chi_s \cdot \varphi\chi_s = \\ &= ((\varphi B_{i_{\alpha'\tau_s}h_s} \cdot \varphi^*) B_{i_{\alpha\tau_s}h_s} \cdot \varphi)\chi_s = \\ &= (\varphi B_{i_{\alpha'\tau_s}h_s} \cdot i_{\alpha\tau_s}h_s A_{\varphi^*} \cdot \varphi^* B_{i_{\alpha\tau_s}h_s} \cdot \varphi)\chi_s = \\ &= (\varphi B_{i_{\alpha'\tau_s}h_s} \cdot \varphi^* B_{i_{\alpha\tau_s}h_s} \cdot \varphi)\chi_s = \\ &= \varphi\chi_s. \end{aligned}$$

Duálisan látható, hogy $\varphi^*\chi_s \cdot \varphi\chi_s \cdot \varphi^*\chi_s = \varphi^*\chi_s$ szintén teljesül.

25. LEMMA. Ha $s, \bar{s} \in S$, akkor $\gamma'_{s, \bar{s}} \in \mathfrak{Y}_{\ell(s\bar{s})}$.

Bizonyítás. Definíció szerint $\gamma_{s, \bar{s}} \in \mathfrak{Y}_{\ell(s\bar{s})}$, így a 10. Lemma szerint $i_{\ell(s\bar{s})}\gamma_{s, \bar{s}} = \gamma_{s, \bar{s}}$. Ekkor pedig (D5) alapján $\gamma'_{s, \bar{s}} \in \mathfrak{Y}_{\ell(s\bar{s})}$, ugyanis $\ell(s\bar{s})\tau_{s\bar{s}}^{-1}\tau_s\tau_{\bar{s}} = \ell(s\bar{s})$.

26. LEMMA. Legyen $\alpha \in I_{\alpha}$, $\sigma \in \mathfrak{Y}_{\alpha}$ és $s \in S$ ugy, hogy $\alpha \leq \ell(s)$. Ekkor I tetszőleges $\&$ elemére

$$\alpha h_s \cdot \& A_{\sigma} h_s = (\alpha \cdot \& A_{\sigma}) h_s.$$

Bizonyítás. (C1) (a) miatt $\mathfrak{B}_\alpha \in \mathcal{I}_{\alpha_1}$, ahol $\alpha_1 \leq \alpha$. Így mindkét oldal értelmezve van. A (D2) (a) tulajdonság alapján elegendő belátnunk, hogy $\mathfrak{B}_\alpha = \mathfrak{B}_\alpha \mathfrak{A}_{i_{\alpha\tau_s^{-1}} \chi_s}$. Nyilván $i_{\alpha\tau_s^{-1}} \chi_s \in \mathcal{Y}_\alpha$ és a 23. Lemma következtében idempotens. Így a 10. Lemma szerint $i_{\alpha\tau_s^{-1}} \chi_s \cdot \sigma = \sigma$. Ekkor pedig a (C3) (a) tulajdonság biztosítja a kívánt egyenlőséget.

A következő lemma ennek duálisa.

27. LEMMA. Legyen $\alpha \in \mathcal{I}_\alpha$, $\sigma \in \mathcal{Y}_\alpha$ és $s \in S$ ugy, hogy $\alpha \leq \tau(s)$. Ekkor $\mathfrak{Y}$ tetszőleges φ elemére

$$\varphi \mathfrak{B}_\alpha \chi_s \cdot \sigma \chi_s = (\varphi \mathfrak{B}_\alpha \cdot \sigma) \chi_s.$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\alpha \in \mathcal{Y}_{\bar{\alpha}}$ és $\sigma \in \mathcal{Y}_\beta$, ahol $\beta \in \mathcal{Y}_{\bar{\beta}}$. (C1) (a) alapján $\varphi \mathfrak{B}_\alpha \in \mathcal{Y}_{\alpha_1}$ és $(\varphi \mathfrak{B}_\alpha)' \in \mathcal{Y}_{\alpha'_1}$, ahol $\alpha_1 \leq \beta$, $\alpha'_1 \leq \alpha$. Az általánosított $(\mathcal{I}, \mathcal{Y})$ -pár definíciója utáni megjegyzés értelmében $\alpha_1, \alpha'_1 \in \mathcal{Y}_{\bar{\alpha} \bar{\beta}}$. Mivel $\alpha \leq \tau(s)$ -ből következik, hogy $\bar{\alpha} \leq \tau(s)$, fennáll $\alpha_1, \alpha'_1 \leq \tau(s)$ is. Így az egyenlőség mindkét oldalának van értelme. A (D2) (b) tulajdonság alapján elegendő belátnunk, hogy $\varphi \mathfrak{B}_\alpha \mathfrak{B}_{i_{\alpha\tau_s} h_s} = \varphi \mathfrak{B}_\alpha$. Itt $i_{\alpha\tau_s} h_s \in \mathcal{I}_\alpha$. Mivel pedig $\mathcal{I}_\alpha$ balzéró félcsoport, $\alpha \cdot i_{\alpha\tau_s} h_s = \alpha$, és így (C2) (a) miatt a bizonyítandó egyenlőség valóban teljesül.

Definiáljunk egy $\mathbf{S} = \mathcal{Y}(S, \mathcal{I}, \mathcal{Y}; k, \chi, c, \gamma)$ gruppoidot a következőképpen. $\mathbf{S}$ alaphalmaza legyen

$$\mathbf{S} = \{(\alpha, s, \sigma) : s \in S, \alpha \in \mathcal{I}_{\bar{\alpha}} \text{ és } \sigma \in \mathcal{Y}_{\bar{\alpha}\tau_s}, \text{ ahol } \alpha \in \mathcal{Y}_{\tau(s)}, s s' = (\bar{\alpha}, \bar{s}, \bar{\sigma}) \text{ és } s s' = (\bar{\alpha}_{\ell(s)}, \bar{s})\},$$

a műveletet pedig értelmezzük úgy, hogy

$$(11) \quad (\alpha, s, \sigma)(\bar{\alpha}, \bar{s}, \bar{\sigma}) = (\alpha \cdot \bar{\alpha} \mathfrak{A}_\sigma h_s, s \bar{s}, (i_{\beta\tau_{s\bar{s}}} \cdot \gamma_{s, \bar{s}}) \cdot \sigma \mathfrak{B}_{\bar{\alpha}} \chi_{\bar{s}} \cdot \bar{\sigma}),$$

ahol $\bar{\alpha} A_{\bar{\sigma}} \bar{\kappa}_{\bar{s}} \in I_{\bar{\beta}}$.

Meg kell mutatnunk, hogy (11)-ben a megfelelő szorzásoknak van értelme I -ben és $\mathfrak{Y}$ -ben, továbbá, hogy az így definiált szorzás nem vezet ki $\mathbf{S}$ -ből. Tegyük fel, hogy $s, \bar{s} \in S$, $\alpha \in I_{\alpha}^{\bar{\nu}}$, $\bar{\alpha} \in I_{\bar{\alpha}}^{\bar{\nu}}$, $\sigma \in \mathfrak{Y}_{\alpha \tau_s}^{\bar{j}}$ és $\bar{\sigma} \in \mathfrak{Y}_{\bar{\alpha} \tau_{\bar{s}}}^{\bar{j}}$, ahol $s, \bar{s} = (\bar{\nu}, \bar{j} + (\bar{s}))$, $s, \bar{s} = (\bar{\nu}_{\ell(s)}, \bar{j})$ és $s, \bar{s} = (\bar{\nu}_{\ell(\bar{s})}, \bar{j})$. (C1) (a) szerint $\bar{\alpha} A_{\bar{\sigma}} \in I_{\bar{\alpha}_1}^{\bar{\nu} \bar{\alpha}_1}$ és $\bar{\sigma} B_{\bar{\alpha}} \in \mathfrak{Y}_{\bar{\alpha}_1}^{\bar{j} \bar{\sigma}}$. Láttuk, hogy $\bar{\alpha}_1 \in \mathcal{Y}_{\ell(s) + (\bar{s})}$, hiszen $\bar{\alpha} \in \mathcal{Y}_{+(\bar{s})}$ és $\alpha \tau_s \in \mathcal{Y}_{\ell(s)}$. Így $\bar{\alpha}_1 \leq \ell(s)$ és $\bar{\alpha}_1 \leq +(\bar{s})$, tehát $\bar{\alpha} A_{\bar{\sigma}} \bar{\kappa}_{\bar{s}}$ és $\bar{\sigma} B_{\bar{\alpha}} \chi_{\bar{s}}$ értelmezve van és $\bar{\alpha} A_{\bar{\sigma}} \bar{\kappa}_{\bar{s}} \in I_{\bar{\alpha}_1 \tau_{\bar{s}}}^{\bar{\nu} \bar{\alpha}_1}$, $\bar{\sigma} B_{\bar{\alpha}} \chi_{\bar{s}} \in \mathfrak{Y}_{\bar{\alpha}_1 \tau_{\bar{s}}}^{\bar{j} \bar{\sigma}}$, ahol (D1) (a) szerint $(s(\bar{\nu} \bar{\alpha}_1, \bar{j}_{\ell(s) + (\bar{s})})) (s(\bar{\nu} \bar{\alpha}_1, \bar{j}_{\ell(s) + (\bar{s})}))' = (\bar{\nu}, \bar{j}_{(\ell(s) + (\bar{s})) \tau_{\bar{s}}^{-1}})$ és $((\bar{\nu}_{\ell(s) + (\bar{s})}, \bar{j} \bar{\sigma}) \bar{s})' ((\bar{\nu}_{\ell(s) + (\bar{s})}, \bar{j} \bar{\sigma}) \bar{s}) = (\bar{\nu}_{(\ell(s) + (\bar{s})) \tau_{\bar{s}}^{-1}}, \bar{\ell})$. Nyilván $(\ell(s) + (\bar{s})) \tau_{\bar{s}}^{-1} = +(\bar{s})$ és $(\ell(s) + (\bar{s})) \tau_{\bar{s}} = \ell(s \bar{s})$. Így $\beta = \bar{\alpha}_1 \tau_{\bar{s}}^{-1} \in \mathcal{Y}_{+(\bar{s})}$ és $\beta \tau_{s \bar{s}} \in \mathcal{Y}_{\ell(s \bar{s})}$. A (D5) tulajdonság következtében $(\nu_{\beta \tau_{s \bar{s}}}, \bar{j}_{s, \bar{s}})' \in \mathfrak{Y}_{\beta \tau_{s \bar{s}}}^{\bar{j}}$. Itt $\beta \tau_{s \bar{s}} = \bar{\alpha}_1 \tau_{\bar{s}}$. A 24. Lemmából következik, hogy $((\bar{\sigma} B_{\bar{\alpha}})') \chi_{\bar{s}}$ -nak is van értelme, és ez az elem inverze $(\bar{\sigma} B_{\bar{\alpha}}) \chi_{\bar{s}}$ -nak. Ezért ha $(\bar{\sigma} B_{\bar{\alpha}})' \in \mathfrak{Y}_{\bar{\alpha}_1}'$, akkor (D1) (b) alapján $(\bar{\sigma} B_{\bar{\alpha}} \chi_{\bar{s}})' \in \mathfrak{Y}_{\bar{\alpha}_1 \tau_{\bar{s}}}'$. Mivel $\bar{\alpha}_1 \leq \alpha \tau_s$ és $\bar{\alpha}_1' \leq \bar{\alpha}$, azért $\beta = \bar{\alpha}_1 \tau_{\bar{s}}^{-1} \leq \alpha$ és $\bar{\alpha}_1 \tau_{\bar{s}} = \beta \tau_{s \bar{s}}$, $\bar{\alpha}_1' \tau_{\bar{s}} \leq \bar{\alpha} \tau_{\bar{s}}$. Látható tehát, hogy (11)-ben $\alpha \cdot \bar{\alpha} A_{\bar{\sigma}} \bar{\kappa}_{\bar{s}}$ ill. $(\nu_{\beta \tau_{s \bar{s}}}, \bar{j}_{s, \bar{s}}) \cdot \bar{\sigma} B_{\bar{\alpha}} \chi_{\bar{s}} \cdot \bar{\sigma}$ létezik és $\alpha \cdot \bar{\alpha} A_{\bar{\sigma}} \bar{\kappa}_{\bar{s}} \in I_{\beta}^{\bar{\nu} \bar{\alpha}}$ ill. $(\nu_{\beta \tau_{s \bar{s}}}, \bar{j}_{s, \bar{s}}) \cdot \bar{\sigma} B_{\bar{\alpha}} \chi_{\bar{s}} \cdot \bar{\sigma} \in \mathfrak{Y}_{\beta \tau_{s \bar{s}}}^{\bar{\nu} \cdot \bar{\ell} \cdot \bar{j}}$, ahol $\beta \in \mathcal{Y}_{+(\bar{s})}$ és $\nu_{\beta \tau_{s \bar{s}}}, \bar{j}_{s, \bar{s}} \in \mathfrak{Y}_{\beta \tau_{s \bar{s}}}^{\bar{\nu}}$. Itt $\bar{\nu} \in \mathfrak{Y}_{\ell(s \bar{s})}$ és $\bar{\ell} \in \mathfrak{Y}_{\ell(s \bar{s})}$, így $\bar{\nu} \cdot \bar{\ell} = \bar{\ell}$. Azt kell még igazolnunk, hogy $(s \bar{s})(s \bar{s})' = (\nu \cdot \bar{\nu}, \bar{j} + (s \bar{s}))$ és $(s \bar{s})'(s \bar{s}) = (\bar{\nu}_{\ell(s \bar{s})}, \bar{\ell} \cdot \bar{j})$. Az első egyenlőséget igazoljuk. A másik duálisan következik. A $\mathcal{B}(\bar{I}, \bar{\mathfrak{Y}}; \bar{A}, \bar{B})$ kötegben

$$(s \bar{s})(s \bar{s})' = (\bar{\nu}_{\ell(s)}, \bar{j})(\bar{\nu}, \bar{j} + (\bar{s})) = (\bar{\nu}_{\ell(s)}, \bar{\nu} \bar{\alpha}_1, \bar{j} \bar{\sigma} \bar{\nu} \bar{j} + (\bar{s})) .$$

Felhasználva a (C4) utáni megjegyzést, kapjuk, hogy

$$(s's)(\bar{s}\bar{s}') = (\bar{\tau}\bar{A}_j \bar{A}_{\bar{j} \ell(s)} , j \bar{B}_{\bar{\tau}} \bar{B}_{\tau \kappa(\bar{s})}) .$$

Mivel $j \in \bar{\mathfrak{F}}_{\ell(s)}$, $\bar{\tau} \in \bar{I}_{\kappa(\bar{s})}$, ahol $\bar{\mathfrak{F}}_{\ell(s)}$ jobbzeró, $\bar{I}_{\kappa(\bar{s})}$ balzeró félcsoporth, (W1) (a) és (W1) (b) alapján adódik, hogy

$$(s's)(\bar{s}\bar{s}') = (\bar{\tau}\bar{A}_j , j \bar{B}_{\bar{\tau}}) \mathcal{Q}(\bar{\tau}\bar{A}_j , \bar{j} \ell(s) \kappa(\bar{s})) .$$

Hasonlóan, alkalmazva a (C4) utáni megjegyzést, valamint azt, hogy $\bar{I}_{\kappa(s)}$ balzeró félcsoporth, látható, hogy

$$\begin{aligned} (\tau, \bar{j} \kappa(s))(\bar{\tau}, \bar{j} \kappa(\bar{s})) &= (\tau \cdot \bar{\tau} \bar{A}_{\bar{j} \kappa(s)} , \bar{j} \kappa(s) \bar{B}_{\bar{\tau}} \cdot \bar{j} \kappa(\bar{s})) = \\ &= (\tau \cdot \bar{\tau} \kappa(s) \cdot \bar{\tau} , \bar{j} \kappa(s) \bar{B}_{\bar{\tau}} \cdot \bar{j} \kappa(\bar{s})) = \\ &= (\tau \cdot \bar{\tau} , \bar{j} \kappa(s) \bar{B}_{\bar{\tau}} \cdot \bar{j} \kappa(\bar{s})) = \\ &= (\tau \cdot \bar{\tau} , \bar{j} \kappa(\bar{s})) . \end{aligned}$$

Az utolsó lépésben kihasználtuk, hogy $\bar{j} \kappa(s) \bar{B}_{\bar{\tau}} \in \bar{\mathfrak{F}}_{\kappa(\bar{s})}$ és $\bar{\mathfrak{F}}_{\kappa(\bar{s})}$ jobbzeró félcsoporth. Ezek alapján az $\mathfrak{S}$ félcsoporthban

$$\begin{aligned} (\tau \cdot \bar{\tau} , \bar{j} \kappa(\bar{s})) &= (s's)(s(\bar{\tau}\bar{A}_j , \bar{j} \ell(s) \kappa(\bar{s}))(s(\bar{\tau}\bar{A}_j , \bar{j} \ell(s) \kappa(\bar{s})))' = \\ &= s(\bar{\tau}\bar{A}_j , \bar{j} \ell(s) \kappa(\bar{s})) (s(\bar{\tau}\bar{A}_j , \bar{j} \ell(s) \kappa(\bar{s})))' \mathcal{Q} \\ &\mathcal{Q} s(\bar{\tau}\bar{A}_j , \bar{j} \ell(s) \kappa(\bar{s})) s' \mathcal{Q} s(s's)(\bar{s}\bar{s}') s' = \\ &= s\bar{s}\bar{s}'\bar{s} \mathcal{Q} (s\bar{s})(s\bar{s})' . \end{aligned}$$

Másrészt $(s\bar{s})(s\bar{s})' \mathcal{Q} (\tau \cdot \bar{\tau} , \bar{j} \kappa(\bar{s}))$ az $(s\bar{s})'$ definíciója miatt. Tehát $(s\bar{s})(s\bar{s})' = (\tau \cdot \bar{\tau} , \bar{j} \kappa(\bar{s}))$.

28. LEMMA. **S** félcsoporth.

Bizonyítás. A (11)-ben definiált művelet asszociativitását kell belátnunk. Tegyük fel, hogy (a, s, φ) , $(\bar{a}, \bar{s}, \bar{\varphi})$ és $(\tilde{a}, \tilde{s}, \tilde{\varphi}) \in \mathbf{S}$. Definíció szerint

$$[(a, s, \varphi)(\bar{a}, \bar{s}, \bar{\varphi})](\tilde{a}, \tilde{s}, \tilde{\varphi}) = (a_1, s\bar{s}\tilde{s}, \varphi_1)$$

és

$$(\alpha, \beta, \gamma)[(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma})(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma})] = (\theta_2, \beta \bar{\beta}, \sigma_2) ,$$

ahol

$$\theta_1 = (\alpha \cdot \bar{\alpha} A_{\bar{\gamma}} h_{\beta}) \cdot \bar{\alpha} A_{(\beta_1 \tau_{\beta \bar{\beta}} \cdot \gamma_{\beta, \bar{\beta}}) \cdot \gamma \bar{\beta} \alpha \chi_{\bar{\beta}} \cdot \bar{\gamma} h_{\beta \bar{\beta}}} ,$$

$$\theta_2 = \alpha \cdot (\bar{\alpha} \cdot \bar{\alpha} A_{\bar{\gamma}} h_{\bar{\beta}}) A_{\bar{\gamma}} h_{\beta} ,$$

$$(12) \quad \sigma_1 = (\beta_2 \tau_{\beta \bar{\beta} \bar{\beta}} \cdot \gamma_{\beta \bar{\beta}, \bar{\beta}}) \cdot ((\beta_1 \tau_{\beta \bar{\beta}} \cdot \gamma_{\beta, \bar{\beta}}) \cdot \gamma \bar{\beta} \alpha \chi_{\bar{\beta}} \cdot \bar{\gamma}) \bar{\beta} \alpha \chi_{\bar{\beta}} \cdot \bar{\gamma} ,$$

$$(13) \quad \sigma_2 = (\beta_4 \tau_{\beta \bar{\beta} \bar{\beta}} \cdot \gamma_{\beta \bar{\beta}, \bar{\beta}}) \cdot \gamma \bar{\beta} \alpha \cdot \bar{\alpha} A_{\bar{\gamma}} h_{\bar{\beta}} \chi_{\bar{\beta} \bar{\beta}} \cdot ((\beta_3 \tau_{\beta \bar{\beta}} \cdot \gamma_{\beta, \bar{\beta}}) \cdot \bar{\gamma} \bar{\beta} \alpha \chi_{\bar{\beta}} \cdot \bar{\gamma}) ,$$

és $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ ill. β_4 jelenti γ azon elemeit, amelyek-

re $\bar{\alpha} A_{\bar{\gamma}} h_{\beta} \in I_{\beta_1}$, $\bar{\alpha} A_{(\beta_1 \tau_{\beta \bar{\beta}} \cdot \gamma_{\beta, \bar{\beta}}) \cdot \gamma \bar{\beta} \alpha \chi_{\bar{\beta}} \cdot \bar{\gamma} h_{\beta \bar{\beta}}} \in I_{\beta_2}$,

$\bar{\alpha} A_{\bar{\gamma}} h_{\bar{\beta}} \in I_{\beta_3}$ illetve $(\bar{\alpha} \cdot \bar{\alpha} A_{\bar{\gamma}} h_{\bar{\beta}}) A_{\bar{\gamma}} h_{\beta} \in I_{\beta_4}$ teljesül.

Azt kell bizonyítanunk, hogy $\theta_1 = \theta_2$ és $\sigma_1 = \sigma_2$. Alkalmaz-

zuk σ_1 második tényezőjében (C3) (b)-t majd a 27. Lemmát.

Azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & ((\beta_1 \tau_{\beta \bar{\beta}} \cdot \gamma_{\beta, \bar{\beta}}) \cdot \gamma \bar{\beta} \alpha \chi_{\bar{\beta}} \cdot \bar{\gamma}) \bar{\beta} \alpha \chi_{\bar{\beta}} = \\ & = (\beta_1 \tau_{\beta \bar{\beta}} \cdot \gamma_{\beta, \bar{\beta}}) \bar{\beta} \alpha A_{\bar{\gamma} \bar{\beta} \alpha \chi_{\bar{\beta}} \cdot \bar{\gamma}} \chi_{\bar{\beta}} \cdot (\gamma \bar{\beta} \alpha \chi_{\bar{\beta}} \cdot \bar{\gamma}) \bar{\beta} \alpha \chi_{\bar{\beta}} . \end{aligned}$$

Felhasználva a (B3) tulajdonságot látható, hogy

$$(12)' \quad \sigma_1 = \xi \cdot (\gamma \bar{\beta} \alpha \chi_{\bar{\beta}} \cdot \bar{\gamma}) \bar{\beta} \alpha \chi_{\bar{\beta}} \cdot \bar{\gamma} ,$$

ahol

$$\xi = (\beta_2 \tau_{\beta \bar{\beta} \bar{\beta}} \cdot \gamma_{\beta \bar{\beta}, \bar{\beta}}) \cdot (\beta_1 \tau_{\beta \bar{\beta}} \cdot \gamma_{\beta, \bar{\beta}}) \bar{\beta} \alpha A_{\bar{\gamma} \bar{\beta} \alpha \chi_{\bar{\beta}} \cdot \bar{\gamma}} \chi_{\bar{\beta}} .$$

Először igazoljuk, hogy

$$(14) \quad \begin{aligned} & \xi \cdot (\gamma \bar{\beta} \alpha \chi_{\bar{\beta}} \cdot \bar{\gamma}) \bar{\beta} \alpha \chi_{\bar{\beta}} \cdot \bar{\gamma} = \\ & = \gamma \bar{\beta} \alpha \cdot \bar{\alpha} A_{\bar{\gamma}} h_{\bar{\beta}} \chi_{\bar{\beta} \bar{\beta}} \cdot ((\beta_3 \tau_{\beta \bar{\beta}} \cdot \gamma_{\beta, \bar{\beta}}) \cdot \bar{\gamma} \bar{\beta} \alpha \chi_{\bar{\beta}} \cdot \bar{\gamma}) , \end{aligned}$$

ahol $\mu = \beta_4 \tau_{\beta \bar{\beta}} \tau_{\bar{\beta} \bar{\beta}}$ és $\bar{\xi} = \gamma_{\mu} \cdot \gamma_{\bar{\beta}, \bar{\beta}}$. Az egyenlőség ellen-

őrzése közvetlen számolással történik. Minden sorban jelezzük,

hogy az adott átalakításhoz mely tulajdonságokat illetve lemmá-

kat használjuk. Tegyük fel, hogy $\bar{\alpha} A_{\bar{\gamma}} \in I_{\alpha_1}$ és $\bar{\gamma} \bar{\beta} \alpha \in \mathfrak{F}_{\alpha_1}$.



Ekkor $\beta_3 = \alpha_1 \tau_{\bar{3}}^{-1}$. Továbbá, $\varrho B_{\bar{a}} \cdot \bar{a} A_{\bar{g}} h_{\bar{3}} \in \mathcal{Y}_{\beta_3 \tau_{\bar{3}}}$. Így

$$\begin{aligned} \bar{\xi} \cdot (\varrho B_{\bar{a}} \chi_{\bar{3}} \cdot \bar{g}) B_{\bar{a}} \chi_{\bar{3}} \cdot \bar{g} &= / (C3) (b), 27. Lemma / \\ &= \bar{\xi} \cdot (\varrho B_{\bar{a}} \chi_{\bar{3}} B_{\bar{a}} A_{\bar{g}} \chi_{\bar{3}} \cdot \bar{g} B_{\bar{a}} \chi_{\bar{3}}) \cdot \bar{g} = / 23., 10. Lemma / \\ &= \bar{\xi} \cdot (\varrho B_{\bar{a}} \chi_{\bar{3}} B_{\bar{a}} A_{\bar{g}} \chi_{\bar{3}} \cdot (i_{\alpha_1 \tau_{\bar{3}}^{-1}} \chi_{\bar{3}} \chi_{\bar{3}} \cdot \bar{g} B_{\bar{a}} \chi_{\bar{3}})) \cdot \bar{g} = / (B3), 27. Lemma / \\ &= \bar{\xi} \cdot ((\varrho B_{\bar{a}} \chi_{\bar{3}} B_{\bar{a}} A_{\bar{g}} \cdot i_{\alpha_1 \tau_{\bar{3}}^{-1}} \chi_{\bar{3}}) \chi_{\bar{3}} \cdot \bar{g} B_{\bar{a}} \chi_{\bar{3}}) \cdot \bar{g} = / (D3) (b), (C2) (a) / \\ &= \bar{\xi} \cdot (\varrho B_{\bar{a}} \cdot \bar{a} A_{\bar{g}} h_{\bar{3}} \chi_{\bar{3}} \chi_{\bar{3}} \cdot \bar{g} B_{\bar{a}} \chi_{\bar{3}}) \cdot \bar{g} = / (B3), (D4) (b) / \\ &= ((\varrho B_{\bar{a}} \cdot \bar{a} A_{\bar{g}} h_{\bar{3}} B_{c_{\bar{3}, \bar{3}}} \chi_{\bar{3}} \bar{3} \cdot \gamma_{\bar{3}, \bar{3}}) \cdot \bar{g} B_{\bar{a}} \chi_{\bar{3}}) \cdot \bar{g} = / (C2) (a), (C4) / \\ &= (((\varrho B_{\bar{a}} \cdot \bar{a} A_{\bar{g}} h_{\bar{3}} \cdot i_{\alpha_1 \tau_{\bar{3}}^{-1}}) B_{c_{\bar{3}, \bar{3}}} \chi_{\bar{3}} \bar{3} \cdot \gamma_{\bar{3}, \bar{3}}) \cdot \bar{g} B_{\bar{a}} \chi_{\bar{3}}) \cdot \bar{g} = / (C3) (b), 27. Lemma / \\ &= (((\varrho B_{\bar{a}} \cdot \bar{a} A_{\bar{g}} h_{\bar{3}} B_{c_{\bar{3}, \bar{3}}} A_{i_{\alpha_1 \tau_{\bar{3}}^{-1}}} \chi_{\bar{3}} \bar{3} \cdot i_{\alpha_1 \tau_{\bar{3}}^{-1}} B_{c_{\bar{3}, \bar{3}}} \chi_{\bar{3}} \bar{3}) \cdot \gamma_{\bar{3}, \bar{3}}) \cdot \bar{g} B_{\bar{a}} \chi_{\bar{3}}) \cdot \bar{g} . \end{aligned}$$

Itt $i_{\alpha_1 \tau_{\bar{3}}^{-1}} B_{c_{\bar{3}, \bar{3}}} \sim i_{\alpha_1 \tau_{\bar{3}}^{-1}} = i_{\beta_3}$ a 13. Lemma szerint, ugyanis

$\alpha_1 \in Y_{\chi(\bar{3}) \chi(\bar{3})}$. Így $\alpha_1 \tau_{\bar{3}}^{-1} \in Y_{\chi(\bar{3} \bar{3})}$, azaz $\beta_3 \leq \chi(\bar{3} \bar{3})$.

Ebből egyrészt következik a 23. Lemma alapján, hogy $i_{\beta_3} B_{c_{\bar{3}, \bar{3}}} \chi_{\bar{3} \bar{3}} \in \mathcal{Y}_{\beta_3 \tau_{\bar{3}} \bar{3}}$ idempotens. (D5)-ből (B6) és (C1)(d) alapján látható

hogy $\gamma_{\bar{3}, \bar{3}} B_{i_{\beta_3 \tau_{\bar{3}} \bar{3}}} \in \mathcal{Y}_{\beta_3 \tau_{\bar{3}} \bar{3}}$. Így a 16. Lemma biztosítja, hogy

$i_{\beta_3} B_{c_{\bar{3}, \bar{3}}} \chi_{\bar{3} \bar{3}} \cdot \gamma_{\bar{3}, \bar{3}} \sim i_{\beta_3 \tau_{\bar{3}} \bar{3}} \cdot \gamma_{\bar{3}, \bar{3}}$. Mivel pedig a (D5) tulajdonság

szerint $(i_{\beta_3 \tau_{\bar{3}} \bar{3}} \cdot \gamma_{\bar{3}, \bar{3}})' \in \mathcal{Y}_{\beta_3 \tau_{\bar{3}} \bar{3}} = \mathcal{Y}_{\alpha_1 \tau_{\bar{3}}} = \mathcal{Y}(\bar{g} B_{\bar{a}} \chi_{\bar{3}})$,

azért a 11. Lemma alapján

$$(i_{\beta_3} B_{c_{\bar{3}, \bar{3}}} \chi_{\bar{3} \bar{3}} \cdot \gamma_{\bar{3}, \bar{3}}) \cdot \bar{g} B_{\bar{a}} \chi_{\bar{3}} = (i_{\beta_3 \tau_{\bar{3}} \bar{3}} \cdot \gamma_{\bar{3}, \bar{3}}) \cdot \bar{g} B_{\bar{a}} \chi_{\bar{3}} .$$

Másrészt kapjuk, hogy $c_{\bar{3}, \bar{3}} A_{i_{\beta_3}} \in I_{\beta_3}$. Így, mivel I_{β_3} bal-zéró félcsoporth, a (C2)(a) tulajdonság szerint

$$\varrho B_{\bar{a}} \cdot \bar{a} A_{\bar{g}} h_{\bar{3}} B_{c_{\bar{3}, \bar{3}}} A_{i_{\beta_3}} = \varrho B_{\bar{a}} \cdot \bar{a} A_{\bar{g}} h_{\bar{3}} .$$

(B3) alapján így az előbb kapott egyenlőségből következik a

(14) egyenlőség.

A $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$ egyenlőség bizonyítása duálisan történik, így

azt nem részletezzük. Mivel $\ell_1 \in I_{\beta_2}$ és $\ell_2 \in I_{\beta_4}$, azért ebből az egyenlőségből nyilvánvalóan adódik, hogy $\beta_2 = \beta_4$.

Röviden jelöljük ezt az γ -beli elemet β -val. A (14) egyenlőségből látható, hogy $(\varphi \mathcal{B}_{\bar{\alpha}} \chi_{\bar{\gamma}}) \mathcal{B}_{\bar{\alpha}} \chi_{\bar{\gamma}} \cdot \bar{\varphi}$ -t σ -val jelölve $\sigma_1 = \xi \cdot \sigma$ és $\sigma_2 = (\iota_{\beta \tau_{\beta \bar{\gamma}}} \cdot \gamma_{\beta, \bar{\gamma}}) \cdot \xi \cdot \sigma$. Másrészt $(\iota_{\beta_1 \tau_{\beta \bar{\gamma}}} \cdot \gamma_{\beta, \bar{\gamma}})' \in \mathcal{Y}_{\beta_1 \tau_{\beta \bar{\gamma}}}$ a (D5) tulajdonság szerint. Így a 16. Lemma felhasználásával látható, hogy

$$\begin{aligned} (\iota_{\beta_1 \tau_{\beta \bar{\gamma}}} \cdot \gamma_{\beta, \bar{\gamma}}) \mathcal{B}_{\bar{\alpha}} A_{\varphi \mathcal{B}_{\bar{\alpha}} \chi_{\bar{\gamma}} \cdot \bar{\varphi}} &\sim \iota_{\beta \tau_{\beta \bar{\gamma}}} (\iota_{\beta_1 \tau_{\beta \bar{\gamma}}} \cdot \gamma_{\beta, \bar{\gamma}}) = & /(\text{B3})/ \\ &= (\iota_{\beta \tau_{\beta \bar{\gamma}}} \cdot \iota_{\beta_1 \tau_{\beta \bar{\gamma}}}) \cdot \gamma_{\beta, \bar{\gamma}} = & /(\text{C4})/ \\ &= \iota_{\beta \tau_{\beta \bar{\gamma}}} \mathcal{B}_{\iota_{\beta_1 \tau_{\beta \bar{\gamma}}}} \cdot \gamma_{\beta, \bar{\gamma}} \sim & /16. \text{Lemma}/ \\ &\sim \iota_{\beta \tau_{\beta \bar{\gamma}}} \cdot \gamma_{\beta, \bar{\gamma}}, \end{aligned}$$

hiszen $\bar{\alpha} A_{\varphi \mathcal{B}_{\bar{\alpha}} \chi_{\bar{\gamma}} \cdot \bar{\varphi}} A(\iota_{\beta_1 \tau_{\beta \bar{\gamma}}} \cdot \gamma_{\beta, \bar{\gamma}}) \in I_{\beta \tau_{\beta \bar{\gamma}}}$. Az utolsó lépésben kihasználtuk, hogy a 13. Lemma szerint $\iota_{\beta \tau_{\beta \bar{\gamma}}} \mathcal{B}_{\iota_{\beta_1 \tau_{\beta \bar{\gamma}}}} \sim \sim \iota_{\beta \tau_{\beta \bar{\gamma}}}$, és így $\iota_{\beta \tau_{\beta \bar{\gamma}}} \mathcal{B}_{\iota_{\beta_1 \tau_{\beta \bar{\gamma}}}}$ egy $\mathcal{Y}_{\beta \tau_{\beta \bar{\gamma}}}$ -beli idempotens az 5. Lemma értelmében. Továbbá azt, hogy (D5), (B6) és (C1) (d) alapján $\gamma_{\beta, \bar{\gamma}} \mathcal{B}_{\iota_{\beta \tau_{\beta \bar{\gamma}}}} \in \mathcal{Y}_{\beta \tau_{\beta \bar{\gamma}}}$. Mivel $\beta \in \gamma_{\star(\beta \bar{\gamma})}$, azért $\beta \tau_{\beta \bar{\gamma}} \in \gamma_{\ell(\beta \bar{\gamma}) \star (\bar{\gamma})}$. Így $\beta \tau_{\beta \bar{\gamma}} \leq \ell(\beta \bar{\gamma}) \star (\bar{\gamma})$. A fenti gondolatmenethez hasonlóan (C4) és a 16. Lemma alapján adódik, hogy

$$\iota_{\beta \tau_{\beta \bar{\gamma}}} \cdot \gamma_{\beta, \bar{\gamma}} \sim \iota_{\beta \tau_{\beta \bar{\gamma}}} \mathcal{B}_{\iota_{\ell(\beta \bar{\gamma}) \star (\bar{\gamma})} \tau_{\bar{\gamma}}} \iota_{\ell(\beta \bar{\gamma}) \star (\bar{\gamma})} \cdot \gamma_{\beta, \bar{\gamma}}.$$

Itt $\star(\beta \bar{\gamma}) \tau_{\beta \bar{\gamma}} = \ell(\beta \bar{\gamma}) \star (\bar{\gamma})$. Így a 24. Lemma alapján, alkalmazva (D2)(b)-t,

$$\begin{aligned} (\iota_{\beta_1 \tau_{\beta \bar{\gamma}}} \cdot \gamma_{\beta, \bar{\gamma}}) \mathcal{B}_{\bar{\alpha}} A_{\varphi \mathcal{B}_{\bar{\alpha}} \chi_{\bar{\gamma}} \cdot \bar{\varphi}} \chi_{\bar{\gamma}} &\sim (\iota_{\beta \tau_{\beta \bar{\gamma}}} \cdot \gamma_{\beta, \bar{\gamma}}) \chi_{\bar{\gamma}} \sim \\ (15) \quad &\sim (\iota_{\beta \tau_{\beta \bar{\gamma}}} \mathcal{B}_{\iota_{\star(\beta \bar{\gamma})} \tau_{\beta \bar{\gamma}}} \iota_{\star(\beta \bar{\gamma}) \tau_{\beta \bar{\gamma}}} \cdot \iota_{\star(\beta \bar{\gamma}) \tau_{\beta \bar{\gamma}}} \cdot \gamma_{\beta, \bar{\gamma}}) \chi_{\bar{\gamma}} \sim \\ &\sim \iota_{\beta \tau_{\beta \bar{\gamma}}} \chi_{\bar{\gamma}} \cdot (\iota_{\star(\beta \bar{\gamma}) \tau_{\beta \bar{\gamma}}} \cdot \gamma_{\beta, \bar{\gamma}}) \chi_{\bar{\gamma}}. \end{aligned}$$

Itt $\iota_{\beta \tau_{\beta \bar{\gamma}}} \chi_{\bar{\gamma}} \in \mathcal{Y}_{\beta \tau_{\beta \bar{\gamma}}}$ idempotens. Másrészt a (D5) tulajdonság

szerint $\varepsilon = (\psi_{\beta\tau_{\bar{a}\bar{b}}\bar{c}} \cdot \bar{\tau}_{\bar{a}\bar{b},\bar{c}})' (\psi_{\beta\tau_{\bar{a}\bar{b}}\bar{c}} \cdot \bar{\tau}_{\bar{a}\bar{b},\bar{c}})$ is $\mathfrak{Y}_{\beta\tau_{\bar{a}\bar{b}}\bar{c}}$ -
beli idempotens, így újra a 16. Lemma biztosítja, hogy

$$\psi_{\beta\tau_{\bar{a}\bar{b}}\bar{c}} \chi_{\bar{c}} \cdot (\psi_{\tau_{\bar{a}\bar{b}}\bar{c}} \cdot \bar{\tau}_{\bar{a},\bar{c}}) \chi_{\bar{c}} \sim \varepsilon \cdot (\psi_{\tau_{\bar{a}\bar{b}}\bar{c}} \cdot \bar{\tau}_{\bar{a},\bar{c}}) \chi_{\bar{c}}.$$

Ugyanis (D3) (a) szerint $I(\psi_{\beta\tau_{\bar{a}\bar{b}}\bar{c}} \tau_{\bar{a}\bar{b}} A(\psi_{\tau_{\bar{a}\bar{b}}\bar{c}} \cdot \bar{\tau}_{\bar{a},\bar{c}}) \chi_{\bar{c}} \bar{h}_{\bar{c}}) =$
 $= I(\psi_{\beta\tau_{\bar{a}\bar{b}}\bar{c}} \tau_{\bar{a}\bar{b}} \bar{h}_{\bar{c}} A(\psi_{\tau_{\bar{a}\bar{b}}\bar{c}} \cdot \bar{\tau}_{\bar{a},\bar{c}}))$. Viszont (C3) (a) alapján

$$\psi_{\beta\tau_{\bar{a}\bar{b}}\bar{c}} \bar{h}_{\bar{c}} A(\psi_{\tau_{\bar{a}\bar{b}}\bar{c}} \cdot \bar{\tau}_{\bar{a},\bar{c}}) = \psi_{\beta\tau_{\bar{a}\bar{b}}\bar{c}} \bar{h}_{\bar{c}} A(\bar{\tau}_{\bar{a},\bar{c}}) A(\psi_{\tau_{\bar{a}\bar{b}}\bar{c}} \cdot \bar{\tau}_{\bar{a},\bar{c}}),$$

ahol (C1) (c) ill. (d), (B6) és (D5) következtében

$$\psi_{\beta\tau_{\bar{a}\bar{b}}\bar{c}} \bar{h}_{\bar{c}} A(\bar{\tau}_{\bar{a},\bar{c}}) \in I_{\beta\tau_{\bar{a}\bar{b}}\bar{c}} \quad \text{és (C1) (b) miatt}$$

$$\psi_{\beta\tau_{\bar{a}\bar{b}}\bar{c}} \bar{h}_{\bar{c}} A(\bar{\tau}_{\bar{a},\bar{c}}) A(\psi_{\tau_{\bar{a}\bar{b}}\bar{c}} \cdot \bar{\tau}_{\bar{a},\bar{c}}) \in I_{\beta\tau_{\bar{a}\bar{b}}\bar{c}}. \quad \text{Így}$$

$$\psi_{\beta\tau_{\bar{a}\bar{b}}\bar{c}} A(\psi_{\tau_{\bar{a}\bar{b}}\bar{c}} \cdot \bar{\tau}_{\bar{a},\bar{c}}) \chi_{\bar{c}} \in I_{\beta\tau_{\bar{a}\bar{b}}\bar{c}}. \quad \text{Ebből (15) alapján a 7.}$$

Lemma miatt következik, hogy

$$(\psi_{\beta\tau_{\bar{a}\bar{b}}\bar{c}} \cdot \bar{\tau}_{\bar{a},\bar{c}}) \mathfrak{B}_{\bar{a}} A_{\bar{a}} \mathfrak{B}_{\bar{a}} \chi_{\bar{c}} \cdot \bar{\tau}_{\bar{c}} = \varepsilon \cdot (\psi_{\tau_{\bar{a}\bar{b}}\bar{c}} \cdot \bar{\tau}_{\bar{a},\bar{c}}) \chi_{\bar{c}} \cdot \bar{\tau}_{\bar{c}},$$

ahol $\bar{\tau}_{\bar{c}} \in \mathfrak{Y}((\varepsilon \cdot (\psi_{\tau_{\bar{a}\bar{b}}\bar{c}} \cdot \bar{\tau}_{\bar{a},\bar{c}}) \chi_{\bar{c}})')$ idempotens. Így ε
definíciója miatt (D3) biztosítja, hogy

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{\bar{c}} &= (\psi_{\beta\tau_{\bar{a}\bar{b}}\bar{c}} \cdot \bar{\tau}_{\bar{a},\bar{c}}) \cdot (\psi_{\tau_{\bar{a}\bar{b}}\bar{c}} \cdot \bar{\tau}_{\bar{a},\bar{c}}) \chi_{\bar{c}} \cdot \bar{\tau}_{\bar{c}} = \\ &= \psi_{\beta\tau_{\bar{a}\bar{b}}\bar{c}} \cdot (\bar{\tau}_{\bar{a},\bar{c}} \cdot (\psi_{\tau_{\bar{a}\bar{b}}\bar{c}} \cdot \bar{\tau}_{\bar{a},\bar{c}}) \chi_{\bar{c}}) \cdot \bar{\tau}_{\bar{c}}. \end{aligned}$$

Mivel $\mathfrak{Y}((\varepsilon \cdot (\psi_{\tau_{\bar{a}\bar{b}}\bar{c}} \cdot \bar{\tau}_{\bar{a},\bar{c}}) \chi_{\bar{c}})') = \mathfrak{Y}((\psi_{\beta\tau_{\bar{a}\bar{b}}\bar{c}} \cdot (\bar{\tau}_{\bar{a},\bar{c}} \cdot (\psi_{\tau_{\bar{a}\bar{b}}\bar{c}} \cdot \bar{\tau}_{\bar{a},\bar{c}}) \chi_{\bar{c}})))'$
a 2. Lemma szerint, a 8. Lemma alapján $\bar{\tau}_{\bar{c}} \sim \psi_{\beta\tau_{\bar{a}\bar{b}}\bar{c}} \cdot (\bar{\tau}_{\bar{a},\bar{c}} \cdot (\psi_{\tau_{\bar{a}\bar{b}}\bar{c}} \cdot \bar{\tau}_{\bar{a},\bar{c}}) \chi_{\bar{c}})$.

Ez utóbbi viszont a (D6) tulajdonság miatt $\sim$ relációban áll

$$\psi_{\beta\tau_{\bar{a}\bar{b}}\bar{c}} \cdot (\bar{\tau}_{\bar{a},\bar{c}} \cdot \bar{\tau}_{\bar{a},\bar{c}}) \quad \text{-sal. Mivel } \mu = \beta\tau_{\bar{a}\bar{b}}\bar{c}, \text{ a 16.}$$

$$\text{Lemma és (D5) alapján } (\psi_{\beta\tau_{\bar{a}\bar{b}}\bar{c}} \cdot \bar{\tau}_{\bar{a},\bar{c}})' (\psi_{\beta\tau_{\bar{a}\bar{b}}\bar{c}} \cdot \bar{\tau}_{\bar{a},\bar{c}}) \cdot \bar{\tau}_{\bar{a},\bar{c}} \sim$$

$$\sim \psi_{\mu} \cdot \bar{\tau}_{\bar{a},\bar{c}} = \bar{\tau}_{\bar{c}}. \quad \text{A fentiekhez hasonlóan látható, hogy}$$

$$\text{ekkor } (\psi_{\beta\tau_{\bar{a}\bar{b}}\bar{c}} \cdot \bar{\tau}_{\bar{a},\bar{c}}) \bar{\tau}_{\bar{c}} \sim \psi_{\beta\tau_{\bar{a}\bar{b}}\bar{c}} \cdot (\bar{\tau}_{\bar{a},\bar{c}} \cdot \bar{\tau}_{\bar{a},\bar{c}}).$$

$$\text{Így a 11. Lemma következtében } \bar{\tau}_1 = \bar{\tau}_{\bar{c}} \cdot \bar{\tau}_{\bar{c}} = (\psi_{\beta\tau_{\bar{a}\bar{b}}\bar{c}} \cdot (\bar{\tau}_{\bar{a},\bar{c}} \cdot \bar{\tau}_{\bar{a},\bar{c}})) \cdot \bar{\tau}_{\bar{c}} =$$

$= \bar{\tau}_2$. Ezzel a lemma bizonyítását befejeztük.

29. LEMMA. **S** reguláris félcsoporth.

Bizonyítás. Azt fogjuk belátni, hogy ha $(a, s, \sigma) \in \mathbf{S}$, akkor tetszőleges $a' \in I_{\alpha'}^{\tau_{\ell(s)}}$ -re, ahol $\sigma' \in \mathfrak{Y}_{\alpha'}$, és σ tetszőleges σ^* inverzére teljesül, hogy $(a', s', \sigma^* \chi_{s'}) \in \mathbf{S}$ és

$$(16) \quad (a, s, \sigma \chi(a', s', \sigma^* \chi_{s'}))(a, s, \sigma) = (a, s, \sigma) .$$

Tegyük fel, hogy $\sigma \in \mathfrak{Y}_{\alpha}^{\bar{i}}, \sigma^* \in \mathfrak{Y}_{\alpha'}^{\bar{j}'}$, ahol $\alpha, \alpha' \in Y_{\ell(s)}$ és $s's = (\bar{i}_{\ell(s)}, \bar{j}')$, valamint legyen $a \in I_{\alpha \tau_s^{-1}}$ és $a' \in I_{\alpha'}^{\tau_{\ell(s)}}$. Akkor (D1) (b) alapján $\sigma^* \chi_{s'} \in \mathfrak{Y}_{\alpha' \tau_{s'}^{-1}}^{\bar{j}'}$, ahol $((\bar{i}_{\ell(s)}, \bar{j}'))'((\bar{i}_{\ell(s)}, \bar{j}'))' = (\bar{i}_{\tau(s)}, \bar{\ell})$.

Nyilván $(\bar{i}_{\tau(s)}, \bar{\ell}) \mathcal{L} s''(\bar{i}_{\ell(s)}, \bar{j}')s' = s''s' = (\bar{i}_{\tau(s)}, \bar{j}_{\tau(s)})$.

Igy $\bar{\ell} = \bar{j}_{\tau(s)}$ és $(\bar{i}_{\tau(s)}, \bar{\ell}) = s''s'$. Tehát valóban $(a', s', \sigma^* \chi_{s'}) \in \mathbf{S}$.

(16) igazolásához a következő I- és $\mathfrak{Y}$ -beli egyenlőségeket kell leellenőrizni:

$$(17) \quad a \cdot (a' \cdot a A_{\sigma^* \chi_{s'}} \cdot h_{s'}) A_{\sigma} h_s = a ,$$

$$(18) \quad (\iota_{\beta \tau_s} \cdot \gamma_{s's}) \cdot ((\iota_{\beta_1 \tau_{s's'}} \cdot \gamma_{s's'}) \cdot \sigma B_{\alpha'} \chi_{s'} \cdot \sigma^* \chi_{s'}) B_{\alpha} \chi_s \cdot \sigma = \sigma ,$$

ahol $a' A_{\sigma} h_s \in I_{\beta_1}$ és $a A_{(\iota_{\beta_1 \tau_{s's'}} \cdot \gamma_{s's'}) \cdot \sigma B_{\alpha'} \chi_{s'} \cdot \sigma^* \chi_{s'}} h_{s's'} \in I_{\beta}$.

A (D3) (a) tulajdonság alapján $a A_{\sigma^* \chi_{s'}} h_{s'} = \iota_{\alpha' \tau_s^{-1}} h_{s'} \cdot a h_{s'} A_{\sigma^*}$.

Itt $\iota_{\alpha' \tau_s^{-1}} h_{s'}$ és $a h_{s'} A_{\sigma^*} \in I_{\alpha'}$. Ez utóbbi (C1) (c)-ből következik, hiszen $\sigma^* \in \mathfrak{Y}_{\alpha'}$ és $a h_{s'} \in I_{\alpha \tau_s^{-1} \tau_{s'}^{-1}} = I_{\alpha}$. Mivel $I_{\alpha'}$ balzéró félcsoporth, így $a' \cdot a A_{\sigma^* \chi_{s'}} h_{s'} = a'$. Ujra (C1)(c) alapján $a' A_{\sigma} \in I_{\alpha}$, ezért $a' A_{\sigma} h_s \in I_{\alpha \tau_s^{-1}}$. És minthogy $I_{\alpha \tau_s^{-1}}$ is balzéró félcsoporth, a (17) egyenlőség valóban teljesül. Definíció szerint $\beta_1 = \alpha \tau_s^{-1} \in Y_{\tau(s)}$, így (D8), (C4) és (C1)(c) következtében

$$\iota_{\beta_1 \tau_{s's'}} \cdot \gamma_{s's'} = \iota_{\beta_1} \cdot \iota_{\tau(s)} = \iota_{\beta_1} B_{\iota_{\tau(s)}} \sim \iota_{\beta_1} .$$

Mivel $\sigma B_{\alpha} \sim \sigma \in \mathcal{Y}_{\alpha}$ (Cl)(c) szerint, azért $\sigma B_{\alpha} \chi_{\beta_1} \in \mathcal{Y}_{\beta_1}$.
Igy a 11. Lemma értelmében

$$(19) \quad (\chi_{\beta_1} \tau_{\beta_1} \cdot \tau_{\beta_1} \chi_{\beta_1}) \cdot \sigma B_{\alpha} \chi_{\beta_1} = \sigma B_{\alpha} \chi_{\beta_1}.$$

A 27. és 11. Lemma következtében

$$(20) \quad \sigma B_{\alpha} \chi_{\beta_1} \cdot \sigma^* \chi_{\beta_1} = (\sigma B_{\alpha} \cdot \sigma^*) \chi_{\beta_1} = (\sigma \cdot \sigma^*) \chi_{\beta_1},$$

ahol $\sigma \cdot \sigma^* \in \mathcal{Y}_{\alpha}$ idempotens. Igy a 23. Lemma szerint $(\sigma \cdot \sigma^*) \chi_{\beta_1} \in \mathcal{Y}_{\alpha \tau_{\beta_1}^{-1}}$ idempotens. (19) miatt tehát $\beta = \beta_1$ és $\beta \tau_{\beta} = \alpha \in Y_{\mathcal{L}(\beta)}$.
A (D8) tulajdonság miatt ekkor a 16. Lemma biztosítja, hogy

$$\chi_{\alpha} \cdot \tau_{\beta \beta_1} \sim \tau_{\beta \beta_1} \chi_{\alpha} = \chi_{\alpha}.$$

Ezért (19) és (20) alapján a (18) egyenlőség a következőre redukálódik:

$$(18)' \quad \chi_{\alpha} \cdot (\sigma \cdot \sigma^*) \chi_{\beta_1} B_{\alpha} \chi_{\beta} \cdot \sigma = \sigma.$$

Mivel $(\sigma \cdot \sigma^*) \chi_{\beta_1} \in \mathcal{Y}_{\alpha \tau_{\beta_1}^{-1}}$ idempotens és $\alpha \in I_{\alpha \tau_{\beta_1}^{-1}}$, azért $(\sigma \cdot \sigma^*) \chi_{\beta_1} B_{\alpha} \sim (\sigma \cdot \sigma^*) \chi_{\beta_1}$ a (Cl)(c) tulajdonság szerint. Azaz az 5. Lemma miatt $(\sigma \cdot \sigma^*) \chi_{\beta_1} B_{\alpha} \in \mathcal{Y}_{\alpha \tau_{\beta_1}^{-1}}$ idempotens. Ujra alkalmazva a 23. Lemmát, ebből kapjuk, hogy $(\sigma \cdot \sigma^*) \chi_{\beta_1} B_{\alpha} \chi_{\beta} \in \mathcal{Y}_{\alpha}$ idempotens. Igy a 10. Lemma következtében (18)' valóban fennáll.

Vegyük észre, hogy az a $\mathcal{L}$ reláció, amely $\mathbf{S}$ -en ugy van definiálva, hogy

$$(21) \quad (\alpha, \beta, \varphi) \mathcal{L} (\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\varphi}) \quad \text{akkor és csak akkor, ha } \beta = \bar{\beta},$$

kongruencia reláció. Az idempotens $\mathcal{L}$ -osztályok egyesítése nyilván

$$\mathbf{C} = \{(\alpha, e, \varphi) \in \mathbf{S} : e \text{ idempotens elem } S\text{-ben}\}.$$

30. LEMMA. A $\Phi: \mathbf{C} \rightarrow \mathcal{L}(I, \mathcal{V}; A, \mathcal{B})$, $(a, e, \varphi)\Phi = (a, \varphi)$
leképezés izomorfizmus $\mathbf{C}$ -ről $\mathcal{L}(I, \mathcal{V}; A, \mathcal{B})$ -re.

Bizonyítás. Az, hogy Φ kölcsönösen egyértelmű ráképezés, abból adódik, hogy ha $(a, \varphi) \in \mathcal{L}(I, \mathcal{V}; A, \mathcal{B})$, ahol $a \in I_{\alpha}^{\bar{i}}$ és $\varphi \in \mathcal{V}_{\alpha}^{\bar{j}}$, akkor $e = (\bar{i}, \bar{j})$ az egyetlen olyan S -beli idempotens, hogy $(a, e, \varphi) \in \mathbf{S}$ és nyilván $(a, e, \varphi)\Phi = (a, \varphi)$. Tegyük fel, hogy $e = (\bar{i}, \bar{j})$ és $\bar{e} = (\bar{i}, \bar{j})$ két idempotens elem S -ben. Továbbá legyen $a \in I_{\alpha}^{\bar{i}}$, $\varphi \in \mathcal{V}_{\alpha}^{\bar{j}}$ illetve $\bar{a} \in I_{\bar{\alpha}}^{\bar{i}}$ és $\bar{\varphi} \in \mathcal{V}_{\bar{\alpha}}^{\bar{j}}$, ahol $\alpha \in Y_{\ell(e)}$ és $\bar{\alpha} \in Y_{\ell(\bar{e})}$. Ekkor (D8) illetve a 13. és 16. Lemma felhasználásával kapjuk, hogy $\gamma_{e,e} \mathcal{B}_{i_{\alpha}} = i_{\alpha}$, illetve, mivel $i_{\bar{\alpha}} \mathcal{B}_{c_{\bar{e},\bar{e}}} \sim i_{\bar{\alpha}}$, azért $i_{\bar{\alpha}} \mathcal{B}_{c_{\bar{e},\bar{e}}} \cdot \gamma_{\bar{e},\bar{e}} \sim \gamma_{\bar{e},\bar{e}} \mathcal{B}_{i_{\bar{\alpha}}} = i_{\bar{\alpha}}$. Tehát $i_{\bar{\alpha}} \mathcal{B}_{c_{\bar{e},\bar{e}}} \cdot \gamma_{\bar{e},\bar{e}} \in \mathcal{V}_{\bar{\alpha}}$ idempotens. Így az is teljesül, hogy $i_{\alpha} A_{\gamma_{e,e}} \in I_{\alpha}$ illetve $c_{\bar{e},\bar{e}} A_{i_{\bar{\alpha}}} \in I_{\bar{\alpha}}$. Ezek felhasználásával a (D7)(a) illetve (D7)(b) tulajdonságok alapján adódik a következő két egyenlőség:

$$\begin{aligned} a \cdot \bar{a} A_{\sigma} h_e &= && /(\text{D7})(a)/ \\ &= a \cdot (c_{e,e} \cdot \bar{a} A_{\sigma} A_{\gamma_{e,e}}) = && /(\text{C4}), (\text{C3})(a)/ \\ &= a \cdot (c_{e,e} \cdot (i_{\alpha} \cdot \bar{a} A_{\sigma}) A_{\gamma_{e,e}}) = && /(\text{C2})(b)/ \\ &= a \cdot (c_{e,e} \cdot (i_{\alpha} A_{\gamma_{e,e}} \cdot \bar{a} A_{\sigma} A_{\gamma_{e,e} \mathcal{B}_{i_{\alpha}}})) = && /(\text{C3})(a), (\text{D8}), (\text{B3})/ \\ &= a \cdot (c_{e,e} \cdot i_{\alpha} A_{\gamma_{e,e}}) \cdot \bar{a} A_{\sigma} = && /I_{\alpha} \text{ balzéró fcs.}/ \\ &= a \cdot \bar{a} A_{\sigma} \end{aligned}$$

illetve

$$\begin{aligned} \sigma \mathcal{B}_{\bar{\alpha}} \gamma_{\bar{e}} \cdot \bar{\sigma} &= && /(\text{D7})(b)/ \\ &= (\sigma \mathcal{B}_{\bar{\alpha}} \mathcal{B}_{c_{\bar{e},\bar{e}}} \cdot \gamma_{\bar{e},\bar{e}}) \cdot \bar{\sigma} = && /(\text{C4}), (\text{C2})(a)/ \\ &= ((\sigma \mathcal{B}_{\bar{\alpha}} \cdot i_{\bar{\alpha}}) \mathcal{B}_{c_{\bar{e},\bar{e}}} \cdot \gamma_{\bar{e},\bar{e}}) \cdot \bar{\sigma} = && /(\text{C3})(b)/ \end{aligned}$$

$$= ((\sigma \mathcal{B}_{\bar{\alpha}} \mathcal{B}_{\mathcal{C}_{\bar{e}, \bar{e}}} \cdot \iota_{\bar{\alpha}} \mathcal{B}_{\mathcal{C}_{\bar{e}, \bar{e}}}) \cdot \mathcal{J}_{\bar{e}, \bar{e}}) \cdot \bar{\sigma} = \quad /(\text{C2})(a), I_{\bar{\alpha}} \text{ balzéró félcs.}, (\text{B3})/$$

$$= \sigma \mathcal{B}_{\bar{\alpha}} \cdot ((\iota_{\bar{\alpha}} \mathcal{B}_{\mathcal{C}_{\bar{e}, \bar{e}}} \cdot \mathcal{J}_{\bar{e}, \bar{e}}) \cdot \bar{\sigma}) = \quad /10. \text{Lemma}/$$

$$= \sigma \mathcal{B}_{\bar{\alpha}} \cdot \bar{\sigma} \quad .$$

Ez a két egyenlőség éppen azt biztosítja, hogy $((\alpha, e, \sigma)(\bar{\alpha}, \bar{e}, \bar{\sigma}))\Phi = (\alpha, e, \sigma)\Phi \cdot (\bar{\alpha}, \bar{e}, \bar{\sigma})\Phi$, azaz Φ izomorfizmus.

A 19. Lemma szerint $\mathcal{L}(I, \mathcal{V}; A, \mathcal{B})$ ortodox félcsoporth. Így **C** is az, amiből következik, hogy **S** idempotensei részfélcsoporthot alkotnak. A 29. Lemma alapján tehát **S** ortodox félcsoporth. Továbbá a 21. Lemma biztosítja, hogy a (21)-ben definiált $\mathcal{L}$ kongruencia $(\bar{\mathcal{C}}, \mathcal{L}')$ -parcelláló **S**-en, ahol (6), (9) és a 21. Lemma jelöléseit használva $\bar{\mathcal{C}} = \bar{\mathcal{B}}\Phi^{-1}$ és $\mathcal{L}'$ a **B**-n értelmezett $\mathcal{D} \cap \mathcal{C} | \mathcal{B}$ kongruenciának a Φ^{-1} mellett megfelelő kongruencia.

31. TÉTEL. Legyen $\bar{Y}, Y, \bar{I}, \bar{\mathcal{V}}, \bar{A}, \bar{\mathcal{B}}, I, \mathcal{V}, A$ és $\mathcal{B}$ olyan, mint a 22. Tételben. Tegyük fel, hogy (C4) teljesül $A, \mathcal{B}$ -re. S legyen egy ortodox félcsoporth a $\mathcal{B}(\bar{I}, \bar{\mathcal{V}}; \bar{A}, \bar{\mathcal{B}})$ idempotens köteggel. Legyen továbbá $\mathcal{K}, \chi, \mathcal{C}, \gamma$ egy $(S, I, \mathcal{V})$ -négyes. Ekkor az $\mathcal{J}(S, I, \mathcal{V}; \mathcal{K}, \chi, \mathcal{C}, \gamma)$ félcsoporth ortodox és rajta a (21)-ben definiált $\mathcal{L}$ reláció olyan erős részköteg-parcelláló kongruencia, amely szerint faktorfélcsoporth izomorf S -sel.

Bizonyítás. A tétel kimondása előtti gondolatmenet értelmében azt kell csak igazolnunk, hogy $\mathcal{L}$ erős. Megmutatjuk, hogy minden $s \in S$ -re létezik $(\alpha, s, \sigma) \in \mathbf{S}$ úgy, hogy $\alpha \in I_{\pi(s)}$, $\sigma \in \mathcal{V}_{\ell(s)}$ idempotens és $(\alpha, s, \sigma) \mathcal{L}$ - és $\mathcal{A}$ -ekvivalens $\bar{\mathcal{C}}$ -beli idempotensekkel. A 3.4. Lemma miatt szorítkozhatunk azokra az elemekre, amelyekre $(\bar{\iota}_{\pi(s)}, \bar{\jmath}_{\pi(s)}) \mathcal{A} s \mathcal{L} (\bar{\iota}_{\ell(s)}, \bar{\jmath}_{\ell(s)})$

teljesül. Ezek éppen azok az s elemek, amelyekre $s = s''$.
 Tegyük fel tehát, hogy s ilyen és $a \in I_{\pi(s)}^{\tau_{\pi(s)}}$. Ekkor $(a, s, i_{\ell(s)}) \in \mathbf{S}$
 és a 29. Lemma bizonyítása során láttuk, hogy $(a', s', i_{\ell(s)} \chi_s) \in \mathbf{S}$
 és (16) fennáll tetszőleges $a' \in I_{\ell(s)}^{\tau_{\ell(s)}}$ esetén. (20)-ból
 következik, hogy ekkor $(a, s, i_{\ell(s)}) \chi (a', s', i_{\ell(s)} \chi_s) = (\theta, ss', \varepsilon)$
 olyan idempotens $\mathbf{S}$ -ben, hogy $\varepsilon \in \mathfrak{Y}_{\pi(s)}$. Így $a = \theta$ és

$$(22) \quad (a, s, i_{\ell(s)}) \chi (a', s', i_{\ell(s)} \chi_s) = (a, ss', \varepsilon).$$

Ugyanezzel a gondolatmenettel látható $s = s''$ miatt, hogy

$$(16)', \quad (a', s', i_{\ell(s)} \chi_s) \chi (a, s, i_{\ell(s)} \chi_s) \chi (a', s', i_{\ell(s)} \chi_s) = (a', s', i_{\ell(s)} \chi_s).$$

Ugyanis a 23. Lemma szerint $i_{\ell(s)} \chi_s$ önmagának inverze.
 Továbbá,

$$(22)', \quad (a', s', i_{\ell(s)} \chi_s) \chi (a, s, i_{\ell(s)} \chi_s) \chi_s = (a', s's, \varepsilon_1)$$

olyan idempotens, hogy $\varepsilon_1 \in \mathfrak{Y}_{\ell(s)}$. Vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned} i_{\ell(s)} \chi_s \chi_s &= & // (D4)(b) / \\ &= (i_{\ell(s)} \cdot \gamma_{s',s}) \cdot i_{\ell(s)} B_{c_{s',s}} \chi_{ss'} \cdot \gamma_{s',s} = & // (D7)(b) / \\ &= (i_{\ell(s)} \cdot \gamma_{s',s}) \cdot i_{\ell(s)} B_{c_{s',s}} B_{c_{ss',s's}} \cdot \gamma_{ss',s's} \cdot \gamma_{s',s}. \end{aligned}$$

Itt $c_{s',s}, c_{ss',s's} \in I_{\ell(s)}$, így (C4) és (C2)(a) alapján kapjuk,
 hogy $i_{\ell(s)} B_{c_{s',s}} B_{c_{ss',s's}} = i_{\ell(s)} B_{i_{\ell(s)} \cdot c_{s',s} \cdot c_{ss',s's}} = i_{\ell(s)} B_{i_{\ell(s)}} = i_{\ell(s)}$.
 Mivel $\gamma_{ss',s's} \in \mathfrak{Y}_{\ell(s)}$, ugyancsak (C4) miatt (D8) biztosítja,
 hogy $i_{\ell(s)} \gamma_{ss',s's} = \gamma_{ss',s's} B_{i_{\ell(s)}} = i_{\ell(s)}$. És mivel $s = s''$,
 (D8) szerint $\gamma_{s',s} = i_{\ell(s)}$. Tehát azt kaptuk, hogy $i_{\ell(s)} \chi_s \chi_s =$
 $= i_{\ell(s)}$. Akkor viszont (16) és (16)', azt jelenti, hogy
 $(a, s, i_{\ell(s)})$ és $(a', s', i_{\ell(s)} \chi_s)$ egymás inverzei. (22) és

(22)' pedig biztosítja, hogy $(\alpha, s, s', \varepsilon) \mathcal{R} (\alpha, s, v_{\ell(s)}) \mathcal{L} (\alpha', s', s', \varepsilon_1)$ ahol $(\alpha, s, s', \varepsilon)$ és $(\alpha', s', s', \varepsilon_1) \in \bar{\mathcal{C}}$. Ezt akartuk bizonyítani.

A következőkben megmutatjuk, hogy egy S ortodox félcsoporth minden erős részköteg-parcelláló bővítése izomorf valamely $\mathcal{V}(S, I, \mathfrak{F}; \mathfrak{K}, \chi, c, \gamma)$ félcsoporthal.

Azt mondjuk, hogy a T ortodox félcsoporth az S erős részköteg-parcelláló bővítése, ha létezik T -n egy olyan π erős részköteg-parcelláló kongruencia, hogy T/π izomorf S -sel.

A tétel kimondása előtt egy lemmát igazolunk, amely megkönnyíti a későbbi számolásokat.

32. LEMMA. Legyen T egy ortodox félcsoporth, amelynek idempotens kötege az $E_\alpha (\alpha \in Y)$ derékszögű kötegek Y félhálójaja. Ha $x, y \in E_\alpha, u, u'$ egymás inverzei T -ben úgy, hogy $E_\alpha \leq F(u'u)$ és $z \in F(uxu')$, akkor $zuxa = zua$ teljesül minden olyan $a (\in T)$ elemre, amelyre $y \mathcal{R} a$.

Bizonyítás. A feltevések mellett $F(z) = F(uxu') = F(uxyu') = F(uyu')$. Továbbá $E_\alpha \leq F(u'u)$ miatt $yu'u y = y$. Ezek alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} zuxa &= zuxya = zuxyu'u ya = z(uxyu')(uyu') ya = \\ &= z(uyu') ya = zu ya = zua \end{aligned}$$

33. TÉTEL. Tegyük fel, hogy T egy ortodox félcsoporth és π erős részköteg-parcelláló kongruencia T -n. Jelöljük T/π -t S -sel. Ekkor létezik olyan, a 22. Tétel feltételeit és (C4)-et kielégítő $\bar{Y}, \bar{Y}, \bar{I}, \bar{\mathfrak{F}}, \bar{A}, \bar{\mathfrak{B}}, \bar{I}, \bar{\mathfrak{F}}, \bar{A}, \bar{\mathfrak{B}}$, valamint olyan $\mathfrak{K}, \chi, c, \gamma$ $(S, I, \mathfrak{F})$ -négyes, hogy T izomorf $\mathcal{V}(S, I, \mathfrak{F}; \mathfrak{K}, \chi, c, \gamma)$ -val.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy π egy $(\bar{\mathfrak{B}}, \delta)$ -parcelláló kongruencia T -n, ahol $\bar{\mathfrak{B}}, \delta$ asszociált pár T idempotens kö-



tegében, $\mathcal{B}$ -ben. Jelölje $\mathcal{Y}$ a $\mathcal{B}/\mathcal{Q}$ félhálót. A 3.11. és 12. Lemma alapján $\mathcal{B}/\mathcal{Q} = \bar{\mathcal{Y}}$ részfélhálója $\mathcal{Y}$ -nak, és $\mathcal{Y} = \bigcup_{\bar{\alpha} \in \bar{\mathcal{Y}}} \mathcal{Y}_{\bar{\alpha}}$, ahol $\mathcal{Y}_{\bar{\alpha}}$ egy egységelemes félháló az $\bar{\alpha}$ egységelemmel. Mivel π erős részköteg-parcelláló kongruencia, azért $\mathcal{S}$ idempotens kötege, $\mathcal{E}$ izomorf $\mathcal{B}/\bar{\delta}$ -sal. Így $\mathcal{E}$ valamely $\mathcal{E}_{\bar{\alpha}}$ ($\bar{\alpha} \in \bar{\mathcal{Y}}$) derékszögű kötegek $\bar{\mathcal{Y}}$ félhálója. Minden $\bar{\alpha} (\in \bar{\mathcal{Y}})$ -ra válasszunk ki és rögzítsünk le egy $e_{\bar{\alpha}}$ elemet $\mathcal{E}_{\bar{\alpha}}$ -ban. Továbbá minden $\alpha (\in \mathcal{Y})$ -ra válasszunk ki és rögzítsünk le egy v_{α} elemet az α $\mathcal{Q}$ -osztályban úgy, hogy $v_{\alpha} \pi e_{\bar{\alpha}}$, ha csak $\alpha \in \mathcal{Y}_{\bar{\alpha}}$. Ez megtehető a 3.4. Lemma szerint. Ha $\bar{\alpha} \in \bar{\mathcal{Y}}$, akkor legyen $\bar{\mathcal{I}}_{\bar{\alpha}}$ illetve $\bar{\mathcal{F}}_{\bar{\alpha}}$ az $e_{\bar{\alpha}}$ -t tartalmazó $\mathcal{L}$ - illetve $\mathcal{Q}$ -osztály $\mathcal{E}_{\bar{\alpha}}$ -ban. Továbbá, ha $\alpha \in \mathcal{Y}$, akkor jelölje $\mathcal{I}_{\alpha}$ az v_{α} -t tartalmazó $\mathcal{L}$ -osztályt $\mathcal{B}$ -ben, $\mathcal{F}_{\alpha}$ pedig mindazon $\sigma \in \mathcal{T}$ -beli elemek halmazát, amelyekre $\sigma \pi$ idempotens és $v_{\alpha} \mathcal{Q} \sigma$. Jelöljön $\mathcal{I}$ a $\mathcal{F} = \bigcup \{ \mathcal{F}_{\alpha} : \alpha \in \mathcal{Y} \}$ halmazon egy olyan transzformációt, amely minden elemhez hozzárendeli egy inverzét. Nyilván létezik ilyen transzformáció $\mathcal{F}$ -n. Definiáljunk az $\bar{\mathcal{I}} = \bigcup \{ \bar{\mathcal{I}}_{\bar{\alpha}} : \bar{\alpha} \in \bar{\mathcal{Y}} \}$ halmazon parciális műveletet úgy, hogy ha $\alpha \in \bar{\mathcal{I}}_{\bar{\alpha}}$, $\beta \in \bar{\mathcal{I}}_{\bar{\beta}}$, akkor $\alpha \cdot \beta$ akkor és csak akkor legyen értelmezve, ha $\bar{\alpha} \geq \bar{\beta}$, és ha $\bar{\alpha} \geq \bar{\beta}$, akkor $\alpha \cdot \beta$ jelentse az $\mathcal{E}$ -beli szorzatot. Világos, hogy $\alpha \cdot \beta \in \mathcal{E}_{\bar{\beta}}$, tehát $\alpha \cdot \beta \in \bar{\mathcal{I}}_{\bar{\beta}}$. Ezzel a művelettel $\bar{\mathcal{I}}$ az $\bar{\mathcal{I}}_{\bar{\alpha}}$ ($\bar{\alpha} \in \bar{\mathcal{Y}}$) balzéró félcsoporthok alsó asszociatív $\bar{\mathcal{Y}}$ félhálója. Hasonlóan definiálható szorzás az $\mathcal{I} = \bigcup \{ \mathcal{I}_{\alpha} : \alpha \in \mathcal{Y} \}$ halmazon, amellyel $\mathcal{I}$ az $\mathcal{I}_{\alpha}$ ($\alpha \in \mathcal{Y}$) balzéró félcsoporthok alsó asszociatív $\mathcal{Y}$ félhálója lesz. Jelöljük $\bar{\mathcal{I}}^{\bar{\tau}}$ -sal $\bar{\mathcal{I}}$ -nek azt a részhalmazát, amelynek a $\pi^{\sharp}$ melletti képe $\bar{\tau}$. Az v_{α} ($\alpha \in \mathcal{Y}$) elemek választása miatt $\mathcal{I}$ a diszjunkt $\bar{\mathcal{I}}^{\bar{\tau}}$ ($\bar{\tau} \in \bar{\mathcal{I}}$) részhalmazok egyesítése. Legyen $\bar{\mathcal{I}}_{\alpha}^{\bar{\tau}} = \bar{\mathcal{I}}^{\bar{\tau}} \cap \bar{\mathcal{I}}_{\alpha}$, ha $\alpha \in \mathcal{Y}_{\bar{\alpha}}$ és $\bar{\tau} \in \bar{\mathcal{I}}_{\bar{\alpha}}$.

Ezek a halmazok nem üresek, és mivel κ kongruencia, közvetlenül látható, hogy $I = \bigcup \{I_{\alpha}^{\bar{\gamma}} : (\bar{\gamma}, \alpha) \in \bar{I} \times_{\bar{\gamma}} Y\}$ és I parciális balköteggel $\bar{I} \times_{\bar{\gamma}} Y$ felett. Definíáljuk $\bar{Y}$ -t $\bar{I}$ -sal duálisan. Nyilván $\bar{Y}$ a $\bar{Y}_{\alpha} (\alpha \in \bar{Y})$ jobbzeró félcsoporthok felső asszociatív $\bar{Y}$ félhálójára. A $\bar{Y}$ halmazon pedig értelmezzünk parciális műveletet az alábbi módon: ha $\varrho \in \bar{Y}_{\alpha}, \varrho' \in \bar{Y}_{\alpha'}, \sigma \in \bar{Y}_{\beta}, \sigma' \in \bar{Y}_{\beta'}$ és $\alpha \leq \beta$, akkor jelentse $\varrho \cdot \sigma$ a T -beli szorzatot*. Nyilván $\varrho \cdot \sigma \in \bar{Y}_{\alpha}$, így $\varrho \cdot \sigma \in \bar{Y}_{\alpha}$. $\bar{Y}^{\bar{J}}$ -sal jelölve azon $\bar{Y}$ -beli elemek halmazát, amelyek $\kappa^{\bar{J}}$ melletti képe $\bar{J}$, ahol $\bar{J} \in \bar{Y}$, az I -hez hasonlóan látható, hogy $\bar{Y}^{\bar{J}}$ nem üres és $\bar{Y} = \bigcup \{\bar{Y}^{\bar{J}} : \bar{J} \in \bar{Y}\}$. Továbbá, ha $(\bar{J}, \alpha) \in \bar{Y} \times_{\bar{\gamma}} Y$, akkor $\bar{Y}_{\alpha}^{\bar{J}} = \bar{Y}^{\bar{J}} \cap \bar{Y}_{\alpha} \neq \emptyset$. Mivel κ kongruencia, $\varrho \cdot \sigma \in \bar{Y}^{\bar{J} \cdot \bar{K}}$, ha csak $\varrho \in \bar{Y}^{\bar{J}}, \sigma \in \bar{Y}^{\bar{K}}$ és szorzatuk értelmezve van $\bar{Y}$ -ben. Mivel $(\varrho \cdot \sigma)' \sim \sigma' \varrho'$ a T félcsoporthban és $(\sigma' \sigma) \sigma' \varrho' = \sigma' \varrho'$, azért $\bar{Y}((\varrho \cdot \sigma)') \leq \bar{Y}(\sigma' \sigma) = \bar{Y}(\sigma')$. Ezzel (B2) teljesülését beláttuk. A (B1) és (B3)-(B5) tulajdonságokat $\bar{Y}$ triviálisan kielégíti, (B6) pedig azon mulik, hogy ha $\varrho \in \bar{Y}_{\alpha}, \sigma \in \bar{Y}_{\beta}$ idempotensek és $\gamma \in \bar{Y}_{\gamma}, \gamma' \in \bar{Y}_{\gamma'}$ úgy, hogy $\alpha \leq \gamma$ és $\beta \leq \gamma'$, akkor $\gamma' \varrho \gamma \leq \sigma$ a B köteggben akkor és csak akkor, ha $\gamma \sigma \gamma' \leq \varrho$. Ezzel igazoltuk, hogy $\bar{Y}$ jobbortodox parciális félcsoporth $\bar{Y} \times_{\bar{\gamma}} Y$ felett.

Az S félcsoporth tetszőleges s elemére s' jelölje s -nek azt az inverzét, amelyre $e_{\kappa(s)} \leq s' \leq e_{\ell(s)}$.

A T félcsoporth κ -osztályainak válasszuk ki egy olyan $\{u_s : s \in S, u_s \kappa s\} \subseteq S_{\bar{S}}$ reprezentáns rendszerét, hogy $u_e \in \bar{S}$, ha csak $e \in E$, és valahányszor s és s^* egymás inverzei S -ben, mindannyiszor u_s és u_{s^*} egymás inverzei, valamint $u_s u_{s^*} = u_{s s^*}$ és $u_{s^*} u_s = u_{s^* s}$. A 4.7. Lemma szerint ilyen reprezentáns rendszer létezik. Feltehető, hogy $u_{e_{\alpha}} = v_{\alpha}$ minden

* Egyébként pedig ne legyen értelmezve.

$\bar{\alpha} (\in \bar{Y})$ -ra. Speciálisan, $i_{\pi(s)} \mathcal{L} u_{s'} \mathcal{Q} i_{\ell(s)}$.

Jelölje τ_s azt az $\pi(s)Y \rightarrow \ell(s)Y$ izomorfizmust, amelyre teljesül, hogy $u_{s'} i_{\alpha} u_s \mathcal{Q} i_{\alpha} \tau_s$, hacsak $\alpha \leq \pi(s)$. Nyilván τ_e az $\pi(e)Y$ identikus automorfizmusa, ha $e \in E$. Ha s és s^* egymás inverzei S -ben, akkor $\tau_{s^*} = \tau_s^{-1}$. Ha $\bar{\alpha} \in \bar{Y}$ és $\bar{\alpha} \leq \pi(s)$, akkor $s' \in \bar{E}_{\bar{\alpha}} s \in \bar{E}_{\bar{\alpha}} \tau_s$.

Most megmutatjuk, hogy T minden t eleme egyértelmű módon előáll $t = \alpha u_s \sigma$ alakban, ahol $s = t\pi \in S$, $\alpha \in I_{\alpha}^{ss'}$ és $\sigma \in \mathfrak{Y}_{\alpha\tau_s}^{ss'}$ valamely $\alpha (\in Y_{\pi(s)})$ -re. Legyen $t \in T$, jelölje s a $t\pi$ -t. Legyen α az az eleme I -nek, amely $\mathcal{Q}$ relációban áll t -vel. Nyilván pontosan egy ilyen α van. Tegyük fel, hogy $\alpha \in I_{\alpha}$ és $\alpha \in Y_{\bar{\alpha}}$. Ekkor $s = t\pi \mathcal{Q} \alpha \pi \mathcal{L} e_{\bar{\alpha}}$, tehát $\bar{\alpha} = \pi(s)$ és $\alpha \in I_{\alpha}^{ss'}$. Másrészt, mivel $u_{s'} \alpha u_s \in \alpha \tau_s$, érvényes $\sigma = i_{\alpha\tau_s} u_{s'} t \mathcal{Q} i_{\alpha\tau_s} u_{s'} \alpha u_s \mathcal{Q} i_{\alpha\tau_s}$. Minthogy ezen felül $\sigma\pi = e_{\pi(s)\tau_s} s's = s's$, kaptuk, hogy $\sigma \in \mathfrak{Y}_{\alpha\tau_s}^{ss'}$. Könnyen látható, hogy $\alpha u_s \sigma = \alpha u_s i_{\alpha\tau_s} u_{s'} t = \alpha (u_s i_{\alpha\tau_s} u_{s'}) \alpha t = \alpha t = t$, hiszen $\alpha \mathcal{Q} t$ és $\alpha, u_s i_{\alpha\tau_s} u_{s'} \in E_{\alpha}$. Ami az előállítás egyértelműségét illeti, vegyük észre, hogy ha $s \in S$ és $\alpha \in I_{\alpha}^{ss'}$, $\sigma \in \mathfrak{Y}_{\alpha\tau_s}^{ss'}$ úgy, hogy $\alpha \in Y_{\pi(s)}$, akkor $(\alpha u_s \sigma)\pi = s's's's = s$ és $\alpha u_s \sigma \mathcal{Q} \alpha u_s \sigma' u_{s'} \alpha = \alpha$. Így ha $\alpha u_s \sigma = \bar{\alpha} u_{\bar{s}} \bar{\sigma}$ két előállítása a t elemnek, akkor $s = \bar{s}$ és $\alpha = \bar{\alpha}$. Ez utóbbiból következik, hogy $\alpha = \bar{\alpha}$, ahol $\alpha \in I_{\alpha}$ és $\bar{\alpha} \in I_{\bar{\alpha}}$. Az $\alpha u_s \sigma = \alpha u_{\bar{s}} \bar{\sigma}$ egyenlőséget balról $i_{\alpha\tau_s} u_{s'}$ -vel megszorozva kapjuk, hogy $\sigma = \bar{\sigma}$. Legyen

$\mathbf{S} = \{(\alpha, s, \sigma) : s \in S, \alpha \in I_{\alpha}^{ss'}$ és $\sigma \in \mathfrak{Y}_{\alpha\tau_s}^{ss'}$ valamely $\alpha (\in Y_{\pi(s)})$ -re}

Ilymódon egy kölcsönösen egyértelmű $\phi: T \rightarrow \mathbf{S}$ ráképezést definiálhatunk, ha a $t = \alpha u_s \sigma$ elemhez (α, s, σ) -t rendeljük. Ugy fogunk egy $\mathcal{R}, \chi, c, \gamma$ $(S, I, \mathfrak{Y})$ -négyest megadni, hogy a ϕ leképezés T -ről $\mathfrak{Y}(S, I, \mathfrak{Y}; \mathcal{R}, \chi, c, \gamma)$ -ra való izomorfiz-

mussá váljon.

Először azonban külön foglalkozunk az idempotens κ -osztályokkal. Ha $t\kappa = e \in E$, akkor a $t = a u_e \sigma$ előállításban $a u_e \sigma = a i_\alpha u_e i_\alpha \sigma = a i_\alpha \sigma = a \sigma$, ahol $a \in I_\alpha$, ugyanis $\alpha \leq \kappa(e) = l(e)$ és u_e olyan idempotens T -ben, amelyre $u_e \in i_{l(e)}$. Ha $a \in I_\alpha^{\bar{i}}$ és $\sigma \in \mathcal{Y}_\alpha^{\bar{j}}$, akkor $(a\sigma)\kappa = \bar{i}\bar{j}$. Így minden olyan $t \in T$, amelyre $t\kappa$ idempotens, egyértelmű módon áll elő $a\sigma$ alakban, ahol $a \in I_\alpha$ és $\sigma \in \mathcal{Y}_\alpha$ valamely $\alpha \in Y$ -ra. Az idempotens κ -osztályok elemeire most ezt az előállítást fogjuk használni. Legyen $\bar{i} \in \bar{I}_\alpha$, $\bar{j} \in \bar{\mathcal{Y}}_\beta$ és $\alpha \in Y_\alpha$, $\beta \in Y_\beta$. Tegyük fel, hogy $a \in I_\alpha^{\bar{i}}$ és $\sigma \in \mathcal{Y}_\beta^{\bar{j}}$. Ekkor $(\sigma a)\kappa = \bar{j}\bar{i}$, így σa az előzőek értelmében egyértelműen írható $a_1 \sigma_1$ alakban, ahol $a_1 \in I_{\alpha_1}^{(\bar{j}\bar{i}\chi_{\bar{j}\bar{i}})^{\bar{i}}}$ és $\sigma_1 \in \mathcal{Y}_{\alpha_1}^{(\bar{j}\bar{i})'(\bar{j}\bar{i})}$. Jelöljük a_1 -et $a A_\sigma$ -val, σ_1 -et pedig σB_α -val, továbbá $(\bar{j}\bar{i})(\bar{j}\bar{i})'$ -t $\bar{i} \bar{A}_{\bar{j}}$ -sal, $(\bar{j}\bar{i})'(\bar{j}\bar{i})$ -t pedig $\bar{j} \bar{B}_{\bar{i}}$ -sal. Nyilván $\bar{i} \bar{A}_{\bar{j}} \in \bar{I}_{\alpha\beta}$ és $\bar{j} \bar{B}_{\bar{i}} \in \bar{\mathcal{Y}}_{\alpha\beta}$. Vegyük észre, hogy ha $\sigma' \in \mathcal{Y}_\beta$, akkor $\sigma a \sigma' \in \alpha_1$. Továbbá, $(\sigma B_\alpha)' \in \mathcal{Y}_{\alpha_1}'$ akkor és csak akkor, ha $a \sigma' \sigma a \in \alpha_1'$. Így könnyen látható, hogy $\alpha_1 \leq \beta$ és $\alpha_1' \leq \alpha$. Ha σ idempotens, akkor $\alpha_1 = \alpha_1' = \alpha\beta$. Tegyük fel, hogy $\alpha = \beta'$. Akkor $\sigma a \sigma' \in \sigma \sigma'$, és így $\alpha_1 = \beta$. Továbbá, $\sigma B_\alpha = i_{\alpha_1} \sigma a = i_\beta \sigma a = \sigma a = \sigma i_\alpha \sim \sigma$. Ha pedig $\alpha < \beta$, akkor nyilván $(i_\alpha \sigma')' \in \mathcal{Y}_{\alpha_1}$, hiszen $\sigma i_\alpha \sigma' \in \sigma a \sigma'$. Ezzel beláttuk, hogy a (C1) tulajdonság fennáll az $A_\sigma: I \rightarrow I$ ($\sigma \in \mathcal{Y}$) és $B_\alpha: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$ ($\alpha \in I$) transzformációkra.

Legyen most $a \in I_\alpha$, $b \in I_\beta$, $\alpha \geq \beta$ és $\sigma \in \mathcal{Y}$. Ekkor definíció szerint

$$(23) \quad \sigma a b = \sigma(a \cdot b) = (a \cdot b) A_\sigma \cdot \sigma B_{a \cdot b},$$

ahol $(a \cdot b)A_\sigma \in I_{\alpha_1}$ és $\sigma B_{a \cdot b} \in Y_{\alpha_1}$. Másrészt

$$(23)' \quad \sigma a b = (\sigma a) b = (a A_\sigma \cdot \sigma B_a) b = a A_\sigma \cdot (\sigma B_a \cdot b) = (a A_\sigma \cdot b A_{\sigma B_a}) \cdot \sigma B_a B_b,$$

ahol $a A_\sigma \in I_{\alpha_2}$, $\sigma B_a \in Y_{\alpha_2}$ és $b A_{\sigma B_a} \in I_{\alpha_3}$, $\sigma B_a B_b \in Y_{\alpha_3}$.

Mivel a (C1)(a) tulajdonság érvényes A, B -re, azért $\alpha_3 \leq \alpha_2$.

Igy az $a A_\sigma \cdot b A_{\sigma B_a}$ szorzatnak van értelme I -ben és benne

van I_{α_3} -ban. Mivel $\sigma a b$ egyértelműen írható $a_0 \sigma_0$ alak-

ban, ahol $a_0 \in I_{\alpha_0}$, $\sigma_0 \in Y_{\alpha_0}$ valamely $\alpha_0 \in Y$ -ra, ezért

$\alpha_1 = \alpha_3$ és (23), (23)'-ből következik a (C2)(a) és (b) egyen-

lőség. Duálisan látható, hogy (C3)(a) és (b) is fennáll. És mi-

vel κ kongruencia, $\bar{A}$ és $\bar{B}$ definíciója alapján (C2) és (C3)

biztosítja, hogy $\bar{A}, \bar{B}$ -ra (W1) és (W2) teljesül. Tehát ezzel

igazoltuk, hogy $\bar{A}, \bar{B}$ egy $(\bar{I}, \bar{Y})$ -pár, A, B pedig álta-

lánosított (I, Y) -pár $\bar{A}, \bar{B}$ felett. (C4) teljesülése triviá-

lis.

Legyen $s \in S$ tetszőleges. Definíáljunk egy

$h_s: \bigcup \{I_\alpha: \alpha \leq l(s)\} \rightarrow \bigcup \{I_\alpha: \alpha \leq r(s)\}$ leképezést a következőképpen:

ha $a \in I_\alpha^{\bar{I}}$, $\alpha \leq l(s)$, akkor

$$a h_s = u_s a u_{s'} v_{\alpha} \tau_s^{-1}.$$

Hasonlóan $\chi_s: \bigcup \{Y_\alpha: \alpha \leq r(s)\} \rightarrow \bigcup \{Y_\alpha: \alpha \leq l(s)\}$

legyen az a leképezés, amelyre

$$\sigma \chi_s = v_{\beta} \tau_s u_{s'} \sigma u_s,$$

feltéve, hogy $\sigma \in Y_{\beta}^{\bar{Y}}$, $\beta \leq r(s)$. Nyilván $a h_s \in I_{\alpha \tau_s^{-1}}^{s \bar{I} (s \bar{I})'}$

illetve $\sigma \chi_s \in Y_{\beta \tau_s}^{(s \bar{I})' \bar{Y}}$, hiszen $u_s a u_{s'} \in \alpha \tau_s^{-1}$ és

$(a h_s) \kappa = s \bar{I} s' e_{\alpha \tau_s^{-1}} = (s \bar{I} \chi s \bar{I})'$, illetve

$u_{s'} \sigma u_s \in u_{s'} v_{\beta} u_s \in \beta \tau_s$ és $(\sigma \chi_s) \kappa = e_{\beta \tau_s} s' \bar{Y} s = (\bar{Y} s)' (\bar{Y} s)$.

Itt $\alpha \in Y_{\alpha}$ és $\beta \in Y_{\beta}$. Világos, hogy $\alpha \leq l(s)$ és $\beta \leq r(s)$.

Továbbá, mivel $(\sigma\chi_s)' \sim u_{s'}\sigma'u_s$ a Γ félcsoporthban, azért ha $\sigma' \in \mathfrak{Y}_{\beta'}$, ahol $\beta' \leq \kappa(s)$, akkor $(\sigma\chi_s)' \in \mathfrak{Y}_{\beta'\tau_s}$. Így (D1)(a) illetve (D1)(b) teljesül κ -ra ill. χ -re. A (D2)-(D8) tulajdonságok után megjegyeztük, hogy az egyenlőségek mindkét oldala értelmezve van. Így csak ^{az} egyenlőségek teljesülését kell ellenőriznünk.

(D2)(a)-hoz tegyük fel, hogy $a \in I_\alpha$, $b \in I_\beta$ és $\ell(s) \geq \alpha \geq \beta$. Definíció szerint

$$\begin{aligned} a h_s \cdot b h_s &\mathcal{Q} u_s a (u_{s'} i_{\alpha\tau_s^{-1}} u_s) b u_{s'} = \\ &= u_s a (i_{\alpha} u_{s'} i_{\alpha\tau_s^{-1}} u_s) b u_{s'} = \\ &= u_s a (i_{\alpha\tau_s^{-1}} \chi_s) b u_{s'} = \\ &= u_s a \cdot b A_{i_{\alpha\tau_s^{-1}} \chi_s} \cdot i_{\alpha\tau_s^{-1}} \chi_s B b u_{s'} . \end{aligned}$$

Itt $b A_{i_{\alpha\tau_s^{-1}} \chi_s} \mathcal{Q} i_{\alpha\tau_s^{-1}} \chi_s B b$ a B kötegben, tehát $a \cdot b A_{i_{\alpha\tau_s^{-1}} \chi_s} \mathcal{Q} a \cdot b A_{i_{\alpha\tau_s^{-1}} \chi_s} \cdot i_{\alpha\tau_s^{-1}} \chi_s B b$. Így az előzőek felhasználásával

$$a h_s \cdot b h_s \mathcal{Q} u_s a \cdot b A_{i_{\alpha\tau_s^{-1}} \chi_s} u_{s'} \mathcal{Q} (a \cdot b A_{i_{\alpha\tau_s^{-1}} \chi_s}) h_s .$$

Viszont $a h_s \cdot b h_s$ és $(a \cdot b A_{i_{\alpha\tau_s^{-1}} \chi_s}) h_s \in I_{\beta\tau_s^{-1}}$, így egyenlők. (D2)(b) bizonyításához tételezzük fel, hogy $\varrho \in \mathfrak{Y}_\alpha$, $\varrho' \in \mathfrak{Y}_{\alpha'}$ és $\sigma \in \mathfrak{Y}_\beta$, ahol $\alpha' \leq \beta \leq \kappa(s)$. Ekkor

$$\begin{aligned} \varrho\chi_s \cdot \sigma\chi_s &= i_{\alpha\tau_s} u_{s'} \varrho u_s i_{\beta\tau_s} u_{s'} \sigma u_s = \\ &= i_{\alpha\tau_s} u_{s'} \varrho (u_s i_{\beta\tau_s} u_{s'} i_{\beta}) \sigma u_s = \\ &= i_{\alpha\tau_s} u_{s'} \varrho (i_{\beta\tau_s} h_s) \sigma u_s = \\ &= i_{\alpha\tau_s} u_{s'} (i_{\beta\tau_s} h_s A_\varrho) (\varrho B i_{\beta\tau_s} h_s) \sigma u_s . \end{aligned}$$

Itt $i_{\beta\tau_s} h_s A_\theta \in i_\alpha \mathcal{Q} \in \mathcal{B}_{i_{\beta\tau_s} h_s}$, így a 32. Lemma alapján

$$\begin{aligned} \theta \chi_s \cdot \sigma \chi_s &= i_{\alpha\tau_s} u_{s'} (\mathcal{B}_{i_{\beta\tau_s} h_s} \cdot \sigma) u_s = \\ &= (\mathcal{B}_{i_{\beta\tau_s} h_s} \cdot \sigma) \chi_s. \end{aligned}$$

Most a (D3)(a) majd a (D3)(b) tulajdonságok teljesülését ellenőrizzük. Tegyük fel, hogy $a \in I_\alpha$, ahol $\alpha \leq \ell(s)$ és $\sigma \in \mathcal{Y}_\beta$, ahol $\beta \leq \kappa(s)$. Tegyük fel, hogy $a A_{\theta\chi_s} \in I_{\alpha_1}$ és $\sigma B_{\alpha h_s} \in \mathcal{Y}_{\beta_2}$. Definíció szerint akkor

$$\begin{aligned} (24) \quad a A_{\theta\chi_s} h_s &= u_s (a A_{\theta\chi_s}) u_{s'} i_{\alpha_1\tau_s^{-1}} = \\ &= u_s (\theta\chi_s) a (\theta\chi_s)^* i_{\alpha_1} u_{s'} i_{\alpha_1\tau_s^{-1}} = \\ &= u_s i_{\beta\tau_s} u_{s'} \sigma u_s a u_{s'} \sigma^* u_s i_{\alpha_1} u_{s'} i_{\alpha_1\tau_s^{-1}}, \end{aligned}$$

ahol σ^* ill. $(\theta\chi_s)^*$ a σ ill. $\theta\chi_s$ egy-egy tetszőleges inverzét jelöli. Mivel $u_s i_{\beta\tau_s} u_{s'} \in \beta$ és $\beta \leq \kappa(s)$ miatt $\beta' \leq \kappa(s)$, ahol $\sigma' \in \mathcal{Y}_{\beta'}$, azért $\sigma u_s u_{s'} \sigma^* = \sigma \sigma^* \in \beta$ és

$$(25) \quad u_s i_{\beta\tau_s} u_{s'} \sigma u_s = u_s i_{\beta\tau_s} u_{s'} i_\beta \sigma u_s = i_{\beta\tau_s} h_s \cdot \sigma u_s.$$

Másrészt, $a A_{\theta\chi_s} \in \alpha_1$ következtében $\sigma u_s a u_{s'} \sigma^* \in \alpha_1 \tau_s^{-1}$. Így

$$(26) \quad (\sigma u_s a u_{s'} \sigma^*) (u_s i_{\alpha_1} u_{s'}) i_{\alpha_1\tau_s^{-1}} = (\sigma u_s a u_{s'} \sigma^*) i_{\alpha_1\tau_s^{-1}}.$$

És mivel $\sigma u_s a u_{s'} \sigma^* \in \sigma \cdot a h_s \cdot \sigma^*$, azért

$$(27) \quad (\sigma u_s a u_{s'} \sigma^*) i_{\alpha_1\tau_s^{-1}} = \sigma \cdot a h_s \cdot \sigma^* i_{\alpha_1\tau_s^{-1}} = a h_s A_\theta.$$

(24)-ből (25)-(27) alkalmazásával adódik a bizonyítandó (D3)(a) egyenlőség. Vegyük észre, hogy ebből az egyenlőségből következik, hogy $\beta_2 = \alpha_1 \tau_s^{-1}$. Ami a duális (D3)(b) tulajdonságot illeti,

a definíció alapján látható, hogy

$$\sigma B_{a h_s} \chi_s = i_{\beta_2 \tau_s} u_s (\sigma B_{a h_s}) u_s = i_{\beta_2 \tau_s} u_s i_{\beta_2} \sigma \cdot a h_s \cdot u_s .$$

Mint hogy $\sigma B_{a h_s} \in \mathfrak{Y}_{\beta_2}$, azért $\sigma \cdot a h_s \cdot \sigma^* \in \beta_2$. Így a 32. Lemma következtében

$$\sigma B_{a h_s} \chi_s = i_{\beta_2 \tau_s} u_s \sigma \cdot a h_s \cdot u_s .$$

Továbbá, $u_s \sigma \cdot a h_s \cdot \sigma^* u_s \in \beta_2 \tau_s = \alpha_1$, így $\alpha_1 \leq \beta \tau_s$ miatt

$$\begin{aligned} \sigma B_{a h_s} \chi_s &= i_{\alpha_1} i_{\beta \tau_s} u_s \sigma \cdot a h_s \cdot u_s = \\ &= i_{\alpha_1} i_{\beta \tau_s} u_s \sigma u_s a u_s i_{\alpha \tau_s^{-1}} u_s = \\ &= i_{\alpha_1} \cdot \sigma \chi_s \cdot a u_s i_{\alpha \tau_s^{-1}} u_s . \end{aligned}$$

Felhasználva, hogy a és $u_s i_{\alpha \tau_s^{-1}} u_s \in \alpha$, ebből kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \sigma B_{a h_s} \chi_s &= i_{\alpha_1} \cdot \sigma \chi_s \cdot a i_{\alpha} u_s i_{\alpha \tau_s^{-1}} u_s = \\ &= i_{\alpha_1} \cdot \sigma \chi_s \cdot a \cdot i_{\alpha \tau_s^{-1}} \chi_s = \\ &= \sigma \chi_s B_a \cdot i_{\alpha \tau_s^{-1}} \chi_s , \end{aligned}$$

és éppen ezt akartuk bizonyítani.

Most bevezetjük a $c_{s, \bar{s}}$ és $\gamma_{s, \bar{s}}$ ($s, \bar{s} \in S$) konstansokat. Mivel $(u_s u_{\bar{s}}) \pi = s \bar{s} = u_{s \bar{s}} \pi$, azért létezik pontosan egy $c_{s, \bar{s}} \in I_{\alpha}^{(s \bar{s})(s \bar{s})'}$, és egy $\gamma_{s, \bar{s}} \in \mathfrak{Y}_{\alpha}^{(s \bar{s})'(s \bar{s})}$ úgy, hogy $\alpha \in Y_{\pi(s \bar{s})}$ és

$$u_s u_{\bar{s}} = c_{s, \bar{s}} u_{s \bar{s}} \gamma_{s, \bar{s}} .$$

Itt $u_s u_{\bar{s}} \in S_{\bar{s}}$, így $\alpha = \pi(s \bar{s})$ és $\alpha \tau_{s \bar{s}} = \ell(s \bar{s})$. Ebből látható, hogy $\gamma_{s, \bar{s}} = u_{(s \bar{s})'} u_{s \bar{s}}$ hiszen $i_{\ell(s \bar{s})} \in u_{(s \bar{s})'}$. Így $\gamma_{s, \bar{s}} \in S_{\bar{s}}$, azaz $\gamma_{s, \bar{s}}'$ is benne van $\mathfrak{Y}_{\ell(s \bar{s})}$ -ban. Ha

$\alpha \leq \ell(s\bar{s})$, akkor

$$\gamma'_{s,\bar{s}} \iota_\alpha \gamma_{s,\bar{s}} = u_{\bar{s}} u_s u_{s\bar{s}} \iota_\alpha u_{(s\bar{s})} u_s u_{\bar{s}} \in \alpha \tau_{s\bar{s}}^{-1} \tau_s \tau_{\bar{s}} .$$

Ebből (D5) következik. Ha $s, \bar{s} \in S$, akkor

$$\begin{aligned} \xi &= \gamma_{s\bar{s}, \bar{s}} \cdot (\iota_{\tau(s\bar{s}\bar{s})} \tau_{s\bar{s}} \cdot \gamma_{s, \bar{s}}) \gamma_{\bar{s}} = \\ &= \gamma_{s\bar{s}, \bar{s}} \iota_{\tau(s\bar{s}\bar{s})} \tau_{s\bar{s}} \tau_{\bar{s}} u_{\bar{s}} (\iota_{\tau(s\bar{s}\bar{s})} \tau_{s\bar{s}} \cdot \gamma_{s, \bar{s}}) u_{\bar{s}} = \\ &= u_{(s\bar{s}\bar{s})} u_{s\bar{s}} u_{\bar{s}} \iota_{\ell(s\bar{s}\bar{s})} u_{\bar{s}} \iota_{\tau(s\bar{s}\bar{s})} \tau_{s\bar{s}} u_{(s\bar{s})} u_s u_{\bar{s}} u_{\bar{s}} . \end{aligned}$$

Itt $u_{\bar{s}} \iota_{\ell(s\bar{s}\bar{s})} u_{\bar{s}} \in \tau(s\bar{s}\bar{s}) \tau_{s\bar{s}}$, így $u_{s\bar{s}} (u_{\bar{s}} \iota_{\ell(s\bar{s}\bar{s})} u_{\bar{s}}) \cdot \iota_{\tau(s\bar{s}\bar{s})} \tau_{s\bar{s}} u_{(s\bar{s})} \in \tau(s\bar{s}\bar{s})$. Ezért $\xi = u_{(s\bar{s}\bar{s})} u_s u_{\bar{s}} u_{\bar{s}}$.

Másrészt $\gamma_{s, \bar{s}\bar{s}} \cdot \gamma_{\bar{s}, \bar{s}} = u_{(s\bar{s}\bar{s})} u_s u_{s\bar{s}} u_{(s\bar{s})} u_{\bar{s}} u_{\bar{s}} \sim \xi$ a T félcsoporthban. Ekkor minden $\alpha \in Y_{\ell(s\bar{s}\bar{s})}$ -ra $\iota_\alpha \xi \sim \iota_\alpha \cdot (\gamma_{s, \bar{s}\bar{s}} \cdot \gamma_{\bar{s}, \bar{s}})$ a T félcsoporthban. De akkor $\sim$ relációban állnak $\mathfrak{F}$ -ben is. Ezzel (D6)-ot is bebizonyítottuk.

Legyen most $s \in S$. Definíció szerint $\gamma_{s, s'} = u_{(s s')^{-1}} u_s u_{s'}$ idempotens, mivel u_s és $u_{s'}$ egymás inverzei, $u_{(s s')^{-1}}$ pedig egyenlő $\iota_{\tau(s)}$ -sel, hiszen $(s s')^{-1} = e_{\tau(s)}$. Továbbá $u_{s'} \in \iota_{\tau(s)}$, mivel $s' \in e_{\tau(s)}$. Így $\gamma_{s, s'} = \iota_{\tau(s)}$. Hasonlóan, ha s^* az s egy inverze, akkor $\gamma_{s s^*, s} = u_{s'} u_{s s^*} u_s = u_{s'} u_s$ idempotens és $u_{s'} u_s \in \ell(s)$, így ha $\alpha \in Y_{\ell(s)}$, akkor $\gamma_{s s^*, s} \beta \iota_\alpha = \iota_\alpha u_{s'} u_s \iota_\alpha = \iota_\alpha$. Tehát a (D8) tulajdonság is teljesül.

(D7) igazolásához tegyük fel, hogy $e \in E$, $\alpha \leq \tau(s)$ és $\alpha \in I_\alpha$, $e \in \mathfrak{F}_\alpha$. Ekkor $u_e u_e = u_e$ miatt $u_e = c_{e, e} \cdot \gamma_{e, e}$. Így egyrészt

$$\alpha h_e = u_e \alpha u_e \iota_\alpha \tau_e^{-1} = u_e \alpha \iota_\alpha = u_e \alpha \gamma_{e, e} \iota_\alpha = c_{e, e} \cdot \gamma_{e, e} \alpha \gamma_{e, e} \iota_\alpha = c_{e, e} \cdot \alpha h_{\gamma_{e, e}} ,$$

ugyanis $c_{e, e}$ és $\gamma_{e, e} \in \tau(e) \geq \alpha$. Másrészt

$$\sigma \chi_e = i_\alpha \tau_e u_e, \sigma u_e = i_\alpha \sigma u_e = i_\alpha \sigma c_{e,e} \cdot \gamma_{e,e} = \sigma B_{c_{e,e}} \cdot \gamma_{e,e}.$$

Tehát a (D7) feltétel is fennáll.

Végül bizonyítsuk be (D4)(a) és (b)-t! Legyen $s, \bar{s} \in S$ és $\alpha \in I_\alpha$, ahol $\alpha \leq l(s\bar{s})$. Felhasználva, hogy $u_{\bar{s}} u_s a u_s, u_{\bar{s}}$ és $u_{\bar{s}} i_{\alpha \tau_s^{-1}} u_{\bar{s}} \in \alpha \tau_s^{-1} \tau_{\bar{s}}^{-1}$, látható, hogy

$$\begin{aligned} a h_s h_{\bar{s}} &= u_{\bar{s}} (u_s a u_s i_{\alpha \tau_s^{-1}}) u_{\bar{s}} i_{\alpha \tau_s^{-1} \tau_{\bar{s}}^{-1}} = \\ &= u_{\bar{s}} u_s a u_s u_{\bar{s}} u_{\bar{s}} i_{\alpha \tau_s^{-1}} u_{\bar{s}} i_{\alpha \tau_s^{-1} \tau_{\bar{s}}^{-1}} = \\ &= u_{\bar{s}} u_s a u_s u_{\bar{s}} i_{\alpha \tau_s^{-1} \tau_{\bar{s}}^{-1}} \mathcal{Q} \\ &\mathcal{Q} c_{\bar{s},s} u_{\bar{s}s} \gamma_{\bar{s},s} a \gamma_{\bar{s},s}^{-1} u_{(\bar{s}s)} i_{\alpha \tau_s^{-1} \tau_{\bar{s}}^{-1}} \mathcal{Q} \\ &\mathcal{Q} c_{\bar{s},s} u_{\bar{s}s} \gamma_{\bar{s},s} a \gamma_{\bar{s},s}^{-1} i_\beta u_{(\bar{s}s)} i_{\alpha \tau_s^{-1} \tau_{\bar{s}}^{-1}}, \end{aligned}$$

ahol $\gamma_{\bar{s},s} a \gamma_{\bar{s},s}^{-1} \in \beta$. Viszont az utóbbi elem $i_{\alpha \tau_s^{-1} \tau_{\bar{s}}^{-1}}$ -gyel $\mathcal{Q}$ relációban áll, ugyanugy, mint $a h_s h_{\bar{s}}$. Így

$$\begin{aligned} a h_s h_{\bar{s}} &= c_{\bar{s},s} u_{\bar{s}s} (\gamma_{\bar{s},s} a \gamma_{\bar{s},s}^{-1} i_\beta) u_{(\bar{s}s)} i_{\alpha \tau_s^{-1} \tau_{\bar{s}}^{-1}} = \\ &= c_{\bar{s},s} \cdot a A_{\gamma_{\bar{s},s}} h_{\bar{s}s}, \end{aligned}$$

azaz (D4)(a) teljesül. Legyen most $s, \bar{s} \in S$ és $\varrho \in \mathcal{V}_\alpha$, ahol $\alpha \leq t(s\bar{s})$. A 32. Lemmát alkalmazva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \varrho \chi_s \chi_{\bar{s}} &= i_{\alpha \tau_s \tau_{\bar{s}}} u_{\bar{s}} i_{\alpha \tau_s} u_s \varrho u_s u_{\bar{s}} = \\ &= i_{\alpha \tau_s \tau_{\bar{s}}} u_{\bar{s}} u_s \varrho u_s u_{\bar{s}}. \end{aligned}$$

Itt $u_s u_{\bar{s}} = c_{s,\bar{s}} u_{s\bar{s}} \gamma_{s,\bar{s}}$ és $u_{\bar{s}} u_s \sim \gamma_{\bar{s},s}^{-1} u_{(s\bar{s})}$,

így $u_{\bar{s}} u_s \varrho u_s u_{\bar{s}} \mathcal{Q} u_{\bar{s}} u_s i_\alpha u_s u_{\bar{s}} \mathcal{Q} \gamma_{\bar{s},s}^{-1} u_{(s\bar{s})} i_\alpha c_{s,\bar{s}} u_{s\bar{s}} \gamma_{s,\bar{s}} \mathcal{Q} \gamma_{\bar{s},s}^{-1} u_{(s\bar{s})} \varrho c_{s,\bar{s}} u_{s\bar{s}} \gamma_{s,\bar{s}}$. Következésképpen

$$\varrho \chi_s \chi_{\bar{s}} \sim i_{\alpha \tau_s \tau_{\bar{s}}} \gamma_{\bar{s},s}^{-1} u_{(s\bar{s})} \varrho c_{s,\bar{s}} u_{s\bar{s}} \gamma_{s,\bar{s}}.$$

(D5) alapján $(i_{\alpha\tau_{s\bar{s}}} \cdot \gamma_{s,\bar{s}})' \in \mathcal{Y}_{\alpha\tau_s\tau_{\bar{s}}}$. Így a (B6) tulajdonság biztosítja, hogy $(i_{\alpha\tau_s\tau_{\bar{s}}} \cdot \gamma'_{s,\bar{s}})' \in \mathcal{Y}_{\alpha\tau_s\tau_{\bar{s}}}$. Az előző egyenlőségből ennek alapján következik, hogy

$$\begin{aligned} (i_{\alpha\tau_{s\bar{s}}} \cdot \gamma_{s,\bar{s}}) \cdot \varrho \gamma_s \gamma_{\bar{s}} &= \\ &= i_{\alpha\tau_{s\bar{s}}} \gamma_{s,\bar{s}} i_{\alpha\tau_s\tau_{\bar{s}}} \gamma'_{s,\bar{s}} u_{(s\bar{s})}' \varrho c_{s,\bar{s}} u_{s\bar{s}} \gamma_{s,\bar{s}} = \\ &= i_{\alpha\tau_{s\bar{s}}} u_{(s\bar{s})}' i_{\alpha} \varrho c_{s,\bar{s}} u_{s\bar{s}} \gamma_{s,\bar{s}} = \\ &= \varrho \mathcal{B}_{c_{s,\bar{s}}} \gamma_{s\bar{s}} \cdot \gamma_{s,\bar{s}}, \end{aligned}$$

hiszen $\varrho c_{s,\bar{s}} \mathcal{Q} \varrho i_{\alpha}$. Ezzel a (D4)(b) tulajdonság teljesülését is igazoltuk. Tehát a $\mathcal{A}, \chi, c, \gamma$ négyes valóban $(S, I, \mathcal{Y})$ -négyes.

Hátra van még annak bizonyítása, hogy a fent definiált $\Phi: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{S}$ kölcsönösen egyértelmű ráképezés izomorfizmus $\mathcal{T}$ -ről $\mathcal{Y}(S, I, \mathcal{Y}; \mathcal{A}, \chi, c, \gamma)$ -ra. Legyen a t és $\bar{t}$ elemek képe (α, s, σ) illetve $(\bar{\alpha}, \bar{s}, \bar{\sigma})$. Azaz $t = \alpha u_s \sigma$ és $\bar{t} = \bar{\alpha} u_{\bar{s}} \bar{\sigma}$, ahol $\alpha \in I_{\alpha}^{ss'}$, $\sigma \in \mathcal{Y}_{\alpha\tau_s}^{ss'}$ és $\bar{\alpha} \in I_{\bar{\alpha}}^{\bar{s}\bar{s}'}$, $\bar{\sigma} \in \mathcal{Y}_{\bar{\alpha}\tau_{\bar{s}}}^{\bar{s}\bar{s}'}$. Tegyük fel, hogy $\bar{\alpha} A_{\sigma} \in I_{\alpha_1}$ és $\sigma B_{\bar{\alpha}} \in \mathcal{Y}_{\alpha_1}$. Itt $\alpha_1 \in \mathcal{Y}_{\mathcal{A}(\bar{s})\ell(s)}$ a (C1)(a) tulajdonság következtében. Így $\alpha_1 \tau_s^{-1} \in \mathcal{Y}_{\mathcal{A}(s\bar{s})}$ és $\alpha_1 \tau_{\bar{s}} \in \mathcal{Y}_{\ell(s\bar{s})}$. (D5) és (B6) miatt ekkor $\gamma_{s,\bar{s}} i_{\alpha_1 \tau_s} \gamma'_{s,\bar{s}} \in \alpha_1 \tau_s^{-1} \tau_{s\bar{s}}$ és $u_{s\bar{s}} \gamma_{s,\bar{s}} i_{\alpha_1 \tau_s} \gamma'_{s,\bar{s}} u_{(s\bar{s})}' \in \alpha_1 \tau_s^{-1}$. Ebből következik, hogy

$$\begin{aligned} i_{\alpha_1 \tau_s^{-1}} c_{s,\bar{s}} u_{s\bar{s}} \gamma_{s,\bar{s}} i_{\alpha_1 \tau_s} &= i_{\alpha_1 \tau_s^{-1}} u_{s\bar{s}} \gamma_{s,\bar{s}} i_{\alpha_1 \tau_s} = \\ &= i_{\alpha_1 \tau_s^{-1}} u_{s\bar{s}} i_{\alpha_1 \tau_s^{-1} \tau_{s\bar{s}}} \gamma_{s,\bar{s}} i_{\alpha_1 \tau_s}. \end{aligned}$$

Ezt felhasználva látható, hogy

$$\begin{aligned} \alpha u_s \sigma \bar{\alpha} u_{\bar{s}} \bar{\sigma} &= \\ &= \alpha u_s \cdot \bar{\alpha} A_{\sigma} \cdot \sigma B_{\bar{\alpha}} \cdot u_{\bar{s}} \bar{\sigma} = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \alpha u_s \cdot \bar{\alpha} A_{\bar{\sigma}} \cdot i_{\alpha_1} \cdot \sigma B_{\bar{\alpha}} \cdot u_{\bar{s}} \bar{\sigma} = \\
 &= \alpha u_s \cdot \bar{\alpha} A_{\bar{\sigma}} \cdot i_{\alpha_1} (u_s i_{\alpha_1 \tau_s^{-1}} u_s) (u_{\bar{s}} i_{\alpha_1 \tau_{\bar{s}}} u_{\bar{s}}) i_{\alpha_1} \cdot \sigma B_{\bar{\alpha}} \cdot u_{\bar{s}} \bar{\sigma} = \\
 &= \alpha (u_s \cdot \bar{\alpha} A_{\bar{\sigma}} \cdot u_s i_{\alpha_1 \tau_s^{-1}}) u_s u_{\bar{s}} (i_{\alpha_1 \tau_{\bar{s}}} u_{\bar{s}} \cdot \sigma B_{\bar{\alpha}} \cdot u_{\bar{s}}) \bar{\sigma} = \\
 &= \alpha \cdot \bar{\alpha} A_{\bar{\sigma}} h_s \cdot c_{s, \bar{s}} u_{s \bar{s}} \gamma_{s, \bar{s}} \cdot \sigma B_{\bar{\alpha}} \chi_{\bar{s}} \cdot \bar{\sigma} = \\
 &= \alpha \cdot \bar{\alpha} A_{\bar{\sigma}} h_s \cdot (i_{\alpha_1 \tau_s^{-1}} c_{s, \bar{s}} u_{s \bar{s}} \gamma_{s, \bar{s}} i_{\alpha_1 \tau_{\bar{s}}}) \cdot \sigma B_{\bar{\alpha}} \chi_{\bar{s}} \cdot \bar{\sigma} = \\
 &= \alpha \cdot \bar{\alpha} A_{\bar{\sigma}} h_s \cdot (i_{\alpha_1 \tau_s^{-1}} u_{s \bar{s}} i_{\alpha_1 \tau_s^{-1} \tau_{\bar{s}}} \gamma_{s, \bar{s}} i_{\alpha_1 \tau_{\bar{s}}}) \cdot \sigma B_{\bar{\alpha}} \chi_{\bar{s}} \cdot \bar{\sigma} = \\
 &= (\alpha \cdot \bar{\alpha} A_{\bar{\sigma}} h_s) u_{s \bar{s}} ((i_{\alpha_1 \tau_s^{-1} \tau_{\bar{s}}} \gamma_{s, \bar{s}}) \cdot \sigma B_{\bar{\alpha}} \chi_{\bar{s}} \cdot \bar{\sigma}) .
 \end{aligned}$$

Ez pedig éppen azt bizonyítja, hogy Φ homomorfizmus, és így izomorfizmus. Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

A 31. és 33. Tételt alkalmazva az ortodox félcsoporthok legkisebb inverz kongruenciájára, M.YAMADA [25] eredményénél egyszerűbb strukturátételt kaphatunk, amely az ortodox félcsoporthokat a legnagyobb inverz homomorf képük és az idempotens kötegük segítségével jellemzi. Ezt fogalmazzuk meg a következő tételben.

Legyen S egy inverz félcsoporth, amelyben az idempotensek félhálójá Y . Legyen I az $I_{\alpha} (\alpha \in Y)$ balzéró félcsoporthok alsó asszociatív Y félhálójá, $\mathfrak{I}$ pedig a $\mathfrak{I}_{\alpha} (\alpha \in Y)$ jobbzéró félcsoporthok felső asszociatív Y félhálójá. Tegyük fel, hogy A, B egy (C4)-et kielégítő $(I, \mathfrak{I})$ -pár. Legyen $h_s: \bigcup \{I_{\alpha}: \alpha \leq \ell(s)\} \rightarrow \bigcup \{I_{\alpha}: \alpha \leq \tau(s)\}$ illetve $\chi_s: \bigcup \{\mathfrak{I}_{\alpha}: \alpha \leq \tau(s)\} \rightarrow \bigcup \{\mathfrak{I}_{\alpha}: \alpha \leq \ell(s)\}$ két olyan leképezés, hogy $I_{\alpha} h_s \subseteq I_{s \alpha s^{-1}}$, $\mathfrak{I}_{\alpha} \chi_s \subseteq \mathfrak{I}_{s^{-1} \alpha s}$, valamint rendelkezzenek a következő tulajdonságokkal is:

(D2)'(a) ha $\alpha \in I_{\alpha}, \beta \in I_{\beta}$ úgy, hogy $\ell(s) \geq \alpha \geq \beta$, akkor

$$a h_s \cdot b h_s = (\alpha \cdot \beta A_{i_{s \alpha s^{-1}}} \chi_s) h_s ,$$

(b) ha $\varphi \in \mathfrak{I}_{\alpha}, \sigma \in \mathfrak{I}_{\beta}$ úgy, hogy $\alpha \leq \beta \leq \tau(s)$, akkor

$$\varrho \chi_s \cdot \sigma \chi_s = (\varrho \mathcal{B}_{i_{\sigma^{-1}\beta s} h_s} \cdot \sigma) \chi_s ;$$

(D3)' ha $a \in I_\alpha$, $\alpha \leq l(s)$ és $\sigma \in \mathcal{Y}_\beta$, $\beta \leq r(s)$, akkor

$$(a) \quad a A_\sigma \chi_s h_s = i_{s^{-1}\beta s} h_s \cdot a h_s A_\sigma ,$$

$$(b) \quad \sigma \mathcal{B}_{a h_s} \chi_s = \sigma \chi_s \mathcal{B}_a \cdot i_{s\alpha s^{-1}} \chi_s .$$

Továbbá minden $s, \bar{s} (\in S)$ -re létezzenek olyan $c_{s, \bar{s}} \in I_{r(s\bar{s})}$

és $\gamma_{s, \bar{s}} \in \mathcal{Y}_{l(s\bar{s})}$ elemek, hogy

(D4)' (a) ha $a \in I_\alpha$ és $\alpha \leq l(\bar{s}s)$, akkor

$$a h_s h_{\bar{s}} = c_{\bar{s}, s} \cdot a A_{\gamma_{\bar{s}, s}} h_{\bar{s}} ,$$

(b) ha $\varrho \in \mathcal{Y}_\alpha$ és $\alpha \leq r(s\bar{s})$, akkor

$$\varrho \chi_s \chi_{\bar{s}} = \varrho \mathcal{B}_{c_{s, \bar{s}}} \chi_{s\bar{s}} \cdot \gamma_{s, \bar{s}} ;$$

(D7)' ha $\alpha \leq \beta$ és $a \in I_\alpha$ illetve $\sigma \in \mathcal{Y}_\alpha$, akkor

$$(a) \quad a h_\beta = c_{\beta, \beta} \cdot a A_{\gamma_{\beta, \beta}} ,$$

$$(b) \quad \sigma \chi_\beta = \sigma \mathcal{B}_{c_{\beta, \beta}} \cdot \gamma_{\beta, \beta}$$

fermálljon. Az ilyen tulajdonságu h, χ leképezéseket nevezzük redukált $(S, I, \mathcal{Y})$ -párnak.

Definiáljunk szorzást az

$$\mathbf{S} = \{ (a, s, \sigma) : s \in S, a \in I_{r(s)}, \sigma \in \mathcal{Y}_{l(s)} \}$$

alaphalmazon úgy, hogy

$$(a, s, \sigma)(\bar{a}, \bar{s}, \bar{\sigma}) = (a \cdot \bar{a} A_\sigma h_s, s\bar{s}, \sigma \mathcal{B}_{\bar{a}} \chi_{\bar{s}} \cdot \bar{\sigma}) .$$

Igy egy ortodox félcsoporthat értelmeztünk, amelynek idempotens kötege izomorf $\mathcal{B}(I, \mathcal{Y}; A, \mathcal{B})$ -vel, amint az látható a 31. Tételből. Jelöljük ezt $\tilde{\mathcal{Y}}(S, I, \mathcal{Y}; h, \chi)$ -vel.

A 33. Tételből közvetlenül kapjuk a következő tétel második felét csak azt kell észrevenni, hogy ebben a speciális esetben a $\gamma_{s, \bar{s}}$ konstansok is kiesnek a szorzásnál, ugyanúgy, mint a

$c_{\lambda, \beta}$ konstansok.

34. TÉTEL. Legyen S egy inverz félcsoporth. Idempotenseinek félhálóját jelölje Y . Legyen I az I_α ($\alpha \in Y$) balzéró félcsoporthok egy alsó asszociatív Y félhálója, $\mathfrak{A}$ pedig a $\mathfrak{A}_\alpha$ ($\alpha \in Y$) jobbzeró félcsoporthok egy felső asszociatív félhálója. Tegyük fel, hogy A, B egy (C4)-et kielégítő $(I, \mathfrak{A})$ -pár. Legyen λ, χ egy redukált $(S, I, \mathfrak{A})$ -pár. Ekkor $\tilde{\gamma}(S, I, \mathfrak{A}; \lambda, \chi)$ ortodox félcsoporth, amelynek idempotens kötege izomorf $\mathcal{B}(I, \mathfrak{A}; A, B)$ -vel, legnagyobb inverz homomorf képe pedig S -sel.

Fordítva, ha T egy tetszőleges ortodox félcsoporth, amelynek E idempotens kötege derékszögű kötegek Y félhálója, akkor E izomorf valamely $\mathcal{B}(I, \mathfrak{A}; A, B)$ köteggel, ahol $I, \mathfrak{A}, A$ és B olyanok mint fent. Továbbá S -sel jelölve T legnagyobb inverz homomorf képét, létezik egy λ, χ redukált $(S, I, \mathfrak{A})$ -pár úgy, hogy T izomorf $\tilde{\gamma}(S, I, \mathfrak{A}; \lambda, \chi)$ -vel.

Irodalom

- [1] AULT, J.E. és M. PETRICH, The structure of ω -regular semi-groups, J.Reine Angew.Math. 251(1971),110-141.
- [2] CLIFFORD, A.H. és G.B. PRESTON, The Algebraic Theory of Semigroups, Vol. I,II, Math. Surveys No 7, Amer.Math.Soc., Providence, R.I., 1961, 1967.
- [3] D'ALARCAO, H., Idempotent-separating extensions of inverse semigroups, J.Austral.Math.Soc. 9(1969),211-217.
- [4] HALL, T.E., On orthodox semigroups and uniform and anti-uniform bands, J.Algebra 16(1970),204-217.
- [5] КОЧИН, Б.П., Устройство инверсных идеално простых ω -полугрупп, Вестник Ленинград.Унив.(1968), № 7., 41-50.
- [6] LALLEMENT, G., Congruences et équivalences de Green sur un demi-groupe regulier, C.R.Acad.Sc.Paris, Sér.A, 262(1966), 613-616.
- [7] LALLEMENT, G. és M. PETRICH, A generalization of the Rees theorem in semigroups, Acta Sci.Math.(Szeged) 30(1969), 113-132.
- [8] MEAKIN, J., Idempotent-equivalent congruences on orthodox semigroups , J.Austral.Math.Soc. 11(1970),221-241.
- [9] MUNN, W.D., Uniform semilattices and bisimple inverse semigroups, Quart.J.Math.Oxford Ser. (2) 17(1966),151-159.
- [10] MUNN, W.D., Regular ω -semigroups, Glasgow Math.J. 9(1968), 46-66.
- [11] MUNN, W.D., O-bisimple inverse semigroups, J.Algebra 15 (1970),570-588.

- [12] MUNN, W.D., On simple inverse semigroups, Semigroup Forum 1(1970), 63-74.
- [13] REILLY, N.R., Bisimple ω -semigroups, Proc. Glasgow Math. Assoc. 7(1966), 160-167.
- [14] REILLY, N.R. és H.E. SCHEIBLICH, Congruences on regular semigroups, Pacific J.Math. 23(1967), 349-360.
- [15] SZENDREI, M., On subband- parcelling congruences of orthodox semigroups, megjelenik: Proceedings, International Symposium on the Algebraic Theory of Semigroups, Szeged, Hungary (August, 1976) (North Holland).
- [16] SZENDREI, M., On the strong subband-separating extensions of 0- $\mathcal{S}$ -simple orthodox semigroups, megjelenik ugyanott.
- [17] SZENDREI, M., On the structure of orthodox semigroups, Semigroup Forum 13(1976/77), 271-280.
- [18] SZENDREI, M., On the structure of orthodox semigroups, megjelenik a J. Algebra-ban.
- [19] WARNE, R.J., $\omega^h I$ -bisimple semigroups, Acta Math.Acad. Sci.Hungar.21(1970), 121-150.
- [20] WARNE, R.J., I -regular semigroups, Math.Japon. 15(1970), 91-100.
- [21] WARNE, R.J., On the structure of semigroups which are unions of groups, Trans. Amer.Math.Soc. 186(1973), 385-401.
- [22] WARNE, R.J., $\omega Y - \mathcal{L}$ -unipotent semigroups, Jñānabha Sect. A3(1973), 99-118.
- [23] WARNE, R.J., Generalized $\omega - \mathcal{L}$ -unipotent bisimple semigroups, Pacific J.Math. 51(1974), 631-648.
- [24] YAMADA, M., Strictly inversive semigroups, Bull. Shimane Univ. (Mat.Sci.) No 13(1963), 128-138.
- [25] YAMADA, M., On a regular semigroup in which the idempotents form a band, Pacific J.Math. 33(1970), 261-272.

Köszönetet mondok Dr. Pollák György
c.docensnek, aki felkeltette érdek-
lődésomet a téma iránt, figyelemmel
kísérte munkámat és értékes segít-
séget nyújtott a dolgozat megírása
során.