B 1882

JATE

Számitástudományi Tanszék

FAAUTOMATÁK ÉS REGULÁRIS ERDŐK OSZTÁLYAI

egyetemi doktori értekezés

MARÓTI GYÖRGY

Szeged

1980

B 1882

Tartalom

1. Bevezetés 1

2. Erdők és faautomaták 4

3. Erdők racionális reprezentációja 12

3.1. F_γ -homomorfizmus és f_γ-beágyazás 13

3.2. F_γ -reprezentáció 21

3.3. Faautomaták f_γ-ekvivalenciája 31

4. Prefixmentes erdők és néhány velük kapcsolatos erdőosztály 35

4.1. Prefixmentes erdők 36

4.2. Jobbideálok és prefixteljes erdők 50

4.3. A $\mathcal{C}_i$ osztály 60

4.4. Hatvány-korlátos erdők 71

5. Definit erdők és faautomaták 77

5.1. Nilpotens erdők 77

5.2. Definit erdők 87

5.3. Forditott definit erdők 99

6. Irodalom 107

Attila Tudományegyetem Könyvtár SZEGED

1. Bevezetés

A dolgozat első részében megadjuk az erdők Gécseg Ferenc által bevezetett racionális reprezentációjának egy általánositását, melyet $\mathfrak{f}\sigma$-reprezentációnak nevezünk. A racionális reprezentáció, amellett, hogy nem bővíti a felismerhető erdők körét, lényegesen hatékonyabb az erdők "klasszikus" reprezentációjánál. Jól mutatja ezt az a tény, hogy míg a "klasszikus" reprezentáció esetén nem létezik nem triviális teljes varietás, addig a racionális reprezentáció mellett ilyen varietás létezése biztositott. /ld. Gécseg, F. and Horváth, Gy. [9] és Gécseg, F. [10]/. Ehhez az rangolt ábécében egy 0-változós, egy 1-változós és egy 2-változós müveleti jel szükséges /és elégséges/. Az $\mathfrak{f}\sigma$-reprezentáció annyiban hatékonyabb a racionálisnál, hogy egy F rangolt ábécé felett akkor és csak akkor létezik F-algebrák $\mathfrak{f}\sigma$-teljes varietása, ha F tartalmaz 0-változós és egy legalább két-változós müveleti jelet. Az első fejezetet annak igazolása zárja, hogy a faautomaták $\mathfrak{f}\sigma$-ekvivalenciájának problémája algoritmusan megoldható.

Az utóbbi évek automata elméleti kutatásainak egyik jelentős területe a reguláris erdők részosztályainak vizsgálata. A legnagyobb múltra talán a definit nyelvek vizsgálata tekint vissza. J.A. Brzozowski [1]-ben megmutatja, hogy egy nyelv akkor és csak akkor definit, ha $S_1 \cup X^* S_2$ alakú az S_1 és S_2 véges nyelvekre, továbbá olyan feltételeket ad S_1-re és S_2-re, melyek telje-

sülése esetén az $S_1 \cup X^* S_2$ előállítás egyértelmü. M. Perles, M. O. Rabin és E. Shamir igazolja, hogy k -definit nyelvet felismerő automata legalább $k+1$ állapotú és szükséges és elégséges feltételét adja annak, hogy egy redukált és összefüggő automata k -definit nyelvet ismerjen fel /ld. [18]/. M. Steinby a definit nyelvek derivativjait vizsgálva más eszközökkel jut el a fenti eredményekhez. Analizis és szintézis algoritmusokat ad a definit és forditott definit nyelveket felismerő automatákra, valamint bevezeti és jellemzi a multi-definit nyelveket /ld [22]/. A definit és forditott definit nyelvek közös részosztályát adó nilpotens nyelveket és automatákat H. Kaphengst vizsgálta. E három nyelvosztály további tulajdonságaira deritett fényt az az eredmény, miszerint ezek nem mások, mint a Brzozovski-féle $\mathcal{B}_2$ hierachia három legalacsonyabb szintü osztálya.

A prefixmentes nyelvek automata elméleti jelentősége G.Thierrin eredményével mutatkozott meg /ld. [23]/. Nevezetesen minden reguláris nyelv véges sok $L_1 L_2^*$ alakú nyelv uniója, ahol L_1 és L_2 reguláris prefixmentes nyelvek. P.A.S.Veloso irja le [26]-ban a prefixmentes nyelveket felismerő automatákat és ad algebrai jellemzést a reguláris prefixmentes nyelvek osztályára. Ugyanitt több, a prefixmentes nyelvekkel szoros kapcsolatban álló nyelvosztályt vizsgál, igy többek között a reguláris prefixre zárt nyelveket, a reguláris jobbideálokat és a reguláris hatvány-korlátos nyelveket. Ez utóbbiakról G. Thierrin mutatta meg, hogy nem mások, mint a véges sok reguláris prfixmentes nyelv uniójaként előálló nyelvek

/ld [24]/.

Ezzel párhuzamosan számos eredmény született a csillag-nyelvek /az L^* alakúak/ és csillag-mentes nyelvekkel kapcsolatban. Schützenberger azon eredménye, miszerint egy nyelv akkor és csak akkor csillagmentes, ha szintaktikus monoidja $\mathcal{H}$ -triviális, irányitotta rá a figyelmet a $\mathcal{J}$ -triviális, $\mathcal{R}$-triviális és $\mathcal{L}$ -triviális szintaktikus monoidokkal rendelkező nyelvek osztályainak vizsgálatára. És hangsúlyozni kell, hogy az itt adott áttekintés távolról sem teljes.

Dolgozatunk második részében több, az imént felsorolt reguláris nyelvosztály erdőkre való általánositását adjuk. Minden egyes osztályra jellemezzük az őket felismerő faautomatákat. A 4. fejezetben megadjuk a prefixmentes erdők egy algebrai jellemzését, és megmutatjuk, hogy ahhoz hasonlóan, ahogy az a megfelelő nyelvosztályok között is fennáll, a reguláris prefismentes és a reguláris prefixteljes erdők, valamint a reguláris jobbidálok között bijekció létesithető. Igazoljuk továbbá, hogy a reguláris prefixteljes erdők osztályára nem adható Kleene-tipusú jellemzés. Az egy végállapotú faautomatákkal foglalkozó rész eredményei szerint egy erdő akkor és csak akkor ismerhető fel ilyen faautomatával, ha $R^{x_1 x_{n+1} \cdots x_{n+1}} S$ alakú, ahol R és S reguláris prefixmentes erdők. Végül a reguláris hatvány-korlátos erdők bevezetése után igazoljuk G. Thierrin fentebb ismertetett eredményének általánositását.

Az 5. fejezetben a definit, a nilpotens és a forditott definit erdőkkel foglalkozunk. Az őket felismerő faautomaták jellemzése mellett normálforma tételeket mondunk ki az egyes osztályokra.

2. Erdők és faautomaták

Ebben a fejezetben bevezetjük azokat a fogalmakat és jelöléseket, amelyeket a dolgozat során használni fogunk. Rövid összefoglalását adjuk azoknak az ismert eredményeknek, amelyekre szükségünk lesz a későbbi fejezetekben. Ezeket az eredményeket hivatkozás nélkül fogjuk használni a továbbiakban. Jelöléseinkben Gécseg Ferenc és Magnus Steinby "A faautomaták algebrai elmélete" cimü dolgozatához tartjuk magunkat /lásd [11]/.

Az $\langle F, r \rangle$ rendezett párt rangolt ábécének nevezzük, ha F szimólumok egy véges halmaza, r pedig F -nek egy leképezése a nemnegativ egészek halmazába. F elemeit müveleti jeleknek hivjuk, és ha $r(f) = m$ az $f \in F$ szimbólumra, akkor azt mondjuk, hogy f m-változós müveleti jel. A továbbiakban $\langle F, r \rangle$ helyett egyszerüen F -et irunk, és F^m -mel jelöljük az F m-változós müveleti jeleinek halmazát.

Legyen Z olyan halmaz, amelyre $F \cap Z = \emptyset$. A Z -feletti F -fák $T_F(Z)$ halmaza az a legszükebb U halmaz, amelyre

(1) $F^0 \cup Z \subseteq U$ és

(2) $f \in F^m$ és $p_1, \dots, p_m \in U$ esetén $f(p_1, \dots, p_m) \in U$.

Tekintsük változók egy $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ halmazát, és bármely $n \geq 0$ -re legyen $X_n = \{x_1, \dots, x_n\}$. Az X_n feletti F -fákat n-változós fáknak nevezzük, és a $T_F(X_n)$ halmazra a $T_{F,n}$ jelölést használjuk. Az F -fák halmazán a

$$T_F = \bigcup_{n=0}^{\infty} T_{F,n}$$

halmazt értjük. A $T_{F,n}$ részhalmazait <u>n-változós F-erdőknek</u> nevezzük. Egy halmazt F-erdőnek mondunk, ha n-változós F-erdő valamely $n \geq 0$ -ra.

Egy $p \in T_F(Z)$ fa <u>részfáinak</u> $sub(p)$ halmazát az alábbi módon definiáljuk:

(1) ha $p \in F^0 \cup Z$, akkor $sub(p) = \{p\}$,

(2) ha $p = f(p_1, \dots, p_m)$, akkor $sub(p) = \{p\} \cup sub(p_1) \cup \dots \cup sub(p_m)$.

Világos, hogy ha $p \in T_{F,n}$, akkor $sub(p)$ n-változós F-erdő. Egy $T \subseteq T_{F,n}$ erdő részfáinak halmaza mindazon n-változós F-fákból áll, amelyek részfái valamely T-beli fának, azaz

$$sub(T) = \bigcup (sub(p) \mid p \in T).$$

A $p \in T_F(Z)$ fa $h(p)$ <u>magasságát</u> a következő két összefüggés definiálja:

(1) ha $p \in F^0 \cup Z$, akkor $h(p) = 0$,

(2) ha $p = f(p_1, \dots, p_m)$, akkor

$$h(p) = \max(h(p_i) \mid i = 1, \dots, m) + 1 .$$

Végül a $p \in T_F(Z)$ fa $fr(p)$ <u>frontját</u> az alábbi módon értelmezzük:

(1) ha $p \in Z$, akkor $fr(p) = p$,

2 ha $p \in F^0$, akkor $fr(p) = \varepsilon$, (ε jelöli az üres szót);

3 ha $p = f(p_1, \dots, p_m)$, akkor $fr(p) = fr(p_1) \cdots fr(p_m)$.

Tekintsünk ezekután egy $p \in T_{F,n}$ fát és egy x_i változót ($1 \leq i \leq m$). Jelölje $\mu(x_i, p)$ az x_i p-beli előfordulásainak számát, ha $x_i \in sub(p)$, különben pedig legyen $\mu(x_i, p) = 0$.

Szegedi Tudományegyetem Könyvtára SZEGED

A $t_1^1, \dots, t_{\mu(x_1,p)}^1, \dots, t_1^n, \dots, t_{\mu(x_n,p)}^n$ k-változós F-fákra

$$p\langle x_1 \leftarrow t_1^1, \dots, t_{\mu(x_1,p)}^1, \dots, x_n \leftarrow t_1^n, \dots, t_{\mu(x_n,p)}^n\rangle \qquad (1)$$

jelöli azt a k-változós F-fát, ami p-ből ugy keletkezik, hogy az x_i változó j-edik p-beli előfordulását a t_j^i fával helyettesitjük minden $i = 1, \dots, n$ és $j = 1, \dots, \mu(x_i, p)$ esetén. Az x_i j-edik p-beli előfordulása az x_i-nek p-ben, mint stringben való j-edik előfordulását jelenti. Ha minden i-től különböző j-re $t_1^j = \dots = t_{\mu(x_j,p)}^j = x_j$, akkor (1)-re a

$$p\langle x_i \leftarrow t_1^i, \dots, t_{\mu(x_i,p)}^i\rangle \qquad (2)$$

jelölést használjuk. Végül, ha (2)-ben $t_1^i = \dots = t_{\mu(x_i,p)}^i = t$ akkor egyszerüen $p\langle x_i \leftarrow t\rangle$ -t irunk.

A most bevezetett jelölések segitségével a $T \subseteq T_{F,n}$ és a $T_1, \dots, T_n \subseteq T_{F,k}$ erdők <u>fa-konkatenációján</u> azt a $T(x_1 \leftarrow T_1, \dots, x_n \leftarrow T_n)$ k-változós F-erdőt értjük, amelyre

$$T(x_1 \leftarrow T_1, \dots, x_n \leftarrow T_n) = \{ p\langle x_1 \leftarrow t_1^1, \dots, t_{\mu(x_1,p)}^1, \dots, x_n \leftarrow t_1^n, \dots, t_{\mu(x_n,p)}^n\rangle \mid p \in T \text{ és } t_1^i, \dots, t_{\mu(x_i,p)}^i \in T_i \; ; \; i = 1, \dots, n \}$$

Ha minden i-tól különböző j-re $T_j = \{x_j\}$ akkor $T(x_1 \leftarrow T_1, \dots, x_n \leftarrow T_n)$-re a $T \cdot_{x_i} T_i$ jelölést használjuk, és azt mondjuk, hogy $T_1 \cdot_{x_i} T_2$ a T_1 és T_2 erdők <u>x_i-szorzata</u>. Könnyü ellenőrizni, hogy

$$T_1 \cdot_{x_i} T_2 = \{ p\langle x_i \leftarrow t_1, \dots, t_{\mu(x_i,p)}\rangle \mid p \in T_1 \text{ és } t_1, \dots, t_{\mu(x_i,p)} \in T_2 \}.$$

Legyen $T^{0,x_i} = \{x_i\}$ és $T^{n+1,x_i} = T^{n,x_i} \cup T \cdot x_i T^{n,x_i}$ $(n \geq 0)$. T^{n,x_i}-t a T erdő n-edik <u>x_i-hatványának</u> nevezzük. A T összes x_i-hatványának unióját pedig a T <u>x_i-iteráltjának</u> mondjuk, és T^{*,x_i} -nek jelöljük. Tehát

$$T^{*,x_i} = \bigcup_{n=0}^{\infty} T^{n,x_i} .$$

Egy $T \subseteq T_{F,n}$ erdőt <u>m-regulárisnak</u> nevezünk, ha T előáll véges sok m-változós F-fából az únió, az x_i-szorzat és az x_i-iterált véges számú alkalmazásával. T-t <u>regulárisnak</u> hivjuk, ha m-reguláris valamely m nemnegativ egészre.

Az $\mathcal{A} = (A, F^{\mathcal{A}})$ rendezett párt <u>univerzális algebrának</u> nevezzük, ha A egy nem-üres halmaz, $F^{\mathcal{A}}$ pedig A-n értelmezett müveletek egy halmaza. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{A}$ véges, ha A és $F^{\mathcal{A}}$ véges. Tekintsük az F rangolt ábécét és bármely $f \in F^m$ müveleti jelhez feleltessünk meg egy $f^{\mathcal{A}}$ m-változós müveletet $F^{\mathcal{A}}$-ból. Azt mondjuk, hogy az $\mathcal{A} = (A, F^{\mathcal{A}})$ univerzális algebra <u>F-algebra</u>, ha $F^{\mathcal{A}}$ m-változós müveleteinek halmaza megegyezik az $\{f^{\mathcal{A}} \mid f \in F^m\}$ halmazzal, minden m nemnegativ egészre. $f^{\mathcal{A}}$-t az $f \in F$ müveleti jel realizáltjának nevezzük. Tekintettel arra, hogy a dolgozatban csak véges univerzális algebrákkal foglalkozunk, a "véges" jelzőt egyszerüen elhagyjuk, és algebrán mindig véges univerzális algebrát értünk.

Legyen $\mathcal{A} = (A, F^{\mathcal{A}})$ F-algebra és tekintsük a $p \in T_{F,n}$ fát. A p fa $\mathcal{A}$-ban indukál egy $p^{\mathcal{A}} : A^n \to A$ leképezést, melyet az

(1) ha $p = x_i$ $(1 \leq i \leq n)$, akkor $p^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n) = a_i$,

(2) ha $p = f(p_1, \dots, p_m)$, akkor

$$p^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n) = f^{\mathcal{A}}(p_1^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n), \dots, p_m^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n)) .$$

összefüggésekkel definiálunk.

Ezen előkészitések után már bevezethetjük a faautomata fogalmát. Az $\underline{A} = (\mathcal{A}, \underline{a}, A')$ rendezett hármast <u>n-változós F-automatának</u> nevezzük, ahol $\mathcal{A} = (A, F^{\mathcal{A}})$ F-algebra, $\underline{a} = (a^{(1)}, \dots, a^{(n)})$ <u>az iniciális vektor</u> $(a^{(1)}, \dots, a^{(n)} \in A)$ és $A' \subseteq A$ a <u>végállapotok halmaza</u>. Az A elemeit az $\underline{A}$ állapotainak nevezzük. Ha F-et /és n-et/ nem specifikáljuk, akkor n-változós faautomatáról /faautomatáról/ beszélünk.

Az n-változós F-automaták n-változós F-erdők felismerésére alkalmas eszközök. Pontosabban, azt mondjuk, hogy az $\underline{A}$ n-változós F-automata <u>felismeri</u> a $p \in T_{F,n}$ fát, ha $p^{\mathcal{A}}(\underline{a}) \in A'$. Mindazon $p \in T_{F,n}$ fák halmazát, melyeket az $\underline{A}$ felismer $T(\underline{A})$-val jelöljük. A $T \subseteq T_{F,n}$ erdőt <u>felismerhetőnek</u> nevezzük, ha alkalmas $\underline{A}$ n-változós F-automatára $T = T(\underline{A})$.

Jól ismert eredménye a faautomaták elméletének, hogy a reguláris erdők osztálya megegyezik a faautomatákkal felismerhető erdők osztályával. Pontosabban, bármely $T \subseteq T_{F,n}$ reguláris erdőhöz megadható egy n-változós F-automata úgy, hogy $T = T(\underline{A})$ és forditva, minden $\underline{A}$ n-változós F-automatára $T(\underline{A})$ reguláris n-változós F-erdő. Ezen állitás konstruktiv bizonyitásából részeredményként adódik, hogy a felismerhető erdők osztálya zárt a reguláris müveletkre /unió, x_i-szorzat, x_i-iterált/ nézve. A későbbiek során használni fogjuk azt a tényt is, hogy a reguláris erdők zártak a fa-konkatenáció képzésére is.

Legyen A nemüres halmaz. Az $f: A^m \to \mathcal{P}(A)$ leképezést A-n értelmezett <u>nemdeterminisztikus n-változós müveletnek</u> nevezzük, ahol $\mathcal{P}(A)$ jelöli az A részhalmazainak halmazát. Az $\mathcal{A} = (A, F^{\mathcal{A}})$

rendezett párt <u>nemdeterminisztikus algebrának</u> nevezzük, ha A nemüres halmaz, $F^{\mathcal{A}}$ pedig A-n értelmezett nemdeterminisztikus müveletek egy halmaza. $\mathcal{A}$ véges, ha A és $F^{\mathcal{A}}$ véges. Ugyanúgy, ahogy ezt algebrák esetén tettük, a továbbiakban nemdeterminisztikus algebrán mindig véges nemdeterminisztikus algebrát értünk. Legyen F rangolt ábécé. Az $\mathcal{A}=(A,F^{\mathcal{A}})$ nemdeterminisztikus algebrát <u>nemdeterminisztikus F-algebrának</u> nevezzük, ha bármely n nemnegativ egészre az $\{f^{\mathcal{A}} \mid f \in F^{n}\}$ halmaz megegyezik az $F^{\mathcal{A}}$ n-változós nemdeterminisztikus müveleteinek halmazával.

Az n-változós p F-fák az $\mathcal{A}=(A,F^{\mathcal{A}})$ nemdeterminisztikus algebrában egy $p^{\mathcal{A}}: P(A)^{n} \to P(A)$ leképezést indukálnak a következő módon:

(1) ha $p=x_i$ $(1 \le i \le n)$, akkor $p^{\mathcal{A}}(A_1,\dots,A_n)=A_i$,

(2) ha $p=f(p_1,\dots,p_n)$, akkor

$$p^{\mathcal{A}}(A_1,\dots,A_n)=\bigcup\left(f^{\mathcal{A}}(b_1,\dots,b_n) \mid b_i \in p_i^{\mathcal{A}}(A_1,\dots,A_n);\ i=1,\dots,n\right).$$

Az $\underline{A}=(\mathcal{A},\underline{a},A')$ rendszert <u>nemdeterminisztikus n-változós F-automatának</u> nevezzük, ahol $\mathcal{A}=(A,F^{\mathcal{A}})$ nemdeterminisztikus F-algebra, $\underline{a}=(A^{(1)},\dots,A^{(n)})$ az <u>iniciális vektor</u> $(A^{(i)} \subseteq A,\ i=1,\dots,n)$ és $A' \subseteq A$ a <u>végállapotok halmaza</u>. Az $\underline{A}=(\mathcal{A},\underline{a},A')$ nemdeterminisztikus n-változós F-automatára jelölje $T(\underline{A})$ mindazon $p \in T_{F,n}$ fák halmazát, amelyekre $p^{\mathcal{A}}(\underline{a}) \cap A' \neq \emptyset$. $T(\underline{A})$-t az $\underline{A}$ által <u>felismert</u> erdőnek nevezzük. Azt mondjuk továbbá, hogy a $T \subseteq T_{F,n}$ erdő <u>felismerhető</u> nemdeterminisztikus faautomatával, ha létezik olyan $\underline{A}$ nemdeterminisztikus n-változós F-automata, hogy $T=T(\underline{A})$.

Vegyük észre, hogy az n-változós F-automaták speciális nemdeterminisztikus n-változós F-automaták. Továbbá, ha a fák felismerésének nemdeterminisztikus faautomatákra adott defi-

nicióját faautomatákra alkalmazzuk, akkor visszakpjuk az ott definiált felismerés fogalmát. Eszerint a nemdeterminisztikus faautomatával felismerhető erdők osztálya tartalmazza a faautomatával felismerhető erdők osztályát. Tekintsük most az $\underline{A} = (\mathcal{A}, \underline{a}, A')$ nemdeterminisztikus n-változós F-automatát. Legyen $\mathcal{B} = P(A)$, $\underline{b} = \underline{a}$, $\mathcal{B}' = \{C \mid C \subseteq A \text{ és } C \cap A' \neq \emptyset\}$ és bármely $f \in F^m$ és $B_1, \dots, B_m \in \mathcal{B}$ esetén $f^{\mathcal{B}}(B_1, \dots, B_m) = f^{\mathcal{A}}(B_1, \dots, B_m)$. Könnyen ellenőrizhető, hogy a $\underline{B} = (\mathcal{B}, \underline{b}, \mathcal{B}')$ n-változós F-automatára $T(\underline{A}) = T(\underline{B})$, ahol $\mathcal{L} = (\mathcal{B}, F^{\mathcal{B}})$. Eszerint a nemdeterminisztikus faautomatákkal és a faautomatákkal felismerhető erdők osztályai megegyeznek. Az itt ismertetett konstrukciót részhalmaz-konstrukciónak nevezzük.

Vegyünk egy $\underline{A} = (\mathcal{A}, \underline{a}, A')$ faautomatát és az $a, b \in A$ állapotokat. Azt mondjuk, hogy a b állapot <u>elérhető</u> az a állapotból, ha létezik olyan legalább egy magasságú m-változós p fa és léteznek olyan $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_m$ állapotok, hogy $x_i \in \mathrm{var}(p)$ és $p^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \dots, a_m) = b$. Továbbá azt mondjuk, hogy a b állapot <u>elérhető</u> az $(a_1, \dots, a_m)$-esből, ha valamely p m-változós fára $p^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_m) = b$. Jelöljük ezekután $C(A)$-val mindazon $\underline{A}$-beli állapotok halmazát, melyek elérhetők az $\underline{A}$ iniciális vektorából. Könnyü látni, hogy $C(A)$ zárt az $F^{\mathcal{A}}$ müveleteire nézve. Igy, ha $F^{\mathcal{C}}$ jelöli az $F^{\mathcal{A}}$-beli müveletek $C(A)$-ra való restrikcióit, akkor a $\mathcal{C} = (C(A), F^{\mathcal{C}})$ $\mathcal{A}$-nak részalbebrája. A $C(\underline{A}) = (\mathcal{C}, \underline{a}, C')$ n-változós F-automatára $T(\underline{A}) = T(C(\underline{A}))$ ahol $C' = C(A) \cap A'$. $C(\underline{A})$-t az $\underline{A}$ összefüggő részautomatájának nevezzük, magát $\underline{A}$-t pedig <u>összefüggőnek</u> hivjuk, ha megegyezik összefüggő részautomatájával.

Az $\underline{A} = (\mathcal{A}, \underline{a}, A')$ n-változós F-automata a és b állapotait <u>ekvivalenseknek</u> mondjuk, jelekben $a \varrho_{\underline{A}} b$, ha minden $m \geq 0$, $p \in T_{F,m}$, $1 \leq i \leq m$ és $c_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, c_m \in A$-ra

$$p^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \dots, a_m) \in A'$$

akkor és csak akkor teljesül, ha

$$p^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_m) \in A'.$$

$\varrho_{\underline{A}}$ az $\mathcal{A}$ algebra olyan kongruenciája, hogy A' előáll $\varrho_{\underline{A}}$ osztályok egyesitéseként. Jelöljük $a/\varrho_{\underline{A}}$-val az a állapotot tartalmazó $\varrho_{\underline{A}}$ osztályt. Az

$$\underline{A}/\varrho_{\underline{A}} = (\mathcal{A}/\varrho_{\underline{A}}, (a^{(1)}/\varrho_{\underline{A}}, \dots, a^{(n)}/\varrho_{\underline{A}}), \{a/\varrho_{\underline{A}} \mid a \in A'\})$$

faautomatát az $\underline{A}$-hoz <u>tartozó redukált faautomatának</u> nevezzük. Magát az $\underline{A}$-t <u>redukáltnak</u> hivjuk, ha megegyezik a hozzá tartozó redukált faautomatával. Nem nehéz belátni, hogy $T(\underline{A}) = T(\underline{A}/\varrho_{\underline{A}})$ bármely $\underline{A}$ faautomatára teljesül. Összefüggő $\underline{A}$ és $\underline{B}$ faautomaták esetén pedig $T(\underline{A}) = T(\underline{B})$ akkor és csak akkor teljesül, ha a hozzájuk tartozó redukált faautomaták izomorfak, vagyis, ha létezik olyan $\varphi : \mathcal{A}/\varrho_{\underline{A}} \to \mathcal{B}/\varrho_{\underline{B}}$ izomorfizmus, amelyre $b^{(i)}/\varrho_{\underline{B}} = (a^{(i)}/\varrho_{\underline{A}})\varphi$ $(i = 1, \dots, m)$ és $B'/\varrho_{\underline{B}} = (A'/\varrho_{\underline{A}})\varphi$. Végül megjegyezzük, hogy bármely $\underline{A}$ faautomatához az $A/\varrho_{\underline{A}}$ effektiven megkonstruálható.

3. Erdők racionális reprezentációja

F-algebrák egy K osztályát <u>teljesnek</u> nevezzük ha bármely $T \subseteq T_{F,n}$ felismerhető erdőre létezik olyan $\mathcal{A}$ algebra K-ban, amelyből kiválasztható egy olyan $\underline{a} = (a^{(1)}, \dots, a^{(n)})$ n-es és egy olyan $A' \subseteq A$, hogy $T = T(\underline{A})$ teljesül az $A = (\mathcal{A}, \underline{a}, A')$ faautomatára. A teljesség fogalmát Gécseg Ferenc és Horváth Gyula vezette be [9]-ben, ahol megtalálható a teljes osztályok egy jellemzése is. Nevezetesen, egy nem csupa 0-változós müveleti jelekből álló F rangolt ábécé esetén F-algebrák egy K osztálya akkor és csak akkor teljes, ha bármely $\mathcal{A}$ F-algebrához létezik olyan $\mathcal{B} \in K$ F-algebra, hogy $\mathcal{A}$ előáll a $\mathcal{B}$ egy részalgebrájának homomorf képeként. Eszerint, ha K F-algebrák egy teljes varietása /a direkt szórzatra, a részalgebra-képzésre és a homomorfiára zárt osztálya/, akkor K tartalmazza az összes F-algebrát és igy szükségképpen az összes végtelen F-algebrát is. /Emlékeztetünk rá, hogy algebra alatt véges algebrát értünk/. Ez tehát azt jelenti, hogy nem létezik F-algebráknak teljes és valódi varietása.

Igy természetes módon vetődik fel a kérdés, hogy általánosítható-e az erdők reprezentációjának /felismerésének/ a fogalma

oly módon, hogy az új reprezentáció egyrészt ne bővitse a felismerhető erdők körét, másrészt viszont létezzen valamely F nem triviális rangolt ábécé /vagy ábécék/ felett F -algebráknak /ezen új reprezentáció mellett/ teljes nem-triviális varietása. E problémára Gécseg Ferenc adott választ [10]-ben, ahol bevezette az erdők racionális reprezentációjának fogalmát és megmutatta, hogy ha az F rangolt ábécé egy 0-változós, egy 1-változós és egy 2-változós müveleti jelből áll, akkor létezik F -algebrának nem triviális racionálisan teljes varietása.

Ebben a fejezetben a racionális reprezentáció egy általánositásával foglalkozunk, melyet fr-reprezentációnak nevezünk. Megmutatjuk, hogy egy F rangolt ábécé felett akkor csak akkor létezik fr-teljes nem triviális varietás ha F tartalmaz egy 0-változós és egy legalább 2-változós müveleti jelet.

<u>3.1. F_r-homomorfizmus és fr-beágyazás</u>. Tekintsük az F és a G rangolt ábécéket. Az $\alpha : T_F \to T_G$ leképezést <u>fr-homomorfizmusnak</u> /front-homomofizmusnak/ nevezzük ha kielégiti az alábbi feltételeket:

(1) $\alpha(x_i) = x_i \quad (i = 1, 2, \dots)$,

(2) $fr(\alpha(f(x_1, \dots, x_m))) = x_1 \dots x_m$, ahol $f \in F^m \ (m \geq 0)$,

(3) $\alpha(f(p_1, \dots, p_m)) = \alpha(f)\langle x_1 \leftarrow \alpha(p_1), \dots, x_m \leftarrow \alpha(p_m)\rangle$, ahol $\alpha(f)$-fel az $\alpha(f(x_1, \dots, x_m))$ -et röviditettük.

<u>1. Követelmény</u>. Bármely $p \in T_F$ fára és bármely $\alpha : T_F \to T_G$ fr -homomorfizmusra

$$fr(\alpha(p)) = fr(p) . \tag{3}$$

<u>2. Követelmény</u>. Ha az $\alpha : T_F \to T_G$ $f\gamma$-homomorfizmus olyan, hogy bármely $f \in F^{m}$ $(m \geq 1)$-re $h(\alpha(f(x_1,\dots,x_m))) \geq 1$, akkor minden $p \in T_F$ -re

$$h(\alpha(p)) \geq h(p)$$

teljesül.

<u>Bizonyitás</u>. Legyen $p \in T_F$. Ha $h(p) = 0$ akkor állitásunk trviális. Tegyük fel, hogy a (3) már igaz minden olyan F-fára, melynek magassága kisebb, mint a $p = f(p_1,\dots,p_m)$ magassága. Ekkor

$$\begin{aligned} h(\alpha(p)) &= h(\alpha(f)\langle x_1 \leftarrow \alpha(p_1),\dots,x_m \leftarrow \alpha(p_m)\rangle) \geq \\ &\geq 1 + \max(h(\alpha(p_i)) \mid i=1,\dots,m) \geq 1 + \max(h(p_i) \mid i=1,\dots,m) = \\ &= h(p). \quad \square \end{aligned}$$

Tetszőleges F és G rangolt ábécé esetén nem feltétlenül létezik $f\gamma$-homomorfizmus T_F és T_G között. Például, ha G-ben minden müveleti jel 1-változós, F-ben pedig létezik egy legalább kétváltozós müveleti jel, akkor nem létezhet T_F és T_G között $f\gamma$-homomorfizmus, hiszen T_G-ben nincs olyan p fa amelyre $|f\gamma(p)| \geq 2$.

Az F rangolt ábécére legyen

$$S(F) = \{ m \mid \exists f \in F \text{, hogy } \gamma(f) = m \}.$$

Az m természetes számra $\tilde{m}$-mal jelöjük az $\{1,\dots,m\}$ halmazt.

<u>1. Tétel</u>. Az F és G rangolt ábécékre legyen $S(F) = \{m_1,\dots,m_r\}$ és $S(G) = \{m_1,\dots,m_s\}$. Ha létezik $f\gamma$-homomorfizmus T_F és T_G között, akkor alkalmas $\varphi : \tilde{r} \to \tilde{s}$ leképezésre

$$(m_1 - 1, \dots, m_s - 1) \mid (n_1 - m_{1\varphi}, \dots, n_r - m_{r\varphi}) . \qquad (4)$$

<u>Bizonyitás</u>. Legyen $\alpha : T_F \to T_G$ f_r-homomorfizmus. Ha G-ben van 0-változós müveleti jel, akkor (4) bármely $\varphi : \tilde{r} \to \tilde{s}$ leképezésre teljesül, hiszen ekkor

$$(m_1 - 1, \dots, -1, \dots, m_s - 1) = 1 .$$

Ellenkező esetben vegyünk egy $p \in T_F$ egy magasságú fát és legyen $q = \alpha(p)$. Ekkor valamely $k \in \tilde{r}$ -ra

$$|f_r(q)| = |f_r(p)| = n_k . \qquad (5)$$

Vegyük észre, hogy bármely $t \in T_G$ fa reprezentálható egy hurokmentes összefüggő gráffal, melynek csúcsai a $G \cup X$ halmazzal vannak megcimkézve úgy, hogy valahányszor egy csúcs cimkéje az f müveleti jel, mindannyiszor pontosan $r(f)$ él indul ebből a csúcsból. Vegyük tehát a q fát reprezentáló Q gráfot. (5) következtében Q -nak n_k levele van. Hagyjuk el Q -ból az összes olyan levelet, amik a Q valamely egy magasságú részfájához tartoznak. A keletkező gráfnak $n_k - (m_{i_1} - 1)$ levele van, valamilyen $i_1 \in \tilde{s}$ -ra. Folytassuk a Q egy magasságú részfáihoz tartozó leveleinek törlését addig, amig egy 1-magasságú fához jutunk. Minden egyes lépésben az aktuális fa leveleit $(m_{i_v} - 1)$-gyel csökkentettük, valamely $i_v \in \tilde{s}$ -ra. Az eljárás végén pedig egy m_j levelü 1-magasságú fához jutunk ($j \in \tilde{s}$). Igy alkalmas $l_1, \dots, l_s$ nemnegativ egészekre kapjuk, hogy

$$n_k - l_1(m_1 - 1) - \dots - l_s(m_s - 1) = m_j , \qquad (6)$$

amiből

$$n_k - m_j = \sum_{i=1}^{s} l_i (m_i - 1) . \tag{7}$$

Legyen d a legnagyobb közös osztója az $m_1 - 1, \dots, m_s - 1$ számoknak. Ekkor d osztja a (7) jobboldalát és igy osztója $(n_k - m_j)$ -nek is.

Jelöljük ψ -vel a $k \to j$ megfeleltetést, azaz legyen

$$k\psi = j \tag{8}$$

A kiindulási p fa tetszőleges volt, igy mig az végigfut a T_F egy magassgú elemeinek halmazán, addig k végig kell hogy fusson /nem feltétlenül egyszer/ az $1, \dots, r$ egészeken. Ezalatt bármely $k \in \tilde{r}$ -ra, $k\psi$ kijelöli az $\tilde{s}$ egy részhalmazát. Legyen a φ a $\{k\psi \mid k \in \tilde{r}\}$ rendszer egy kiválasztási függvénye. (7) szerint $n_k - m_{k\varphi}$ osztható d -vel minden $k \in \tilde{r}$ -re, amiből kapjuk, hogy d osztója azok legnagyobb közös osztójának is. □

A (4) feltétel sajnos nem elégséges. Ugyanis, ha például F egy darab unér müveleti jelből, G pedig egy darab binér müveleti jelből áll, akkor (4) teljesül, de mint korábban láttuk T_F és T_G között nem létezik f_r-homomorfizmus.

<u>2. Tétel</u>. Használva az előző tétel jelöléseit, annak szükséges és elégséges felétele hogy T_F és T_G között létezzen f_r-homomorfizmus az, hogy létezzen olyan $\varphi : \tilde{r} \to \tilde{s}$ leképezés és létezzenek az $l_1, \dots, l_s$ nemnegative egészek úgy, hogy

$$n_k = m_{k\varphi} + \sum_{i=1}^{s} l_i (m_i - 1) \quad (k = 1, \dots, r) . \tag{9}$$

József Attila Tudományegyetem Központi Könyvtára SZEGED

Bizonyitás. A feltételek szükségessége nyilvánvaló az előző tétel alapján.

Mielőtt hozzáfognánk az elégségesség igazolásához, megmutatjuk, hogy ha az n természetes szám

$$n = m_i + y_1(m_1 - 1) + \dots + y_s(m_s - 1)$$

alakú ($i \in \tilde{S}$ és $y_1, \dots, y_s$ nemnegativ egész), akkor létezik olyan q fa T_G -ben, hogy

$$f\tau(q) = x_1 \dots x_n .$$

s szerinti teljes indukcióval bizonyitunk. Ha $s = 1$ akkor

$$n = m_1 + y_1(m_1 - 1)$$

és igy ha g a G rangolt ábécé m_1 -változós müveleti jele, akkor a

$$g(\dots g(g(x_1, \dots, x_{m_1}), x_{m_1+1}, \dots, x_{2m_1-1}), \dots, x_n)$$

fa megfelelő. Megjegyezzük, hogy ez a választás lehetséges, mert $n > 0$ maga után vonja, hogy $m_1 > 0$.

Most tegyük fel, hogy állitásunkat már igazoltuk $s = v$ -re, vagyis, hogy minden

$$n' = m_i + y_1(m_1 - 1) + \dots + y_v(m_v - 1)$$

természetes számra létezik T_G -ben a megkövetelt q' fa, és legyen

$$n = m_i + y_1(m_1 - 1) + \dots + y_{v+1}(m_{v+1} - 1) = n' + y_{v+1}(m_{v+1} - 1).$$

Legyen $g \in G$ úgy, hogy $r(g) = \mu_{v+1}$. Ekkor $\mu_{v+1} > 1$ esetén a

$$q = g(\dots g(q', x_{n'+1}, \dots, x_{n'+\mu_{v+1}}), \dots, x_n)$$

fa megfelel a kivánalmaknak. Ha $\mu_{v+1} = 1$, akkor $n = n'$ és igy $q = q'$ választással készen vagyunk. Végül, ha $\mu_{v+1} = 0$ akkor legyen q az a fa, ami q' -ből úgy keletkezik, hogy benne az $x_{n+1}, \dots, x_{n'}$ változók minden előfordulását g -vel helyettesitjük.

Ezekután tegyük fel, hogy a (9) feltételek teljesülnek az T és a G tipusokra. A T_T és T_G közötti fr -homomorfizmus létezéséhez elegendő megadnunk egy olyan α leképezést, ami a T_T legfeljebb 1-magasságú fáit képezi T_G -be úgy, hogy $fr(\alpha(p)) = fr(p)$ minden legfeljebb 1-magasságú p -fára teljesül. Ha az T rangolt ábécében nincs 0-változós müveleti jel, akkor az $f(x_{i_1}, \dots, x_{i_{n_k}})$ fára legyen

$$\alpha(f(x_{i_1}, \dots, x_{i_{n_k}})) = q(x_{i_1}, \dots, x_{i_{n_k}})$$

ahol $q \in T_G$ olyan, hogy $fr(q) = x_1 \dots x_{n_k}$. Ellenkező esetben pedig G -ben is kell 0-változós müveleti jelnek lennie, jelöljük h -val. T^0 minden f elemére legyen $\alpha(f) = h$. Ha pedig $f \in T - T^0$ n_k-változós $(k \in \tilde{r})$ és $q \in T_G$ olyan, hogy $fr(q) = x_1 \dots x_{n_k}$, akkor az $f(y_{i_1}, \dots, y_{i_{n_k}})$ fára legyen

$$\alpha(f(y_{i_1}, \dots, y_{i_{n_k}})) = q(z_{i_1}, \dots, z_{i_{n_k}}),$$

ahol

$$z_{ij} = \begin{cases} y_{ij} & \text{ha } y_{ij} \in X \\ h & \text{ha } y_{ij} \in T^0 \end{cases} \quad (j = 1, \dots, n_k). \quad \square$$

Az $\alpha : T_F \to T_G$ $f\gamma$-homomorfizmust <u>$f\gamma$-beágyazásnak</u> nevezzük ha α kölcsönösen egyértelmü. A következő tétel szükséges és elégséges feltételt ad arra, hogy bármely F rangolt ábécére létezzen $\alpha : T_F \to T_G$ $f\gamma$-beágyazás.

<u>3. Tétel</u>. A G rangolt ábécére a következő három feltétel ekvivalens:

(1) bármely F rangolt ábécére létezik $f\gamma$-homomorfizmusa T_F-nek T_G-be,

(2) bármely F rangolt ábécére létezik $f\gamma$-beágyazása T_F-nek T_G-be,

(3) G-ben létezik 0-változós és egy legalább kétváltozós müveleti jel.

<u>Bizonyitás</u>. Az előző tétel szerint (1) ekvivalens (3)-mal, a (2) $\Rightarrow$ (1) implikáció pedig nyilvánvaló. Igy elegendő megmutatni, hogy (3)-ból következik (2).

Ennek érdekében legyen $g, h \in G$ úgy, hogy $\gamma(h) = 0$ és $\gamma(g) \geq 2$. Tekintsünk egy tetszőleges F rangolt ábécét és vegyük egy kölcsönösen egyértelmü γ leképezését F-nek T_G-be úgy, hogy

$$|\delta(\gamma(f))| = \gamma(f)$$

bármely $f \in F$-re teljesüljön.

Ezután legyen β a T_F legfeljebb 1-magasságú fáinak az a leképezése T_G-be, amelyre

(1) $\beta(x_i) = x_i \quad (i = 1, 2, \dots)$

(2) $\beta(f) = g(h, \dots, h, \gamma(f))$, ha $f \in F^0$

(3) $\beta(f(y_{i1}, \dots, y_{im})) = g(h, \dots, h, \gamma(f)(\beta(y_{i1}), \dots, \beta(y_{im})))$,

ahol $y_{ij} \in X \cup F^0 \quad (j = 1, \dots, m)$ és $f \in F - F^0$.

Világos, hogy β kölcsönösen egyértelmü, továbbá, hogy hármely T_F -beli legfeljebb egy magasságú p fára

$$fr(\beta(p)) = fr(p).$$

Tegyük fel, hogy $F = \{f_1, \dots, f_k\}$ és tekintsük a következő 1-változós G -fákat:

$$q_1 = g(x_1, h, \dots, h) \quad \text{és}$$

$$q_j = g(q_{j-1}, h, \dots, h) \quad (j = 2, \dots, k).$$

Jelölje α' a T_F egy magsságú fáinak azt a T_G -be mutató leképezését, amelyre

$$\alpha'(p) = q_j(\beta(p))$$

ha $p = f_j(p_1, \dots, p_{\gamma(f)}) \in T_F$ és $h(p_i) = 1$. Legyen α az α' $T_F \to T_G$ fr -homomorfizmussá való kiterjesztése. Állitjuk, hogy α fr-beágyazás. Valóban, tegyük fel, hogy a p és q T_F -beli fákra $\alpha(p) = \alpha(q)$. Ha $p = x_i$, akkor $\alpha(p) = x_i$. Ugyanakkor

$$0 = h(x_i) = h(\alpha(p)) = h(\alpha(q)) \geq h(q) \geq 0$$

amiből $h(q) = 0$, és igy szükségképpen $q = x_i$. Ha $p = f_j \in F^0$ akkor $\alpha(p) = \alpha(f_j) = q_j(g(h, \dots, h), \gamma(f_j))$. Tegyük fel, hogy $q = f_k(t_1, \dots, t_n)$. Ekkor

$$\alpha(q) = \alpha(f_k(t_1,\dots,t_n)) = q_k(g(R,\dots,R,\gamma(f_k)(\alpha(t_1),\dots,\alpha(t_n)))).$$

Ez az egyenlőség az $\alpha(p) = \alpha(q)$ feltétellel együtt maga után vonja, hogy

$$q_j(g(R,\dots,R,\gamma(f_j))) = q_k(g(R,\dots,R,\gamma(f_k)(\alpha(t_1),\dots,\alpha(t_n)))),$$

amiből $j = k$ következik.

Végül tegyük fel hogy $p = f_j(p_1,\dots,p_m)$ és, hogy állitásunkat már minden p -nél kisebb magasságú fára igazoltuk. Ekkor $\alpha(p) = \alpha(q)$ -ból

$$q_j(g(R,\dots,R,\gamma(f_j)(\alpha(p_1),\dots,\alpha(p_m)))) =$$
$$= q_k(g(R,\dots,R,\gamma(f_k)(\alpha(q_1),\dots,\alpha(q_m)))) \qquad (10)$$

következik, feltéve hogy $q = f_k(q_1,\dots,q_m)$ alakú. (10) csak úgy lehetséges, ha $q_j = q_k$, ami viszont $j = k$ -val ekvivalens. Igy (10)-ből kapjuk, hogy $\alpha(p_i) = \alpha(q_i)$ $(i=1,\dots,m)$, ami az indukciós feltevés értelmében implikálja a $p_i = q_i$ egyenlőséget. □

<u>3.2. $F\gamma$-reprezentáció</u>. Tekintsük a $T \subseteq T_{F,n}$ erdőt és az $\underline{A} = (\mathcal{A}, \underline{a}, A')$ n-változós G -automatát. Azt mondjuk, hogy T <u>$f\gamma$-felismerhető</u> $\underline{A}$ -val / T -t az $\underline{A}$ $f\gamma$-reprezentálja/, ha létezik olyan $\alpha : T_F \to T_G$ $f\gamma$-beágyazás, hogy $\alpha(T) = T(\underline{A})$. Először megmutatjuk a felismerhető és az $f\gamma$-felismerhető erdők osztályai megegyeznek.

<u>4. Tétel</u>. Egy erdő akkor és csak akkor reguláris ha $\mathfrak{f}\gamma$-felismerhető faautomatával.

<u>Bizonyitás</u>. Tegyük fel, hogy a $T \subseteq T_{F,n}$ erdő $\mathfrak{f}\gamma$-felismerhető az $\underline{A} = (\mathcal{A}, \underline{a}, A')$ n-változós G-automatával. Ekkor alkalmas $\alpha : T_F \to T_G$ $\mathfrak{f}\gamma$-beágyazásra $\alpha(T) = T(\underline{A})$. Legyen $\mathcal{B} = (A, F^{\mathcal{B}})$ az az F-algebra, amelyre

$$f^{\mathcal{B}}(a_1, \dots, a_m) = \alpha(f(x_1, \dots, x_m))^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_m),$$

valahányszor $f \in F^m (m \geq 1)$ és $a_1, \dots, a_m \in A$. Az F 0-változós müveleti jeleire pedig legyen

$$f^{\mathcal{B}} = \alpha(f)^{\mathcal{A}}.$$

Állitjuk, hogy a $\underline{B} = (\mathcal{B}, \underline{a}, A')$ n-változós F-automatára $T = T(\underline{B})$. Valóban $p \in T(\underline{B})$ akkor és csak akkor, ha $p^{\mathcal{B}}(\underline{a}) \in A'$. Ugyanakkor $\alpha(p)^{\mathcal{A}}(\underline{a}) = p^{\mathcal{B}}(\underline{a}) \in A'$ azzal ekvivalens, hogy $\alpha(p) \in T(\underline{A})$ ez pedig akkor és csak akkor igaz, ha $p \in T$. Ezzel az elégségességet beláttuk, a szükségesség pedig triviális. □

G-algebrák egy K osztályait <u>$\mathfrak{f}\gamma$-teljesnek</u> nevezzük, ha bármely F rangolt ábécé és $T \subseteq T_{F,n}$ reguláris erdőhöz létezik olyan $\mathcal{A} \in K$ algebra, melyből kiválasztható olyan $\underline{a} = (a^{(1)}, \dots, a^{(n)})$ iniciális vektor és olyan $A' \subseteq A$ végállapothalmaz, hogy az $\underline{A} = (\mathcal{A}, \underline{a}, A')$ faautomata $\mathfrak{f}\gamma$-felismeri T-t.

Célunk nemtriviális $\mathfrak{f}\gamma$-teljes varietás létezésének bizonyitása. Ennek érdekében tekintsünk egy olyan G rangolt ábécét, amelyben létezik egy h 0-változós és egy g legalább kétváltozós müveleti jel. Vegyük továbbá a

$$g(h,\dots,h,g(h,\dots,h)) = g(h,\dots,h,g(h,\dots,h),g(h,\dots,h)) \quad (11)$$

azonosságot. Az egyszerüség kedvéért legyen

$$t_1 = g(h,\dots,h,g(h,\dots,h))$$

és

$$t_2 = g(h,\dots,h,g(h,\dots,h),g(h,\dots,h)) .$$

A következő négy állitás a [10]-beli 2., 3., 4. és 5. lemma közvetlen átfogalmazása.

<u>1. Lemma.</u> Ha a p n-változós G-fára sem t_1 sem pedig t_2 nem részfája p-nek, akkor $\{p\}$ felismerhető olyan $\underline{A} = (\mathcal{A}, \underline{a}, A')$ n-változós G-automatával, hogy $\mathcal{A}$-ban a (11) azonosság teljesül.

<u>Bizonyitás.</u> Legyen $A = sub(p) \cup \{x_1,\dots,x_n\} \cup \{*\}$ és bármely $f \in G^m$ és $a_1,\dots,a_m \in A$ -ra legyen

$$f^{\mathcal{A}}(a_1,\dots,a_m) = \begin{cases} f(a_1,\dots,a_m) & \text{ha } f(a_1,\dots,a_m) \in sub(p) \\ * & \text{különben} . \end{cases}$$

Vegyük az $\mathcal{A} = (A, T^{\mathcal{A}})$ F-algebrát, az $\underline{a} = (x_1,\dots,x_n)$ iniciális vektort és az $A' = \{p\}$ végállapot halmazt.

A $T(\underline{A}) = \{p\}$ egyenlőség világos. Mivel bármely $sub(p)$ -be nem tartozó $q \in T_{G,n}$ fára $q^{\mathcal{A}}(\underline{a}) = *$, igy a (11) azonosság teljesül $\mathcal{A}$ -n.

<u>2. Lemma</u>. Ha a $T_1, T_2 \subseteq T_{G,n}$ erdők felismerhetők rendre az $\underline{A}_1 = (\mathcal{A}_1, \underline{a}_1, A_1')$ és $\underline{A}_2 = (\mathcal{A}_2, \underline{a}_2, A_2')$ n-változós G-automatákkal úgy, hogy a (11) azonosság $\mathcal{A}_1$-en és $\mathcal{A}_2$-n teljesül, akkor $T_1 \cup T_2$ is felismerhető egy $\underline{B} = (\mathcal{B}, \underline{b}, B')$ faautomatával úgy, hogy $\mathcal{B}$-n teljesül (11).

<u>Bizonyitás</u>. Jól ismert, hogy $T_1 \cup T_2$ felismerhető egy az $\mathcal{A}_1$ és $\mathcal{A}_2$ algebrák direkt szorzatára épitett faautomatával. A direkt szorzás pedig megőrzi az azonosságokat. □

<u>3. Lemma</u>. Ha egy $T \subseteq T_{G,n}$ erdőre

(1) $\mathrm{sub}(t_i) \cap T = \emptyset$ $(i = 1,2)$, és

(2) $T = T(\underline{A})$ úgy, hogy $\mathcal{A}$-n (11) teljesül,

akkor $T^{x_1 x_i}$ $(1 \leq i \leq n)$ is felismerhető olyan $\underline{B} = (\mathcal{B}, \underline{b}, B')$ n-változós G-automatával, hogy $\mathcal{B}$-n (11) teljesül.

<u>Bizonyitás</u>. Tekintsük a $\mathcal{B} = (B, G^{\mathcal{B}})$ nemdeterminisztikus G-algebrát, ahol $B = A \cup \{*\}$ és

$$f^{\mathcal{B}}(a_1, \dots, a_m) = \begin{cases} \{f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_m), a^{(i)}\} & \text{ha } f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_m) \in A' \\ \{f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_m)\} & \text{különben} \end{cases}$$

minden $f \in G^m$ $(m \geq 0)$ és $a_1, \dots, a_m \in A$ esetén.

Legyen $B' = A' \cup \{*\}$ és $\underline{b} = (b^{(1)}, \dots, b^{(n)})$, ahol

$$b^{(j)} = \begin{cases} \{a^{(i)}, *\} & \text{ha } j = i \\ \{a^{(j)}, a^{(i)}\} & \text{ha } j \neq i \text{ és } a^{(j)} \in A' \\ \{a^{(j)}\} & \text{különben} \end{cases}.$$

Mivel a $\underline{B} = (\mathcal{G}, \mathcal{b}, B')$ nemdeterminisztikus n-változós G-automata konstrukciója megegyezik az [1]-beli 4. lemmában adott konstrukcióval, ezért a $T(\underline{B}) = T^{x_1 x_i}$ egyenlőség bizonyitását elhagyjuk.

Az (1) feltétel szerint sem h, sem pedig $g(h, \dots, h)$ nem eleme $T = T(\underline{A})$-nak, amiből $\mathcal{G}$ konstrukciója szerint kapjuk, hogy $h^{\mathcal{G}} = \{h^{\mathcal{A}}\}$ és $g(h, \dots, h)^{\mathcal{G}} = \{g^{\mathcal{A}}(h^{\mathcal{A}}, \dots, h^{\mathcal{A}})\}$. Ugyanakkor t_1 és t_2 sincs T-ben, amiből

$$t_1^{\mathcal{G}} = g(h, \dots, h, g(h, \dots, h))^{\mathcal{G}} = g^{\mathcal{G}}(\{h^{\mathcal{A}}\}, \dots, \{h^{\mathcal{A}}\}, \{g^{\mathcal{A}}(h^{\mathcal{A}}, \dots, h^{\mathcal{A}})\}$$

$$= \{g^{\mathcal{A}}(h^{\mathcal{A}}, \dots, h^{\mathcal{A}}, g^{\mathcal{A}}(h^{\mathcal{A}}, \dots, h^{\mathcal{A}}))\} = \{t_1^{\mathcal{A}}\},$$

és ugyanigy

$$t_2^{\mathcal{G}} = \{t_2^{\mathcal{A}}\}.$$

Ám a (2) feltétel szerint $t_1^{\mathcal{A}} = t_2^{\mathcal{A}}$, amiből $t_1^{\mathcal{G}} = t_2^{\mathcal{G}}$ adódik. Eszerint $\underline{B}$-re alkalmazva a részhalmazkonstrukciót egy olyan $\underline{B}'$ n-változós G-automatához jutunk, ami felismeri $T^{x_1 x_i}$-t és a $\mathcal{G}'$ algebrán a (11) azonosság teljesül.

<u>4. Lemma</u>. Ha a $T_1, T_2 \subseteq T_{G,u}$ erdőkre

(1) $sub(t_i) \cap T_j = \phi$ $(i = 1,2;\ j = 1,2)$, és

(2) $T_1 = T(\underline{A})$ és $T_2 = T(\underline{B})$ úgy, hogy az $\mathcal{A}$ és $\mathcal{G}$ algebrákon a (11) azonosság teljesül,

akkor $T_1 \cdot x_i \cdot T_2$ $(1 \leq i \leq n)$ is felismerhető olyan $\underline{C} = (\mathcal{L}, \underline{c}, C')$ n-változós G -automatával, amelyre a $\mathcal{L}$ -n (11) teljesül.

<u>Bizonyitás</u>. Ugyan úgy járunk el mint az előző lemma bizonyitásánál. Megkonstruálunk egy $\underline{C} = (\mathcal{L}, \underline{c}, C')$ nemdeterminisztikus n-változós G -automatát, amelyre $T(\underline{C}) = T_1 \cdot x_i \cdot T_2$. Ennek érdekében legyen $C = A \cup B$, $C' = A'$

$$c^{(i)} = \begin{cases} \{b^{(i)}, a^{(i)}\} & \text{ha} \quad b^{(i)} \in B' \\ \{a^{(i)}\} & \text{ha} \quad b^{(i)} \notin B' , \end{cases}$$

az összes i -től különböző j -re $(1 \leq j \leq n)$ pedig

$$c^{(j)} = \begin{cases} \{b^{(j)}, a^{(j)}, a^{(i)}\} & \text{ha} \quad b^{(j)} \in B' \\ \{b^{(j)}, a^{(j)}\} & \text{ha} \quad b^{(j)} \notin B' . \end{cases}$$

A G -beli müveleti jelek realizáltjait a következő összefüggésekkel definiáljuk. Bármely $f \in G^{m}$ $(m \geq 1)$ és $c_1, \dots, c_m \in A \cup B$ esetén

$$f^{\mathcal{L}}(c_1, \dots, c_m) = \begin{cases} \{f^{\mathcal{B}}(c_1, \dots, c_m), a^{(i)}\} & \text{ha} \quad c_1, \dots, c_m \in B \quad \text{és} \quad f^{\mathcal{B}}(c_1, \dots, c_m) \in B' , \\ \{f^{\mathcal{B}}(c_1, \dots, c_m)\} & \text{ha} \quad c_1, \dots, c_m \in B \quad \text{és} \quad f^{\mathcal{B}}(c_1, \dots, c_m) \notin B' , \\ \{f^{\mathcal{A}}(c_1, \dots, c_m)\} & \text{ha} \quad c_1, \dots, c_m \in A , \end{cases}$$

a G 0-változós f müveleti jeleire pedig

$$f^{\mathcal{L}} = \begin{cases} \{f^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{B}}, a^{(i)}\} & \text{ha} \quad f^{\mathcal{A}} \in A' \\ \{f^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{B}}\} & \text{ha} \quad f^{\mathcal{A}} \notin A' . \end{cases}$$

A $\underline{C}$ nemdeterminisztikus faautomata és az [10] 3. lemmájában szereplő, a $T_1 \cdot x_i \cdot T_2$ erdőt felismerő nemdeterminisztikus faautomata

konstrukcióinak egybeesése miatt a $T(\underline{C}) = T_1 \cdot \times_1 \cdot T_2$ egyenlőség bizonyitását elhagyjuk.

Mivel h nem eleme $T_1 \cdot T(\underline{A})$ -nak ezért $h^{\tau} = \{h^{\alpha}, h^{\beta}\}$,amiből

$$g(h, \dots, h)^{\tau} = \{g(h, \dots, h)^{\alpha}, g(h, \dots, h)^{\beta}\},$$

tekintettel arra, hogy $g(h, \dots, h)$ sem eleme T_2 -nek. Ugyanakkor az (1) feltétel biztositja, hogy sem t_1 sem t_2 nem eleme T_1 -nek, igy

$$t_1^{\tau} = f^{\tau}(\{h^{\alpha}, h^{\beta}\}, \dots, \{h^{\alpha}, h^{\beta}\}, \{g(h, \dots, h)^{\alpha}, g(h, \dots, h)^{\beta}\}) =$$

$$= \{f^{\alpha}(h^{\alpha}, \dots, h^{\alpha}, g(h, \dots, h)^{\alpha}), f^{\beta}(h^{\beta}, \dots, h^{\beta}, g(h, \dots, h)^{\beta})\} =$$

$$= \{t_1^{\alpha}, t_1^{\beta}\}.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$t_2^{\tau} = \{t_2^{\alpha}, t_2^{\beta}\}$$

és igy a (2) feltétel miatt $t_1^{\tau} = t_2^{\tau}$. Eszerint ha $\underline{C}$ -re alkalmazzuk a részhalmazkonstrukciót, akkor olyan $T_1 \cdot \times_1 \cdot T_2$ -t felismerő $\underline{C}'$ n-változós G-automatához jutunk, amelyre τ' kielégiti a (11) azonosságot.

Ezen előkészitések után kimondhatjuk ennek a fejezetnek a fő eredményét.

<u>5. Tétel</u>. A (11) azonossággal definiált varietás $f\gamma$-teljes.

<u>Bizonyitás</u>. Tekintsük azt a T_G -ből T_G -be mutató $f\gamma$ -homomorfizmust, amelyre:

(1) $\alpha(h) = g(g(h,\dots,h),h,\dots,h))$,

(2) $\alpha(g(x_{i_1},\dots,x_{i_{\gamma(g)}})) = g(g(x_{i_1},\dots,x_{i_{\gamma(g)}}),h,\dots,h))$,

(3) a T_G összes többi legfeljebb egy magasságú fáin az α az identitás.

Állitjuk, hogy α $f\gamma$-beágyazás. Ennek érdekében tegyük fel, hogy $\alpha(p) = \alpha(q)$. Ha $p = x_i$, akkor q szükségképpen egyenlő x_i -vel. Ha $p = h$, akkor q -ban nem szerepelhet g -től és h -tól különböző müveleti jel. Ugyanakkor $h(q) = 0$, mert ellenkező esetben $q = g(p_1,\dots,p_m)$, alkalmas $p_1,\dots,p_m \in T_{G,n}$ fákra, amiből

$$g(g(h,\dots,h),h,\dots,h) = g(g(\alpha(p_1),\dots,\alpha(p_m)),h,\dots,h) \quad (12)$$

következik, és ez ellentmondás, hiszen (12) csak $\alpha(p_1) = h$ esetén állhat fenn. Végül abban az esetben ha p h -tól különböző 0-változós müveleti jel, akkor a $p = q$ egyenlőség nyilvánvaló.

Tegyük fel, hogy $h(p) \geq 1$ és hogy állitásunkat már minden p -nél kisebb magasságú fára igazoltuk. Legyen $p = g_1(p_1,\dots,p_k)$ és $q = g_2(q_1,\dots,q_l)$ alakú. Ekkor $\alpha(p) = \alpha(q)$ -ból

$$\alpha(g_1)(\alpha(p_1),\dots,\alpha(p_k)) = \alpha(g_2)(\alpha(q_1),\dots,\alpha(q_l)) , \quad (13)$$

ami csak úgy lehetséges, ha $\alpha(g_1)$ és $\alpha(g_2)$ gyökere megegyezik, ez pedig α konstrukciója miatt maga után vonja, hogy $k = l$ és $g_1 = g_2$. Igy (13)-ból $\alpha(p_i) = \alpha(q_i)$ $(i = 1,\dots,k)$ adódik, és igy az indukciós feltevés szerint $p = q$.

Ezekután tekintsünk egy tetszőleges F tipust és egy $\beta : T_F \to T_G$ $f\gamma$-beágyazást. Megjegyezzük, hogy a 3. tétel értelmében β létezik. Világos, hogy ekkor $\gamma = \alpha\beta$ T_F-nek T_G-be való $f\gamma$-beágyazása. Továbbá egyrészt

$$sub(t_i) \cap \gamma(T_F) = \phi \quad (i = 1,2) \tag{14}$$

másrészt pedig bármely $p \in \gamma(T_F)$-re

$$t_i \notin sub(p) \quad (i = 1,2) \tag{15}$$

Vegyünk egy tetszőleges $T \subseteq T_{F,u}$ reguláris erdőt és tegyük fel, hogy T előáll a $p_1, \dots, p_k \in T_{F,u}$ fákból a reguláris müveletek véges számú alkalmazásával. (15) szerint $\gamma(p_1), \dots, \gamma(p_k)$ felismerhető olyan $\underline{A}_1, \dots, \underline{A}_k$ n-változós G-automatákkal, hogy az $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k$ G-algebárkon a $t_1 = t_2$ azonosság teljesül.

Vegyük észre, hogy $\gamma(T_F)$ részhalmazainak halmaza zárt a reguláris müveletekre. Valóban, ha $T_1, T_2 \subseteq \gamma(T_F)$, akkor

$$T_1 \cup T_2 = \gamma(\gamma^{-1}(T_1) \cup \gamma^{-1}(T_2)) \subseteq \gamma(T_F),$$

$$T_1 \cdot_{x_i} T_2 = \gamma(\gamma^{-1}(T_1) \cdot_{x_i} \gamma^{-1}(T_2)) \subseteq \gamma(T_F) \text{ és}$$

$$T_1^{*_{1,x_i}} = \gamma(\gamma^{-1}(T_1)^{*_{1,x_i}}) \subseteq \gamma(T_F).$$

Eszerint minden olyan $T' \subseteq T_G$ erdőre, ami előáll a $\gamma(p_1), \dots, \gamma(p_k)$ fákból a reguláris müveletek véges számú alkalmazásával, $sub(t_i) \cap T' = \phi$ $(i = 1,2)$. Speciálisan $\gamma(T)$-re

$$sub(t_i) \cap \gamma(T) = \phi \quad (i = 1,2).$$

Igy a 2. 3. és 4. lemma szerint minden olyan $T' \subseteq T_G$ erdő ami előáll a $\gamma(p_1), \dots, \gamma(p_k)$ fákból a reguláris müveletek véges

számú alkalmazásával, felismerhető egy olyan $\underline{A}'$ G-automatával, amelyre az $\mathcal{A}'$ algebrán a (11) azonosság teljesül. Tekintettel arra, hogy maga $\gamma(T)$ szerepel ezen T' erdők között, a (11) azonossággal definiált varietás f_r-teljes voltát bebizonyitottuk. □

A most bizonyitott tétel és a 3. tétel együttes alkalmazásával közvetlenül adódik, hogy

<u>3. Következmény</u>. Egy G rangolt ábácáre akkor és csak akkor létezik G-algebráknak f_r-teljes nem triviális varietása, ha G-ben van 0-változós és egy legalább két változós müveleti jel. □

Az $\underline{A} = (\mathcal{A}, \underline{a}, A')$ n-változós F-automata által felismert nyelv alatt az

$$L(\underline{A}) = \{ f_r(p) \mid p \in T(\underline{A}) \}$$

halmazt értjük. Ismeretes, hogy bármely X_n feletti kontextusmentes nyelv felismerhető n-váltpzós F-automatával alkalmas F rangolt ábécére. Legyen $L \subseteq X_n^*$ tetszőleges kontextusmentes nyelv, és legyen $\underline{B} = (\mathcal{B}, \underline{b}, B')$ olyan F-automata ami felismeri L-t. A $T(\underline{B})$ erdőhöz a 4. tétel értelmében létezik olyan $\underline{A} = (\mathcal{A}, \underline{a}, A')$ n-változós G-automata, hogy $\underline{A}$ f_r-felismeri $T(\underline{B})$-t, vagyis alkalmasan választott $\alpha : T_F \to T_G$ f_r-beágyazásra $\alpha(T(\underline{B})) = T(\underline{A})$. Ekkor

$$L(\underline{A}) = \{ f_r(p) \mid p \in T(\underline{A}) \} = \{ f_r(\alpha(q)) \mid q \in T(\underline{B}) \} =$$

$$= \{ f_r(q) \mid q \in T(\underline{B}) \} = L(\underline{B}) = L .$$

Azt kaptuk tehát, hogy létezik G-algebráknak oly nem triviális varietása, hogy bármely kontextusmentes nyelv felismerhető egy a

varietáshoz tartozó algebrára épülő faautomatával. Ezt az állitást Gécseg Ferenc és Horváth Gyula publikálta [9]-ben.

3.3. Faautomaták $f\gamma$-ekvivalenciája. Ebben a fejezetben bevezetjük a faautomaták $f\gamma$-ekvivalenciájának fogalmát és megmutatjuk, hogy létezik olyan algoritmus, melynek segitségével eldönthető, hogy két faautomata $f\gamma$-ekvivalens-e.

Ehhez szükségünk lesz a következő egyszerü állitásra.

5. Lemma. Legyen $\alpha : T_F \to T_F$ $f\gamma$-beágyazás és tegyük fel, hogy a $T \subseteq T_F$ erdőre $\alpha(T) = T$. Ekkor minden T-beli p fára

$$h(\alpha(p)) = h(p).$$

Bizonyitás. Bármely n természetes számra legyen

$$T_n = \{ p \mid p \in T \text{ és } h(p) = n \}.$$

Azt fogjuk megmutatni, hogy minden n-re $\alpha(T_n) = T_n$. Valóban, jelölje n_0 azt a legkisebb természetes számot, amire $T_{n_0} \neq \emptyset$. Ha $q \in T_{n_0}$, akkor egyrészt $\alpha^{-1}(q) \in T$, másrészt pedig $h(\alpha^{-1}(q)) \leq n_0$, amiből $\alpha^{-1}(q) \in T_{n_0}$ következik. Tehát $\alpha^{-1}(T_{n_0}) \subseteq T_{n_0}$. Ugyanakkor α^{-1} kölcsönösen egyértelmü és T_{n_0} véges. Igy α^{-1} T_{n_0}-ra való restrikciója ráképezés, azaz $\alpha^{-1}(T_{n_0}) = T_{n_0}$ és innen $\alpha(T_{n_0}) = T_{n_0}$

Tegyük fel hogy az n természetes számra $T_n \neq \emptyset$ és minden n-nél kisebb m-re $\alpha(T_m) = T_m$. Az világos, hogy minden $q \in T_n$-re $h(\alpha^{-1}(q)) \leq n$. Ha $h(\alpha^{-1}(q)) < n$ teljesülne, akkor valamely

$u < u$ esetén $\alpha^{-1}(q)$ eleme lenne T_u -nek és igy az indukciós feltevés szerint $q \in T_u$ lenne, ez pedig ellentmondás. Tehát $h(\alpha^{-1}(q)) = u$, vagy más szóval $\alpha^{-1}(q) \in T_u$. Végül ismét T_u véges volta miatt kapjuk, hogy $\alpha(T_u) = T_u$. □

Tekintsük az F és G tipusokat. F-nek G-re való rangtartó γ leképezését <u>projekciónak</u> nevezzük.

Ha az $\alpha : T_F \to T_G$ olyan $\mathfrak{F}$-homomorfizmus, amelyre

(1) minden $f \in F$ -re $h(\alpha(f(x_1, \dots, x_{r(f)}))) = 1$

(2) minden $f \in F$ -re $\alpha(f(x_1, \dots, x_{r(f)}))$ -nek pontosan $r(f)$ levele van,

(3) minden $g \in G$ -re, $g(x_1, \dots, x_{r(g)}) \in \alpha(T_F)$

akkor a

$\gamma(f) = g$ akkor és csak akkor ha $\alpha(f(x_1, \dots, x_{r(f)})) = g(x_1, \dots, x_{r(g)})$

definicióval, egy $F \to G$ projekcióhoz jutunk. γ -ra a továbbiakban a $\gamma = \alpha \restriction F$ jelölést használjuk.

A következő állitás bizonyitása rutinfeladat.

<u>6. Lemma</u>. Legyen $\alpha : T_F \to T_G$, $\beta : T_G \to T_H$ és $\gamma : T_F \to T_H$ $\mathfrak{F}$-beágyazás úgy, hogy $\gamma = \beta\alpha$. Ekkor $\gamma \restriction F$ akkor és csak akkor projekció ha $\alpha \restriction F$ és $\beta \restriction G$ is az. □

Azt mondjuk, hogy az $\underline{A}$ és $\underline{B}$ /nem feltétlenül egyazon rangolt ábécé feletti/ faautomaták <u>$\mathfrak{F}$-ekvivalensek,</u> ha az $\underline{A}$ -val $\mathfrak{F}$ -felismerhető erdők osztálya megegyezik mindazon erdők osztályaival, amelyek $\underline{B}$ -vel $\mathfrak{F}$-felismerhetők. Továbbá az $\underline{A}$ F-automatát és a $\underline{B}$ G-automatát a müveleti jeleik jelölésének erejéig ekvivalenseknek nevezzük, ha létezik F -nek olyan kölcsönösen egyértelmü

γ projekciója G-re, hogy $\gamma(T(\underline{A})) = T(\underline{B})$. Végül azt mondjuk, hogy az F rangolt ábécé redukátl $\underline{A}$-ra, ha minden $f \in F$ müveleti jelhez létezik olyan $p \in T(\underline{A})$, hogy f előfordul p-ben.

<u>6. Tétel</u>. Tegyük fel, hogy az $\underline{A}$ F-automata és a $\underline{B}$ G-automata redukált rendre F-re és G-re. Ekkor a következő két állitás ekvivalens:

(1) $\underline{A}$ és $\underline{B}$ fr-ekvivalens,

(2) $\underline{A}$ és $\underline{B}$ ekvivalens a müveleti jeleik jelölésének erejéig.

<u>Bizonyitás</u>. Mivel a (2) $\Rightarrow$ (1) implikáció nyilvánvaló, elegendő megmutatni, hogy (1) $\Rightarrow$ (2).

Először azt mutatjuk meg, hogy ha az $\alpha : T_F \to T_F$ fr-beágyazásra létezik olyan $q \in T_F$, hogy $\alpha(q) = q$, akkor minden q-ban előforuló f müveleti jelre $\alpha(f) = f$. Valóban, ha $h(q) \leq 1$ akkor állitásunk triviális. Legyen tehát $q = f(q_1, \dots, q_k)$ és tegyük fel, hogy minden olyan q' fára, amelyre $h(q') < h(q)$ állitásunk már bizonyitva van. Ekkor $\alpha(q) = q$ -ből nyerjük, hogy

$$\alpha(f)(\alpha(q_1), \dots, \alpha(q_k)) = f(q_1, \dots, q_k)$$

amiből $\alpha(f) = f$ és $\alpha(q_i) = q_i$ következik $(i = 1, \dots, k)$.

Tételünk igazolásához tegyük fel, hogy az $\underline{A}$ F-automata és a $\underline{B}$ G-automat redukált rendre F-re és G-re, továbbá, hogy $\underline{A}$ és $\underline{B}$ fr-ekvivalens. Ekkor létezik olyan $\alpha : T_F \to T_G$ és $\beta : T_G \to T_F$ fr-beágyazás úgy, hogy $\alpha(T(\underline{A})) = T(\underline{B})$ és $\beta(T(\underline{B})) = T(\underline{A})$. Igy a $\gamma = \beta\alpha$ fr-beágyazásra kapjuk, hogy $\gamma(T(\underline{A})) = T(\underline{A})$.

Használva az 1. lemmát nyerjük, hogy γ megörzi a $T(\underline{A})$ -beli fák magasságát. Az egyszerüség kedvéért jelöljük $T(\underline{A})$ -t T -vel.

Vegyük a $p_1, \dots, p_m \in T$ fákat úgy, hogy minden $f \in F$ müveleti jel forduljon elő legalább egy p_j -ben $(1 \leq j \leq m)$. Ezt megtehetjük, mert $\underline{A}$ redukált F -re. Legyen $n_j = h(p_j)$ $(j = 1, \dots, m)$ és $\gamma_j = \gamma \restriction T_{n_j}$ $(j = 1, \dots, m)$. Mivel T_{n_j} véges, γ pedig kölcsönösen egyértelmü, igy léteznek olyan $k_1, \dots, k_m$ természetes számok, hogy

$$\gamma_j^{k_j} = id_{T_{n_j}} \qquad (j = 1, \dots, m) . \tag{16}$$

Jelöljük a $k_1, \dots, k_m$ számok szorzatát k -val. (16)-ból kapjuk, hogy

$$\gamma^k \restriction (T_{n_1} \cup \dots \cup T_{n_m}) = id_{T_{n_1} \cup \dots \cup T_{n_m}}$$

Eszerint a $\gamma^k : T_F \to T_F$ $f\gamma$-beágyazásra

$$\gamma^k(p_j) = p_j \quad (j = 1, \dots, m) \tag{17}$$

A $p_1, \dots, p_m$ választása szerint (17) a tétel bizonyitásának első állitásával együtt maga után vonja, hogy $\gamma^k \restriction F = id_F$. Tehát $\gamma^k \restriction F$ kölcsönösen egyértelmü projekciója F -nek önmagára. Ebből a γ definiciójának és a 2. lemmának a felhasználásával kapjuk, hogy $\alpha \restriction F$ projekciója F -nek G -re. □

A most bizonyitott tétel értelmében ahhoz, hogy az $\underline{A}$ és $\underline{B}$ faautomata $f\gamma$-ekvivalens voltát eldöntsük, elegendő ellenőrizni, hogy létezik-e egy kölcsönösen egyértelmü γ projekció az $\underline{A}$ és

rangolt ábécéi között úgy, hogy $\gamma(T(\underline{A})) = T(\underline{B})$. Ám két rangolt ábécé közötti kölcsönösen egyértelmü projekciók halmaz véges, a $\gamma(T(\underline{A})) = T(\underline{B})$ eldöntéséhez pedig elegendő lellenőrizni, hogy a $\gamma(T(\underline{A}))$ -t illetve a $T(\underline{B})$-t felismerő összefüggő és redukált fa-automaták izomorfak-e. Igy nyertük, hogy

4. Követelmény. A faautomaták $f\gamma$-ekvivalenciájának problémája algoritmikusan eldönthető.

4. Prefixmentes erdők és néhány velük kapcsolatos reguláris erdőosztály

Ebben a fejezetben a reguláris erdők öt részosztályával foglalkozunk. Mind az öt osztályra jellemezzük azokat a faautomatákat, melyek az adott osztályba tartozó erdőket ismernek fel, és ennek segitségével tisztázzuk az egyes osztályok egymáshoz való viszonyát. Megadjuk a reguláris prefixmentes erdők egy algebrai jellemzését, majd megmutatjuk hogy a reguláris jobbideálok, a reguláris prefixteljes erdők és a reguláris prefixmentes erdők osztályai között kölcsönösen egyértelmü kapcsolat létesitehtő. Bár a prefixteljes erdők zártak a reguláris müveletekre, mint azt a

4.2. pont eredményei mutatják, mégsem adható a reguláris prefix-teljes erdők osztályára Kleene-tipusú jellemzés. Az egy végállapotú faautomatával felismerhető erdők $\mathcal{C}_1$ osztályát vizsgálva igazoljuk, hogy $\mathcal{C}_1$ -ben pontosan az $R^{x_1 x_{n+1}} \cdot x_{n+1} S$ alakú n -változós erdők találhatók, ahol R $(n+1)$-változós, S pedig n -változós reguláris prefixmentes erdő. Végül a reguláris hatvány-korlátos erdők osztályáról belátjuk, hogy az megegyezik a reguláris prefixmentes erdők véges únióit tartalmazó osztállyal.

<u>4.1. Prefixmentes erdők</u>. A prefixmentes nyelvek egyik legfontosabb tulajdonsága az automata elmélet szempontjából az, hogy bármely reguláris nyelv véges sok $L_1 L_2^*$ alakú nyelv úniója, ahol az L_1 és L_2 reguláris prefixmentes nyelv. Ezt az eredményt G. Thierrin bizonyitotta [23]-ban. G. Thierrin tétele természetesen veti fel az igényt a prefixmentes reguláris nyelvek osztályainak vizsgálatára, és a prefixmentes nyelveket felismerő automaták jellemzésére. P. A. S. Veloso ad választ az itt felvetett kérdésekre [26]-ban, ahol megmutatja, hogy egy összefüggő automata akkor és csak akkor ismer fel prefixmentes nyelvet, ha benne egyetlen végállapot sem érhető el más végállapotból, továbbá, hogy bármely reguláris prefixmentes nyelv előáll az elemi nyelvekből a $+$, $\circ$, $\#$ müveletek véges számú alkalmazásával, ahol $L_1 + L_2 = (L_1 \cup L_2)^{\pi}$ $L_1 \circ L_2 = L_1 L_2$ és $L_1 \# L_2 = (L_1^* L_2)^{\pi}$, valamint az $L \subseteq X^*$ nyelvre L^{π} jelöli az $L - LX^+$ halmazt.

Ebben a pontban bevezetjük a prefixmentes erdők fogalmát, és P.A.S. Veloso eredményeinek általánositását adjuk erdőkre. G. Thierrin tételének faautomatákra vonatkozó általánositását a 4.3. pontban

bizonyitjuk.

Itt hivjuk fel a figyelmet arra, hogy a dolgozat hátralévő részében csak olyan F rangolt ábécék feletti erdőket vizsgálunk, amelyekre $F^0 = \emptyset$. Ezt a továbbiakban mindig feltesszük a F -ről.

A T n-változós F-erdőt <u>prefixmentesnek</u> nevezzük ha egyetlen eleme sem részfája egy tőle különböző T-beli fának. Világos, hogy ezen definició értelmében az egyelemü erdők prefixmentesek. Az üres erdőt megállapodás szerint prefixmentesnek tekintük.

Először a reguláris prefixmentes erdőket felismerő faautomatákat jellemezzük. Megjegyezzük, hogy egy prefixmentes erdő nem feltétlenül reguláris. Például a

$$T = \{ f(g^k(x_1), g^k(x_1)) \mid k \geq 0 \}$$

erdő prefixmentes, de nem reguláris.

Az $\underline{A}$ F-automata egy a állapotát <u>abszorbensnek</u> nevezzük, ha minden $f \in F^m$ $(m = 1, 2, \dots)$ és $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_m \in A$ -ra

$$f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_m) = a$$

Nem nehéz belátni, hogy ha F -ben létezik egy legalább kétváltozós müveleti jel, akkor bármely $\underline{A}$ F-automatában legfeljebb egy abszorbens állapot lehet. Unér rangolt ábécé feletti faautomatákban az abszorbens állapotok száma viszont tetszőleges. Ugyancsak rutin feladat annak igazolása, hogy egy a állapot akkor és csak akkor abszorbens ha belőle csak önmaga érhető el. /Az elérhetőség definicióját lásd a 2. fejezetben./

Azt mondjuk, hogy az $\underline{A}$ n-változós F-automata <u>prefixmentes</u>,

ha $\underline{A}$ -nak pontosan egy a_f végállapota van és létezik egy olyan abszorbens $*_{\underline{A}}$ nem végállaponta úgy, hogy a_f -ből $*_{\underline{A}}$ és csak az érhető el. Az abszorbens állapotokra tett megjegyzésünk alapján nyilvánvaló, hogy egy $\underline{A} = (\mathcal{A}, \underline{a}, \{a_f\})$ F-automata akkor és csak akkor prefixmentes, ha létezik egy $*_{\underline{A}}$ a_f-től különböző abszorbens állapota úgy, hogy minden $f \in F$ $(m \geq 1)$, $1 \leq i \leq m$ és $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_m \in A$ -ra

$$f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_{i-1}, a_f, a_{i+1}, \dots, a_m) = *_{\underline{A}} .$$

<u>7. Tétel</u>. Egy reguláris erdő akkor és csak akkor prefixmentes, ha felismerhető prefixmentes faautomatával.

<u>Bizonyitás</u>. Tekintsük az $\underline{A}$ prefixmentes faautomatát. Vegyük észre, hogy ha a p és t fákra $t \in sub(p)$ és $t \neq p$, akkor $p^{\mathcal{A}}(\underline{a})$ elérhető $t^{\mathcal{A}}(\underline{a})$ -ból. Igy, ha $p \in T(\underline{A})$, akkor t nem lehet $T(\underline{A})$ -beli, mert a_f -ből csak a $*_{\underline{A}}$ érhető el. Tehát $T(\underline{A})$ prefixmentes.

Az üres erdő nyilvánvaló módon felismerhető prefixmentes faautomatával, igy a szükségesség igazolásához tegyük fel, hogy T nemüres prefixmentes és $T = T(\underline{A})$. Az általánosság megszoritása nélkül feltehetjük azt is, hogy $\underline{A}$ összefüggő. Vegyünk két a és b végállapotot $\underline{A}$ -ból. Állitjuk, hogy a és b ekvivalens. Valóban, legyen

$$d = p^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \dots, a_m)$$

és

$$e = p^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_m) ,$$

ahol $p \in T_{F,m}$, $1 \le i \le m$ és $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_m \in A$ tetszőleges.

Ha $h(p) = 0$ vagy $x_i \notin var(p)$ akkor a

$$d \in A' \text{ akkor és csak akkor, ha } e \in A'$$

ekvivalencia teljesülése triviális. Ellenkező esetben sem d, sem pedig e nem lehet végállapot. Valóban, $d \in A'$ esetén véve olyan $q_1, \dots, q_{i-1}, q, q_{i+1}, \dots, q_m$ n-változós F-fákat, amelyekre

$$a = q^{\mathcal{A}}(\underline{a}) \quad \text{és} \quad a_j = q_j^{\mathcal{A}}(\underline{a}) \quad (j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, m),$$

azt kapnánk, hogy mind q mind pedig $p(q_1, \dots, q_{i-1}, q, q_{i+1}, \dots, q_m)$ eleme lenne T-nek, ez pedig ellentmond T prefixmentességének. Tehát a és b valóban ekvivalensek.

Ezután jelölje E a végállapotokból elérhető állapotok halmazát. Világos, hogy $E \cap A' = \emptyset$. Ugyanúgy, ahogy azt fentebb tettük belátható, hogy E állapotai is páronként ekvivalensek. Végül E választása miatt az

$$f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \dots, a_m) \in E$$

nyilvánvaló, valahányszor $a \in A'$, $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_m \in A$ és $f \in F^m$. Az eddig elmondottakból pedig már következik hogy az $\underline{A}$-hoz tartozó redukált automata prefixmentes lesz. □

<u>5. Következmény</u>. Ha az $\underline{A}$ faautomatára $T(\underline{A})$ nemüres és prefixmentes, akkor $\underline{A}/\varrho_{\underline{A}}$ prefixmentes. És forditva, ha $\underline{A}/\varrho_{\underline{A}}$ prefixmentes, akkor $T(\underline{A})$ is az. □

Az $\underline{A} = (\mathcal{A}, \underline{a}, \{a_f\})$ prefixmentes faautomatára jelöljük $\nu(\underline{A})$-val mindazon a_f-től és $*_{\underline{A}}$-tól különböző állapotok számát, amelyek

elérhetők az iniciális vektorból l-nél nem kisebb magasságú fákkal.

A következő állitás alapvető fontosságú a prefixmentes erdők algebrai jellemzéséhez.

8. Tétel. Legyen $\underline{A} = (\mathcal{A}, \underline{a}, \{a_f\})$ n-változós prefixmentes F-automata úgy, hogy a_f nem fordul elő az iniciális vektorban, és minden a_f-től és $x_{\underline{A}}$-tól különböző állapot elérehető az iniciális vektorból. Tekintsük a $b \in A - \{a_f, x_{\underline{A}}\}$ állapotot és vegyük az $\underline{A}(b) = (\mathcal{A}, \underline{a}, \{b\})$ faautomatát. Ekkor létezik egy $\underline{B}(b)$ $(n+1)$-változós és egy $\underline{C}(b)$ n-változós prefixmentes F-automata úgy, hogy

(i) $T(\underline{A}(b)) = T(\underline{B}(b))^{x_1 x_{n+1}} \cdot x_{n+1} T(\underline{C}(b))$,

(ii) $\nu(\underline{B}(b)) < \nu(\underline{A})$ vagy $T(\underline{B}(b)) = \phi$,

(iii) $\underline{C}(b)$-nek kevesebb állapota van mint $\underline{A}$-nak.

Bizonyitás. Tegyük fel, hogy az $\underline{A}$ faautomata és az $\underline{A}$ b állapota kielégiti tételünk feltételeit. A $\underline{B}(b)$ faautomata konstrukciójához először bevezetjük a $\mathcal{L} = (A, F^{\mathcal{L}})$ F-algebrát, ahol

$$f^{\mathcal{L}}(b_1, \dots, b_m) = \begin{cases} a_f & \text{ha } f^{\mathcal{A}}(b_1, \dots, b_m) = b \\ x_{\underline{A}} & \text{ha } f^{\mathcal{A}}(b_1, \dots, b_m) = a_f \\ f^{\mathcal{A}}(b_1, \dots, b_m) & \text{különben} \end{cases},$$

minden $b_1, \dots, b_m \in A$ és $f \in F^m$ esetén $(m = 1, 2, \dots)$.

Vegyünk egy $(n+1)$-változós p F-fát és tegyük fel, hogy

$$p^{\mathcal{A}}(\underline{a}, b) \neq p^{\mathcal{L}}(\underline{a}, b).$$

Válasszunk $sub(p)$-ból egy olyan t fát, amely minimális magasságú

a $sub(p)$ $u^{\mathcal{A}}(\underline{a},b) \neq u^{\mathcal{B}}(\underline{a},b)$ feltételt kielégitő elemei között. Világos, hogy $h(t) > 0$, és igy $t = f(t_1,\dots,t_m)$. t választása miatt

$$t_i^{\mathcal{A}}(\underline{a},b) = t_i^{\mathcal{B}}(\underline{a},b) = d_i \quad (i = 1,\dots,m).$$

Igy $f^{\mathcal{A}}(d_1,\dots,d_m) \neq f^{\mathcal{B}}(d_1,\dots,d_m)$, ami csak akkor lehetséges, ha $f^{\mathcal{A}}(d_1,\dots,d_m) \in \{b, a_f\}$. Tehát, ha

minden $t \in sub(p)$ $(h(t) \geq 1)$ fára $t^{\mathcal{A}}(\underline{a},b) \notin \{b, a_f\}$ (18)

akkor $p^{\mathcal{A}}(\underline{a},b) = p^{\mathcal{B}}(\underline{a},b)$. Továbbá könnyü látni, hogy a következő feltétel maga után vonja (18)-t:

minden $t \in sub(p)$ $(h(t) \geq 1)$ fára $t^{\mathcal{B}}(\underline{a},b) \notin \{x_{\underline{A}}, a_f\}$. (19)

Eszerint (19) is elégséges feltétel a $p^{\mathcal{A}}(\underline{a},b) = p^{\mathcal{B}}(\underline{a},b)$ teljesüléshez.

Ezen előkészitő megjegyzések után tekintsük a $\underline{B}(b) = (\mathcal{B}, (\underline{a},b), \{a_f\})$ $(n+1)$ -változós F -automatát. A következő állitás az $\underline{A}(b)$ és a $\underline{B}(b)$ faautomaták által felismert erdők közti kapcsolatot irja le.

<u>7. Lemma</u>. Ha $T \subseteq T(\underline{A}(b))$, akkor

$$T(\underline{B}(b))^{*, x_{n+1}} \cdot_{x_{n+1}} T \subseteq T(\underline{A}(b)).$$

<u>Bizonyitás</u>. Tekintsük a $q \in T(\underline{B}(b))$, $t_1,\dots,t_{\mu(x_{n+1},q)} \in T$ fákat és legyen $p = q\langle x_{n+1} \leftarrow t_1,\dots,t_{\mu(x_{n+1},q)}\rangle$. Az a_f állapot nem fordul elő az $(\underline{a},b)$ iniciális vektorban, igy $q = f(q_1,\dots,q_m)$ alakú. Tegyük fel, hogy valamely $1 \leq i \leq m$ -re $q_i^{\mathcal{A}}(\underline{a},b) \neq q_i^{\mathcal{B}}(\underline{a},b)$. Ekkor q_i nem elégiti ki (19)-et, amiből létezik olyan legalább 1-magasságú t részfája, amelyre $t^{\mathcal{B}}(\underline{a},b) \in \{x_{\underline{A}}, a_f\}$.

Ebből viszont az következik, hogy $q^{\mathcal{L}}(\underline{a}, b)$ - lévén elérhető $t^{\mathcal{L}}(\underline{a}, b)$ -ből - szükségképpen $x_{\underline{A}}$ -val egyenlő, és ez lehetetlen. Tehát

$$q_i^{\mathcal{A}}(\underline{a}, b) = q_i^{\mathcal{L}}(\underline{a}, b) = d_i \qquad (i = 1, \dots, m) .$$

Ám $q \in T(\underline{B}(b))$, amiből $f^{\mathcal{L}}(d_1, \dots, d_m) = a_f$ és igy

$$\mu^{\mathcal{A}}(\underline{a}) = q\langle x_{n+1} \leftarrow t_1, \dots, t_{\mu(x_{n+1}, q)}\rangle^{\mathcal{A}}(\underline{a}) = q^{\mathcal{A}}(\underline{a}, b) =$$

$$= f^{\mathcal{A}}(d_1, \dots, d_m) = b ,$$

és ez pontosan azt jelenti, hogy $\mu \in T(\underline{A}(b))$. Nyertük, hogy

$$T(\underline{B}(b)) \cdot_{x_{n+1}} T \subseteq T(\underline{A}(b)) .$$

Ezután rutin feladat annak igazolása, hogy bármely $k \geq 0$ nemnegativ egészre

$$T(\underline{B}(b))^{k, x_{n+1}} \cdot_{x_{n+1}} T \subseteq T(\underline{A}(b)) .$$

Végül pedig a

$$T(\underline{B}(b))^{*, x_{n+1}} \cdot_{x_{n+1}} T = \left[\bigcup_{k=0}^{\infty} T(\underline{B}(b))^{k, x_{n+1}}\right] \cdot_{x_{n+1}} T =$$

$$= \bigcup_{k=0}^{\infty} \left(T(\underline{B}(b))^{k, x_{n+1}} \cdot_{x_{n+1}} T\right) \subseteq T(\underline{A}(b))$$

számitás teljessé teszi a 7. lemma bizonyitását.

Most rátérünk a $\underline{C}(b)$ faautomata megkonstruálására. Legyen $\mathcal{L} = (A, F^{\mathcal{L}})$ F -algebra, ahol

$$f^{\mathcal{L}}(c_1,\dots,c_m) = \begin{cases} *_{\underline{B}} & \text{ha } c_i = b \text{ valamely } 1 \le i \le m-n, \\ f^{\mathcal{A}}(c_1,\dots,c_m) & \text{különben}, \end{cases}$$

az összes $f \in F^m$ és $c_1,\dots,c_m \in A$ -ra $(m = 1,2,\dots)$.

Ugyanúgy, ahogy ezt a $\mathcal{L}$ F-algebra definiciója után tettük, belátható, hogy ha

minden $t \in sub(p)$ $(t \neq p)$ fára $t^{\mathcal{A}}(\underline{a}) \neq b$ (20)

akkor $p^{\mathcal{A}}(\underline{a}) = p^{\mathcal{L}}(\underline{a})$. Továbbá ha

minden $t \in sub(p)$ $(\tau(t) \ge 1)$ fára $t^{\mathcal{L}}(\underline{a}) \neq *_{\underline{B}}$ (21)

akkor (20) is teljesül. Eszerint mind (20), mind pedig (21) elégséges a $p^{\mathcal{A}}(\underline{a}) = p^{\mathcal{L}}(\underline{a})$ teljesüléséhez.

Véve a $\underline{C} = (\mathcal{L}, \underline{a}, \{b\})$ n-változós F-automatát állithatjuk, hogy

<u>8. Lemma</u>. Egy $p \in T_{F,n}$ fára $p \in T(\underline{C})$ akkor és csak akkor ha $p \in T(\underline{A}(b))$ és p kielégiti (20)-at.

<u>Bizonyitás</u>. Az elegendőség triviális. Ha pedig $p \in T(\underline{C})$, akkor p -nek ki kell elégitenie (21)-et, mert $p^{\mathcal{L}}(\underline{a}) = b$. Ekkor viszont p (20)-at is kielégiti, és $p^{\mathcal{A}}(\underline{a}) = p^{\mathcal{L}}(\underline{a}) = b$, vagyis $p \in T(\underline{A}(b))$.

Látjuk, tehát, hogy $T(\underline{C})$ részhalmaza $T(\underline{A}(b))$ -nek, igy a 7. lemma szerint

$$T(\underline{B}(b))^{*_1 x_{n+1}} \cdot_{x_{n+1}} T(\underline{C}) \subseteq T(\underline{A}(b)) . \tag{22}$$

Ahhoz, hogy a (22) forditottját megmutathassuk, rendeljünk hozzá a $T(\underline{A}(b))$ p elemeihez egy $w(p)$ nemnegativ egészet a következő módon. $w(p)$ jelölje a p mindazon t részfáinak a számát

amelyre $t \neq p$ és $t^{\mathcal{A}}(\underline{a}) = b$. (22) forditottját $w(p)$ szerinti teljes indukcióval bizonyitjuk.

Ha a $p \in T(\underline{A}(b))$ fára $w(p) = 0$, akkor p kielégiti (20)-at és igy a 8. lemma szerint

$$p \in T(\underline{C}) \subseteq T(\underline{B}(b))^{*, x_{n+1}} \cdot_{x_{n+1}} T(\underline{C})$$

Tegyük fel, hogy $w(p) \geq 1$ és hogy az állitást a $T(\underline{A}(b))$ minden olyan q elemére már beláttuk, amelyre $w(q) < w(p)$. $w(p) \geq 1$ miatt $p = f(p_1, \dots, p_m)$ alakú. Jelöljük q_i -vel azt a fát, ami p_i -ből úgy keletkezik, hogy benne minden olyan t részfát x_{n+1}-gyel helyettesitünk, amelyre $t^{\mathcal{A}}(\underline{a}) = b$ és $t \neq p$. Ekkor világos, hogy

$$q_i^{\mathcal{A}}(\underline{a}, b) = p_i^{\mathcal{A}}(\underline{a}) \quad (i = 1, \dots, m).$$

A q_i fákat úgy konstruáltuk, hogy valahányszor $t \in sub(q_i)$ és $h(t) \geq 1$ mindannyiszor $t^{\mathcal{A}}(a, b)$ nem lehet sem b -vel, sem pedig a_f -fel egyenlő. Ez azt jelenti, hogy p -re (18) teljesül, és innen

$$q_i^{\mathcal{A}}(\underline{a}, b) = q_i^{\mathcal{L}}(\underline{a}, b) \quad (i = 1, \dots, m)$$

adódik. Vegyük ezekután a $q = f(q_1, \dots, q_m)$ fát. A

$$q^{\mathcal{L}}(\underline{a}, b) = f^{\mathcal{L}}(q_1^{\mathcal{L}}(\underline{a}, b), \dots, q_m^{\mathcal{L}}(\underline{a}, b)) = f^{\mathcal{L}}(p_1^{\mathcal{A}}(\underline{a}), \dots, p_m^{\mathcal{A}}(\underline{a})) = a_f$$

egyenlőség abból adódik, hogy $p^{\mathcal{A}}(\underline{a}) = b$. Tehát

$$q \in T(\underline{B}(b)).$$

Mivel mindazon t részfák, melyeket p_i -ben x_{n+1}-gyel

helyettesitettünk, elemei $T(\underline{A}(b))$ -nek és a $w(t) < w(p)$ tulajdonsággal mindegyikük rendelkezik, az indukciós feltevés alapján állithatjuk, hogy mindegyikük eleme $T(\underline{B}(b))^{x_1 x_{n+1}} \cdot x_{n+1} T(\underline{C})$ -nek. Ily módon

$$p \in \{q\} \cdot x_{n+1} T(\underline{B}(b))^{x_1 x_{n+1}} \cdot x_{n+1} T(\underline{C}) , \qquad (23)$$

a (23)-ban szereplő erdő pedig részhalmaza $T(\underline{B}(b))^{x_1 x_{n+1}} \cdot x_{n+1} T(\underline{C})$-nek. Ezzel az indukciós bizonyitást befejeztük és (22)-vel együtt állithatjuk, hogy

$$T(\underline{A}(b)) = T(\underline{B}(b))^{x_1 x_{n+1}} \cdot x_{n+1} T(\underline{C}) . \qquad (24)$$

Ez nem más mint a 8. Tétel (i) állitása.

Vegyük észre továbbá, hogy az a_f és a $x_{\underline{A}}$ állapotok a $\underline{C}$ faautomatában ekvivalensek, és igy a $\underline{C}$-hez tartozó redukált $\underline{C}(b)$ faautomatának $\underline{A}$ -nál kevesebb állapota van. Másrészt (24) igaz marad ha benne $\underline{C}$ -t $\underline{C}(b)$-vel helyettesitjük.

Hátra van még az (ii) tulajdonság bizonyitása. A tétel feltételei szerint b elérhető az $\underline{A}$ iniciális vektorából /$\underline{A}$ -ban/. Ha ez legalább 1-magasságú fával történhet, akkor észrevéve, hogy $\mathcal{L}$ -ben b nem lehet egyetlen $F^{\mathcal{B}}$-beli müvelet végeredménye sem, $\nu(\underline{B}(b))$ legalább eggyel kisebb $\nu(\underline{A})$ -nál, hiszen könnyü látni, hogy $\underline{B}(b)$ konstrukciójával az iniciális vektorból egynél nem kisebb magasságú fával elérhető állapotok száma nem nőhet. Megjegyezzük, hogy ez esetben $\underline{B}(b)$ összefüggő. Ha pedig a b állapot csak 0-magassgú fákkal érhető el, akkor - b nem lévén egyetlen $F^{\mathcal{A}}$-beli müvelet végeredménye sem - $T(\underline{B}(b)) = \phi$, hiszen

a_f sem az iniciális vektorban nem szerepel, sem pedig $F^{\mathcal{G}}$-beli müvelet eredménye. A bizonyitás kész. □

A 8. tételben bevezetett jelöléseket a dolgozat hátralévő részében használni fogjuk. Tehát egy $\underline{A}$ faautomatára és a b $\underline{A}$-beli állapotra $\underline{A}(b)$-vel jelöljük az $(\mathcal{M}, a, \{b\})$ faautomatát, és $\underline{B}(b)$ illetve $\underline{C}(b)$ jelöli azokat a rendre $(n+1)$ ill. n-változós faautomatákat, amelyekre $T(\underline{A}(b)) = T(\underline{B}(b))^{x_1 x_{n+1}} \cdot x_{n+1} T(\underline{C}(b))$.

A reguláris prefismentes erdők algebrai jellemzéséhez szükség van olyan müveletekre, melyek megőrzik úgy a regularitást, mint a prefixmentességet. Ám a prefixmentes erdők nem zártak a legtöbb szokásos müveletre nézve. Nevezetesen, bár zártak a metszetre, de nem zártak sem az únió, a szorzás, sem pedig az iterált müveleteire. Az új prefixmentességet megőrző müveletek definiálásához P.A.S. Veloso-t követve bevezetjük a π operátort.

A $T \subseteq T_{F,n}$ erdőre legyen

$$T^{\pi} = T - T^{+}_{F,n+1} \cdot x_{n+1} T \tag{25}$$

ahol $T^{+}_{F,n+1} = T_{F,n+1} - (T_{F,n} \cup \{x_{n+1}\})$. Világos, hogy T^{π} bármely T erdőre prefixmentes, továbbá, hogy egy T erdő akkor és csak akkor prefixmentes, ha $T = T^{\pi}$. Megmutatható, hogy T^{π} nem más, mint az az egyértelmüen meghatározott $\mathcal{U}$ részhalmaza T-nek, amelyre valahányszor $p \in T$, mindannyiszor $p \in \mathcal{U}$ vagy p-nek van $\mathcal{U}$-ban részfája. Ebből közvetlenül adódik, hogy T^{π} maximális prefixmentes részhalmaza T-nek. Végül fontos megjegyezni, hogy reguláris T-re T^{π} is reguláris (25) szerint.

Az R és S prefixmentes erdők $+$ prefixmentes úniója az

$$R + S = (R \cup S)^{\pi}$$

összefüggéssel definiáljuk. Rutin munka annak igazolása, hogy $+$ asszociativ müvelet. Az $R_1 + \dots + R_n$ helyett a rövidebb $\sum_{i=1}^{n} R_i$ jelölést használjuk.

Vegyünk egy $f \in F^{m}$ müveleti jelet és egy k természetes számot. Jelöljük $w_{f,k}$ -nel azt a $2m$ -változós, a prefixmentes erdőkön definiált müveletet, amelyre

$$w_{f,k}(R_1, S_1, \dots, R_m, S_m) = f(R_1^{*_1 x_k} \cdot x_k S_1, \dots, R_m^{*_1 x_k} \cdot x_k S_m)^{\pi}$$

ahol $f(T_1, \dots, T_m)$ -mel az $\{f(x_1, \dots, x_m)\}(x_1 \in T_1, \dots, x_n \in T_n)$ -et röviditettük.

<u>9. Tétel</u>. Bármely reguláris prefixmentes erdő előáll véges sok $\{x_i\}$ illetve ϕ alakú erdőből a $+$ és $w_{f,k}$ müveletek véges számú alkalmazásával.

<u>Bizonyitás</u>. Az $\underline{A}$ prefixmentes n-változós F-automata állapotainak száma szerinti teljes indukcióval megmutatjuk, hogy minden prefixmentes $\underline{A}$ n-változós F-automatára $T(\underline{A})$ rendelkezik a tételben megkövetelt tulajdonsággal.

Ha $\underline{A}$ két állapotú faautomata, akkor $T(\underline{A})$ vagy üres, vagy pedig véges sok $\{x_i\}$ alakú erdő prefixmentes úniója.

Tekintsük most az $\underline{A} = (\mathcal{A}, \underline{a}, \{a_f\})$ összefüggő prefixmentes n-változós F-automatát, melynek legalább három állapota van

Szeged

és tegyük fel, hogy állitásunk már igaz minden $\underline{A}$ -nál kevesebb elemü faautomatára. Az általánosság megszoritása nélkül feltehetjük, hogy a_f nem fordul elő az iniciális vektorban. Ellenkező esetben ugyanis véve-a

$$b^{(i)} = \begin{cases} a^{(i)} & \text{ha } a^{(i)} \neq a_f \\ *_A & \text{ha } a^{(i)} = a_f \end{cases} \qquad (i = 1, \dots, n)$$

állapotokat, a $\underline{B} = (\mathcal{A}, (b^{(1)}, \dots, b^{(n)}), \{a_f\})$ faautomatára

$$T(\underline{A}) = T(\underline{B}) + \sum_{a^{(i)} = a_f} \{x_i\}$$

ami azt mutatja, hogy ez esetben az $\underline{A}$ helyett vehetjük a $\underline{B}$ faautomatát.

Legyen $f \in F^m$ tetszőleges, és

$$S(f, \mathcal{A}) = \{(b_1, \dots, b_m) \mid b_i \in A,\ f^{\mathcal{A}}(b_1, \dots, b_m) = a_f;\ i = 1, \dots, m\}$$

Világos, hogy sem a_f, sem pedig $*_{\underline{A}}$ nem fordul elő az $S(f, \mathcal{A})$ m-eseiben. A következő egyenlőség evidens:

$$T(\underline{A}) = \bigcup_{f \in F} \bigcup_{(b_1, \dots, b_m) \in S(f, \mathcal{A})} f(T(\underline{A}(b_1)), \dots, T(\underline{A}(b_m))) . \tag{26}$$

A 8. tétel alkalmazásával kapjuk, hogy minden $f \in F^m$ $(m \geq 1)$, $1 \leq i \leq m$ és $b_1, \dots, b_m \in S(f, \mathcal{A})$-ra

$$T(\underline{A}(b_i)) = T(\underline{B}(b_i))^{*_1 \cdot x_{n+1}} \cdot_{x_{n+1}} T(\underline{C}(b_i)) . \tag{27}$$

Ezt (26) -ba helyettesitve,

$$T(\underline{A}) = \bigcup_{f \in F} \bigcup_{(b_1, \dots, b_m) \in S(f, \mathcal{A})} f(T(\underline{B}(b_1))^{*_1 \cdot x_{n+1}} \cdot_{x_{n+1}} T(\underline{C}(b_1)), \dots, T(\underline{B}(b_m))^{*_1 \cdot x_{n+1}} \cdot_{x_{n+1}} T(\underline{C}(b_m))) . \tag{28}$$

Mivel $T(\underline{A})$ prefixmentes, a (28) jobboldalának minden úniós tagja is prefixmentes. Másrészt a $T(\underline{B}(b_i))$ és a $T(\underline{C}(b_i))$ erdők is prefixmentesek, igy (28)-at a

$$T(\underline{A}) = \sum_{f \in F} \sum_{(b_1,\dots,b_m) \in S(f,\mathcal{X})} w_{f,m+1}\left(T(\underline{B}(b_1)), T(\underline{C}(b_1)), \dots, T(\underline{B}(b_m)), T(\underline{C}(b_m))\right) \qquad (29)$$

alakba irhatjuk.

A (29)-ben szereplő $\underline{C}(b_i)$ faautomatáknak $\underline{A}$ -nál kevesebb állapota van /ld. 8. tétel (iii)/, igy az indukciós feltevés szerint a $T(\underline{C}(b_i))$ erdők előállnak a kivánt alakban. Ami pedig a $\underline{B}(b_i)$ faautomatákat illeti, vagy $T(\underline{B}(b_i)) = \phi$ és ekkor $T(\underline{B}(b_i))$ a kivánt alakban előáll, vagy $\underline{B}(b_i)$ összefüggő, ugyanannyi állapota van, mint $\underline{A}$ -nak, és $\nu(\underline{B}(b_i)) < \nu(\underline{A})$.

Az itt ismertetett eljárást a $\underline{B}(b_i)$ faautomatákra megismételve, folytassuk addig, amig $T(\underline{A})$-ra olyan kifejezést kapunk, amelyben bármely $\underline{D}$ faautomata kevesebb állapotú mint $\underline{A}$, vagy összefüggő és $\nu(\underline{D}) = 0$. Vegyük észre, hogy ez utóbbi esetben $\underline{D}$ nem ismerhet fel 1-nél magasabb fát, ami azt jelenti, hogy $T(\underline{D})$ véges sok $\{x_i\}$ vagy $w_{f,1}(\phi, x_{i_1}, \dots, \phi, x_{i_m})$ alakú erdő prefixmentes úniója. Ezzel a bizonyitást befejeztük. □

A 9. tétel megforditása nyilvánvaló módon igaz, hiszen a reguláris prefixmentes erdők zártak a $+$ és $w_{f,k}$ müveletekre. Eszerint

<u>6. Következmény</u>. A T erdő akkor és csak akkor reguláris és prefixmentes, ha előáll véges sok $\{x_i\}$ illetve ϕ alakú erdőből a prefixmentes únió és a $w_{f,k}$ müveletek véges számú alkalmazásával. □

4.2. Jobbideálok és prefixteljes erdők. Ebben a pontban rámutatunk arra, hogy a cimben szereplő két erdő-osztály és a prefixmentes erdők osztálya között kölcsönösen egyértelmü leképezés létesithető. Ezzel nyerjük, hogy e három erdő-osztály között ugyanaz a kapcsolat áll fenn, mint a megfelelő nyelvosztályok között /ld. P.A.S. Veloso [26]/.

Megjegyezzük, hogy ha φ bejekció a reguláris prefixmentes erdők osztálya és egy $\mathcal{C}$ reguláris erdőkből álló osztály között, akkor $\mathcal{C}$ -n bevezetve az

$$R \oplus S = (R\varphi^{-1} + S\varphi^{-1})\varphi$$

és az

$$w_{fik}(R_1, S_1, \dots, R_n, S_n) = w_{fik}(R_1\varphi^{-1}, S_1\varphi^{-1}, \dots, R_n\varphi^{-1}, S_n\varphi^{-1})\varphi$$

müveleteket, a 9. Tétel értelmében triviálisan adódik a $\mathcal{C}$ egy algebrai jellemzése. Ezért a jobbideálok és a prefixteljes erdők esetén pusztán a bijekció megadására szoritkozunk.

Végül e pont utolsó eredményeként megmutatjuk, hogy bár a prefixteljes erdők zártak a reguláris müveletekre, mégsem létezik a reguláris prefixteljes erdők osztályának Kleene -tipusú jellemzése.

Tekintsünk egy $T \subseteq T_{F,n}$ erdőt és jelöljük T^{ρ} -val mindazon n-változós F-fák halmazát, amelyek tartalmaznak részfát T -ben, vagyis amelyekre $sub(\mu) \cap T \neq \emptyset$. T^{ρ}-t a T által generált jobbideálnak nevezzük.

Nem nehéz feladat annak belátása, hogy

$$T^{\varrho} = (T_{F,n+1} - T_{F,n}) \cdot x_{n+1} T \ . \tag{30}$$

Továbbá T^{π} definiciója szerint az is evidens, hogy

$$T^{\pi\varrho} = T^{\varrho} \tag{31}$$

Ez az egyenlőség azt a tényt fejezi ki, hogy bármely jobbideál generálható prefixmentes erdővel. Megmutatjuk, hogy különböző prefixmentes erdők különböző jobbideálokat generálnak. Valóban ha a T_1 és T_2 prefixmentes erdőkre $T_1^{\varrho} = T_2^{\varrho}$, akkor $T_1 \subseteq T_2^{\varrho}$ miatt minden $p \in T_1$ -hez létezik olyan $q \in T_2$, hogy $q \in sub(p)$. Másrészt $T_2 \subseteq T_1^{\varrho}$ miatt q -nak van p' részfája T_1 -ben, és igy a $p \in T_1$ -nek is p' T_1-beli részfája. Kihasználva T_1 prefixmentességét, ez csak úgy lehetséges, ha $p = p' = q$, tehát $p \in T_2$ és igy $T_1 \subseteq T_2$. A forditott irányú tartalmazás ugyanigy látható. Tehát ϱ egy bijekciót létesit a prefixmentes erdők és a jobbideálok között.

Legyen $T \subseteq T_{F,n}$ tetszőleges prefixmentes erdő. (31)-ből

$$T^{\varrho\pi\varrho} = T^{\varrho\varrho} = T^{\varrho}$$

tehát mind T, mind pedig $T^{\varrho\pi}$ ugyanazt a jobbideált generálja, ami mindkettő prefixmentes voltát figyelembe véve, maga után vonja, hogy

$$T^{\varrho\pi} = T \tag{32}$$

Tekintve, hogy reguláris T-re T^{π} is reguláris, (30) és (32) alapján állithatjuk, hogy egy T prefixmentes erdő akkor és

csak akkor reguláris, ha az általa generált T^{ϱ} jobbideál is reguláris. Tehát ϱ a reguláris prefixmentes erdők és a reguláris jobbidálok között is bijekciót létesit.

<u>10. Tétel</u>. A reguláris $T \subseteq T_{F,n}$ erdő akkor és csak akkor jobbideál, ha felismerhető olyan egy végállaputú automatával, melynek végállapota abszorbens.

<u>Bizonyitás</u>. Tekintsük az $\underline{A} = (\mathcal{A}, \underline{a}, \{a_f\})$ n-változós F-automatát, melynek a_f végállapota abszorbens. Vegyünk egy $q \in T(\underline{A})$ fát és legyen $q \in sub(p)$ a $p \in T_{F,n}$ fára. Ekkor

$$p^{\mathcal{A}}(\underline{a}) = p\langle q \leftarrow x_{n+1}\rangle^{\mathcal{A}}(\underline{a}, a_f) = a_f$$

vagyis $p \in T(\underline{A})$. Tehát $T(\underline{A})^{\varrho} \subseteq T(\underline{A})$, ami a forditott irányú tartalmazás triviális volta miatt maga után vonja, hogy $T(\underline{A})^{\varrho} = T(\underline{A})$ tehát $T(\underline{A})$ jobbideál. Meg kell jegyezni, hogy itt implicite feltettük, hogy $T(\underline{A})$ nem-üres. Ám az üres erdő $\phi^{\varrho} = \phi$ miatt szintén jobbideál.

Forditva, az üres erdő nyilván felismerhető a tétel követelményeinek megfelelő faautomatával. Ha pedig a $T \neq \phi$ és jobbideál, akkor vegyük az $\underline{A} = (\mathcal{A}, \underline{a}, A')$ őt felismerő összefüggő faautomatát. Ezekután, ha a és b két végállapot, akkor bármely $p \in T_{F,m}$, $1 \leq i \leq m$ és $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_m \in A$ -ra $p^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \dots, a_m)$ és $p^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_m)$ vagy egyenlő, vagy pedig mindkettő végállapot. Tehát $\underline{A}$ végállapotai páronként ekvivalensek. Végül az $f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \dots, a_m) \in A'$ tartalmazás nyilvánvaló, ha $a \in A'$ Eszerint az $\underline{A}$ -hoz tartozó redukált faautomata megfelel a kivánalmaknak. □

7. Következmény. Ha az $\underline{A}$ faautomata összefüggő és $T(\underline{A}) \neq \emptyset$ akkor az $\underline{A}/\varrho_{\underline{A}}$ redukált faautomata egyetlen végállapota abszorbens. □

Most rátérünk a cimben jelzett másik erdőosztály tárgyalására. A $T \subseteq T_{F,u}$ erdőt prfixteljesnek nevezzük, ha elemeivel együtt azok részfáit is tartalmazza. Világos, hogy T akkor és csak akkor prefixteljes, ha

$$sub(T) = T .$$

Tekintsük a $T \subseteq T_{F,u}$ prefixteljes erdőt és vegyük a T $R = T_{F,u} - T$ komplementerét. Legyen $\mu \in R^{\varrho}$. Vegyük észre, hogy μ nem lehet T -nek eleme, hiszen ekkor μ összes részfájával együtt az R -be eső részfája is eleme lenne T -nek. Igy $R^{\varrho} \subseteq R$, tehát R jobbideál. Hasonlóan látható,
hogy jobbideál komplementere pedig prefixteljes erdő. Nyertük tehát, hogy a $T \subseteq T_{F,u}$ erdő akkor és csak akkor prefixteljes, ha komplementere jobbideál. Ezzel megkaptuk a keresett bijekciót a prefixmentes erdők és a prefixteljes erdők között.

11. Tétel. A $T \subseteq T_{F,u}$ erdő akkor és csak akkor prefixteljes, ha felismerhető olyan $\underline{A} = (\mathcal{M}, \underline{a}, A')$ faautomatával, amelynek létezik egy $*$ abszorbens nem végállapota úgy, hogy $A = A' \cup \{*\}$.

Bizonyitás. Az ilyen tulajdonságú $\underline{A}$ faautomatákra az $\underline{A}' = (\mathcal{M}, \underline{a}, A - A')$ faautomata által felismert erdő a 10. tétel értelmében jobbideál, és viszont. □

és prefixteljes

8. Következmény. Ha az $\underline{A}$ faautomata összefüggő és $T(\underline{A}) \neq T_{F,u}$ akkor az $\underline{A}/\varrho_{\underline{A}}$ faautomata egyetlen nem végállapota abszorbens. □

(33) értelmében a legegyszerübb prefixteljes erdők azok, amelyek egy adott fa részfáiból állnak, vagyis a $sub(p)$ alakú erdők. Másrészt a prefixteljes erdők zártak a reguláris müveletekre, igy természetesen vetődik fel a kérdés, hogy előáll-e minden reguláris prefixteljes erdő véges sok $sub(p)$ alakú erdőből a reguláris müveletek véges számú alkalmazásával. Másszóval, hogy létezik a reguláris prefixteljes erdők osztályának Kleene-tipusú jellemzése.

A felvetett probléma megoldásához némi előkészületeket kell tennünk, nevezetesen be kell vezetnünk a fák hasonlóságának fogalmát. Durván szólva, két n-váltpzós F-fát akkor nevezünk hasonlónak, ha csak leveleikben különböznek egymástól.

Legyen $p \in T_F$ és definiáljuk a $Sim(p)$ halmazt a következő összefüggésekkel:

(1) ha $p = x_i$, akkor $Sim(p) = \{x_1, x_2, \dots\}$

(2) ha $p = f(p_1, \dots, p_m)$, akkor

$$Sim(p) = \{f(q_1, \dots, q_m) \mid q_i \in Sim(p_i);\ i = 1, \dots, m\}.$$

A p és q n-változós F-fákat hasonlónak nevezzük, jelekben $p \sim q$, ha $q \in Sim(p)$. Rutin feladat annak igazolása, hogy $\sim$ ekvivalencia reláció.

12. Tétel. Ha az F rangolt ábécé tartalmaz legalább két müveleti jelet, akkor a reguláris prefixteljes F-erdők osztályának nem létezik Kleene-tipusú jellemzése.

Bizonyitás. Legyen f_1 és f_2 két F-beli különböző müveleti jel, és definiáljuk a p_i és q_i $(i=0,1,\dots)$ fákat a következő módon. Legyen

$$p_0 = q_0 = x_1$$

valamint

$$p_{2n+1} = f_1(p_{2n}, x_1, \dots, x_1), \quad p_{2n+2} = f_2(p_{2n+1}, x_1, \dots, x_1) \quad (n \geq 0),$$

és

$$q_{2n+1} = f_2(q_{2n}, x_1, \dots, x_1), \quad q_{2n+2} = f_1(q_{2n+1}, x_1, \dots, x_1) \quad (n \geq 0).$$

Legyen továbbá

$$T = \{ p_n \mid n \geq 0 \}$$

és

$$\tilde{T} = \{ q_n \mid n \geq 0 \}.$$

9. Lemma. Ha az n és i természetes számokra, valamint a $q, t_1, \dots, t_{\mu(x_i, q)}$ F-fákra

$$p_n = q\langle x_i \leftarrow t_1, \dots, t_{\mu(x_i, q)} \rangle \tag{34}$$

akkor létezik olyan $q' \in T \cup \tilde{T}$, hogy $q \sim q'$.

Bizonyitás. Tegyük fel hogy q egyetlen egy $T \cup \tilde{T}$-beli fához sem hasonló. Legyen t minimális magasságú a q azon részfái között, amelyek egyetlen $T \cup \tilde{T}$-beli fához sem hasonlók.

Ekkor szükségképpen $h(t) > 0$, mert az összes 0-magasságú fa hasonló $x_1 \in T$ -hez. Igy $t = g(\tau_1, \dots, \tau_m)$ alakú ($g \in \{f_1, f_2\}$), ahol τ_i választása miatt az τ_i fákhoz már létezik olyan $\tau_i' \in T \cup \tilde{T}$ hogy $\tau_i \sim \tau_i'$ $(i=1, \dots, m)$. Vegyük észre, hogy

$$g \neq root(\tau_1) \tag{35}$$

és

$$h(\tau_2) = \dots = h(\tau_m) = 0 \tag{36}$$

egyidejőleg nem teljesülhet, mert ekkor t $(= g(\tau_1, \dots, \tau_m))$ hasonló lenne $g(\tau_1', \dots, \tau_m') \in T \cup \tilde{T}$ -hoz. Eszerint (35) és (36) közül legalább az egyik nem teljesül, amiből következik, hogy (34) nem lehet igaz, mert $t \langle x_i \leftarrow t_1, \dots, t_{\mu(x_i, g)} \rangle$ részfája $g \langle x_i \leftarrow t_1, \dots, t_{\mu(x_i, g)} \rangle$ -nak. □

Legyen ezekután $\mathcal{C}$ mindazon $\mathcal{R}$ n-változós F-erdők osztálya, amelyekre $\mathcal{R}$ minden eleme hasonló valamely μ_k -hoz, és minden $k \geq 0$ -ra $\mathcal{R}$ tartalmaz μ_k -hoz hasonló fát.

<u>10. Lemma</u>. Ha az $\mathcal{R} \in \mathcal{C}$ erdőre $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cdot x_i \mathcal{R}_2$, ahol $\mathcal{R}_1$ és $\mathcal{R}_2$ prefixteljes erdők, akkor $\mathcal{R}_1$ és $\mathcal{R}_2$ közül legalább az egyik eleme $\mathcal{C}$ -nek.

<u>Bizonyitás</u>. Tegyük fel, hogy teljesülnek a 10. lemma feltételei. Ha $\mathcal{R}_1$ minden τ elemére $x_i \notin sub(\tau)$, akkor

$$\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_1 \cdot x_i \mathcal{R}_2 = \mathcal{R} \in \mathcal{C}$$

és készen vagyunk. Ellenkező esetben vegyünk egy k természetes számot és egy $\mu \in \mathcal{R}$ fát úgy, hogy $\mu_k \sim \mu$ teljesüljön.

$R = R_1 \cdot x_i R_2$ miatt alkalmas $q \in R_1$ és $t_1, \dots, t_{\mu(x_i,q)} \in R_2$ fákra

$$p = q\langle x_i \leftarrow t_1, \dots, t_{\mu(x_i,q)}\rangle . \tag{37}$$

Helyettesitsük q-ban az összes x_i-től különböző változót x_1-gyel, és jelöljük a keletkező fát q'-vel. Nyilvánvaló, hogy $q' \sim q$. Ugyanigy, irjuk át t_j-ben az összes változót x_1-re, és legyen t_j' a keletkező fa $(j = 1, \dots, \mu(x_i,q))$. Világos, hogy ez esetben is $t_j \sim t_j'$ $(j = 1, \dots, \mu(x_i,q))$. Tekintve, hogy

$$q\langle x_i \leftarrow t_1, \dots, t_{\mu(x_i,q)}\rangle \sim q'\langle x_i \leftarrow t_1', \dots, t_{\mu(x_i,q)}'\rangle$$

(37)-ből és $p \sim p_k$ -ból kapjuk, hogy

$$p_k \sim q'\langle x_i \leftarrow t_1', \dots, t_{\mu(x_i,q)}'\rangle .$$

Ám mind p_k -ban, mind pedig $q'\langle x_i \leftarrow t_1', \dots, t_{\mu(x_i,q)}'\rangle$ -ban csak az x_1 változó szerepel, amiből

$$p_k = q'\langle x_i \leftarrow t_1', \dots, t_{\mu(x_i,q)}'\rangle . \tag{38}$$

Ebből mindenek előtt az következik, hogy

$$t_j' \in T \quad (j = 1, \dots, \mu(x_i,q))$$

mert $t_1', \dots, t_{\mu(x_i,q)}' \in mb(p_k) \subseteq T$. Másrészt a 9. lemma felhasználásával adódik, hogy létezik olyan $q'' \in T \cup \tilde{T}$, hogy

$$q' \sim q''$$

Megmutatjuk, hogy $q'' \notin \tilde{T}$. Valóban, R_2 nemüres, és prefixteljes, igy tartalmaz 0-magasságú fát. Igy $q \in R_1$ miatt $R = R_1 \cdot x_i R_2$ tartalmaz q-hoz hasonló u fát. Felhasználva, hogy

$u \sim q \sim q' \sim q''$, nyerjük, hogy $u \sim q''$. Ugynakkor $R \in \mathcal{C}$ miatt minden R -beli fa /és igy u is/ valamelyik p_ℓ $(\in T)$ fához hasonló, amiből $p_\ell \sim q''$ és igy

$$q'' \in T$$

adódik.

Összefoglalva az eddig mondottakat, azt kapjuk, hogy (37) maga után vonja olyan q'', $t_1', \dots, t'_{\mu(x_i,q)} \in T$ fák létezését, hogy

$$q \sim q'' \quad \text{és} \quad t_j \sim t_j' \quad (j = 1, \dots, \mu(x_i, q)) .$$

Mivel a p fa tetszőleges R -beli elem, mig az végigfut a R elemein (37)-ben, addig q és $t_1, \dots, t_{\mu(x_i,q)}$ végig kell hogy fusson az R_1 ill. az R_2 elemein. Eszerint bármely $u \in R_i$ $(i = 1, 2)$ fához létezik T -ben u-hoz hasonló fa.

Végül R végtelen igy legalább az egyik R_1 és R_2 közül végtelen. Eszerint ha például R_1 végtelen akkor bármely m természetes számhoz létezik R_1-ben m -nél nem kisebb magasságú p fa. Igy p hasonló valamely $k \geq m$ -re p_k -hoz. Ám $p_m \in sub(p_k)$ és p_k bármely részfája hasonló a p valamely $v \in R_1$ részfájához, és ezzel beláttuk, hogy $R_1 \in \mathcal{C}$. Ha pedig R_2 a végtelen, akkor hasonlóan járhatunk el. □

<u>11. Lemma.</u> Ha $R \in \mathcal{C}$ és a prefixteljes S erdőre $R = S^{*, x_i}$, akkor $S \in \mathcal{C}$.

<u>Bizonyitás</u>. Megmutatjuk, hogy $R = S^{*, x_i}$ esetén S -ben nincs olyan p fa, amelyre $h(p) \geq 1$ és $x_i \in sub(p)$. Valóban ha $h(p) \geq 1$ és $p \in S$, akkor p legbaloldalibb változója nem lehet x_i. Ellenkező esetben ugyanis alkalmas $i_2, \dots, i_m$ természetes számokra $f(x_i, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}) \in S$ teljesülne, amiből

$$f_1(f_1(x_i, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}), x_{i_2}, \dots, x_{i_m}) \in R$$

következne ez pedig lehetetlen. A fenti fa ugyanis egyetlen p_k -hoz sem hasonló.

Most megmutatjuk, hogy p többi változója sem lehet x_i. Valóban, ha $x_i \in sub(p)$, p -nek létezik olyan t részfája, hogy $t = g(t_1, t_2, \dots, x_i)$ alakú. S prefixteljes, igy $t \in S$ és igy $t \cdot x_i t \in R$, ami lehetetlen mert $t \cdot x_i t$ $g(\dots, t)$ alakú, ilyen fa pedig ismét csak nem lehet hasonló egyetlen p_k -hoz sem.

Tehát S legalább egy-magasságú fáinak x_i nem részfája, amiből

$$R = S^{*, x_i} = S \cup \{x_i\},$$

és igy $S \in \mathcal{C}$. □

A következő állitás triviális.

<u>12. Lemma</u>. Ha $R \in \mathcal{C}$ és a prefixteljes R_1 és R_2 erdőkre $R = R_1 \cup R_2$, akkor R_1 és R_2 közül legalább az egyik eleme $\mathcal{C}$ -nek. □

Az eddig bizonyitott három lemma szerint, ha egy $R \in \mathcal{C}$ erdő előáll az $R_1, \dots, R_m$ erdőkből a reguláris müveletek véges számú alkalmazásával, akkor valamely $1 \leq i \leq m$ -re $R_i \in \mathcal{C}$.

Eszerint ahhoz, hogy tételünk bizonyitását teljessé tegyük elegendő megadni egy olyan reguláris prefixteljes erdőt, ami eleme $\mathcal{C}$-nek. Erre a célra maga a kiindulási T erdő megfelel. T prefixteljessége és a $T \in \mathcal{C}$ tartalmazás evidens, és ugyanakkor

$$T = \{ f_1(x_2, x_1, \dots, x_1), x_2 \} \cdot_{x_2} \{ f_2(f_1(x_2, x_1, \dots, x_1), x_1, \dots, x_1) \}^{*_1 x_2} \cdot_{x_2} \{ x_1 \}$$

tehát T reguláris is. A bizonyitás kész. □

<u>4.3. A $\mathcal{C}_1$ osztály</u>. Mint azt a 4.2. pontban előre bocsájtottuk, a reguláris prefixmentes erdők és az egy végállapotú faautomatával felismerhető erdők $\mathcal{C}_1$ osztályának kapcsolatát vizsgálva megmutatjuk, hogy minden $T \in \mathcal{C}_1$ erdő $R^{*_1 x_{n+1}} \cdot_{x_{n+1}} S$ alakban áll elő, és viszont. Ezzel G. Thierrin 4.2. pontban idézett eredményének általánositását nyerjük. Előkészitésként jellemzését adjuk a prefixmentes reguláris erdők x_i-iteráltjait felismerő faautomatáknak. Eredményünk J. A. Brzozowski csillag-nyelvekre vonatkozó [3]-beli állitását általánositja. Jól ismert, hogy egy L nyelv akkor és csak akkor ismerhető fel egy végállaptú automatával, ha L minden "vége" L-nek "ciklusa", azaz, ha $r, p, pq \in L$-ből $rq \in L$ következik. A 4.3. pontot V. G. Bodnarcuk ezen eredményének faautomatákra vonatkozó alakjának bizonyitásával zárjuk.

<u>13. Tétel</u>. Ha az $\underline{A} = (\mathcal{A}, \underline{a}, \{a_f\})$ n-változós F-automatában $a^{(i)} = a_f$, akkor $T(\underline{A})$ előáll $T(\underline{A}) = R^{*_1 x_i}$ alakban, ahol R prefixmentes reguláris erdő. És forditva, bármely reguláris pre-

fixmentes R erdőre R^{*, x_i} felismerhető olyan egy végállapotú $\underline{A}$ faautomatával, melynek végállapota egyenlő az iniciális vektor i-edik komponensével.

Bizonyitás. Tekintsük az $\underline{A}' = (\mathcal{A}', \underline{a}, \{a^{(i)}\})$ változós F-automatát. Az általánosság megszoritása nélkül feltehetjük, hogy $\underline{A}'$ összefüggő. Az $\mathcal{A}'$ algebra A' alaphalmazához vegyük hozzá az a_f és $*$ szimbólumokat és jelöljük a keletkező halmazt A-val. Legyen $\mathcal{A} = (A, F^{\mathcal{A}})$, ahol

$$f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_m) = \begin{cases} f^{\mathcal{A}'}(a_1, \dots, a_m) & \text{ha } a_1, \dots, a_m \in A' \\ * & \text{különben} \end{cases},$$

minden $f \in F^m$ $(m \geq 1)$ és $a_1, \dots, a_m \in A$ -ra.

Világos, hogy az $\underline{A} = (\mathcal{A}, \underline{a}, \{a_f\})$ prefixmentes faautomatára teljesülnek a 8. tétel feltételei, és hogy $\underline{A}'$ nem más, mint $\underline{A}(a^{(i)})$. A 7. lemmát felhasználva a

$$T_1 = T(\underline{B}(a^{(i)})) \cap T_{F,u}$$

erdő része $T(\underline{A}(a^{(i)}))$ -nek. Valóban a $\underline{B}(a^{(i)})$ faautomata konstrukciója olyan, hogy T_1 pontosan azokból a legalább egy magasságú $T(\underline{A}(a^{(i)}))$ -beli p fákból áll, amelyekre a valahányszor $t \in sub(p)$ $h(t) \geq 1$ és $t \neq p$, mindannyiszor $t \notin T(\underline{A}(a^{(i)}))$, feltétel teljesül.

Legyen ezekután

$$T_2 = T_1 \cup \{x_j \mid j \neq i,\ x_j \in T(\underline{A}(a^{(i)}))\}. \qquad (39)$$

Egyszerü belátni, hogy

$$T_2^{*, x_i} \subseteq T(\underline{A}(a^{(i)})). \qquad (40)$$

József Attila Tudományegyetem Könyvtár SZEGED

A fenti észrevétel értelmében a $T(\underline{A}(a^{(i)}))$ elemeinek magassága szerint indukció könnyen mutatja, hogy (40)-ben a forditott irányú tartalmazás is teljesül. Igy

$$T_2^{x_1 x_i} = T(\underline{A}(a^{(i)})) ,$$

ahol T_2 reguláris volta (39) alapján evidens. Általában azonban T_2 nem lesz prefixmentes.

Jelölje $\mathcal{R}$ azt az erdőt, ami T_1-ből úgy kapunk, hogy minden egyes fájában a $T(\underline{A}(a^{(i)}))$-beli változókat x_i-vel helyettesitjük, majd a kapott erdőhöz hozzá vesszük a $T(\underline{A}(a^{(i)}))$ x_i-től különböző 0-magasságú elemeit. Ez az $\mathcal{R}$ erdő reguláris volta mellett már prefixmentes is. Mivel $\mathcal{R} \subseteq T_2$ ezért az $\mathcal{R}^{x_1 x_i} \subseteq T_2^{x_1 x_i}$ nyilvánvaló, a forditott irányú tartalmazás pedig abból következik, hogy $T_2 \subseteq \mathcal{R}^{2, x_i}$. Ezzel a 13. Tétel első állitását beláttuk.

A második állitás igazolásához tekintsük az $\mathcal{R} = T(\underline{B})$ erdőt, ahol $\underline{B}$ prefixmentes n-váltpzós F-automata. Legyen $\mathcal{A} = (\mathbf{B}, F^{\mathcal{A}})$ olyan, hogy bármely $f \in F^m$ $(m \geq 1)$ és $a_1, \dots, a_m \in B$ esetén

$$f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_m) = \begin{cases} f^{\mathcal{B}}(a_1, \dots, a_m) & \text{ha } a_j \neq b_f \quad (j = 1, \dots, m) \\ f^{\mathcal{B}}(c_1, \dots, c_m) & \text{különben} \end{cases} ,$$

ahol

$$c_j = \begin{cases} a_j & \text{ha } a_j \neq b_f \\ b^{(i)} & \text{ha } a_j = b_f \quad (j = 1, \dots, m) . \end{cases}$$

Legyen továbbá

$$a^{(j)} = \begin{cases} b_f & \text{ha } j = i \\ b^{(j)} & \text{ha } j \neq i \end{cases} ,$$

és vegyük az $\underline{A} = (\mathcal{A}, g, \{a^{(i)}\})$ u -változós F -automatát.

A p magassága szerinti teljes indukcióval könnyü igazolni, hogy minden $p \in T_{F,u}$ -re

$$\text{ha } h(p) \geq 1 \text{ , akkor } p^{\mathcal{A}}(\underline{a}) = p^{\mathcal{A}}(\underline{b}) \text{ .} \tag{41}$$

Ugyancsak rutin feladat annak megmutatása, hogy

$$\begin{aligned} &\text{ha minden } t \in sub(p) \ (t \neq p) \text{ fára } t^{\mathcal{B}}(\underline{b}) \neq b_f \text{ ,} \\ &\text{akkor } p^{\mathcal{B}}(\underline{b}) = p^{\mathcal{A}}(\underline{b}) . \end{aligned} \tag{42}$$

Igy, ha $p \in R$, akkor (42)-ből $p^{\mathcal{B}}(\underline{b}) = p^{\mathcal{A}}(\underline{b})$. Ha $h(p) = 0$ akkor $p \in T(\underline{A})$ reláció nyilvánvaló. $h(p) \geq 1$ esetén pedig (41)-ből

$$p^{\mathcal{A}}(\underline{a}) = p^{\mathcal{A}}(\underline{b}) = p^{\mathcal{B}}(\underline{b}) = b_f = a^{(i)}$$

amiből $p \in T(\underline{A})$. Tehát kapjuk, hogy

$$R \subseteq T(\underline{A}) .$$

Az $x_i \in T(\underline{A})$ tartalmazás evidens. Ha pedig R^{k, x_i} már részhalmaza $T(\underline{A})$ -nak, akkor a $q \in R$ és $t_1, \dots, t_{\mu(x_i, q)} \in R^{k, x_i}$ fákat nézve a $p = q \langle x_i \leftarrow t_1, \dots, t_{\mu(x_i, q)} \rangle$ fára

$$p^{\mathcal{A}}(\underline{a}) = q^{\mathcal{A}}(\underline{a}) = a^{(i)} .$$

adódik. Eszerint R^{k+1, x_i} is része $T(\underline{A})$-nak, amivel az

$$R^{*, x_i} \subseteq T(\underline{A}) \tag{43}$$

tartalmazást beláttuk.

(43) megforditásához a következő észrevételt célszerü tenni. Minden legalább egy magasságú μ fára, amelyre valahányszor $t \in sub(\mu)$ és $h(t) \geq 1$, mindannyiszor $t^{\mathcal{A}}(\underline{a}) \neq a^{(i)} \; (= b_f)$,

$$\mu^{\mathcal{A}}(\underline{a}) = \mu'^{\mathcal{B}}(\underline{b})$$

ahol μ' úgy keletkezik μ -ből, hogy μ-ben minden olyan x_j változót x_i-re cserélek, amelyre $a^{(j)} = b_f$.

$T(\underline{A})$ nulla magasságú fái elemei R^{*, x_i} -nek, ez szemmel látható. Legyen tehát $\mu \in T(\underline{A})$ legalább egy magasságú és tegyük fel, hogy $T(\underline{A})$ μ-nél kisebb magasságú fái R^{*, x_i}-ben vannak. Ha μ egyetlen tőle különböző legalább egy magasságú t részfájára sem teljesül a $t^{\mathcal{A}}(\underline{a}) = a^{(i)}$ egyenlőség, akkor észrevételünk szerint

$$\mu'^{\mathcal{B}}(\underline{b}) = \mu^{\mathcal{A}}(\underline{a}) = a^{(i)} = b_f$$

vagyis $\mu' \in R$. Megjegyezzük, hogy μ' előállításánál, ha egy x_i-től különböző j indexü változót x_i-re cseréltünk, akkor $b^{(j)} = a^{(j)} = b_f$ miatt $x_j \in R$. Eszerint

$$\mu \in \{\mu'\} \cdot x_i R \subseteq R \cdot x_i R \subseteq R^{*, x_i}.$$

Ha pedig létezik a μ-nek tőle olyan különböző legalább egy-magasságú t részfája, melyre $t^{\mathcal{A}}(\underline{a}) = a^{(i)}$, akkor helyettesitsük az összes ilyen tulajdonságú részfát μ -ben x_i-vel, és jelölje q a keletkező fát. Nyilvánvaló, hogy

$$q^{\mathcal{A}}(\underline{a}) = \mu^{\mathcal{A}}(\underline{a}) = a^{(i)},$$

miszerint $q \in T(\underline{A})$. Ugyanakkor q -nak már nincs tőle különböző legalább egy magas t részfája úgy, hogy $t^{\mathcal{A}}(\underline{a}) = a^{(i)}$, igy az előzőek szerint $q \in R^{*, x_i}$.

Másrészt az összes olyan p -beli részfa, melyeket x_i -vel helyettesitettünk a q megszerkesztésénél, $T(\underline{A})$ -ban van és a magassága mindegyiknek kisebb mint p magassága. Igy ezek a fák az indukciós feltevés szerint elemei R^{*, x_i} -nek. Végül p nyilván eleme a $\{q\}$ és a p -ből kitörölt fák halmazának x_i -szorzatának, amiből nyerjük, hogy $p \in R^{*, x_i} \cdot_{x_i} R^{*, x_i} \subseteq R^{*, x_i}$. A bizonyitás kész. □

Ezen előkészités után eljutottunk ennek a fejezetnek a fő eredményéhez.

<u>14. Tétel</u>. *Egy* $T \subseteq T_{F,k}$ erdő akkor és csak akkor ismerhető fel egy végállapotú faautomatával, ha T előáll $T = R^{*, x_{n+1}} \cdot_{x_{n+1}} S$ alakban, ahol $R \subseteq T_{F,n+1} - T_{F,k}$, $S \subseteq T_{F,k}$, mindkettő reguláris és $R \cup S$ prefixmentes.

<u>Bizonyitás</u>. Tekintsük az összefüggő egy végállaptú $\underline{B} = (\mathcal{G}, \underline{b}, \{b\})$ n -változós F -automatát. Ugyanúgy, ahol ezt a 13. tétel bizonyitásában tettük az a_f és a $*$ szimbólumok hozzávételével ágyazzuk be $\underline{B}$ -t az $\underline{A} = (\mathcal{A}, \underline{a}, \{a_f\})$ prefixmentes faautomatába. Igy $\underline{B}$ nem más, mint $\underline{A}(b)$ /használva a 8. tétel jelölését; lásd a 8. tétel utáni megjegyzést/.

A 8. tétel értelmében

$$T = T(\underline{A}) = T(\underline{B}(b))^{*, x_{n+1}} \cdot_{x_{n+1}} T(\underline{C}(b)) \quad . \tag{44}$$

Legyen

$$\mathcal{R} = T(\underline{B}(b)) - T_{F,u} \quad \text{és} \quad S = T(\underline{C}(b)) .$$

Állitjuk, hogy

$$T(\underline{B}(b))^{*,x_{n+1}} \cdot x_{n+1} S = \mathcal{R}^{*,x_{n+1}} \cdot x_{n+1} S \tag{45}$$

A (45) jobboldala nyilvánvalóan része a baloldalnak. Az ellentétes irányú tartalmazáshoz pedig elegendő megmutatni, hogy minden $k \geq 0$-ra

$$T(\underline{B}(b))^{k,x_{n+1}} \cdot x_{n+1} S \subseteq \mathcal{R}^{*,x_{n+1}} \cdot x_{n+1} S \tag{46}$$

Ez $k = 0$ -ra triviális. Ha pedig k -ra már igaz, akkor

$$\mathcal{R} \cdot x_{n+1} T(\underline{B}(b))^{k,x_{n+1}} \cdot x_{n+1} S \subseteq \mathcal{R}^{*,x_{n+1}} \cdot x_{n+1} S \tag{47}$$

A $\underline{B}(b)$ és $\underline{C}(b)$ faautomaták 8. tétel-beli konstrukciója alapján nyilvánvaló, hogy egy $\mu \in T_{F,u}$ fára, ha $h(\mu) \geq 1$, akkor

$$\mu \in T(\underline{B}(b)) \text{ akkor és csak akkor, ha } \mu \in T(\underline{C}(b)). \tag{48}$$

Tekintettel arra, hogy $T(\underline{B}(b))$ n-változós 0-magasságú fákat nem tartalmaz, (48)-ból

$$T(\underline{B}(b)) \subseteq \mathcal{R} \cup S .$$

Ebből és (47)-ből

$$T(\underline{B}(b)) \cdot x_{n+1} T(\underline{B}(b))^{k,x_{n+1}} \cdot x_{n+1} S \subseteq (\mathcal{R} \cup S) \cdot x_{n+1} T(\underline{B}(b))^{k,x_{n+1}} \cdot x_{n+1} S =$$

$$= \mathcal{R} \cdot x_{n+1} T(\underline{B}(b))^{k,x_{n+1}} \cdot x_{n+1} S \cup S \subseteq \mathcal{R}^{*,x_{n+1}} \cdot x_{n+1} S .$$

Ez pedig (46)-tal együtt azt jelenti, hogy (45) baloldala is része (45) jobb oldalának.

(44) és (45)-ből tehát azt kapjuk, hogy

$$T = R^{*, x_{n+1}} \cdot x_{n+1} S .$$

A szükségesség bizonyitásának teljessé tételéhez $R \cup S$ prefixmentes voltára kell még rámutatnunk. Azonban figyelembe véve (48)-at és azt hogy $T(\underline{B}(\ell))$ prefixmentes, elég arra rámutatni, hogy az S-ben szereplő változók nem lehetnek R-beli fák részfái. Ez pedig a $\underline{B}(\ell)$ és $\underline{C}(\ell)$ faautomaták konstrukciója alapján nyilvánvaló.

Az elégségesség bizonyitásához tegyük fel, hogy $T = R^{*, x_{n+1}} \cdot x_{n+1} S$ ahol $R \subseteq T_{F, n+1} - T_{F, n}$, $S \subseteq T_{F, n}$ mindketten regulárisak, és $R \cup S$ prefixmentes.

Mindenek előtt állitjuk, hogy ilyen feltételek mellett egyetlen S-beli fa sem lehet $R^{*, x_{n+1}}$-beli fa részfája. Valóban, tegyük fel hogy létezik olyan $s \in S$ és $p \in R^{k, x_{n+1}}$, hogy $s \in sub(p)$. Ha $k \leq 1$ akkor ez máris ellentmondás. Különben p előáll $p = q \langle x_{n+1} \leftarrow t_1, \dots, t_{\mu(x_{n+1}, q)} \rangle$ alakban, ahol $q \in R$ és $t_1, \dots, t_{\mu(x_{n+1}, q)} \in R^{k-1, x_{n+1}}$. Mivel $s \in sub(q)$ és $t_i \notin sub(s)$ $(i = 1, \dots, \mu(x_{n+1}, q))$, az egyetlen lehetsége eset az, hogy valamely $1 \leq i \leq \mu(x_{n+1}, q)$ -ra $s \in sub(t_i)$. Ezt az eljárást folytatva, végül is egy olyan $R \cup \{x_{n+1}\}$-beli fához jutunk, melynek s részfája. És ez lehetetlen.

Legyen ezekután $\underline{A} = (\mathcal{A}, \underline{a}, \{a^{(n+1)}\})$ az $R^{*, x_{n+1}}$-et, $\underline{B} = (\mathcal{L}, \underline{b}, \{b_f\})$ pedig az S-et felismerő faautomata. Megjegyezzük, hogy 13. tétel értelmében ilyen $\underline{A}$ létezik, továbbá

7. tétel értelmében $\underline{B}$ választható prefixmentesnek.

Tekintsük a $\mathcal{L} = (A \times B, F^{\mathcal{L}})$ F-algebrát, amelyre

$$f^{\mathcal{L}}((a_1, b_1), \dots, (a_m, b_m)) = \begin{cases} (f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_m), f^{\mathcal{B}}(b_1, \dots, b_m)) & \text{ha } f^{\mathcal{B}}(b_1, \dots, b_m) \neq b_f \\ (a^{(n+1)}, f^{\mathcal{B}}(b_1, \dots, b_m)) & \text{különben} \end{cases},$$

valahányszor $(a_1, b_1), \dots, (a_m, b_m) \in A \times B$ és $f \in F^m$ $(m \geq 1)$.

Legyen továbbá

$$c^{(i)} = \begin{cases} (a^{(i)}, b^{(i)}) & \text{ha } b^{(i)} \neq b_f \\ (a^{(n+1)}, b^{(i)}) & \text{ha } b^{(i)} = b_f \end{cases} \quad (i = 1, \dots, m),$$

és tekintsük a $\underline{C} = (\mathcal{L}, \underline{c}, C')$ n-változós F-automatát, ahol

$$C' = \{(a^{(n+1)}, b_f), (a^{(n+1)}, *_{\underline{B}})\}.$$

Vegyük észre hogy tetszőleges $p \in T_{F,n+1}$ fára,

ha minden $t \in sub(p)$-re $t \notin T(\underline{B})$, akkor

$$p^{\mathcal{L}}(\underline{c}, (a^{(n+1)}, b_f)) = (p^{\mathcal{A}}(\underline{a}), p^{\mathcal{B}}(\underline{b}, b_f)). \tag{49}$$

Ennek felhasználásával könnyü belátni, hogy

$$\text{ha } p \in T(\underline{B}), \text{ akkor } p^{\mathcal{L}}(\underline{C}) = (a^{(n+1)}, b_f). \tag{50}$$

Ezen előkészitő megjegyzések után vegyünk a $q \in T(\underline{A})$ és a $t_1, \dots, t_{\mu(x_{n+1}, q)} \in T(\underline{B})$ fákat és legyen

$$p = q\langle x_{n+1} \leftarrow t_1, \dots, t_{\mu(x_{n+1}, q)}\rangle.$$

Az elégségesség bizonyitásának elején tett megjegyzésünk szerint q egyetlen részfája sem lehet $T(\underline{B})$ eleme, igy (49) szerint

$$q^{\mathcal{L}}(\underline{c}, (a^{(n+1)}, b_f)) = (q^{\mathcal{A}}(\underline{a}), q^{\mathcal{B}}(\underline{b}, b_f)). \tag{51}$$

Másrészt $t_i^{\mathcal{C}}(\underline{c}) = (a^{(n+1)}, b_f)$ minden $1 \leq i \leq \mu(x_{n+1}, q)$-ra /ld. (50)/, amiből

$$p^{\mathcal{C}}(\underline{c}) = q^{\mathcal{C}}(\underline{c}, (a^{(n+1)}, b_f)) \overset{(51)}{=} (q^{\mathcal{A}}(\underline{a}), q^{\mathcal{B}}(\underline{b}, b_f)) \qquad (52)$$

De $q \in T(\underline{A})$, ami azt jelenti, hogy $q^{\mathcal{A}}(\underline{a}) = a^{(n+1)}$. Ugyanakkor $x_{n+1} \in sub(q)$ és ez $\underline{B}$ prefixmentességével együtt maga után vonja, hogy $q^{\mathcal{B}}(\underline{b}, b_f) \in \{a_f, x_{\underline{B}}\}$. Tehát (52) szerint $p \in T(\underline{C})$ és ezzel a

$$T(\underline{A}) \cdot_{x_{n+1}} T(\underline{B}) \subseteq T(\underline{C}) \qquad (53)$$

tartalmazást beláttuk.

Vegyünk most egy $p \in T(\underline{C})$ fát. Ha $p^{\mathcal{C}}(\underline{c}) = (a^{(n+1)}, b_f)$, akkor $p^{\mathcal{B}}(\underline{b}) = b_f$ és igy $p \in T(\underline{B}) \subseteq T(\underline{A}) \cdot_{x_{n+1}} T(\underline{B})$. Tegyük fel tehát, hogy $p^{\mathcal{C}}(\underline{c}) = (a^{(n+1)}, x_{\underline{B}})$. Ha p-nek egyetlen részfája sem eleme $T(\underline{B})$-nek, akkor (49)-et alkalmazva $p^{\mathcal{A}}(\underline{a}) = a^{(n+1)}$ adódik, ez pedig lehetetlen, mert $T(\underline{A})$-ban nincs n-változós fa. Jelölje $t_1, \dots, t_k$ az összes olyan részfáját p-nek, melyek elemei $T(\underline{B})$-nek, és jelöljük q-val azt a fát, ami p-ből úgy keletekezik, hogy benne a t_i fák összes előfordulásait x_{n+1}-gyel helyettesitjük. q-nak nem lévét $T(\underline{B})$-beli részfája, (49)-et alkalmazva

$$q^{\mathcal{C}}(\underline{c}, (a^{(n+1)}, b_f)) = (q^{\mathcal{A}}(\underline{a}), q^{\mathcal{B}}(\underline{b}, b_f)) . \qquad (54)$$

Másrészt

$$q^{\mathcal{C}}(\underline{c}, (a^{(n+1)}, b_f)) = p^{\mathcal{C}}(\underline{c}) = (a^{(n+1)}, x_{\underline{B}}) ,$$

ami (54)-gyel együtt implikálja, hogy $q^{\mathcal{A}}(\underline{a}) = a^{(n+1)}$, tehát $q \in T(\underline{A})$.

Végül világos, hogy p eleme a $\{q\} \cdot x_{n+1} \{t_1, \dots, t_k\}$ erdőnek, és igy $T(\underline{A}) \cdot x_{n+1} T(\underline{B})$ -nek is. Nyertük, hogy

$$T(\underline{C}) = T(\underline{A}) \cdot x_{n+1} T(\underline{B}) .$$

Ahhoz, hogy teljessé tegyük tételünk bizonyitását, meg kell még mutatnunk, hogy $\underline{C}$ végállapotai ekvivalensek. Ez azonban közvetlen folyománya annak az egyszerüen igazolható ténynek, hogy minden legalább 1 magasságú olyan $p \in T_{F,m}$ fára, amelyre $x_i \in sub(p)$

$$p^{\mathcal{K}}(c_1, \dots, c_{i-1}, (a^{(n+1)}, b_f), c_{i+1}, \dots, c_m) =$$
$$= p^{\mathcal{K}}(c_1, \dots, c_{i-1}, (a^{(n+1)}, *_{\underline{B}}), c_{i+1}, \dots, c_m)$$

tetszőleges $1 \le i \le m$ és $c_1, \dots, c_{i-1}, c_{i+1}, \dots, c_m \in A \times B$ esetén. □

<u>9. Következmény</u>. Minden n-változós reguláris F-erdő véges sok $R^{*_1 x_{n+1}} \cdot x_{n+1} S$ alakú erdő úniója, ahol R $(n+1)$-változós, S pedig n-változós reguláris prefixmentes erdő. □

Az egy végállaputú faautomatával felismerhető erdők egy további jellemzését adja a következő

<u>15. Tétel</u>. Legyen $T \subseteq T_{F,m}$ reguláris. T akkor és csak akkor ismerhető fel egy végállaptú faautomatával, ha valahányszor $p \in T$ és $r \in sub(p) \cap T$, mindannyiszor az összes olyan q fa, ami p-ből úgy áll elő, hogy r egy előfordulását T-beli fával helyettesitjük, eleme T-nek.

<u>Bizonyitás</u>. A szükségesség triviális. Forditva, tegyük fel hogy a reguláris T erdő rendelkezik a szükséges tulajdonságokkal.

Vegyünk egy $\underline{A} = (\mathcal{A}, \underline{a}, A')$ összefüggő faautomatát, ami T -t felismeri. Állitjuk, hogy $\underline{A}$ végállaptai páronként ekvivalensek. Ennek érdekében vegyük az a és b végállapotokat, a $p \in T_{F,m}$ fát és az $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_m \in A$ állapotokat úgy, hogy x_i eleme legyen $sub(p)$ -nek. Tegyük fel, hogy

$$p^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \dots, a_m) \in A'.$$

$\underline{A}$ összefüggő, igy alkalmas $t_1, t_2, s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_m$ n-változós fákra

$$t_1^{\mathcal{A}}(\underline{a}) = a \quad , \quad t_2^{\mathcal{A}}(\underline{a}) = b$$

és

$$s_j^{\mathcal{A}}(\underline{a}) = a_j \quad (j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, m) .$$

Világos, hogy mind t_1 mind pedig $p(s_1, \dots, s_{i-1}, t_1, s_{i+1}, \dots, s_m)$ eleme $T(\underline{A})$ -nak. Ugyanakkor t_2 is eleme $T(\underline{A})$ -nak, igy feltételeink értelmében $p(s_1, \dots, s_{i-1}, t_2, s_{i+1}, \dots, s_m)$ is $T(\underline{A})$-beli. Innen

$$p^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_m) \in A' .$$

Az a és b állapotok szimmetrikus volta miatt ekvivalenciájukat beláttuk. □

<u>4.4. Hatvány-korlátos erdők</u>. A hatvány-korlátos nyelvek fogalmát G. Thierrin vezette be /ld [24]/, ezt az elnevezést használva azokra az L nyelvekre, amelyekhez megadható olyan n természetes szám, hogy valahányszor az x és y szavakra $yx^m \in L$ és x nem az üres szó, mindannyiszor $m \leq n$. Mint az idézett

cikkből kiderül, a reguláris prefixmentes nyelvek véges úniói pontosan a reguláris hatvány-korlátos nyelvek. Arra pedig, hogy egy automata hatványkorlátos nyelvet ismerjen fel, P.A.S. Veloso adott szükséges és elégséges feltételt /ld. [26]/.

Tekintsünk egy $p \in T_{F,u}$ fát és definiáljuk p x_i-hatványait a következőképpen. Legyen $p^{0,x_i} = x_i$ és $p^{n+1,x_i} = p \cdot x_i\, p^{n,x_i}$ $(n \geq 0)$. A $T \subseteq T_{F,u}$ erdőt hatvány-korlátosnak nevezzük, ha megadható hozzá egy M természetes szám úgy, hogy valahányszor $h(p) \geq 0$ $p^{k,x_i} \cdot x_i\, t \in T$ és $x_i \in sub(p)$, mindannyiszor $k \leq M$.

A következő állitás azt mutatja, hogy reguláris prefixmentes és a reguláris hatvány-korlátos erdők közötti kapcsolat ugyanaz, mint a megfelelő nyelvosztályok között, továbbá megadja a hatvány--korlátos erdőket felismerő faautomaták egy leirását.

16. Tétel. Az $\underline{A} = (\mathcal{A}, \underline{a}, A')$ összefüggő n-változós F-automatára a következő három állitás ekvivalens:

(1) $T(\underline{A})$ hatvány-korlátos

(2) $\underline{A}$ egyetlen végállapota sem érhető el saját magából,

(3) $T(\underline{A})$ véges sok reguláris prefixmentes erdő úniója.

Bizonyitás. (1) => (2). Tegyük fel, hogy az $\underline{A}$ faautomata b végállapota elérhető saját magából, vagyis, hogy alkalmas $p \in T_{F,u}$ legalább egy-magasságú fára, az $1 \leq i \leq u$ természetes számra és az $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_u \in A$ állapotokra $x_i \in sub(p)$ és

$$p^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_u) = b$$

teljesül. Tekintsük a $p_1 = p(t_1, \dots, t_{i-1}, x_{n+1}, t_{i+1}, \dots, t_m)$ fát, ahol t_j olyan n-változós fa, amelyre $t_j^{\mathcal{A}}(\underline{a}) = a_j$ $(j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, m)$. Egy k-szerinti teljes indukcióval egyszerüen belátható, hogy

$$(p_1^{k, x_{n+1}})^{\mathcal{A}}(\underline{a}, b) = b \qquad (k = 0, 1, \dots) .$$

Igy minden $k \geq 0$ -ra

$$(p^{k, x_{n+1}} \cdot_{x_{n+1}} t)^{\mathcal{A}}(\underline{a}) = (p_1^{k, x_{n+1}})^{\mathcal{A}}(\underline{a}, b) = b \in A'$$

ahol $t \in T_{F,u}$ és $t^{\mathcal{A}}(\underline{a}) = b$. Tehát $T(\underline{A})$ nem hatvány--korlátos.

(2) => (3). Tegyük fel, hogy (2) teljesül. Mivel $T(\underline{A}) = \bigcup (T(\underline{A}(b)) \mid b \in A')$, elegendő megmutatni, hogy $T(\underline{A}(b))$ minden $b \in A'$-re prefixmentes. Jelölje $E(b)$ a b-ből elérhető állapotok halmazát. Világos, hogy $b \notin E(b)$. Továbbá minden $p \in T_{F,u}$ -re

$$p^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_{i-1}, e, a_{i+1}, \dots, a_m) \in E(b)$$

feltéve, hogy $e \in E(b)$, és $x_i \in sub(p)$. Ebből azonnal folyik, hogy $E(b)$ elmei páronként ekvivalénsek $\underline{A}(b)$ -ben. Végül bármely $F^{\mathcal{A}}$ -beli müvelet eredménye $E(b)$ -be esik, ha legalább egy argumentuma $E(b) \cup \{b\}$ -ből való. Mindezek azt mutatják, hogy az $\underline{A}(b)$ -hez tartozó redukált faautomata prefixmentes.

(3) => (1). Vegyük észre, hogy a hatvány-korlátos nyelvek zártak az únióra nézve. Eszerint elegendő megmutatni, hogy minden reguláris prefixmentes erdő hatványkorlátos. Ennek érdekében tekintsük a $T = T(\underline{B})$ erdőt és tegyük fel, hogy T nem hatvány-korlátos. Legyen M az $\underline{B}$ állapotainak száma. M -hez létezik olyan $k > M$

természetes szám, hogy alkalmas p és t fákra $\ell(p) \geq 1$, $x_i \in sub(p)$ és

$$p^{k, x_i} \cdot_{x_i} t \in T .$$

Definiáljuk az $a_0, \dots, a_k$ állapotsorozatot az

$$a_j = (p^{j, x_i} \cdot_{x_i} t)^{\mathcal{A}}(\underline{a}) \quad (j = 0, \dots, k)$$

összefüggésekkel. Vegyük észre hogy $j_1 < j_2$ esetén a_{j_2} elérhető a_{j_1} -ből, mert $p^{j_1, x_i} \cdot_{x_i} t$ részfája $p^{j_2, x_i} \cdot_{x_i} t$ -nek. Másrészt $a_k \in A'$.

$k > M$ miatt léteznie kell olyan $j_1 < j_2$ indexeknek, hogy $a_{j_1} = a_{j_2}$. Eszerint

$$\begin{aligned} a_k &= (p^{k, x_i} \cdot_{x_i} t)^{\mathcal{A}}(\underline{a}) = (p^{k-j_2, x_i} \cdot_{x_i} p^{j_2, x_i} \cdot_{x_i} t)^{\mathcal{A}}(\underline{a}) = \\ &= (p^{k-j_2, x_i})^{\mathcal{A}}(a^{(1)}, \dots, a^{(i-1)}, a_{j_2}, a^{(i+1)}, \dots, a^{(n)}) = \\ &= (p^{k-j_2, x_i})^{\mathcal{A}}(a^{(1)}, \dots, a^{(i-1)}, a_{j_1}, a^{(i+1)}, \dots, a^{(n)}) = \\ &= (p^{k-j_2, x_i} \cdot_{x_i} p^{j_1, x_i} \cdot_{x_i} t)^{\mathcal{A}}(\underline{a}) = (p^{k-(j_2-j_1), x_i} \cdot_{x_i} t)^{\mathcal{A}}(\underline{a}) = \\ &= a_{k-(j_2-j_1)} . \end{aligned}$$

Tehát mind $p^{k, x_i} \cdot_{x_i} t$, mind pedig $p^{k-(j_2-j_1), x_i} \cdot_{x_i} t$ eleme T -nek. Igy T nem lehet prefixmentes, mert $k-(j_2-j_1) < k$, amiből azt kapjuk, hogy $p^{k-(j_1-j_2), x_i} \cdot_{x_i} t$ valódi részfája $p^{k, x_i} \cdot_{x_i} t$ -nek. Ezzel a bizonyitást befejezetük. □

Ennek a fejezetnek a befejezéseként tisztázzuk a vizsgált erdőosztályok egymással való kapcsolatát.

Jelölje $PM(F,u)$ és $HK(F,u)$ rendre a reguláris prefixmentes ill. a reguláris hatványkorlátos erdők osztályait. Az imént bizonyitott tétel harmadik állitásának értelmében $PM(F,u) \subseteq$ $\subseteq HK(F,u)$. A 7. tétel értelmében pedig $PM(F,u) \subseteq \mathcal{C}_1$, és igy $PM(F,u) \subseteq \mathcal{C}_1 \cap HK(F,u)$. Ennek a tartalmazásnak a megforditottja is érvényes. Ugyanis a $\mathcal{C}_1$-beli n-változós F-erdők $R^{*,x_{n+1}} \cdot x_{n+1} S$ alakúak, ahol R és S prefixmentes és reguláris /ld. 14. tétel/. Az pedig világos, hogy ha $p \in R$ és $h(p) \geq 1$ akkor minden $k \geq 0$ -ra

$$p^{k,x_{n+1}} \cdot x_{n+1} s \in R^{*,x_{n+1}} \cdot x_{n+1} S$$

valahányszor $s \in S$, és igy $R^{*,x_{n+1}} \cdot x_{n+1} S$ nem lehet hatvány--korlátos. Eszerint ha $R^{*,x_{n+1}} \cdot x_{n+1} S$ hatvány-korlátos, akkor $R = \emptyset$ vagy $R = \{x_{n+1}\}$. Mindkét esetben $R^{*,x_{n+1}} \cdot x_{n+1} S = S$. Kaptuk tehát, hogy

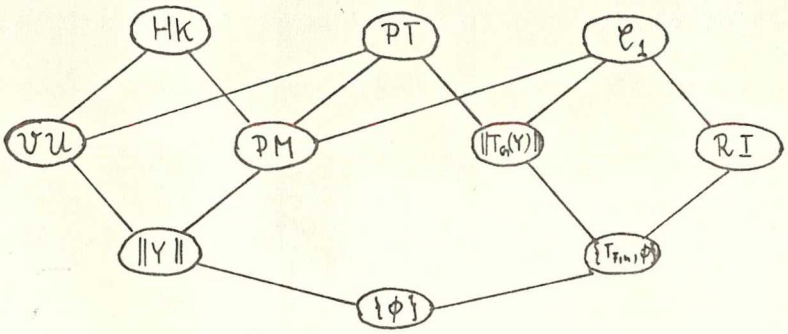
$$PM(F,u) = \mathcal{C}_1 \cap HK(F,u) \quad . \qquad (55)$$

Tekintsük most a reguláris prefixteljes n-változós F-erdők $PT(F,u)$ osztályának egy T elemét. A 11. tétel értelmében T felismerhető olyan $\underline{A}$ faautomatával, amelyre $A = A' \cup \{*\}$, ahol $*$ abszorbens nem-végállapot. Tegyük fel, hogy T-nek van az $\underline{A}$ állapotszámánál magasabb p eleme. Ekkor léteznie kell olyan t_1 és t_2 részfának p-ben, hogy $t_1 \neq t_2$, $t_1 \in sub(t_2)$ és $t_1^{\mathcal{A}}(\underline{a}) = t_2^{\mathcal{A}}(\underline{a}) \cdot \mathbf{a}$. Nyilvánvaló, hogy $t_1^{\mathcal{A}}(\underline{a}) \neq *$, mert $*$ abszorbens és $t_1^{\mathcal{A}}(\underline{a})$-ból elérhető $p^{\mathcal{A}}(\underline{a})$, ami viszont nem egyenlő $*$-gal. Eszerint $\mathbf{a}$ végállapot, és elérehtő önmagából, ami 16. tétel szerintazt jelenti, hogy nem hatvány-korlátos. Igy ha T eleme a $PT(F,u) \cap HK(F,u)$

osztálynak, akkor szükségképpen véges és előáll $T = \bigcup(\mathrm{sub}(\mu) \mid \mu \in T)$ alakban, hiszen prefixteljes. Ugyanakkor minden véges erdő hatvány--korlátos, igy az előző állitás megforditása is igaz. Igy, ha $\mathcal{VU}(F,u)$ jelöli a véges sok n-változós F-fa részáinak úniójaként előálló erdők osztályát, akkor

$$\mathcal{VU}(F,u) = \mathcal{HK}(F,u) \cap \mathcal{PT}(F,u) . \qquad (56)$$

Vegyünk ezután egy $T \subseteq \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{PT}(F,u)$ erdőt, ami nem egyenlő



1. ábra

$T_{F,u}$ -nel. A 8. következmény szerint T felismerhető olyan faautomatával, melynek két állapota van, és a nem végállapot abszorbens. Nem nehéz belátni, hogy az ilyen faautomatákkal a $T_G(Y)$ alakú nyelvek ismerhetők fel, ahol $G \subseteq F$ és $Y \subseteq X_n$. Maga $T_{F,u}$ nyilván felismerhető egy végállapotú faautomatával, és prefixteljes is. Ugyanaz az állitás igaz a $T_G(Y)$ alakú erdőkre is.

Végül $\mathcal{RI}(F,u)$ -nel jelöve a reguláris n-változós F-feletti jobbideálok osztályát, a 10. tétel szerint

$$\mathcal{RI}(F,u) \subseteq \mathcal{C}_1 . \qquad (57)$$

Világos, hogy az üres erdőn és a $T_{F,n}$ -en kivül nincs olyan reguláris n-változós F-erdő, ami egyidejüleg prefixteljes és jobbideál. Végül egy $T \subseteq T_{F,u}$ prefixmentes erdő akkor és csak akkor $sub(p_1) \cup \ldots \cup sub(p_k)$ alakú, ha $T \subseteq X_n$.

Az 1. ábrán $\|Y\|$ jelöli az X_n részhalmazaiból álló osztályt, $\| T_G(Y) \|$ a $T_G(Y)$ alakú n-változós F-erdők osztályát ($Y \subseteq X_n$, $G \in F$) . Az egyszerüség kedvéért az egyes osztályok jelei után zárójelben lévő (F, u) paramétereket az ábrán elhagytuk. Megjegyezzük hogy az ábrán látható parciálisan rendezett halmaz az (55) -(57) valamint a fenti megjegyzések értelmében metszet-félháló.

5. Definit erdők és faautomaták.

Ebben a fejezetben néhány a nilpotens, a definit és a forditott definit nyelvekre vonatkozó eredmény általánositását adjuk.

5.1. Nilpotens erdők. Egy $T \subseteq T_{F,u}$ erdőt nilpotensnek nevezünk, ha vagy saját maga, vagy pedig a komplementere véges. T komplementeren a $T_{F,u} - T$ erdőt értjük. Tekintve, hogy a reguláris erdők zártak a komplementum képzésére, minden nilpotens erdő reguláris.

Az $\underline{A} = (\mathcal{A}, \underline{a}, A')$ n-változós F-automatát nilpotensnek nevezzük, ha létezik olyan $k \geq 0$ természetes szám, melyhez megadható az $\underline{A}$-nak olyan $*$ állapota, hogy minden legalább k-magasságú $p \in T_{F,n}$ fára $p^{\mathcal{A}}(\underline{a}) = *$.

<u>17. tétel.</u> Egy $\underline{A} = (\mathcal{A}, \underline{a}, A')$ összefüggő n-változós F-automata akkor és csak akkor nilpotens, ha létezik abszorbens állapota, az ettől különböző állapotok pedig nem érhetők el saját magukból.

<u>Bizonyitás.</u> Legyen $\underline{A} = (\mathcal{A}, \underline{a}, A')$ összefüggő és nilpotens. Vegyünk egy k-mgasságú $t \in T_{F,n}$ fát és legyen $* = t^{\mathcal{A}}(\underline{a})$. Állitjuk, hogy $*$ abszorbens. Valóban, bármely $f \in F^m$ és $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_m \in A$ esetén

$$f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_{i-1}, *, a_{i+1}, \dots, a_m) = f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(\underline{a}), \dots, t_{i-1}^{\mathcal{A}}(\underline{a}), t^{\mathcal{A}}(\underline{a}), t_{i+1}^{\mathcal{A}}(\underline{a}), \dots, t_m^{\mathcal{A}}(\underline{a}))$$

$$= f(t_1, \dots, t_{i-1}, t, t_{i+1}, \dots, t_m)^{\mathcal{A}}(\underline{a}) = * .$$

Itt t_j olyan $T_{F,n}$-beli fákat jelöl, amelyre $t_j^{\mathcal{A}}(\underline{a}) = a_j$ $(j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, m)$. Megjegyezzük, hogy ilyen t_j-k léteznek, mert $\underline{A}$ összefüggő.

Ezután legyen a egy $*$-tól különböző állapota $\underline{A}$-nak, és tegyük fel, hogy a elérhető saját magából. Ekkor alkalmas $q \in T_{F,m}$ fára és $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_m \in A$ állapotokra $h(q) \geq 1$ $x_i \in \mathrm{sub}(q)$ és

$$q^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \dots, a_m) = a .$$

József Attila Tudományegyetem Könyvtára SZEGED

könnyen ellenőrizhető, hogy minden $s \geq 0$ természetes számra

$$(q^{s,x_i})^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \dots, a_m) = a . \qquad (58)$$

Ismét kihasználva $\underline{A}$ összefüggőségét, vehetünk olyan t és t_j n-változós F-fákat, amelyekre

$$a_j = t_j^{\mathcal{A}}(\underline{a}) \quad \text{és} \quad a = t^{\mathcal{A}}(\underline{a}) \quad (j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, m) .$$

Ekkor (58)-ból minden $s \geq 0$ -ra

$$q^{s,x_i}(t_1, \dots, t_{i-1}, t, t_{i+1}, \dots, t_m)^{\mathcal{A}}(\underline{a}) = a .$$

Ez pedig lehetetlen mert $h(q) \geq 1$ és $x_i \in sub(q)$ miatt q^{s,x_i} magassága s-növelésével tetszőlegesen nagy lehet, és igy előbb-utóbb meghaladja k-t. Tehát a nem érhető el saját magából.

Forditva, tegyük fel, hogy az $\underline{A} = (\mathcal{A}, \underline{a}, A')$ n-változós F-automata olyan, hogy $\underline{A}$-nak létezik egy $*$ abszorbens állapota, a többi állapot pedig nem érhető el saját magából. Legyen k az $\underline{A}$ állapotainak száma és p egy k-nál nem kisebb magasságú n-változós F-fa. Ekkor léteznia kell olyan $t_1, t_2 \in sub(p)$ fáknak, hogy $t_1 \neq t_2$, $t_1 \in sub(t_2)$ és $t_1^{\mathcal{A}}(\underline{a}) = t_2^{\mathcal{A}}(\underline{a})$. Vegyük észre, hogy $t_2^{\mathcal{A}}(\underline{a})$ $(= t_1^{\mathcal{A}}(\underline{a}))$ elérhető $t_1^{\mathcal{A}}(\underline{a})$ -ból, igy $t_1^{\mathcal{A}}(\underline{a})$ nem lehet más mint az $\underline{A}$ abszorbens állapota. Ha pedig $t_1^{\mathcal{A}}(\underline{a}) = *$, akkor $t_1 \in sub(p)$ miatt $p^{\mathcal{A}}(\underline{a})$ is egyenlő $*$-gal, mert abszorbens állapotból csak saját maga érhető el. □

Vegyük észre, hogy a fenti tétel bizonyitásának második részében nem használtuk ki azt a tényt, hogy $\underline{A}$ összefüggő. Ezért igaz a következő állitás.

<u>10. Következmény</u>. Ha az $\underline{A} = (\mathcal{M}, \underline{a}, A')$ összefüggő faautomata nilpotens, akkor minden $\underline{b} \in A^n$ n-esre és $B' \subseteq A$ halmazra a $\underline{B} = (\mathcal{M}, \underline{b}, B')$ faautomata is nilpotens. □

<u>18. Tétel</u>. Egy $T \subseteq T_{F,M}$ erdő akkor és csak akkor nilpotens, ha felismerhető nilpotens faautomatával.

<u>Bizonyitás</u>. Ha az $\underline{A} = (\mathcal{M}, \underline{a}, A')$ faautomata nilpotens, akkor az $\underline{A}$ összefüggő $\underline{B}$ részautomatája is nilpotens. Igy a 17. tétel értelmében a $\underline{B}$ F-automatának van abszorbens állapota, jelöljük $*$-gal, a $*$-tól különböző állapotok pedig nem érhetők el saját magukból. Ekkor minden $*$-tól különböző a állapotra $T(\underline{B}(a))$ véges, $T(\underline{B}(*))$ pedig végtelen. Tehát attól függően, hogy $*$ végállapot-e, $T(\underline{B})$ véges, vagy pedig a komplementere véges.

A szükségesség bizonyitásához tekintsük a T nilpotens erdőt, és legyen $T = T(\underline{A})$, ahol $\underline{A}$ összefüggő és redukált. Azzal az esettel kezdjük, mikor T komplementere véges. Ekkor léteznie kell olyan $* \in A'$ állapotnak, amelyre $T(\underline{A}(*))$ végtelen. Másszóval, azon e állapotok E halmaza, melyekre $T(\underline{A}(e))$ végtelen, nem üres. Sőt az is nyilvánvaló, hogy $E \subseteq A'$. Vegyük észre, hogy minden $p \in T_{F,M}$ fára és az $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_m \in A$ állapotokra, ha $x_i \in \mathrm{sub}(p)$, akkor

$$p^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_{i-1}, e, a_{i+1}, \dots, a_m) \in E \subseteq A', \qquad (59)$$

valahányszor $e \in E$. Ebből azonnal következik, hogy E elemei páronként ekvivalensek. Tekintve, hogy $\underline{A}$ redukált, ez azt eredményezi, hogy $E = \{*\}$. (59)-ből pedig evidens, hogy $*$

abszorbens. Továbbá, ha $a \neq *$, akkor $T(\underline{A}(a))$ véges volta miatt a nem érhető el saját magából. Mindezek a 17. tétellel együtt implikálják, hogy $\underline{A}$ nilpotens.

Végül megjegyezzük, hogy redukált $\underline{A} = (\mathcal{A}, \underline{a}, A')$ faautomatára a $\underline{B} = (\mathcal{A}, \underline{a}, A - A')$ faautomata is redukált. Tehát, ha a kiindulási T erdő véges, akkor az előző gondolatmenetet $\underline{A}$ helyett a $\underline{B}$ faautomatára végrehajtva kapjuk, hogy $\underline{B}$ nilpotens, ami a 10. következmény alapján implikálja, hogy $\underline{A}$ is nilpotens. □

Megjegyezzük, hogy a most bizonyitott tétel 1-változós unér faautomatákra pontosan H. Kaphengst eredményét adja, miszerint egy T 1-változós unér erdő akkor és csak akkor nilpotens, ha felismerhető olyan $\underline{A} = (\mathcal{A}, \underline{a}, A')$ 1-változós unér faautomatával, melyre létezik olyan $* \in A$ és $k \geq 0$, hogy

$$h(\mu) \geq k \text{ -ból következik, hogy } \mu^{\mathcal{A}}(a) = *$$

valamennyi μ fára és $a \in A$ állapotra.

Célunk annak igazolása, hogy a nilpotens erdők nem mások, mint a véges erdők valamint a maximális prefixmentes erdők által generált jobbideálok és a véges erdők únióiként előálló erdők. A $T \subseteq T_{F,n}$ prefixmentes erdőt akkor nevezzük maximálisnak, ha bármely további fa hozzávételével elveszti prefixmentességét.

<u>13. Lemma</u>. Az $\underline{A} = (\mathcal{A}, \underline{a}, \{a_f\})$ összefüggő, redukált és prefixmentes faautomatára $T(\underline{A})$ akkor és csak akkor maximális, ha

(1) minden $f \in F^m$ $(m \geq 1)$ és $a_1, \dots, a_m \in A - \{a_f, *_{\underline{A}}\}$ -ra $f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_m) \neq *_{\underline{A}}$, és

(2) $*_{\underline{A}}$ nem fordul elő az iniciális vektorban.

<u>Bizonyitás</u>. Legyen $\underline{A} = (\mathcal{A}, \underline{a}, \{a_f\})$ összefüggő, redukált és prefixmentes faautomata, és tegyük fel hogy $T(\underline{A})$ nem maximális. Ekkor alkalmas $p \notin T(\underline{A})$ -ra $T(\underline{A}) \cup \{p\}$ még mindig prefixmentes. Állapitjuk, hogy $p^{\mathcal{A}}(\underline{a}) = *_{\underline{A}}$. Valóban, $p^{\mathcal{A}}(\underline{a})$ nem lehet a_f, mert $p \in T(\underline{A})$. Ha pedig $p^{\mathcal{A}}(\underline{a}) = a \in A - \{a_f, *_{\underline{A}}\}$ teljesülne, akkor alkalmas $q \in T_{F,m}$ fára és $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_m \in A$ állaptokra, $h(q) \geq 1$, $x_i \in sub(q)$ és

$$q^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \dots, a_m) = a_f$$

teljesülne. /Redukált prefixmentes faautomatában a végállapot minden az abszorbens állapottól különböző állapotból elérhető/. Ezután kihasználva $\underline{A}$ összefüggő voltát, azt kapnánk, hogy alkalmasan választott $t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_m \in T_{F,m}$ fákra

$$q(t_1, \dots, t_{i-1}, p, t_{i+1}, \dots, t_m) \in T(\underline{A})$$

ami pedig lehetetlen, mert $T(\underline{A}) \cup \{p\}$ prefixmentes. Ezzel a $p^{\mathcal{A}}(\underline{a}) = *_{\underline{A}}$ egyenlőséget beláttuk.

Ezekután vegyünk egy $t \in sub(p)$ fát, ami minimális magasságú a p azon u részfái között, amelyekre $u^{\mathcal{A}}(\underline{a}) = *_{\underline{A}}$. Ha $h(t) = 0$, akkor $*_{\underline{A}}$ előfordul az iniciális vektorban, tehát (2) nem teljesül. Ha pedig $t = f(t_1, \dots, t_m)$, akkor egyrészt t választása miatt $t_i^{\mathcal{A}}(\underline{a}) \neq *_{\underline{A}}$, másrészt $T(\underline{A}) \cup \{p\}$ prefixmentessége miatt $t_i \notin T(\underline{A})$, azaz $t_i^{\mathcal{A}}(\underline{a}) \neq a_f$ $(i = 1, \dots, m)$. Eszerint $t_1^{\mathcal{A}}(\underline{a}), \dots, t_m^{\mathcal{A}}(\underline{a}) \in A - \{a_f, *_{\underline{A}}\}$, és ugyanakkor

$$f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(\underline{a}), \dots, t_m^{\mathcal{A}}(\underline{a})) = *_{\underline{A}},$$

tehát (1) nem teljesül. Ezzel az elégségességet báláttuk.

A szükségességet is indirekt úton bizonyitjuk. Ha az $\underline{A} = (\mathcal{A}, \underline{a}, \{a_f\})$ összefüggő, redukált és prefixmentes faautomatára (1) nem teljesül, akkor léteznek olyan $a_1, \dots, a_m \in A - \{a_f, *_{\underline{A}}\}$ állapotok és olyan $f \in F^m$ müveleti jel, hogy

$$f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_m) = *_{\underline{A}} .$$

Vegyük a $p = f(t_1, \dots, t_m)$ fát, ahol a t_i fákra $t_i^{\mathcal{A}}(\underline{a}) = a_i$ teljesül $(i = 1, \dots, m)$. Világos, hogy $p \in T(\underline{A})$. Ugyanakkor ha egy p-től különböző $q \in T_{F,m}$ fára $p \in sub(q)$, akkor $q^{\mathcal{A}}(\underline{a}) = *_{\underline{A}}$ mert $q^{\mathcal{A}}(\underline{a})$ elérhető $p^{\mathcal{A}}(\underline{a}) = *_{\underline{A}}$-ból. Eszerint p egyetlen $T(\underline{A})$-beli fának sem lehet részfája. Végül p valamennyi tőle különböző q részfája egyben t_i-nek is részfája valamely $1 \le i \le m$-re. Mivel $t_i^{\mathcal{A}}(\underline{a}) \in A - \{a_f, *_{\underline{A}}\}$ és a_f-ből csak a $*_{\underline{A}}$ állapot érhető el, $q^{\mathcal{A}}(\underline{a}) \neq a_f$. Tehát $sub(p) \cap T(\underline{A}) = \emptyset$ ami fenti megjegyzéssel együtt implikálja, hogy $T(\underline{A}) \cup \{p\}$ prefixmentes.

Ha pedig $\underline{A}$-ra a (2) feltétel nem teljesül, mondjuk $a^{(i)} = *_{\underline{A}}$, akkor $T(\underline{A})$-ban egyetlen olyan fa sem szerepelhet, amiben x_i előfordul. Ekkor pedig a $T(\underline{A}) \cup \{x_i\}$ erdő prefixmentes. □

A tobábbiakban $T[k]$-val illetve $T(k)$-val jelöljük rendre a T-beli k-magasságú, illetve a T-beli legfeljebb k-magasságú fák halmazát. Megjegyezzük, hogy 0-nál kisebb k-kra $T(k) = \emptyset$.

<u>19. Tétel</u>. A $T \subseteq T_{F,u}$ erdőre a következő három állitás ekvivalens:

(1) T nilpotens,

(2) T véges, vagy előáll $T = R^{\varrho} \cup R'$ alakban, ahol R' véges, R pedig véges maximális prefixmentes erdő,

(3) T véges, vagy előáll $T = T_{F,u}[k]^{\varrho} \cup R'$ alakban, ahol $k \geq 0$ és $R' \subseteq T_{F,u}(k-1)$.

<u>Bizonyitás.</u> (1) $\Rightarrow$ (2). Ha T véges, akkor készen vagyunk. Tegyük fel tehát, hogy T komplementere véges és vegyünk egy $\underline{A} = (\mathcal{A}, a, A')$ összefüggő nilpotens faautomatát, amelyre $T = T(\underline{A})$. A 17. tétel felhasználásával kapjuk, hogy $\underline{A}$-nak van abszorbens állapota, jelöljük a^*-gal, a többi állapot pedig nem érhető el saját magából. Vegyük észre, hogy T végtelen volta miatt $a^* \in A'$. Igy

$$T = T(\underline{A}) = T(\underline{A}(a^*)) \cup \bigcup \left(T(\underline{A}(a)) \mid a \in A' - \{a^*\} \right).$$

Mivel az $R' = \bigcup \left(T(\underline{A}(a)) \mid a \in A' - \{a^*\} \right)$ erdő véges, elegendő megmutatnunk, hogy $T(\underline{A}(a^*))$ maximális prefixmentes erdő által generált jobbideál.

A 10. tétel értelmében $T(\underline{A}(a^*))$ jobbideál. Vegyük az $R = T(\underline{A}(a^*))^{T}$ erdőt. Erre (31)-ből $R^{\varrho} = T(\underline{A}(a^*))$ adódik. R prefixmentes volta is triviális. Azt kell tehát megmutatnunk, hogy R maximális.

R definiciója szerint egy $p \in T(\underline{A}(a^*))$ fa akkor és csak akkor eleme R-nek, ha

minden $t \in sub(p)$ $(t \neq p)$ fára $t^{\mathcal{A}}(a) \neq a^*$

Igy R felismerhető a $\underline{B} = (\mathcal{B}, a, \{a^*\})$ n-változós F-automatával, ahol a $\mathcal{B} = (A \cup \{*_{\underline{B}}\}, F^{\mathcal{B}})$ F-algebrára

$$f^{\mathcal{B}}(b_1, \dots, b_m) = \begin{cases} *_{\underline{B}} & \text{ha } b_i \in \{a^*, *_{\underline{B}}\} \text{ valamely } 1 \leq i \leq m \text{ -re} \\ f^{\mathcal{A}}(b_1, \dots, b_m) & \text{különben ,} \end{cases}$$

valahányszor $b_1, \dots, b_m \in A \cup \{*_{\underline{B}}\}$ és $f \in F^m$ /lásd (20)-at és a 8. lemmát/.

Megjegyezzük, hogy a $\mathcal{B}$ algebrára öröklődnek az $\mathcal{A}$ algebra tulajdonságai. $\mathcal{B}$ -nek $*_{\underline{B}}$ abszorbens állapota, a többi állapot pedig nem érhető el saját magától.

Állitjuk, hogy a $\underline{B}/\varrho_{\underline{B}}$ redukált prefixmentes és összefüggő faautomatára teljesülnek a 13. lemma (1) és (2) feltételei. Azzal kezdjük, hogy

$$*_{\underline{B}}/\varrho_{\underline{B}} = \{*_{\underline{B}}\} \quad . \tag{60}$$

(60) abból a már a 13. Lemma bizonyitásába is használt tényből következik, hogy redukált, összefüggő és prefixmentes faautomatában a végállapot, minden az abszorbens állapottól és a végállapottól különböző állapotból elérhető. Igy, ha $a \in A - \{a^*, *_{\underline{B}}\}$, akkor a és $*_{\underline{B}}$ nem lehet ekvivalens, mert $*_{\underline{B}}$ abszorbens lévén, belőle csak önmaga érhető el. Végül a^* és $*_{\underline{B}}$ nyilván nem ekvivalensek, mert az egyik végállapot, a másik pedig nem.

(60) alapján nyilvánvaló, hogy $a^{(i)}/\varrho_{\underline{B}} \neq *_{\underline{B}}/\varrho_{\underline{B}}$ $(i = 1, \dots, n)$, tehát a 13. lemma 2 feltétele teljesül $\underline{B}/\varrho_{\underline{B}}$ -re.

Ha pedig az $b_1/\varrho_{\underline{B}}, \dots, b_m/\varrho_{\underline{B}}$ osztályok különböznek az $a^*/\varrho_{\underline{B}}$ és $*_{\underline{B}}/\varrho_{\underline{B}}$ osztályoktól, akkor $b_i \in A - \{a^*\}$ $(i = 1, \dots, m)$,

és igy $f^{\mathcal{L}}(b_1,\dots,b_m) = f^{\mathcal{A}}(b_1,\dots,b_m) \in A$, ami (60) ismételt alkalmazásával implikálja, hogy $f^{\mathcal{L}}(b_1,\dots,b_m)/\varrho_{\underline{B}} \neq x_{\underline{B}}/\varrho_{\underline{B}}$.

(2) => (3). Tegyük fel, hogy $T = R^{\varrho} \cup R'$, ahol R véges maximális prefixmentes, R' pedig véges n-változós F-erdő. Legyen

$$k = \max(h(p) \mid p \in R \cup R') + 1 .$$

Vegyünk egy $p \in T[k]^{\varrho}$ fát. Ennek van T-ben k-magasságú t részfája. A t fa R'-nek nem lehet eleme, igy $t \in R^{\varrho}$ miatt a t-nek van R-beli részfája, ami egyben p-nek is részfája lesz. Tehát $p \in R^{\varrho}$, és igy $T[k]^{\varrho} \subseteq R^{\varrho} \subseteq T$. Ezután vegyünk egy tetszőleges $p \in T_{F,n}[k]$ fát. Ez R-nek nem lehet eleme, igy kihasználva R maximalitását, $R \cup \{p\}$ nem prefixmentes. De p nem lehet R-beli fák részfája sem, és igy szükségképpen p tartalmaz R-ben részfát, vagyis $p \in R^{\varrho} \subseteq T$. Eszerint $T_{F,n}[k] \subseteq T$ amiből $T[k] = T_{F,n}[k]$ következik. Ezekután a

$$T = T_{F,n}[k]^{\varrho} \cup (T - T_{F,n}[k]^{\varrho})$$

a T erdő (3)-beli előállításait adja.

(3) => (1). Triviális. □

<u>Következmény</u>. Egy $T \subseteq T_{F,n}$ erdő akkor és csak akkor nilpotens, ha véges vagy valamely $k \geq 0$ -ra tartalmazza az összes legalább k- magasságú n-változós F-fát. □

A most bizonyitott tétel azt mutatja, hogy minden nilpotens T erdő $T = R^{\varrho} \cup R'$ alakban megadható, ahol valamely $k \geq 0$ -ra $R' \subseteq T_{F,n}(k-1)$, R pedig üres vagy $T_{F,n}[k]$ -val egyenlő.

T -nek ezt az előállítását a <u>k -alakjának</u> nevezzük. A T nilpotens erdő $R^{\rho} \cup R'$ k -alakját a T <u>kanonikus alakjának</u> nevezzük, ha $k = 0$, vagy $R = \phi$ vagy $R'[k-1] \neq T_{F,u}[k-1]$.

<u>20. Tétel</u>. Minden nilpotens erdőnek létezik egyértelmüen meghatározott kanonikus alakja.

<u>Bizonyitás</u>. Tekintsük a k -alakban adott $T = R^{\rho} \cup R'$ erdőt és tegyük fel, hogy $k \geq 1$, $R \neq \phi$ és $R'[k-1] = T_{F,u}[k-1]$. Ha minden $0 \leq \ell \leq k$ -ra $R'[\ell] = T_{F,u}[\ell]$, akkor $T = T_{F,u}$ és ekkor $T = \{x_1, \dots, x_n\}^{\rho}$ a T kanonikus alakja. Ellenkező esetben legyen ℓ az a legkisebb természetes szám, amelyre $R'[\ell-1] \neq T_{F,u}[\ell-1]$. Világos, hogy ekkor $T_{F,u}[\ell]^{\rho} \subseteq T$ amiből az $R'' = T - T_{F,u}[\ell]^{\rho} \subseteq T_{F,u}(\ell-1)$ választás mellett adódik, hogy $T = T_{F,u}[\ell]^{\rho} \cup R''$ a T kanonikus alakja.

Legyen ezekután $T = R^{\rho} \cup R' = S^{\rho} \cup S'$ a T két kanonikus alakja. Evidens, hogy R akkor és csak akkor üres, ha S is az. Ily módon $R = S = \phi$ esetben szükségképpen $R' = S'$. Legyen ezekután $R = T_{F,u}[k]$ és $S = T_{F,u}[\ell]$, valamint $R' \subseteq T_{F,u}(k-1)$ és $S' \subseteq T_{F,u}(\ell-1)$. Vegyük észre, hogy $k < \ell$ nem lehet, mert ez esetben $R^{\rho} \cup R'$ minden k -magasságú fát tartalmaz, $S^{\rho} \cup S'$ pedig nem. Ugyanigy $\ell < k$ sem állhat, amiből kapjuk, hogy $k = \ell$. □

<u>5.2. Definit erdők</u>. Ebben a pontban definiáljuk a fák szuffixeinek halmazát, majd ennek segitségével bevezetjük a definit erdők fogalmát. A definit erdőket felismerő faautomatákat leiró 23. tétel M. Perlis, M. O. Rabin és E. Shamir eredményét

általánositja /ld. [18]/. A definit erdők kanonikus alakjáról szóló állitás speciális eseteként Brzozowski definit nyelvekre vonatkozó analóg állitását nyerjük /ld. [1]/.

Egy $p \in T_{F,u}$ fa <u>szuffixeinek</u> $suff(p)$ halmazát a következő két feltétellel definiáljuk:

(1) ha $p = x_i$, akkor $suff(p) = \{x_1, \dots, x_n\}$,

(2) ha $p = f(p_1, \dots, p_u)$, akkor

$$suff(p) = \{x_1, \dots, x_n\} \cup f(suff(p_1), \dots, suff(p_u)) .$$

A p k-magasságú szuffixeinek halmazát $suff_k(p)$ -vel jelöljük.

Világos, hogy minden fa szuffixe saját magának, továbbá, hogy az x_i $(1 \le i \le u)$ fák minden fának szuffixei. A következő két állitás bizonyitása egyszerü rutin feladat.

<u>11. Következmény</u>. Bármely $p \in T_{F,u}$ fára

$$suff(p) = \{q \mid p \in \{q\}(x_1 \leftarrow sub(p), \dots, x_n \leftarrow sub(p))\} . \quad \square$$

<u>12. Következmény.</u> Bármely $p \in T_{F,u}$ fára $suff(p)$ zárt a hasonlóságra, vagyis valahányszor $q \in suff(p)$ és $q' \sim q$, mindannyiszor $q' \in suff(p)$. $\square$

A $T \subseteq T_{F,u}$ erdőre $suff(T)$ -t a

$$suff(T) = \bigcup(suff(p) \mid p \in T)$$

egyenlőséggel értelmezzük. A T k-magasságú szuffixeinek halmazát $suff_k(T)$ -vel jelöljük.

Fontos lesz számunkra az a tény, hogy a "szuffixnek lenni" reláció tranzitiv. Valóban a 12. következmény segitségével nem nehéz belátni, hogy

József Attila Tudományegyetem Könyvtár SZEGED

<u>13. Következmény</u>. Bármely $p \in T_{F,n}$ fára és a $0 \le k \le l \le h(p)$ nemnegativ egészekre

$$\mathrm{suff}_k(p) = \mathrm{suff}_k(\mathrm{suff}_l(p)) \ . \ \square \tag{61}$$

Tekintsük ezekután a $T \subseteq T_{F,n}$ erdőt és jelöljük T^{τ} -val mindazon $T_{F,n}$ -beli fák halmazát, amelyeknek létezik szuffixe T -ben. Tehát

$$T^{\tau} = \{ p \mid p \in T_{F,n} \text{ és } \mathrm{suff}(p) \cap T \neq \emptyset \} \ .$$

A 11. következmény alapján evidens, hogy

$$T^{\tau} = T(x_1 \leftarrow T_{F,n}, \ldots, x_n \leftarrow T_{F,n}) ,$$

ami azt mutatja, hogy reguláris T -re T^{τ} is reguláris.

Most már mindent előkészitettünk ahhoz, hogy bevezethessük a definit erdők fogalmát. Egy $T \subseteq T_{F,n}$ erdőt <u>gyengén k-definitnek</u> hivunk, ha minden legylább k-magasságú $p \in T_{F,n}$ fára p akkor és csak akkor eleme T -nek, ha $\mathrm{suff}_k(p) \cap T \neq \emptyset$. Azt mondjuk, hogy T <u>k-definit,</u> ha T gyengén k-definit és $k = 0$, vagy pedig, ha $k \ge 1$, T gyengén k-definit és nem gyengén $(k-1)$-definit. Végül T -t <u>definitnek</u> nevezzük, ha k-definit valamely $k \ge 0$ -ra.

Megjegyezzük, hogy ha T gyengén k-definit, akkor minden $l \ge k$ -ra gyengén l-definit is. Valóban, ha $h(p) \ge l$ és a T gyengén k-definit erdőnek p eleme, akkor létezik olyan $t \in T$, amelyre $t \in \mathrm{suff}_k(p)$. Ám a 13. következmény miatt t a p egy l magasságú t' suffixének is szuffixe. Eszerint $t' \in T$ és igy nyertük, hogy $\mathrm{suff}_l(p) \cap T \neq \emptyset$. Ha pedig $\mathrm{suff}_l(p) \cap T \neq \emptyset$,

akkor tekintve, hogy a $t \in \mathrm{suff}(\mu) \cap T$ magassága l $(\geq k)$, t -nek létezik k magasságú t' suffixe T -ben. Ez pedig a 13. következmény értelmében μ -nek is k - magasságú szuffixe, és igy $\mu \in T$.

<u>21. Tétel</u>. A $T \subseteq T_{F,n}$ erdőre a következő három állitás ekvivalens:

(1) T definit

(2) T előáll $T = R^{\tau} \cup R'$ alakban, ahol alkalmas $k \geq 0$ -ra $R \subseteq T_{F,n}[k]$ és $R' \subseteq T_{F,n}(k-1)$,

(3) T előáll $T = S^{\tau} \cup S'$ alakban, ahol S és S' véges n -változós F -erdő.

<u>Bizonyitás</u>. (1) => (2). Ha a T erdő definit, akkor valamely $k \geq 0$ -ra gyengén k -definit. Nyilvánvaló, hogy $T[k]^{\tau} \subseteq T$. Továbbá, ha $\mu \in T - T[k]^{\tau}$, akkor $h(\mu) \geq k$ -ból $\mu \in T[k]^{\tau}$ következne, ami lehetetlen, igy $\mu \in T_{F,n}(k-1)$. Eszerint az $R = T[k]$ és $R' = T - T[k]^{\tau}$ választással $T = R^{\tau} \cup R'$ a T keresett előállitását adja.

(2) => (3). Triviális.

(3) => (1). Legyen $T = S^{\tau} \cup S'$, ahol S és S' véges. Legyen továbbá

$$k = \max(h(\mu) \mid \mu \in S \cup S') + 1.$$

Elegendő megmutatnuk, hogy T gyengén k -definit, mert minden gyengén k -definit erdő valamely $l \leq k$ -ra l -definit.

Vegyünk tehát egy legalább k -magas $\mu \in T_{F,n}$ fát és tegyük fel, hogy $\mu \in T$. Világos, hogy μ nem lehet eleme S' -nek, igy szükségképpen $\mu \in S^{\tau}$, vagyis μ -nek létezik S -ben

egy γ szuffixe. Világos, hogy $h(\gamma) < k \leq h(\rho)$. Használva a 13. következményt létezik ρ-nek olyan k-magas t szuffixe, amelyre $\gamma \in \mathrm{suff}(t)$. Ekkor viszont $t \in S^{\tau} \subseteq T$, ami azt mutatja, hogy $\mathrm{suff}_k(\rho) \cap T \neq \emptyset$. Ha pedig a ρ-nek létezik T-ben k-magas szuffixe, mondjuk t, akkor szükségképpen $t \in S^{\tau}$. Eszerint t-nek létezik S-ben szuffixe, ami egyben a ρ egy S-beli szuffixét szolgáltatja. Igy $\rho \in S^{\tau} \subseteq T$. □

<u>14. Következmény</u>. Minden definit erdő reguláris. □

<u>15. Következmény</u>. Minden nilpotens erdő definit.

<u>Bizonyitás</u>. Evidens, hogy a véges erdők definitek. Ha pedig egy T erdő komplmentere véges, akkor 19. Tétel szerint T előáll $T = T_{Fin}[k]^{\rho} \cup R'$ alakban, ahol $R' \subseteq T_{Fin}(k-1)$. Ezekután csak annyit kell megjegyezni, hogy $T_{Fin}[k]^{\rho} = T_{Fin}[k]^{\tau}$. □

<u>16. Következmény</u>. Egy $T \subseteq T_{Fin}$ gyengén k-definit erdő akkor és csak akkor k-definit a $k \geq 1$ természetes számra, ha valahányszor előáll $T = R^{\tau} \cup R'$ alakban, ahol $R \subseteq T_{Fin}[k]$ és $R' \subseteq T_{Fin}(k-1)$, mindannyiszor

$$R'[k-1]^{\tau} \cap T_{Fin}(k) \neq R \cup R'[k-1]$$

<u>Bizonyitás</u>. A 21. tétel értelmében elegendő megmutatni, hogy egy $T = R^{\tau} \cup R'$ alakú erdő $(k \geq 1,\ R \subseteq T_{Fin}[k],\ R' \subseteq T_{Fin}(k-1))$ akkor és csak akkor gyengén $(k-1)$-definit, ha

$$R'[k-1]^{\tau} \cap T_{Fin}(k) = R \cup R'[k-1]. \qquad (62)$$

Valóban, ha a $T = R^{\tau} \cup R'$ erdő gyengén $(k-1)$-definit, akkor $R \cup R'[k-1]$ minden p elemének van $(k-1)$-magas szuffixe T-ben, és igy szükségképpen $R'[k-1]$-ben. Eszerint $p \in R'[k-1]^{\tau} \cap T_{F,u}(k)$. Ha pedig egy legfeljebb k-magas p fának létezik $R'[k-1]$-ben szuffixe, akkor egyrészt $p \in T$, másrészt pedig $(k-1) \leq h(p) \leq k$, amiből $p \in R \cup R'[k-1]$. Tehát (62) érvényes. Ha pedig a $T = R^{\tau} \cup R'$ erdőre (62) teljesül, akkor egy $p \in T_{F,u}$ legalább $(k-1)$-magas fára, $p \in T$ akkor és csak akkor ha $p \in R^{\tau} \cup R'[k-1]$, ami viszont (62) értelmében azzal ekvivalens, hogy $p \in R'[k-1]^{\tau}$ vagyis, hogy $\mathrm{suff}_{k-1}(p) \cap T \neq \emptyset$. Tehát T gyengén $(k-1)$-definit. □

A 21. tétel értelmében minden definit T erdő megadható $T = R^{\tau} \cup R'$ alakban, ahol $R \subseteq T_{F,u}[k]$ és $R' \subseteq T_{F,u}(k-1)$. T-nek ezt az előállitását a T <u>k-alakjának</u> nevezzük. A T definit erdő $R^{\tau} \cup R'$ k-alakját <u>kanonikus alaknak</u> nevezzük, ha

(1) valahányszor $p, q \in T_{F,u}[k]$, mindannyiszor $p \in R$ és $p \in \mathrm{suff}(q)$ maga után vonja, hogy $q \in R$; és

(2) $k = 0$, vagy $R'[k-1]^{\tau} \cap T_{F,u}(k) \neq R \cup R'[k-1]$.

<u>22. Tétel</u>. Minden definit erdőnek létezik egyértelmüen meghatározott kanonikus alakja.

<u>Bizonyitás</u>. Tekintsük a $T = R^{\tau} \cup R'$ k-alakban adott k-definit erdőt. Ha $k = 0$, akkor $T = T_{F,u}$, és igy $T = \{x_1, \dots, x_n\}^{\tau}$ a T kanonikus alakja. Ellenkező esetben legyen R_1 az az erdő, ami R-ből úgy keletkezik, hogy hozzávesszük az összes olyan k-magas p fát, aminek van szuffixe R-ben. A $T = R_1^{\tau} \cup R'$ egyenlőség evidens, és az is világos, hogy R_1-re az (1) feltétel

teljesül. Ha pedig $R'[k-1]^{\tau} \cap T_{F,u}(k)$ egyenlő lenne $R_1 \cup R'[k-1]$ -gyel, akkor 16. következmény szerint T gyengén $(k-1)$ -definit lenne, holott nem az. Ezzel beláttuk, hogy $R_1^{\tau} \cup R'$ a T egy kanonikus alakja.

Ezután legyen $T = R^{\tau} \cup R' = S^{\tau} \cup S'$ a T két kanonikus alakja. Evidens, hogy R akkor és csak akkor üres, ha S is az. Eszerint $R = \phi$ esetén $R = S$ és $R' = S'$. Ellenekző esetben legyen $R \subseteq T_{F,u}[k]$, $R' \subseteq T_{F,u}(k-1)$, $S \subseteq T_{F,u}(\ell)$ és $S' \subseteq T_{F,u}(\ell-1)$. $k < \ell$ nem lehet, mert ez esetben T nem gyengén $(\ell-1)$-definit és ugyanakkor gyengén k-definit lenne a $k \leq \ell - 1$ nemnegativ egészekre. Ugyanigy, $\ell < k$ sem állhat fenn. Tehát, $k = \ell$, amiből $R' = S'$ és $R^{\tau} = S^{\tau}$ következik. Vegyünk az R -ből egy ν elemet. Ez eleme lévén S^{τ} -nak, tartalmaz S -beli szuffixet, és mivel $h(\nu) = k$, ezért a kanonikus alak definiciójában szereplő (1) feltétel szerint $\nu \in S$. Ugyanigy látható az $S \subseteq R$ tartalmazás is. □

A 23. tétel bizonyitásában szükségünk lesz a következő állitásra.

<u>14. Lemma</u>. Bármely $p \in T_{F,u}$ fára és a $0 \leq k \leq h(p)$ nemnegativ egészre létezik olyan $z(p,k) \in \mathrm{suff}_k(p)$ fa, hogy

$$\mathrm{suff}_k(z(p,k)) = \mathrm{suff}_k(p).$$

<u>Bizonyitás</u>. A bizonyitást p magassága szerinti teljes indukcióval végezzük. Mivel a $h(p) = 0$ eset triviális, tegyük fel, hogy állitásunkat minden p -nél kisebb magasságú q fára és $0 \leq k' \leq h(q)$ nemnegativ egészre bizonyitottuk, és legyen $h(p) \geq 1$ valamint

$0 \le k \le h(p)$. A $k=0$ eset triviális, a $k=h(p)$ esetben pedig $z(p,k)=p$ választás megfelelő. Legyen tehát $0<k<h(p)$ és vezessük be az $s_1,\dots,s_m$ fákat a következő módon:

$$s_i = \begin{cases} p_i & \text{ha } h(p_i) < k-1 \\ z(p_i,k-1) & \text{ha } h(p_i) \ge k-1 \end{cases}, \quad (i=1,\dots,m)$$

ahol $p=f(p_1,\dots,p_m)$. Tekintsük ezekután a $q=f(s_1,\dots,s_m)$ fát. Világos, hogy $h(q)\le k$. Ugyanakkor $h(p)=k$ miatt létezik olyan $1\le i\le m$ index, amelyre $h(p_i)=k-1$, és innen $h(s_i)=k-1$. Tehát $h(q)=k$. Vegyük észre, hogy $s_i\in \mathrm{suff}(p_i)$ $(i=1,\dots,m)$ és ebből

$$q=f(s_1,\dots,s_m)\in f(\mathrm{suff}(p_1),\dots,\mathrm{suff}(p_m))\subseteq \mathrm{suff}(p). \tag{63}$$

Tekintve, hogy q k-magasságú, (63)-ból

$$q\in \mathrm{suff}_k(p) \tag{64}$$

adódik.

Vegyünk egy $t\in \mathrm{suff}_k(p)$ fát. $k\ge 1$ miatt $t=f(t_1,\dots,t_m)$, ahol $t_i\in \mathrm{suff}(p_i)$ $(i=1,\dots,m)$. Állítjuk, hogy $t_i\in \mathrm{suff}(s_i)$ $(i=1,\dots,m)$. Valóban, $h(p_i)<k-1$ esetén $s_i=p_i$ igy állításunk triviális. Ellenkező esetben az indukciós feltevés szerint

$$\mathrm{suff}_{k-1}(s_i)=\mathrm{suff}_{k-1}(p_i). \tag{65}$$

Legyen $h(t_i)=l$. Világos, hogy $0\le l\le k-1=h(p_i)$, igy a 13. következmény szerint létezik olyan $(k-1)$-magasságú t szuffixe p_i-nek, hogy $t_i\in \mathrm{suff}(t)$. Ám (64)-ből $t_i\in \mathrm{suff}(s_i)$ következik.

Ezekután

$$t = f(t_1, \dots, t_m) \in f(\mathrm{suff}(s_1), \dots, \mathrm{suff}(s_m)) \subseteq \mathrm{suff}(q) .$$

Tehát azt kaptuk, hogy

$$\mathrm{suff}_k(p) \subseteq \mathrm{suff}(q) .$$

Mivel a forditott irányú tartalmazás (64) és (61) értelmében nyilvánvaló, a $r(p,k) = q$ választással a lemmát beláttuk. □

<u>23. Tétel</u>. Egy $T \subseteq T_{F,n}$ erdő akkor és csak akkor gyengén k-definit, ha felismerhető olyan $\underline{A} = (\mathcal{A}, \underline{a}, A')$ n-változós F-automatával, amelyre

(1) minden $p \in T_{F,n}$ fára abból, hogy $h(p) \geq k$ következik, hogy $p^{\mathcal{A}}(\underline{a}) = r(p,k)^{\mathcal{A}}(\underline{a})$,

(2) minden $p, q \in T_{F,n}[k]$ fára abból, hogy $p^{\mathcal{A}}(\underline{a}) \in A'$ és $p \in \mathrm{suff}(q)$ követekezik, hogy $q^{\mathcal{A}}(\underline{a}) \in A'$.

<u>Bizonyitás</u>. Ha a $T \subseteq T_{F,n}$ erdő gyengén k-definit, akkor előáll $T = R^{\tau} \cup R'$ alakban, ahol $R \subseteq T_{F,n}[k]$ és $R' \subseteq T_{F,n}(k-1)$. Először megkonstruálunk egy $\underline{B} = (\mathcal{B}, \underline{b}, B')$ nemdeterminisztikus n-változós F-automatát, ami felismeri R^{τ}-t. Ennek érdekében legyen $\mathcal{B} = (B, F^{\mathcal{B}})$, ahol $B = \mathrm{sub}(R) \cup X_n$ és

$$f^{\mathcal{B}}(b_1, \dots, b_m) = \begin{cases} X_n & \text{ha } \exists 1 \leq i \leq m, \text{ hogy } b_i \in X_n \text{ és } f(b_1, \dots, b_m) \notin \mathrm{sub}(R) ; \\ \{f(b_1, \dots, b_m)\} \cup X_n & \text{ha } \exists 1 \leq i \leq m, \text{ hogy } b_i \in X_n \text{ és } f(b_1, \dots, b_m) \in \mathrm{sub}(R) \\ \{f(b_1, \dots, b_m)\} & \text{ha } b_i \notin X_n \ (i = 1, \dots, m) \text{ és } f(b_1, \dots, b_m) \in \mathrm{sub}(R) \end{cases}$$

valahányszor $f \in F^m$ és $b_1, \dots, b_m \in B$.

Legyen továbbá $\underline{b} = (\{x_1\}, \dots, \{x_n\})$ és $B' = R$. Állitjuk, hogy minden $p \in T_{F,n}$ -re

$$p^{\mathcal{B}}(\underline{b}) = X_n \cup (\mathrm{suff}(p) \cap \mathrm{sub}(R)). \tag{66}$$

Valóban, ez 0 magasságú fákra triviális. Vegyük tehát a $p = f(p_1, \dots, p_m)$ fát és tegyük fel, hogy (66) a $p_1, \dots, p_m$ fákra már igaz. Tekintve, hogy $p^{\mathcal{B}}(\underline{b}) = \bigcup(f^{\mathcal{B}}(b_1, \dots, b_m) \mid b_i \in p_i^{\mathcal{B}}(\underline{b}); i = 1, \dots, m)$, az indukciós feltevés értelmében elegendő azt megmutatni, hogy

$$\bigcup(f^{\mathcal{B}}(b_1, \dots, b_m) \mid b_i \in X_n \cup (\mathrm{suff}(p_i) \cap \mathrm{sub}(R)); i = 1, \dots, m) = \\ = X_n \cup (\mathrm{suff}(p) \cap \mathrm{sub}(R)). \tag{67}$$

Vegyünk (67) bal oldalából egy $f^{\mathcal{B}}(b_1, \dots, b_m)$ úniós tagot, és tegyük fel, hogy $f(b_1, \dots, b_m) \in f^{\mathcal{B}}(b_1, \dots, b_m)$. Ez csak úgy lehetséges, hogy $f(b_1, \dots, b_m) \in \mathrm{sub}(R)$ teljesül. Vegyük észre, hogy a b_i elemek akár X_n -ből, akár $\mathrm{suff}(p_i) \cap \mathrm{sub}(R)$ -ből valók, mindenképpen elemei a $\mathrm{suff}(p_i)$ halmazoknak. Igy

$$f(b_1, \dots, b_m) \in f(\mathrm{suff}(p_1), \dots, \mathrm{suff}(p_m)) \subseteq \mathrm{suff}(p),$$

ami az $f(b_1, \dots, b_m) \in \mathrm{sub}(R)$ relációval együtt, már maga után vonja, hogy $f(b_1, \dots, b_m)$ eleme (67) jobb oldaálnak. $f^{\mathcal{B}}(b_1, \dots, b_m)$ $f(b_1, \dots, b_m)$ -en kivül legfeljebb még az X_n -beli jeleket tartalmazhatja, ezek pedig elemei (67) jobb oldalának. Végül, ha $f^{\mathcal{B}}(b_1, \dots, b_m)$ -ben nincs 0-nál magasabb fa, akkor az triviális módon részhalmaza $X_n \cup (\mathrm{suff}(p) \cap \mathrm{sub}(R))$ - nek.

Forditva, vegyünk egy b elemet (67) jobb oldalából. Ha

$b \in X_n$, akkor $b \in f^{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_1)$, ez pedig úniós tagja (67) bal oldalának. Ha pedig $b \in (\mathrm{suff}(p) \cap \mathrm{sub}(R))$ és $h(b) \geq 1$, akkor $b = f(b_1, \dots, b_m)$, ahol $b_i \in \mathrm{suff}(p_i)$ $(i = 1, \dots, m)$. Ugyanakkor a b_i -k b -nek részfái, az pedig valamely R -beli r fa részfája. Ebből $b_i \in \mathrm{sub}(R)$ következik $(i = 1, \dots, m)$. Igy

$$b = f(b_1, \dots, b_m) \in f^{\mathcal{B}}(b_1, \dots, b_m),$$

ahol $f^{\mathcal{B}}(b_1, \dots, b_m)$ úniós tagja a (67) jobboldalának. Ezzel (66) bizonyitását befejeztük.

(66) segitségével a $T(\underline{B}) = R^{\tau}$ egyenlőség könnyen adódik, hiszen egy $p \in T_{F,n}$ fára $p \in T(\underline{B})$ akkor és csak akkor teljesül, ha p-nek van szuffixe R -ben, azaz, ha $p \in R^{\tau}$.

Tekintsünk egy $p \in T_{F,n}$ fát úgy, hogy $h(p) \geq k$. A 14. lemmából $\mathrm{suff}_k(p) = \mathrm{suff}_k(z(p,k))$ következik, ebből pedig a 13. következmény alapján

$$\mathrm{suff}_j(p) = \mathrm{suff}_j(z(p,k)) \quad (j = 0, \dots, k).$$

Ugyanakkor $R \subseteq T_{F,n}[k]$, amiből $\mathrm{sub}(R) \subseteq T_{F,n}(k)$. Igy

$$\mathrm{suff}(p) \cap \mathrm{sub}(R) = \left(\bigcup_{j=0}^{k} \mathrm{suff}_j(p)\right) \cap \mathrm{sub}(R) =$$

$$= \left(\bigcup_{j=0}^{k} \mathrm{suff}_j(z(p,k))\right) \cap \mathrm{sub}(R) = \mathrm{suff}(z(p,k)) \cap \mathrm{sub}(R).$$

Eszerint 66 felhasználásával

$$p^{\mathcal{B}}(\underline{b}) = z(p,k)^{\mathcal{B}}(\underline{b}). \tag{68}$$

Ha pedig a $p, q \in T_{F,n}[k]$ fákra $p^{\mathcal{B}}(\underline{b}) \cap R \neq \emptyset$ és $p \in \mathrm{suff}(q)$ akkor p -nek van szuffixe R -ben, ami egyben

q-nak is szuffixe, és igy (66)-ból $q^{\mathcal{B}}(\underline{b}) \cap R \neq \emptyset$.

Eszerint, ha a $\underline{B}$ nemdeterminisztikus faautomatára alkalmazzuk a részhalmazkonstrukciót, akkor egy olyan $\underline{A}_1 = (\mathcal{A}_1, \underline{a}_1, A_1')$ faautomatához jutunk, amelyre a 23. tétel (1) és (2) feltétele teljesül, és $T(\underline{A}_1) = R^{\tau}$.

Konstruáljunk most egy olyan faautomatát, ami az $R' \subseteq T_{F,u}(k-1)$ erdőt ismeri fel. Legyen $\underline{A}_2 = (\mathcal{A}_2, \underline{a}_2, A_2')$, ahol $\mathcal{A}_2 = (A_2, F^{\mathcal{A}_2})$, $A_2 = T_{F,u}(k-1) \cup \{*\} \cup X_n$, $\underline{a}_2 = (x_1, \dots, x_n)$, $A' = R'$ és

$$f^{\mathcal{A}_2}(a_1, \dots, a_m) = \begin{cases} f(a_1, \dots, a_m) & \text{ha } f(a_1, \dots, a_m) \in sub(R') \\ * & \text{különben} \end{cases},$$

valahányszor $a_1, \dots, a_m \in A$ és $f \in F^m$ $(m \geq 1)$.

Az $R' = T(\underline{A}_2)$ egyenlőség nyilvánvaló, továbbá vegyük észre, hogy minden legalább k-magas $p \in T_{F,u}$ fára

$$p^{\mathcal{A}_2}(\underline{a}_2) = * \tag{69}$$

Jól ismert, hogy a $T = R^{\tau} \cup R'$ felismerhető az $\mathcal{A}_1$ és $\mathcal{A}_2$ direkt szorzatára épülő faautomatával. Jelölje $\underline{C}$ ezt az automatát. Azt kell csak megmutatni, hogy $\underline{C}$ kielégiti a 23. tétel (1) és (2) feltételeit. Ez azonban abból, hogy $\underline{A}_1$ kielégit (1)-et és (2)-t, valamint (69)-ből nyilvánvaló. Ezzel a szükségességet beláttuk.

Forditva tegyük fel, hogy a T erdő felismerhető az (1) és (2) feltételeket kielégitő faautomatával és legyen $p \in T_{F,u}$ olyan hogy $h(p) \geq k$. Ha $p \in T$, akkor az (1) feltétel szerint $\tau(p,k)$ is eleme T-nek, vagyis van a p-nek T-ben k-magasságú szuffixe. Ha pedig $t \in suff_k(p) \cap T$, akkor $suff_k(\tau(p,k)) = suff_k(p)$ -ből /ld. 14. lemma/ adódik, hogy $t \in suff_k(\tau(p,k))$,

és tekintve, hogy $\gamma(p,k)$ k-magasságú a (2) feltétel szerint $\gamma(p,k)\in T$. Végül az (1) feltétel újabb alkalmazásával $p\in T$ adódik. A bizonyitás kész. □

5.3. Forditott definit erdők. Egy újabb, a nilpotens erdők osztályánál bővebb osztályt ismerhetünk meg a forditott definit erdők osztályában. Megmutatjuk, hogy a forditott definit erdők nem mások, mint az azonos magasságú fákból álló prefixmentes erdők által generált jobbideálok és a véges erdők únióiként előálló erdők.

A. Ginzburg bizonyitotta, hogy egy redukált automata akkor és csak akkor ismer fel forditott definit nyelvet / $L_1 \cup L_2 X^*$ alakút/, ha létezik olyan $k \geq 0$, hogy minden k-nál nem rövidebb $p\in X^*$ szóra és az $x\in X$ jelre $ap = axp$ teljesül, valahány a egy állapota a szóban forgó automatának /ld. [12]/. Ez azzal ekvivalens, hogy minden k-nál nem rövidebb p szóra és minden a állapotra ap abszorbens /ld. M. Steinby, [22]/. Ezen állitás faautomatákra vonatkozó általánositását a 27. tétel szolgáltatja.

A $T \subseteq T_{F,u}$ erdőt gyengén forditott k-definitnek / gy. f. k-definitnek/ nevezzük, ha mind legalább k-magasságú $p\in T_{F,u}$ fára $p\in T$ akkor és csak akkor teljesül, ha p-nek van k-magasságú részfája T-ben. Ha $k\geq 1$, akkor a T gy. f. k-definit erdőt forditott k-definitnek mondjuk, amennyiben T nem gy. f. $(k-1)$-definit. A gy. f. 0-definit erdőket forditott 0-definitnek tekintjük. Végül azt mondjuk, hogy T forditott definit, ha valamely $k\geq 0$ -ra forditott k-definit.

Világos, hogy minden gy. f. k-definit erdő forditott ℓ-definit valamely $\ell \leq k$ -ra. Ha azonban az F rangolt ábécében szerepel

egy legalább két-változós müveleti jel, akkor nem igaz az az állitás, hogy a $qy.f.$ k-definit erdők egyben $qy.f.$ l-definitnek is az $l \geq k$ természetes számokra. Például legyen R mindazon k magasságú fák halmaz, amelyekben csak az x_1 változó szerepel, és legyen $T = R^{\rho}$. Világos, hogy T $qy.f.$ k-definit. Legyen ezekután $l > k$, $p \in R$, $f \in F^{m}$ $(m \geq 2)$ és q egy olyan l-magasságú fa, amelyben csak az x_2 változó szerepel. Az evidens, hogy a $t = f(p, \dots, p, q)$ fa $(l+1)$-magas, és eleme T-nek. Ugyanakkor t-nek nincs l magasságú részfája T-ben. Igy T nem $qy.f.$ l-definit.

<u>24. Tétel</u>. Egy $T \subseteq T_{F,M}$ erdő akkor és csak akkor $qy.f.$ k-definit, ha előáll $T = R^{\rho} \cup R'$ alakban, ahol $R \subseteq T_{F,M}[k]$ és $R' \subseteq T_{F,M}(k-1)$.

<u>Bizonyitás</u>. Ha a T erdő $qy.f.$ k-definit, akkor a $T[k]^{\rho} \subseteq T$ tartalmazás nyilvánvaló. Továbbá vegyük észre, hogy a T legalább k-magas elemei benne vannak $T[k]^{\rho}$-ban. Igy $T - T[k]^{\rho} \subseteq T_{F,M}(k-1)$ és az $R = T[k]$ és $R' = T - T[k]^{\rho}$ választással

$$T = R^{\rho} \cup R'.$$

Ha pedig T előáll $T = R^{\rho} \cup R'$, alakban, ahol $R \subseteq T_{F,M}[k]$ és $R' \subseteq T_{F,M}(k-1)$, akkor egy $p \in T_{F,M}$ fára, amely legalább k-magas, $p \in T$ akkor és csak akkor, ha $p \in R^{\rho}$, ami pedig azzal ekvivalens, hogy p-nek van $R\ (= T[k])$-ban részfája. □

<u>17. Következmény</u>. Bármely nilpotens erdő forditott definit. □

<u>18. Következmény</u>. Bármely forditott definit erdő reguláris. □

<u>25. Tétel</u>. Legyen $k \geq 1$ és tekintsük a $T = R^{\rho} \cup R'_{qy.f.k}$ definit erdőt, ahol $R \subseteq T_{F,n}[k]$ és $R' \subseteq T_{F,n}(k-1)$. A T erdő akkor és csak akkor $qy.f.(k-1)$-definit, ha

(1) $sub(R) \cap T_{F,n}[k-1] \subseteq R'$, és

(2) $R'[k-1] \cap T_{F,n}[k] \subseteq R$.

<u>Bizonyitás.</u> Azzal kezdjük, hogy ha az F rangolt ábécé nem unér, akkor (1) és (2) ekvivalens azzal, hogy $R = R' = \emptyset$ vagy

(1') $R = T_{F,n}[k]$ és

(2') $R'[k-1] = T_{F,n}[k-1]$.

Valóban, $R = R' = \emptyset$ illetve az (1') és (2') teljesülése esetén (1) és (2) nyilvánvalóan igaz. A forditott implikáció igazolásához vegyük észre, hogy (1) és (2) teljesülése esetén R akkor és csak akkor üres, ha $R'[k-1]$ is az. Legyen tehát $R'[k-1] \neq \emptyset$ és vegyünk egy $p \in R'[k-1]$ fát. Vegyük továbbá a $q \in T_{F,n}[k-1]$ fát és az f legalább két-változós müveleti jelet. (2) miatt $f(p, \dots, p, q)$ eleme R-nek, emiből (1) alapján $q \in R'$. Ez pedig (2') teljesülését jelenti. (2') és (2) pedig triviális módon implikálja (1')-t.

Eszerint, ha F nem unér, akkor (1) és (2) teljesülése esetén a T erdő üres, vagy tartalmazza az összes legalább $k-1$ magasságú fákat. T mindkét esetben $qy.f.(k-1)$-definit. Forditva pedig, ha a tételben szereplő $T = R^{\rho} \cup R'$ erdő $qy.f.(k-1)$-definit, akkor $T = \emptyset$ esetén $R = R' = \emptyset$ és készen vagyunk. Ha pedig $T \neq \emptyset$ akkor $R'[k-1]$ sem lehet üres, igy vehetünk egy p fát belőle.

Legyen $q \in T_{F,n}[k-1]$ tetszőleges és f egy legalább két-változós müveleti jel. Az

$$r = f(p, \dots, p, f(q, \dots, q))$$

fa eleme T -nek, mert T $qy \cdot f \cdot (k-1)$-definit. Ugyanakkor $h(r) = k+1$ igy r tartalmaz k-magasságú részfát T -ben / T $qy \cdot f \cdot$ k-definit is/. Ám $f(q, \dots, q)$ az r egyetlen k-magas részfája, igy $f(q, \dots, q)$ is eleme T -nek. Ismét kihasználva T $qy \cdot f \cdot (k-1)$-definit voltát kapjuk, hogy $q \in T$. Tehát $T_{F,n}[k-1] \subseteq T$ és igy szükségképpen $R'[k-1] = T_{F,n}[k-1]$. Ebből pedig T $qy \cdot f \cdot (k-1)$-definitsége azt adja, hogy $R = T_{F,n}[k]$.

Hátra van még az unér eset vizsgálata. Vegyük észre, hogy akkor (1) és (2) az

$$R = \{ f(p) \mid f \in F \text{ és } p \in R'[k-1] \}$$

egyenlőséggel ekvivalens. Ennek teljesülése esetén pedig $T = R^{\rho} \cup R' = R'[k-1]^{\rho} \cup R'(k-2)$, tehát T $qy \cdot f \cdot (k-1)$-definit /ld. 24. tétel/. Végül, ha a $T = R^{\rho} \cup R'$ erdő $qy \cdot f \cdot (k-1)$-definit, akkor $r \in R$ esetén r-nek van $(k-1)$-magas p részfája T -ben, vagy ami ezzel ekvivalens $R'[k-1]$ -ben, igy alkalmas $f \in F$ -re $r = f(p)$. Az ilyen alakú fák pedig, T -ben lévén, R -nek is elemei, hiszen k-magasak. A bizonyitás kész. □

A 24. tétel értelmében minden forditott definit T erdő megadható $T = R^{\rho} \cup R'$ alakban, ahol $R \subseteq T_{F,n}[k]$ és $R' \subseteq T_{F,n}(k-1)$ A T -nek ilyen előállitását a T <u>k-alakjának</u> nevezzük. Azt mondjuk, hogy a T $R^{\rho} \cup R'$ k-alakja <u>kanonikus</u> alakja T -nek, ha az

alábbi három feltétel közül legalább az egyik teljesül:

(1) $k = 0$

(2) a $sub(R) \cap T_{F,u}[k-1]$ halmaz nem részhalmaza R' -nek,

(3) az $R'[k-1]^{\rho} \cap T_{F,u}[k]$ halmaz nem részhalmaza R -nek.

Könnyen adódik, hogy minden forditott definit erdőnek létezik kanonikus alakja. Valóban, ha $R^{\rho} \cup R'$ a T forditott k-definit erdő k-alakja, akkor $R^{\rho} \cup R'$ a 25. tétel értelmében T kanonikus alakját szolgáltatja.

Most megmutatjuk, hogy ha $T = S^{\rho} \cup S' = R^{\rho} \cup R'$, ahol $R^{\rho} \cup R'$ és $S^{\rho} \cup S'$ rendre a T k-alakja illetve ℓ-alakja, akkor $\ell < k$ esetén $R^{\rho} \cup R'$ nem lehet kanonikus alak. Valóban, $\ell < k$ -ból közvetlenül adódik, hogy $k > 0$, tehát az (1) feltétel nem teljesül. Legyen $\gamma \in R'[k-1]^{\rho} \cap T_{F,u}[k]$. Ekkor γ -nek van egy γ' részfája $R'[k-1] \subseteq T$ -ben. $\ell(\gamma') = (k-1) > \ell$ miatt γ'-nek létezik T -ben ℓ magas részfája, mondjuk γ''. Igy $\gamma'' \in sub(\gamma)$ és $\gamma'' \in S$ miatt $\gamma \in S^{\rho} \subseteq T$, amiből $\ell(\gamma) = k$ miatt $\gamma \in R$. Tehát a (3) feltétel sem teljesül. A (2) feltétel negáltjának igazolásához megkülönböztetünk két esetet. Ha $S = T_{F,u}[\ell]$ akkor T tartalmazza az összes legalább ℓ magasságú fát, és igy $R = T_{F,u}[k]$. Tehát ez esetben (2) sem teljesül. Különben pedig vegyünk egy $s \in T_{F,u}[\ell] - S$ fát, és vegyünk egy $\gamma \in sub(R) \cap T_{F,u}[k-1]$. Alkalmas f müveleti jelre és $\gamma_1, \dots, \gamma_{i-1}, \gamma_{i+1}, \dots, \gamma_m$ rákra a

$$\mu = f(\gamma_1, \dots, \gamma_{i-1}, \gamma, \gamma_{i+1}, \dots, \gamma_m)$$

fa elme $R^{\rho} \subseteq T$ -nek, és igy μ -nek van S -ben részfája, jelöljük q -val. Ha $q \in sub(\gamma)$, akkor $\gamma \in T$, vagy ami ezzel ekvivalens

$r \in R'$ és készen vagyunk. Ellenkező esetben f legalább két-változós, igy vehetjük a

$$v = f(f(r, s, \dots, s), q, \dots, q)$$

fdt. $q \in sub(v) \cap S$ miatt $v \in T$, és igy $h(v) = k+1$ -ből adódik, hogy v -nek van k- magas részfája T -ben. Ilyenből pedig csak egy van neki, és igy $f(r, s, \dots, s) \in T$. Végül $h(f(r, s, \dots, s)) = k > l$ -ből $f(r, s, \dots, s)$ -nek létezik l-magas részfája T -ben. Tekintve hogy $h(s) = l$ és $s \notin T$ az egyetlen lehetséges eset az, hogy r -nek van l-magas részfája T -ben, és igy $r \in T$. Ez pedig $r \in R'$ -rel ekvivalens.

A most bizonyitott állitás szerint, ha $T = R^{\rho} \cup R' = S^{\rho} \cup S'$ a T két kanonikus alakja, akkor $R, S \subseteq T_{F,u}[k]$ és $R', S' \subseteq T_{F,u}(k-1)$ alkalmas k -ra. Ebből közvetlenül adódik, hogy $R' = S'$ és $R^{\rho} = S^{\rho}$, ez utóbbi pedig akkor és csak akkor teljesül, ha $R = S$ /ld. a 4.2. pontot/. Nyerjük tehát, hogy

<u>26. Tétel</u>. Minden forditott definit erdőnek létezik egyértelmüen meghatározott kanonikus alakja. □

Érdemes megjegyezni, hogy a forditott definit erdőkre bevezetett kanonikus alak nilpotens erdőkre az ott bevezetett kanonikus alakot adja. Igy a 20. tétel a most bizonyitott eredménynek következménye.

Az $\underline{A}$ u-változós F-automata egy a állapotát <u>kvázi-abszorbensnek</u> nevezzük, ha bármely $f \in F^{m}$ müveleti jelre és $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_m$ nem abszorbens állapotokra

$$f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \dots, a_m) = a .$$

Világos, hogy minden abszorbens állapot egyben kváziabszorbens is. Továbbá, unér faautomata esetén a kváziabszorbens állapotok abszorbensek.

<u>27. Tétel</u>. A $T \subseteq T_{F,n}$ erdő akkor és csak akkor gy. f. k-definit ha felismerhető olyan $\underline{A} = (\mathcal{A}, \underline{a}, A')$ n-változós F-automatával, amelyre

(1) minden $p \in T_{F,n}$ fára $p^{\mathcal{A}}(\underline{a})$ akkor és csak akkor kváziabszorbens ha $h(p) \geq k$, és

(2) $\underline{A}$-nak nincs nem abszorbens kváziabszorbens végállapota.

<u>Bizonyitás.</u> Tekintsük a $T = R^{\circ} \cup R'$ gy. f. k-definit erdőt, ahol $R \subseteq T_{F,n}[k]$ és $R' \subseteq T_{F,n}(k-1)$. Tekintsük az $\underline{A} = (\mathcal{A}, \underline{a}, A')$ faautomatát, ahol $\mathcal{A} = (A, F^{\mathcal{A}})$, $A = T_{F,n}(k-1) \cup X_n \cup \{*, \#\}$, $\underline{a} = (x_1, \dots, x_n)$, $A' = R' \cup \{*\}$ és

$$f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_m) = \begin{cases} f(a_1, \dots, a_m) & \text{ha } f(a_1, \dots, a_m) \in T_{F,n}(k-1); \\ \# & \text{ha } f(a_1, \dots, a_m) \in T_{F,n}[k] - R \text{ vagy} \\ & \exists i \in 1 \leq m, \text{hogy } a_i = \# \text{ és } a_j \neq * \; j = 1, \dots, m; \\ * & \text{különben}, \end{cases}$$

valahányszor $f \in F^m$ és $a_1, \dots, a_m \in A$.

Szemmel látható, hogy $\mathcal{A}$ "$k-1$ magasságig szabad algebra" igy minden $p \in T_{F,n}(k-1)$-re, $p^{\mathcal{A}}(\underline{a}) = p$. Ebből nyilvánvaló, hogy egy $p \in T_{F,n}(k-1)$ fára $p \in T(\underline{A})$ akkor és csak akkor, ha $p \in R'$.

Továbbá egy $\mu \in T_{F,u}[k]$ fára $\mu^{\mathfrak{A}}(\underline{a}) = *$ akkor és csak akkor, ha $\mu \in R$. Tekintettel arra, hogy $*$ abszorbens, igy a 10. tétel felhasználásával adódik, hogy $R^{\rho} = T(\underline{A}(*))$. Tehát $\underline{A}$ felismeri a T erdőt. Ugyanakkor ha $\mu \in T_{F,u}$ és $h(\mu) = k$ akkor $\mu^{\mathfrak{A}}(\underline{a}) \in \{*, \#\}$. Tekintettel arra, hogy $\underline{A}$ -nak nincs más kváziabszorbens állapota, az (1) és (2) feltétel is teljesül $\underline{A}$ -ra.

Az elégségesség bizonyitáshoz pedig vegyünk egy olyan $\underline{A}$ faautomatát, amelyre (1) és (2) teljesül. Jelölje B az abszorbens végállapottok halmazát. Nyilvánvaló, hogy

$$T(\underline{A}) = \bigcup_{a \in B} T(\underline{A}(a)) \cup \bigcup_{a \in A' - B} T(\underline{A}(a)).$$

A $(A' - B)$ -beli állapotok a (2) feltétel miatt nem lehetnek kváziabszorbensek, továbbá a k -nál nem kisebb magasságú μ fákra $\mu^{\mathfrak{A}}(\underline{a})$ kváziabszorbens, igy

$$R' = \bigcup_{a \in A' - B} T(\underline{A}(a)) \subseteq T_{F,u}(k-1).$$

Vegyünk most egy $a \in B$ állapotot. A 10. tétel alapján

$$T(\underline{A}(a)) = R_a^{\rho}$$

ahol R_a mindazon μ fák halmaza, amelyekre $\mu^{\mathfrak{A}}(\underline{a}) = a$ és minden $t \in sub(\mu)$ μ -től különböző fára $t^{\mathfrak{A}}(\underline{a}) \neq a$. Az (1) feltétel szerint R_a elemei legalább k magasak. Tegyük fel, hogy létezik R_a-ban olyan μ fa, amelyre $h(\mu) > k$. Jelölje $t_1, \dots, t_l$ a μ összes k magas részfáját. Tekintve, hogy a $t_i^{\mathfrak{A}}(\underline{a})$ állapotok kváziabszorbensek, igy valamely $1 \leq i \leq l$ -re $t_i^{\mathfrak{A}}(\underline{a}) = \mu^{\mathfrak{A}}(\underline{a}) = a$, ez pedig ellentmond annak, hogy $\mu \in R_a$. Kaptuk tehát, hogy minden $a \in B$ állapotra $R_a \subseteq T_{F,u}[k]$, és igy az $R = \bigcup_{a \in B} R_a \subseteq T_{F,u}[k]$ halmazra

$$R^{\rho} = \left(\bigcup_{a \in B} R_a\right)^{\rho} = \bigcup_{a \in B} R_a^{\rho} = \bigcup_{a \in B} T(\underline{A}(a)) .$$

Ezzel a bizonyitást befejeztük. □

Irodalom

[1] Brzozowski, J. A., Canonical regular expressions and minimal state graphs for definite events, Proc. of the Symp. on Math. Theory of Automata, Polytechnic Institute of Brooklyn, Brooklyn, N. Y., 1962, 529-561.

[2] Brzozowski, J. A., On Decomposition of Regular Events, J.ACM., 16 /1969/, 132-144.

[3] Brzozowski, J. A., Roots of Star Events, J. ACM, 14, 3 /1969/, 466-477

[4] Brzozowski, J. A., Hierarchies of Aperiodic Languages R.A.I.R.O. Information Theorique, 10 /1976/, 35-49.

[5] Brzozowski, J. A., A Generalization of Finiteness, Semigroup Forum, 13 /1979/, 239-251.

[6] Brzozowski, J. A. The Dot-Depth Hierarchy of Star-Free Languages is Infinite, J. Comp. System Sci. 16 /1978/, 35-55.

[7] Brzozowski, J. A. and Simon, I., Characterizations of Locally Testable Events, Discrete Mathematics, 4 /1973/, 243-271.

[8] Cohen, R. S. and Brzozowski, J. A., Dot-Depth of Star-Free Events, J. Comput System Sci., 5 /1971/

[9] Gécseg, F. and Horváth, Gy., On representation of trees and contex-free languages by tree automata, Found. Control Engrg, 1 /1976/, 161-168.

[10] Gécseg, F., Universal algebras and tree automata, Fundamentals of Computation Theory /Proc. Symp. Poznan-Kórnik, 1977/, LN in CS, 56 /1977/, 98-112.

[11] Gécseg, F. és Steinby, M., A faautomaták algebrai elmélete I. Mat. Lapok 27, 3 /1978/

[12] Ginzburg, A., About some Properties of Definite, Reverse-Definite and Related Automata, IEEE Trans, Electronic Computers, EC-15 /1966/, 809-815.

[13] Maróti, G., Rational representation of forests by tree automata, Acta Cybernetica, 3 /1977/, 309-320.

[14] Maróti, G., On special classes of regular forests I, megjelenik az Acta Cybernetica-ban

[15] Maróti, G., On special classes of regular forests II, megjelenik az Acta Cybernetica-ban

[16] Meyer, A. R., A Note on Star-Free Languages, J. ACM, 16 /1969/, 220-225.

[17] Paz, A. and Peleg, B., Ultimate-definite and symmetric-definite events and automata, J. ACM, 12 /1965/, 399-410.

[18] Perles, M., Rabin, M. O. and Shamir, E., The Theory of Definite Automata, IEEE Trans. on Electronic Computers, EC-12, 1963, 233-243.

[19] Perrot, J. F., On regular semigroups, finite automata and prefix codes, COLLOQUIA MATHEMATICA SOCIETATIS JÁNOS BOLYAI, 20. Algebraic Theory of Semigroup, Szeged /1976/, 393-400.

[20] Schützenberger, M. P., On Finite Monoids Having only Trivial Subgroups, Inf. and Control, 8 /1965/, 190-194.

[21] Shyr, H. J. and Thierrin, G., Hypercodes, Inf. and Control, 24 /1974/, 45-54.

[22] Steinby, M., Definite Automata and Transition Systems, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser AI, 444 /1969/.

[23] Thierrin, G., Decomposition des languages reguliers, RIRO, 3 /1969/, 45-50.

[24] Thierrin, G., Regular prefix codes and right power-bounded languages, Semigroup Forum, 13 /1976/, 77-83.

[25] Thierrin, G. Convex Languages, Automata Languages and Programming, IRIA Symposium, Paris, 1972, North-Holland Publishing Company, 481-492.

[26] Veloso, P. A. S., Regular Expression for the Prefix Codes and Reltaed Families, Coordenacao Das Programos De Pos-Graduacao De Engenharia, Universidade Federal of Rio de Janeiro

Köszönetnyilvánitás

Itt szeretném felhasználni az alkalmat arra, hogy köszönetet mondjak dr. Gécseg Ferenc tanszékvezető egyetemi tanárnak azért, hogy - még mint egyetemi hallgatót - bevezetett az automaták algebrai elméletébe, majd ráirányitotta figyelmemet a faautomaták vizsgálatára. Probléma-felvetéseivel, tanácsaival nagyban hozzájárult ahhoz, hogy ez a dolgozat megszülethessen.