Populációdinamikai rendszerek elméleti és számítógépes stabilitásvizsgálata

Doktori értekezés

Dénes Attila

Témavezető:
Dr. Hatvani László

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
Szegedi Tudományegyetem
Természettudományi és Informatikai Kar
Bolyai Intézet

2011

Szeged

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés **1**

1.1. A dolgozat felépítése és tartalma 2

2. Dinamikus rendszerek **5**

3. A Tusnády-modell **9**

3.1. A Tusnády-modell 9

3.2. A 3.5. tétel bizonyítása 19

4. Dinamikus rendszerek attraktorainak számítógépes vizsgálata **30**

4.1. A *Dynamics* algoritmusa 31

4.2. Az új algoritmus 32

4.3. A program 35

4.4. Példák 35

4.4.1. Az Hénon-leképezés 35

4.4.2. A Bogdanov-leképezés 36

4.4.3. Háromdimenziós Tinkerbell-leképezés 38

4.4.4. Diszkrét ragadozó–zsákmány modell (Maynard Smith) 39

5. Egy nemautonóm populációdinamikai modell eventuális stabilitási tulajdonságai 40

5.1. A modell 40
5.2. A modell egyszerűsítése 42
5.3. A stabilitási tétel 46
5.4. Bevezető jelölések és lemmák 48
5.5. Az 5.5. tétel bizonyítása 54
5.6. A modell módosítása 61

Összefoglalás 63

Summary 68

Köszönetnyilvánítás 73

Tárgymutató 74

Irodalomjegyzék 76

Ábrák jegyzéke

3.1. A mutáció típusai 10
3.2. A rekombináció típusai 11
3.3. A Tusnády-rendszer torlódási pontjainak halmaza 14
3.4. Szuperkritikus Neimark–Sacker-bifurkáció 16
3.5. Szubkritikus Neimar–Sacker-bifurkáció 17
3.6. A Tusnády-rendszer attraktora $p = 8$ paraméterértéknél 18
3.7. A Tusnády-rendszer attraktora $p = 135$ paraméterértéknél . . 18
3.8. A Tusnády-rendszer dinamikája 19
3.9. r interpolációs függvénye 27

4.1. Az Hénon-leképezés 36
4.2. A Bogdanov-leképezés 37
4.3. A Bogdanov-leképezés (*Dynamics*) 37
4.4. Háromdimenziós Tinkerbell-leképezés 38
4.5. Maynard Smith ragadozó–zsákmány modellje 39

5.1. Eventuális egyenletes stabilitás 54
5.2. Trajektória és határhalmaza 55
5.3. A $H_1, \ldots, H_4$ halmazok 56
5.4. (5.22) egy pályájának képe *Mathematicá*-val 61

1. fejezet

Bevezetés

A populációdinamika biológiai populációk méretének és összetételének időbeli változását modellezi. A tudományterület gyökerei nagyon régre nyúlnak vissza: az egyik legkorábbi populációdinamikai témájú munkának tekinthetjük Fibonacci 1202-es modelljét, amelyben egy nyúlpopuláció növekedését vizsgálja.

Daniel Bernoulli a XVIII. század közepén differenciálegyenletes modellt állított fel a himlő terjedésének vizsgálatára, amelyet később d'Alembert fejlesztett tovább.

Pierre François Verhulst belga matematikus 1838-ban publikálta a népesség növekedésének modellezésére az $\dot{N} = rN(1 - N/K)$ ún. logisztikus egyenletet, ahol K a környezet eltartóképessége. Ha a populáció mérete jóval kisebb a környezet eltartóképességénél, akkor a populáció gyakorlatilag exponenciálisan nő, majd egyre lassuló növekedéssel tart a környezet eltartóképességéhez.

Az 1920-as években Vito Volterra olyan modellt keresett, amely megmagyarázza, hogy az I. világháború idején lecsökkent halászat miért okozta a ragadozó halak arányának növekedését az Adriai-tengerben. Alfred J. Lotka hasonló egyenletet közölt egy növény és egy növényevő állatfaj mennyisége változásának modellezésére. Az általuk felállított Lotka–Volterra-egyenlet az első ragadozó–zsákmány modell.

A populációdinamika azóta is fejlődik, ahogy azt Bacaër monográfiája [2] is mutatja. Ez a fejlődés különösen felgyorsult a számítógépes szimulációk lehetőségének megjelenésével.

A disszertációban két populációdinamikai modell stabilitási és bifurkációs tulajdonságait tanulmányozzuk, illetve ismertetünk egy dinamikus rendszerek attraktorainak számítására szolgáló algoritmust és az algoritmust megvalósító számítógépes programot, amelyet a két modell vizsgálatához alkottunk meg.

Az értekezés a szerző következő publikációin alapul:

- Dénes, A., Neimark–Sacker bifurcation in a discrete dynamical model of population genetics, *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, Proc. 8th Coll. Qualitative Theory of Diff. Equ.*, No. 6. (2008), 1–10.
- Dénes, A., Hatvani, L., Stachó, L. L., Eventual stability properties in a non-autonomous model of population dynamics, *Nonlinear Analysis* **73** (2010) 650–659.
- Dénes, A., Makay, G., Attractors and basins of dynamical systems, *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, No. 20. (2011), 1–11.

1.1. A dolgozat felépítése és tartalma

A bevezetést követő második fejezetben néhány alapvető fogalmat definiálunk a dinamikus rendszerek elméletéből.

A harmadik fejezetben Tusnády Gábor egy populációdinamikai modelljével foglalkozunk. Ez a genetikai modell, amely egy nemlineáris, négy független változót tartalmazó differenciaegyenlet-rendszer, egy populációban az ivarsejtek eloszlásának változását írja le egy lókusz és négy allél esetén a szelekció és a mutáció hatásának figyelembevételével. Tusnády Gábor számítógépes

kísérletezéssel talált olyan eseteket, amelyekben a rendszer attraktora nem egy pont (vagyis az eloszlások között nem áll be dinamikus egyensúly), hanem periodikus pálya, sőt, valamilyen kaotikus halmaz. Azt kérdezte, hogy ez a jelenség törvényszerű, vagy esetleg csak a numerikus közelítés hibájából adódik. Hatvani László, Toókos Ferenc és Tusnády Gábor [11]-ben megmutatta, hogy a folytonos esetben tapasztalható hasonló jelenség magyarázata egy Hopf-bifurkáció.

Bebizonyítjuk, hogy a jelenség a diszkrét esetben is törvényszerű: belátjuk, hogy a rendszer bizonyos paraméterek változtatásakor Neimark–Sacker-bifurkáción megy keresztül.

Ennek a modellnek a vizsgálatához szükségünk volt egy olyan programra, amellyel dinamikus rendszerek attraktorait és azok medencéit lehet kiszámítani és ábrázolni. A korábbi, dinamikus rendszerek vizsgálatára szolgáló programcsomagok azonban általában nem rendelkeznek ilyen eljárással, vagy algoritmusuk pontatlanságokhoz vezethet, illetve a programok régen készültek, így ma már nehezen használhatóak. Ezért szükségünk volt egy új, az eddigieknél pontosabb algoritmusra és az algoritmus alapján készült programra, amelynek segítségével tetszőleges dimenziójú dinamikus rendszer attraktorait tudjuk ábrázolni.

A dolgozatban ismertetjük az új algoritmust és az algoritmus alapján készült programot, és néhány ismert dinamikus rendszer attraktorát bemutató ábrával szemléltetjük a program működését.

Az ötödik fejezetben egy populációdinamikai modellt vizsgálunk. Ez a modell a Tanganyika-tóban élő két halfaj (egy ragadozó és egy növényevő), valamint a növényevő halak táplálékául szolgáló növényzet mennyiségének változását írja le. A modell két részből áll: év közben egy differenciálegyenlet-rendszer írja le a fejlődést, míg minden év végén egy diszkrét dinamikus rendszer írja le a halak szaporodását.

Az év közbeni fejlődést leíró nemautonóm differenciálegyenlet-rendszernek nincs egyensúlyi helyzete, azonban van határegyenlete, és a határegyenletnek van egyensúlyi helyzete. Ilyen esetben az ún. eventuális stabilitási tulajdon-

ságokat (eventual stability properties, Yoshizawa [22]) szokták vizsgálni. Fő eredményünk, hogy a nemautonóm rendszer minden megoldása tart a határegyenlet egyensúlyi helyzetéhez, éspedig bizonyos értelemben egyenletes módon. A bizonyítás ötvözi a linearizálás módszerét, a határegyenletek módszerét és Ljapunov direkt módszerét.

2. fejezet

Dinamikus rendszerek

A fizikai, kémiai, biológiai, gazdasági folyamatok jövő- és múltbéli állapotai bizonyos mértékig kiszámíthatók, ha ismerjük jelenlegi állapotukat és a fejlődésüket szabályozó törvényeket. Amennyiben ezek a törvények nem változnak az időben, az ilyen rendszerek viselkedését teljesen meghatározza kiindulási állapotuk. A *dinamikus rendszerek* fogalma az ilyen *determinisztikus folyamatok* matematikai modelljét jelenti. Vagyis a dinamikus rendszer fogalma magában foglalja a lehetséges állapotok halmazát és a fejlődés törvényeit az idő függvényében.

A rendszer minden lehetséges állapotát valamilyen *állapottérnek* nevezett X halmaz egy pontja jelzi. Egy $x \in X$ pont nem csak a rendszer jelenlegi helyzetét írja le, hanem a fejlődését is meghatározza. Az állapotteret a klasszikus mechanikából eredő hagyományokat követve gyakran *fázistérnek* is nevezik.

Az állapotok közti átmenetet egy leképezés adja meg, ez előírja, hogy a rendszer valamely állapotból t idő alatt mely állapotba megy át.

Ezek után megadhatjuk a dinamikus rendszer fogalmának pontos definícióját:

2.1. Definíció. *Legyen $X \subset \mathbb{R}^n$ és $Y \subset \mathbb{R}$. Az (X, π) párt* dinamikus rendszernek *nevezzük, ha a $\pi : X \times Y \to X$ leképezés rendelkezik a következő tulajdonságokkal:*

- $\pi(x,0) = x$ *minden* $x \in X$ *esetén (kezdetiérték-tulajdonság),*
- $\pi(\pi(x,t),s) = \pi(x,t+s)$ *minden* $x \in X$ *és* $t,s \in Y$ *esetén (csoporttulajdonság),*
- π *folytonos az* $X \times Y$ *szorzattéren.*

X-et nevezzük állapottérnek, Y pedig az időt jelenti. Y valamilyen számhalmaz, leggyakrabban $Y = \mathbb{R}$ vagy $Y = \mathbb{Z}$. Ha Y a valós számok halmaza, akkor folytonos, ha Y az egészek halmaza, akkor diszkrét dinamikus rendszerről beszélünk.

2.2. Definíció. *Legyen* $x \in X$ *tetszőleges. Ekkor a*

$$\xi_x : Y \to X, \quad \xi_x : t \mapsto \pi(x,t)$$

leképezést az x *pont* orbitális függvényének *vagy* mozgásának, *a* $\xi_x(Y) \in X$ *halmazt pedig az* x *pont* pályájának *vagy* trajektóriájának *nevezzük. Az állapottér pályákra particionálását a dinamikus rendszer* fázisképének *nevezzük.*

Az $x_0 \in X$ *pontot* egyensúlyi helyzetnek *vagy* fixpontnak *nevezzük, ha* $\pi(x_0,t) = x_0$ *minden* $t \in Y$ *esetén. Az elnevezést az indokolja, hogy ezzel a kezdeti értékkel indulva a mozgás állandó, vagyis a trajektória egy pontból áll.*

Egy L_0 *pályát* periodikusnak *nevezünk, ha minden* $x_0 \in L_0$ *pontra és minden* $t \in Y$ *esetén* $\pi(x_0, t+T_0) = \pi(x_0,t)$ *teljesül valamilyen* $T_0 > 0$*-ra.*

2.3. Példa. Legyen adott az

$$x' = g(x)$$

közönséges, autonóm differenciálegyenlet, ahol $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvény. Tegyük fel, hogy a rendszer bármely megoldása folytatható a $(-\infty, \infty)$ intervallumon. Jelölje $x(\cdot, t_0, x_0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ az $x(t_0, t_0, x_0) = x_0$ feltételnek eleget tevő megoldást. Definiáljuk az f függvényt a következő módon:

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

$$f : (x, t) \mapsto x(t_0 + t, t_0, x)$$

Ebben az esetben f egy folytonos dinamikus rendszert határoz meg.

2.4. Példa. Legyen $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ folytonos, invertálható leképezés. Az

$$x_{n+1} = F(x_n)$$

differenciaegyenlet egy diszkrét dinamikus rendszert definiál: a 2.1. definíció jelöléseit használva:

$$\pi(x, n) = F^n(x),$$

ahol F^n az F leképezés n-edik iteráltját jelöli.

Az alábbiakban ismertetjük a kaotikus halmaz, az attraktor, illetve néhány kapcsolódó fogalom definícióját a [24] monográfia felhasználásával.

2.5. Definíció. *Legyen Λ kompakt részhalmaza $\mathbb{R}^m$-nek. A Λ halmazt* invariánsnak *nevezzük a $\pi(x, t)$ dinamikus rendszerre nézve, ha $\pi(\Lambda, t) \subset \Lambda$ minden $t \in Y$ esetén.*

2.6. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a $\pi(x, t)$ dinamikus rendszer* érzékenyen függ a kezdeti feltételektől *Λ-n, ha létezik olyan $\varepsilon > 0$, hogy bármely $x \in \Lambda$-hoz és x bármely U környezetéhez megadható olyan $y \in U$ és $t > 0$, amelyre $|\pi(x, t) - \pi(y, t)| > \varepsilon$.*

2.7. Definíció. *Egy invariáns zárt A halmazt* topologikusan tranzitívnak *nevezünk, ha bármely U, $V \subset A$ részhalmazokra létezik olyan $t \in Y$, amelyre $\pi(U, t) \cap V \neq \emptyset$ teljesül.*

2.8. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a Λ invariáns halmaz* kaotikus, *ha a következő három tulajdonság teljesül:*

- *$\pi(x, t)$ érzékenyen függ a kezdeti adatoktól Λ-n,*
- *$\pi(x, t)$ topologikusan tranzitív Λ-n,*
- *$\pi(x, t)$ periodikus pályái sűrűek Λ-ban.*

2.9. Definíció. *Legyen $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$. Azt mondjuk, hogy az $A \subset \mathbb{R}^m$ halmaz* attraktor, *ha rendelkezik a következő tulajdonságokkal:*

- *invariáns, azaz $F(A) = A$,*
- *sűrű, azaz létezik A-ban olyan kezdeti pont, amelynek a pályája sűrű A-ban,*
- *A-hoz közelről induló trajektóriák közel maradnak és aszimptotikusan tartanak A-hoz.*

2.10. Definíció. *Az $A \subset X$ attraktort* különös attraktornak *nevezzük, ha kaotikus.*

2.11. Definíció. *Egy attraktor* medencéje *azon pontok halmaza, amelyekből induló trajektóriák az attraktorhoz tartanak.*

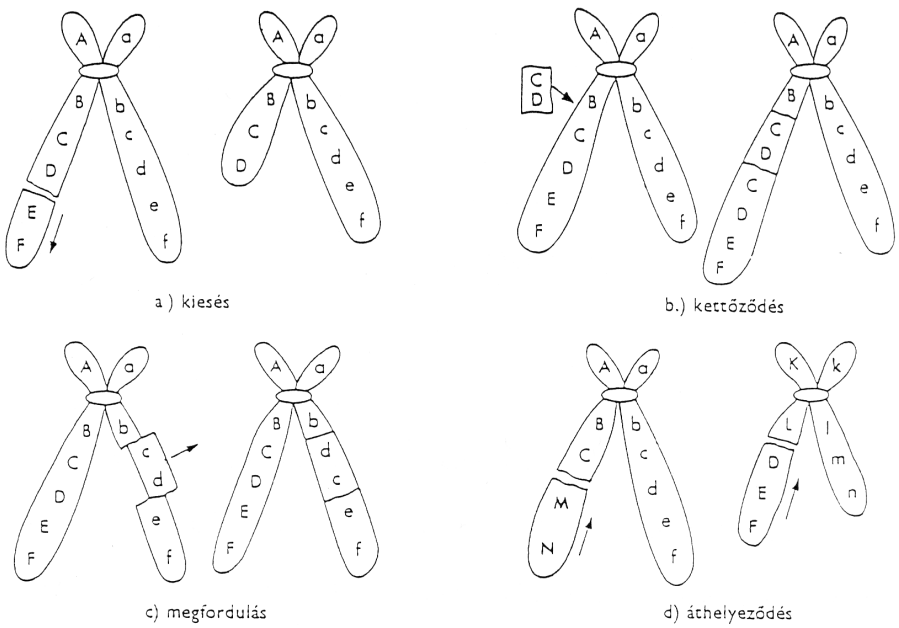
3. fejezet

A Tusnády-modell

3.1. A Tusnády-modell

Az élőlények sejtjei – kevés kivételtől eltekintve – sejtmagot tartalmaznak, amelyben a genetikai program *kromoszómák* formájában tárolódik. A kromoszómák száma fajonként különböző (az embernél ez a szám 46). A kromoszómák egyik fele anyai, a másik apai eredetű, tehát a kromoszómák párokban jelennek meg, és egy-egy pár két tagját nevezzük homológ kromoszómáknak. Amikor egy ilyen *diploid* sejt osztódik, minden kromoszóma megkettőződik, és a két származéksejt mindegyike megkapja a teljes kromoszómakészletet. A szervezet tartalmaz *haploid* sejteket is, amelyekben csak feleannyi kromoszóma található, minden párból az egyik: ezek a sejtek a csírasejtek vagy gaméták. E sejtek a diploid sejtekből jönnek létre a meiózis folyamata során, amely kettéhasítja a kromoszómapárokat. A különböző kromoszómapárok egymástól függetlenül bomlanak fel. Megtermékenyítéskor a gamétapárok egyesülnek, így helyreáll az eredeti kromoszómaszám.

A kromoszóma azon szakaszait, amelyek a különböző tulajdonságokat meghatározzák, *génnek* nevezzük. A géneknek különböző változatai lehetnek, ezeket a változatokat *alléloknak*, a kromoszómán belül elfoglalt helyüket pedig *lókusznak* nevezzük. Haploid sejtekben minden génnek egy, diploid sejtekben két allélja lehet jelen. A *genotípust* a valóban jelen lévő allélpár ha-

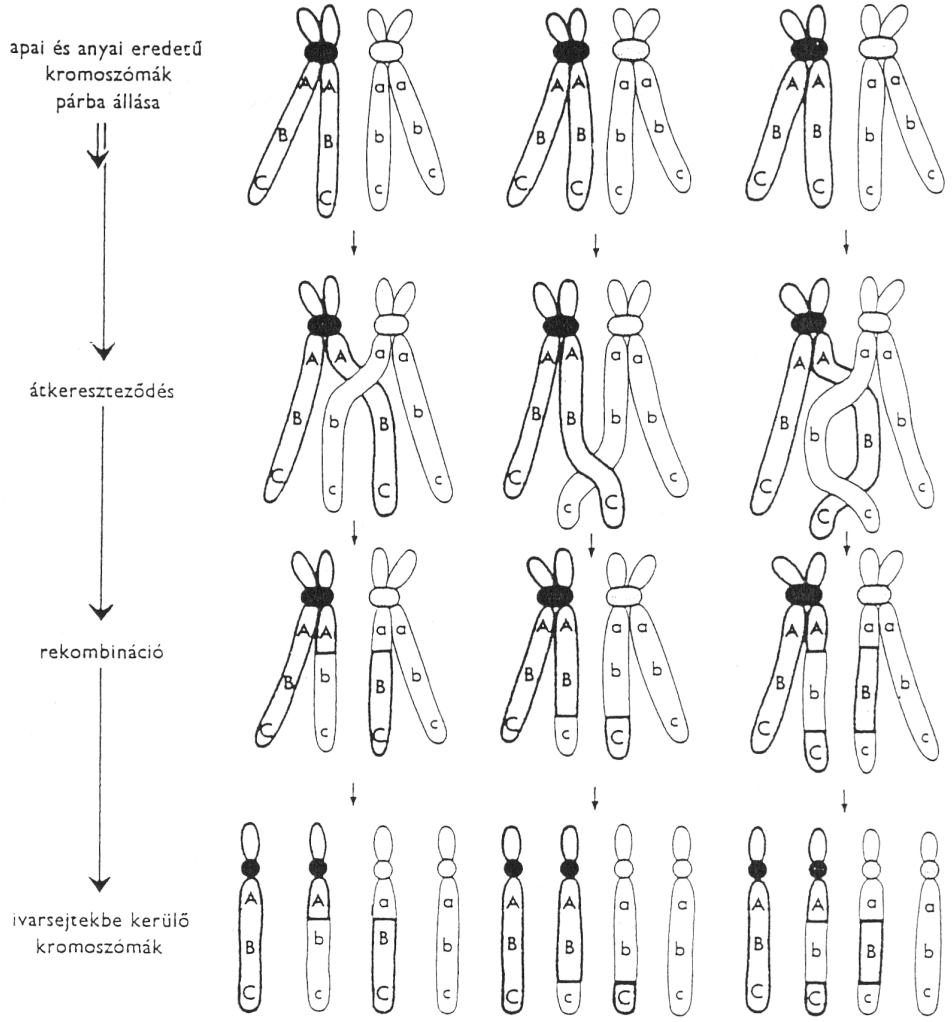


3.1. ábra. A mutáció típusai

tározza meg. Ha a két allél megegyezik, akkor az adott génre nézve az egyed *homozigóta*, ha a két allél eltérő, akkor *heterozigóta*. A genotípusok eloszlásának változását több tényező is befolyásolja, amelyek közül a legfontosabbak a mutáció és a szelekció.

A *szelekció* azt jelenti, hogy a különböző genotípusoknak különböző az esélye a felnőttkor megérésére és utódok létrehozására. Valamely genotípus sikerességét a *fitness*, vagyis a genetikai rátermettség mutatja meg, amit többféleképpen is mérhetünk. A legegyszerűbb a Wright-féle fitness, amely az utódok várható számát jelenti.

A *mutáció* az örökítőanyag, a DNS rendellenes megváltozása. Ez azt jelenti, hogy a gének nem pontosan másolódnak. A mutáció leggyakrabban a meiózis alatt fordul elő; valamely allél egy másik alléllá alakul át. Valahányszor a sejtmag lemásolódik, hiba keletkezhet. Ezt többek között valamilyen



3.2. ábra. A rekombináció típusai

sugárzás okozhatja. Az eredmény néha hasznos, néha káros, de a legtöbb esetben közömbös. Másolási hibák okozzák a rákot, de a fajok kialakulását is a mutációk eredményezik, és mutációk tartják fenn azokat a velünk született rendellenességeket, amelyek gyakorisága a szelekció hatására néhány generáció során elhanyagolhatóra csökkenne.

A *rekombináció* vagy *átkereszteződés* a homológ kromoszómák között történhet. A rekombináció – a mutációhoz hasonlóan – a genetikai változatosság

forrása, de itt nem új gének születnek, hanem új génkombinációk: a homológ kromoszómapárok egyes génjei kicserélődnek. Így a keletkező ivarsejt kromoszómái nem pontos másai sem az apai, sem az anyai kromoszómáknak. Persze nem cserélődhet ki bármely két gén; minél közelebb van két lókusz egymáshoz, annál valószínűbb, hogy alléljaik a meiózis során ugyanazon a kromoszómán maradnak. Ezt a valószínűséget a kapcsoltság mértéke fejezi ki.

Modellezzük matematikilag az előbbi fogalmakat:

Jelölje m a lókuszok számát, az allélok számát pedig jelöljük d-vel. Ekkor az ivarsejtek d dimenziós vektorokként foghatók fel, amelyek elemei az allélok:

$$V = (v_1, \ldots, v_m)$$

Így az ivarsejtek lehetséges száma $n = d^m$, jelölje őket $1, \ldots, n$.

Legyen $x_i(r)$ az i-edik ivarsejt aránya az r-edik generációban, ekkor nyilván teljesül, hogy $x_1 + \cdots + x_n = 1$.

Jelölje Γ a genotípusok halmazát. Ekkor a $\gamma \in \Gamma$ genotípus egy véges véletlen $m \times 2$-es mátrix, ahol m a lókuszok száma, a 2 pedig a nemek számát jelenti. A két oszlop független, a sorok nem feltétlenül.

A fitnessfüggvény egy leképezés Γ-ról a $[0, 1]$ zárt intervallumra.

A meiózis véletlen leképezés Γ-ról az ivarsejtek m dimenziós terébe: $\Gamma \ni \gamma \mapsto V$, $V(p) = \gamma(p, \varepsilon_p)$, ahol $1 \leq p \leq m$, $V(p)$ a V p-edik koordinátája, $\gamma(p, q)$ a γ p-edik sorának q-adik eleme és $\varepsilon_p (p = 1, \ldots, m)$ független, azonos eloszlású véletlen változók, melyekre $P(\varepsilon_p = 1) = P(\varepsilon_p = 2) = \frac{1}{2}$.

A mutáció eredménye Tusnády Gábor szerint mindkét szülői géntől függ a következő módon [21].

Jelölje $w(i, j)$ az ij genotípus fitnessét ($0 \leq w(i, j) \leq 1$), és legyen $\{y_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ a *genotípusok* eloszlása egy adott generációban. Ha csak a szelekciót vesszük figyelembe (eltekintünk a mutációtól és a rekombinációtól),

akkor a következő szelekciós modellt kapjuk:

$$y_{ij} = \frac{w(i,j)x_i x_j}{\sum_{p,q=1}^{n} w(p,q)x_p x_q}, \ i,j = 1, \cdots, n.$$

Vegyük ezután figyelembe a rekombinációt és a mutációt is. Jelölje $M_{ij}(k)$ annak a valószínűségét, hogy az ij genotípusú sejtből k típusú ivarsejt jön létre. $M_{ij}(k)$ magában foglalja a rekombinációt és a mutációt is. Ekkor a meiózis után az *ivarsejtek* új eloszlását a következőképpen kapjuk meg:

$$x_k(r+1) = \sum_{i,j=1}^{n} y_{ij}(r) M_{ij}(k).$$

Ha behelyettesítjük y_{ij} helyére a szelekciós modellben kapott képletet és bevezetjük az $a(i,j,k) = w(i,j)M_{ij}(k)$ jelölést, akkor a következő modellt kapjuk:

$$x_k(r+1) = \frac{\sum_{i,j=1}^{n} a(i,j,k)x_i(r)x_j(r)}{\sum_{i,j,k=1}^{n} a(i,j,k)x_i(r)x_j(r)}.$$

Tusnády Gábor azt vizsgálta, hogy mit lehet mondani a leképezés iterációjával kapott sorozatok torlódási pontjairól, illetve hogy egyáltalán van-e olyan rendszer, amelyben több torlódási pont van. Numerikus kísérleteket végzett, és azt tapasztalta, hogy az is ritka, amikor valamilyen görbe a torlódási halmaz. Ezekben az esetekben mindig ugyanaz volt a torlódási halmaz, akármelyik pontból indult ki. Talált olyan esetet is, amikor a görbe két összefüggő komponensre esett szét, és az is előfordult, hogy a torlódási halmaz véges sok pontból állt. Néha olyan fixpontokhoz jutott, amelyekhez más pontból indulva nem volt konvergencia. A legtöbb esetben azonban ezek a véletlen keresések egyetlen fixpontú leképezésre vezettek. Sokáig azt hitte, hogy egy bizonyos monotonitás biztosítja, hogy egyetlen fixpont legyen, mégpedig az, hogy minden egyes gén ad egy virtuális skálán valamilyen értéket, ezeket az értékeket összeadjuk, és a szelekciós valószínűség az így kapott összeg monoton függvénye.

Egy ellenpélda azonban meggyőzte arról, hogy ez nincs így: a monotonitás mellett is lehet a rendszernek több fixpontja, saját vonzási tartománnyal.

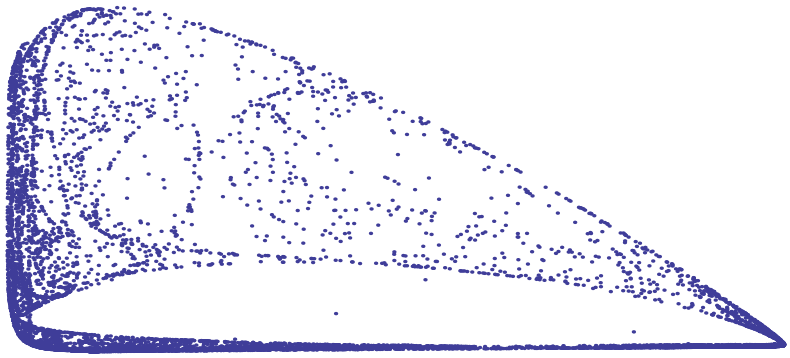
Végül hosszas keresés után a következő négydimenziós rendszert találta:

$a(2,4,1)= 1042$	
$a(2,4,2)= 8$	$a(3,4,2)= 113$
$a(1,2,3)= 19$	$a(2,3,3)= 9$
$a(1,3,4)= 1078$	$a(2,2,4)= 414$

Ez úgy olvasandó, hogy minden i,j,k mellett $a(i,j,k) = a(j,i,k)$ és a nem említett együtthatók értéke nulla. Vagyis a rendszerünk a következő:

$$x(r+1) = \begin{pmatrix} \frac{2084x_2x_4}{38x_1x_2+414x_2^2+2156x_1x_3+18x_2x_3+2100x_2x_4+226x_3x_4} \\ \frac{16x_2x_4+226x_3x_4}{38x_1x_2+414x_2^2+2156x_1x_3+18x_2x_3+2100x_2x_4+226x_3x_4} \\ \frac{38x_1x_2+18x_2x_3}{38x_1x_2+414x_2^2+2156x_1x_3+18x_2x_3+2100x_2x_4+226x_3x_4} \\ \frac{414x_2^2+2156x_1x_3}{38x_1x_2+414x_2^2+2156x_1x_3+18x_2x_3+2100x_2x_4+226x_3x_4} \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

E rendszer torlódási halmaza nem egydimenziós. Valószínűleg kettő a torlódási pontok halmazának a dimenziója, és ezen a rendszer viselkedése már a közönséges szemlélő előtt is kaotikusnak tűnik.



3.3. ábra. A Tusnády-rendszer torlódási pontjainak halmaza

Vizsgáljuk, hogy hogyan változik a rendszer viselkedése, ha változtatjuk valamelyik együtthatót.

A legtöbb esetben ha egy paraméter értékét csak egy kicsit változtatjuk meg, akkor a rendszer dinamikája, a megoldások szerkezete nem változik,

ezt nevezzük strukturális stabilitásnak. Vannak viszont olyan esetek, a paraméternek olyan kritikus értékei, amikor a paraméter kis változtatására is lényegesen megváltozik a dinamika, a trajektóriák lényegesen eltérnek a kritikus érték alatti és fölötti paraméterekre. Ezt a jelenséget nevezzük bifurkációnak. Ez jelentheti például egyensúlyi helyzetek vagy periodikus megoldás megjelenését, illetve eltűnését vagy stabilitásuk változását.

3.1. Definíció. *Az* (X_1, π_1) *és az* (X_2, π_2) *dinamikus rendszerek* topologikusan ekvivalensek, *ha létezik* $h : X_1 \to X_2$ *homeomorfizmus (azaz* h *invertálható leképezés úgy, hogy* h *és az inverze is folytonos), amely az első rendszer pályáit a második rendszer pályáira képezi, megőrizve az idő irányítását.*

3.2. Definíció. *Tekintsünk egy paramétertől függő dinamikus rendszert. Azt a jelenséget, amikor egy paraméter változtatása során topologikusan nem ekvivalens fáziskép jelenik meg,* bifurkációnak *nevezzük.*

A paraméternek azt az értékét, ahol a bifurkáció bekövetkezik, bifurkációs *vagy* kritikus értéknek *nevezzük.*

3.3. Definíció. *Tekintsük a következő diszkrét dinamikus rendszert:*

$$x \mapsto f(x),$$

ahol f *diffeomorfizmus, azaz* f *inverzével együtt differenciálható. Legyen* x_0 *e rendszer fixpontja (azaz* $x_0 = f(x_0)$*), és jelölje* A *a az* $f(x)$ *Jacobi-mátrixát* x_0*-ban. Jelölje az* A *mátrix sajátértékeit* $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$.

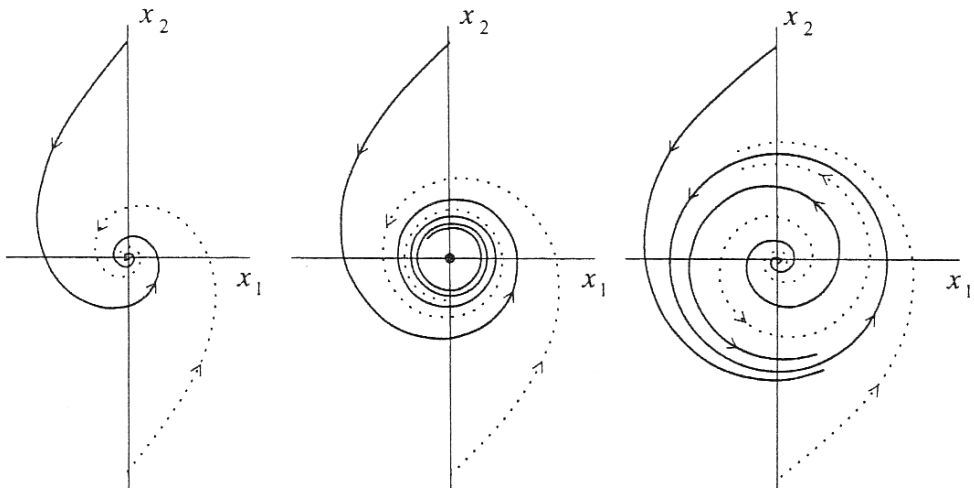
Azt mondjuk, hogy az x_0 *egyensúlyi helyzet* hiperbolikus, *ha* A*-nak nincs sajátértéke a komplex sík origó körüli egységkörén.*

3.4. Definíció. *Tekintsünk egy paramétertől függő diszkrét dinamikus rendszert:*

$$x_{r+1} = F(x_r, \alpha), \quad F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n,$$

ahol F *sima* x*-ben és* α*-ban is. Legyen* $x = x_0$ *a rendszer nemhiperbolikus fixpontja* $\alpha = \alpha_0$*-ra. Azt a jelenséget, amikor* α *változtatásakor a* $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, \alpha)$ *Jacobi-mátrix sajátértékei áthaladnak az origó körüli egységkörön,* Neimark–Sacker-bifurkációnak *nevezzük.*

Amennyiben egy stabil fixpontból egy stabil zárt invariáns görbe bifurkálódik, míg a fixpont instabillá válik, szuperkritikus Neimark–Sacker-bifurkációról beszélünk, azt az esetet pedig, amikor egy instabil fixpontból egy instabil zárt invariáns görbe bifurkálódik, miközben a fixpont stabillá válik, szubkritikus Neimark–Sacker-bifurkációnak nevezzük.



3.4. ábra. Szuperkritikus Neimark–Sacker-bifurkáció

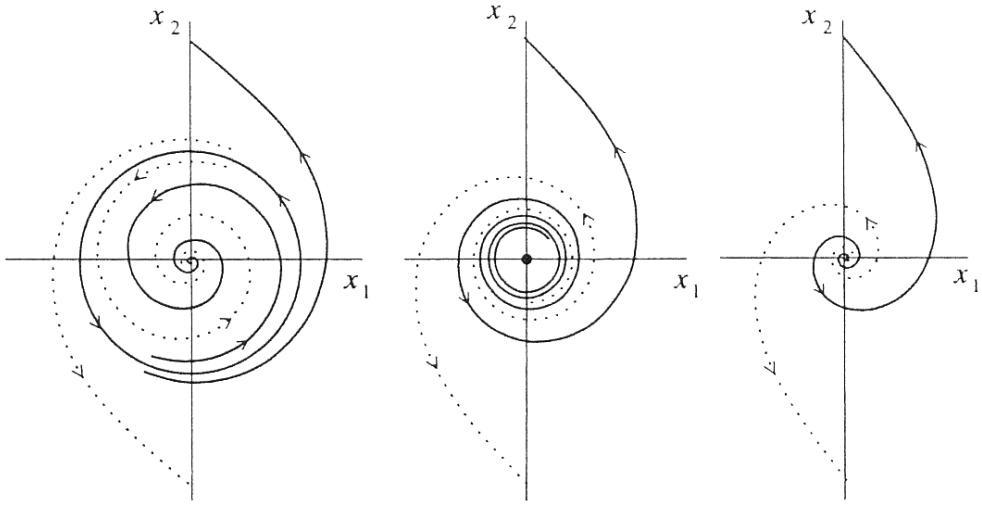
Vizsgáljuk először a rendszert különböző paraméterértékeknél a 4. fejezetben ismertetett attraktorszámító program segítségével. Válasszuk paraméternek a $p = a(2,4,2) = a(4,2,2) = 8$ együtthatót.

A 3.6. ábrán, amely a rendszert az eredeti, Tusnády Gábor által meghatározott együtthatókkal ábrázolja, jól látszik a kaotikus viselkedés.

A 3.7. ábra a rendszer globális attraktorát mutatja, $p = 135$ paraméterértéknél készült és látszik, hogy itt az attraktor egy stabil zárt görbe.

A $p = 145$ paraméterértéknél a program által készített ábra azt mutatja, hogy az attraktor egy stabil fixpont.

A kaotikus viselkedés matematikai bizonyítása még várat magára, de a paraméter értékének növelésével bekövetkező jelenséget tisztázzuk a következőkben.

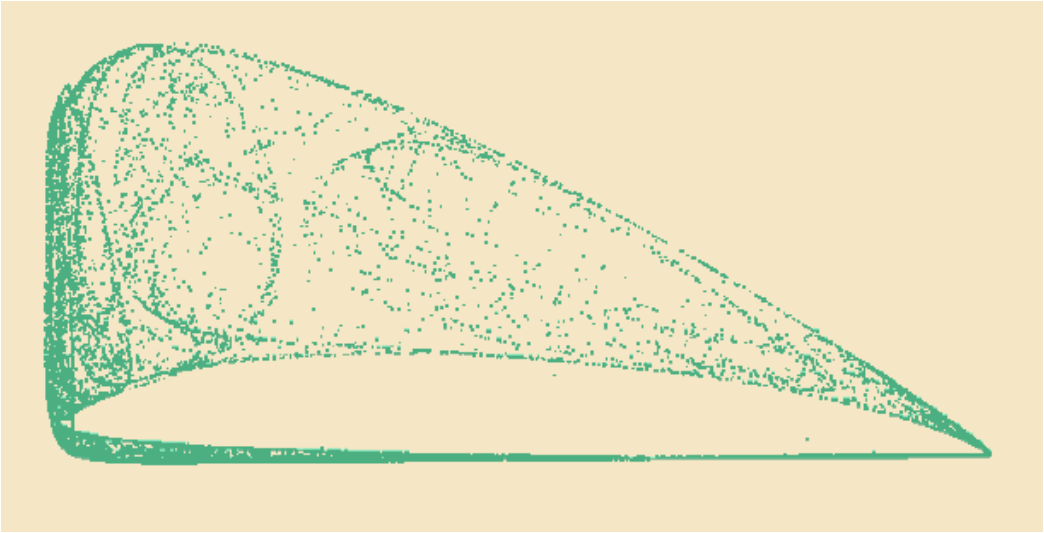


3.5. ábra. Szubkritikus Neimar–Sacker-bifurkáció

A program által készített ábrák Neimark–Sacker-bifurkációra utalnak, hiszen a paraméter változtatásával egy stabil fixpontból egy zárt görbe keletkezett.

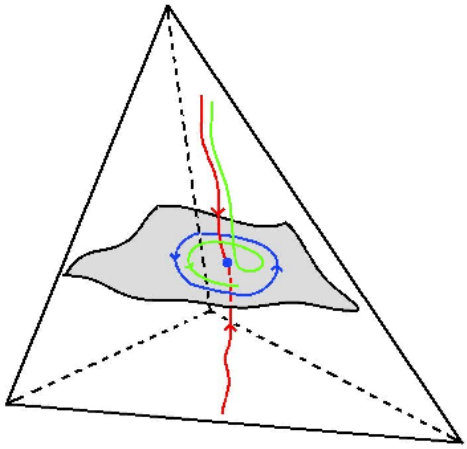
A 3.8. ábra a rendszer teljes dinamikáját mutatja a fázistérben. Mivel az allélok eloszlásainak összege 1, a rendszert három dimenzióra redukálhatjuk. A fázistér a négydimenziós szimplex, vagyis egy tetraéder. A p paraméter értékének változtatásával a Jacobi-mátrix komplex sajátértékpárja áthalad az egységkörön. Ennek a komplex sajátértékpárnak megfelel a fixpont kétdimenziós instabil sokasága. Az invariáns zárt görbe ezen az instabil sokaságon jelenik meg. A fixpontnak van egy stabil sokasága is; az instabil sokaság vonzza a megoldásokat. A $p = 139{,}455$ paraméterértéknél a két sajátérték abszolút értéke 1. Annak igazolásához, hogy e paraméterértéknél bifurkáció történik, be kell látnunk, hogy a rendszer teljesít bizonyos nemelfajulási feltételeket.

3.5. Tétel. *A (3.1) Tusnády-rendszer a $p = 139{,}455$ paraméterértéknél szuperkritikus Neimark–Sacker-bifurkáción megy keresztül, azaz egy stabil fixpontból egy stabil invariáns zárt görbe bifurkálódik, miközben a fixpont instabillá válik.*



3.6. ábra. A Tusnády-rendszer attraktora $p = 8$ paraméterértéknél

3.7. ábra. A Tusnády-rendszer attraktora $p = 135$ paraméterértéknél



3.8. ábra. A Tusnády-rendszer dinamikája

3.2. A 3.5. tétel bizonyítása

A 3.5. tételben a $p = a(2,4,2) = a(4,2,2)$ paramétert változtatjuk. A paraméter változásával a Jacobi-mátrix komplex sajátértékpárja áthalad a komplex sík origó körüli egységkörén. A paraméter $p = 139{,}455$ értékénél a sajátértékpár abszolút értéke 1. A rendszernek azonban bizonyos nemelfajulási feltételeket is teljesítenie kell ahhoz, hogy valóban a szuperkritikus Neimark–Sacker-bifurkáció definíciójában leírt jelenség játszódjon le. E nemelfajulási feltételek ellenőrzése meglehetősen hosszadalmas számítást igényel.

Először [14] alapján ismertetjük az eljárást, amely alapján végül igazolhatjuk a rendszer nemelfajulását. Az egyszerűbb jelölés kedvéért a (3.1) rendszer helyett általánosan írjuk le az eljárást.

A. Kétdimenziós rendszerek

Mivel az általános, n dimenziós esetet a kétdimenziós esetre vezetjük vissza, először kimondjuk a két dimenzióra vonatkozó, általános Neimark–Sacker-bifurkációs tételt.

Tekintsük a következő kétdimenziós rendszert:

$$x \mapsto f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

ahol az f sima függvénynek $\alpha = 0$-ban $x = 0$ fixpontja a $\mu_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}, 0 < \theta_0 < \pi$ egyszeres sajátértékekkel. Az implicitfüggvény-tétel szerint e rendszernek minden elegendően kicsi $|\alpha|$ esetén egyetlen $x_0(\alpha)$ egyensúlyi helyzete van az origó egy környezetében. Egy paraméterfüggő koordinátatranszformációval elérhető, hogy ez a fixpont az origóban legyen. Így feltehetjük, hogy minden elegendően kicsi $|\alpha|$ esetén $x = 0$ fixpont. Így a rendszert az

$$x \mapsto A(\alpha)x + F(x, \alpha) \tag{3.2}$$

alakra írhatjuk át, ahol F sima vektorfüggvény, F mindkét komponensének x szerinti Taylor-sora legalább másodfokú taggal kezdődik, és $F(0, \alpha) = 0$ minden elegendően kicsi $|\alpha|$-ra. Az $A(\alpha)$ Jacobi-mátrix két sajátértéke

$$\mu_{1,2} = r(\alpha)e^{\pm i\varphi(\alpha)},$$

ahol $r(0) = 1$, $\varphi(0) = \theta_0$. Így $r(\alpha) = 1 + \beta(\alpha)$ valamilyen sima $\beta(\alpha)$ függvényre, ahol $\beta(0) = 0$. Tegyük fel, hogy $\beta'(0) \neq 0$. Ekkor a β-t használhatjuk új paraméterként és a sajátértékeket megadhatjuk β kifejezéseiként: $\mu_1(\beta) = \mu(\beta), \mu_2(\beta) = \overline{\mu}(\beta)$, ahol $\mu(\beta) = (1 + \beta)e^{\theta(\beta)}$ és $\theta(\beta)$ sima függvény úgy, hogy $\theta(0) = \theta_0$.

Ahhoz, hogy a tételt kimondhassuk, egy újabb átalakításra van szükség. Erről a technikai részletek mellőzésével itt elegendő annyit mondani, hogy egy komplex változó és egy új paraméter bevezetésével a (3.2) rendszert a következő alakra írhatjuk át minden elegendően kicsi $|\alpha|$-ra:

$$z \mapsto \mu(\beta)z + g(z, \overline{z}, \beta),$$

ahol $\beta \in \mathbb{R}^1, z \in \mathbb{C}^1, \mu(\beta) = (1+\beta)e^{i\theta(\beta)}$ és g sima komplex értékű függvénye z-nek, $\overline{z}$-nek és β-nak, amelynek Taylor-sora csak másod- és annál magasabb

fokú tagokat tartalmaz:

$$g(z,\overline{z},\beta)=\sum_{k+l\geq 2}\frac{1}{k!l!}g_{kl}(\beta)z^k\overline{z}^l,\quad k,l=0,1,\dots.$$

Az eddigiek felhasználásával a következő tételt mondhatjuk ki a Neimark–Sacker-bifurkációról két dimenzióban:

3.6. Tétel (általános Neimark–Sacker-bifurkáció [14]). *Tetszőleges általános kétdimenziós, egyparaméteres*

$$x\mapsto f(x,\alpha)$$

rendszerre, amelynek $\alpha=0$-ban $x_0=0$ fixpontja a $\mu_{1,2}=e^{\pm i\theta_0}$ sajátértékekkel, az x_0 pontnak létezik olyan környezete, amelyben egy zárt invariáns görbe bifurkálódik x_0-ból, miközben α áthalad a 0-n. Az általánossághoz a rendszernek a következő feltételeket kell teljesítenie:

(1) $r'(0)\neq 0$, *ahol* $\mu_{1,2}(\alpha)=r(\alpha)e^{\pm i\varphi(\alpha)}$, $r(0)=1,\varphi(0)=\theta_0$,
(2) $e^{\pm ik\theta_0}\neq 1$, $k=1,2,3,4$,
(3) $a(0)\neq 0$, *ahol* $a(0)=\mathrm{Re}\left(\frac{e^{-i\theta_0}g_{21}}{2}\right)-\mathrm{Re}\left(\frac{(1-2e^{i\theta_0})e^{-2i\theta_0}}{2(1-e^{i\theta_0})}g_{20}g_{11}\right)-\frac{1}{2}|g_{11}|^2-\frac{1}{4}|g_{02}|^2$, *ahol* $g_{ij}=g_{ij}(0)$

A (3) feltételben szereplő $a(0)$ érték előjele határozza meg a Neimark–Sacker-bifurkáció típusát: ha $a(0)$ negatív, akkor szuperkritikus, ha $a(0)$ pozitív, akkor szubkritikus Neimark–Sacker-bifurkáció megy végbe.

B. Magasabb dimenziós rendszerek

Magasabb dimenziós rendszereknél lényegében ugyanaz történik, mint két dimenzióban: létezik egy kétdimenziós invariáns sokaság, amelyen a rendszer bifurkáción megy át, a sokaságon kívül pedig a rendszer viselkedése „triviális”, mert ott nincs bifurkáció.

Tekintsük az

$$x\mapsto f(x),\quad x\in\mathbb{R}^n$$

leképezés által meghatározott diszkrét dinamikus rendszert, ahol f elegendően sima és $f(0) = 0$. Legyenek az A Jacobi-mátrix sajátértékei az $x_0 = 0$ pontban $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$. Tegyük fel, hogy az egyensúlyi helyzet nem hiperbolikus, vagyis hogy vannak egységnyi abszolút értékű sajátértékek, jelöljük ezek számát n_0-lal. Jelölje az A-nak az egységkörön elhelyezkedő sajátértékekhez tartozó lineáris invariáns (általánosított) sajátalterét T^c. Ekkor létezik egy lokálisan definiált, n_0 dimenziós $W^c_{loc}(0)$ invariáns sokaság, amelyet T^c érint az $x = 0$ pontban. Ezenkívül létezik x_0-nak egy U környezete úgy, hogy ha $f^k(x) \in U$ minden $k \in \mathbb{N}$, akkor $f^k(x) \to W^c_{loc}(0)$

A $W^c_{loc}(0)$ sokaságot *centrális sokaságnak* nevezzük. A rendszerünket a következő alakba írhatjuk át:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} Bu + g(u,v) \\ Cv + h(u,v) \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

ahol a B mátrix sajátértékei az egységkörön helyezkednek el, a C mátrix sajátértékei pedig azon kívül vagy belül, és a következő redukciós elvet alkalmazhatjuk:

A (3.3) rendszer lokálisan topologikusan ekvivalens az origó közelében a következő rendszerrel:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} Bu + g(u, V(u)) \\ Cv \end{pmatrix}.$$

C. Eljárás a nemelfajulás bizonyítására

A (3.3) alakot azonban ritkán használjuk, egy hasznos módszer segítségével elkerülhetjük az előbbi transzformációt. A gyakorlatban általában ezt a módszert használjuk a különböző rendszerek vizsgálatánál. Ennél a módszernél csak az A mátrix és transzponáltja, A^T kritikus sajátértékeihez tartozó sajátvektorokat használjuk, hogy „levetítsük” a rendszert a kritikus sajátaltérbe.

Írjuk fel a rendszert

$$\tilde{x} = Ax + F(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{3.4}$$

alakban, ahol $F(x) = O(\|x\|^2)$ sima függvény.

Tudjuk, hogy a Neimark–Sacker-bifurkáció esetében az A Jacobi-mátrixnak van egy komplex sajátértékpárja, amely az egységkörre esik: $\mu_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}, 0 < \theta_0 < \pi$ és ezeken kívül nincs A-nak más sajátértéke, amely egységnyi abszolút értékű. Legyen $q \in \mathbb{C}^n$ egy μ_1-hez tartozó komplex sajátvektor:

$$Aq = e^{i\theta_0}q, \quad A\overline{q} = e^{-i\theta_0}\overline{q} \tag{3.5}$$

Vezessük be a $p \in \mathbb{C}^n$ sajátvektort, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

$$A^T p = e^{-i\theta_0}p, \quad A^T\overline{p} = e^{i\theta_0}\overline{p} \tag{3.6}$$

és

$$\langle p, q\rangle = 1,$$

ahol $\langle p, q\rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{p}_i q_i$ a szokásos $\mathbb{C}^n$-beli skalárszorzás. A $\mu_{1,2}$-höz tartozó T^c kritikus sajátaltér kétdimenziós, és $\operatorname{Re} q$, $\operatorname{Im} q$ kifeszíti. A T^{su} valós sajátaltér, amely az A többi sajátértékéhez tartozik, $(n-2)$ dimenziós.

Igaz a következő: $y \in T^{su}$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\langle p, y\rangle = 0$.

Jegyezzük meg, hogy $y \in \mathbb{R}^n$ valós, míg $p \in \mathbb{C}^n$ komplex. Így az előbbi feltétel két megszorítást jelent y-ra: $\langle p, y\rangle$ valós és képzetes része egyaránt eltűnik.

Ez alapján felbonthatjuk $x \in \mathbb{R}^n$-t

$$x = zq + \overline{zq} + y$$

alakban, ahol $z \in \mathbb{C}^1, zq + \overline{zq} \in T^c$ és $y \in T^{su}$. Így a következőt kapjuk:

$$\begin{cases} z = \langle p, x\rangle \\ y = x - \langle p, x\rangle q - \langle \overline{p}, x\rangle \overline{q} \end{cases}$$

Ezekkel a koordinátákkal a (3.4) leképezést a következő alakra hozhatjuk:

$$\begin{cases} \tilde{z} = e^{i\theta_0} z + \langle p, F(zq + \overline{zq} + y) \rangle \\ \tilde{y} = Ay + F(zq + \overline{zq} + y) \\ \qquad - \langle p, F(zq + \overline{zq} + y) \rangle q \\ \qquad - \langle \overline{p}, F(zq + \overline{zq} + y) \rangle \overline{q} \end{cases} \tag{3.7}$$

Ez a rendszer $(n+2)$ dimenziós, azonban y-ra van két megszorítás.

Írjuk fel $F(x)$-et a következő alakban:

$$F(x) = \frac{1}{2} B(x,x) + \frac{1}{6} C(x,x,x) + O(\|x\|^4),$$

ahol $B(x,y)$ és $C(x,y,z)$ multilineáris függvények. Koordinátákkal:

$$B_i(x,y) = \sum_{j,k=1}^{n} \left. \frac{\partial^2 F_i(\xi)}{\partial \xi_j \partial \xi_k} \right|_{\xi=0} x_j y_k \tag{3.8}$$

és

$$C_i(x,y,z) = \sum_{j,k,l=1}^{n} \left. \frac{\partial^3 F_i(\xi)}{\partial \xi_j \partial \xi_k \partial \xi_l} \right|_{\xi=0} x_j y_k z_l \tag{3.9}$$

és $i = 1, 2, \ldots, n$. Ezek a függvények megkönnyítik a Taylor-együtthatók kiszámítását.

A (3.7) rendszert a következő alakra írhatjuk át Taylor-sorba fejtve:

$$\begin{cases} \tilde{z} = e^{i\theta_0} z + \frac{1}{2} G_{20} z^2 + G_{11} z\overline{z} + \frac{1}{2} G_{02} \overline{z}^2 + \frac{1}{2} G_{21} z^2 \overline{z} \\ \qquad + \langle G_{10}, y \rangle z + \langle G_{01}, y \rangle \overline{z} + \cdots \\ \tilde{y} = Ay + \frac{1}{2} H_{20} z^2 + H_{11} z\overline{z} + \frac{1}{2} \overline{z}^2 + \cdots , \end{cases} \tag{3.10}$$

ahol $G_{20}, G_{11}, G_{02}, G_{21} \in \mathbb{C}^1$; $G_{01}, G_{10}, H_{ij} \in \mathbb{C}^n$. A (3.10)-ben szereplő komplex számokat és vektorokat a következő formulák alapján kaphatjuk meg:

$$\begin{aligned} G_{20} &= \langle p, B(q,q) \rangle & G_{11} &= \langle p, B(q,\overline{q}) \rangle \\ G_{02} &= \langle p, B(\overline{q},\overline{q}) \rangle & G_{21} &= \langle p, C(q,q,\overline{q}) \rangle \\ \langle G_{10}, y \rangle &= \langle p, B(q,y) \rangle & \langle G_{01}, y \rangle &= \langle p, B(\overline{q},y) \rangle \end{aligned}$$

$$H_{20} = B(q,q) - \langle p, B(q,q)\rangle q - \langle \overline{p}, B(q,q)\rangle \overline{q}$$

$$H_{11} = B(q,\overline{q}) - \langle p, B(q,\overline{q})\rangle q - \langle \overline{p}, B(q,\overline{q})\rangle \overline{q}$$

(3.10)-ben a centrális sokaság reprezentációja:

$$y = V(z,\overline{z}) = \frac{1}{2}w_{20}z^2 + w_{11}z\overline{z} + \frac{1}{2}w_{02}\overline{z}^2 + O(|z|^3),$$

ahol $\langle p, w_{ij}\rangle = 0$. A $w_{ij} \in \mathbb{C}^n$ vektorokat az

$$\begin{cases} (e^{2i\theta_0}E - A)w_{20} = H_{20}, \\ (E - A)w_{11} = H_{11}, \\ (e^{-2i\theta_0}E - A)w_{02} = H_{02} \end{cases}$$

lineáris egyenletekből kaphatjuk meg. Az egyenleteknek egyetlen megoldása van. Az $(E-A)$ mátrix invertálható, mert az 1 nem sajátértéke A-nak ($e^{i\theta_0} \neq 1$). Ha

$$e^{3i\theta_0} \neq 1,$$

az $(e^{\pm 2i\theta_0}E - A)$ mátrixok is invertálhatók $\mathbb{C}^n$-ben, mert $e^{\pm 2i\theta_0}$ nem sajátértéke A-nak. Így a megszorított leképezést a következő formában írhatjuk:

$$\begin{aligned} \tilde{z} =& iw_0 z + \frac{1}{2}G_{20}z^2 + G_{11}z\overline{z} + \frac{1}{2}G_{02}\overline{z}^2 \\ &+ \frac{1}{2}(G_{21} + 2\langle p, B(q,(E-A)^{-1}H_{11})\rangle \\ &+ \langle p, B(\overline{q},(e^{2i\theta_0}E - A)^{-1}H_{20})\rangle)z^2\overline{z} + \cdots . \end{aligned}$$

Ezt, felhasználva a G_{ij}-k és H_{ij}-k korábbi definícióit, valamint a következő

azonosságokat:

$$
\begin{aligned}
(E-A)^{-1}q &= \frac{1}{1-e^{i\theta_0}}q,\\
(e^{2i\theta_0}E-A)^{-1}q &= \frac{e^{-i\theta_0}}{e^{i\theta_0}-1}q,\\
(E-A)^{-1}\overline{q} &= \frac{1}{1-e^{-i\theta_0}}\overline{q},\\
(e^{2i\theta_0}E-A)^{-1}\overline{q} &= \frac{e^{i\theta_0}}{e^{3i\theta_0}-1}\overline{q},
\end{aligned}
$$

a következőképpen írhatjuk fel:

$$
\tilde{z} = e^{i\theta_0}z + \frac{1}{2}g_{20}z^2 + g_{11}z\overline{z} + \frac{1}{2}g_{02}\overline{z}^2 + \frac{1}{2}g_{21}z^2\overline{z} + \cdots ,
$$

ahol

$$
\begin{aligned}
g_{20} =& \langle p, B(q,q)\rangle,\\
g_{11} =& \langle p, B(q,\overline{q})\rangle,\\
g_{02} =& \langle p, B(\overline{q},\overline{q})\rangle\\
g_{21} =& \langle p, C(q,q,\overline{q}) + 2\langle p, B(q,(E-A)^{-1}B(q,\overline{q}))\rangle\\
&+ \langle p, B(\overline{q},(e^{2i\theta_0}E-A)^{-1}B(q,q))\rangle\\
&+ \frac{e^{-i\theta_0}(1-2e^{i\theta_0})}{1-e^{i\theta_0}}\langle p, B(q,q)\rangle\langle p, B(q,\overline{q})\rangle\\
&- \frac{2}{1-e^{-i\theta_0}}|\langle p, B(q,\overline{q})\rangle|^2 - \frac{e^{i\theta_0}}{e^{3i\theta_0}-1}|\langle p, B(\overline{q},\overline{q})\rangle|^2.
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

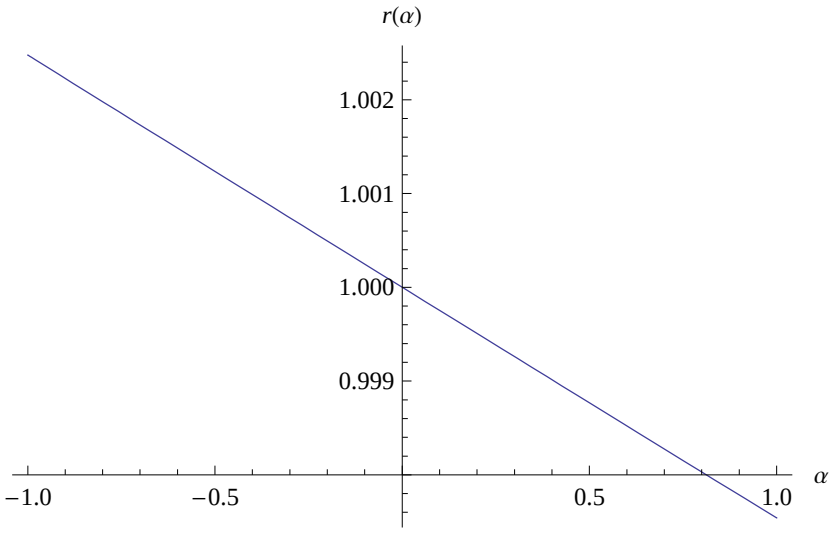
A kétdimenziós esethez hasonlóan, ha

$$
e^{ik\theta_0} \neq 1, k = 1,2,3,4,
$$

akkor a megszorított leképezést a következő alakra hozhatjuk:

$$
\tilde{z} = e^{i\theta_0 z}(1 + d(0)|z|^2) + O(|z|^4),
$$

ahol az $a(0) = \operatorname{Re} d(0)$ valós szám határozza meg a zárt invariáns görbe



3.9. ábra. r interpolációs függvénye

bifurkációjának irányát, és ezt az $a(0)$ számot a következő képlet alapján kaphatjuk meg:

$$\begin{aligned} a(0) =& \mathrm{Re}\left(\frac{e^{-i\theta_0}g_{21}}{2}\right) - \mathrm{Re}\left(\frac{(1-2e^{i\theta_0})e^{-2i\theta_0}}{2(1-e^{i\theta_0})}g_{20}g_{11}\right) \\ & - \frac{1}{2}|g_{11}|^2 - \frac{1}{4}|g_{02}|^2. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Ezt a formulát felhasználva kapjuk a következő invariáns kifejezést:

$$\begin{aligned} a(0) =& \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{e^{-i\theta_0}\left[\langle p, C(q,q,\overline{q})\rangle + 2\langle p, B(q,(E-A)^{-1}B(q,\overline{q}))\rangle \right.\right. \\ & \left.\left. + \langle p, B(\overline{q},(e^{2i\theta_0}E-A)^{-1}B(q,q))\rangle\right]\right\}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Ennek az együtthatónak a segítségével láthatjuk be n dimenziós ($n \geq 2$) rendszerekre Neimark–Sacker-bifurkáció esetén a nemlineáris tag nemelfajulását.

D. A 3.5. tétel bizonyítása

Most az eljárás alapján kiszámítjuk az $a(0)$ értékét a (3.1) rendszerben.

A 3.6. tétel (1) feltételének ellenőrzéséhez az $r'(0)$ értéket numerikusan számítottuk, és a következőt kaptuk: $r'(0) = -0{,}00217713$. (A transzverzalitás közvetlen igazolásához ábrázoltuk r interpolációs függvényét, ld. 3.9. ábra.) A kritikus sajátértékek $0{,}561391 + 0{,}827552i$ és $0{,}561391 - 0{,}827552i$, vagyis nem negyedik vagy annál kisebb rendű egységgyökök, tehát a 3.6. tétel (2) feltétele is teljesül.

Ezután meghatározzuk az A Jacobi-mátrix sajátértékeit és a (3.5)-ben, illetve (3.6)-ban bevezetett q és p sajátvektorokat:

$$q = (-\,0{,}67126 - 0{,}0108908i; -0{,}0793651 - 0{,}049971i;$$
$$0{,}0181909 + 0{,}0608618i; 0{,}732434 + i)$$

$$p = (\,0{,}0134851 - 0{,}0321706i; -0{,}19597 - 0{,}00610824i;$$
$$0{,}97727; -0{,}0340428 + 0{,}0642307i)$$

Ezután kiszámítjuk a (3.8)-ban, illetve (3.9)-ben megadott B és C függvényeket. Itt csak B_1 -et és C_1-et mutatjuk meg; a többi függvény ezekhez hasonló alakú.

$$B_1(x,y) = \begin{pmatrix} 0{,}281071x_1y_1 + 1{,}3569x_2y_1 - 4{,}99837x_3y_1 + 0{,}337012x_4y_1 + \\ 1{,}3569x_1y_2 - 30{,}0461x_2y_2 + 42{,}9415x_3y_2 - 1{,}51484x_4y_2 - \\ 4{,}99837x_1y_3 + 42{,}9415x_2y_3 + 208{,}644x_3y_3 + 7{,}85539x_4y_3 + \\ 0{,}337012x_1y_4 - 1{,}51484x_2y_4 + 7{,}85539x_3y_4 - 2{,}8086x_4y_4 \end{pmatrix}$$

$$C_1(x,y,z) =$$
$$\begin{pmatrix}
0{,}413396x_1y_1z_1 + 3{,}40342x_2y_1z_1 - 13{,}5565x_3y_1z_1 + 0{,}961551x_4y_1z_1 + \\
3{,}40342x_1y_2z_1 + 6{,}19157x_2y_2z_1 + 28{,}8248x_3y_2z_1 - 1{,}50999x_4y_2z_1 - \\
13{,}5565x_1y_3z_1 + 28{,}8248x_2y_3z_1 - 369{,}354x_3y_3z_1 + 10{,}0174x_4y_3z_1 + \\
0{,}961551x_1y_4z_1 - 1{,}50999x_2y_4z_1 + 10{,}0174x_3y_4z_1 + 0{,}136465x_4y_4z_1 + \\
3{,}40342x_1y_1z_2 + 6{,}19157x_2y_1z_2 + 28{,}8248x_3y_1z_2 - 1{,}50999x_4y_1z_2 + \\
6{,}19157x_1y_2z_2 - 696{,}409x_2y_2z_2 + 234{,}526x_3y_2z_2 - 13{,}6853x_4y_2z_2 + \\
28{,}8248x_1y_3z_2 + 234{,}526x_2y_3z_2 + 2845{,}51x_3y_3z_2 - 41{,}4316x_4y_3z_2 - \\
1{,}50999x_1y_4z_2 - 13{,}6853x_2y_4z_2 - 41{,}4316x_3y_4z_2 - 0{,}0275582x_4y_4z_2 - \\
13{,}5565x_1y_1z_3 + 28{,}8248x_2y_1z_3 - 369{,}354x_3y_1z_3 + 10{,}0174x_4y_1z_3 + \\
28{,}8248x_1y_2z_3 + 234{,}526x_2y_2z_3 + 2845{,}51x_3y_2z_3 - 41{,}4316x_4y_2z_3 - \\
369{,}354x_1y_3z_3 + 2845{,}51x_2y_3z_3 + 8360{,}91x_3y_3z_3 + 642{,}894x_4y_3z_3 + \\
10{,}0174x_1y_4z_3 - 41{,}4316x_2y_4z_3 + 642{,}894x_3y_4z_3 + 0{,}598556x_4y_4z_3 + \\
0{,}961551x_1y_1z_4 - 1{,}50999x_2y_1z_4 + 10{,}0174x_3y_1z_4 + 0{,}136465x_4y_1z_4 - \\
1{,}50999x_1y_2z_4 - 13{,}6853x_2y_2z_4 - 41{,}4316x_3y_2z_4 - 0{,}0275582x_4y_2z_4 + \\
10{,}0174x_1y_3z_4 - 41{,}4316x_2y_3z_4 + 642{,}894x_3y_3z_4 + 0{,}598556x_4y_3z_4 + \\
0{,}136465x_1y_4z_4 - 0{,}0275582x_2y_4z_4 + 0{,}598556x_3y_4z_4 - 18{,}9188x_4y_4z_4
\end{pmatrix}$$

E két függvény segítségével meghatározhatjuk az $a(0)$-ra vonatkozó (3.13) formulában szereplő skalárszorzatok értékeit.

Így azt kapjuk, hogy a (3.1) rendszerre a $p = 139{,}455$ paraméterértéknél az $a(0) = -13{,}9966$, azaz nem 0, így a rendszer nemelfajuló, tehát a megadott paraméterértéknél nemelfajuló Neimark–Sacker-bifurkáción megy keresztül. Mivel az $a(0)$ negatív, szuperkritikus Neimark–Sacker-bifurkáció történik, vagyis egy stabil fixpontból egy stabil invariáns zárt görbe bifurkálódik.

4. fejezet

Dinamikus rendszerek attraktorainak számítógépes vizsgálata

Számos programcsomag is készült ugyan dinamikus rendszerek vizsgálatára, ezek közül a 2002-ben megjelent, *Mathematicá*-ban íródott *Dynamica* [13] programcsomag azonban nem ad lehetőséget az attraktorok és medencéik vizsgálatára, a *Dynamics* [18] programcsomag medencekirajzoló eljárása pedig pontatlanságokat eredményezhet, részben az algoritmus miatt, részben pedig amiatt, hogy az eljárás a képernyőt használja az adatok tárolására. Ez magasabb dimenziós rendszerek vizsgálatánál különösen hátrányos, hiszen ekkor az eljárás mindig csak a kétdimenziós vetület alapján számol. Ezenkívül, mivel a *Dynamics* DOS alatt fut, a legtöbb mai számítógépen már nem működik.

Ezért szükség van egy olyan programra, amely dinamikus rendszerek attraktorait rajzolja ki, az eddigieknél pontosabb algoritmus szerint, és a mai számítógépeken is futtatható.

4.1. A *Dynamics* algoritmusa

Az új algoritmus a *Dynamics* algoritmusának továbbfejlesztése, ezért először meg kell ismernünk a *Dynamics* medencerajzoló eljárását, a *Basins and Attractors* eljárást.

Az eljárás a képernyőt téglalapokra osztja és a téglalapokat páros, illetve páratlan számokkal jelzett színekkel színezi. A páros színek attraktorokat, a páratlanok pedig medencéket jelentenek. Az 1. szín a végtelen medencéjét jelöli, a $2n$-edik színű attraktor medencéjét a program a $2n+1$-edik színnel színezi.

Kezdetben minden téglalap színezetlen és az eljárás előrehaladtával mindegyik téglalap kap színt. Az eljárás kiválaszt egy színezetlen téglalapot és megvizsgálja a közepéből indított trajektóriát. E téglalap színét az határozza meg, hogy a belőle indított trajektória milyen, korábban már kiszínezett téglalapot érint.

Jelölje C_1 a legkisebb páros számot, amelyet még nem használtunk a színezésnél. A kiválasztott téglalapnak ideiglenesen a $C_1 + 1$ színt adjuk, és a téglalap közepén levő pontot elkezdjük iterálni. Amíg a trajektória színezetlen téglalapokban halad, e téglalapokat szintén $C_1 + 1$ színnel színezzük. Az iteráció folytatásával a trajektória vagy elér egy már színezett téglalapot, vagy divergál. A további színezésnél az eljárás a következő szabályokat alkalmazza:

(1) A trajektória divergál. Nem tudjuk pontosan ellenőrizni, hogy egy pont pályája valóban a végtelenbe tart-e, így akkor mondjuk, hogy egy trajektória divergál, ha elhagyja a képernyőt (vagyis a vizsgált térrészt) és megfelelő távolságra kerül tőle. Ekkor az összes, $C_1 + 1$ színű téglalapot 1 színűre színezzük át és az eljárás leáll az iterációval.

(2) A trajektória olyan téglalapon halad át, amelyet korábban már érintett és így $C_1 + 1$ színűre színezett. Ha egymás után bizonyos számú lépésen keresztül csak $C_1 + 1$ színű téglalapokban halad a trajektória, akkor az ezután érintett színezetlen vagy $C_1 + 1$ színű téglalapokat már C_1 színnel színezi.

(3) Miközben C_1+1 színnel színezünk, a trajektória egy C_2 színű téglalapon halad át, ahol $C_2 < C_1$, és C_2 páratlan. Ez azt jelenti, hogy találtunk egy másik trajektóriát, amellyel az aktuális trajektória együtt halad bizonyos számú lépésen át, és az algoritmus feltételezi, hogy ez a két trajektória ezután is közel marad egymáshoz és ugyanahhoz az attraktorhoz tart, így az eljárás leáll az iterációval és az összes C_1+1 színű téglalapot C_2 színűre színezzük.

(4) Miközben C_1 színnel színezünk, a trajektória egy C_2 színű téglalapokon halad keresztül bizonyos számú lépésen át, ahol C_2 páratlan, és $C_2 < C_1$. Ebben az esetben nem változtatunk semmit, az iteráció folytatódik, hiszen az attraktor közel lehet más attraktorok medencéjéhez.

(5) A trajektória egy C_3 színű téglalapon halad keresztül, ahol C_3 páros, és $C_3 < C_1$. Az előző esethez hasonlóan ez azt jelenti, hogy találtunk egy másik trajektóriát, amely aktuális trajektóriánkkal bizonyos számú lépésen keresztül együtt halad. Ekkor az eljárás leáll az iterációval és minden C_1 és C_1+1 színű téglalapot C_3+1 színűre színezünk át.

Ha a trajektória számítása közben az (1), (3), (4) és (5) esetek egyike sem áll fenn, akkor mindenképpen a (2) eset áll fenn és végül eljutunk oda, hogy bizonyos számú iteráción keresztül sem színezetlen, sem C_1+1 színű téglalapot nem érintünk. Ez kaotikus attraktor esetén több ezer iterációt is megkíván-hat. Ekkor az eljárás leáll az iterációval és egy újabb színezetlen téglalapot választ, amelyre ugyanezt végrehajtja.

4.2. Az új algoritmus

A *Dynamics* eljárásának számos hátránya van:

- Mivel minden számítást a kétdimenziós vetületen végez, előfordulhat, hogy különböző attraktorokat összevon.
- A gridméretet a képernyő felbontása határozza meg, így a program nem tud elég pontosan számolni.

- Az eljárás a felbontás téglalapjait színezi, így különböző pályák, attraktorok, medencék nem lehetnek tetszőlegesen közel egymáshoz.
- Az algoritmus nem a pályákat követi, csak a felbontás téglalapjainak színezésén alapul és felteszi, hogy ha azonos színű téglalapokban haladunk, akkor egy másik pályát követünk, de ez nem feltétlenül igaz.

Új algoritmusunkkal megpróbáljuk kijavítani ezeket a hibákat.

Legyen n a vizsgált rendszer dimenziója. A vizsgált n dimenziós téglatestet felosztjuk egyenlő részekre és mindegyik téglatest középpontjából indítunk egy trajektóriát. A 2.4. példában definiált diszkrét dinamikus rendszer esetében ez az F leképezés iterációját jelenti, folytonos dinamikus rendszerek (vagyis differenciálegyenletek) esetén pedig a rendszer diszkretizáltját vizsgáljuk.

Ezt a következőképpen definiáljuk:

4.1. Definíció. *Tekintsük a 2.3. példában szereplő közönséges differenciálegyenlet $x(t, t_0, x_0)$ megoldását. Definiáljuk a következő leképezést:*

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

$$x_{n+1} = F(x_n) = x(1, 0, x_n)$$

Ekkor egy differenciaegyenletet kapunk, amely által indukált diszkrét dinamikus rendszert a differenciálegyenlet által indukált folytonos dinamikus rendszer diszkretizáltjának nevezzük.

Folytonos rendszerek esetén tehát először ki kell számítanunk az adott pontból indított megoldást, és ezt kell vennünk a $t = 1$ pillanatban.

Az iteráció során minden lépés után eltároljuk az aktuális pontot és azt, hogy a felosztás mely téglatestébe esik. A téglalapok színezésére számokat használunk. A divergáló trajektóriákat ugyanúgy kezeljük, mint a *Dynamics* eljárása: ha egy trajektória elegendően távol kerül a vizsgált tartománytól, azt mondjuk, hogy a pálya divergál, és a végtelen medencéjének színét kapja.

Amennyiben ez nem teljesül, azaz a pályánk következő pontja a vizsgált tartományba esik, megvizsgáljuk azokat a pontokat, amelyek közel vannak az aktuális ponthoz, vagyis azokat, amelyek a pontot körülvevő 3^n darab téglatest valamelyikébe esnek.

Ha ezek között nincs olyan pont, amely bizonyos számú – nevezzük ezt a számot követési számnak – lépésen keresztül közel marad az aktuális trajektóriához, akkor folytatjuk az iterációt és újra megvizsgáljuk a közeli pontokat. Ha viszont találunk olyan pontot, amelynek iteráltjai bizonyos számú lépésen keresztül közel maradnak az aktuális trajektória megfelelő pontjához (vagyis szomszédos téglatestekbe vagy ugyanabba a téglatestbe esnek), akkor megállunk az iterációval és színt adunk az aktuális trajektóriának attól függően, hogy a közeli pont melyik trajektóriához tartozik:

(1) Ha az aktuális trajektória pontja, akkor ennek a trajektóriának a legkisebb, még nem használt páratlan színt adjuk, és eltároljuk, hogy melyik volt az a pont, amelyikhez először visszatértünk: ettől a ponttól kezdve fogjuk a trajektória pontjait az attraktor színével színezni. Annak érdekében, hogy ugyanazon attraktor különböző, egymástól távol levő részeit ne különböző attraktorokként kezeljük, minden újonnan megtalált attraktort megvizsgálunk: összehasonlítjuk a korábban talált attraktorokkal. Amennyiben elegendően sok egymáshoz közeli pontjuk van, leellenőrizzük, hogy ezek a pontok közel maradnak-e egymáshoz bizonyos számú iteráción keresztül. Ha van ilyen, korábban megtalált attraktor, akkor az aktuális trajektóriának e korábban talált attraktor és medencéje színét adjuk.

(2) Ha nem az aktuális pálya pontja, akkor az aktuális trajektóriának a közeli pont trajektóriájának színét adjuk.

Ezután a pontosabb ábrázolás kedvéért az attraktorban haladva még bizonyos számú pontot kiszámítunk.

Az eljárás előnye, hogy jóval pontosabb, mint a korábbi algoritmus. Ezt az biztosítja, hogy csak olyan pontokat vizsgálunk, amelyek valóban közel esnek az éppen vizsgált trajektóriához, valamint az, hogy csak akkor színezünk át egy trajektóriát egy másik trajektória színére, ha a két pálya valóban

együtt halad több iteráción keresztül. A beosztás finomításával és a követési szám növelésével tetszőleges pontosság elérhető. A *Dynamics* algoritmusa a felosztás minden téglalapjának csak egy színt ad, noha egy téglalapon több trajektória is áthaladhat. Az új algoritmus viszont egy téglalapon belül több színnel is színezhet, ami pontosabb ábrázolást tesz lehetővé. Az új algoritmus előnye az is, hogy a magasabb dimenziós rendszereket is pontosan vizsgálja.

4.3. A program

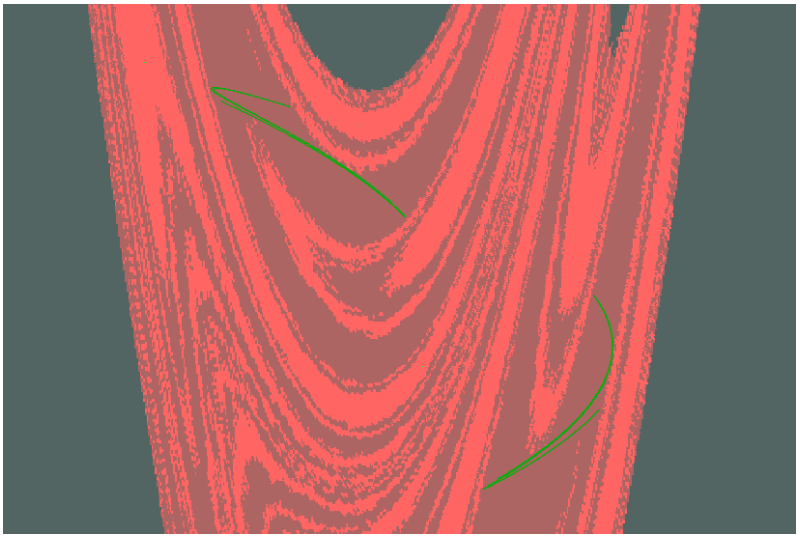
Az algoritmus alapján készült programunk első változata *Mathematicá*-ban készült, a könnyebb használhatóság és a nagyobb sebesség érdekében *Visual C++* nyelvre írtuk át. Az új program számos, a dinamikus rendszerek vizsgálatát megkönnyítő funkcióval rendelkezik. A program indítása után megadjuk a rendszer dimenzióját, a gridméretet, a „követési számot”, valamint a vizsgált térrész kezdő- és végpontjainak koordinátáit. Az egyenleteket egy beépített elemző segítségével értelmezi a program. A számítás befejeztével megjelenik az ábra. Tetszőleges kétdimenziós vetületet tudunk ábrázolni, kiválaszthatjuk, hogy mely attraktorokat és medencéket szeretnénk megjeleníteni, az egér segítségével tudjuk mozgatni és nagyítani az ábrát. A képet két formátumban – egy speciális, a számítás eredményeit megőrző formátumban, illetve EPS fájlként – tudjuk menteni.

4.4. Példák

4.4.1. Az Hénon-leképezés

A 4.1. ábrán a híres Hénon-leképezés [18] különös attraktora látható.

$$x_1' = 1 - x_1^2 + 0{,}475x_2$$
$$x_2' = x_1$$



4.1. ábra. Az Hénon-leképezés

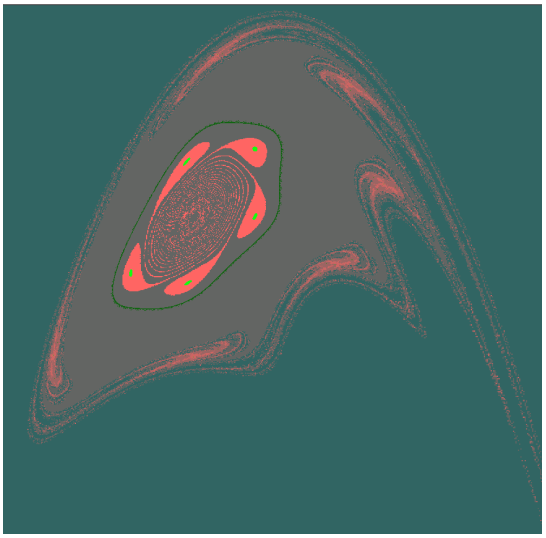
4.4.2. A Bogdanov-leképezés

A 4.2. ábrán a Bogdanov-leképezés attraktorai és azok medencéi láthatók.

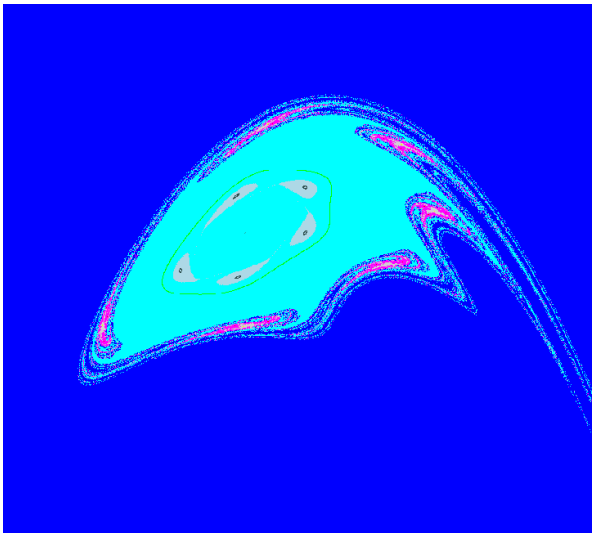
$$x_1' = x_1 + 1{,}0025x_2 + 1{,}44x_1(x_1 - 1) - 0{,}1x_1x_2$$
$$x_2' = 1{,}0025x_2 + 1{,}44x_1(x_1 - 1) - 0{,}1x_1x_2$$

Djellit és Boukemara [8] a Bogdanov-leképezés attraktorait és medencéit pontatlanul adták meg, és erre a rendszerre a *Dynamics* is pontatlan ábrát ad (4.3. ábra). A programunk által készített rajz (4.2. ábra) pontosan mutatja az attraktorokat és medencéiket: az origó körüli öt világoszöld pontból álló attraktor medencéje a *Dynamics* ábrája szerint egy öt szigetből álló halmaz, valójában azonban – ahogy azt a programunk által készített ábra mutatja – a szigetek által közrefogott részben is sűrű az attraktor medencéje. E terület a *Dynamics* rajzán az öt pontból álló attraktor körüli sötétzöld zárt görbe medencéjéhez tartozik.

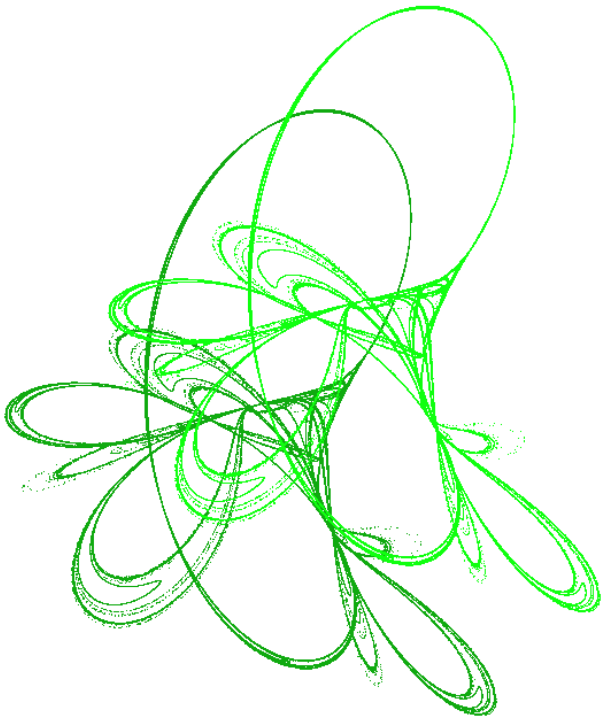
Mivel algoritmusunk a pontok és nem a felbontás téglalapjai alapján szá-



4.2. ábra. A Bogdanov-leképezés



4.3. ábra. A Bogdanov-leképezés (*Dynamics*)



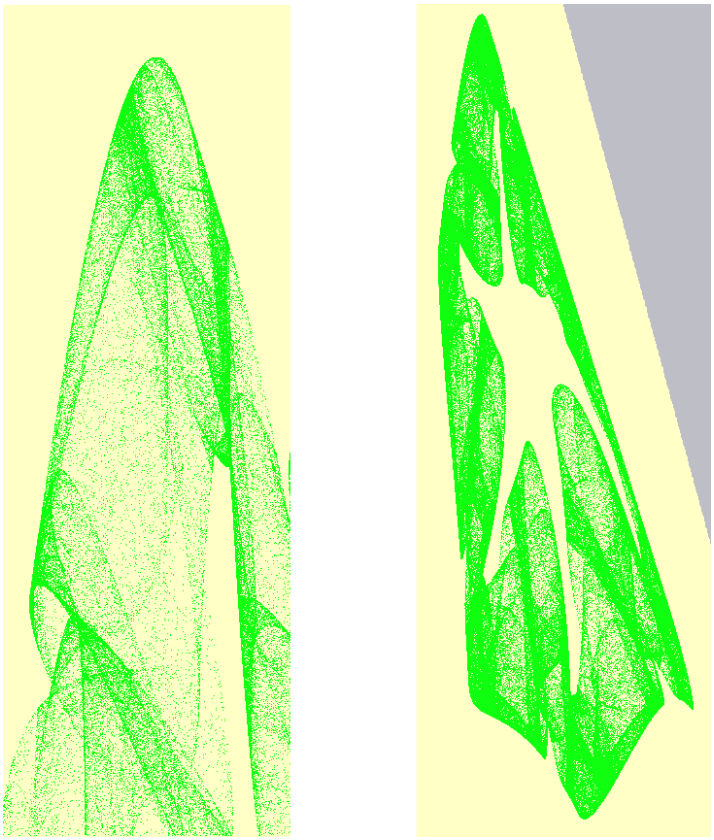
4.4. ábra. Háromdimenziós Tinkerbell-leképezés

mol, felismeri, hogy egy téglalapba különböző medencék pontjai is esnek.

4.4.3. Háromdimenziós Tinkerbell-leképezés

$$
\begin{aligned}
x_1' &= x_1^2 - x_2^2 + 0{,}9x_1 + 0{,}6013x_2 \\
x_2' &= 2x_1x_2 + 2x_1 + 0{,}5x_2 \\
x_3' &= \frac{2x_3}{1 + 16x_3^2}
\end{aligned}
$$

Ez a példa a kétdimenziós vetületek használatának veszélyét mutatja: a *Dynamics* a fenti rendszernek [18] csak egy attraktorát találja meg; valójában két attraktor van, amelyeknek ugyanaz a kétdimenziós vetülete. Programunk mindkét attraktort megtalálja.



4.5. ábra. Maynard Smith ragadozó–zsákmány modellje

4.4.4. Diszkrét ragadozó–zsákmány modell (Maynard Smith)

A 4.5. ábrán az alábbi diszkrét ragadozó–zsákmány modell (Maynard Smith [12]) attraktorának egy része, illetve a teljes attraktor látható.

$$x_1' = 3{,}6545x_1(1 - x_1) - x_1x_2$$
$$x_2' = \frac{1}{0{,}31}x_1x_2$$

Amennyiben csak az attraktor egy részét tartalmazó területet vizsgáljuk, ugyanezekkel a kezdő- és végpontokkal a *Dynamics* nem találja meg az attraktort.

5. fejezet

Egy nemautonóm populációdinamikai modell eventuális stabilitási tulajdonságai

5.1. A modell

A disszertáció harmadik részében egy populációdinamikai modellel foglalkozunk. A modell a Tanganyika-tóban élő különleges halfajok (egy ragadozó és egy növényevő) és a növényevők táplálékául szolgáló növényzet mennyiségének változását írja le. A Tanganyika-tóban – a világon egyedülálló módon – aszimmetrikus fejű ragadozó halak élnek: a halak egy részének bal felé, másik részüknek jobb felé áll a szája. A balra álló szájú halak többnyire balról, a jobb felé álló szájúak pedig jobbról támadják meg áldozatukat. Megfigyelték, hogy a zsákmányhalak megpróbálnak alkalmazkodni a jobbról, illetve balról érkező támadások eloszlásához: egy részük elsősorban a jobbról érkező támadásokra figyel, más részük pedig a balról érkezőkre. Stratégiájuk meglehetősen merev: egy adott példány egész életében ugyanazt a stratégiát követi.

A fent leírt jelenség számos, a növények, valamint a növényevő és ragadozó halak fejlődését leíró matematikai modell megalkotását teszi lehetővé.

A továbbiakban $\mathcal{I}$ és $\mathcal{K}$ két (véges) indexhalmaz, melyek a ragadozók és a növényevők különböző csoportjait jelölik. A fentiekben leírt esetben mindkét halmaz kételemű: a ragadozók két csoportja a jobbra, illetve a balra álló szájú halak csoportja, a zsákmányhalaké pedig a jobbra, illetve a balra figyelő halak csoportja.

Technikai okok miatt nem korlátozzuk a különböző csoportok számát. A következőkben $n_i = n_i(t)$ jelöli az $i \in \mathcal{I}$ típusú növényevő halak számát a t időpillanatban. Hasonlóan, $m_k = m_k(t)$ jelöli a $k \in \mathcal{K}$ csoportba tartozó ragadozó halak számát a t időben.

A növények, a növényevő halak és a ragadozók által alkotott táplálékláncot a Nap látja el energiával. Feltesszük, hogy az energia állandó intenzitással áramlik, valamint azt is feltesszük, hogy a növények összmennyiségének a napenergia hatására történő növekedése időegységenként C. (Ugyanezt a modellt kapjuk, ha azt tesszük fel, hogy a táplálékot kívülről juttatjuk a tóba egyenlő intenzitással.) A növényevő halak a növényeket fogyasztják: feltesszük, hogy egy w súlyú egyed $\alpha(w)$ mennyiséget eszik meg időegység alatt.

Feltesszük, hogy mindegyik $i \in \mathcal{I}$ csoport azonos $w_i = w_i(t)$ súlyú növényevő egyedekből áll, valamint hogy a ragadozók tetszőleges $k \in \mathcal{K}$ csoportjába azonos $u_k = u_k(t)$ súlyú egyedek tartoznak.

Jelölje $K = K(t)$ a növényzet összmennyiségét a t időpontban. A növényekre és a növényevő halakra eddig megadott feltételeinket a következő egyenlettel írhatjuk le:

$$\dot{K} = C - \sum_i n_i \alpha(w_i) K.$$

Feltesszük, hogy az egyéves fejlődési periódus alatt a ragadozó halak nem pusztulnak, azaz $m_k(t)$ konstans, a növényevők száma viszont csökken, hiszen a ragadozók táplálékául szolgálnak.

Feltesszük, hogy a különböző csoportok eloszlása homogén a tóban, a

támadások száma pedig a sűrűségükkel arányos, vagyis egységnyi idő alatt a k típusú ragadozók $\rho n_i m_k$ alkalommal támadják meg az i típusú növényevőket valamilyen ρ konstanssal. Feltesszük, hogy egy ilyen támadás során w súlyú, i típusú növényevőt $\beta^{(i,k)}(w,u)$ valószínűséggel eszik meg egy u súlyú, k típusú ragadozó. Tehát

$$\dot{n}_i = -\sum_k \rho\beta^{(i,k)}(w_i,u_k)n_i m_k.$$

Jelölje $\gamma(e,w)$ azt a súlyt, amellyel egy w súlyú növényevő gyarapodik e mennyiségű növény elfogyasztásával. A súlyt, amelyet egy növényevő egységnyi idő alatt evés nélkül veszít, $\tilde{\gamma}(w)$-vel jelöljük. Így

$$\dot{w}_i = \gamma(\alpha(w_i)K, w_i) - \tilde{\gamma}(w_i).$$

Mivel feltettük, hogy az egyéves fejlődési periódusban a ragadozók nem pusztulnak (csak a súlyuk változik):

$$\dot{m}_k = 0.$$

Jelölje $\delta(e,u)$ azt a súlyt, amellyel egy u súlyú ragadozó gyarapodik e mennyiségű zsákmány elfogyasztásával. A súlyt, amelyet egy ragadozó egységnyi idő alatt evés nélkül veszít, $\tilde{\delta}(w)$-vel jelöljük. Így

$$\dot{u}_k = \delta\left(\sum_i \rho\beta^{(i,k)}(w_i,u_k)w_i n_i m_k, u_k\right) - \tilde{\delta}(u_k).$$

5.2. A modell egyszerűsítése

Feltesszük, hogy a következő függvények lineárisak: $\alpha(w) = \alpha w$, $\gamma(e,w) = \gamma e$, $\delta(e,u) = \delta e$, $\beta^{(i,k)}(w,u) \equiv \beta^{(i,k)}$, $\tilde{\gamma}(w) = \tilde{\gamma} w$ és $\delta(\tilde{u}) = \tilde{\delta} u$. Így az egyenleteink

a következő alakot öltik:

$$\begin{aligned}
\dot{K} &= C - \sum_i n_i \alpha w_i K, \\
\dot{n}_i &= -\sum_k \beta^{(i,k)} n_i m_k \rho, \\
\dot{w}_i &= \gamma \alpha w_i K - \tilde{\gamma} w_i, \\
\dot{u}_k &= \delta \rho \sum_i \beta^{(i,k)} w_i n_i m_k - \tilde{\delta} u_k.
\end{aligned}$$

Vezessük be az $x_i := n_i w_i$ és $y_k = m_k u_k$ változókat a növényevők, illetve a ragadozók összsúlyának jelölésére. Az új változókkal a következő egyenleteket kapjuk:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_i &= \dot{n}_i w_i + n_i \dot{w}_i = \\
&= -\sum_k \beta^{(i,k)} n_i m_k \rho w_i + n_i \gamma \alpha w_i K - n_i \gamma w_i = \\
&= \left[\alpha \gamma K - \tilde{\gamma} - \rho \sum_k \beta^{(i,k)} m_k \right] x_i
\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}
\dot{y}_k &= m_k \dot{u}_k = \\
&= m_k^2 \delta \rho \sum_i \beta^{(i,k)} w_i n_i - m_k \tilde{\delta} u_k \\
&= m_k^2 \delta \rho \sum_i \beta^{(i,k)} x_i - \tilde{\delta} y_k.
\end{aligned}$$

A következőkben csak a növények és a növényevők fejlődésével foglalkozunk. Ha bevezetjük a $\tilde{\beta}^i = \sum_k \rho \beta^{(i,k)} m_k$ jelölést, a következő rendszert kapjuk:

$$\begin{aligned}
\dot{K} &= C - \alpha \left(\sum_i x_i \right) K, \\
\dot{x}_i &= [\alpha \gamma K - (\tilde{\gamma} + \tilde{\beta}^i)] x_i.
\end{aligned}$$

A második egyenletből kapjuk, hogy

$$x_i(t) = x_i(0) \exp\left(-\left(\tilde{\gamma} + \tilde{\beta}^i\right) t\right) \exp\left(\alpha\gamma \int_0^t K\right) \tag{5.1}$$

és

$$\dot{K} = C - \alpha \left(\sum_i x_i(0) \exp\left(-\left(\tilde{\gamma} + \tilde{\beta}^i\right) t\right)\right) K \exp\left(\alpha\gamma \int_0^t K\right).$$

Ha bevezetjük az

$$E := \exp\left(\alpha\gamma \int_0^t K\right)$$

új változót, a következő egyenleteket kapjuk:

$$\dot{E} = \exp\left(\alpha\gamma \int_0^t K\right) \alpha\gamma K = \alpha\gamma E K$$

és

$$\dot{K} = C - \alpha \left(\sum_i x_i(0) \exp\left(-(\tilde{\gamma} + \tilde{\beta}^i)t\right)\right) EK.$$

Vezessük be az

$$A(t) = \alpha \sum_i x_i(0) \exp\left(-\left(\tilde{\gamma} + \tilde{\beta}^i\right) t\right)$$

függvényt. Rendszerünk a következő alakot ölti:

$$\begin{aligned} \dot{K} &= C - AEK, \\ \dot{E} &= \alpha\gamma EK. \end{aligned}$$

Az $\alpha\gamma$ konstans kiküszöbölésére bevezetjük az új $\hat{t}$ időváltozót úgy, hogy

$$t = \hat{\lambda}\hat{t}, \quad L(\hat{t}) := K(\hat{\lambda}\hat{t}), \quad F(\hat{t}) := E(\hat{\lambda}\hat{t}). \tag{5.2}$$

Legyen $\hat{\lambda} := 1/\alpha\gamma$. Így a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\hat{t}}L &= \hat{C} - \hat{A}(\hat{t})F(\hat{t})L(\hat{t}), \\ \frac{d}{d\hat{t}}F &= F(\hat{t})L(\hat{t}), \end{aligned}$$

ahol

$$\hat{C} = \frac{C}{\alpha\gamma}, \ \hat{A}(\hat{t}) = \frac{1}{\gamma}\sum_i x_i(0)\exp\left(-\frac{\tilde{\gamma}+\tilde{\beta}^i}{\alpha\gamma}\hat{t}\right) = \sum_i \mu_i \exp(-\lambda_i t),$$

$$\mu_i := \frac{x_i(0)}{\gamma}, \ \lambda_i := \frac{\tilde{\gamma}+\tilde{\beta}^i}{\alpha\gamma}.$$

Az előbbi egyenletekből a kalapok elhagyásával a

$$\begin{aligned} \dot{L} &= C - AFL, \\ \dot{F} &= FL \end{aligned}$$

rendszert kapjuk. A $G(t) = A(t)F(t)$ jelölés bevezetésével

$$\dot{G}(t) = \dot{A}(t)F(t) + A(t)\dot{F}(t) = \frac{\dot{A}(t)}{A(t)}A(t)F(t) + A(t)F(t).$$

Vezessük be a

$$\lambda(t) := -\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} \tag{5.3}$$

függvényt. Ekkor

$$\begin{aligned} \dot{L} &= C - LG, \\ \dot{G} &= (L - \lambda(t))G \end{aligned} \tag{5.4}$$

a

$$Q := \{(L, G) : L \geq 0, G > 0\}$$

síknegyedben. Egyszerűen látható, hogy Q invariáns az (5.4) egyenletre.

Modellünkben a különböző típusú növényevők össztömegeinek, $x_i(t)$-nek

és a növények mennyiségének, $L(t)$-nek (ld. (5.2)) dinamikáját az (5.1) és az (5.4) egyenletek adják meg. Mint általában a populációdinamikában, e változók hosszú távú viselkedésére vagyunk kíváncsiak. Az első lépés, hogy meghatározzuk az (5.4) rendszer stabilitási tulajdonságait L-re nézve, amit azután felhasználhatunk az x_i vizsgálatára az (5.1) egyenlet segítségével. Megmutatjuk, hogy $L(t)$ bizonyos értelemben egyenletesen tart λ^*-hoz ($t \to \infty$), ahol $\lambda^* := \lim_{t\to\infty} \lambda(t)$.

5.3. A stabilitási tétel

Fő tételünk kimondásához szükségünk van néhány stabilitáselméleti definícióra [15], [22]. Tekintsük az alábbi differenciálegyenlet-rendszert:

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{5.5}$$

ahol $f : \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathbb{R}^n$, ahol $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ és Ω az $\mathbb{R}^n$ nyitott részhalmaza; $0 \in \Omega$. Legyen $\|\cdot\|$ tetszőleges norma $\mathbb{R}^n$-ben. Tegyük fel, hogy minden $t_0 \geq 0$-ra és $x_0 \in \Omega$-ra az (5.5) egyenletnek létezik egyetlen $x(t) = x(t; t_0, x_0)$ megoldása, amely teljesíti az $x(t_0; t_0, x_0) = x_0$ kezdeti feltételt.

5.1. Definíció. $x = 0$ eventuálisan stabil pontja (5.5)*-nek, ha tetszőleges* $\varepsilon > 0$*-ra és* $t_0 \geq 0$*-ra létezik* $S(\varepsilon) \geq 0$ *és* $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ *úgy, hogy* $t_0 \geq S(\varepsilon)$*-ból és* $\|x_0\| < \delta(\varepsilon, t_0)$*-ból következik, hogy* $\|x(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon$ *minden* $t \geq t_0$*-ra. Ha* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *független* t_0*-tól, akkor az eventuális stabilitás* egyenletes.

5.2. Definíció. $x = 0$ globálisan eventuálisan aszimptotikusan stabil pontja (5.5)*-nek, ha* $x = 0$ *eventuálisan stabil, és minden megoldás nullához tart, ha* $t \to \infty$.

5.3. Definíció. $x = 0$ globálisan eventuálisan kvázi-egyenletesen aszimptotikusan stabil pontja (5.5)*-nek, ha bármely kompakt* $\Gamma \subset \Omega$ *halmazra és minden* $\gamma > 0$*-ra létezik* $S(\Gamma, \gamma)$ *és* $T(\Gamma, \gamma) > 0$ *úgy, hogy ha* $x_0 \in \Gamma$, $t_0 \geq S(\Gamma, \gamma)$ *és* $t \geq t_0 + T(\Gamma, \gamma)$, *akkor* $\|x(t; t_0, x_0)\| < \gamma$.

5.4. Definíció. $x = 0$ globálisan eventuálisan egyenletesen aszimptotikusan stabil pontja (5.5)*-nek, ha eventuálisan egyenletesen stabil és globálisan kvázi-egyenletesen aszimptotikusan stabil.*

Legyen $\lambda^* := \min\{\lambda_i : i \in \mathcal{I}\}$. A 5.9. lemmában megmutatjuk, hogy

$$\lim_{t\to\infty} \lambda(t) = \lambda^*.$$

Ezek után kimondhatjuk tételünket:

5.5. Tétel. $(\lambda^*, C/\lambda^*)$ *globálisan eventálisan egyenletesen aszimptotikusan stabil pontja* (5.4)*-nek.*

A tétel bizonyításához szükségünk lesz néhány fogalomra és egy egyszerű tényre a határegyenletek elméletéből.

Az $x^* \in \overline{\Omega}$ pontot az (5.5) egyenlet x megoldása *pozitív határpontjának nevezzük*, ha létezik olyan $\{t_j\}$ sorozat, amelyre $t_j \to \infty$ és $x(t_j) \to x^*$ teljesül $(j \to \infty)$. Az x pozitív határpontjainak halmazát x *pozitív határhalmazának* nevezzük és $\Lambda^+(x)$-szel jelöljük.

Az $f : \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ függvény $a > 0$-val vett *eltoltja:* $f_a(t,x) := f(t+a,x)$. Az f függvényt *aszimptotikusan autonómnak* nevezzük, ha létezik olyan $f^* : \Omega \to \mathbb{R}^n$ függvény, amelyre $f_a(t,x) \to f^*(x)$ $(a \to \infty)$ egyenletesen $\mathbb{R}^+ \times \Omega$ minden kompakt részhalmazán. Az f^* függvényt *határfüggvénynek*, az $\dot{x} = f^*(x)$ egyenletet pedig *határegyenletnek* nevezzük.

Legyen $f(t,x)$ aszimptotikusan autonóm függvény. Az $F \subset \Omega$ halmaz *félig invariáns* az (5.5) egyenletre nézve, ha minden $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^+ \times F$-ra van legalább egy nem folytatható $x^* : (\alpha, \omega) \to \mathbb{R}^n$ megoldása az $\dot{x} = f^*(x)$ határegyenletnek $x^*(t_0) = x_0$-ra úgy, hogy $x^*(t) \in F$ minden $t \in (\alpha, \omega)$-ra.

5.6. Tétel (félig invariancia [19]). *Tegyük fel, hogy f aszimptotikusan autonóm. Ekkor* (5.5) *tetszőleges x megoldására a $\Lambda^+(x) \cap \Omega$ határhalmaz félig invariáns.*

Az 5.5. tétel bizonyításának lépései:

1. Belátjuk, hogy az

$$\begin{aligned} \dot{L} &= C - LG, \\ \dot{G} &= (L - \lambda^*)G \end{aligned} \tag{5.6}$$

   határegyenlet $(\lambda^*, C/\lambda^*)$ egyensúlyi helyzete globálisan aszimptotikusan stabil. Először linearizáljuk a rendszert a (lokális) aszimptotikus stabilitás igazolásához, majd konstruálunk egy Ljapunov-függvényt, és a LaSalle-féle invarianciaelv alkalmazásával igazoljuk, hogy az egyensúlyi helyzet globálisan aszimptotikusan stabil.

2. Belátjuk, hogy $(\lambda^*, C/\lambda^*)$ eventuálisan egyenletesen stabil pontja az eredeti nemautonóm (5.4) egyenletnek.

3. Felhasználva az eventuális egyenletes stabilitást és a félig invarianciáról szóló tételt, bebizonyítjuk, hogy $(\lambda^*, C/\lambda^*)$ globálisan eventuálisan aszimptotikusan stabil pontja (5.4)-nek.

4. Felhasználva az egyenletes stabilitást és a Ljapunov-függvény deriváltjának struktúráját, bebizonyítjuk, hogy $(\lambda^*, C/\lambda^*)$ globálisan eventuálisan kvázi-egyenletesen aszimptotikusan stabil.

Az exponenciális stabilitás rendkívül fontos az alkalmazásokban (pl. az irányításelméletben). Lineáris rendszerek esetében az exponenciális stabilitás ekvivalens az egyenletes aszimptotikus stabilitással, így ez utóbbit tekinthetjük az exponenciális stabilitás nemlineáris rendszerekre való általánosításának. Fő tételünket ezért mondtuk ki *egyenletes* aszimptotikus stabilitásra.

5.4. Bevezető jelölések és lemmák

5.7. Lemma. *Az* (5.6) *határegyenlet* $(\lambda^*, C/\lambda^*)$ *egyensúlyi helyzete aszimptotikusan stabil.*

Bizonyítás. Az $\ell = L - \lambda^*$, $g = G - C\lambda^*$ transzformációk az egyensúlyi helyzetet az origóba viszik, és a következő rendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} \dot{\ell} &= -\frac{C}{\lambda^*}\ell - \lambda^* g - \ell g, \\ \dot{g} &= \frac{C}{\lambda^*}\ell + \ell g. \end{aligned} \tag{5.7}$$

A linearizált egyenlet Jacobi-mátrixának sajátértékei

$$-\frac{C}{2\lambda^*} \pm \sqrt{\left(\frac{C}{2\lambda^*}\right) - C}.$$

Mivel $C > 0$, a $(0,0)$ egyensúlyi helyzet aszimptotikusan stabil. Abban az esetben, ha $\lambda^* > \sqrt{C}/2$, a megoldások oszcillálnak; ha $\lambda^* < \sqrt{C}/2$, a megoldások nem oszcillálnak. □

5.8. Lemma. *Az* (5.6) *határegyenlet* $(\lambda^*, C/\lambda^*)$ *egyensúlyi helyzete globálisan aszimptotikusan stabil a* Q *síknegyedben.*

Bizonyítás. Definiáljuk a

$$V(L,G) = \frac{1}{2}(L-\lambda^*)^2 - C\ln G + \lambda^* G - C + C\ln\frac{C}{\lambda^*} \tag{5.8}$$

Ljapunov-függvényt az $R := \{(L,G) : L \in \mathbb{R}, G > 0\}$ halmazon. Megmutatjuk, hogy V pozitív definit. Írjuk fel a V függvényt

$$V(L,G) = \frac{1}{2}(L-\lambda^*)^2 + \lambda^*\left\{\left(G - \frac{C}{\lambda^*}\right) - \frac{C}{\lambda^*}\left[\ln G - \ln\frac{C}{\lambda^*}\right]\right\}$$

alakban, és vezessük be a

$$h(x) := (x-a) - a[\ln x - \ln a] \qquad (a > 0;\ x > 0)$$

függvényt. Mivel

$$h(a) = 0, \quad h'(a) = \left[1 - \frac{a}{x}\right]_{x=a} = 0, \quad h''(a) = \frac{1}{a} > 0,$$

és $h'(x) \neq 0$ $(x \neq a)$, a h függvény pozitív definit $x = a$ körül $x > 0$ esetén. Ebből következik, hogy V pozitív definit $(\lambda^*, C/\lambda^*)$ körül az R halmazon.

A $\dot{V}_{(5.6)}$ deriváltra

$$\begin{aligned}
\dot{V}(L,G) &= (L-\lambda^*)\dot{L} - C\frac{\dot{G}}{G} + \lambda^*\dot{G} \\
&= (L-\lambda^*)(C-LG) - \left(\frac{C}{G} - \lambda^*\right)(L-\lambda^*)G = \\
&= (L-\lambda^*)\left[C - LG - C + \lambda^* G\right] = \\
&= -(L-\lambda^*)^2 G \leq 0.
\end{aligned}$$

Tetszőleges $(L(0), G(0)) \in Q$ pontra létezik olyan $\mu > 0$, amelyre a $(L(0), G(0))$ pont a $V(L,G) \leq \mu$ szinthalmazban van, hiszen

$$\lim_{G - \ln G \to \infty, |L| \to \infty} V(L,G) = \infty.$$

Mivel a Ljapunov-függvény deriváltja az (5.6) rendszer megoldásai mentén nem pozitív, az $(L(0), G(0))$ pontból indított megoldás minden $t > 0$-ra a $V(L,G) \leq \mu$ szinthalmazon belül marad. A LaSalle-féle invarianciaelvből tudjuk, hogy a megoldás határhalmaza részhalmaza a $\dot{V}_{(5.6)} = 0$ halmaznak, azaz a mi esetünkben az $L = \lambda^*$ egyenesnek. A $(\lambda^*, C/\lambda^*)$ egyensúlyi helyzet kivételével (5.6) megoldásai elmozdulnak az $L = \lambda^*$ egyenesről, így a határhalmaz az egyetlen pontból álló $\{(\lambda^*, C/\lambda^*)\}$ halmaz. □

Amikor azt bizonyítjuk, hogy a $(\lambda^*, C/\lambda^*)$ pont eventuálisan stabil az eredeti nemautonóm (5.4) egyenletre nézve, szükségünk lesz az (5.3)-ban definiált λ függvény következő tulajdonságára:

5.9. Lemma. *Az* (5.3)*-ben definiált* λ *függvény csökkenő és* λ^**-hoz tart* ($t \to \infty$).

Bizonyítás. Nyilvánvalóan

$$\lambda(t) = -\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = \frac{\sum_{i=1}^{3} \lambda_i \mu_i e^{-\lambda_i t}}{\sum_{i=1}^{3} \mu_i e^{-\lambda_i t}} = \frac{\sum_{i=1}^{3} \lambda_i \mu_i e^{-(\lambda_i - \lambda^*)t}}{\sum_{i=1}^{3} \mu_i e^{-(\lambda_i - \lambda^*)t}} \to \lambda^*.$$

Legyen $f := -\dot{A}$ és $g := A$, így $\lambda = f/g$, ahol f és g csökkenő, pozitív függvények. Differenciálással kapjuk, hogy

$$\dot{\lambda} = \left(\frac{f}{g}\right)^{\cdot} = \frac{\dot{f}g - f\dot{g}}{g^2}.$$

Ellenőrizzük a számláló előjelét:

$$\dot{f}(t)g(t) = -\sum_{i,j=1}^{3} \lambda_i^2 \mu_i \mu_j e^{-(\lambda_i+\lambda_j)t}, \quad f(t)\dot{g}(t) = -\sum_{i,j=1}^{3} \lambda_i \lambda_j \mu_i \mu_j e^{-(\lambda_i+\lambda_j)t},$$

$$\begin{aligned} \dot{f}(t)g(t) - f(t)\dot{g}(t) &= -\sum_{i,j=1}^{3} \left(\lambda_i^2 - \lambda_i\lambda_j\right) \mu_i \mu_j e^{-(\lambda_i+\lambda_j)t} \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} \left(\lambda_i - \lambda_j\right)^2 \mu_i \mu_j e^{-(\lambda_i+\lambda_j)t} \leq 0, \end{aligned}$$

ami igazolja az állítást. □

Az (5.8) függvény deriváltja nem jeltartó a nemautonóm (5.4) rendszer megoldásai mentén, tehát (5.8) erre a rendszerre nézve nem Ljapunov-függvény. Ennek ellenére – ahogy a következő állítás mutatja – „majdnem”-Ljapunov-függvényként használható.

5.10. Lemma. *Létezik olyan M konstans, amelyre*

$$V(L(t), G(t)) \leq V(L(0), G(0)) + M \qquad (t \geq 0) \tag{5.9}$$

teljesül (5.4) *minden megoldására. Ezenkívül minden $\varepsilon > 0$-ra létezik $\tau(\varepsilon) \geq 0$ úgy, hogy ha $t_0 \geq \tau(\varepsilon)$, akkor* (5.4) *minden megoldására teljesül a*

$$V(L(t), G(t)) \leq V(L(t_0), G(t_0)) + \varepsilon \qquad (t \geq t_0) \tag{5.10}$$

egyenlőtlenség.

Bizonyítás. Az (5.8) Ljapunov-függvény (5.4) szerinti deriváltja

$$\begin{aligned}
\dot{V}(L,G)_{(5.4)} &= (L-\lambda^*)\dot{L} - \dot{G}/G + \lambda^*\dot{G} = \qquad (5.11)\\
&= (L-\lambda^*)(C-GL) - C(L-\lambda(t)) + \lambda^*(L-\lambda(t))G =\\
&= (L-\lambda^*)[C-GL-C] + C(\lambda(t)-\lambda^*)\\
&\quad +\lambda^*[(L-\lambda^*)-(\lambda(t)-\lambda^*)]\\
&= (L-\lambda^*)(-GL+\lambda^*G) + C(\lambda(t)-\lambda^*) - \lambda^*(\lambda(t)-\lambda^*)G\\
&= -(L-\lambda^*)^2G + (\lambda(t)-\lambda^*)(C-\lambda^*G)\\
&\leq -(L-\lambda^*)^2G + (\lambda(t)-\lambda^*)C.
\end{aligned}$$

Az előző becslést felhasználva kapjuk:

$$\begin{aligned}
V(L(t),G(t)) &= V(L(0),G(0)) + \int_0^t \dot{V}(L(s),G(s))ds\\
&= V(L(0),G(0)) - \int_0^t (L(s)-\lambda(s))^2G(s)ds\\
&\quad + \int_0^t (\lambda(s)-\lambda^*)(C-L(s)G(s))dt \leq\\
&\leq V(L(0),G(0)) + C\int_0^t (\lambda(s)-\lambda^*)ds \leq\\
&\leq V(L(0),G(0)) + C\int_0^\infty (\lambda(s)-\lambda^*)ds.
\end{aligned}$$

Mivel $\lambda(t) \searrow \lambda^*$ exponenciálisan ($t \to \infty$), az utolsó becslésben szereplő integrál véges, ami igazolja a lemma első állítását.

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
V(L(t),G(t)) &= V(L(t_0),G(t_0)) + \int_{t_0}^t \dot{V}(L(s),G(s))ds\\
&\leq V(L(t_0),G(t_0)) + C\int_{t_0}^\infty (\lambda(s)-\lambda^*)ds.
\end{aligned}$$

Ebben az esetben az utolsó integrál tetszőlegesen kicsivé tehető, ami igazolja a lemma második állítását. □

5.11. Lemma. $(\lambda^*, C/\lambda^*)$ *eventuálisan egyenletesen stabil pontja a nemautonóm* (5.4) *rendszernek.*

Bizonyítás. $\rho > 0$-ra jelölje $C(\rho)$ és $D(\rho)$ a $(\lambda^*, C/\lambda^*)$ középpontú, ρ sugarú körvonalat, illetve körlapot. Azt kell belátnunk, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra és $t_0 \geq 0$-ra létezik $S(\varepsilon) \geq 0$ és $\delta(\varepsilon) > 0$ úgy, hogy $t_0 \geq S(\varepsilon)$ és $(L, G) \in D(\delta(\varepsilon))$ esetén $(L(t), G(t)) \in D(\varepsilon)$ minden $t \geq t_0$-ra.

Legyen $\varepsilon > 0$ adott. Mivel (5.8) pozitív definit$(\lambda^*, C/\lambda^*)$ körül,

$$m(\varepsilon) := \min \{V(L, G) : (L, G) \in C(\varepsilon)\} > 0$$

teljesül és létezik $\delta(\varepsilon) > 0$ úgy, hogy $V(L, G) < m(\varepsilon)/2$, feltéve, hogy $(L, G) \in D(\delta(\varepsilon))$. Az 5.10. lemma szerint ha $t_0 \geq \tau(m(\varepsilon)/2)$ és $(L(t_0), G(t_0)) \in D(\delta(\varepsilon))$, akkor

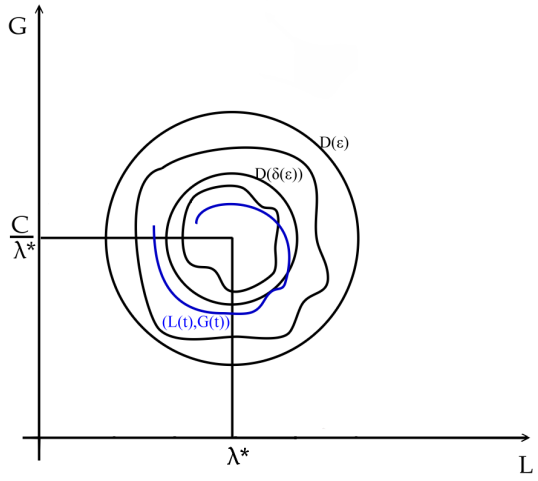
$$V(L(t), G(t)) \leq V(L(t_0), G(t_0)) + \frac{m(\varepsilon)}{2} < m(\varepsilon),$$

ahonnan $(L(t), G(t)) \in D(\varepsilon)$ adódik $t \geq t_0$-ra. Ez azt jelenti, hogy $S(\varepsilon) := \tau(m(\varepsilon)/2)$-vel és $\delta(\varepsilon)$-nal teljesül az eventuális egyenletes stabilitás definíciója. □

5.12. Lemma. $(\lambda^*, C/\lambda^*)$ *globálisan eventuálisan aszimptotikusan stabil pontja az eredeti nemautonóm* (5.4) *rendszernek.*

Bizonyítás. Be kell látnunk, hogy (5.4) minden megoldása $(\lambda^*, C/\lambda^*)$-hoz tart $t \to \infty$ esetén. Tekintsük az (5.4) egyenlet egy tetszőleges (L, G) megoldását. Az 5.10. lemma első állítása szerint a megoldás prekompakt, így pozitív határhalmaza, Λ^+ nem üres. Megmutatjuk, hogy $\Lambda^+ = \{(\lambda^*, C/\lambda^*)\}$.

Tegyük fel, hogy ez nem igaz, azaz létezik $(\lambda^*, C/\lambda^*)$-tól különböző (L_0, G_0) pontja a határhalmaznak. Az 5.6. tétel szerint a Λ^+ halmaz félig invariáns az (5.6) határegyenletre nézve. De $(\lambda^*, C/\lambda^*)$ globálisan aszimptotikusan stabil egyensúlyi helyzete az (5.6) egyenletnek, és Λ^+ kompakt, így $(\lambda^*, C/\lambda^*) \in \Lambda^+$.



5.1. ábra. Eventuális egyenletes stabilitás

Legyen $\varepsilon_0 > 0$ olyan, hogy $(L_0, G_0) \notin D(\varepsilon_0)$ teljesül, és vegyük az $\varepsilon_0/2$-höz az eventuális egyenletes stabilitás 5.1. definíciója szerint tartozó $S(\varepsilon_0/2) \geq 0$, $\delta(\varepsilon_0/2) > 0$ számokat.

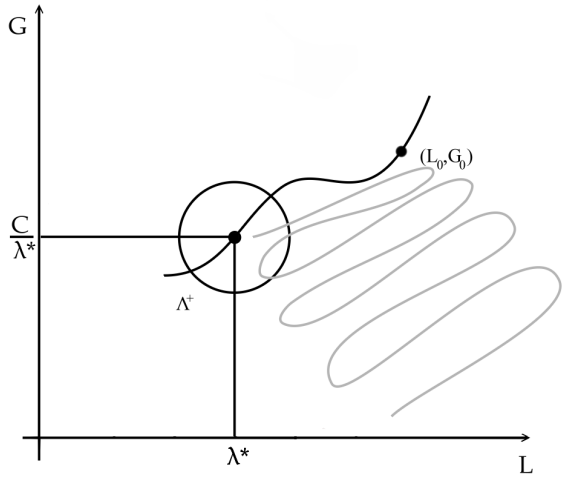
Mivel $(\lambda^*, C/\lambda^*) \in \Lambda^+$, az $(L(t_*), G(t_*))$ pontnak $D(\delta(\varepsilon_0/2))$-be kell esnie valamely $t_* > S(\varepsilon_0/2)$-re, és így $(L(t), G(t))$ $D(\varepsilon_0/2)$-ben marad minden $t \geq t_*$-ra. Egyúttal viszont nagy t értékekre $(L(t), G(t))$ tetszőlegesen közel kerül (L_0, G_0)-hoz, ami ellentmondás (ld. 5.2. ábra). □

5.5. Az 5.5. tétel bizonyítása

Vezessük be a

$$d(L, G) := \sqrt{(L - \lambda^*)^2 + \left(G - \frac{C}{\lambda^*}\right)^2}$$

jelölést. Be kell látnunk, hogy a $(\lambda^*, C/\lambda^*)$ pont globálisan eventuálisan kvázi-egyenletesen aszimptotikusan stabil, vagyis azt, hogy minden $K > 0$-ra és $\gamma > 0$-ra létezik $S(K, \gamma) \geq 0$ és $T(K, \gamma) > 0$ úgy, hogy $t_0 \geq S(K, \gamma)$-ból és



5.2. ábra. Trajektória és határhalmaza

$(1 + |\ln G_0|)\, d(L_0, G_0) \leq K$-ból következik

$$d\left((L(t; t_0, L_0, G_0), G(t; t_0, L_0, G_0))\right) < \gamma \tag{5.12}$$

minden $t \geq t_0 + T(K, \gamma)$-ra. Mivel az eventuális egyenletes stabilitást már beláttuk, (5.12) helyett elég igazolnunk, hogy létezik olyan $T_* = T_*(K, \gamma) > 0$, amelyre

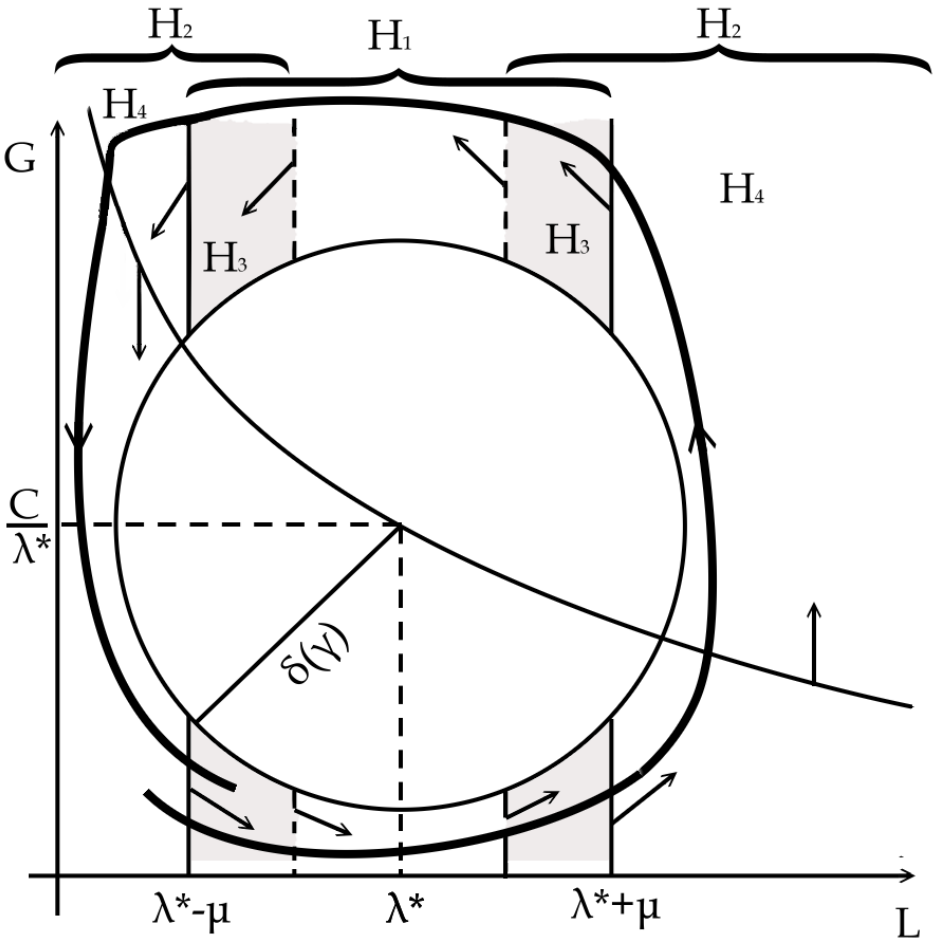
$$d\left((L(t_0 + T_*; t_0, L_0, G_0), G(t_0 + T_*; t_0, L_0, G_0))\right) < \delta(\gamma) \tag{5.13}$$

teljesül, ahol $\delta(\gamma)$ a γ-hoz az eventuális egyenletes stabilitás szerint tartozó δ (ld. 5.1. definíció).

Tegyük fel, hogy ez nem teljesül, azaz létezik $\overline{K} > 0$ és $\overline{\gamma}$ úgy, hogy minden $S \geq 0$-ra és $T > 0$-ra létezik $t_0 \geq S$ és olyan (L_0, G_0), amelyre $(1 + |\ln G_0|)\, d(L_0, G_0) \leq \overline{K}$ teljesül úgy, hogy

$$d\left((L(t; t_0, L_0, G_0), G(t; t_0, L_0, G_0))\right) \geq \delta(\overline{\gamma}) \text{ minden } t \in [t_0, t_0 + T]\text{-re.} \tag{5.14}$$

A következőkben megoldások alatt csakis a fenti tulajdonsággal rendelkező megoldásokat értjük.



5.3. ábra. A $H_1, \ldots, H_4$ halmazok

Ahhoz, hogy ellentmondásra jussunk, az (5.8)-ban definiált Ljapunov-függvényt fogjuk használni. Egyszerűen látható, hogy megadhatók olyan szigorúan monoton növekvő, 0-ban eltűnő $a, b : [0, \infty) \to (0, \infty)$ függvények,

amelyekre

$$a\left((1+|\ln G|)\,d(L,G)\right) \le V(L,G) \le b\left((1+|\ln G|)\,d(L,G)\right) \tag{5.15}$$

teljesül a felső félsíkon. (5.4) tetszőleges megoldására vezessük be a

$$v(t) = v(t;t_0,L_0,G_0) := V\left(L(t;t_0,L_0,G_0), G(t;t_0,L_0,G_0)\right)$$

jelölést. (5.15) és az 5.10. lemma szerint

$$v(t) \le b(\overline{K}) + M \qquad (t \ge t_0) \tag{5.16}$$

teljesül (5.4) minden megoldására.

A V függvény (5.4) szerinti deriváltja, (5.11) nem negatív definit, így megkülönböztetjük Q részhalmazait aszerint, hogy $\dot{V}$ nagy vagy kicsi. Tetszőleges $\mu > 0$-ra legyen

$$\begin{aligned} H_{\le}(\mu) \;:=\; \{(L,G) \in Q :& d(L,G) \ge \delta(\overline{\gamma}),\ (1+|\ln G|)\,d(L,G) \\ & \le a^{-1}\left(b(\overline{K}) + M\right), |L-\lambda^*| \le \mu\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_{\ge}(\mu) \;:=\; \{(L,G) \in Q :& d(L,G) \ge \delta(\overline{\gamma}),\ (1+|\ln G|)\,d(L,G) \\ & \le a^{-1}\left(b(\overline{K}) + M\right), |L-\lambda^*| \ge \mu\}, \end{aligned}$$

és tekintsük a

$$\begin{aligned} &H_1(\mu) := H_{\le}(\mu), \quad H_2(\mu) := H_{\ge}\left(\frac{\mu}{2}\right), \\ &H_3(\mu) := H_{\le}(\mu) \cap H_{\ge}\left(\frac{\mu}{2}\right),\ H_4(\mu) := H_{\ge}(\mu) \end{aligned}$$

halmazokat (ld. az 5.3. ábrát).

A bizonyításnál felhasználjuk, hogy egy trajektória nem maradhat túl hosszú ideig a H_1 halmazban. Ennek igazolásához alulról becsüljük az $|\dot{L}|$

függvényt.

$$\begin{aligned}|\dot{L}| = |C - GL| &= |\lambda^* \left(\frac{C}{\lambda^*} - G\right) - G(L - \lambda^*)| \\ &\geq \lambda^* |\frac{C}{\lambda^*} - G| - |G(L - \lambda^*)| \\ &\geq \lambda^* |\frac{C}{\lambda^*} - G| - \left(\frac{C}{\lambda^*} + \delta(\overline{\gamma})\right) \mu > 0\end{aligned}$$

elegendően kis μ esetén. Így létezik $\kappa_1 > 0$, amelyre

$$|\dot{L}| \geq \kappa_1 > 0 \qquad ((L, G) \in H_1)\,. \tag{5.17}$$

Amikor egy megoldás trajektóriája H_2-ben halad, a Ljapunov-függvény gyorsan csökken a megoldás mentén: (5.15)-ből kapjuk, hogy

$$a^{-1}(b(\overline{K}) + M) \geq (1 + |\ln G|)\, d(L, G) \geq |\ln G| \delta(\overline{\gamma}),$$

így

$$G \geq \exp[-\frac{a^{-1}(b(\overline{K}) + M)}{\delta(\overline{\gamma})}].$$

(5.11)-ből a

$$\dot{V}(L, G, t) \leq -\frac{\mu^2}{4} \exp[-\frac{a^{-1}(b(\overline{K}) + M)}{\delta(\overline{\gamma})}] + C(\lambda(t) - \lambda^*) \quad ((L, G) \in H_2,\ t \geq 0)$$

becslést kapjuk, amiből következik, hogy létezik olyan $\bar{t}$ és $\kappa_2 > 0$, amelyre

$$\dot{V}(L, G, t) \leq -\kappa_2 \qquad (t \geq \bar{t},\ (L, G) \in H_2). \tag{5.18}$$

(5.15)-ből és az 5.10. lemmából következik, hogy minden megoldás trajektóriája prekompakt, így létezik $\kappa_3 > 0$, amelyre

$$|\dot{L}(t)| \leq \kappa_3 \qquad (t \geq t_0).$$

Adott $T > 0$-ra és $t_0 \geq \bar{t}$-re, tekintsünk egy $t \mapsto (L(t), G(t))$ megoldást,

amely rendelkezik az (5.14) tulajdonsággal. Ekkor létezik egy

$$t_0 \le s_1 < t_1 < s_2 < \cdots < t_{n-1} < s_n < t_n \le t_0 + T$$

sorozat úgy, hogy

$$\text{ha } s_i < t < t_i, \text{ akkor } (L(t), G(t)) \in H_4 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\text{ha } t \in [t_0, t_0 + T] \setminus (\cup_{i=1}^{n} [s_i, t_i]), \text{ akkor } (L(t), G(t)) \in H_1. \tag{5.19}$$

A bizonyítás fennmaradó részének fő ötlete, hogy v legalább egy konstanssal csökken minden $[s_i, t_i]$ intervallumon és $n = n(T) \to \infty$, amint $T \to \infty$. Mivel v korlátos változású a $[t_0, \infty)$ intervallumon, ez azt jelenti, hogy T nem lehet tetszőlegesen nagy, ami ellentmond $\overline{K}$, $\overline{\gamma}$ létezésének. A bizonyítás befejezéséhez ezt az ötletet fejtjük ki részletesen.

Mivel $H_4 \subset H_2$, (5.15)-ből, az 5.10. lemmából és (5.18)-ból kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} (t_i - s_i) \le \frac{b(\overline{K}) + M}{\kappa_2} =: \overline{T}.$$

Ezenkívül (5.17)-ből és (5.19)-ből adódik, hogy $s_i - t_{i-1} \le 2\mu/\kappa_1$ minden $i = 2, 3, \ldots, n$-re. A két legutóbbi becslésből következik, hogy

$$n = n(T) \ge \frac{T - \overline{T}}{\frac{2\mu}{\kappa_1}} \to \infty \quad (T \to \infty). \tag{5.20}$$

Másrészt, az

$$[x]_+ := \max\{x, 0\}, \quad [x]_- := \max\{-x, 0\}, \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

jelöléseket használva

$$-\int_{t_0}^{t_0+T} [\dot{v}(t)]_- \, dt \le -\sum_{i=2}^{n} \int_{t_{i-1}}^{s_i} [\dot{v}(t)]_- \, dt \le \int_{(L(t),G(t)) \in H_3} \dot{v}(t) \, dt$$
$$\le -2(n-2)\kappa_2 \frac{\mu}{2\kappa_3}.$$

Ebből következik, hogy

$$\begin{aligned} -b(\overline{K}) - M \leq v(t_0+T) - v(t_0) &= \int_{t_0}^{t_0+T} ([\dot{v}(t)]_+ - [\dot{v}(t)]_-)\, dt \\ &\leq M - 2(n-2)\kappa_2 \frac{\mu}{\kappa_3} \to -\infty \quad (T \to \infty). \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy T nem lehet tetszőlegesen nagy, ami ellentmond $\overline{K}$, $\overline{\gamma}$ létezésének. Ez az ellentmondás bizonyítja az 5.5. tételt. □

5.13. Megjegyzés. Thieme [20] kidolgozott egy módszert, amely elegendő feltételeket ad arra, hogy az eredeti aszimptotikusan autonóm rendszer megoldásainak aszimptotikus viselkedése megyezzen a határegyenlet megoldásainak aszimptotikus viselkedésével.

Castillo-Chávez és Thieme megadta e módszer egy következményét [4, 2.2. következmény], amely a mi esetünkben is alkalmazható, és biztosítja azt, hogy (5.4) minden *korlátos* megoldása az (5.6) rendszer egy egyensúlyi helyzetéhez tartson $t \to \infty$ esetén. Más szóval, az 5.12. lemma állítása következik az 5.10. lemmából és ebből a következményből. A dolgozatban mégis megadtuk az 5.12. lemma egy közvetlen bizonyítását annak érdekében, hogy a dolgozat a fenti következmény ismerete nélkül is olvasható legyen.

Az 5.5. tétel bizonyításának fő ötlete, hogy az (5.6) határegyenlethez tartozó Ljapunov-függvényt használjuk az eredeti aszimptotikusan autonóm (5.4) egyenlet stabilitási tulajdonságainak igazolásához. Ezt a módszert Yoshizawa [23] és LaSalle [16] vezette be, később Artstein [1] fejlesztette tovább. Például az 5.10. lemmából és [1] 8.3. tételéből következik, hogy (5.4) minden megoldása tart az $\{L = \lambda^*\}$ egyeneshez.

Fontos azonban hangsúlyozni azt, hogy a felsorolt eredmények nem használhatók a $(\lambda^*, C/\lambda^*)$ pont eventuális egyenletes stabilitási tulajdonságainak igazolására.

5.6. A modell módosítása

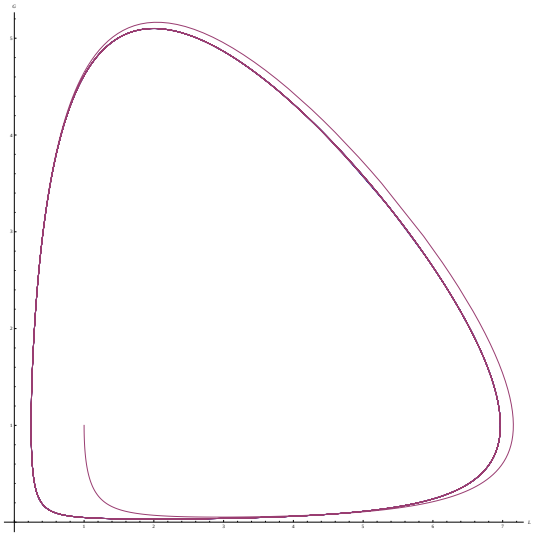
A fentiekben leírt rendszer nem az egyetlen lehetőség az 5.1. szakaszban bemutatott populáció modellezésére. Biológiailag különösen érdekes az az eset, amikor a növényzet magára hagyva exponenciális törvény szerint szaporodna. A növényzet fejlődésére vonatkozó egyenlet így a következő:

$$\dot{K} = (C - \sum_i n_i \alpha(w_i))K.$$

Az 5.2. szakaszban ismertetett egyszerűsítéshez hasonlóan a rendszer az

$$\begin{aligned} \dot{L} &= (C - G)L, \\ \dot{G} &= (L - \lambda(t))G \end{aligned} \tag{5.21}$$

alakra hozható, így egy aszimptotikusan autonóm Lotka–Volterra-egyenlethez jutunk, melynek vizsgálatán jelenleg is dolgozunk. A számítógépes vizsgála-



5.4. ábra. (5.22) egy pályájának képe *Mathematicá*-val

tok azt sugallják, hogy itt a határpont helyett egy határciklus jelenik meg

(ld. 5.4. ábra). Az (5.22) rendszer határegyenlete, a

$$\begin{aligned} \dot{L} &= (C-G)L, \\ \dot{G} &= (L-\lambda^*)G \end{aligned} \tag{5.22}$$

rendszer a klasszikus Lotka–Volterra-egyenlet [2] egy speciális esete, így megoldásai a $W(L,G) = G^C L^\lambda e^{-(G+L)}$ függvény szintvonalai. Sejtésünk az, hogy az (5.22) egyenlet minden megoldásának határhalmaza a $W(x,y)$ függvény egy-egy szintvonala, azaz a határegyenlet egy-egy megoldása.

Összefoglalás

A disszertáció három különböző problémával foglalkozik: két populációdinamikai modellel és egy, a dinamikus rendszerek attraktorait, illetve azok medencéit meghatározó és megjelenítő algoritmussal, illetve az az alapján készült programmal.

Az értekezés a szerző következő publikációin alapul:

- Dénes, A., Neimark–Sacker bifurcation in a discrete dynamical model of population genetics, *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, Proc. 8th Coll. Qualitative Theory of Diff. Equ.*, No. 6. (2008), 1–10.
- Dénes, A., Hatvani, L., Stachó, L. L., Eventual stability properties in a non-autonomous model of population dynamics, *Nonlinear Analysis* **73** (2010) 650–659.
- Dénes, A., Makay, G., Attractors and basins of dynamical systems, *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, No. 20. (2011), 1–11.

A disszertáció 2. fejezetében a dinamikus rendszerekkel kapcsolatos legfontosabb alapfogalmakat definiáljuk.

A 3. fejezetben Tusnády Gábor egy diszkrét populációdinamikai modelljét vizsgáljuk. Ez a négydimenziós nemlineáris differenciaegyenlet-rendszer az ivarsejtek eloszlásának változását írja le egy populációban egy lókusz és négy allél esetén a szelekció és a mutáció hatásának figyelembevételével. Tusnády Gábor számítógépes kísérletezéssel talált olyan eseteket, amelyekben a

rendszer attraktora nem egy pont (vagyis az eloszlások között nem áll be dinamikus egyensúly), hanem periodikus pálya, sőt, valamilyen kaotikus halmaz. Tusnády Gábor azt kérdezte, hogy törvényszerű-e ez a jelenség, vagy esetleg csak a numerikus közelítés hibájából adódik. A rendszert először a 4. fejezetben ismertetett attraktorszámító program segítségével vizsgáltuk. Az egyik paraméter értékének változtatásakor kapott ábrák szuperkritikus Neimark–Sacker-bifurkációra utalnak: a rendszer stabil fixpontjából zárt görbe keletkezik, míg a fixpont instabillá válik. A fejezet fő eredményében, a 3.5. tételben belátjuk, hogy a rendszer valóban Neimark–Sacker-bifurkáción megy keresztül. Egy adott p paraméter értékének változtatásával a Jacobi-mátrix komplex sajátértékpárja áthalad a komplex sík origó körüli egységkörén. Ennek a komplex sajátértékpárnak megfelel a fixpont kétdimenziós instabil sokasága. Az invariáns zárt görbe ezen az instabil sokaságon jelenik meg. Annak igazolásához, hogy e paraméterértéknél bifurkáció történik, be kell látnunk, hogy a rendszer teljesít bizonyos nemelfajulási feltételeket. [14] alapján ismertetjük az eljárást, amellyel igazolhatjuk a rendszer nemelfajulását. Először kétdimenziós rendszerekre mondjuk ki az általános Neimark–Sacker-bifurkációról szóló tételt. Magasabb dimenziós rendszereknél lényegében ugyanaz történik, mint két dimenzióban: létezik egy kétdimenziós invariáns sokaság, amelyen a rendszer bifurkáción megy át, a sokaságon kívül pedig a rendszer viselkedése „triviális”, mert ott nincs bifurkáció. A disszertációban ismertetünk egy módszert, amelynek segítségével – a Jacobi-mátrix és transzponáltja sajátértékeit felhasználva – a rendszert levetíthetjük a kritikus sajátaltérbe. Végül az eljárás lépéseit követve belátjuk a 3.5. tétel állítását.

A 4. fejezetben egy új, dinamikus rendszerek attraktorainak és azok medencéinek ábrázolására szolgáló algoritmust írunk le, amely a korábbiaknál pontosabb számítások alapján működik. Új algoritmusunk a *Dynamics* programcsomag *Basins and Attractors* eljárásának továbbfejlesztése, ezért elsőként ezt az eljárást mutatjuk be, majd ismertetjük az új algoritmust és az algoritmus alapján készült programot.

Az algoritmus alapelve a következő: a vizsgált n dimenziós térrészt felosztjuk egyenlő nagyságú n dimenziós téglatestekre, és mindegyik közepéből elin-

dítunk egy trajektóriát. Minden lépésben megvizsgáljuk az aktuális ponthoz közel eső pontokat (vagyis azon pontokat, amelyek az aktuális ponttal azonos vagy szomszédos téglatestbe esnek), és amennyiben találunk olyan trajektóriát, amellyel aktuális pályánk bizonyos számú lépésen keresztül együtt halad (azaz megfelelő pontjaik azonos vagy szomszédos téglatestekbe esnek), akkor színt adunk a vizsgált pályának: ha egy korábbi trajektóriába ütköztünk, akkor annak a színét kapja az aktuális trajektória is, ha pedig önmagába ütközött, akkor új, addig nem használt színt kap a pálya. Eltároljuk, hogy melyik volt az a pont, amelyikhez először visszatértünk: ettől a ponttól kezdve fogjuk a trajektória pontjait az attraktor színével színezni.

A fejezet végén néhány híres diszkrét dinamikus rendszer attraktorait bemutató ábrával szemléltetjük a program működését, és egy nevezetes példával illusztráljuk, hogy algoritmusunk olyan esetekben is pontos attraktorokat és medencéket tud rajzolni, amelyekben a korábbi algoritmusok pontatlan képeket szolgáltattak.

Djellit és Boukemara [8] az

$$x_1' = x_1 + 1{,}0025x_2 + 1{,}44x_1(x_1 - 1) - 0{,}1x_1x_2$$
$$x_2' = 1{,}0025x_2 + 1{,}44x_1(x_1 - 1) - 0{,}1x_1x_2$$

Bogdanov-leképezés attraktorait és medencéit pontatlanul adták meg, és erre a rendszerre a *Dynamics* is pontatlan ábrát ad (4.3. ábra). A programunk által készített rajz (4.2. ábra) pontosan mutatja az attraktorokat és medencéiket: az origó körüli öt világoszöld pontból álló attraktor medencéje a *Dynamics* ábrája szerint egy öt szigetből álló halmaz, valójában azonban – ahogy azt a programunk által készített ábra mutatja – a szigetek által közrefogott részben is sűrű az attraktor medencéje. E terület a *Dynamics* rajzán az öt pontból álló attraktor körüli zöld zárt görbe medencéjéhez tartozik.

Az 5. fejezet egy populációdinamikai rendszerrel foglalkozik, amely a Tanganyika-tóban élő két halfaj (egy növényevő és egy ragadozó), valamint a növényevők táplálékául szolgáló növények mennyiségének változását írja le. A modell két részből áll: év közben egy differenciálegyenlet-rendszer írja le a

fejlődést, míg minden év végén egy diszkrét dinamikus rendszer írja le a halak szaporodását. Az év közbeni fejlődést leíró nemautonóm differenciálegyenletrendszer – egyszerűsítések után – a következő alakú:

$$\begin{aligned} \dot{L} &= C - LG, \\ \dot{G} &= (L - \lambda(t))G, \end{aligned}$$

ahol $\lambda : (0, \infty) \to (0, \infty)$ adott folytonos függvény, $\lim_{t\to\infty} \lambda(t) = \lambda^* > 0$ létezik. A fenti rendszernek nincs egyensúlyi helyzete, az

$$\begin{aligned} \dot{L} &= C - LG, \\ \dot{G} &= (L - \lambda^*)G \end{aligned}$$

határegyenletnek viszont a $(\lambda^*, C/\lambda^*)$ pont egyensúlyi helyzete. Ilyen esetben az ún. eventuális stabilitási tulajdonságokat szokták vizsgálni. Fő eredményünk a következő:

5.5. Tétel. $(\lambda^*, C/\lambda^*)$ *globálisan eventuálisan egyenletesen aszimptotikusan stabil pontja a fenti rendszernek.*

Röviden szólva ez azt jelenti, hogy a fázissík bármely pontjából indított megoldás tart a $(\lambda^*, C/\lambda^*)$ ponthoz, éspedig bizonyos értelemben egyenletesen a kiindulási állapotokra nézve.

Az 5.5. tétel bizonyításához a következő lemmákon keresztül jutunk:

5.7. Lemma. *Az* (5.6) *határegyenlet* $(\lambda^*, C/\lambda^*)$ *egyensúlyi helyzete aszimptotikusan stabil.*

Először linearizáljuk a rendszert a (lokális) aszimptotikus stabilitás igazolásához, majd megkonstruáljuk a

$$V(L, G) = \frac{1}{2}(L - \lambda^*)^2 - C \ln G + \lambda^* G - C + C \ln \frac{C}{\lambda^*}$$

Ljapunov-függvényt, és a LaSalle-féle invarianciaelv alkalmazásával igazoljuk, hogy az egyensúlyi helyzet globálisan aszimptotikusan stabil.

5.8. Lemma. *Az* (5.6) *határegyenlet* $(\lambda^*, C/\lambda^*)$ *egyensúlyi helyzete globálisan*

aszimptotikusan stabil a $Q := \{(L, G) : L \geq 0, G > 0\}$ *síknegyedben.*

5.10. Lemma. *Létezik olyan* M *konstans, amelyre*

$$V(L(t), G(t)) \leq V(L(0), G(0)) + M \qquad (t \geq 0)$$

teljesül (5.4) *minden megoldására. Ezenkívül minden* $\varepsilon > 0$*-ra létezik* $\tau(\varepsilon) \geq 0$ *úgy, hogy ha* $t_0 \geq \tau(\varepsilon)$*, akkor* (5.4) *minden megoldására teljesül a*

$$V(L(t), G(t)) \leq V(L(t_0), G(t_0)) + \varepsilon \qquad (t \geq t_0)$$

egyenlőtlenség.

5.11. Lemma. $(\lambda^*, C/\lambda^*)$ *eventuálisan egyenletesen stabil pontja a nemautonóm* (5.4) *rendszernek.*

5.12. Lemma. $(\lambda^*, C/\lambda^*)$ *globálisan eventuálisan aszimptotikusan stabil pontja az eredeti nemautonóm* (5.4) *rendszernek.*

Summary

The thesis investigates three different problems: two population dynamical models and an algorithm for calculating and representing attractors and basins of dynamical systems as well as a computer program based on this algorithm.

The dissertation is based on the following papers of the author:

- Dénes, A., Neimark–Sacker bifurcation in a discrete dynamical model of population genetics, *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, Proc. 8th Coll. Qualitative Theory of Diff. Equ.*, No. 6. (2008), 1–10.
- Dénes, A., Hatvani, L., Stachó, L. L., Eventual stability properties in a non-autonomous model of population dynamics, *Nonlinear Analysis* **73** (2010) 650–659.
- Dénes, A., Makay, G., Attractors and basins of dynamical systems, *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, No. 20. (2011), 1–11.

In the second chapter of the thesis we define some of the most important basic concepts from the theory of dynamical systems.

In Chapter 3 we investigate a population dynamical model initiated by Gábor Tusnády. This four-dimensional nonlinear system of difference equations describes the change of distribution of gametes in a population in the case of one locus and four alleles considering selection and mutation. During

computer experiments Gábor Tusnády found parameter values with which the attractor of the system was not one point (i.e. no dynamical equilibrium arises amongst the distributions), but a periodic orbit, or even a chaotic set. Gábor Tusnády asked whether this phenomenon could be established mathematically or it was just caused by the errors of numerical approximation. First we used the program for calculating attractors described in Chapter 4 to examine the system. The figures we obtained changing one of the parameters imply the presence of a supercritical Neimark–Sacker bifurcation: a closed curve arises from the stable fixed point of the system, while the fixed point becomes unstable. In the main result of the section, Theorem 3.5, we show that the system indeed undergoes a Neimark–Sacker-bifurcation. When we change the value of a given parameter, a complex pair of eigenvalues of the Jacobian passes through the unit circle. To this complex pair of eigenvalues corresponds a two-dimensional unstable manifold of the fixed point. The invariant closed curve appears on this manifold. To prove that a bifurcation occurs at this parameter value we have to verify that the system satisfies some genericity conditions. Using monograph [14] we delineate the procedure that we can use to prove the nondegenericity of the system. First we formulate the Neimark–Sacker bifurcation theorem for two-dimensional systems. In the case of systems with dimension higher than 2 essentially the same takes place: there exists a two-dimensional invariant manifold on which the system exhibits the bifurcation, while the behaviour off the manifold is "trivial", as no bifurcation occurs there. In the thesis we delineate a method with the help of which – using the eigenvalues of the Jacobian and its transpose – we can "project" the system into the critical eigenspace. Finally, following the steps of the procedure we prove Theorem 3.5.

In Chapter 4 we describe a new algorithm for representing attractors and basins of dynamical systems which calculates more precisely then the previous similar algorithms. Our new algorithm is an improvement of the procedure *Basins and Attractors* of *Dynamics*, that is why we present this procedure first, then we delineate the new algorithm and the program realizing the algorithm.

The principle of the algorithm is the following: we divide the n-dimensional domain under examination into equal n-dimensional boxes and from the center of each box we start a trajectory. In each step we examine the points near to our actual point (i.e. the points that fall into the same grid box or neighbouring grid boxes), and if we find a trajectory such that its iterates remain near to the iterates of our actual point for a given number of steps (i.e. the corresponding points fall into the same grid box or neighbouring grid boxes), we give a colour to the trajectory: if we have encountered a previous trajectory, then we give its colour to the actual trajectory; if the trajectory encountered itself, then it is given a new, previously not used colour. We save the point to which we returned first: from this point on we colour the points of the trajectory with the colour of the attractor.

At the end of the chapter we demonstrate the use of the program with figures representing the attractors of some well-known discrete dynamical systems and we give an example to show that our algorithm is able to draw precise attractors and basins even in cases where previous algorithms provide an imprecise picture.

Djellit and Boukemara [8] have given imprecisely the attractors and basins of the Bogdanov map

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + 1.0025x_2 + 1.44x_1(x_1 - 1) - 0.1x_1x_2 \\ x_2' &= 1.0025x_2 + 1.44x_1(x_1 - 1) - 0.1x_1x_2, \end{aligned}$$

and also *Dynamics* gives an imprecise picture for this system (Figure 4.3). The figure made by or program (Figure 4.2) shows the attractors and their basins precisely: according to the figure made by *Dynamics* the basin of the attractor formed by five light green points around the origin consists of five islands around the five points, however – as it is shown on the figure made by our program – this basin is also dense in the area inside the five islands. In the figure of *Dynamics* this area belongs to the basin of the green closed curve around the five points.

Chapter 5 deals with a population dynamical system which describes the

change of the amount of two fish species (a carnivore and a herbivore) living in Lake Tanganyika and the amount of the plants eaten by the herbivores. The model consists of two parts: the development during one year is described by a system of differential equations, while the reproduction of the fish at the end of each year is described by a discrete dynamical system. The non-autonomous system of differential equations describing the development during the year – after a series of transformations – has the following form:

$$\begin{aligned} \dot{L} &= C - LG, \\ \dot{G} &= (L - \lambda(t))G, \end{aligned}$$

where $\lambda : (0, \infty) \to (0, \infty)$ is a given continuous function and $\lim_{t\to\infty} \lambda(t) = \lambda^* > 0$. This system does not have an equilibrium, but its limit equation

$$\begin{aligned} \dot{L} &= C - LG, \\ \dot{G} &= (L - \lambda^*)G \end{aligned}$$

has the fixed point $(\lambda^*, C/\lambda^*)$. In such cases usually the so-called eventual stability properties are studied. Our main result is the following:

Theorem 5.5. *The point* $(\lambda^*, C/\lambda^*)$ *is an eventually uniform-asymptotically stable point of* (5.4).

In short this means that a solution started from any point of the phase space tends to the point $(\lambda^*, C/\lambda^*)$ in some sense uniformly.

The proof of Theorem 5.5 is obtained through the following lemmas:

Lemma 5.7. *The equilibrium point* $(\lambda^*, C/\lambda^*)$ *of the limit equation* (5.6) *is asymptotically stable.*

First we linearize the system to prove (local) asymptotic stability, then we construct the Lyapunov function

$$V(L, G) = \frac{1}{2}(L - \lambda^*)^2 - C \ln G + \lambda^* G - C + C \ln \frac{C}{\lambda^*}$$

and using LaSalle's invariance principle we prove that the equilibrium is

globally asymptotically stable.

Lemma 5.8. *The equilibrium point* $(\lambda^*, C/\lambda^*)$ *of the limit equation* (5.6) *is asymptotically stable in the large on quadrant* $Q := \{(L, G) : L \geq 0, G > 0\}$.

Lemma 5.10. *There is a constant* M *such that*

$$V(L(t), G(t)) \leq V(L(0), G(0)) + M \qquad (t \geq 0)$$

holds for all solutions of (5.4). *Moreover, for every* $\varepsilon > 0$ *there exists a* $\tau(\varepsilon) \geq 0$ *such that if* $t_0 \geq \tau(\varepsilon)$ *then every solution of* (5.4) *satisfies the inequality*

$$V(L(t), G(t)) \leq V(L(t_0), G(t_0)) + \varepsilon \qquad (t \geq t_0).$$

Lemma 5.11. $(\lambda^*, C/\lambda^*)$ *is an eventually uniformly stable point of the non-autonomous system* (5.4).

Lemma 5.12. $(\lambda^*, C/\lambda^*)$ *is an eventually asymptotically stable point of the original non-autonomous system* (5.4) *in the large.*

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Dr. Hatvani László professzor úrnak, akinek hatására és tanácsára másodéves koromban differenciálegyenletekkel kezdtem foglalkozni. Ezúton is szeretném megköszönni azt a sok segítséget és értékes tanácsot, amit az elmúlt években kutatómunkám során, illetve a disszertáció elkészítéséhez tőle kaptam. Nagy megtiszteltetés számomra, hogy doktoranduszként az ő irányításával dolgozhattam.

Köszönettel tartozom társszerzőimnek, Dr. Makay Géza docens úrnak és Dr. Stachó László docens úrnak. Nagy öröm és megtiszteltetés volt együtt dolgozni velük az általuk felvetett érdekes problémákon.

Szeretnék köszönetet mondani Dr. Krisztin Tibor professzor úrnak a tudományos tevékenységemhez nyújtott támogatásáért.

Köszönetet mondok Dr. Karsai János docens úrnak a tőle kapott segítségért, a cikkek megírásához nyújtott hasznos tanácsaiért.

A dolgozat elkészítése során az OTKA K75517 pályázata és a TÁMOP-4.2.2/08/1/2008-0008 pályázat támogatott.

Tárgymutató

$\alpha(w)$, 43
$\beta^{(i,k)}(w,u)$, 44
$\tilde{\beta}^i$, 45
$\gamma(e,w)$, 44
$\tilde{\gamma}(w)$, 44
$\delta(e,u)$, 44
$\tilde{\delta}(w)$, 44
$\lambda(t)$, 47
λ^*, 48
ρ, 44

$a(0)$, 27
$A(t)$, 46
allél, 9
aszimptotikusan autonóm függvény, 49
attraktor, 8

Basins and Attractors, 32
bifurkáció, 15
bifurkációs érték, 15

C, 43
centrális sokaság, 22

$d(L,G)$, 56
dinamikus rendszer, 5
Dynamics, 31

$E(t)$, 46
érzékeny függés a kezdeti adatoktól, 7

$F(t)$, 47
félig invariáns halmaz, 49
fitness, 10

$G(t)$, 47
gén, 9
genotípus, 9

$H_1, \ldots, H_4$, 59
határegyenlet, 49
határfüggvény, 49

$\mathcal{I}$, 43
invariáns halmaz, 7

$K(t)$, 43
$\mathcal{K}$, 43
káosz, 7
kritikus érték, 15
kromoszóma, 9

$L(t)$, 47
lókusz, 9

$m_k(t)$, 43
medence, 8
mutáció, 10

Neimark–Sacker-bifurkáció, 15

pozitív határhalmaz, 49
pozitív határpont, 49

Q, 47

rekombináció, 11

stabilitás
- eventuális, 48
- globális eventuális aszimptotikus, 48
- globális eventuális egyenletes aszimptotikus, 49
- globális eventuális kvázi-egyenletes aszimptotikus, 48

szelekció, 10

topologikus ekvivalencia, 15
topologikus tranzitivitás, 7
Tusnády-modell, 12

$u_k(t)$, 43

$v(t)$, 59
$V(L, G)$, 51

$w_i(t)$, 43
$W(L, G)$, 64

$x_i(t)$, 45

$y_k(t)$, 45

Irodalomjegyzék

[1] Artstein, Z., *Limiting equations and stability of non-autonomous ordinary differential equations*, Appendix to J. P. LaSalle, The Stability of Dynamical Systems, Regional Conference Series in Applied Mathematics, vol. 25, SIAM, Philadelphia, 1976.

[2] Bacaër, N., *A Short History of Mathematical Population Dynamics*, Springer-Verlag, London, 2011.

[3] Brauer, F., Castillo-Chávez, C., *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*, Springer-Verlag, New York, 2001.

[4] Castillo-Chavez, C., Thieme, H. R., *Asymptotically autonomous epidemic models*, in: O. Arino, D. Axelrod, M. Kimmel and M. Langlais (Eds.), Mathematical Population Dynamics: Analysis and Heterogeneity, vol. 1: Theory of Epidemics, Wuerz Publishing Ltd., Winnipeg, Canada, 1995, pp. 33–50.

[5] Dénes, A., Neimark–Sacker bifurcation in a discrete dynamical model of population genetics, *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, Proc. 8th Coll. Qualitative Theory of Diff. Equ.*, No. 6. (2008), 1–10.

[6] Dénes, A., Hatvani, L., Stachó, L. L., Eventual stability properties in a non-autonomous model of population dynamics, *Nonlinear Analysis* **73** (2010) 650–659.

[7] Dénes, A., Makay, G., Attractors and basins of dynamical systems, *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, No. 20. (2011), 1–11.

[8] Djellit, I., Boukemara, I., Bifurcations and Attractors in Bogdanov Map, *Vis. Math.* **6**, No. 4 (2004)

[9] Hofbauer, S., Sigmund, K., *Evolutionary Games and Population Dynamics*, Cambridge University Press, 1998.

[10] Hoppensteadt, F. C., Peskin, C. S., *Mathematics in Medicine and the Life Sciences*, Springer-Verlag, New York, 1992.

[11] Hatvani, L., Toókos, F., Tusnády, G., A mutation-selection-recombination model in population genetics, *Dynam. Systems Appl.* **8** (2009), No. 2, 335–361.

[12] Koçak, H., *Differential and difference equations through computer experiments*, Springer-Verlag, 1989.

[13] Kulenović, M. R. S., Merino, O., *Discrete Dynamical Systems and Difference Equations with Mathematica*, Chapman & Hall/CRC, 2002.

[14] Kuznetsov, Y. A., *Elements of applied bifurcation theory*, Springer-Verlag, 1998.

[15] Lakshmikantham, V., Leela, S., *Differential and Integral Inequalities, vol. I, Mathematics in Science and Engineering*, vol. 55-I, Academic Press, New York, 1969.

[16] LaSalle, J. P., Stability theory for ordinary differential equations, *J. Differential Equations*, **4** (1968) 57–65.

[17] Mboko, S. K., Kohda, M., Hori, M., Asymmetry of mouth-opening of a small herbivorous cichlid fish *Telmatochromis temporalis* in lake Tanganyika, *Zoological Science*, **15** (1998) 405–408.

[18] Nusse, H. E., Yorke, J. A., *Dynamics: Numerical Explorations*, Springer-Verlag, 1998.

[19] Rouche, N., Habets, P., Laloy, M., *Stability Theory by Liapunov's Direct Method*, Applied Mathematical Sciences, vol. 22, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.

[20] Thieme, H. R., Asymptotically autonomous differential equations in the plane, *20th Midwest ODE Meeting (Iowa City, IA, 1991), Rocky Mountain J. Math.* **24** (1994) 351–380.

[21] Tusnády G., Mutáció és szelekció, *Magyar Tudomány* **42** (1997), 792-805.

[22] Yoshizawa, T., *Stability Theory by Liapunov's Second Method*, The Mathematical Society of Japan, Tokyo, 1966.

[23] Yoshizawa, T., *Asymptotic behavior of solutions of a system of differential equations*, Contributions to Differential Equations, 1 (1963) 371–387.

[24] Wiggins, S., *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer-Verlag, New York, 2003.