

B 1999

JÓZSEF ATTILA TUDOMÁNYEGYETEM  
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

RENDEZETT ALGEBRÁK DISZTRIBUTIV  
BŐVÍTÉSEI

LENKEHEGYI ATTILA  
doktori értekezése

SZEGED

1981



|                                                                                                                                                                          |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| BEVEZETÉS . . . . .                                                                                                                                                      | 1  |
| I. ALAPFOGALMAK ÉS JELÖLÉSEK                                                                                                                                             |    |
| 1.§. Univerzális algebrai alapfogalmak és jelölések . . .                                                                                                                | 4  |
| 2.§. Ekvivalens kategóriák . . . . .                                                                                                                                     | 6  |
| 3.§. Parciálisan rendezett halmazok. Priestley-dualitás<br>0,1-disztributív hálókra . . . . .                                                                            | 7  |
| II. PARCIÁLISAN RENDEZETT ALGEBRÁKRÓL                                                                                                                                    |    |
| 1.§. A parciálisan rendezett algebra fogalma . . . . .                                                                                                                   | 11 |
| 2.§. Részalgebrák, direkt- és szubdirekt szorzatok . .                                                                                                                   | 11 |
| 3.§. Homomorf és Q-homomorf képek, kongruenciák és fak-<br>toralgebrák . . . . .                                                                                         | 12 |
| 4.§. Rendezett algebrák varietásai. Rendezésprimál al-<br>gebra által generált varietások. $\beta$ -karakterishti-<br>kus algebra és Priestley- $\beta$ -terek . . . . . | 16 |
| 5.§. Szabad algebrák. Varietások axiomatizálása . . . .                                                                                                                  | 19 |
| III. A HÁLÓSZERŰ RENDEZÉSPRIMÁL ALGEBRÁK ALAPTÉTELE                                                                                                                      |    |
| 1.§. Normális szubdirekt hatványok . . . . .                                                                                                                             | 23 |
| IV. DUALITÁSELMÉLET RENDEZÉSPRIMÁL ALGEBRÁKRA                                                                                                                            |    |
| 1.§. Priestley- $\beta$ -reprezentáció . . . . .                                                                                                                         | 31 |
| 2.§. A dualitáselmélet főtétele . . . . .                                                                                                                                | 34 |
| 3.§. A dualitás "megfordítása" . . . . .                                                                                                                                 | 43 |
| 4.§. A disztributív bővítés kongruenciahálójára . . . . .                                                                                                                | 54 |
| 5.§. Egy hálóelméleti alkalmazás . . . . .                                                                                                                               | 56 |
| V. A DISZTRIBUTIV BŐVÍTÉSEK DIREKT DEFINÍCIÓJA                                                                                                                           |    |
| 1.§. A definíció motivációi . . . . .                                                                                                                                    | 58 |
| 2.§. A definíció kimondása és megalapozása . . . . .                                                                                                                     | 59 |
| KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS . . . . .                                                                                                                                            | 63 |
| IRODALOM . . . . .                                                                                                                                                       | 64 |



## BEVEZETÉS

Ebben a részben rövid áttekintést adunk a dolgozat témájáról, a már eddig nagy részben feltárt motiváló rokon területről. A szükséges definíciókat, fogalmakat itt nem adjuk meg, ezek megtalálhatók az I. fejezetben.

Az univerzális algebrában fontos szerepet töltenek be a primál algebrák. Ezek végesek, és az alaphalmazon értelmezett bármely végesváltozós függvény előáll az algebra polinomjaként. A. I. Foster a következő tételt találta az általuk generált varietásra: izomorfizmus eltekintve, a kérdéses varietás éppen a generáló algebra összes Boole-bővítéséből áll. Ez az eredmény az 50-es évek elején született. Később újabb bizonyításokat is nyertek, ezek egyike a normális szubdirekt hatvány fogalmát és B. Jónsson kongruenciadisztributív varietásokra vonatkozó nevezetes lemmáját használja. Vizsgálatunk megfelelő része az analóg esetben épp ezt az utat fogja követni. Később ezen eredményt Tah-Kai Hu továbbfejlesztette, és megmutatta, hogy primál algebra által generált varietás ekvivalens a Boole-algebrák kategóriájával, sőt, csak ezek a varietások ekvivalensek az utóbbiakkal. Végeredményben tehát jellemezte a Boole-algebrák kategóriájával ekvivalens varietásokat.

A primál algebra legklasszikusabb példája a kételemű Boole-algebra. Ha elhagyjuk a komplementumképzés műveletét, akkor már nem lesz minden függvény polinom, hiszen minden alapművelet monoton a hálóműveletek által meghatározott természetes rendezésre nézve, így polinomként legfeljebb csak monoton függvényeket nyerhetünk. Algebránk olyan, hogy a lehető legtöbbet nyújtja, amit az utóbbi körülmény egyáltalán lehetővé tesz: minden monoton függvény előállítható polinomként /a 0 és az 1 kijelölése nullváltozós műveletként van felvéve/. Az ilyen tulajdonságu, parciális rendezéssel ellátott algebrákat fogjuk rendezésprimálnak nevezni. Mivel a Boole-algebrák több szempontból úgy viszonyulnak a véges halmazokon értelmezett tetszőleges függvényekhez, mint a korlátos disztributív hálók valamely adott parciális rendezésre nézve monoton függvényekhez, kézen-

fekvő volt arra gondolni, hogy a korlátos disztributív hálók kategóriája úgy viszonyul a rendezésprimál algebrák által generált rendezett varietásokhoz, mint a Boole-algebrák a primál-generált varietásokhoz. Habár ez teljes általánosságban végül is nem igaz, egy fontos esetben az analógia teljes, nevezetesen hálószerű rendezés mellett.

Legyen adva egy rendezésprimál algebra és tekintsük ennek egy normális szubdirekt hatványát. A kiindulási algebra felszálló részhalmazainak az említett szubdirekt hatványban szereplő kiválasztási függvények szerinti teljes inverzképei egy korlátos disztributív hálót alkotnak /az indexhalmaz részhalmazhálójának  $0,1$ -részhálóját/. Vegyük a nyert disztributív háló Priestley-féle reprezentációs terét; ennek az eredeti algebrába történő összes monoton, folytonos leképezései egy normális szubdirekt hatványt alkotnak, melybe az előbbi normális szubdirekt hatvány természetes módon beágyazható. Hálószerű rendezés esetén a beágyazás szürjektív lesz, azaz izomorfizmus. A most megkonstruált, folytonos és monoton leképezésekből álló algebra nem más, mint az érkezési algebrának a fentebb említett disztributív hálóval való bővítése. Tehát ha a rendezés hálószerű, a normális szubdirekt hatványok mind disztributív bővítések és természetesen megfordítva is. Majd Jónsson lemmáját alkalmazva kiderül, hogy hálószerű rendezésprimál algebra által generált rendezett varietás éppen a generátoralgebra normális szubdirekt hatványaiból áll /természetesen izomorfia erejéig/. A két eredményt egybevetve látjuk, hogy a kérdéses varietás lényegében végül is a generátoralgebra összes disztributív bővítéseivel kimerül. A hálószerűség feltétele nem hagyható el, mert egyéb rendezés esetén egy rendezésprimál algebra nem feltétlenül egyszerű, így az általa generált varietásban vannak töle kevesebb elemű nemtriviális algebrák, viszont disztributív bővítés ilyent sohasem eredményezhet. Nyitott kérdés még, hogy a hálószerűség gyengíthető-e, például összefüggőséget véve helyette /amit, mint látni fogjuk, mindenképpen meg kell követelni/.

Az eddig nyert eredmény birtokában /amelyet a hálószerű rendezésprimál algebrák elmélete alaptételének nevezünk/ hozzá lehet fogni az ide kapcsolódó említett kategóriák ekvivalenciájának vizsgálatához. Követve Tah-Kai Hu primál algebrákra vonatkozó eredménye bizonyítását, igazolni tudjuk, hogy az ekvivalencia valóban fennáll. A fordított té-

telt azon feltétel mellett tudjuk igazolni, hogy a lédéses rendezett varietásnak a disztributív hálók kategóriájával való ekvivalenciája olyan, hogy a szűrjeaktivitás megőrződik mindkét irányban. /Ez hálószerű rendezésprimál algebra által generált varietásoknál fennáll./ Nincs még tisztázva, hogy ez a feltétel elhagyható-e; annyit tudunk, hogy a disztributív hálóról a kérdéses varietás irányában a szűrjeaktivitásörzés áll. Mégis, a szimmetria kedvéért a feltételt az előbbi alakban fogalmaztuk meg.

Az utolsó fejezetben megvizsgáljuk, adható-e a disztributív bővítésekre olyan definíció, amely csak a bővitendő algebrára és a "bővítő" disztributív hálóra hivatkozik. Ilyen definíciót sikerül megadni, és az kielégíti azt az alapvető követelményt, hogy triviális rendezésű algebra és Boole-féle disztributív háló esetén átmeny a Boole-bővítés analóg definíciójába,

Említést kell tennünk arról, hogy az értekezés eredményeinek nagy részét más módszerekkel és felfogásban B.A. Davey, D. Duffus, R.W. Quackenbush és I. Rival 1978-ban /lásd [5]/ és R.W. Quackenbush 1979-ben /lásd [25]/ bebizonyították. Tételeiket közönséges varietásokra igazolták, a különbség azonban nem lényeges, mert a hálószerű rendezés esetén - feltéve, hogy a megfelelő hálóműveletek polinómok a generátoralgebrán - tulajdonképpen elég a rendezés törlésével keletkező varietást tekinteni. Teljesen újnak tűnik a disztributív bővítés említett un. direkt definíciója. Ezenkívül egyszerűbbnek látszik a disztributív bővítések kongruenciahálójának általunk adott leírása /ami viszont Tah-Kai Hu [45] módszerét követi/. Egy hálóelméleti alkalmazást is megadunk: belátjuk, hogy rendezésfunkcionálisan teljes háló által generált varietás azon elemei, melyeknek a generátorháló "0,1-részhálója", mind a kiindulási háló disztributív bővítéseivel izomorfok. Ez is könnyen következik - néhány észrevétellel kiegészítve - az említett szerzők eredményeiből.

Az irodalomjegyzékben olyan tételeket is feltüntetünk, melyre konkrét hivatkozás nem történik, de amelyek a témához kapcsolódnak.

## I. FEJEZET

### ALAPFOGALMAK ÉS JELÖLÉSEK

#### 1. Univerzális algebrai alapfogalmak és jelölések

Az általánosan használt standard fogalmakat sem itt, sem a további fejezetekben nem definiáljuk, velük kapcsolatban Grätzer [13]-re utalunk. A kevésbé standard, de az egész dolgozatban gyakran használt fogalmakat e fejezetben, az esetenként fellépőket pedig helyben adjuk meg.

Algebrákat nyomtatott gót nagybetűkkel jelölünk, melyeket indexekkel is elláthatunk szükség esetén /utóbbi vonatkozik minden egyéb fajta jelölésre is/:  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \dots, \mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1, \dots$  stb. A megfelelő nyomtatott latin nagybetű az algebra tartóhalmazát jelenti. Ezen betűfajtát használjuk majd algebraosztályok esetén is, ez a kettősség nem fog zavart eredményezni. A műveletjelek rendszerint  $f, g, \dots, f_1, g_1, \dots$  lesznek. Ha azonban direktzorzatokkal dolgozunk, akkor ezekkel az  $\sigma$  elemeket jelöljük inkább /azaz a kérdéses kiválasztási függvényeket; itt  $f(i)$  jelenti  $f$ -nek az indexhalmaz  $i$  helyén felvett értékét, másszóval "i-edik komponensét"/; ilyenkor műveletjelekként /indexes/ görög kisbetűket használunk:  $\mu, \mu_1, \dots, \nu, \nu_1, \dots$  stb. Általában  $\theta, \theta_1, \dots, \phi, \phi_1, \dots$  szolgál kongruenciák jelölésére. Leképezésekre általában helyben vezetünk be szimbólumokat.

Ha  $F$  az  $A$  halmazon értelmezett műveletek egy halmaza, akkor - amennyiben  $F = \{f, g, h, \dots\}$  - a keletkező algebrát egyaránt jelölheti  $(A; F)$  vagy  $(A; f, g, h, \dots)$ .

További nevezetes jelölések:

$\text{Con}(\mathcal{A})$  : az  $\mathcal{A}$  algebra összes kongruenciáinak halmaza /vagy hálójá; jelölésben itt nem teszünk különbséget/;

$\text{Su}(\mathcal{A})$  : az  $\mathcal{A}$  algebra összes részalgebráinak halmaza /vagy hálójá/;

$\text{Aut}(\mathcal{A})$  : az  $\mathcal{A}$  algebra összes automorfizmusainak halmaza /vagy csoportja/;

$H(K)$  : a  $K$  algebraosztály elemeinek összes homomorf képeiből álló osztály;

$S(K)$  : a  $K$  algebraosztály elemeinek összes részalgebráival izo-

morf algebraák osztálya /ha csak tényleges részalgebraikat tekintünk, akkor  $S_r(K)$ -t írunk/;

$P(K)$  : a  $K$  algebraosztály elemeinek összes lehetséges direkt-szorzataival izomorf algebraák osztálya /itt is az  $r$  alsóindex jelzi a "szigorú" direktszorzatok esetét/;

$P_S(K)$  : hasonló, mint előbb, de mindenütt a szubdirekt szót véve a direkt helyett;

$P_U(K)$  :  $K$  elemeinek összes lehetséges ultraszorzataiból álló osztály;

$I(K)$  :  $K$  elemeinek összes izomorf példányai alkotta osztály.

Ha  $V$  varietás,  $n$  pedig valamely tetszőleges számosság, akkor  $F_V(n)$  jelenti az  $n$ -rangu  $V$ -szabad algebraát. Természetesen  $F_V(n)$ -re akkor is hivatkozhatunk, ha  $V$  nem varietás, de a kérdéses szabad algebra létezik.

Feltesszük, hogy a szerplő műveletek mind végesváltozósak, továbbá algebraosztályokat kizárólag hasonló /azonos szignaturájú, műveletjelkészletű/ algebraiból képezünk. Döntő fontosságú lesz a következő

**1.1 Tétel** /Jónsson lemmája, lásd [10]/ Ha  $K$  olyan algebraosztály, hogy  $HSP(K)$  kongruenciadisztributív, akkor utóbbi varietás szubdirekt irreducibilis elemei mind  $HSP_U(K)$ -ban vannak, következésképpen  $HSP(K) = IP_S HSP_U(K)$ .

**1.2 Definíció** /Normális szubdirekt hatvány/ Legyen  $\tilde{U} \leq U^I$  az  $U$  algebra egy szubdirekt hatványa /algebraik között a  $\leq$  jel a részalgebra-viszonyt fogja jelenteni/.  $\tilde{U}$ -ot  $U$  normális szubdirekt hatványának nevezzük, ha tartalmazza az összes konstans kiválasztási függvényt /ezek halmaza az un. diagonális/, valamint zárt az  $A$  halmazon értelmezett bármely végesváltozós műveletre nézve, komponensenként értve annak elvégzését.

Amennyiben az  $U$  algebra véges, úgy 1.2 második feltétele helyett elegendő az

$$n(x, y, u, v) = \begin{cases} u, & \text{ha } x = y, \\ v, & \text{különben} \end{cases} \quad \text{utasítással megadott}$$

négváltozós műveletre, az un. normál transzformációra való zártságot megkövetelni, mint ahogy ezt így is teszi [13] III. 22.9 definíciója /III. fejezet, 22.§., 9. definíció/.

1.3 Definíció /Algebra Boole-bővítése/ Adott egy  $\mathcal{A} = (A; f, \dots)$  algebra valamint egy /teljes/  $\mathcal{B} = (B; \wedge, \vee, ', 0, 1)$  Boole-algebra.  $\mathcal{A}$   $\mathcal{B}$ -vel való bővítésének nevezzük azt az  $\mathcal{A}[\mathcal{B}] =$

$(A[\mathcal{B}]; f, \dots)$  az eredetivel megegyező típusu /szignatúrájú/ algebrát, mely az alábbi módon adható meg:

a/ az  $A[\mathcal{B}]$  tartóhalmaz az összes olyan  $\xi: A \rightarrow B$  leképezésekből áll, melyekre teljesül, hogy

$$(i) \quad \xi(a) \wedge \xi(b) = 0, \text{ ha } a \neq b; \quad \text{és}$$

$$(ii) \quad \bigvee_{a \in A} \xi(a) = 1.$$

b/ tetszőleges  $f$  művelet /legyen ez  $n$ -változós/ definíciója: bármely  $a$   $A$ -ra

$$f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)(a) = \bigvee_{f(b_1, \dots, b_n) = a} (\xi_1(a_1) \wedge \dots \wedge \xi_n(a_n))$$

0-változós  $f$  művelet esetén, ha ennek értéke  $\mathcal{A}$ -ban  $c$ , az új algebraiban  $f$  értéke az  $a$  leképezés, mely  $c$ -hez 1-et, minden másához 0-t rendel.

Amennyiben a/-hoz felvesszük a "(iii) értékkészlete véges" feltételt is, a korlátos Boole-bővítés fogalma adódik, a jelölés  $\mathcal{A}[\mathcal{B}]^*$ . Könnyen látható, hogy ez esetben  $\mathcal{B}$  teljességének feltétele elhagyható, továbbá véges  $\mathcal{A}$  algebra esetén a két fogalom egybeesik.

## 2. Ekvivalens kategóriák

Ebben a §-ban csak a címben említett fogalmat ismertetjük. Az alapvető kategóriaelméleti tudnivalókra nézve lásd [8], [49], [24].

1.4 Definíció /Ekvivalens ill. duálisan ekvivalens kategóriák/ A  $\mathcal{K}_1$  és  $\mathcal{K}_2$  kategóriákat ekvivalensnek /ill. duálisan ekvivalensnek nevezzük, ha léteznek  $F: \mathcal{K}_1 \rightarrow \mathcal{K}_2$  és  $G: \mathcal{K}_2 \rightarrow \mathcal{K}_1$  kovariáns /ill. kontravariáns/ funktorok, minden  $A \in \text{Ob}(\mathcal{K}_1)$ -re létezik egy kitüntetett  $\xi_A: A \rightarrow G(F(A))$  izomorfizmus, továbbá minden  $B \in \text{Ob}(\mathcal{K}_2)$ -re létezik egy kitüntetett  $\eta_B: B \rightarrow F(G(B))$  izomorfizmus úgy, hogy bármely  $\varphi$   $\mathcal{K}_1$ -morfizmus és  $\psi$   $\mathcal{K}_2$ -morfizmus mellett a következő diagramok kommutatívak:

$$\begin{array}{ccc}
 G(F(A_1)) & \xrightarrow{G(F(\varphi))} & G(F(A_2)) \\
 \uparrow \xi_{A_1} & & \uparrow \xi_{A_2} \\
 A_1 & \xrightarrow{\varphi} & A_2
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 F(G(B_1)) & \xrightarrow{F(G(\psi))} & F(G(B_2)) \\
 \uparrow \eta_{B_1} & & \uparrow \eta_{B_2} \\
 B_1 & \xrightarrow{\psi} & B_2
 \end{array}$$

Magukat az  $F$  és  $G$  funktorokat ekvivalenciáknak /ill. duális ekvivalenciáknak mondjuk, továbbá ezek egymás "inverzei" /világos, hogy a definíció szimmetrikus fogalmat határoz meg, így  $F$  és  $G$  szerepe is szimmetrikus/.

Ekvivalens kategóriákban lényegében minden ugyanugy "történik", duális ekvivalencia fennállása esetén pedig minden "fordítva van"; közelebbről, ha  $F$  /duális/ ekvivalencia, akkor mono- ill. epimorfizmus  $F$ -képe mono- ill. epimorfizmus /fordítva, epi- ill. monomorfizmus/. Ezenkívül az adott objektumpár közti morfizmusok halmaza kölcsönösen egyértelmű vonatkozásban <sup>van</sup> a képopjektumpár közti morfizmusok halmazával. Például, <sup>duális</sup>an ekvivalens kategóriák egyikében léteznek a direkt szorzatok, akkor a másikban léteznek a koszorzatok /szabad szorzatok/, stb. Mindezek részletesen megtalálhatók a paragrafus elején idézett művekben.

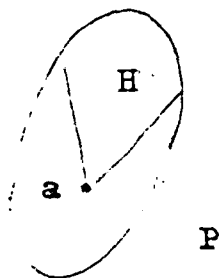
### 3. Parciálisan rendezett halmazok. Priestley-dualitás 0,1-disztributív hálókra

A parciálisan rendezett halmaz fogalmát ismertnek tételezzük fel; ezek jelölése rendszerint  $(P; \leq)$  lesz, ahol  $P$  az alaphalmaz,  $\leq$  pedig a kérdéses parciális rendezés.

Ugyancsak ismertnek vesszük a topologikus tér és topológia fogalmát, valamint gyakoribb megadási módjaikat; lásd [4], [17], [18].

**1.5 Definíció** /Felszálló és leszálló részhalmazok/ Egy  $(P; \leq)$  parciálisan rendezett halmaz valamely  $H$  részhalmazát / $H \subseteq P$ / felszállónak /ill. leszállónak/ mondjuk, ha bármely  $x, y \in P$  elemekre  $x \leq y$  /ill.  $y \leq x$ / és  $x \in H$  esetén  $y \in H$  következik.

Felszálló halmaz komplementere leszálló és megfordítva. Maga  $P$  és az  $\emptyset$  egyaránt felszállónak és leszállónak van tekintve. A dolgozatban a legkisebb elemmel rendelkező felszálló halmazokat ékeknek fogjuk nevezni /lásd 1. ábra, 8. oldal/; Nyilvánvaló, hogy véges  $P$



1. ábra

esetén bármely felszálló halmaz /véges sok/ ék uniója. "Parciálisan rendezett halmaz" helyett fogjuk használni a "poset" elnevezést is /az angol "partially ordered set" kifejezésből/.

**1.6 Definíció /Priestley-tér/** Az  $(X; \mathcal{T}, \leq)$  alakú hármast, ahol  $(X, \mathcal{T})$  kompakt topologikus tér,  $(X, \leq)$  poset úgy, hogy a  $\leq$  rendezésre nézve a topológia teljesen rendezés-össze-nem-függő, vagyis bármely  $x, y \in X$ -re  $x \not\leq y$  esetén létezik olyan  $H$  felszálló nyílt-zárt /a továbbiakban: clopen/ halmaz, hogy  $x \in H$  de  $y \notin H$ , Priestley-térnek hívjuk.

A definícióból triviálisan következik, hogy Priestley-tér topológiája mindig Hausdorff-féle. Bármely véges poset Priestley-térnek fogható fel, ha diszkrét topológiával ruházzuk fel.

Most röviden ismertetjük a Priestley-féle dualitáselméletet a korlátos disztributív hálókra.

**1.7 Definíció /Korlátos disztributív háló Priestley-tere/** Legyen adva egy  $\mathcal{L} = (L; \wedge, \vee, 0, 1)$  korlátos disztributív háló /itt és a továbbiakban a korlátelemelek nullváltozós műveletként vannak felvéve/.  $\mathcal{L}$  Priestley-terén /másképpen: duális terén/ azon  $\mathcal{X}_{\mathcal{L}} = (X_{\mathcal{L}}; \mathcal{T}, \leq)$  rendezett topologikus teret értjük, amelyben  $X_{\mathcal{L}}$  jelöli  $\mathcal{L}$  összes duális primideáljainak halmazát, a  $\mathcal{T}$  topológia számára pedig szubbázist alkotnak az összes  $\mathcal{P}_d = \{P \mid P \text{ duális primideál és } d \in P\}$  és  $\mathcal{O}_d = X_{\mathcal{L}} \setminus \mathcal{P}_d$  alakú halmazok / $d \in L$  tetszőleges/, valamint  $\leq$  azonos a halmazelméleti tartalmazással.

**1.8 Definíció /Priestley-tér duális hálója/** Tekintsük a tetszőleges  $\mathcal{X} = (X; \mathcal{T}, \leq)$  Priestley-teret. Ennek duális hálója nem más, mint az  $\mathcal{L}_{\mathcal{X}} = (Cl_1 X; \cap, \cup, \emptyset, X)$  korlátos disztributív háló, ahol  $Cl_1 X$  jelenti  $X$  összes nyílt-zárt felszálló /clopen increasing/ részhalmazainak halmazát.

Megjegyezzük, hogy az 1.7 definíció kimondható ekvivalens alakban a következőképpen is /és ezen alak kényelmesebb a IV. fejezet szemszövegéből/:  $X_{\mathcal{L}}$  legyen az összes  $\mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{2}$  homomorfizmusok halmaza, ahol  $\mathbb{2}$  a kételemű 0,1-disztributív háló; vegyük  $\mathcal{T}$ -nek a  $2^L$  szorzattopológia  $X_{\mathcal{L}}$ -re való restrikciónak / $\mathbb{2}$  ellátva a diszkrét

topológiával/, valamint tetsz.  $f_1, f_2 \in X_L$  esetén  $f_1 \leq f_2$  jelente azt, hogy  $f_1(x) \leq f_2(x)$  minden  $x \in L$ -re. Most, felhasználva az  $f \longmapsto \{x \in L \mid f(x) = 1\}$  természetes megfeleltetést amely mindig duális primideál eredményez/, látjuk, hogy ez homeomorfizmus és rendezésizomorfizmus, tehát mindkét értelmezés lényegében ugyanazt a Priestley-teret szolgáltatja.

A most következő tételekből kiderül, hogy a  $0,1$ -disztributív hálók kategóriája duálisan ekvivalens a Priestley-terek kategóriájával. /A morfizmusok az összes homomorfizmusok illetve az összes folytonos monoton leképezések./

**1.9 Tétel** /Disztributív háló kanonikus izomorfizmusa Priestley-terének duális hálójára/ Legyen  $\mathcal{L} = (L; \wedge, \vee, 0, 1)$  tetszőleges korlátos disztributív háló. Akkor a

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{L}} : \mathcal{L} & \longrightarrow & \mathcal{L}_{\mathcal{L}} \\ a & \longmapsto & \rho_a \end{array} \quad \text{/lásd 1.7 definíció/}$$

módon definiált leképezés hálóizomorfizmus, vagyis izomorfizmus a  $0,1$ -disztributív hálók kategóriájában.

**1.10 Tétel** /Priestley-tér kanonikus izomorfizmusa duális hálójának Priestley-terére/ Adott egy tetszőleges  $\mathcal{X} = (X, \mathcal{T}, \leq)$  Priestley-tér. Az  $\eta_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}_{\mathcal{L}_{\mathcal{X}}}$

$x \longmapsto$  "az  $x$ -et tartalmazó összes felszálló clopen halmazok metszetének legkisebb eleme" utasítással definiált leképezés /belátható, hogy valóban értelmezve van minden  $x \in \mathcal{X}$ -re/ homeomorfizmus és rendezésizomorfizmus, tehát izomorfizmus a Priestley-terek kategóriájában.

**1.11 Tétel** /A dualitást biztosító funktorok/ Tekintsük a tetszőleges  $\varphi : \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_2$  morfizmust, ahol  $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$  korlátos disztributív hálók. Ehhez rendeljük hozzá azon  $F(\varphi) : \mathcal{X}_{\mathcal{L}_2} \longrightarrow \mathcal{X}_{\mathcal{L}_1}$  leképezést, amely tetszőleges  $\mathcal{L}_2$ -beli duális primideálhoz annak  $\varphi$  melletti teljes inverzképét rendeli. Akkor  $F(\ )$  morfizmus a Priestley-terek kategóriájában; maga a  $\varphi \longmapsto F(\varphi)$  megfeleltetés pedig kontravariáns funktor a disztributív hálók kategóriájáról előbbi kategóriába. Hasonlóan, egy  $\psi : \mathcal{X}_1 \longrightarrow \mathcal{X}_2$  Priestley-terek közti morfizmusnak feleltessük meg azt a  $G(\psi) : \mathcal{L}_{\mathcal{X}_2} \longrightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{X}_1}$  leképezést, amely tetszőleges  $\mathcal{X}_2$ -beli felszálló clopen halmazhoz annak

$\psi$  melletti teljes inverzképét rendeli hozzá.  $G(\psi)$  morfizmus lesz a korlátos disztributív hálók kategóriájában; maga a  $\psi \longrightarrow G(\psi)$  megfeleltetés pedig kontravariáns funktor. /Megjegyezzük, hogy általában a funktorokat elegendő a morfizmusokra definiálni./ Most a tételben elmondottak alapján - figyelembevéve az 1.4, 1.9 és 1.10 alatt szereplőket is - világos, hogy a korlátos disztributív hálók  $\mathcal{D}$  és a Priestley-terek  $\mathcal{H}$  kategóriája duálisan ekvivalens / az említett  $F$  és  $G$  funktorok által/. Igazolható továbbá, hogy  $\varphi$  akkor és csak akkor 1-1, ha  $F(\varphi)$  szürjektív; ha  $\varphi$  szürjektív, akkor  $F(\varphi)$  1-1 /ez nem fordítható meg!/, és persze érvényesek ezek megfelelő átfogalmazásai  $G$ -re.

Tetszőleges Priestley-tér clopen részhalmazaira érvényes a következő leírás: ha  $C$  clopen halmaz, akkor előállítható  $C = P \cap Q$  alakban, ahol  $P$  ill.  $Q$  megfelel az 1.10 tételben említett izomorfizmus inverze által egy  $\mathcal{P}_{d_1}$  ill.  $\mathcal{Q}_{d_2}$  alakú halmaznak, ahol  $d_1$  ill.  $d_2$  a tér duális hálójának alkalmas elemei; lásd még 1.7.

A Priestley-féle dualitáselmélet részleteire nézve lásd Priestley [22], [23].

## II. FEJEZET

### PARCIÁLISAN RENDEZETT ALGEBRÁKRÓL

#### 2. A parciálisan rendezett algebra fogalma

Ebben a dolgozatban kizárólag olyan parciálisan rendezett algebrakat fogunk használni, melyekben bármely művelet minden változójában izoton /monoton növő/, ezért a definíciót is csak ebben a szűkebb értelemben adjuk meg. Megjegyezzük, hogy Fuchs [9]-ben és [10]-ben általánosabb értelmezést vesz alapul, ezekre azonban reménytelennek látszik a klasszikus univerzális algebrával olyan mértékben analóg elmélet kiépítése, mint ez itt izoton algebrakra sikerül.

**2.1 Definíció /Parciálisan rendezett algebra/** Az  $\mathcal{A} = (A; F, \leq)$  alakú hármasokat, ahol  $(A; F)$  univerzális algebra,  $\leq$  pedig olyan parciális rendezés az  $A$  halmazon, melyre nézve minden  $F$ -beli művelet minden változójában monoton növő /a továbbiakban ehelyett már csak "monoton" -t mondunk/, parciálisan rendezett algebraknak hívjuk. /A rövidség kedvéért rendszerint csak rendezett algebrát írunk./ Ezek típusa ill. szignaturája azonos az univerzális algebrai részükével. Két rendezett algebra hasonló, ha azonos típusúak. Osztályokat itt is mindig csak hasonló algebraiból képezünk.

#### 2. Részalgebrák, direkt- és szubdirekt szorzatok

A részalgebrák definiálásakor a parciális  $\leq$  nem feltétlenül mindenütt definiált műveletű /algebra/ esetén látottal rokon jelenség lép fel, tudniillik többféle definíció is elképzelhető, és csak behatóbb vizsgálat tudja kimutatni egyik vagy másik ilyen vagy olyan szempontból való célszerűségét. Mi az itteni céljainknak legjobban megfelelő értelmezést vesszük alapul, a használat során egyértelműen kiderül ennek indokoltsága. A direkt- és szubdirekt szorzatok definíciója - úgy véljük - a lehető legtermészetesebb.

**2.2 Definíció /Rendezett algebra részalgebrája/** Legyenek  $\mathcal{A} = (A; F, \leq_1)$  és  $\mathcal{B} = (B; F, \leq_2)$  hasonló rendezett algebra /a jelölés nem teljesen korrekt, mert ugyanaz az  $F$  szimbólum jelöli a művelethalmazt mindkét esetben, de ez természetesen úgy értendő, hogy egyszerűen csak azonos jelekkel vannak jelölve a műveletek - és persze fennáll a megfelelő aritás/-változószám/egyezés/. Előbbi utóbbi

részalgebrájának mondjuk, ha  $(A; F)$  részalgebrája  $(B; F)$ -nek és  $\leq_1$  nem más, mint  $\leq_2$  A-ra való restrikciója, jelben  $\leq_1 = \leq_2 \upharpoonright A$ . Ez esetben  $B \supseteq A$ -nak bővítése.  $A$  beágyazható  $B$ -be, ha  $B$ -nek van  $A$ -val izomorf részstrukturája /részalgebrája/. Izomorfizmuson olyan rendezéstartó homomorfizmust értünk, amelynek van ugyanilyen inverz leképezése is.

A részalgebrák ilyen definíciója mellett szembevetendő, hogy monomorfizmus létezése még szabad rendezett algebrákkal /ld. később/ bíró kategóriák esetén sem jelent feltétlenül beágyazhatóságot. Az általunk közelebbről tárgyalt esetekben azonban ez semmiféle nehézséget nem fog okozni.

**2.3 Definíció /Direkt- és szubdirekt szorzatok/** Az értelmezésnek a pusztán a műveletekre vonatkozó része szószerint megegyezik az univerzális algebrai esettel; az  $f$  kiválasztási függvény pedig akkor tekintendő kisebbegyenlőnek  $g$ -nél, ha az indexhalmaz minden  $i$  elemére  $f(i) \leq g(i)$ . Egyszóval, a rendezés komponensenként veendő.

### 3. Homomorf és Q-homomorf képek, kongruenciák és faktoralgebrák

A szokásos albrakonstrukciók közül a fentemlitetteknek a legnehezebb megadni az értelmezését a rendezett algebrák általános elméletében, még az izoton esetben is. Azt az utat fogjuk követni, hogy először megadjuk a homomorf kép valamiféle fogalmát, majd a szereplő leképezések magjai lesznek a kongruenciák. Végül is sikerül kielégítően jellemezni azokat az ekvivalenciarelációkat, melyek homomorfizmusok magjai,

**2.4 Definíció /Homomorfizmus/** Rendezett algebrák közti homomorfizmuson művelet- és rendezéstartó leképezést értünk.

**2.5 Definíció /Homomorf kép/** Azt mondjuk, hogy  $B$  homomorf képe  $A$ -nak, ha létezik  $A \longrightarrow B$  szürjektív homomorfizmus.

A homomorf kép ezen fogalma nem teljesen kielégítő, mert  $A$  és a kérdéses szürjektív homomorfizmus ismeretében még nem tudjuk  $B$ -t teljesen megadni; nevezetesen  $B$  rendezése nem feltétlen határozható meg egyértelműen. Ezért bevezetünk egy másik homomorf-kép fogalmat is, amely előbbi említett fogyatékosságát küszöböli ki; ehhez azonban figyelembe vesszük a következő triviális tényt:

**2.6 Lemma /A minimális rendezés létezése/** Ha adott egy  $B = (B; F)$  algebra, egy  $(A; \leq)$  poset és  $A \longrightarrow B$  leképezések egy

tetszőleges  $T$  halmaza. Ha létezik  $B$ -n olyan parciális rendezés, melyre nézve minden  $F$ -beli művelet monoton és melyre nézve minden  $T$ -beli leképezés rendezéstartó, akkor az összes ilyenek között létezik legszűkebb.

Most kimondhatjuk az ígért definíciót:

**2.7 Definíció /Q-homomorf kép/** Legyen  $B$  homomorf képe  $\mathcal{A}$ -nak, a  $\varphi$  leképezés által. Ha  $B$  rendezése éppen a 2.6-ban említett legszűkebb rendezés  $T = \{\varphi\}$ -vel, akkor  $B$  Q-homomorf képe  $\mathcal{A}$ -nak.

**2.8 Definíció /Q-homomorfizmus/** Egy rendezett algebrák közötti homomorfizmust Q-homomorfizmusnak nevezünk, ha a képhalmaznak megfelelő részalgebra a leképezés által Q-homomorf képpé válik.

Igen fontos és szerencsés, hogy a szűrjektív Q-homomorfizmusokra viszonylag könnyen kezelhető konstruktív leírást tudunk adni:

**2.9 Tétel** Egy  $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow B$  szűrjektív homomorfizmus akkor és csak akkor Q-homomorfizmus, ha valahányszor  $c \leq d$   $B$ -ben, mindannyiszor létezik egy  $n$  természetes szám és  $A$  elemeinek olyan  $a = a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2n-1}, a_{2n}, a_{2n+1} = b$  sorozata, hogy  $\varphi(a) = \varphi(a_1) = c, \varphi(a_{2n}) = \varphi(b) = d$  és  $i = 1, 2, \dots, n$  esetén  $a_{2i-1} \leq a_{2i}$ . /Az  $n = 0$  eset megengedett!/  

$$\varphi(a) = \varphi(a_1) = c, \varphi(a_{2n}) = \varphi(b) = d \text{ és } i = 1, 2, \dots, n \text{ esetén } a_{2i-1} \leq a_{2i}.$$

**Bizonyítás:**  $B$ -n értelmezzünk egy binér relációt, mely tetszőleges  $c$  és  $d$  elemek között pontosan akkor álljon fenn, ha létezik a mondott tulajdonságú sorozat. A reflexivitás és tranzitivitás triviális, az antiszimetria pedig abból adódik, hogy a reláció /lévén  $\varphi$  monoton!/  
 $\varphi$  része  $B$  rendezésének. Tehát parciális rendezést nyertünk. A  $\varphi$  erre vonatkoztatott rendezéstartása is rögtön látszik. Figyelembe véve azt a körülményt, hogy több  $(c, d)$  elempárhoz tartozó sorozatok nyilvánvalóan uniformizálhatók /azaz egyenlő hosszúra vehetők/, nehézség nélkül adódik  $B$  /végesváltozós!/  
 $\varphi$  műveleteinek monotonitása a definiált relációra nézve. Továbbá, ezen reláció nyilván része bármely parciális rendezésnek, melyre nézve  $\varphi$  még monoton; így máris adódik tételünk állítása, Q. E. D.

A tétel felhasználásával azonnal nyerhetünk jellemzést a tetszőleges Q-homomorfizmusokra is.

**2.10 Definíció /Rendezéskongruenciák/** Adott  $\mathcal{A}$  rendezett algebra rendezéskongruenciáinak az összes az összes  $\mathcal{E} = \{(a, b) \mid a\varphi = b\varphi\}$  alakú ekvivalenciákat /=ekvivalenciarelációkat!/  
 $\varphi$  nevezzük, ahol  $\varphi$  az  $\mathcal{A}$  algebrának tetszőleges homomorfizmusa valamely más rendezett al-

gebrába  $\beta$ itt a leképezés jelét jobboldalra irtuk/.

Rögtön felmerül a kérdés, miért vezetünk be csak egyfajta kongruenciát, nem pedig kétfélét – a kétféle homomorfizmusfogalommal párhuzamosan. Ennek oka az a könnyen ellenőrizhető tény, hogy bármely homomorfizmus magja /vagyis az előbbi definícióban adott alaku reláció/ egyúttal  $Q$ -homomorfizmus magja is: elegendő a képhalmazt megtartani, majd rendezését szükség szerint gyengíteni.

A faktoralgebrákat úgy definiáljuk, <sup>hogy</sup> a homomorfizmatétel érvényben maradjon: bármely homomorf kép izomorf az eredeti algebra egy faktoralgebrájával, és pedig az adott homomorfizmusból nyerhető természetes leképezés által. Ezenkívül természetesen megköveteljük, hogy a faktoralgebra maga is mindig homomorf kép legyen.

**2.11 Definíció /Faktoralgebrák/** Legyen  $\Theta$  rendezéskongruencia /a továbbiakban egyszerűen csak: kongruencia/ az  $\mathcal{U} = (A; F, \leq)$  rendezett algebrán.  $\mathcal{U}$   $\Theta$ -szerinti faktoralgebráján értjük és  $\mathcal{U}/\Theta$ -val jelöljük azon  $(A/\Theta; F, \leq)$  rendezett algebrát, ahol  $(A/\Theta; F)$  nem más, mint  $(A; F)$  közösleges  $\Theta$  szerinti faktoralgebrája, a  $\leq$  parciális rendezés pedig a következőképpen van értelmezve: /tetsz.  $a \in A$  elem  $\Theta$ -osztályát  $[a]\Theta$  jelöli/

$[a]\Theta \leq [b]\Theta$  pontosan akkor, ha létezik egy  $n$  természetes szám és  $A$  elemeinek

$$a = a_0 \Theta a_1 \leq a_2 \Theta a_3 \leq \dots \Theta a_{2n-1} \leq a_{2n} = b$$

alaku sorozata.

Nyilvánvalóan be kellene látni, hogy ily módon tényleg rendezett algebrát kapunk, és az tényleg megfelel a fentebb mondott kívánalmaknak. A bizonyítás azonban rutinjellegű, így eltekintünk tőle.

**2.12 Tétel /Kongruenciák jellemzése/** Az  $\mathcal{U} = (A; F, \leq)$  rendezett algebrán értelmezett  $\Theta$  binér reláció akkor és csak akkor kongruenciája  $\mathcal{U}$ -nak, ha

(i)  $\Theta$  kongruenciája  $(A; F)$ -nek és

(ii) valahányszor  $A$  valamely  $a, b$  elemeihez létezik ugyancsak  $A$  elemeinek  $a = a_0 \Theta a_1 \leq a_2 \Theta a_3 \leq \dots \Theta a_{2n-1} \leq a_{2n} = b$  és egyidejűleg  $b = b_0 \Theta b_1 \leq b_2 \Theta b_3 \leq \dots \Theta b_{2n-1} \leq b_{2n} = a$  alaku sorozata /Nyilván feltehető, hogy mindkét sorozat egyforma hosszú!/, mindannyiszor  $a \Theta b$  érvényes.

A (ii) feltételben szereplő két sorozat együttesét nevezzük  $\Theta$ -ciklusnak. Világos, hogy véges sok  $\Theta$ -ciklus mindig uniformizálható.

Bizonyítás: A szükségesség triviális a kongruenciák definíciójából és abból, hogy (ii) tulajdonképpen a 2.11-ben osztályokra értelmezett rendezés antiszimmetriáját írja elő.

Az elegendőség igazolása céljából tekintsük a 2.11-ben szereplő konstrukcióval keletkező objektumot; ismét könnyen látható, hogy rendezett algebra keletkezik, amely  $\mathcal{U}$ -nak homomorf képe a természetes megfeleltetés által /sőt,  $Q$ -homomorf képe/. A megfeleltetés magja éppen  $\ominus$  lesz. Q. E. D.

Ha adva van egy rendezett algebrán egy műveletkompatibilis ekvivalenciareláció, akkor mag tudjuk adni az általa generált rendezéskongruenciát, vagyis a tőle bővebb rendezéskongruenciák közül a legkisebbet /ez mindig létezik, hiszen rendezéskongruenciák tetszőleges halmazának halmazelméleti metszete is rendezéskongruencia, továbbá rendezéskongruencia az univerzális reláció is/, éspedig konstruktíve:

2.13 Tétel /Rendezéskongruencia-lezárás jellemzése/ Legyen adva az  $\mathcal{U}$  rendezett algebra és rajta a  $\ominus$  műveletkompatibilis ekvivalencia. A  $\ominus$  által generált  $\overline{\ominus}$  rendezéskongruencia az alábbi módon írható le:  $a \overline{\ominus} b$  pontosan akkor áll fenn, ha létezik  $\ominus$ -ciklus, amely  $a$ -t és  $b$ -t egyaránt tartalmazza.

Bizonyítás: A most definiált  $\overline{\ominus}$  nyilvánvalóan rendezéskongruencia, és része minden rendezéskongruenciának, ami  $\ominus$ -t tartalmazza, Q. E. D.

2.14 Definíció /Főkongruenciák/ Az  $(a, b)$  pár által generált főkongruencián az  $(A; F)$  algebrán vett  $\ominus(a, b)$  főkongruencia rendezéskongruencialezártját,  $\overline{\ominus(a, b)}$ -t értjük.

Megadható lenne a főkongruenciák algebrai függvényeket használó teljes leírása is, erre azonban nem lesz szükségünk, így mellőzzük. Közöljük viszont a kongruenciák /tetszőleges számú tagu/ egyesítésének leírását:

2.15 Tétel /Kongruenciák egyesítése/ Legyen  $\{\Theta_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$  rendezéskongruenciák tetszőleges családja  $\mathcal{U}$ -n. Az  $a, b \in A$  elemekre

$a \left( \bigvee_{\gamma \in \Gamma} \Theta_\gamma \right) b$  pontosan akkor, ha létezik  $A$  elemeinek  $a = a_0 \leq a_1 \Theta_{\gamma_{i_1}} a_2 \leq a_3 \Theta_{\gamma_{i_2}} \dots a_{2k-1} \Theta_{\gamma_{i_k}} a_{2k} = b$  alakú sorozata, és viszont,  $b$  és  $a$  között. /Bizonyítás triviális/.

Végezetül a kongruenciákkal kapcsolatos legfőbb dolgokat össze-

foglaljuk:

2.16 Tétel /Kongruenciaháló/ Bármely rendezett algebra rendezéskongruenciái algebrai hálót alkotnak a halmazelméleti tartalmazásra nézve; zéróelem az egyenlőségreláció, egységelem az univerzálás teláció.

Bizonyítás: Világos, hogy teljes hálóról van szó. 2.15-ből nyilvánvaló, hogy a főkongruenciák kompaktak. Az, hogy minden kongruencia főkongruenciák egyesítése, triviális. Q. E. D.

Mód lenne rá, hogy a tetszőleges szubdirekt felbontásokat, valamint a véges sok tényezőes direktfelbontásokat kongruenciák családjával jellemezzük, de ezt ugyancsak nem fogjuk a továbbiakban használni, így nem ismertetjük.

Bármely  $\mathcal{A}$  rendezett algebra összes rendezéskongruenciájának hálóját  $\text{Con}(\mathcal{A})$  fogja jelölni - a klasszikus esettel teljes összhangban. A továbbiakra nézve is érvényes, hogy a régi jelöléseket megtartjuk az új analóg fogalmak esetében is, hacsak külön mást nem mondunk.

#### 4. Rendezett algebrák varietásai. Rendezésprimál algebra által generált varietások. $\mathcal{B}$ -karakterisztikus algebrák és Priestley- $\mathcal{B}$ -terek

$S$  és  $P$ ,  $P_S$ ,  $P_U$  valamint  $I$  jelentse ugyanazokat az operátorokat, amelyek az 1. §-ban szerepelnek.  $H$  legyen a homomorf képek,  $Q$  pedig a  $Q$ -homomorf képek képzésének operátora.

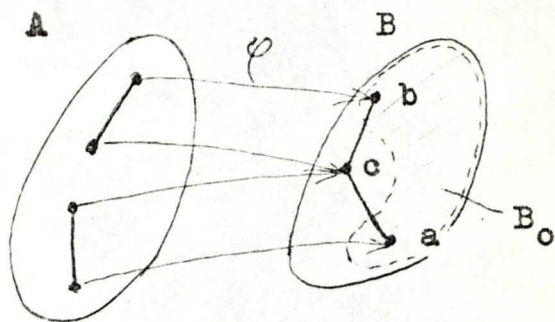
2.17 Definíció /Varietások/ Hasonló rendezett algebrák egy  $K$  osztályát varietásnak /ill.  $Q$ -varietásnak/ nevezzük, ha  $K$  zárt az  $S$ , a  $P$  valamint a  $H$  /ill. a  $Q$  / operátorokra nézve.

Itt sem látszik egyik fogalom esetében sem kizáró ok, ami miatt eltekintenénk tőle. A varietások több szempontból jobban viselkednek ugyan, mint a  $Q$ -varietások, viszont utóbbiaknak speciális eseteivé válnak a hagyományos varietások, ha azokban minden algebrát ellátunk a triviális rendezéssel. Itt is szükségesnek látszik tehát legalább ezen két varietásfogalom bevezetése - hasonlóan, mint a topologikus algebráknál W. Taylornál látható / [27] /.

2.18 Tétel /Adott osztály által generált varietás/ Tetszőleges rendezett algebrákból álló  $K$  osztály által generált varietás nem más, mint  $\text{HSP}(K)$ .

Bizonyítás: A klasszikus esettel teljesen analóg /lásd [13] /.

Ugyanez már nem mondható el egy adott osztály által generált  $Q$ -varietásról. Nevezetesen, nem érvényes a  $QS \supseteq SQ$  operátoregyenlőtlenség általában, mint azt a következő szituáció mutatja: /az ábrán a "nagyobb" relációt lefelé haladó vonal jelzi; az algebrák művelet-nélküliek/. Világos, hogy  $\varphi$  szürjektív  $Q$ -homomorfizmus, de ha vesszük  $B$ -ben az  $a, b$  elemek által meghatározott  $B_0$  részalgebrát, ez már nem  $Q$ -homomorf képe  $\varphi$ -ésének  $\varphi$  által. Így  $QSP$  általában nem is lezárási operátor. Egy fontos speciális esetben azonban a varietás minden homomorfizmusa  $Q$ -homomorfizmus, és ez a helyzetet lényegesen megkönnyíti:



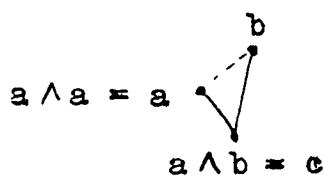
2. ábra

**2.19 Tétel** /Speciális hálószerű osztály által generált varietás/ Legyen  $K$  rendezett algebrák olyan osztálya, amelynek minden elemén a rendezés hálószerű és az annak megfelelő  $\wedge$  és  $\vee$  hálóműveletek polinomok, Akkor  $HSP(K)$  minden elemére állnak ugyanezek, és benne minden homomorfizmus  $Q$ -homomorfizmus,  $HSP(K) = QSP(K)$ . Természetesen ezek közös értéke lesz a  $K$  által generált  $Q$ -varietás.

**Bizonyítás:** Mivel a megadott feltételek mellett egy részalgebra rendezése részhálója a kiindulási algebrához kapcsolódó megfelelő hálónak, továbbá a rendezés a direkt szorzatokon komponensenként véendő, azért rögtön világos, hogy a rendezés  $SP(K)$  elemein is hálószerű és  $\wedge, \vee$  polinomok rajtuk.

Legyen most  $f : B \longrightarrow \mathcal{U}$  szürjektív homomorfizmus, ahol  $B \in SP(K)$ . A  $B$  rendezésének megfelelő  $\wedge$  és  $\vee$  műveleteket előállító termék /jelölje ezeket maga  $\wedge$  és  $\vee$  /  $\mathcal{U}$ -n is hálót határoznak meg, mert az azonosságok  $f$  által öröklődnek; a kapcsolódó rendezés legyen  $\preceq$ .  $\mathcal{U}$  műveletei monotonok erre nézve: valóban, ha  $\mu$  tetszőleges  $n$ -változós művelet,  $a_i \preceq b_i$   $\mathcal{U}$ -ben,  $i = 1, \dots, n$ , akkor /lévén  $f$   $\wedge, \vee$ -megőrző/ vannak olyan  $u_i, v_i$   $B$  elemek, hogy  $u_i f = a_i$ ,  $v_i f = b_i$ ,  $u_i \leq v_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Most lévén  $\mu$  monoton,  $\mu(u_1, \dots, u_n) \leq \mu(v_1, \dots, v_n)$ ; erre  $f$ -et alkalmazva adódik, hogy  $\mu(a_1, \dots, a_n) \preceq \mu(b_1, \dots, b_n)$ . Természetesen az ezen  $\preceq$  rendezésnek megfelelő háló műveleteit ugyanazok a termék adják meg, mint  $B$ -n, és ezek monotonok  $\mathcal{U}$  eredeti rendezésére nézve.

Hogy utóbbi csak finomabb lehet, mint  $\preceq$ , az triviális. Nem lehet azonban ténylegesen finomabb, mert ha egy hálóban  $a \parallel b$  /összehasonlíthatatlanok/, és egy új rendezésben már



3. ábra

$a < b$ , akkor ezen új rendezésben  $a \wedge a \neq a \wedge b$ , hiszen  $a \wedge a = a \neq a = a \wedge b$ , mert az új rendezés a réginek finomítása. Így  $\wedge$  nem monoton már az új rendezésre nézve. Ilyenformán  $\mathcal{U}$  eredeti rendezése csak  $\preceq$ -vel azonos lehet.

Éppen így látható be, hogyha  $\mathcal{B}$  és  $\mathcal{U}$  most már  $\text{HSP}(K)$  tetszőleges elemei,  $\varphi$  pedig  $\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{U}$  homomorfizmus, akkor  $\mathcal{U}$  rendezésének  $\text{Im}(\varphi)$ -re  $\neq \varphi$  képhalmaza/ való restriktciója nem más, mint a  $\varphi$  által átvitt háló rendezése. A tétel állításai most már mind nyilvánvalóak, Q. E. D.

A helyzet a kongruenciáknál is egyszerűbb lesz:

**2.20 Tétel** Az előbbi feltételekkel,  $\text{HSP}(K)$  elemein a rendezéskongruenciák nem mások, mint a műveletkompatibilis ekvivalenciák /a bizonyítást elhagyjuk/.

A dolgozat fő eredményei szempontjából döntő fontosságuk a most következő állítások.

**2.21 Tétel** /Kongruenciadisztributivitás/ 2.19 feltételei mellett  $\text{HSP}(K) \neq \text{QSP}(K)$ / minden elemének rendezéskongruenciahálója disztributív.

**Bizonyítás:** Vegyük figyelembe 2.20-at és azt, hogy a hálóműveletek polinomok, ekkor állításunk következik Jónsson ismert eredményéből, lásd [16]. Q. E. D.

**2.22 Tétel** /Jónsson-lemma/ 2.19 feltételei mellett  $\text{HSP}(K)$  szubdirekt irreducibilis elemei mind  $\text{HSP}_{\mathcal{U}}(K)$ -ban vannak, és így  $\text{HSP}(K) = \text{P}_{\mathcal{S}}\text{HSP}_{\mathcal{U}}(K)$ .

**Bizonyítás:** Szóról szóra azonos az [16]-ben szereplővel.

A 2.19-ben leírt szituáció áll fenn bizonyos véges rendezett algebraik által generált varietások esetén. Erre térünk most rá.

**2.23 Definíció** /Rendezésprimál algebra/ Egy véges rendezett algebrát rendezésprimálnak nevezünk, ha bármely a rendezésére nézve monoton végesváltozós függvény polinomként előáll rajta.

Egy rendezett algebra hálószerűen rendezett, ha az adott rendezés rajta hálószerű rendezés. Látszik, hogy hálószerűen rendezett  $\neq$  hálószerű/ rendezésprimál algebra a 2.19-nek megfelelő esethez

tartozik.

Ezen §-t két további definícióval zárjuk.

**2.24 Definíció /  $\mathcal{P}$ -karakterisztikus algebra/** Legyen  $\mathcal{P} = (P; F, \leq)$  rendezésprimál algebra,  $\mathcal{X} = (X; \mathcal{T}, \leq)$  pedig tetszőleges Priestley-tér. Akkor a  $\mathcal{P}^X$  direkt hatvány azon részalgebráját, amely az összes  $\mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{P}$  monoton folytonos leképezésekből áll, a  $\mathcal{X}$  tér  $\mathcal{P}$ -karakterisztikus algebrájának nevezzük, és  $O_{\mathcal{P}}(\mathcal{X})$ -vel jelöljük /a  $P$  halmazt ellátjuk a diszkrét topológiával/.

Nyilvánvalóan egy szubdirekt hatványról van itt szó; és ez a  $\mathcal{P}$  által generált varietáshoz tartozik. Az eredeti, primál algebrákra és Boole-terekre vonatkozó definíciót lásd Tah-Kai Hu [ ].

A rendezésprimál algebra által generált varietás bármely eleméhez hozzárendelhető viszont egy Priestley-tér:

**2.25 Definíció /Priestley- $\mathcal{P}$ -tér/** Tekintsük a  $\mathcal{P}$  által generált varietás tetszőleges  $\mathcal{U}$  algebráját.  $\mathcal{U}$  Priestley- $\mathcal{P}$ -terén értjük és  $H_{\mathcal{P}}(\mathcal{U})$ -val jelöljük azt az  $(X; \mathcal{T}, \leq)$  rendezett topologikus teret, ahol  $X$  az összes  $\mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{P}$  /monoton/ homomorfizmusok halmaza,  $\mathcal{T}$  az  $P$ -n vett diszkrét topológia  $A$ -edik hatványra emeltjének  $X$ -re való restringáltja,  $\leq$  pedig a pontonkénti rendezés.

Természetesen a definíciók gyengébb feltételek mellett is értelmesek, számunkra azonban elég lesz ebben az általánosságban kimondanunk őket. A 2.25 definíciónál bizonyításra szorul, hogy valóban Priestley-teret nyerünk; ezt itt nem végezzük, hanem későbbre hagyjuk. Megfigyelhetjük, hogy véve egy korlátos disztributív háló Priestley- $\mathcal{L}$ -terét, ahol  $\mathcal{L}$  a kételemű rendezéssel ellátott 0,1-disztributív háló, éppen a kiindulási háló I.1.8 definíciója után ismertett fajtájú Priestley-teréhez jutunk. Hasonlóan, a  $\mathcal{L}$ -karakterisztikus algebra fogalmát felhasználva, újradefiniálható volna a Priestley-terek duális hálója.

2.25 eredeti alakját lásd ugyanott, mint 2.24-ét.

## 5. Szabad algebrák. Varietások axiomatizálása

Ezen § eredményeit gyakorlatilag nem használjuk a továbbiakban, a teljesség kedvéért közöljük őket mégis; az ismertetés azonban vázlatos lesz.

Legyen adva rendezett algebrák egy tetszőleges osztálya, és vala-

mely  $X$  halmaz, ellátva egy  $\leq$ -vel jelölt parciális rendezéssel /az osztály legyen  $K$ /.

2.26 Definíció /Szabad algebra/ Az  $\mathcal{F} \in K$  algebrát  $K$ -szabad algebrának nevezzük az  $X$  szabad /parc. rendezett/ generátorrendszerrel, ha az alábbiak teljesülnek:

- (i)  $[X] = F$ , vagyis  $X$  generálja  $\mathcal{F}$ -et és
- (ii) valahányszor  $\varphi_0$   $X$  monoton leképezése valamely  $\mathcal{U} \in K$  algebrába, mindannyiszor létezik olyan  $\varphi: \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{U}$  homomorfizmus, amely  $\varphi_0$ -nak kiterjesztése.

A definíciót lásd még B. Davey [6]-ben is. Ez eredetileg M. Burgin [2]-ben szabad topologikus algebrákra adott definíciójának általánosítása volt /ott kezdetben  $X$  nem volt benne  $\mathcal{F}$ -ben, hanem csak bele volt képezve egy  $\sigma$  kanonikus leképezéssel, azonban szerző 1975-ben diplomadolgozatában kiderítette, hogy néhányteljesen érdektelen triviális esetet leszámítva rendezett algebrák esetében a fenti definíció vehető, ráadásul még az is igaz, hogy  $X$  eredeti rendezése  $\mathcal{F}$  rendezésének  $X$ -re való restrikciója/.

Triviális a következő:

2.27 Tétel /Szabad algebra unicitása/ Ha  $\mathcal{F}_1$  és  $\mathcal{F}_2$  mindketten  $K$ -szabad algebrák az  $X_1$  és  $X_2$  egymással egy  $\Sigma$  leképezés mellett rendezésizomorf szabad generátorrendszerrel, akkor létezik olyan  $\mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_2$  izomorfizmus, ami  $\Sigma$ -nak kiterjesztése.

A klasszikus esethez hasonlóan látható be az alábbi egzisztenciátétel is:

2.28 Tétel /Szabad algebrák létezése/ Legyen  $K$  rendezett algebrák  $S$ - és  $P$ -zárt osztálya, melyben előfordulnak különböző összehasonlítható elemek. Akkor bármely  $X$  parc. rendezett halmaz esetén létezik  $K$ -szabad algebra az előbbi szabad generátorrendszerrel, és ebben  $X$  megőrzi eredeti rendezését.

/Az utolsó állítás bizonyítását lásd szerző diplomadolgozatában, József Attila Tudományegyetem, Szeged, 1975/

Az  $X$  feletti  $/=$  az  $X$  szabad generátorrendszerrel bíró/  $K$ -szabad algebrát ezentúl  $\mathcal{F}_K(X)$  fogja jelölni /illetve, ha  $K$  ismert már, akkor elég  $\mathcal{F}(X)$ -et írni/. Egyszerűbb esetekben még a  $X$  diagramja is beírható a zárójelbe, pl.  $\mathcal{F}(\{ \})$ . Továbbá, ha  $X$  rendezése triviális, akkor elegendő számosságát megadni, pl.  $\mathcal{F}(\omega)$ .

Szabad algebrákra a következő konstruktív leírás érvényes /a bizonyítás kézenfekvő/:

2.29 Tétel /Szabad algebra leírása/ Legyen adva rendezett algebrának egy  $K$  osztálya, egy  $X$  parciálisan rendezett halmaz, és tegyük fel, hogy  $\mathcal{F}_K(X)$  létezik. Akkor  $p(X) \leq q(X)$  pontosan akkor áll /  $p$  és  $q$  megfelelő aritásu termék/, ha a  $K$  osztályban teljesül az  $\bigwedge_{x \leq y \text{ X-ben}} (x \leq y) \longrightarrow (p(X) \leq q(X))$  axióma.

/Világos, hogy a tétel  $\mathcal{F}_K(X)$ -et mind műveletileg, mind rendezéssileg megadja./

Speciálisan, triviális rendezésű /rendezetlen/  $X$  esetén az implikáció előtagja üres /illetve  $x \leq x$  alakúakból áll, de ezek elhagyhatók ekkor/, így a szabad algebrát a  $K$ -ban teljesülő egyenlőtlenségek határozzák meg.

Szorosan kapcsolódik ide a varietások Birkhoff-tipusu jellemzése:

2.30 Tétel /Rendezett algebrák varietásainak Birkhoff-tipusu jellemzése/ Rendezett algebrák egy osztálya akkor és csak akkor varietás, ha egyenlőtlenségek valamely halmazát kielégítő összes rendezett algebrákból áll.

Bizonyítás: Egyenlőtlenségekkel axiomatizált rendezett algebrákból álló osztály nyilván zárt  $H, S, P$ -re. Megfordítva, ha  $K$  varietás, egy  $\mathcal{U}$  rendezett algebra pedig teljesíti  $K$  egyenlőtlenségeit,  $X$  pedig generálja  $\mathcal{U}$ -t, akkor  $\mathcal{U}$  homomorf képe lesz  $\mathcal{F}_K(X)$ -nek / $X$ -et rendezetlenné vesszük itt!/, tehát maga is  $K$ -ban van. Ez mutatja, hogy  $K$  megadható a rajta teljesülő egyenlőtlenségekkel, Q. E. D.

Felhívjuk a figyelmet, hogy a rendezett algebrákkal kapcsolatos axiomatizálási kérdésekben a műveletek monotonitását kifejező formulákat mindig eleve teljesülőnek vesszük, tehát ezeket esetleg pluszként hozzá kell venni az osztályt megadó axiómákhoz, ha összhangban akarunk lenni a relációkkal is ellátott algebrai rendszerekre érvényes axiomatizálási eredményekkel!

$Q$ -varietásokra csak gyengébb tételt tudunk kimondani; a bizonyítást elhagyjuk.

2.31 Tétel / $Q$ -varietás axiomatizálása/ Bármely  $Q$ -varietás azonos a rajta érvényes összes 2.29-ben szereplő típusu axiómákat kielégítő összes rendezett algebrák osztályával.

Ezen tétel egyik gyengéje az, hogy az axiómákban végtelen sok tényezőes konjunkciók szerepelnek, a másik pedig, hogy - mivel a kérdéses alaku állítások  $Q$ -homomorf képekre nem feltétlenül öröklődnek - nem adható meg tetszőlegesen az adott típusu axiómarendszer.

A klasszikus eset szabad algebrákra vonatkozó tételeinek nagy része itt is érvényben marad, ezeket már nem említjük; megjegyzünk viszont egy később felhasznált fontos tényt:

2.32 Tétel /Monomorfizmusok 1-1-értelműsége/ Legyen  $K$  rendezett algebrák olyan osztálya, melyben  $\mathcal{F}_K(1)$  létezik. Akkor  $K$ -ban mint kategóriában /morfizmusok az összes homomorfizmusok/ a monomorfizmusok 1-1-értelműek.

/A bizonyítás azonos a klasszikus esetével./

Rendezett algebrák varietásaira és ezek Birkhoff-típusú jellemzésére nézve lásd még Bloom [1].



### III. FEJEZET

#### A HÁLÓSZERŰ RENDEZÉSPRIMÁL ALGEBRÁK ALAPTÉTELE

##### 1. Normális szubdirekt hatványok

A címben megadott fogalom csaknem szó szerinti általánosítása az 1.2 definíciónak:

**3.1 Definíció** /Rendezett algebra normális szubdirekt hatványa/  
Legyen  $\tilde{\mathcal{A}} \leq \mathcal{A}^I$  az  $\mathcal{A}$  rendezett algebra egy szubdirekt hatványa.  $\tilde{\mathcal{A}}$ -ot  $\mathcal{A}$  normális szubdirekt hatványának nevezzük, ha tartalmazza a diagonálist és zárt az  $\mathcal{A}$  halmazon értelmezhető bármely végesváltozós /pontonként elvégzett/ műveletre nézve, amely monoton.

Itt még véges  $\mathcal{A}$  esetén sem tudunk egyetlen vagy akár véges sok speciális műveletre való zártság megkövetelésére szorítkozni, ugyanis általában tetszőleges parciálisan rendezett halmaz összes monoton végesváltozós függvényei klónjának "kis" generátorrendszerait ez idő tájt még nem ismerjük. Kivételt képez azonban a hálószerű rendezés esete /véges halmazon!/, amikor is az összes egyváltozós monoton függvények valamint a rendezéshez tartozó  $\wedge$  és  $\vee$  műveletek együtt már minden monoton függvényt előállítanak. Ezt a körülményt ki is fogjuk használni.

Első célunk annak igazolása lesz, hogy hálószerű rendezéssprimál algebra normális szubdirekt hatványai neki disztributív bővitésai. Ehhez azonban még a disztributív bővítés fogalmát pontosan definiálni kell.

**3.2 Definíció** /Rendezett algebra disztributív bővítése/ Az  $\mathcal{A}$  rendezett algebrának az  $\mathcal{L}$  0,1-disztributív hálóval való bővítésén értjük és  $\mathcal{A}[\mathcal{L}]$ -lel jelöljük azon  $\mathcal{B}$  rendezett algebrát, amelynek tartóhalmaza nem más, mint  $\mathcal{L}$  Priestley-tere  $\mathcal{A}$ -ba való monoton, folytonos / $\mathcal{A}$  ellátva diszkrét top.-val!/ leképezéseinek halmaza, a műveletek és a rendezés pedig pontonként van véve. Magát  $\mathcal{B}$  alaphalmazát jelölhetjük  $\mathcal{A}[\mathcal{L}]$ -lel.

Nyilvánvaló, hogy  $\mathcal{A}[\mathcal{L}]$  valóban zárt a pontonként végzett  $\mathcal{A}$ -beli műveletekre, továbbá, hogy ily módon  $\mathcal{A}$  egy normális szubdirekt hatványa adódik.

A definíció előtt mondott állítás bizonyítása céljából mindenekelőtt egy 0,1-disztributív hálót kell a kérdéses normális szubdirekt hat-

ványhoz rendelni. Előrebocsátjuk, hogy ehhez az adott rendezésprimál algebráról még nem kell feltenni, hogy hálószerű, sőt, amikor azt látjuk be, hogy a kiindulási normális szubdirekt hatvány a bázis algebrának éppen az említett disztributív hálóval való bővítése, akkor is csak a talált izomorfizmus szürjektivitásának igazolásához kell feltenni.

Legyen  $\mathcal{U}$  véges rendezett algebra,  $\mathcal{U}(\mathcal{U})$  jelentse  $A$  felszálló részhalmazainak halmazát /beleértve  $A$ -t és  $\emptyset$ -t is/. Ha most  $\tilde{\mathcal{U}} \leq \mathcal{U}^I$  normális szubdirekt hatványa  $\mathcal{U}$ -nak, akkor rendeljük hozzá az

$L = \{H \mid H \subseteq I \text{ és } H = Bf^{-1} \text{ alkalmas } B \in \mathcal{U}(\mathcal{U}), f \in \tilde{\mathcal{U}}\text{-ra}\}$  halmazt.  $\emptyset \in L$ , mert bármely  $f \in \tilde{\mathcal{U}}\text{-ra } \emptyset f^{-1} = \emptyset$ ; továbbá  $I \in L$ , mert  $Af^{-1} = I$  mindig. Megmutatjuk, hogy  $L$  zárt a halmazelméleti metszésre és egyesítésre nézve. Feltesszük, hogy  $|A| \geq 2$ , különben  $L = \{\emptyset, I\}$  és a helyzet triviális. Rögzítsünk  $a, b \in A$  elemeket úgy, hogy  $a < b$  legyen /ha a rendezés triviális, akkor  $a, b$  tetszőleges különböző elemek/. Jelölje továbbá  $B$   $A$  tetszőleges felszálló részhalmazát. Tekintsük a következő függvényeket  $A$ -n:

$$\mathcal{V}_B(x) = \begin{cases} b, & \text{ha } x \in B \\ a, & \text{különben} \end{cases} \quad / B \text{ "a,b-indikátor"} /,$$

$$\delta(x, y) = \begin{cases} b, & \text{ha } x \geq b \text{ vagy } y \geq b \\ a, & \text{különben} \end{cases},$$

$$\hat{\delta}(x, y) = \begin{cases} b, & \text{ha } x \geq b \text{ és } y \geq b \\ a, & \text{különben} \end{cases} \quad . \text{ Azonnal látszik,}$$

hogy ezek mind monotonok. Tetsz.  $P$  parciálisan rendezett halmaz esetén legyen bármely  $x \in P$  mellett  $[x] = \{y \mid y \geq x\}$ . Legyen most már  $d_1, d_2 \in L$ ,  $d_i = B_i f_i^{-1}$ ,  $B_i \in \mathcal{U}(\mathcal{U})$ ,  $f_i \in \tilde{\mathcal{U}}$ ,  $i = 1, 2$ . Véve a  $g(x) = \delta(\mathcal{V}_{B_1}(f_1(x)), \mathcal{V}_{B_2}(f_2(x)))$  és a  $\delta$  helyett  $\hat{\delta}$ -pal ugyanígy felépülő  $h(x)$  függvényeket / $\delta, \hat{\delta}, \mathcal{V}_{B_1}$  alkalmazása komponensenként!/, ezek  $\tilde{\mathcal{U}}$ -ba tartoznak, hiszen utóbbi zárt a normalitás folytán a kérdéses négy függvényre nézve. Nyilvánvaló, hogy  $[b]g^{-1} = d_1 \cup d_2$  és  $[b]h^{-1} = d_1 \cap d_2$ , tehát  $d_1 \cup d_2, d_1 \cap d_2 \in L$ . Az okfejtést a  $d_1 = d_2$  esetre specializálva látjuk azt is, hogy

$\{L = \{H \mid H \subseteq I \text{ és } H = [b]f^{-1} \text{ alkalmas } f \in \tilde{\mathcal{U}}\text{-ra}\}$ . Végül is tehát kiderült, hogy  $\mathcal{L} = (L; \cap, \cup, \emptyset, I)$  részhálóját  $I$  részhalmazhálójának; ezt rendeljük  $\tilde{\mathcal{U}}$ -hoz, és jelöljük  $\mathcal{L}_{\tilde{\mathcal{U}}}$ -mal.

Az is világos, hogy ha  $\mathcal{U}$  rendezése triviális, akkor Boole-háló keletkezik, hiszen ekkor minden  $A$ -beli felszálló halmaz komplementere is felszálló.

**3.3 Tétel** /Normális szubdirekt hatványok jellemzése/  $A$  mondott feltételekkel  $\tilde{\mathcal{U}}$  izomorf  $\mathcal{U}[\mathcal{L}_{\tilde{\mathcal{U}}}]$  egy részalgebrájával. Ha  $\mathcal{U}$  rendezése hálószerű vagy triviális, akkor az általunk megadott beágyazás izomorfizmus lesz. /Feltesszük, hogy  $\mathcal{U}$  véges!/  
**Bizonyítás:** Tekintsük  $\mathfrak{X} = (X; \mathcal{T}, \leq)$ -t,  $\mathcal{L}_{\tilde{\mathcal{U}}}$  Priestley-terét. Tetszőleges  $f \in \tilde{\mathcal{U}}$ -hoz hozzárendeljük  $\mathcal{U}[\mathcal{L}_{\tilde{\mathcal{U}}}]$  egy jól meghatározott  $F_f$  elemét; az  $f \mapsto F_f$  megfeleltetés lesz a kívánt beágyazás. Legyen most a tetszőleges  $f \in \tilde{\mathcal{U}}$  rögzítve; bármely  $B \in \mathcal{U}(\mathcal{U})$  esetén  $d_B$  jelölje a  $Bf^{-1}$  halmazt. Ha  $B = [b]$ , akkor  $d_b$ -t írunk. Legyen  $F_f$  az a leképezés, amely  $\mathcal{L}_{\tilde{\mathcal{U}}}$  tetszőleges  $P$  duális primideáljához pontosan akkor rendeli az  $a \in A$  értéket, ha  $P \in \mathcal{P}_{d_a}$ , de  $P \notin$

$\mathcal{P}_{d_{[a] \setminus \{a\}}}$ , vagyis bármely  $a \in A$ -ra legyen

$$\{a\} F_f^{-1} = \mathcal{P}_{d_a} \setminus \mathcal{P}_{d_{[a] \setminus \{a\}}} \quad (1)$$

Sorra belátjuk  $F_f$  szükséges tulajdonságait.

(i)  $F_f$  egyértékű: tegyük fel, hogy  $a, b \in A$ ,  $a \neq b$ ,  $P \in X$  duális primideál, melyhez  $F_f$  az  $a, b$  értéket egyaránt hozzárendeli. Nem lehet  $a < b$ , mert ekkor  $P \in \mathcal{P}_{d_b}$  és  $d_{[a] \setminus \{a\}} \supseteq d_b$  folytán

$d_{[a] \setminus \{a\}} \in P$  volna, és így  $P \in \mathcal{P}_{d_{[a] \setminus \{a\}}}$ , ellentmondásban azzal, hogy  $P$ -hez az  $a$  elem is hozzá van rendelve. Szimmetria miatt ezért  $a \parallel b$ . Most  $d_a, d_b \in P$ , így  $d_a \cap d_b \in P$ , de  $d_a \cap d_b = ([a] \cap [b]) f^{-1} = d_{[a] \cap [b]} \subseteq d_{[a] \setminus \{a\}}$ , ennél fogva  $d_{[a] \setminus \{a\}} \in P$ , vagyis  $P \in \mathcal{P}_{d_{[a] \setminus \{a\}}}$ , ismét ellentmondásban azzal, hogy  $a$  megfelel  $P$ -nek.

(ii)  $F_f$  mindenütt értelmezve van: legyenek  $A_1, \dots, A_k$  az összes  $A$ -beli felszálló halmazok, melyek  $f$ -inverzképe a tetsz. rögzített  $P$  duális primideálhoz tartozik / $A$  véges!/. Akkor  $d_{A_1} \cap \dots \cap d_{A_k} \in P$ , így  $d_{A_1} \cap \dots \cap d_{A_k} = d_{A_1 \cap \dots \cap A_k}$  miatt  $P$ -ben van az utóbbi halmaz is. Ez mutatja, hogy az  $A_i$ -k között van legszűkebb. Legyenek  $a_1, \dots, a_m$  ezen legszűkebbnek - mondjuk  $A_1$ -nek - összes minimális elemei; ekkor  $A_1 = [a_1] \cup \dots \cup [a_m]$ , így  $d_{a_1} \cup \dots \cup d_{a_m} = d_{A_1}$ . Mivel utóbbi  $P$ -be tartozik és  $P$  prim, azért a baloldal egyik tagja is  $P$ -be kell essék, pl.  $d_{a_1} = [a_1] f^{-1} \in P$ . Ha most  $m > 1$

volna, akkor ellentmondásba kerülnénk  $A_1$  minimalitásával. Ezért  $m = 1$ ,  $A_1 = [a_1)$  és  $P \in \mathcal{P}_{d_{a_1}}$ , de  $P \notin \mathcal{P}_{d_{[a_1) \setminus \{a_1\}}}$ , hiszen  $A_1$  minimalitása folytán  $d_{[a_1) \setminus \{a_1\}} \notin P$ . Most akkor (1) szerint  $F_f$   $P$ -hez  $a_1$ -et hozzárendeli.

(iii)  $F_f$  folytonos: valóban,  $A$  diszkrét volta miatt elég belátni, hogy az (1) jobboldalán álló halmaz mindig clopen. Tetszőleges  $d \in \mathcal{L}_{\tilde{X}}$ -re  $\mathcal{P}_d$  szubbáziselem  $\mathcal{T}$ -ben; most elég megfigyelni, hogy  $[a) \setminus \{a\} = \bigcup_{b > a} [b)$ , így  $d_{[a) \setminus \{a\}} = ([a) \setminus \{a\})f^{-1} = \bigcup_{b > a} [b)f^{-1} = \bigcup_{b > a} d_b$ , ennél fogva  $\mathcal{P}_{d_{[a) \setminus \{a\}}} = \bigcup_{b > a} \mathcal{P}_{d_b}$ , utóbbi unió véges, tagjai clopenek, így maga az unió is.

(iv)  $F_f$  monoton: legyen  $P_1 \subseteq P_2$   $/P_1, P_2 \in X/$ ,  $F_f$  értéke legyen rajtuk  $a$  ill.  $b$ . Tfh.  $a \not\leq b$ . Definíció szerint  $d_a \in P_1$ , de akkor  $d_a \in P_2$  is áll, ezért  $d_b \in P_2$  miatt  $d_a \cap d_b = d_{[a) \cap [b)} \in P_2$ ; most  $a \not\leq b$  folytán  $[b) \setminus \{b\} \supseteq [a) \cap [b)$ , így  $d_{[b) \setminus \{b\}} \in P_2$  is, ellentmondásban azzal, hogy  $P_2$ -höz  $a$  érték tartozik. Együttal készen vagyunk annak bizonyításával, hogy  $F_f$  valóban az említett disztributív bővítés eleme.

Oldjuk fel most  $f$  rögzítését, futtassuk végig  $\tilde{X}$ -on, és vizsgáljuk a  $\varphi: f \longmapsto F_f$  hozzárendelést.

$\varphi$  művelettartó: legyen  $\mu$  tetszőleges  $n$ -változós művelet,  $n > 0$ ,  $f_1, \dots, f_n \in \tilde{X}$ . Azt kell belátni, hogy tetszőleges  $P \in X$  esetén  $F_{\mu(f_1, \dots, f_n)}$   $P$ -hez a  $\mu(F_{f_1}(P), \dots, F_{f_n}(P))$  értéket rendeli. Legyen  $F_{f_i}(P) = a_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $\mu(f_1, \dots, f_n) = h$ ,  $\mu(a_1, \dots, a_n) = a$ . Most  $\mu$  monotonitása miatt  $[a_1)f_1^{-1} \cap \dots \cap [a_n)f_n^{-1} \subseteq [a)h^{-1}$ , továbbá  $F_{f_i}(P) = a_i$  folytán  $[a_i)f_i^{-1} \in P$ ,  $i = 1, \dots, n$ , ekkor azonban a baloldal és következésképpen a jobboldal is  $P$ -be tartozik.  $F_{\mu(f_1, \dots, f_n)}(P) = \mu(a_1, \dots, a_n)$ -hez arról kell még meggyőződni, hogy  $([a) \setminus \{a\})h^{-1} \notin P$ . Tegyük fel az ellenkezőjét. Akkor

$$\begin{aligned} ([a) \setminus \{a\})h^{-1} &= \{x \in I \mid \mu(f_1(x), \dots, f_n(x)) > a\} = \\ &= \bigcup_{\mu(b_1, \dots, b_n) > a} (\{b_1\}f_1^{-1} \cap \dots \cap \{b_n\}f_n^{-1}) = \\ &= \bigcup_{\mu(b_1, \dots, b_n) > a} ([b_1)f_1^{-1} \cap \dots \cap [b_n)f_n^{-1}), \text{ mivel ha } \hat{b}_1 \geq b_1, f_i(x) = \\ &\hat{b}_1, i = 1, \dots, n, \text{ akkor } \mu \text{ monotonitása folytán } \mu(f_1(x), \dots, f_n(x)) = \\ &\mu(\hat{b}_1, \dots, \hat{b}_n) \geq \mu(b_1, \dots, b_n) > a. \text{ Mivel az utoljára nyert unió } P\text{-hez} \end{aligned}$$

tartozik,  $P$  prim volta és az unió nyilvánvaló végessége folytán valamelyik tagja is  $P$ -be esik, azaz valamely olyan  $b_1, \dots, b_n \in A$  elem-sorozat esetén, melyre  $\mu(b_1, \dots, b_n) > a$  áll,  $[b_1]f_1^{-1} \cap \dots \cap [b_n]f_n^{-1} \in P$ , és ekkor  $[b_i]f_i^{-1} \in P$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Nem lehet minden  $i$ -re  $b_i \leq a_i$ , mert ekkor  $\mu(b_1, \dots, b_n) \leq \mu(a_1, \dots, a_n) = a$  volna. Legyen ezért például  $b_1 \not\leq a_1$ . Most  $[b_1]f_1^{-1} \in P$ ;  $[a_1]f_1^{-1} \in P$  az  $F_f(P) = a_1$  összefüggés miatt áll, így  $[b_1]f_1^{-1} \cap [a_1]f_1^{-1} = ([b_1] \cap [a_1])f_1^{-1} \in P$ , de  $b_1 \not\leq a_1$  miatt  $[a_1] \cap [b_1] \subseteq [a_1] \setminus \{a_1\}$ , így  $([a_1] \setminus \{a_1\})f_1^{-1} \in P$ , ellentmondásban  $F_f(P) = a_1$ -gyel.

Ha  $\mu$  0-változós művelet  $\mathcal{A}$ -on, melynek értéke az  $a \in A$  konstans leképezés, akkor (1)-et felhasználva azonnal látszik, hogy  $F$  minden  $P \in X$ -hez az  $a$  értéket rendeli, vagyis  $F$  nem más, mint a  $\mu$  0-változós művelet értéke  $\mathcal{U}[\mathcal{A}]$ -ban.

$\varphi$  rendezéstartó: legyen  $f, g \in \mathcal{A}$ ,  $f \leq g$ ,  $P \in X$  tetszőleges,  $F_f(P) = a$ , vagyis  $[a]f^{-1} \in P$ ,  $([a] \setminus \{a\})f^{-1} \notin P$ .  $f \leq g$  miatt  $[a]g^{-1} \supseteq [a]f^{-1}$ , és így  $[a]g^{-1} \in P$ . A (ii) pontban alkalmazott gondolatmenethez hasonlóan belátható, hogy létezik minimális  $\emptyset$ -től különböző  $H \subseteq [a]$  felszálló halmaz, melyre  $Hg^{-1} \in P$ , és ez  $H = [b]$  alakú. Most  $H$  definíciója folytán  $F_g(P) = b$ , és  $H \subseteq [a]$  miatt  $a \leq b$ .  $P$  tetszőleges volt, ennél fogva  $F_f \leq F_g$ .

$\varphi$  inverz rendezéstartó: tegyük fel, hogy  $F_f \leq F_g$ , mégis valamely  $i \in I$ -re  $a = f(i) \not\leq g(i)$ . Ekkor  $i \in [a]f^{-1} = H$ ,  $i \notin [a]g^{-1} = K$ . Vegyük  $\mathcal{A}$ -nak olyan  $P$  duális primideálját, mely tartalmazza  $H$ -t, de nem tartalmazza a  $H_0 = ([a] \setminus \{a\})f^{-1} \cup K$  halmazt /utóbbi nyilván  $\mathcal{A}$ -ba tartozik/;  $i \in H$  és  $i \notin H_0$  folytán  $H \not\subseteq H_0$ , ezért a kérdéses tulajdonságu  $P$  valóban létezik.  $H_0 \notin P$  miatt  $([a] \setminus \{a\})f^{-1} \notin P$  is áll, ezért  $F_f(P) = a$ . Másrészt viszont semmilyen  $\hat{a} \geq a$  esetén sem lesz  $[\hat{a}]g^{-1} \in P$ , különben  $[a]g^{-1} = K \in P$ , tehát  $H_0 \in P$  is volna; így  $F_g(P) \neq \hat{a}$  ezen  $\hat{a}$  elemekre, vagyis  $F_g(P) \not\leq F_f(P)$ , ellentmondásban  $F_f \leq F_g$ -vel. Együttal bebizonyítottuk tételünk első felét.

Legyen most  $\mathcal{A}$  hálószerűen rendezett. Megmutatjuk  $\varphi$  szűrjek-tivitását.

Tekintsük a tetszőleges  $F: (X; \mathcal{T}, \leq) \longrightarrow \mathcal{A}$  monoton folyto-nos leképezést. Legyen  $F$  értékkészlete az  $\{x_1, \dots, x_m\}$  halmaz, ahol az  $x_i$ -k páronként különbözőek.  $A_i = [x_i]F^{-1}$  clopen felszálló halmaz, tehát a kérdéses Priestley-térben  $\mathcal{A}$ -nak egy  $d_i$  elemét reprezentálja, azaz éppen a  $d_i$ -t tartalmazó összes duális primideálok ből áll:

$A_i = \mathcal{P}_{d_i}$ ,  $i = 1, \dots, m$ .  $d_i \in \mathcal{L}\tilde{\mathcal{U}}$  miatt alkalmas  $f_i \in \tilde{\mathcal{U}}$ -ra és  $A_i^0 \in \mathcal{U}(\mathcal{U})$  felszálló halmazra  $d_i = A_i^0 f_i^{-1}$ ; ezért  $A_i = \mathcal{P}_{A_i^0 f_i^{-1}}$ . Most tegyük fel, hogy  $\bigvee$  az  $\mathcal{U}$  rendezésének megfelelő egyes tés jele, 0 pedig a legkisebb elemé, és tekintsük a következő függvényeket:

$$\eta_{A_i^0}^{x_i}(t) = \begin{cases} x_i, & \text{ha } t \in A_i^0 \\ 0, & \text{különben} \end{cases} \quad i = 1, \dots, m \text{ és}$$

$$\mathcal{V}(t_1, \dots, t_m) = \bigvee_{i: t_i \geq x_i} x_i \quad / \text{itt az üres unió alatt a } 0$$

értendő/. Világos, hogy ezek mind monotonok, ezért  $\tilde{\mathcal{U}}$  rájuk nézve zárt.

Állítjuk, hogy  $F$  éppen a  $h = \mathcal{V}(\eta_{A_1^0}^{x_1}(f_1), \dots, \eta_{A_m^0}^{x_m}(f_m)) \in \tilde{\mathcal{U}}$  elem  $\varphi$ -képe. Tfh.  $P \in X$ -re  $F(P) = x_i$ .  $P$  pontosan azokra a  $j$ -kre tartozik  $[x_j]F^{-1} = A_j$ -be, melyekre  $x_j \leq x_i$ , másképpen

$$A_j^0 f_j^{-1} \in P \text{ pontosan akkor, ha } x_j \leq x_i. \quad (2)$$

Vizsgáljuk most  $[x_i]h^{-1}$ -et.  $[x_i]h^{-1} \supseteq \bigcap_{j: x_j \leq x_i} A_j^0 f_j^{-1}$  nyilvánva-

lón áll továbbá a jobboldal  $P$ -be tartozik, mert előbbi megjegyzésünk folytán minden tényező  $P$ -ben van. De akkor  $[x_i]h^{-1} \in P$  is.

Elegendő most már belátni, hogy  $([x_i] \setminus \{x_i\})h^{-1} \notin P$ , mert ekkor  $F_h(P) = x_i$ , innen viszont  $F_h = F$  következik, mert  $P$  tetszőleges volt.

Tegyük fel, hogy  $([x_i] \setminus \{x_i\})h^{-1} \in P$ . Nyilván  $([x_i] \setminus \{x_i\})h^{-1} \subseteq \bigcup_{\ell: x_\ell \neq x_i} \{s \mid \eta_{A_\ell^0}^{x_\ell}(f_\ell(s)) \geq x_\ell\} = \bigcup_{\ell: x_\ell \neq x_i} \{s \mid f_\ell(s) \in A_\ell^0\} =$

$\bigcup_{\ell: x_\ell \neq x_i} A_\ell^0 f_\ell^{-1}$ , hiszen ha egy egyesítés nagyobb, mint  $x_i$ , akkor valamelyik tag biztosan nem kisebbegyenlő tőle. Így  $\bigcup_{\ell: x_\ell \neq x_i} A_\ell^0 f_\ell^{-1} \in P$ , de  $P$  prim, tehát valamelyik tag is  $P$ -be

tartozik: alkalmas  $\ell_0$ -ra  $A_{\ell_0}^0 f_{\ell_0}^{-1} \in P$ , és ezen  $\ell_0$ -ra  $x_{\ell_0} \neq x_i$ , ez viszont ellentmondásban áll (2)-vel.

Végül, ha  $\mathcal{U}$  rendezése triviális, akkor  $\mathcal{V}$  helyett véve a

$$\hat{\mathcal{V}}(t_1, \dots, t_m) = \begin{cases} x_i, & \text{ha } t_i = x_i, \text{ de } j \neq i \text{ esetén } t_j \neq x_j \\ a, & \text{különben} \end{cases} \quad / \text{itt } a \in A \text{ előre rögzített/}$$

függvényt, a most látott bizonyítás analogonja elvégezhető. Q. E. D.

Megjegyzések a tételhez. 1.<sup>o</sup> Az  $F_f$  leképezés definíciója

rendkívül komplikáltak tűnik /és ezzel együtt természetesen a  $\varphi$  leképezésé is/, azonban mégis nagyon kézenfekvő, ugyanis  $f$ -et teljesen meghatározzák az  $\{a\}f^{-1} = [a]f^{-1} \setminus ([a] \setminus \{a\})f^{-1}$  alakú halmazok. Az (1) definíció tulajdonképpen "átülteti"  $f$ -et  $I$ -ről  $X$ -re /azaz  $\mathcal{L}\tilde{\mathcal{A}}$  Priestley-tere tartóhalmazára/, hiszen  $\mathcal{P}_a$  ill.  $\mathcal{P}_{[a] \setminus \{a\}}$  nem más, mint az  $[a]f^{-1}$  ill.  $([a] \setminus \{a\})f^{-1}$   $\mathcal{L}\mathcal{A}$ -beli elemnek az  $\mathcal{L}\tilde{\mathcal{A}}$ -t  $(X; \mathcal{T}, \leq)$ -ből előállító kanonikus izomorfizmus /lásd 1.10 tétel/ melletti képe.

2.° Nyitott kérdés még, hogy a tétel valamiféle gyengébb feltételek mellett is bebizonyítható-e.

3.° A normális szubdirekt hatványokhoz korlátos disztributív háló hozzárendelése és ezzel a tétel bizonyítása nem egyszerűsíthető oly módon, hogy maga  $I$  legyen a kérdéses 0,1-disztributív háló Priestley-terének alaphalmaza, és maguk az  $f \in \tilde{\mathcal{A}}$  függvények adják ennek  $\mathcal{A}$ -ba való össze monoton folytonos leképezéseit. Ugyanis például ha  $I$  végtelen és  $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}^I$ , akkor az  $f \in \tilde{\mathcal{A}}$  függvények folytonossága miatt  $I$  minden egyelemű részhalmazának cloppennek kellene lennie - eltekintve az egyelemű  $A$  triviális esetétől -, ekkor viszont a topológia nem lehetne kompakt.

Most kimondhatjuk és igazolhatjuk a fejezet fő tételét:

3.4 Tétel /Hálószerű és triviális rendezésű rendezésprimál algebrak alaptétele/ Ha  $\mathcal{A}$  véges nemtriviális /=legalább kételemű/ rendezésprimál algebra, melynek rendezése hálószerű vagy triviális, akkor  $\text{QSP}(\mathcal{A})$  minden eleme izomorfiától eltekintve  $\mathcal{A}[\mathcal{L}]$  alakú, ahol  $\mathcal{L}$  alkalmas 0,1-disztributív háló; a triviális rendezés esetében ez Boole-háló.

/Valódi rendezés mellett  $\text{QSP}(\mathcal{A})$  lesz az  $\mathcal{A}$  által generált rendezett algebrakból álló varietás, lásd 2.19 tétel; ha triviális rendezés van, akkor pedig  $\text{QSP}(\mathcal{A})$  lényegében az  $\mathcal{A}$  által genrált közönséges varietással azonos./

Bizonyítás: Mindkét esetben  $\mathcal{A}$  egyszerű, és nincs valódi részalgebraja /igazolása rutin kérdése/. A Jónsson-lemma 2.22 ill. 1.1 alakja szerint /figyelembevétel, hogy mind a rendezésprimál hálószerű mind pedig a primál esetben fennáll a kongruenciadisztributivitás a  $\text{QSP}(\mathcal{A})$  osztályra/  $\text{QSP}(\mathcal{A})$  szubdirekt irreducibilis elemei az  $\mathcal{A}$ -val izomorf és az egyelemű algebra /mert  $\text{QSP}_U(\mathcal{A}) = \text{QS}(\mathcal{A}) = \mathcal{Q}(\mathcal{A})$ /. Ezért tetszőleges  $B \in \text{QSP}(\mathcal{A})$  algebra  $\mathcal{A}$ -nak szubdirekt hatványával izomorf vagy pedig egyelemű. Utóbbi esetben a tétel érvényes

/tekintsük az üres Priestley- ill. Boole-teret/. Ha  $B$   $\mathcal{L}$ -nak szubdirekt hatványa, akkor az  $\mathcal{L}$  rendezésprimálitása folytán normális szubdirekt hatványról van szó, így állításunk következik a 3.3 tételből, Q. E. D.

A mostani tételnek a triviális rendezésre vonatkozó esetéből lehet vezetni a primál algebrák Foster-féle alaptételét /lásd [29]/: primál algebra által generált varietásban minden elem izomorf a generátoralgebra egy alkalmas Boole-bővítésével / 1.3 definíció/. Ehhez figyelembe kell venni, hogy a Boole-bővítéseknek is van a disztributív bővítésekéhez hasonló / 3.2 definíció/, az eredtivel ekvivalens definíciója, mely a Boole-hálóknak Stone-terét használja fel. További részletekbe ezzel kapcsolatban itt nem bocsátkozunk. Természetesen a 3.4 tétel triviális rendezésre vonatkozó része nem tekinthető új eredménynek.

## IV. FEJEZET

### DUALITÁSELMÉLET RENDEZÉSPRIMÁL HÁLÓSZERŰ ALGEBRÁKRA

#### 1. Priestley- $\beta$ -reprezentáció

A II. fejezet 4. §-ban bevezettük a Priestley-terek  $\beta$ -karakterisztikus algebrájának továbbá a  $\beta$  által generált varietás elemei Priestley- $\beta$ -terének fogalmát / $\beta$  adott rendezésprimál algebra/. A 2.25 definíció jogosságát ott nem láttuk be. Itt most elvégezzük ezt.

**4.1 Lemma** /  $H_\beta(\mathcal{U})$  Priestley-tér/ Ha  $\mathcal{U}$  a  $\beta$  által generált varietáshoz tartozik, akkor  $H_\beta(\mathcal{U})$  Priestley-tér.

**Bizonyítás:** A  $P^A$  halmaz  $P$  diszkrét topológiájából öröklött szorzattopológiája kompakt, mert  $P$  véghessége folytán az ő diszkrét topológiája kompakt. Most  $H_\beta(\mathcal{U})$  kompaktségához elegendő belátni, hogy  $P^A$ -ban zárt részhalmazt alkot. A komplementeréről igazoljuk, hogy nyitott; legyen tehát  $G = P^A \setminus H_\beta(A)$  /ez  $H_\beta(\mathcal{U})$  alaphalmaza/,  $f \in G$ . Ha ez azért van, mert  $f$  nem monoton, akkor pl.  $f(a) \not\leq f(b)$ , ahol  $a < b$ . Ekkor a  $\{g \mid g(a) = f(a), g(b) = f(b)\}$  halmaz /kanonikus bázis-/környezete  $f$ -nek, és része  $G$ -nek. Hasonlóan látható, hogy ha  $f$  azért tartozik  $G$ -be, mert a művelettartás sérti meg, akkor is van olyan /előbbi típusu/ környezete, amely  $G$ -nek része. Így  $H_\beta(\mathcal{U})$  topológiája valóban kompakt.

Legyen  $f, g \in H_\beta(A)$ ,  $f \neq g$ ; ekkor van olyan  $a \in A$ , melyre  $u = f(a) \not\leq g(a) = v$ . Akkor az  $S = \{h \mid h(a) \geq u\}$  halmaz felszálló clopen,  $f \in S$ ,  $g \notin S$ , vagyis a topológia teljesen rendezés-összenem-függő, **Q. E. D.**

A  $\beta$  által generált varietást, mint kategóriát /morfizmusok a monoton homomorfizmusok/ jelölje  $\mathcal{V}(\beta)$ . Légyenek adva tetszőleges  $\mathcal{U}, \mathcal{B} \in \text{Ob}(\mathcal{V}(\beta))$  algebrák és  $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{B}$  morfizmus. Utóbbinak megfeleltetünk egy  $H_\beta(f)$ -fel jelölt leképezést a

$$H_\beta(f) : H_\beta(\mathcal{B}) \rightarrow H_\beta(\mathcal{A})$$

$$g \mapsto fg$$

$$\begin{array}{ccc} A & & \\ \downarrow f & \searrow & fg = g[H_\beta(f)] \\ B & \xrightarrow{g} & P \end{array}$$

utátságával. Hasonlóan, ha adottak az

$X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{K})$  /  $\mathcal{K}$  a Priestley-terek kate-

4. ábra

góriája/ Priestley-terek és az  $f: X \longrightarrow Y$  morfizmus, akkor  $f$ -nek megfeleltetünk egy  $C_{\mathcal{P}}(f)$ -fel jelölt leképezést a

$$C_{\mathcal{P}}(f) : C_{\mathcal{P}}(Y) \longrightarrow C_{\mathcal{P}}(X) \\ g \longmapsto fg$$

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ f \downarrow & \searrow fg = g[C_{\mathcal{P}}(f)] & \\ Y & \xrightarrow{g} & P \end{array}$$

törvényt. Ezzel kapcsolatban érvényes:

5. ábra

4.2 Tétel: / A  $H_{\mathcal{P}}$  és  $C_{\mathcal{P}}$  funktorok/  
 $A \ H_{\mathcal{P}} : \mathcal{U} \longrightarrow H_{\mathcal{P}}(\mathcal{U}), f \longmapsto H_{\mathcal{P}}(f)$  illetve  $C_{\mathcal{P}} : \mathcal{X} \longrightarrow C_{\mathcal{P}}(\mathcal{X}), f \longmapsto C_{\mathcal{P}}(f)$  megfeleltetés kontravariáns funktor  $\mathcal{V}(\mathcal{P})$ -ről  $\mathcal{K}$ -ra illetve fordítva.

Bizonyítás: Közvetlen számolással.

4.3 Definíció /Priestley- $\mathcal{P}$ -tér-funktor és  $\mathcal{P}$ -karakterisztikus-algebra-funktor/ Az előbbi tételben szereplő  $H_{\mathcal{P}}$ -t nevezzük Priestley- $\mathcal{P}$ -tér-funktornak,  $C_{\mathcal{P}}$ -t pedig  $\mathcal{P}$ -karakterisztikus-algebra-funktor-nak.

Figyeljük meg, hogy a  $H_{\mathcal{P}}$  és  $C_{\mathcal{P}}$  funktorok jelét zárójelbe tett argumentumai baloldalára irtuk, viszont a  $H_{\mathcal{P}}(f)$  és  $C_{\mathcal{P}}(f)$  leképezések alkalmazásánál őket az argumentumok után tettük ki. Utóbbira a kontravariancia biztosítása érdekében volt szükség, míg előbbi funktorok esetén megszokottabb.

Most bevezetjük  $\mathcal{V}(\mathcal{P})$ -beli algebra-k és Priestley-terek bizonyos fajtájú reprezentációjának fogalmát.

4.4 Definíció /  $\mathcal{V}(\mathcal{P})$ -algebra Priestley- $\mathcal{P}$ -reprezentációja/  
 Legyen  $\mathcal{U} \in \mathcal{V}(\mathcal{P})$ ,  $a \in A$  rögzített elem. Azon

$$e : \mathcal{U} \longrightarrow C_{\mathcal{P}}H_{\mathcal{P}}(\mathcal{U})$$

$$a \longmapsto e(a) \quad \text{megfeleltetést, ahol } e(a) \text{ nem más,}$$

mint  $H_{\mathcal{P}}(\mathcal{U})$  elemeinek az a helyen való kiértékelése, vagyis az

$$e(a) : H_{\mathcal{P}}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{P}$$

$$f \longmapsto f(a) \text{ leképezés, } \mathcal{U} \text{ Priestley-}\mathcal{P}\text{-}$$

reprezentációjának nevezzük.

4.5 Lemma / "e" morfizmus  $\mathcal{V}(\mathcal{P})$ -ben/ Az "e" leképezés  $\mathcal{U}$ -nak  $C_{\mathcal{P}}H_{\mathcal{P}}(\mathcal{U})$ -ba való monoton homorfizmusa.

Bizonyítás: mindenekelőtt azt kell belátni, hogy a leképezés valóban  $C_{\mathcal{P}}H_{\mathcal{P}}(\mathcal{U})$ -ba történik. Ha  $a \in A$  tetszőleges, akkor  $e(a)$  monotonitása triviális, a folytonosság pedig onnan látszik, hogy az  $e(a)(f) = f(a) = u$  elem által meghatározott  $u$  halmaz nyílt  $\mathcal{P}$ -ben,  $u$  inverzképe  $e(a)$  mellett nem más, mint  $\{g \mid g(a) = u\}$ , ez pedig  $f$ -nek nyílt környezete. Tehát  $e(a) \in C_{\mathcal{P}}H_{\mathcal{P}}(\mathcal{U})$ .



Most "e" monotonitása szintén triviális, így művelettartását vizsgáljuk. Ha  $\mu$  tetszőleges  $n$ -változós művelet, akkor bármely  $f \in H_{\beta}(\mathcal{U})$ -ra

$$\begin{aligned} e(\mu(a_1, \dots, a_n))(f) &= f(\mu(a_1, \dots, a_n)) = \mu(f(a_1), \dots, f(a_n)) = \\ &= \mu(e(a_1)(f), \dots, e(a_n)(f)) = \mu(e(a_1), \dots, e(a_n))(f) \end{aligned}$$

/a második egyenlőségnél  $f$  homomorf voltát, a negyediknél pedig a műveletek  $C_{\beta}H_{\beta}(\mathcal{U})$ -beli definícióját vettük figyelembe/. Hasonlóan, a művelettartás 0-változós műveletekre is áll, Q. E. D.

4.6 Definíció /Priestley-tér Priestley- $\beta$ -reprezentációja/ Legyen  $\mathcal{X} \in \mathcal{H}$  tetszőleges Priestley-tér. Azon

$$\tilde{e} : \mathcal{X} \longrightarrow H_{\beta}C_{\beta}(\mathcal{X})$$

$$x \longmapsto \tilde{e}(x)$$

megfeleltetést, ahol  $\tilde{e}(x)$  nem más,

mint  $C_{\beta}(\mathcal{X})$  elemeinek az  $x$  helyen való kiértékelése, vagyis az

$$\tilde{e}(x) : C_{\beta}(\mathcal{X}) \longrightarrow \beta$$

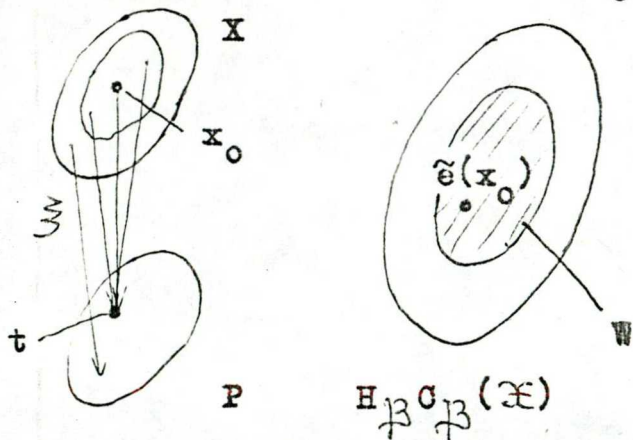
$f \longmapsto f(x)$  leképezés,  $\mathcal{X}$  Priestley- $\beta$ -

reprezentációjának nevezzük.

4.7 Lemma /" $\tilde{e}$ " morfizmus  $\mathcal{H}$ -ban/ Az " $\tilde{e}$ " leképezés  $\mathcal{X}$ -nek  $H_{\beta}C_{\beta}(\mathcal{X})$ -be való monoton folytonos leképezése.

Bizonyítás: az első lépés itt is annak megmutatása, hogy a leképezés  $H_{\beta}C_{\beta}(\mathcal{X})$ -be történik. Ehhez arról kell meggyőződni, hogy tetszőleges  $x \in \mathcal{X}$  esetén  $\tilde{e}(x)$  monoton és homomorf; előbbi nyilvánvaló, utóbbi pedig a 4.5 lemme mintájára végigszámolható.

Magának  $\tilde{e}$ -nak a monotonitása megint nyilvánvaló, csak a folytonosságával foglalkozunk. Legyen  $x_0 \in \mathcal{X}$  tetszőleges rögzített elem;  $\tilde{e}(x_0)$



6. ábra

egy szubbáziskörnyezete pl. azon  $\xi : C_{\beta}(\mathcal{X}) \rightarrow \beta$  monoton homomorfizmusok  $W$  halmaza, melyek egy adott  $\xi : \mathcal{X} \rightarrow \beta$  folytonos monoton leképezésen a  $\xi(x_0) = t$  értéket veszik fel. A  $G = \xi^{-1}(t)$  halmaz nyitott  $\beta$ -ben. Állítjuk, hogy  $G$   $\tilde{e}$ -képe része  $W$ -nek. Valóban, ha  $z \in G$ , akkor  $\tilde{e}(z)(\xi) = \xi(z) = t$ , tehát  $\tilde{e}(z)$

$\in W$ , Q. E. D.

## 2. A dualitáselmélet főtétele

Legyenek  $M, N$  adott halmazok,  $N$  parciálisan rendezett,  $\Gamma$  pedig  $M \longrightarrow N$  leképezések egy családja,  $i_1, i_2 \in M$ .

**4.8 Definíció /  $\Gamma$  -kvázirendezés/** Legyen  $i_1 \preceq_{\Gamma} i_2$ , ha bármely  $f \in \Gamma$  -ra  $f(i_1) \leq f(i_2)$   $N$ -ben.

A definíció nem zárja ki, hogy  $M$  is parciálisan rendezett legyen. Ha ez a helyzet, és  $\Gamma$  elemei mind monotonok, akkor természetesen  $i_1 \leq i_2$  esetén  $i_1 \preceq_{\Gamma} i_2$  is áll. A  $\Gamma$  indexet elhagyjuk, ha nem okoz zavart.

**4.9 Definíció /Pontpárok megkülönböztetése  $\Gamma$  által/** Azt mondjuk, hogy  $\Gamma$  megkülönbözteti  $i, j$ -t, ha  $i \preceq j$  és  $j \preceq i$  valamelyike nem érvényes, azaz  $i$  és  $j$  képe a  $\Gamma$ -beli függvényeknél nem mindig ugyanaz.  $\Gamma$  megkülönbözteti a pontokat, ha bármely  $i, j$ -re  $i \neq j$  esetén ezt teszi.

Nyilvánvaló, hogy a 4.8 definícióban általában valóban csak kvázirendezésről van szó.

**4.10 Lemma /  $H_{\mathcal{P}}(\mathcal{U})$  elemei megkülönböztetik  $A$  pontjait/** Ha hálószerű rendezésprimál algebra,  $\mathcal{U} \in \mathcal{V}(\mathcal{P})$ , akkor az  $\mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{P}$  homomorfizmusok megkülönböztetik  $A$  pontjait.

**Bizonyítás:** a rendezésprimál hálószerű algebrak alaptétele értelmében /3.4 tétel/  $\mathcal{U}$  izomorf valamely  $\mathcal{B} \leq \mathcal{P}^I$  normális szubdirekt hatvánnyal; triviális, hogy  $\mathcal{B}$ -ben már a  $\{\pi_i | i \in I\}$  projekciórendszer is megkülönbözteti az elemeket. Lévé  $\mathcal{U}$   $\mathcal{B}$ -vel izomorf, állításunk adódik, Q. E. D.

**4.11 Lemma /Két komponens előírása szubdirekt hatvány valamely eleménél/** Legyen  $\mathcal{P}$  hálószerű rendezésprimál algebra,  $\mathcal{U} \leq \mathcal{P}^I$  részalgebra /és ekkor nyilván szubdirekt hatvány, esetleg más kitevővel/. Ha  $i_1 \not\leq_A i_2$ ,  $i_2 \not\leq_A i_1$ , akkor bármely  $p, q \in P$  értékeket megadva, létezik olyan  $g \in A$ , hogy  $g(i_1) = p$ ,  $g(i_2) = q$ . Ha csak  $i_1 \not\leq_A i_2$  van feltéve, akkor annyit mondhatunk, hogy bármely  $p \geq q \in P$  elemekhez van olyan  $h \in A$ , melyre  $h(i_1) = p$ ,  $h(i_2) = q$ .

**Bizonyítás:** Az első esetben léteznek olyan  $f_1$  és  $f_2 \in A$  kiválasztási függvények, hogy  $f_1(i_1) = u_1 \not\leq v_1 = f_1(i_2)$  és  $f_2(i_1) = u_2 \not\leq v_2 = f_2(i_2)$ . Tekintsük

$$P\text{-n a} \quad \xi(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{ha } (x, y) \geq (u_1, u_2), (v_1, v_2) \\ p, & \text{ha } (x, y) \geq (u_1, u_2) \text{ de } (x, y) \not\geq (v_1, v_2) \\ q, & \text{ha } (x, y) \geq (v_1, v_2) \text{ de } (x, y) \not\geq (u_1, u_2) \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

függvényt; ez nyilván monoton, így polinom  $\beta$ -n. Most a  $g(k) = \sum (f_1(k), f_2(k)) \in A$  kiválasztási függvény megfelel a célnak /itt  $k$  a független változó, mely  $I$ -t futja be/.

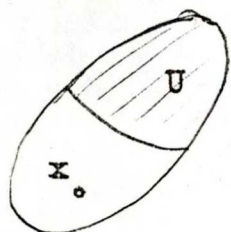
A második esetben van olyan  $f \in A$ , hogy  $f(i_1) = u \neq f(i_2) = v$ ;  
az

$$\eta(x) = \begin{cases} p, & \text{ha } x \geq u \\ q, & \text{különben} \end{cases} \quad \text{függvény monoton } P\text{-n ezért polinom}$$

$\beta$ -n. Most a  $h(k) = \eta(f(k)) \in A$  elem lesz jó, Q. E. D.

4.12 Lemma /  $\beta$ -karakt.-algebra adott clopen halmazon és komplementeren adott értékeket felvevő eleme/ Legyen  $\beta$  hálószerű rendezésprimál algebra,  $\mathfrak{X}$  Priestley-tér,  $\mathcal{U} \leq C_\beta(\mathfrak{X})$  részalgebra,  $U$  felszálló clopen halmaz  $\mathfrak{X}$ -ben. Tegyük fel, hogy bármely  $(i, j) \in (X \setminus U) \times U$  esetén  $i \not\leq_A j$ . Akkor tetszőleges  $p < q \in P$  elemek mellett van olyan  $f \in A$ , hogy  $f$   $U$ -n a  $q$  értéket, komplementeren pedig  $p$ -t vesz fel.

Bizonyítás: rögzítsünk tetszőleges  $x \notin U$ -t; minden  $y \in U$ -hoz



van olyan  $f_y \in A$ , hogy  $u_y = f_y(x) \neq f_y(y) = v_y$ . A nyílt  $\{[v_y] f_y^{-1} \mid y \in U\}$  halmazrendszer lefedi  $U$ -t;  $U$  zártága folytán kompakt, tehát ezek közül véges sok is lefedi, tartozzanak utóbbiak  $y_1, \dots, y_n$ -hez; a 4.11 lemmát alkalmazva feltesszük, hogy  $f_{y_i}(x) = 0$ ,  $f_{y_i}(y_i) = 1$ . A  $h_x(t) =$

$\bigvee_{i=1}^n f_{y_i}(t) \in A$  függvény olyan, hogy  $h(x) = 0$  és  $h(y) = 1$ . Most  $x$ -et végigfuttatva  $X \setminus U$ -n, a  $\{0\} h_x^{-1}$  halmazok nyíltak és lefedik a zárt  $X \setminus U$ -t; így véges sok is lefedi, tartozzanak utóbbiak  $x_1, \dots, x_m$ -hez. Akkor az

$$f_0(t) = \bigwedge_{j=1}^m h_{x_j}(t) \in A \quad \text{függvényre } f_0(U) = \{1\}, \quad f_0(X \setminus U) = \{0\}.$$

Tekintve a

$$\zeta(x) = \begin{cases} q, & \text{ha } x > 0 \\ p, & \text{ha } x = 0 \end{cases} \quad \text{függvényt } P\text{-n,}$$

ez monoton, tehát polinom  $\beta$ -n, ezért  $f(t) = \zeta(f_0(t)) \in A$ ; ez az  $f$  a kívánt tulajdonságu, Q. E. D.

4.13 Lemma /Polytonos leképezés megszerkesztése az ékek inverz-képeiből/ Legyen  $\beta$  hálószerű rendezésprimál algebra,  $\mathfrak{X}$  Priestley-tér, benne adott felszálló clopen halmazok véges  $U_1, \dots, U_n$  rendszerre, minden  $i$ -re  $U_i$ -hez egy  $p_i \in P$  érték hozzárendelve úgy, hogy  $p_i \leq p_j$  pontosan akkor, ha  $U_i \supseteq U_j$ ;  $p_i = 0$ -ból  $U_i = X$  következzen, és valahányszor  $x \notin U_i$ , mindig  $\bigvee_{x \in U_j} p_j \not\leq p_i$  álljon. Legyen továbbá

egy  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{P}}(\mathcal{X})$  részalgebra adva, és tegyük fel, hogy bármely  $i$ -re és  $(x, y) \in (X \setminus U_i) \times U_i$ -re  $x \not\geq_A y$ . Akkor létezik olyan  $f \in A$ , hogy minden  $i$ -re  $[p_i]f^{-1} = U_i$  és  $\{p_i\}f^{-1} = U_i \setminus \bigcup_{\substack{\cap U_j \subset U_i \\ \text{valódi}}} U_j$ .

Bizonyítás: tetszőleges  $i$  / $1 \leq i \leq m$ / esetén legyen  $f_i \in A$  olyan, hogy  $f_i(U_i) = \{p_i\}$ ,  $f_i(X \setminus U_i) = \{0\}$  /vagy  $\emptyset$ /; ezek az előző lemma értelmében léteznek. Tekintsük akkor most az  $f(x) = f_1(x) \vee \dots \vee f_m(x)$  függvényt;  $f \in A$ , mert  $\vee$  monoton függvény, tehát polinom  $\mathcal{B}$ -n. Vizsgáljuk  $f$ -et.

(i) Ha  $x \in U_i$ , akkor  $f_i(x) = p_i$ , így  $f(x) \geq p_i$  már áll.

(ii) Ha  $x \notin U_i$ , és másik  $U_j$ -nek sem, akkor  $p_i > 0$  és  $f(x) = 0 \not\geq p_i$ ; ha  $x \notin U_i$ , de néhány  $U_j$ -nek eleme, akkor az előző oldal utolsó sora szerint  $f(x) \not\geq p_i$ .

(iii) Ha  $x \in U_i$  és egyúttal  $x \in U_j$  is, ahol  $U_j \subset U_i$ , akkor  $f(x) \geq p_j$ , és  $p_j > p_i$  ekkor a feltételek folytán; így  $\{p_i\}f^{-1} \subseteq U_i \setminus \bigcup_{\substack{\cap U_j \subset U_i \\ \text{valódi}}} U_j$ ; fordítva, ha  $x \in U_i \setminus \bigcup_{\substack{\cap U_j \subset U_i \\ \text{valódi}}} U_j$ , akkor  $f(x)$   $i$ -edik tagja  $p_i$ ,  $U_j \subset U_i$  esetén a  $j$ -edik tag 0. Ha valamely  $k$ -edik tag esetén  $x \in U_k$ , akkor  $p_k \leq p_i$ , különben  $U_k \not\subset U_i$ , így  $U_k \cap U_i \neq U_i$ , de a kérdéses metszet ekkor az  $U$ -k rendszerének egy metszete és valódi része  $U_i$ -nek,  $x$  pedig eleme neki. Ez ellentmondást jelent. Q. E. D.

/Megjegyezzük, hogy a lemmában  $\cap U_j$  alatt tetszőleges számú, az  $U_1, \dots, U_n$  rendszerből való halmaz metszetét értjük./

**4.14 Lemma** /Halmaz generátumának jellemzése  $\mathcal{B}$ -karak.-algebrában/  $\mathcal{B}$  legyen hálószerű rendezésprimál algebra,  $\mathcal{X}$  jelöljön Priestley-teret, legyen  $\mathcal{U} = \mathcal{O}_{\mathcal{P}}(\mathcal{X})$ ,  $S \subseteq A$ . Tetszőleges  $f \in A$ -ra  $f \in [S]$  /= $S$  generátuma/ pontosan akkor, ha valahányszor  $x \not\geq_{\{f\}} y$ , mindannyiszor  $x \not\geq_S y$ .

Bizonyítás: ha  $f \in [S]$  és  $x \geq_S y$ , akkor  $f(y) \leq f(x)$  is a műveletek monotonitása és komponensenkénti definíciója miatt.

Fordítva, tfh. valahányszor  $x \not\geq_{\{f\}} y$ , mindannyiszor  $x \not\geq_S y$ ; legyen  $f$  értékkészlete  $\{p_1, \dots, p_m\}$ ,  $U_i = [p_i]f^{-1}$ ,  $i = 1, \dots, m$  /felteesszük, hogy  $p_i$ -k páronként különbözőek/. Az  $U_i$ -k felszálló clopen halmazok  $\mathcal{X}$ -ben, és nyilvánvaló, hogy az  $U_i \mapsto p_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  rendszer teljesíti az előző lemma feltételeit. Az ottani  $\mathcal{U}$  gyanánt az itteni  $[S]$ -ot véve,  $(x, y) \in (X \setminus U_i) \times U_i$  esetén már  $x \not\geq_{\{f\}} y$  az

$U_i$ -k definíciója szerint; a feltétel folytán  $x \neq_S y$ , így  $x \neq_S y$  is áll. Alkalmazva az előző lemmát, létezik olyan  $g \in [S]$ , hogy minden  $i$ -re  $[p_i]g^{-1} = U_i$ ,  $\{p_i\}g^{-1} = U_i \setminus \bigcup_{\substack{U_j \subset U_i \\ \text{valódi}}} U_j$ , ez utóbbi kifeje-

zés esetünkben nyilván  $U_i \setminus \bigcup_{p_j > p_i} U_j$ -vel egyenlő; ezt figyelembevéve,

valamint azt, hogy a jelenlegi  $\{U_i\}$  rendszer  $\mathcal{X}$ -t lefedi, látjuk, hogy  $g = f$ , tehát  $f \in [S]$ , Q. E. D.

Korollárium Legyen  $\mathcal{X}$  Priestley-tér,  $S$  pedig  $\mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{P}$  monoton folytonos leképezések egy halmaza.  $[S] = C_{\mathcal{P}}(\mathcal{X})$  pontosan akkor, ha  $S$  erősen megkülönbözteti  $X$  pontjait, vagyis a  $\leq_S$  kvázirendezés azonos  $X$  parciális rendezésével.

Bizonyítás: ha  $[S] = C_{\mathcal{P}}(\mathcal{X})$ , akkor - mivel  $C_{\mathcal{P}}(\mathcal{X})$  erősen megkülönbözteti  $X$  pontjait /lásd 4.10 lemma és bizonyítása/ - szükségképpen  $S$  is erősen megkülönbözteti őket /lásd 4.14 lemma első része/.

Ha  $S$  erősen megkülönbözteti a pontokat, akkor tetszőleges  $f \in C_{\mathcal{P}}(\mathcal{X})$ -t véve, teljesül erre a 4.14 lemmában szereplő feltétel, ezért  $f \in [S]$ ; így  $f$  tetszőleges volta folytán  $[S] = C_{\mathcal{P}}(\mathcal{X})$ , és ezzel készen is vagyunk. Q. E. D.

A most következő tétel a dualitáshoz szükséges kanonikus izomorfizmusok egyik seregének létezését garantálja.

**4.15 Tétel** /Az "e" leképezés izomorf volta/ Ha  $\mathcal{P}$  hálószerű rendezésprimál,  $\mathcal{A} \in \mathcal{V}(\mathcal{P})$ , akkor az "e" leképezés /lásd 4.4 definíció/ izomorfizmus a  $\mathcal{V}(\mathcal{P})$  kategóriában.

Bizonyítás: ha  $a, b \in A$ ,  $a \neq b$ , akkor - mivel  $H_{\mathcal{P}}(\mathcal{A})$  megkülönbözteti  $A$  pontjait /4.10 lemma/ - létezik olyan  $f: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{P}$  homomorfizmus, melyre  $f(a) \neq f(b)$ , azaz  $e(a)(f) \neq e(b)(f)$ ; ezért "e" 1-1-értelmű. Művelettartását és monotonitását láttuk a 4.5 lemmában. Legyen  $f, g \in H_{\mathcal{P}}(\mathcal{A})$ ,  $f \neq g$ , akkor van olyan  $a \in A$ , hogy  $f(a) \neq g(a)$ , így  $e(a)(f) \neq e(a)(g)$ , következésképpen  $e(A)$  /ez az  $\{e(a) \mid a \in A\}$  halmazt jelöli/ erősen megkülönbözteti  $H_{\mathcal{P}}(\mathcal{A})$  pontjait, így a 4.14 lemma korolláriumja szerint  $e(A) = [e(A)] = C_{\mathcal{P}} H_{\mathcal{P}}(\mathcal{A})$ , azaz "e" szürjektív is.

Ha most  $a \parallel b$ , de  $e(a) \leq e(b)$ , akkor bármely  $f: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{P}$  monoton homomorfizmusra  $f(a) \leq f(b)$  állna, ha viszont  $\mathcal{A}$ -t  $\mathcal{P}$  egy normális szubdirekt hatványaként reprezentáljuk az alaptételt felhasználva, akkor látjuk, hogy az utóbbi feltételnek már a projekciók

sem tesznek mind eleget. Ezért  $e^{-1}$  is monoton. Q. E. D.

A második kanonikus izomorfizmusserreg létezésének bizonyítása komolyabb előkészületeket igényel. Célunk "e" izomorf voltának kimutatása lesz.

A következő definíció Evelyn Nelson-tól származik /lásd [ ]/.

**4.16 Definíció** Legyen adva egy  $\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i$  direktszorzat. minden  $i$ -re egy  $\Theta_i \in \text{Con}(\mathcal{A}_i)$  kongruencia,  $F$  pedig legyen filter  $I$  felett. A  $\{\Theta_i\}$  rendszer  $F$ -filterszorzatán az  $f \equiv g (\Theta)$  pontosan akkor, ha  $\{i \mid f(i) \equiv g(i) (\Theta_i)\} \in F$  utasítással definiált relációt értjük. Jelölje  $\Theta$ -t  $\prod_F \Theta_i$ .

Nyilvánvaló, hogy  $\Theta \in \text{Con}(\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i)$ , valamint hogy a definíció szószerint átvihető rendezett algebrákra, sőt szubdirekt szorzatok esetére is. Ezentúl a filterszorzat-kongruenciákat rendezett algebrákra vizsgáljuk, ezt külön már nem említjük.

**4.17 Lemma** Ha  $\tilde{\mathcal{A}} \leq \prod_{i \in I} \mathcal{A}_i$  szubdirekt szorzat,  $F$  filter  $I$  felett, minden  $i$ -re  $\Theta_i \in \text{Con}(\mathcal{A}_i)$ , akkor az előbb definiált  $\Theta$  kongruencia  $\tilde{\mathcal{A}}$ -on.

Bizonyítás:  $\Theta$  reflexivitása és szimmetriája triviális; ha  $f \equiv g (\Theta)$ ,  $g \equiv h (\Theta)$ , akkor  $\{i \mid f(i) \equiv g(i) (\Theta_i)\} \in F$  és  $\{i \mid g(i) \equiv h(i) (\Theta_i)\} \in F$ , így  $\Theta_i$  tranzitivitása miatt  $\{i \mid f(i) \equiv h(i) (\Theta_i)\} \supseteq \{i \mid f(i) \equiv g(i) (\Theta_i)\} \cap \{i \mid g(i) \equiv h(i) (\Theta_i)\} \in F$ , tehát a baloldallal is  $F$ -hez tartozik, vagyis  $f \equiv h (\Theta)$ ,  $\Theta$  tranzitív.

Ha  $\mu$   $n$ -változós művelet  $/n > 0/$ ,  $f_j \equiv g_j (\Theta)$ ,  $j=1, \dots, n$ , akkor a  $\Theta_i$ -k műveletkompatibilitása folytán

$$\{i \mid \mu(f_1, \dots, f_n)(i) \equiv \mu(g_1, \dots, g_n)(i) (\Theta_i)\} \supseteq \bigcap_{j=1}^n \{i \mid f_j(i) \equiv g_j(i) (\Theta_i)\} \in F, \text{ így a baloldal}$$

is  $F$ -ben van, tehát  $\mu(f_1, \dots, f_n) \equiv \mu(g_1, \dots, g_n) (\Theta)$ ,  $\Theta$  műveletkompatibilis.

$\Theta$  "rendezéskompatibilis" is: ha adott az

$f = f_0 \Theta f_1 \leq f_2 \Theta f_3 \dots \leq f_{2k} = g \Theta g_1 \leq g_2 \Theta g_3 \dots \leq g_{2k} = f \Theta$  ciklus, akkor  $\ell = 0, \dots, k-1$  esetén

$S_\ell = \{i \mid f_{2\ell}(i) \equiv f_{2\ell+1}(i) (\Theta_i)\} \in F$  és

$T_\ell = \{i \mid g_{2\ell}(i) \equiv g_{2\ell+1}(i) (\Theta_i)\} \in F$ , ezért  $G = \bigcap_{\ell=0}^k (S_\ell \cap T_\ell) \in F$ ; így ha  $i \in G$ , akkor

$$f(i) = f_0(i) \Theta_i f_1(i) \leq f_2(i) \Theta_i f_3(i) \dots \leq f_{2k}(i) = g(i) \Theta_i$$

$$g_1(i) \leq g_2(i) \Theta_i g_3(i) \dots \leq g_{2k}(i) = f(i) \Theta_i \text{-ciklus; mivel}$$

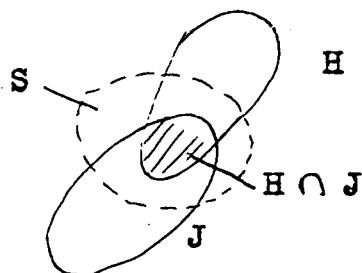
ez azt jelenti, hogy  $f(i) \equiv g(i) (\Theta_i)$ , és  $i \in G$  tetszőleges, azért  $F \ni G \subseteq \{i \mid f(i) \equiv g(i) (\Theta_i)\}$  miatt  $f \equiv g (\Theta)$ , Q. E. D.

**4.18 Lemma** Ha az előző lemma feltételei mellett még mindegyik  $\mathcal{U}_i$  egyszerű, akkor  $\Theta = \prod_F \Theta_i$  filterkongruencia, azaz van olyan  $\tilde{F}$  filter  $I$  felett, hogy  $\Theta = \Theta_{\tilde{F}}$ , vagyis  $f \equiv g (\Theta)$  pontosan akkor, ha  $\{i \mid f(i) = g(i)\} \in \tilde{F}$ .

Bizonyítás: legyen  $J = \{j \mid \Theta_j = \omega, \text{ az egyenlőségrezáció}\}$ , jelölje  $F$  nyomát  $J$ -n  $F'$ , azaz  $F' = \{H \mid H = J \cap H_0 \text{ mely } H_0 \in F\text{-re}\}$ . Legyen  $\hat{F}'$  az  $F'$  által generált filter  $I$  felett, vagyis álljon  $\hat{F}'$  az  $F'$ -beli halmazok felhalmazából /ez valóban filter/. Állítjuk, hogy  $\Theta = \Theta_{\hat{F}'}$ .

Ha  $f \equiv g (\Theta)$ , akkor  $\{i \mid f(i) \equiv g(i) (\Theta_i)\} \in F$ , így  $F' \ni \{i \mid f(i) \equiv g(i) (\Theta_i)\} \cap J \subseteq \{i \mid f(i) = g(i)\}$ , utóbbi tartalmazás mutatja, hogy  $\{i \mid f(i) = g(i)\} \in \hat{F}'$ , vagyis  $f \equiv g (\Theta_{\hat{F}'})$ .

Fordítva, ha  $f \equiv g (\Theta_{\hat{F}'})$ , akkor  $S = \{i \mid f(i) = g(i)\} \in \hat{F}'$ ,



8. ábra

tehát  $S \supseteq H \cap J$ , ahol  $H \in F$ . Állítjuk, hogy  $\{i \mid f(i) \equiv g(i) (\Theta_i)\} \subseteq H$ . Valóban, ha  $i \in H \cap J$ , akkor  $f(i) = g(i)$ , így  $f(i) \equiv g(i) (\Theta_i)$ ; ha  $i \in H$ ,  $i \notin J$ , akkor  $\Theta_i$  az univerzális reláció  $A_i$ -n, és ezért  $f(i) \equiv g(i) (\Theta_i)$  ez esetben is. Most akkor definíció szerint  $f \equiv g (\Theta)$ , Q. E. D.

A következő lemmára Evelyn Nelson eredeti tétele bizonyításának pontos mását közöljük.

**4.19 Lemma** Ha  $\mathcal{U}$  véges rendezett algebra,  $HSP(\mathcal{U})$  kongruenciadistributív,  $I$  tetszőleges nemüres halmaz, akkor bármely  $\tilde{\mathcal{U}} \leq \mathcal{U}^I$  a diagonálist tartalmazó szubdirekt hatvány kongruenciái filterszorzatkongruenciák metszetei.

Bizonyítás: elegendő belátni, hogy  $\Theta$  filterszorzatkongruencia, valahányszor  $\tilde{\mathcal{U}}/\Theta$  szubdirekt irreducibilis /a Birkhoff-féle szubdirekt felbontási tétel bizonyításának kis módosításával itt is érvényes!/. Az 1.1 tétel Jónsson által adott bizonyításában felhasznált segédétel /lásd [16]/ itteni megfelelője folytán van olyan  $\mathcal{U}$  ultrafilter  $I$  felett, hogy  $\Theta_{\mathcal{U}} \leq \Theta$ . Tetszőleges  $i \in I$  esetén definiáljuk  $\mathcal{U}$ -n a  $\Theta_i$  kongruenciát: legyen

$a \equiv b (\Theta_i)$  pontosan akkor, ha van olyan  $(f, g) \in \Theta$  pár, hogy  $f(i) = a$ ,  $g(i) = b$  és  $\{j \mid f(j) = a, g(j) = b\} \in \mathcal{U}$ . Ez esetben tekintve az  $a$ -val ill.  $b$ -vel egyenlő  $f_a$  ill.  $f_b$  átlóelemet,

$\{j \mid f_a(j) = f(j)\} \supseteq \{j \mid f(j) = a, g(j) = b\} \in \mathcal{U}$ , így  $f \equiv f_a (\ominus_{\mathcal{U}})$ , ezért  $f \equiv f_a (\ominus)$ . Hasonlóan,  $g \equiv f_b (\ominus)$ , így  $f_a \equiv f_b (\ominus)$ . Fordítva, triviális, hogy ha  $f_a \equiv f_b (\ominus)$ , akkor  $- I \in \mathcal{U}$  folytán  $- a \equiv b (\ominus_1)$ . Így  $\ominus_1$  lényegében nem más, mint  $\ominus$ -nak a diagonálisra való restrikciója, ezért kongruencia; és valójában  $i$ -től független.

Belátjuk, hogy  $\ominus = \prod_{\mathcal{U}} \ominus_1$ . Legyen először  $f \equiv g (\ominus)$ ; A véges, így az  $I = \bigcup_{a,b \in A} \{i \mid f(i) = a, g(i) = b\}$  felbontás véges unió,  $I \in \mathcal{U}$  miatt vannak olyan  $a, b \in A$  elemek, hogy  $S = \{i \mid f(i) = a, g(i) = b\} \in \mathcal{U}$ , azért minden  $i \in S$ -re  $a \equiv b (\ominus_1)$ , de akkor definíció szerint  $f \equiv g (\prod_{\mathcal{U}} \ominus_1)$ .

Fordítva, ha  $f \equiv g (\prod_{\mathcal{U}} \ominus_1)$ , akkor  $\{i \mid f(i) \equiv g(i) (\ominus_1)\} \in \mathcal{U}$  def. szerint, és csakugy, mint előbb, vannak olyan  $a, b \in A$  elemek, hogy  $\{i \mid f(i) = a, g(i) = b\} \in \mathcal{U}$ ; ennél fogva  $\{i \mid f(i) \equiv g(i) (\ominus_1)\} \cap \{i \mid f(i) = a, g(i) = b\} \in \mathcal{U}$ . Így  $a \equiv b (\ominus_1)$  egy olyan  $i$ -re, ami az előbbi metszetnek eleme, ezért az  $f_a, f_b$  átlóelemekre

$$f_a \equiv f_b (\ominus); \quad (3)$$

most  $\{i \mid f(i) = f_a(i)\}, \{i \mid g(i) = f_b(i)\} \supseteq \{i \mid f(i) = a, g(i) = b\} \in \mathcal{U}$ , tehát  $f \equiv f_a (\ominus_{\mathcal{U}})$ ,  $g \equiv f_b (\ominus_{\mathcal{U}})$ , következésképpen

$f \equiv f_a (\ominus)$ ,  $g \equiv f_b (\ominus)$ , de akkor (3) folytán  $f \equiv g (\ominus)$ , és ezzel a lemma bizonyítása kész, Q. E. D.

Eddigiek fontos következménye:

**4.20 Tétel** Ha  $\mathcal{A}$  rendezett véges egyszerű algebra,  $\tilde{\mathcal{A}} \leq \mathcal{A}^I$  az átlót tartalmazó szubdirekt hatvány és  $\text{HSP}(\mathcal{A})$  kongruenciadisztributív, akkor  $\tilde{\mathcal{A}}$  minden kongruenciája filtarkongruencia alkalmas  $I$  feletti filterre.

Bizonyítás: az előző lemma alapján minden kongruencia filtersorozat-kongruenciák metszete, de utóbbiak a 4.18 lemma folytán filterkongruenciák; filterkongruenciák metszete pedig maga is filterkongruencia. Q. E. D.

**4.21 Lemma** /Hálószerű rendezésprimál algebra automorfizmusmentes/ Ha  $\beta$  hálószerű rendezésprimál algebra, akkor  $\beta$ -nek nincs valódi automorfizmusa, azaz  $\text{Aut}(\beta)$  egyelemű, csak az identikus leképezésből áll.

Bizonyítás: tegyük fel, hogy  $g \in \text{Aut}(\beta)$ ,  $g(a) = b$ ,  $a \neq b$  /ez feltehető, mert legfeljebb  $g$  helyett  $g^{-1}$ -et vesszük/; ekkor  $b \neq 0$ .

Legyen

$$\xi(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq b \\ 0, & \text{külömben} \end{cases} \quad . \quad \text{Ez monoton függvény, tehát polinom } \beta\text{-n, de akkor } - \xi(a) = 0 \text{ miatt } - 0_g = (\xi(a))g =$$

$\xi(a \varrho) = \xi(b) = b$ , ez viszont lehetetlen, mert  $0\varrho = 0$ , lévén  $\varrho$  monoton. Q. E. D.

4.22 Lemma / $\mathcal{V}(\beta)$ -algebra maximális valódi kongruenciái/ Ha  $\beta$  hálószerű rendezésprimál algebra,  $\mathcal{U} \in \mathcal{V}(\beta)$ , akkor az  $f \mapsto \ker f$  leképezés  $H_\beta(\mathcal{U})$ -t  $\mathcal{U}$  maximális valódi kongruenciáinak halmazára képezi le, és pedig bijektív.

Bizonyítás: ha  $f \in H_\beta(\mathcal{U})$ , akkor  $\text{Im } f = P$ , mert  $\beta$ -nek nincs valódi részalgebraja; így  $\mathcal{U}/\ker f \cong \beta$ , és akkor  $\beta$  egyszerűsége folytán  $\ker f$  maximális valódi kongruencia  $\mathcal{U}$ -n / $|P| \geq 2$ !/.

Ha  $f, g \in H_\beta(\mathcal{U})$ ,  $f \neq g$ , pl.  $u = f(a) \neq g(a) = v$ , de  $\ker f = \ker g$ , akkor a

$\varrho: t \mapsto tf^{-1}g$  leképezés  $\beta$ -nek valódi automorfizmusát szolgáltatná / $u\varrho = uf^{-1}g = g(a) = v$ /, ellentétben 4.21-gyel. Így a kérdéses leképezés injektív /1-1-értelmű/.

Ha  $\Theta \in \text{Con}(\mathcal{U})$  maximális valódi, akkor  $\mathcal{U}/\Theta \in \mathcal{V}(\beta)$ ; az alaptétel szerint  $\mathcal{U}/\Theta$   $\beta$ -nek normális szubdirekt hatványa, de  $\mathcal{U}/\Theta$  egyszerű, így szubdirekt irreducibilis is, ennél fogva  $\mathcal{U}/\Theta \cong \beta$ . Most akkor van olyan  $f: \mathcal{U} \rightarrow \beta$  monoton homomorfizmus, hogy  $\Theta = \ker f$ . Leképezésünk tehát szürjektív is, Q. E. D.

4.23 Lemma / $\beta$ -karak.-algebra maximális valódi kongruenciái/ Legyen  $\mathcal{X}$  Priestley-tér,  $\beta$  hálószerű rendezésprimál algebra,  $\mathcal{U} = C_\beta(\mathcal{X})$ ,  $\Theta \in \text{Con}(\mathcal{U})$  maximális valódi. Akkor van olyan  $x \in X$  eleme a  $\mathcal{X}$  Priestley-térnek, hogy  $\Theta = \{(f, g) \mid f(x) = g(x)\}$ , azaz  $\Theta = \ker \pi_x$ .

Bizonyítás: mivel  $C_\beta(\mathcal{X})$   $\beta$ -nek az átlót tartalmazó szubdirekt hatványa, azért a 4.20 tétel folytán van olyan  $F$  filter  $X$  felett, hogy  $\Theta = \Theta_F$ .  $\emptyset \notin F$ , különben  $\Theta_F$  az univerzális reláció volna.

Bármely  $(f, g) \in \Theta$  esetén  $\text{Equ}(f, g) = \{x \mid f(x) = g(x)\} \in F$ , továbbá mivel  $F$  zárt a véges metszésre és  $\emptyset \notin F$ , azért ha  $(f_i, g_i) \in \Theta$ ,  $i = 1, \dots, n$ , akkor  $\text{Equ}(f_1, g_1) \cap \dots \cap \text{Equ}(f_n, g_n) \neq \emptyset$ . Eből látszik, hogy az

$\{\text{Equ}(f, g) \mid f \equiv g (\Theta)\}$  halmazrendszer rendelkezik a végesmetszet-tulajdonsággal. Az  $\text{Equ}(f, g) =$

$\bigcup_{a \in P} (\{x \mid f(x) = a\} \cap \{x \mid g(x) = a\})$  egyenlőség mutatja, hogy

$\text{Equ}(f, g)$  mindig zárt halmaz /az unió véges; a tagokban levő metszetek tényezői  $f, g$  folytonossága és  $\{a\}$   $\beta$ -ben való zártsága miatt

zártak/. Most a tér kompaktsága folytán van olyan  $x \in X$ , amely benne van az összes  $\text{Equ}(f, g)$ -ben, ahol  $f \equiv g(\Theta)$ . Így  $f \equiv g(\Theta)$  esetén  $f(x) = g(x)$ , azaz  $f \equiv g(\ker \pi_x)$ , tehát  $\Theta \leq \ker \pi_x$ ; viszont  $\Theta$  maximális valódi és  $\ker \pi_x$  nyilván valódi, azért  $\Theta = \ker \pi_x$ ,  
Q. E. D.

Most már kimondhatjuk a 4.16 lemma előtt említett kanonikus izomorfizmus létezését:

4.24 Tétel /Az "ẽ" leképezés izomorf volta/ Legyen  $\mathcal{R}$  hálószerű rendezésprimál algebra,  $\mathcal{X}$  Priestley-tér. Ekkor az "ẽ" leképezés izomorfizmus a  $\mathcal{H}$  kategóriában /lásd 4.6 definíció/.

Bizonyítás:  $x \neq y$  esetén nyilván van olyan  $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{R}$  monoton folytonos leképezés, melyre  $f(x) \neq f(y)$ , azaz  $\tilde{e}(x)(f) \neq \tilde{e}(y)(f)$ , így  $\tilde{e}$  1-1-értelmű.

Ha  $f \in H_{\mathcal{R}} C_{\mathcal{R}}(\mathcal{X})$  tetszőleges, akkor  $f: C_{\mathcal{R}}(\mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{R}$  szürjektív monoton homomorfizmus és  $\Theta = \ker f$  maximális valódi kongruencia  $C_{\mathcal{R}}(\mathcal{X})$ -n, így van olyan  $x \in X$ , hogy  $\Theta = \ker \pi_x = \ker \tilde{e}(x)$  /előző lemma/.  $\ker f = \ker \tilde{e}(x)$ -ből a 4.22 lemma alapján adódik, hogy  $\tilde{e}(x) = f$ ; látjuk tehát, hogy  $\tilde{e}$  szürjektív.

$\tilde{e}$  monoton és folytonos voltát láttuk a 4.7 lemmában, és mivel  $\mathcal{X}$  kompakt,  $H_{\mathcal{R}} C_{\mathcal{R}}(\mathcal{X})$  Hausdorff-féle, azért a homeomorfizmus /lásd [4]/.

Még azt kell belátni, hogy  $\tilde{e}$  nem finomítja a rendezést. Ha  $x \neq y$   $\mathcal{X}$ -ben, akkor  $y$  clopen felszálló halmazzal elválasztható  $x$ -től, és akkor az

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{ha } t \in S \\ 0, & \text{különben} \end{cases} \quad \text{leképezés } \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{R} \text{ mono-}$$

ton folytonos függvény. Így  $f \in C_{\mathcal{R}}(\mathcal{X})$ ; most  $\tilde{e}(x)(f) = f(x) = 0 \neq 1 = f(y) = \tilde{e}(y)(f)$ , ezért  $\tilde{e}(x) \not\leq \tilde{e}(y)$ , tehát  $\tilde{e}$  rendezésizomorfizmus is, Q. E. D.

A főtétele kimondásával zárjuk ezt a §-t:

4.25 Tétel /Hálószerű rendezésprimál algebra dualitási főtétele/ Legyen  $\mathcal{R}$  hálószerű rendezésprimál algebra. Tekintsük a  $H_{\mathcal{R}}: \mathcal{V}(\mathcal{R}) \rightarrow \mathcal{H}$  Priestley- $\mathcal{R}$ -tér-funktort valamint a  $C_{\mathcal{R}}: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{V}(\mathcal{R})$   $\mathcal{R}$ -karakterisztikus-algebra-funktort /4.3 definíció/. Minden  $\mathcal{U} \in \mathcal{V}(\mathcal{R})$ -re jelölje  $h(\mathcal{U})$   $\mathcal{U}$  Priestley- $\mathcal{R}$ -reprezentációját /az  $\mathcal{U}$ -hoz tartozó "ẽ" leképezés/; minden  $\mathcal{X} \in \mathcal{H}$ -ra jelölje  $t(\mathcal{X})$   $\mathcal{X}$  Priestley- $\mathcal{R}$ -reprezentációját /a  $\mathcal{X}$ -hez tartozó "ẽ" /lásd 4.4, 4.6 definíciók/. Akkor a  $H_{\mathcal{R}}$  és  $C_{\mathcal{R}}$  funktorok valamint a  $h(\mathcal{U})$  és  $t(\mathcal{X})$  izomorfizmusok a  $\mathcal{V}(\mathcal{R})$  és

$\mathcal{K}$  kategóriák duális ekvivalenciáját biztosítják /az említettek megfelelően az 1.4 definícióban  $F$  és  $G$ -nek, valamint  $\xi_A$ -nak és  $\xi_B$ -nek/;  $H_B$  és  $C_B$  egymás "inverzei".

Bizonyítás: figyelembe véve a 4.2, 4.15 és 4.24 tételeket, annyit kell csak igazolni még, hogy minden  $u: \mathcal{A} \longrightarrow B \quad \mathcal{V}(B)$ -morfizmus illetve  $v: \mathcal{X}_1 \longrightarrow \mathcal{X}_2 \quad \mathcal{K}$ -morfizmus esetén az

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{h(\mathcal{A})} & C_B H_B(\mathcal{A}) \\ \downarrow u & & \downarrow C_B H_B(u) \\ B & \xrightarrow{h(B)} & C_B H_B(B) \end{array} \quad \text{ill.} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{X}_1 & \xrightarrow{t(\mathcal{X}_1)} & H_B C_B(\mathcal{X}_1) \\ \downarrow v & & \downarrow H_B C_B(v) \\ \mathcal{X}_2 & \xrightarrow{t(\mathcal{X}_2)} & H_B C_B(\mathcal{X}_2) \end{array}$$

diagram kommutatív. Ezt csak az első esetre végezzük el, a másikra hasonlóan megy. Legyen  $a \in \mathcal{A}$  tetszőleges, akkor  $(au)h(B)$  nem más, mint  $H_B(B)$  elemeinek az  $au$  helyen való kiértékelése. Alkalmazzuk most  $a$ -ra a  $h(\mathcal{A})C_B H_B(u)$  szorzatleképezést; az eredmény  $[e(a)]C_B H_B(u)$ , vagyis a  $H_B(u)e(a)$  leképezés. Ha ezt tetszőleges  $\xi \in H_B(B)$ -re alkalmazzuk, az  $u$  leképezés " $a$ " helyen való kiértékelése adódik, de ez nyilván ugyanaz, mint  $\xi$  kiértékelése az " $au$ " helyen, Q. E. D.

Következmény  $\mathcal{V}(B)$  és a 0,1-disztributív hálók  $\mathcal{L}$  kategóriája ekvivalens.

Valóban,  $\mathcal{L}$  és  $\mathcal{V}(B)$  mindketten ekvivalensek duálisan a Priestley-terek  $\mathcal{K}$  kategóriájával; innen állításunk azonnal következik.

### 3. A dualitás "megfordítása"

Ebben a §-ban azt vizsgáljuk, hogy melyek azok a rendezett algebrákból álló varietások, amelyek duálisan ekvivalensek a Priestley-terek kategóriájával. Az előző § végén levő következmény értelmében ehelyett vizsgálható a 0,1-disztributív hálók kategóriájával ekvivalens varietások osztálya. A sejtés úgy szól, hogy ezen varietásokat mind valamelyik hálószerű rendezéssel bíró és erre nézve rendezéssprimál elemük generálja. A bizonyítás R.W. Quackenbush [25] alap gondolatát viszi végig a rendezett esetre; azonban fel kell tennünk egy pótlólagos feltételt: a kérdéses kategóriaekvivalenciától megköveteljük, hogy mindkét irányban szürjektivitás-őrző legyen /rendezett varietások közti kategóriaekvivalenciákról mindeddig nem sikerült igazolni, hogy rendelkeznek ezzel a tulajdonsággal; a közönséges varie-

tások esetére ismert bizonyítások nem vihetők át; lehet, hogy általában nem is igaz/. Elképzelhető, hogy a disztributív hálók osztályának, mint rendezett varietásnak különleges tulajdonságai /minden homomorfizmus  $Q$ -homomorfizmus /lásd 2.19 tétel/, minden 1-1 értelmű homomorfizmus valamely részalgebrára való izomorfizmus, azaz "beágyazás" /végül is maguk után vonják, hogy ezen osztálynak bármely rendezett varietásra való kategóriaekvivalenciája mégis oda-vissza őrzi a szűrjeaktivitást. Jelenleg azonban ezt nem tudjuk. /Látni fogjuk, hogy egyik irányban a szűrjeaktivitástartás áll, ennek ellenére a pótfeltétel az egyszerűség kedvéért úgy fogalmaztuk meg, mintha erről nem lenne tudomásunk./ Megjegyezzük, hogy tulajdonképpen nyilvánvalóan szükséges feltételről van szó, hiszen ha egy varietást hálószerű rendezésprimál algebra generál, akkor 2.19 folytán a szűrjeaktiv homomorfizmusok azonosak a szűrjeaktiv  $Q$ -homomorfizmusokkal, és rövidesen látni fogjuk, hogy a szűrjeaktiv  $Q$ -homomorfizmusokat a kategóriaekvivalenciák mindkét irányban őrzik. Lehet azonban ez a szükséges feltétel olyan, hogy mindig teljesül. Ha viszont nem, akkor ez azt jelenti, hogy vannak olyan, a  $0,1$ -disztributív hálók kategóriájával ekvivalens rendezett algebrákból álló varietások, amelyek nem generálhatók hálószerű rendezésprimál algebrával.

Néhány általánosabb lemmával kezdjük.

4.26 Lemma /Morfizmusok faktorizációja rendezett algebrák varietásaiban/ Tetszőleges rendezett varietásban tetszőleges  $S: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$  homomorfizmus felírható  $S = \alpha\beta\gamma$  alakban, ahol  $\alpha$  szűrjeaktiv  $Q$ -homomorfizmus,  $\beta$  bijektív homomorfizmus,  $\gamma$  pedig beágyazás:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{S} & \mathcal{B} \\ \alpha \searrow & & \nearrow \gamma \\ \mathcal{A}_1 & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{A}_2 \end{array}$$

Bizonyítás: a varietásnak a  $H$  és  $S$  operátorokra való zártsága folytán  $\text{Im } S$  /mint  $\mathcal{B}$  részalgebrája a megfelelő restringált rendezéssel ellátva/ valamint ugyancsak  $\text{Im } S$ , felruházza a lehetséges legszűkebb olyan műveletkompatibilis rendezéssel, melyre nézve  $S$  még mindig rendezéstartó, a varietáshoz tartozik. Válasszuk rendre ezeket  $\mathcal{A}_2$ -nek ill.  $\mathcal{A}_1$ -nek, akkor  $S$   $\mathcal{A}_1$ -re való homomorfizmusként felfogva nyilvánvalóan megfelel  $\alpha$ -nak,  $\mathcal{A}_1$  identikus leképezése  $\beta$ -nak,  $\mathcal{A}_2$ -nek  $\mathcal{B}$ -be való kanonikus beágyazása pedig  $\gamma$ -nak, Q. E. D.

4.27 Definíció /Rendezésfinomító morfizmus/ Rendezett algebrák varietásaiban a bijektív homomorfizmusokat rendezésfinomító morfizmusoknak, röviden rendezésfinomításoknak nevezzük. Valódi egy rendezésfinomítás, ha nem izomorfizmus.

2.19-ből azonnal világos, hogy a disztributív hálónál valódi rendezésfinomítások nincsenek, így a legutóbbi lemmában említett morfizmus mindig kihagyható.

4.28 Állítás /Szűrjektív  $Q$ -homomorfizmusok megőrzése/ Legyen  $F$  kategóriaekvivalencia a rendezett algebrákból álló  $\mathcal{V}_1$  és  $\mathcal{V}_2$  varietások között. Akkor  $F$  a szűrjektív  $Q$ -homomorfizmusokat és csak azokat viszi szűrjektív  $Q$ -homomorfizmusba.

Bizonyítás: legyen  $h: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$  szűrjektív  $Q$ -homo. Faktorizáljuk  $F(h)$ -t 4.26-nak megfelelően: Felhasználva az  $F$  funktor "inverzét" és az 1.4 definícióban szereplő kitüntetett izomorfizmusokat morfizmusok megfelelő "átültetésére", nyerjük  $h$ -nak a következő faktorizációját, amely lényegében az előbbi  $F$ -őse:

Itt  $h$  szűrjektivitása folytán  $\gamma$  szükségképpen szűrjektív, valamint  $\beta$  és  $\gamma$  mindketten 1-1-értelműek, lévén a  $\bar{\beta}, \bar{\gamma}$  monomorfizmusok  $F$ -ősei /figyelembe-

$$\begin{array}{ccc} F(\mathcal{A}) & \xrightarrow{F(h)} & F(\mathcal{B}) \\ \alpha \downarrow & & \uparrow \bar{\gamma} \\ \mathcal{A}_1 & \xrightarrow{\bar{\beta}} & \mathcal{A}_2 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{h} & \mathcal{B} \\ \alpha \downarrow & & \uparrow \gamma \\ \mathcal{A}_1 & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{A}_2 \end{array}$$

véve továbbá, hogy varietásokban a monomorfizmusok 1-1-értelműek; lásd 2.32/.  $\gamma$  bijektivitásából most már  $\beta$  szűrjektivitása is adódik, és így  $\beta\gamma$  rendezésfinomítás. Világos azonban, hogy nem lehet valódi, mert ez ellentmondana  $h$   $Q$ -voltának, mint könnyen ellenőrizhető. Tehát  $\beta\gamma$  izomorfizmus, de akkor  $\bar{\beta}\bar{\gamma}$  is, innen pedig az állítás már adódik, Q. E. D. /A másik irány nyilván következik ebből  $F$  "inverzére" alkalmazva./

Következmény Ha  $F$  kategóriaekvivalencia a 0,1-disztributív hálók /rendezett/ varietásáról valamely rendezett varietásra, akkor  $F$  szűrjektivitástartó.

Valóban, a disztributív hálók szűrjektív homomorfizmusai szűrjektív  $Q$ -homomorfizmusok, és így  $F$ -képük szűrjektív / $Q$ -/homomorfizmus.

4.29 Lemma Ha a 0,1-disztributív hálók  $\mathcal{D}$  varietásának kategóriaekvivalenciája,  $F$ , /valamely rendezett varietásra/ mindkét irányban szűrjektivitástartó, akkor mindkét irányban beágyazástartó is, a másik varietásban minden homomorfizmus  $Q$ -homomorfizmus; speciálisan,

nincsenek valódi rendezésfinomítások.

Bizonyítás: Világos, hogy  $F$  csak beágyazást vihet beágyazásba a monomorfizmusok mindkét varietásban való 1-1-értelműsége folytán, továbbá onnan, hogy a disztributív hálókmal az 1-1-értelműek mind beágyazások. Legyen most  $h: \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_2$  beágyazás  $\mathcal{D}$ -ben. Ismét faktorizáljuk  $F(h)$ -t 4.26-nak megfelelően, és tekintsük ezen faktorizáció egy "természetes őset":

Az  $\alpha\bar{\beta}$  szorzat szürjektív homomorfizmus, így feltételünk miatt őse,  $\alpha\beta$  is az. Viszont nyilvánvaló, hogy  $\alpha\beta$  1-1-értelmű, mert különben  $h$  sem lenne az. Tehát  $\alpha\beta$  bijektív, de akkor izomorfizmus is, hiszen  $\mathcal{D}$ -ben nincsenek valódi rendezésfinomítások. Ennélfogva  $\alpha\bar{\beta}$  is izomorfizmus, és így  $F(h)$

$$\begin{array}{ccc} F(\mathcal{L}_1) & \xrightarrow{F(h)} & F(\mathcal{L}_2) \\ \alpha \downarrow & & \uparrow \bar{\beta} \\ \mathcal{L} & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{L}' \end{array}$$
  

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_1 & \xrightarrow{h} & \mathcal{L}_2 \\ \alpha \downarrow & & \uparrow \gamma \\ \mathcal{L} & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{L}' \end{array}$$

ugyanolyan tulajdonsága, mint  $\bar{\gamma}$ , vagyis beágyazás. A többi állítás ebből már triviálisan következik, Q. E. D.

Megjegyezzük, hogy ezen lemma érvényben marad akkor is, ha  $\mathcal{D}$  helyett tetszőleges rendezett varietást veszünk, erre azonban nem lesz a továbbiakban szükségünk.

Most hozzáfoghatunk ezen § fő tételének igazolásához; mint már említettük, nagyrészt Quackenbush bizonyítását ismételjük meg, azonban annak részleteit is kidolgozzuk. Meg kell említeni, hogy a homomorfizmusoknak a (\*) törvény által való összehasonlításának lehetőségére Szendrei Ágnes hívta fel a figyelmet.

4.30 Tétel /Az ekvivalenciátétel részleges megfordítása/ Legyen a rendezett algebrákból álló  $\mathcal{V}$  varietás ekvivalens a 0,1-disztributív hálók  $\mathcal{D}$  kategóriájával olyan  $F$  kategóriaekvivalencia által, mely mindkét irányban szürjektivitástartó. Akkor  $\mathcal{V}$  generálható hálószerű rendezésprimál algebra által.

A tétel bizonyításán belül is szükségünk lesz segédtételekre. Ezeket mindig a megfelelő helyen közbeiktatjuk.

Jelölje  $\mathcal{Z}$  a kételemű 0,1-disztributív hálót, és legyen  $\mathcal{Z}$  ennek  $F$ -képe.  $\mathcal{Z}$  nem terminális objektum /azaz nem vezet bele mindenhonnan morfizmus/  $\mathcal{D}$ -ben, azért  $\mathcal{Z}$  sem ilyen  $\mathcal{V}$ -ben, következésképpen egynél több elemű. Másrészt:

4.30/a Lemma Rendezett varietások közti kétirányban szürjektí-



vitástartó kategóriaekvivalencia végesen generált algebrát végesen generált algebrába, véges algebrát véges algebrába visz át.

Bizonyítás: Meg fogjuk mutatni, hogy a részalgebrahálók a megadott feltétel mellett invariánsak a kérdéses ekvivalenciával szemben; innen a végesen generáltságra vonatkozó állítás rögtön adódik, hiszen egy algebra akkor és csak akkor végesen generált, ha részalgebrahálójának legnagyobb eleme kompakt. A 4.28 lemma mintájára, morfizmusfaktorizációk révén belátható, hogy a beágyazások is mindkét irányban őrződnek. Így elég kimutatni, hogy a részalgebrahálók egyértelműen definiálhatók beágyazások segítségével. Legyen pl.  $\mathcal{A}$  az első varietás algebrája; vezessük be a  $\sim$  relációk az  $\mathcal{A}$ -ba menő beágyazásokra a következőképpen:

$\xi \sim \eta$  akkor és csak akkor, ha mindketten jobboldali osztói egymásnak.  $\sim$  reflexív, szimmetrikus és tranzitív, ennek megfelelően osztályokba sorolhatjuk az  $\mathcal{A}$ -ba menő beágyazásokat. Két ilyen nyilvánvalóan éppen akkor esik ugyanabba az osztályba, ha a képhalmazuk ugyanaz  $\mathcal{A}$ -ban. Az is látszik, hogy halmaznyi sok osztály keletkezik csak. Jelölje általában  $\varphi$  osztályát  $[\varphi]$ , és legyen

$[\xi] \leq [\eta]$  pontosan akkor, ha  $\eta$  jobbosztója  $\xi$ -nek.

Ezzel már egy parciális fendezést értelmeztünk az osztályok között. Világos, hogy  $[\xi] \leq [\eta]$  azzal ekvivalens, hogy  $\text{Im } \xi \leq \text{Im } \eta$  a részalgebrahálóban; tehát sikerült a részalgebrahálót a kívánt módon leírni.

Tegyük fel most, hogy  $\mathcal{A}$  véges, de  $F(\mathcal{A})/F$  a kérdéses ekvivalencia/ végtelen. Az  $F(\mathcal{A})$ -t tartalmazó varietásban akkor véve az 1 rangú szabad algebrát, ennek végtelen sok homomorfizmusa van  $F(\mathcal{A})$ -ba, de akkor ezen szabad algebra "F-ösének" is végtelen sok homomorfizmusa van  $\mathcal{A}$ -ba. Ez azonban lehetetlen, lévén a kérdéses F-ös végesen generált a fent már bizonyított állítás folytán, q.e.d.

Innen adódik, hogy  $\mathcal{A}$  véges.

Jelölje tetsz.  $P$  véges poset /≠parc. rendezett halmaz/ esetén  $2^P$  az összes  $P \rightarrow 2$  monoton leképezések hálóját /a megfelelő  $\sim$ -direkthatvány részalgebráját/,  $\mathcal{A}[P]$  pedig ennek F-képét. Mivel  $2^1$ -nek pontosan 2 beágyazása van  $2^2$ -be, azért  $\mathcal{A}[1]$ -nek pontosan kettő van  $\mathcal{A}^2$ -be. Ezek képhalmazai szükségképpen különbözők, mert ellenkező esetben  $\mathcal{A}[1]$ -nek volna nemtriviális automorfizmusa, ellentmondásban azzal, hogy  $2^1$ -nek nincs. Legyenek a képhalmazok  $T_1$  és

$T_2$ . Könnyű látni, hogy lényegében pontosan 5 beágyazása van algebráknak  $\mathcal{U}^2$ -be: kettő  $\mathcal{U}^2$ -ről, kettő  $\mathcal{U}[!]$ -ről és egy  $\mathcal{U}$ -ról /visszavissza/ a megfelelő disztributív hálókat/; utóbbit vegyük a diagonális beágyazásnak.  $\mathcal{U}^2$ -ben bármely részalgebra inverze /megfordítva az elempárokat/ is részalgebra. Így - figyelembevéve, hogy  $T_1, T_2$  egyike sem az egész  $A^2$ , sem pedig a diagonális -  $T_1, T_2$  egymás inverzei, vagy pedig mindketten szimmetrikusak. Utóbbi azonban lehetetlen, hiszen diagonálistól különböző szimmetrikus részalgebránál az elempárok komponenseinek megfordítása valódi automorfizmushoz vezet, ilyenrel pedig  $\mathcal{U}[!]$  nem rendelkezik. Jelölje ezentúl  $T_1$ -et  $T$ ,  $T_2$ -t pedig  $T^{-1}$ .

Lévén  $T$  és  $T^{-1}$  különbözőek, továbbá  $T \cap T^{-1}$  is részalgebra, szükségképpen  $T \cap T^{-1}$  azonos a diagonálissal, így  $T$ , mint binér reláció  $A$  felett, reflexív és antiszimmetrikus. Belátjuk, hogy tranzitív is. Tekintsük e célból az

$$R = \{(a, b, c) \mid (a, b), (b, c) \in T\}$$

halmazt. Világos, hogy ez  $\mathcal{U}^3$ -nek részalgebráját határozza meg, és mint könnyen ellenőrizhető, van legalább 3 különböző homomorfizmusa  $\mathcal{U}$ -ra /az  $\mathcal{U}$ -ba menő morfizmusok mind szűrjektívek, mert  $\mathcal{U}$ -re ez áll/. Mármint  $\mathcal{U}^3$  azon részalgebrái, melyeknek van 3 homomorfizmusa  $\mathcal{U}$ -re, szükségképpen  $2^P$  alakúak, ahol  $|P| = 3$ . Innen adódik, hogy az  $R$  által meghatározott  $\mathcal{R}$  részalgebra izomorf  $\mathcal{U}[P]$ -vel valamely 3 elemű  $P$  poset mellett. De  $\mathcal{R}$ -nek van legalább 5 különböző homomorfizmusa  $\mathcal{U}^2$ -be /tekintsünk két komponensre való projekciókat valamint ilyeneket szorozzunk meg  $\mathcal{U}^2$  komponensfordító automorfizmusával/  $T$  vagy  $T^{-1}$  képhalmazzal. Az összes 3 elemű posetek megvizsgálásával meggyőződhetünk arról, hogy egyedül  $\mathcal{U}^1$ -nak van legalább 5 homomorfizmusa  $2^1$ -ra. Tehát  $\mathcal{R} \cong \mathcal{U}[P]$ . Viszont  $\mathcal{U}^1$ -nak egyetlen  $2^2$ -be való homomorfizmusa sem szűrjektív, ezért hasonló áll  $\mathcal{R}$  és  $\mathcal{U}^2$  vonatkozásában. Így a  $\varphi(a, b, c) = (a, c)$  utasítással definiált  $\varphi: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{U}^2$  homomorfizmus nem szűrjektív, tehát képhalmaza  $T, T^{-1}$  vagy a diagonális lehet. Azonban  $T \subseteq \varphi(\mathcal{R})$  nyilvánvalóan áll, és akkor csak  $\varphi(\mathcal{R}) = T$  lehet. Lévén  $\varphi(\mathcal{R})$  nem más, mint a  $T \circ T$  relációszorzat, ez mutatja, hogy  $T$  tranzitív.

Következő célunk kimutatni, hogy  $T$  hálószerű rendezés.  $T \circ T^{-1}$   $\mathcal{U}^2$ -nek  $T \cup T^{-1}$ -et tartalmazó részalgebrája, így  $\mathcal{U}^2$ -tel meg kell egyezzek; innen látszik, hogy  $\mathcal{U}$  bármely két elemének van közös felső  $T$ -korlátja. Hasonlóan,  $T^{-1} \circ T$  vizsgálatából kiderül a közös

felső korlátok létezése is.  $T$  hálószerűségéhez  $\mathcal{A}$  végeessége folytán most már elegendő belátni, hogy tetszőleges elempár közös felső korlátjainak halmaza lefelé irányított, mert innen a supremumok létezése következik, de akkor adódik már az infimumok létezése is /mert van  $T$ -re nézve legnagyobb elem/. Vagyis azt kell igazolni, hogy valahányszor  $(a,c), (a,d), (b,c), (b,d) \in T$ , mindannyiszor valamely  $e \in \mathcal{A}$  esetén  $(a,e), (b,e), (e,c), (e,d) \in T$ .

4.30/b Lemma Tegyük fel, hogy a  $\tilde{\pi}_i: \mathcal{A}^n \longrightarrow \mathcal{A}$  morfizmusok,  $i = 1, \dots, n$ ,  $n$  rögz. term. szám, szorzatdiagramot alkotnak  $\mathcal{U}$ -ben /azaz bármely  $\varphi_i: B \longrightarrow \mathcal{A}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , morfizmuscsaládra, ahol  $B \in \mathcal{U}$ , létezik egyetlen  $\varphi: B \longrightarrow \mathcal{A}^n$  morfizmus, melyre  $\varphi_i = \varphi \tilde{\pi}_i$  minden  $i$ -re/. Akkor ezek éppen az  $\mathcal{A}^n \longrightarrow \mathcal{A}$  természetes projekciók valameilyen sorrendben.

Bizonyítás: Elegendő megmutatni, hogy  $\mathcal{D}$ -ben bármely  $\mathcal{Z}^n \longrightarrow \mathcal{Z}$  morfizmusokból álló szorzatdiagram egyetlen meghatározottból megkapható a morfizmusok permutálásával, pl. éppen a természetes projekciók által képviseltből. Bármely ilyen szorzatdiagramot viszont meghatároz  $\mathcal{Z}^n$ -nek egy automorfizmusa, ti. az, amelyik "keresztülvezeti" a kérdéses diagram morfizmusait a természetes projekciókon. De  $\mathcal{Z}^n$  automorfizmusai mind az atomokat permutálják /és persze az atomokra való hatásuk meghatározza őket/, innen pedig könnyen következik, hogy a vizsgált diagram morfizmusai éppen az összes természetes projekciókból állnak, q.e.d. /Ezen bizonyítás gondolata Szendrei Ágnes-től származik./

A következő szabály lehetővé teszi, hogy felismerjük azokat a  $\varphi, \psi: B \longrightarrow \mathcal{A}$  morfizmuspárokat, amelyekben  $\varphi$  a  $T$  rendezésre vonatkozólag pontonként kisebb vagy egyenlő  $\psi$ -nél:

(\*)  $\varphi \leq \psi$  pontonként / $T$ -re nézve/ akkor és csak akkor, ha a  $\varphi \times \psi: B \longrightarrow \mathcal{A}^2$  morfizmusnak a  $(\tau: T \longrightarrow \mathcal{A}^2$  természetes beágyazás jobbosztója, ahol a  $\times$  morfizmus-direkt-szorzást a  $\pi_1, \pi_2: \mathcal{A}^2 \longrightarrow \mathcal{A}$  szorzatdiagramra vonatkoztatva /ebben a sorrendben!/ értjük.

Hasonlóan, érvényes (\*) analogonja  $\mathcal{D}$ -ben a  $\mathcal{Z}$ -be menő, közös kezdőpontu morfizmuspárookra  $T$  helyett  $\mathcal{Z}$ -nek a hálóstruktúra által definiált parc. rendezésével, ami  $\mathcal{Z}^1$ -cal izomorf, vagyis lényegében  $T$   $F$ -őse.

Vegyünk most tetszőleges véges  $P$  posetet, és jelölje  $\mathcal{A}^P$   $\mathcal{U}$  azon algebráját, amely az összes  $P \longrightarrow \mathcal{A}$  leképezésekből áll,

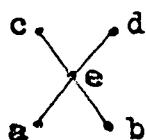
melyek monotonok, ha  $A$ -n a  $T$  rendezést vesszük  $\mathcal{U}$  műveletei monotonok  $T$ -re nézve, hiszen  $T$   $\mathcal{U}^2$  részalgebráját határozza meg, ezért a mondott leképezések  $\mathcal{U}$  megfelelő direkthatványának részalgebráját határozzák meg, tehát valóban  $\mathcal{U}^P \in \mathcal{V} /$ . Be akarjuk látni, hogy  $\mathcal{U}^P$  izomorf  $\mathcal{U}[P]$ -vel. Feltesszük, hogy  $P = \{1, \dots, n\}$  valamely  $n$ -re, és  $\mathcal{U}^P$ -t  $\mathcal{U}^n$  részalgebrájának tekintjük úgy, hogy mindig egy  $\mathcal{U}^P$ -beli függvény  $i$  helyen felvett értéke a neki megfelelő elem  $n$ -es  $i$ . komponense. Az  $\mathcal{U}^n \rightarrow \mathcal{U}$  természetes projekciók  $\{\pi_1, \dots, \pi_n\}$  halmazán bevezetve a  $\preceq$  relációt a

$\pi_i \preceq \pi_j$  pontosan akkor, ha  $\delta\pi_i \leq \delta\pi_j$   $T$ -re nézve pontonként utasítással, kiderül, hogy  $(\{\pi_1, \dots, \pi_n\}; \preceq)$   $P$ -vel izomorf posetet alkot /ha  $i \leq j$   $P$ -ben, akkor nyilván  $\pi_i \preceq \pi_j$  is; másrészt, ha  $i \neq j$ , akkor világos, hogy létezik  $\mathcal{U}^P$ -nek olyan eleme, amelynél  $i$  képe nem  $T$ -kisebbe egyenlő  $j$  képénél, ami azt jelenti, hogy  $\pi_i \not\preceq \pi_j$ /. (\*) használatával a  $\preceq$  reláció pusztán kategóriaelméleti eszközökkel definiálható: létezik  $\mathcal{U}^n$ -nek olyan részalgebrája, hogy  $\sim$  a kapcsolódó kanonikus beágyazást  $\delta$ -val jelölve  $\sim \delta\pi_i \times \delta\pi_j$ -nek pontosan akkor lesz  $(\top$  jobbosztója, ha  $i \leq j$   $P$ -ben.

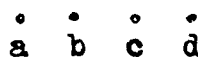
Legyenek ugyancsak rendre  $\pi_1, \dots, \pi_n$ -nel jelölve a fenti  $\pi_i$ -k  $F$ -ősei; a 4.30/b lemma bizonyítása mutatja, hogy ezek mindenesetre a  $\mathcal{U}^n \rightarrow \mathcal{U}$  term. projekciók valamilyen sorrendben. Tekintsük  $\mathcal{U}^P$ -t  $\mathcal{U}^n$  részalgebrájának oly módon, hogy egy  $P \rightarrow \mathcal{U}$  monoton leképezés  $i$  helyen felvett értéke mindig egyezzek meg az általa képviselt elem  $n$ -es  $\pi_i$ -képével /ez most nem feltétlenül az  $i$ . komponens, de mindenestre valamely rögzített sorszámú komponens/. A keletkező beágyazás legyen  $\delta_0$ . Ezekre a  $\pi_i$ -kre is bevezetve a fentihez hasonlóan a  $\preceq$  relációt /csak  $T$  helyett  $\mathcal{U}$  hálórendezésével/, itt is  $P$ -vel izomorf poset adódik. Tehát  $\mathcal{U}^P$  olyan részalgebrája  $\mathcal{U}^n$ -nek, hogy  $\mathcal{U}$  rendezésének  $\mathcal{U}^2$ -be való kanonikus beágyazása akkor és csak akkor jobbosztója  $\delta_0\pi_i \times \delta_0\pi_j$ -nek, ha  $i \leq j$   $P$ -ben. Innen az  $F$  funktort alkalmazva következik, hogy  $\mathcal{U}[P]$  beágyazható egy  $\bar{\delta}$  morfizmus segítségével  $\mathcal{U}^n$ -be úgy, hogy  $(\top$  akkor és csak akkor jobbosztója  $\bar{\delta}\pi_i \times \bar{\delta}\pi_j$ -nek, ha  $i \leq j$   $P$ -ben. Most már akkor  $\mathcal{U}^P$  és  $\mathcal{U}[P]$  izomorfiaja nyilvánvalóan következni fog, ha sikerül megmutatnunk, hogy  $\mathcal{U}^n$ -be izomorfiaától eltekintve csak egy 0,1-disztributív hálónak létezik olyan beágyazása, amely az említett oszthatósági feltételt teljesíti.

Ha szigorúan  $2^n$  részalgebrákra szorítkozunk, akkor azt kell belátni, hogy ezekből csak egy elégítheti ki az oszthatósági feltételt /vagy ami ezzel ekvivalens, a projekciók restringáltjait pontonként összehasonlítva,  $P$ -vel izomorf poset adódik/. Ha kérdéses részalgebra tartalmazna olyan elem  $n$ -est, amely nem  $P \rightarrow 2$  monoton leképezést határoz meg /lásd legutóbbi bekezdés eleje/, akkor valamely  $P$ -beli  $i \leq j$  párra azt kapnánk, hogy  $\pi_i \not\leq \pi_j$ , ami nem állhat. Tegyük fel most, hogy nem áll az összes  $P \rightarrow 2$  monoton leképezéseket megadó elem  $n$ -esekből. Belátjuk, hogy akkor van olyan  $i, j$  pár  $P$ -ben, hogy  $i \not\leq j$ , de  $\pi_i \leq \pi_j$ . Ha ugyanis ez nem így lenne, akkor lényegében megismételhetjük a 3.3 tétel bizonyításának  $\varphi$  szűrjeaktivitására vonatkozó részét /azzala módosítással, hogy  $F_P$  egyszerűen azonos bármely  $f: P \rightarrow 2$  monoton leképezésre magával  $f$ -fel - a szóbanforgó részalgebra elemei által meghatározott  $f$ -ek jönnek itt számításba -, a 27. old. alján szereplő  $F$  pedig itt most egy tetszőleges  $P \rightarrow 2$  monoton leképezés;  $P$ -n a diszkrét topológiát tekintjük, ezért folytonosságra nem kell figyelni/, ami azt eredményezné, hogy részalgebránk mégiscsak minden olyan elem  $n$ -est tartalmaz, amely  $P \rightarrow 2$  monoton leképezést ad meg. Ezzel kimutattuk a kívánt tulajdonságu részalgebra unicitását  $2^n$ -ben, tehát  $\mathcal{U}^P \cong \mathcal{U}[P]$ .

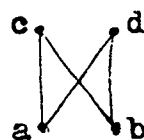
Tekintsük a következő parciálisan rendezett halmazokat:



$P_1$



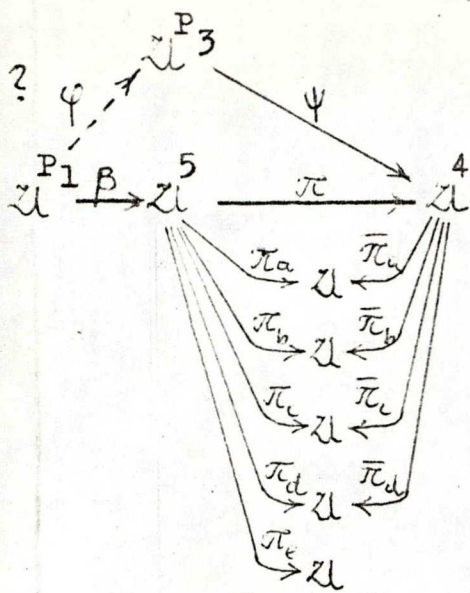
$P_2$



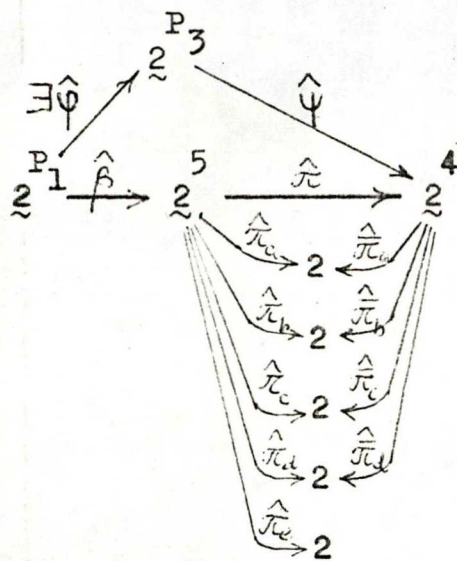
$P_3$

Amennyiben sikerül megmutatni, hogy  $\mathcal{U}^{P_1}$ -nek  $\mathcal{U}^{P_2}$ -be

való projekciójánál /a leképezések  $P_2$ -re való restrikciója/ a képhalmaz  $\mathcal{U}^{P_3}$ , akkor nyilvánvalóan következik a közvetlenül a 4.30/b lemma előtt mondott feltétel teljesülése. Az  $\mathcal{U}^5$  ill.  $\mathcal{U}^4$  direktthatványoknál a komponenseket "sorszámozzuk"  $a, b, c, d, e$  -vel ill.  $a, b, c, d$  -vel,  $\mathcal{U}^{P_3}$  ilymódon azonosítva van  $\mathcal{U}^4$  megfelelő részalgebrájával,  $\mathcal{U}^{P_1}$  pedig  $\mathcal{U}^5$  megfelelő részalgebrájával; a kérdéses azonosításokat /mint beágyazásokat jelölje  $\psi$  ill.  $\beta$ . Leegyenek  $\pi_a, \pi_b, \pi_c, \pi_d, \pi_e$  ill.  $\bar{\pi}_a, \bar{\pi}_b, \bar{\pi}_c, \bar{\pi}_d$   $\mathcal{U}^5$ -nek ill.  $\mathcal{U}^4$ -nek a komponensekre való természetes projekciói,  $\pi$  pedig le-  
 $\mathcal{U}^5$ -nek az első négy tényező direkt-szorzatára /azaz  $\mathcal{U}^4$ -re/ való term. vetítése. Tekintsük a következő  $\mathcal{U}$ -beli diagramot:



A kérdés végeredményben az, hogy létezik-e az ábrán szaggatott nyíllal jelzett szürjektív  $\varphi$  morfizmus. Vegyük a meglevő /tehát folytonos nyíllal rajzolt morfizmusok/  $F$ -őseit és állítsuk össze a megfelelő  $\mathcal{D}$ -beli diagramot /alsó ábra/, általában egy  $\alpha$  morfizmus  $F$ -őseit jelölje  $\hat{\alpha}$ . A 4.30/b lemma bizonyítása alapján a  $\pi_x$ -ek /  $x \in \{a, b, c, d, e\}$  / éppen az összes  $2^n \rightarrow 2$  természetes projekciók. A kiindulási,  $\mathcal{U}$ -beli diagram hasonló tulajdonsága folytán  $\hat{\beta}$  olyan, hogy bármely  $x, y \in \{a, b, c, d, e\}$  elemek esetén  $\hat{\beta}(\hat{\pi}_x \times \hat{\pi}_y)$ -nak pontosan akkor jobbosztója a  $(: 2^1 \rightarrow 2^2$  kanonikus beágyazás, ha  $x \leq y$   $P_1$ -ben. Ebből következik, hogy  $2^5$ -nél lehet a komponenseket úgy "sorszámozni"  $\{a, b, c, d, e\}$  elemeivel, hogy  $2^{P_1}$  elemei egyszerűen  $2^5$  elemeivé váljanak, és ha itt általában  $\pi_x$  jelenti az  $x$ -szel sorszámozott komponensre való természetes projekciót, akkor  $\hat{\pi}_e = \pi_e$ ,  $\{\hat{\pi}_a, \hat{\pi}_b\} = \{\pi_a, \pi_b\}$  /halmazegyenlőség!/ és  $\{\hat{\pi}_c, \hat{\pi}_d\} = \{\pi_c, \pi_d\}$ . Adódik továbbá az is, hogy  $\hat{\pi}$  az első négy tényező szorzatára való



természetes projekció. Hasonlóan, ismét csak az eredeti  $\mathcal{U}$ -beli diagram tulajdonsága alapján állíthatjuk, hogy bármely  $x, y \in \{a, b, c, d\}$  elemekre  $\hat{\psi}(\hat{\pi}_x \times \hat{\pi}_y)$  akkor és csak akkor jobbosztható  $($ -val, ha  $x \leq y$   $P_3$ -ban. Az elmondottakból következik, hogy  $\hat{\beta}\hat{\pi}$   $2^{P_1}$ -t  $2^{P_3}$   $\hat{\psi}$ -képébe képezi le. Most amennyiben  $P_3$ -at  $P_1$  részének tekintjük, világos, hogy bármely  $P_3 \rightarrow 2$  monoton leképezés kiterjeszthető  $P_1$ -re úgy, hogy monoton maradjon /elegendő e célból az  $e$  elem képét az  $[f(a) \vee f(b), f(c) \wedge f(d)]$  intervallum tetsz. elemeként megadni, ha  $f$  a kérdéses leképezés/. Ennélfogva  $2^{P_1} \hat{\beta}\hat{\pi}$ -képe végül is azonos  $2^{P_3}$   $\hat{\psi}$ -képével, így megadható olyan szürjektív  $\hat{\varphi}$  morfizmus, hogy az alsó diagram kommutatív legyen, de akkor ennek  $F$ -képe adja a kívánt  $\varphi$ -t.

A 4.30 lemmát közvetlenül megelőző feltétel tehát teljesül, így  $T$  hálószerű rendezés.

Mivel  $\mathcal{L} = \text{HSP}(\mathcal{L})$ , azért  $F$  szűrjektívitas- és beágyazástartása folytán  $\mathcal{U} = \text{HSP}(\mathcal{U})$ . Így már csak azt kell igazolni, hogy rendezésprimál  $T$ -re nézve. Ehhez elegendő azt belátni, hogy tetsz.  $n$  természetes számra az  $n$ -rangu  $\mathcal{U}$ -szabad algebra,  $\mathcal{F}_n(n)$ , izomorf  $\mathcal{U}^{A^n}$ -nel, ahol  $A^n$  parc. rendezett halmaz, és pedig a  $T$  által meghatározott "szorzatrendezéssel" van ellátva. Ha sikerül megmutatni, hogy  $\mathcal{U}^{A^n}$ -t  $\pi_1, \dots, \pi_n$ , az  $A^n \rightarrow A$  természetes projekciók generálják, akkor készen vagyunk. Legyen  $\mathcal{B}$  az általuk generált részalgebra.  $\mathcal{B}$  "F-őse" izomorf  $\mathcal{L}^{A^n}$  egy részalgebrájával, ezért  $\mathcal{L}^P$  alakúval izomorf, ahol  $P$  homomorf képe  $A^n$ -nek a Priestley-terek kategóriájában valamely  $\varphi$  leképezés által /azaz ha  $\underline{a} \leq \underline{b}$   $A^n$ -ben, akkor  $\varphi(\underline{a}) \leq \varphi(\underline{b})$   $P$ -ben, és  $\varphi$  szűrjektív; lásd I. fejt., 3. §/, tehát  $\mathcal{B} \cong \mathcal{L}^P$ . Megmutatjuk, hogy  $\varphi$  izomorfizmus /ami azzal ekvivalens, hogy  $\underline{a} \neq \underline{b}$  esetén  $\varphi(\underline{a}) \neq \varphi(\underline{b})$ /; akkor ebből adódik, hogy  $\mathcal{B} \cong \mathcal{U}^{A^n}$ , és akkor a végeesség folytán /és lévén  $\mathcal{B}$  részalgebra/ az egyenlőség érvényes. A dualitáselmélet szerint  $A^n$  izomorf a  $\mathcal{L}^{A^n} \rightarrow \mathcal{L}$  homomorfizmusok /pontonként rendezett/ halmazával /lásd 4.24 tétel; vegyük figyelembe, hogy a topológia diszkrét/, de akkor látszik /használva a megfelelő (\*) típusu érvelést is/, hogy  $A^n$  egyuttal izomorf az összes  $\mathcal{U}^{A^n} \rightarrow \mathcal{U}$  pontonként  $T$ -rendezett homomorfizmusok halmazával is. Tudjuk, hogy a  $\mathcal{L}^{A^n} \rightarrow \mathcal{L}$  homomorfizmusok nem mások, mint az  $A^n \rightarrow \mathcal{L}$  monoton leképezések alkalmas rögzített  $\underline{a} \in A^n$  helyen való kiértékelései /4.24 tétel/. Viszont a megfelelő kiértékelések nyilván szolgáltatnak ugyanennyi különböző  $\mathcal{U}^{A^n} \rightarrow \mathcal{U}$  homomorfizmust, azért következik, hogy ők az összes ilyen megadják. Legyen  $\xi$  a  $\mathcal{B}$ -t  $\mathcal{U}^{A^n}$ -be beágyazó identikus leképezés F-őse, akkor a  $\xi$ -vel való balról szorzás  $\text{Hom}(\mathcal{L}^{A^n}, \mathcal{L})$ -t  $\text{Hom}(\mathcal{L}^P, \mathcal{L})$ -re képezi le /lásd 4.2 tétel előtti definíciók és 4.25 tétel/, és az is világos /(\*) típusu okfejtés/, hogy ezt vehetjük  $\varphi$  gyanánt. Visszatérve most a  $\mathcal{U}$  kategóriába, látjuk, hogy  $\varphi$ -nak tekinthető az a leképezés, amely az  $\mathcal{U}^{A^n} \rightarrow \mathcal{U}$  homomorfizmusokat  $\mathcal{B}$ -re restringálja, és ez a restringálás szűrjektív  $\text{Hom}(\mathcal{B}, \mathcal{U})$ -ra.

Tegyük fel most már, hogy  $\alpha, \beta: \mathcal{U}^{A^n} \rightarrow \mathcal{U}$  homomorfizmusokra  $\alpha \neq \beta$  / $T$ -szerint!/. A fent mondottak szerint  $\alpha$  ill.  $\beta$  valamely  $A^n$ -beli  $\underline{a}$  ill.  $\underline{b}$  helyen való kiértékelés.  $\alpha \neq \beta$  folytán valamely  $g \in \mathcal{U}^{A^n}$ -re  $\alpha(g) \neq \beta(g)$ , azaz  $g(\underline{a}) \neq g(\underline{b})$ .  $g$  (monoton,

ezért  $\underline{a} \neq \underline{b}$ , és így valamely  $i$ -re  $\pi_i(\underline{a}) \neq \pi_i(\underline{b})$ , vagyis  $\alpha(\pi_i) \neq \beta(\pi_i)$ . De  $\pi_i \in B$ , és ez mutatja, hogy  $\zeta(\alpha) \neq \zeta(\beta)$ .  $B$  tehát azonos  $\mathcal{U}^{An}$ -nel. /Megjegyezzük, hogy az összes tekintett  $\mathcal{V}$ -beli algebrák el vannak látva a saját rendezésükkel közben, amelyet egyelőre nem hoztunk  $T$ -vel kapcsolatba, hiszen mindig csak a  $T$ -rendezést használtuk. Ez azonban az okoskodásokat nem zavarja./

Végezetül még azt igazoljuk, hogy a  $T$  rendezés azonos  $\mathcal{U}$  saját rendezésével, mely utóbbival  $\mathcal{V}$ -be tartozásánál fogva bir. Láttuk már, hogy  $\mathcal{U}$  rendezésprimál  $T$ -re nézve, ugyanakkor műveletei monotonok a saját rendezésére nézve. A 2.19 tétel bizonyításából kitűnik,  $T$ -összehasonlíthatatlan elemek nem lehetnek a saját rendezésben összehasonlíthatók. Másrészt, ha  $T$  ténylegesen finomabb lenne a saját rendezésénél, akkor a saját rendezés helyett  $T$ -t véve /a műveleteket megtartva/  $\mathcal{U}$ -nak az  $A$  identikus leképezése mint valódi rendezésfinomítás mellett homomorf képét kapnánk, ami a varietások definíciója alapján szintén  $\mathcal{V}$ -be tartozik, és így lenne  $\mathcal{V}$ -ben valódi rendezésfinomítás, ami lehetetlen. Ezzel a 4.30 tétel bizonyítását befejeztük, Q. E. D.

#### 4. A disztributív bővítés kongruenciahálójára

Ebben a paragrafusban megvizsgáljuk a hálószerű rendezésre nézve rendezésprimál algebrák által generált varietások elemeinek kongruenciahálóját. Mivel az alaptétel /3.4 tétel/ szerint ezek mind a generátoralgebra valamely disztributív bővítésével izomorfok, azért elég az ilyen disztributív bővítések kongruenciahálóját leírni.

**4.31 Tétel** Legyen  $\mathcal{U}$  rendezésprimál algebra hálószerű rendezéssel és legyen  $\mathfrak{X} = (X; \mathcal{J}, \leq)$  Priestley-tér,  $\mathcal{D}$  pedig  $\mathfrak{X}$  duális hálójára /lásd 1.8 definíció/. Akkor az  $\mathcal{U}[\mathcal{D}]$  disztributív bővítés kongruenciahálójára,  $\text{Con}(\mathcal{U}[\mathcal{D}])$  duálisan izomorf  $\mathcal{C}(\mathfrak{X})$ -szel,  $\mathfrak{X}$  zárt részhalmazainak hálójával.

Bizonyítás: a jelölések egyszerűsítése végett jelentsé  $B$   $\mathcal{U}[\mathcal{D}]$  tartóhalmazát,  $A[\mathcal{D}]$ -t,  $L$  pedig  $\text{Con}(\mathcal{U}[\mathcal{D}])$  tartóhalmazát, legyen továbbá  $C1$   $\mathfrak{X}$  összes zárt részhalmazainak halmaza. Definiáljuk a  $\Phi : L \longrightarrow C1$  és  $\Phi' : C1 \longrightarrow L$  leképezéseket az alábbi módon:

$$\begin{aligned}\Phi(\Theta) &= \{x \in X \mid f(x) = g(x) \text{ minden } (f, g) \in \Theta\text{-ra}\}; \\ \Phi'(U) &= \{(f, g) \in B^2 \mid f(x) = g(x) \text{ minden } x \in U\text{-ra}\}.\end{aligned}$$

Mindenekelőtt be kell látni, hogy  $\Phi$   $L$ -et valóban  $C1$ -be képezi,  $\Phi'$

pedig  $C_1$ -et  $L$ -be. A 4.23 lemma bizonyításában kimutattuk, hogy  
 bn.  $f, g \in B$ -re  $\text{Equ}(f, g) = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$  zárt halmaz, és  
 nyilvánvalóan  $\Phi(\Theta) = \bigcap \{\text{Equ}(f, g) \mid (f, g) \in \Theta\}$ , mely utóbbi, lévén  
 zárt halmazok metszete, ilyenformán zárt halmaz. Könnyű ellenőrizni  
 továbbá, hogy  $\Phi'(U)$  ekvivalencia-reláció és rendelkezik a helyette-  
 sítési tulajdonsággal /a rendezéssel szemben való viselkedésével nem  
 kell törödnünk a 2.20 tétel értelmében/.

Triviális, hogy  $\Phi, \Phi'$  mindketten tartalmazást megfordítóak, to-  
 vábbá  $\Phi(\Phi(\Theta)) \supseteq \Theta$  és  $\Phi(\Phi'(U)) \supseteq U$ .

Most megmutatjuk, hogy  $\Phi'$  szürjektív. Legyen  $\Theta \in L$  tetszőle-  
 ges.  $\mathcal{U}[n]/\Theta$  izomorf  $\mathcal{U}$  valamely másik disztributív bővítésével,  
 tehát  $\mathcal{U}$  valamely szubdirekt hatványával, így - lévén  $\mathcal{U}$  egyszerű  
 -  $\Theta$  előáll maximális valódi kongruenciák metszeteként. A 4.23  
 lemma folytán ez utóbbiak  $X$  elemeinek megfelelő projekciók magjai.  
 Részletesen, ha  $\Theta = \bigcap \{\eta_i \mid i \in I, \eta_i \text{ max. valódi}, \eta_i = \ker \pi_{x_i}\}$   
 / $x_i \in X, i \in I$ /, jelölje  $U$  az  $\{x_i \mid i \in I\}$  halmaz  $\mathcal{I}$ -lezártját.  
 Akkor világos, hogy  $\Theta = \Phi'(U)$  /ha  $f$  és  $g$  minden  $x_i$ -n megegyez-  
 nek, akkor  $U$ -n is, mert  $\text{Equ}(f, g)$  mindig zárt/.

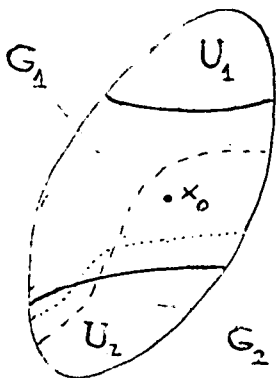
A bizonyítás folytatásához egy lemmára van szükségünk:

4.31/a Lemma A tétel feltételeivel és jelöléseivel, legyen  $U$   
 zárt részhalmaza  $\mathcal{X}$ -nek,  $x_0 \in X, x_0 \notin U$ . Akkor léteznek olyan  $f, g$   
 $B$ -beli elemek /azaz  $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}$  folytonos monoton leképezések/, hogy  
 $f$  és  $g$  megegyeznek  $U$ -n, de  $f(x_0) \neq g(x_0)$ .

Bizonyítás: Legyen  $U = U_1 \cup U_2$ , ahol  $U_1$  pontosan  $U$   $x_0$ -tól  $\geq$   
 elemeiből áll,  $U_2$  pedig a többiből.  $U_1$  minden eleme elválasztha-  
 tó  $x_0$ -tól felszálló clopen,  $U_2$  minden eleme  
 pedig leszálló clopen halmazzal. Ezek együtte-  
 sen lefedik a zárt, tehát kompakt  $U$ -t, így már  
 véges sok is lefedi közülük. Jelölje  $G_1$  ill.  
 $G_2$  ezen megmaradtak közül a felszállóak ill. a  
 leszállóak egyesítését. Bizonyos, hogy  $G_2$  nem  
 nyulik bele  $U_1$ -be, különben leszálló lévén  $x_0$ -t  
 is tartalmazná. De akkor  $G_1$  lefedi  $U_1$ -et. Ad-  
 juk meg most az  $f$  és  $g$  leképezéseket az alábbi módon:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in G_2 \\ 1, & \text{különben} \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in G_2 \text{ vagy } x \notin G_1 \\ 1, & \text{különben} \end{cases}.$$

/0 ill. 1 jelenti  $\mathcal{U}$  legkisebb ill. legnagyobb elemét./ Mivel az  
 1 inverzképe mindkét esetben clopen felszálló, azért  $f, g$  egyaránt



folytonos, monoton;  $\delta_k$   $U$ -n azonosak, de  $f(x) = 1 \neq 0 = g(x_0)$ , q.e.d.

Ez a lemma mutatja, hogy mindig  $\Phi(\Phi'(U)) = U$ , de akkor mindig  $\Phi'(\Phi(\Phi'(U))) = \Phi'(U)$ ; innen  $\Phi'$  már igazolt szürjektivitása alapján mindig  $\Phi'(\Phi(\Theta)) = \Theta$ , Q. E. D.

## 5. Egy hálóelméleti alkalmazás

A fejezet záró §-ában bemutatjuk az alaptétel /3.4 tétel/ egy rendezés-funkcionálisan teljes hálókkal kapcsolatos alkalmazását.

4.32 Definíció /Rendezés-funkcionálisan teljes háló/ Egy véges  $\mathcal{L}$  hálót rendezés-funkcionálisan teljesnek nevezünk, rajta minden végesváltozós monoton függvény előáll algebrai függvényként /lásd Schweigert [20], Wille [28]/.

4.33 Tétel Legyen  $\mathcal{L}$  rendezés-funkcionálisan teljes háló,  $\mathcal{K}$  pedig az általa generált hálóvarietás olyan eleme, melybe  $\mathcal{L}$  beágyazható úgy, hogy  $\mathcal{L}$  legkisebb ill. legnagyobb elemének képe  $\mathcal{K}$  legkisebb ill. legnagyobb eleme. Akkor  $\mathcal{K}$  izomorf  $\mathcal{L}$  egy disztributív bővítésével, ahol  $\mathcal{K}$  rendezése a hálóstrukturájával adott.

Bizonyítás: A Jónsson-lemma értelmében  $\mathcal{K}$  izomorf  $\mathcal{L}$  részhálói homomorf képeinek valamely szubdirekt szorzatával; feltehető, hogy egyik tényező sem egyelemű. Jelölje  $0$  ill.  $1$   $\mathcal{L}$  korlátelemeit, és  $I$  legyen a szubdirekt szorzat indexhalmaza,  $\varphi$  pedig legyen az említett tulajdonságu  $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{K}$  beágyazás /itt már  $\mathcal{K}$  azonosítva van a kérdéses szubdirekt szorzattal/. Mivel  $0\varphi$  és  $1\varphi$   $\mathcal{K}$  korlátelemei, azért a szubdirektségből adódik, hogy ezek az  $I \rightarrow \{0\}$  ill. az  $I \rightarrow \{1\}$  konstansleképezések. Ebből látszik, hogy ha tetsz.  $i \in I$ -re  $\bar{\pi}_i$  jelenti az  $i$ . projekció,  $\pi_i$   $I\varphi$ -re való restrikcióját, akkor  $\bar{\pi}_i$  értékészlete tartalmazza  $0$ -t és  $1$ -et; tehát  $\ker \bar{\pi}_i$  legalább két osztályból álló kongruencia  $\mathcal{L} \cong \text{Im } \varphi$ -n. De  $\mathcal{L}$  egyszerű /lásd Wille [28]/, ezért  $\ker \bar{\pi}_i$  az egyenlőségreláció  $\text{Im } \varphi$ -n, ami azt mutatja, hogy  $\varphi\bar{\pi}_i \neq \varphi\pi_i$  automorfizmusa  $\mathcal{L}$ -nek. Most már a  $\{\varphi\pi_i | i \in I\}$  automorfizmuscsalád segítségével definiálhatjuk  $\mathcal{K}$ -nak  $\mathcal{L}$  egy diagonálist tartalmazó  $\tilde{\mathcal{K}}$  szubdirekt szorzatára történő izomorfizmusát úgy, hogy tetsz.  $f \in \mathcal{K}$  kiválasztási függvénynek megfeleltetjük azt a kiválasztási függvényt,  $f$ -ot, melyre  $f(i) = (f(i))(\varphi\bar{\pi}_i)^{-1}$  / $i \in I$ /. Tekintsük most  $\mathcal{L}$  elemeit nullváltozós műveleteknek; a keletkező  $\tilde{\mathcal{L}}$  algebra /hálószerű/ ren-

dezésprimál, így alkalmazható a 3.4 tétel:  $\tilde{K}$  izomorf  $\tilde{L}$  egy alkalmas disztributív bővítésével /világos, hogy ha  $\tilde{K}$ -ban a diagonális elemeivel definiáljuk a megfelelő nullváltozós műveleteket, akkor az  $\tilde{L}$  által generált varietás egy eleméhez jutunk/. "Elfelejtve" utóbbin a nullváltozós műveleteket,  $K$  kívánt előállítását kapjuk. /A bizonyításból az is kiderült, hogy  $K$  már  $L$ -nek szubdirekt hatványa./ Q. E. D.

A DISZTRIBUTIV BŐVÍTÉSEK DIREKT DEFINÍCIÓJA

1. A definíció motivációi

A rendezett algebrák disztributív bővítésének fogalma /3.2 definíció/ az univerzális algebrák Boole-algebrával /vagy hálóval/ való bővítése fogalmának általánosítása, éspedig úgy, hogy az utóbbi fogalomra adható két ekvivalens definíció /lásd alább/ közül azt vettük alapul, amely nem csak a bővitendő algebrára és a bővítő Boole-algebrára hivatkozik, hanem utóbbi Stone-féle reprezentációs terére is, tehát nem un. direkt definíció. Természetesen felmerül így a kérdés, hogy vajon lehet-e Boole-bővítés direkt definícióját is úgy általánosítani disztributív bővítésekre, hogy az ekvivalens legyen 3.2-vel /vagyis izomorf algebrát adjon/. Ezen fejezetben, mely egyúttal a dolgozat utolsó fejezete, ilyen definíciót adunk meg, és igazoljuk jogosságát.

**5.1 Definíció** /Univerzális algebra Boole-algebrával való bővítése/ Legyen  $\mathcal{A}$  algebra,  $\mathcal{B}$  pedig Boole-algebra.  $\mathcal{A}$ -nak  $\mathcal{B}$ -vel való bővítésén értjük azon  $\mathcal{A}[\mathcal{B}]$ -vel jelölt,  $\mathcal{A}$ -éval azonos típusu algebrát, melynek  $\mathcal{A}[\mathcal{B}]$  tartóhalmaza az összes olyan  $\xi: A \longrightarrow B$  leképezésekből áll, melyekre teljesülnek

- (i)  $\xi$  értékészlete véges / $\xi$  végesrangu/;
- (ii)  $\xi(a) \wedge \xi(b) = 0$  / $\mathcal{B}$  zéróeleme/, ha  $a, b \in A$ ,  $a \neq b$ ;
- (iii)  $\bigvee_{a \in A} \xi(a) = 1$  / $\mathcal{B}$  egységeleme/,

a műveletek pedig a következő módon vannak értelmezve: tetsz.  $\mu$   $n$ -változós / $n > 0$ /,  $\mathcal{A}$  típusából való műveletjel esetén bármely  $\mathcal{A}[\mathcal{B}]$ -beli  $\xi_1, \dots, \xi_n$  elemekre legyen  $\mu(\xi_1, \dots, \xi_n)$  az az  $A \longrightarrow B$  leképezés, amelyre

$$\mu(\xi_1, \dots, \xi_n)(a) = \bigvee_{\substack{b_1, \dots, b_n \in A \\ \mu(b_1, \dots, b_n) = a}} (\xi_1(b_1) \wedge \dots \wedge \xi_n(b_n)) \quad (2)$$

bármely  $a \in A$  mellett. Ha  $\mu$  nullváltozós és  $\mathcal{A}$ -ban a  $d$  értéket veszi fel, akkor legyen ennek  $\mathcal{A}[\mathcal{B}]$ -beli értéke az a leképezés, mely  $d$ -n az 1 értéket veszi fel, másutt a 0-t. /Lásd Foster [23], Grätzer [13], Burris [3]; megjegyezzük, hogy Burris erre a konst-

rukcióra az  $\mathcal{U}[\mathcal{B}]^*$  jelölést használja./

$\mathcal{B}$  Stone-terét megkapjuk, ha  $\mathcal{B}$  0,1-disztributív hálónak tekintve alkalmazzuk az 1.7 definíciót, de a tér rendezését /amely mindig triviálisnak adódik, lásd pl. Grätzer [12]/ töröljük. A Stone-tér fogalmát felhasználva kapjuk az ismert másik definíciót a Boole-bővítésekre:

5.2 Definíció /Boole-bővítés "topologikus" definíciója/ Legyen  $\mathcal{U}$  univerzális algebra,  $\mathcal{B}$  Boole-algebra,  $(X; \mathcal{T})$  pedig  $\mathcal{B}$  Stone-tere. Akkor az  $\mathcal{U}[\mathcal{B}]$  Boole-bővítésen értjük az  $\mathcal{U}^X$  direkthatvány azon részalgebráját, amelyet az összes  $(X; \mathcal{T}) \longrightarrow A$  folytonos leképezések határoznak meg, ahol  $A$ -t a diszkrét topológiával ruházzuk fel /igazolható, hogy részalgebrát adnak/.

Adott  $\mathcal{U}$ -ból és  $\mathcal{B}$ -ből a kétféle értelmezés izomorf algebrát állít elő, ennek bizonyítását lásd pl. Grätzer [13]-ben. Magát az izomorf leképezést megadjuk itt is. Azonosítsuk  $\mathcal{B}$ -t Stone-tere clopen részalmazainak Boole-algebrájával. Ha most  $f$  a Stone-térnek a diszkrét  $A$ -ba menő tetsz. folytonos leképezése, akkor  $f$  értékkészlete szükségképpen véges /a Stone-tér kompakt/. Legyen  $\xi_f$  azon  $A \longrightarrow B$  leképezés, melyre

$$\xi_f(a) = \{a\}f^{-1} \text{ tetsz. } a \in A \text{ esetén.} \quad (3)$$

Világos, hogy  $\xi_f$  teljesíti (1)-et. A két módon nyert  $\mathcal{U}[\mathcal{B}]$  izomorfiáját az  $f \longrightarrow \xi_f$  megfeleltetés adja. Ezt akarjuk általánosítani: úgy fogjuk a másíkfajta disztributív bővítést értelmezni, hogy az izomorfiát ismétcsak az előbbi hozzárendelés biztosítsa, mégpedig a  $\xi_f$ -ek olyan definíciója mellett, amely (3)-ba megy át, ha  $\mathcal{U}$  triviálisan rendezett, és Boole-féle  $\mathcal{D}$  adott.

## 2. A definíció kimondása és megalapozása

Legyen  $\mathcal{D}$  0,1-disztributív háló és  $(X; \mathcal{T}, \leq)$  ennek Priestley tere,  $\mathcal{U}$  pedig egy rendezett algebra;  $\mathcal{D}$ -t azonosítjuk  $X$  összes felszálló clopen halmazainak hálójával. Megadván egy tetszőleges  $f: (X; \mathcal{T}, \leq) \longrightarrow \mathcal{U}$  folytonos monoton leképezést, konstruálni akarunk egy  $\xi_f: A \longrightarrow \mathcal{D}$  függvényt. Természetesen ennek értékeit nem adhatjuk meg (3) mintájára mint az egyelemű részalmazok  $f$ -inverzeképeit, mert utóbbiak általában nem felszállóak /habár clopenek/, és így nem tartoznak  $\mathcal{D}$ -hez.  $\mathcal{D}$  elemeihez jutunk azonban, ha  $A$  fel-

szálló részhalmazainak inverzképeit vesszük; ezek teljesen meghatározzák  $f$ -et, mert tetsz.  $a \in A$ -ra  $\{a\}f^{-1} = [a]f^{-1} \setminus ([a] \setminus \{a\})f^{-1}$  / $a$  jelölést lásd 24. old/, és  $f^{-1}$  "argumentumai" a jobboldalon felszállók. Elegendő továbbá ismerni az összes  $[t]$  alaku halmazok inverzképeit ismerni, mert  $A$  tetsz. felszálló  $A_0$  részhalmazára  $A_0 = \bigcup \{[b] \mid b \in A_0\}$ . Most tekintsük az  $[a]f^{-1}$  halmazokat. Csak véges sok van belőlük / $A$ -ról nincs feltéve, hogy véges!/, ugyanis  $f$  értékkészlete,  $\mathcal{R}(f)$  véges, és  $[a]f^{-1} = ([a] \cap \mathcal{R}(f))f^{-1}$ . Egyszerűen belátható, hogy

$$[a]f^{-1} \cap [b]f^{-1} = \bigcup_{c \geq a, b} [c]f^{-1} \quad \text{tetsz. } a, b \in A\text{-ra}$$

$$\text{és } \bigcup_{a \in A} ([a]f^{-1} \setminus \bigcup_{b > a} [b]f^{-1}) = X. \quad (4)$$

Megjegyezzük, hogy az  $X$  összes clopen részhalmazai által alkotott Boole-háló tekinthető a  $\mathcal{D}$  által generált Boole-hálónak /lásd Priestley [23]/. Értelmezzük az  $f$ -hez rendelt  $\xi_f$ -et mint azt az  $A \longrightarrow D$  leképezést, melyre

$$\xi_f(a) = [a]f^{-1} \quad /a \in A/. \quad (5)$$

Azonnal látszik, hogy (5) éppen (3)-at adja vissza, ha  $\mathcal{L}$  rendezése triviális,  $\mathcal{D}$  pedig Boole-féle.

Most már (4), az öt megelőző megjegyzés és (5) figyelembevételével kimondjuk a várt definíciót.

**5.3 Definíció** /Distributív bővítés direkt értelmezése/ Legyen  $\mathcal{L}$  rendezett algebra,  $\mathcal{D}$  0,1-distributív háló. Az  $\mathcal{L}[\mathcal{D}]$  distributív bővítés  $A[\mathcal{D}]$  alaphalmaza legyen az összes olyan  $\xi: A \longrightarrow D$  leképezések halmaza, melyek kielégítik az alábbiakat:

(i)  $\xi$  végesrangu;

$$(ii) \quad \xi(a) \wedge \xi(b) = \bigvee_{c \geq a, b} \xi(c) \quad \text{minden } a, b \in A\text{-ra}; \quad (6)$$

$$(iii) \quad \bigvee_{a \in A} (\xi(a) \setminus \bigvee_{b > a} \xi(b)) = 1 \quad \text{a } \mathcal{D} \text{ által generált Boole-}$$

algebrában. /Itt  $x \setminus y$   $x \wedge y'$ -t jelenti; az üres unió alatt 0 értendő./ A műveletek megadása a következő: egy  $n$ -változós / $n > 0$ /  $\mu$

műveletjel és  $\xi_1, \dots, \xi_n \in A[\mathcal{D}]$  elemek esetén legyen  $\mu(\xi_1, \dots, \xi_n)$  azon  $A \longrightarrow D$  függvény, melyre

$$\mu(\xi_1, \dots, \xi_n)(a) = \bigvee_{\substack{b_1, \dots, b_n \in A \\ \mu(b_1, \dots, b_n) \geq a}} (\xi_1(b_1) \wedge \dots \wedge \xi_n(b_n)) \quad (7)$$

tetsz.  $a \in A$ -ra. /Az  $n = 0$  esetben legyen  $\mu$   $\mathcal{A}$ -beli értéke  $d$ ; akkor  $\mu$   $\mathcal{A}[0]$ -beli értéke a  $d$ -től kisebbegyenlő elemeknek  $1$ -et, a többinek  $0$ -t feleltet meg./ A rendezést a

$\xi \leq \eta$  akkor és csak akkor, ha  $\xi(a) \leq \eta(a)$   $/a \in A/$  (8) törvény írja le.

**5.4 Tétel** Az előző definíció korrekt, és az  $f \rightarrow \xi_f$  hozzárendelés izomorfizmus a 3.2 ill. az 5.3 által megadott között.

**Bizonyítás:** A korrektséghez csak azt kell megfigyelni, hogy a (ii)-ben és (iii)-ban szereplő egyesítések valójában mindig végesek, és hasonló áll (7)-re is az (i) követelmény folytán.

Jelölje az  $f \rightarrow \xi_f$  megfeleltetést  $\varphi$ . Először belátjuk, hogy  $\varphi$  szürjektív. Legyen  $\xi$  tetsz. (6)-ot kielégítő függvény, és tekintsük azon  $f: (X; \mathcal{T}, \leq) \rightarrow \mathcal{A}$  leképezést, melyre

$$\{a\}f^{-1} = \xi(a) \setminus \bigcup_{b > a} \xi(b) \quad /a \in A/. \quad (9)$$

**$f$  jóldefiniált:** Ha  $a \neq b$  és  $a < b$ , akkor  $\{a\}f^{-1} \subseteq \xi(a) \setminus \xi(b)$ ,  $\{b\}f^{-1} \subseteq \xi(b)$ , úgyhogy  $\{a\}f^{-1} \cap \{b\}f^{-1} = \emptyset$ ; ha  $a, b$  összehasonlíthatatlanok, de  $x \in \{a\}f^{-1} \cap \{b\}f^{-1}$ , akkor egyuttal  $x \in \xi(a) \cap \xi(b)$ , tehát (ii) folytán alkalmas  $c \geq a, b$  elemre  $x \in \xi(c)$ . De  $c = a$  vagy  $c = b$  valamelyike nem áll, például  $c > a$ , és akkor  $\{a\}f^{-1} \subseteq \xi(a) \setminus \xi(c)$ , ami ellentmondás, mivel  $x \in \{a\}f^{-1}$ .

**$f$  mindenütt definiálva van:** (9) és (iii) miatt az  $\{a\}f^{-1}$  halmazok lefedik  $X$ -et.

**$f$  folytonos:** Triviális, mert a  $\xi(a)$ -k clopenek és a (9)-beli egyesítés véges.

**$f$  monoton:** (9)-ből könnyen következik, hogy tetsz.  $a \in A$ -ra  $\xi(a) = [a]f^{-1}$ ; innen az állítás adódik. Egyuttal az is látszik, hogy  $\xi = \xi_f$ .

Legyenek most  $f_1, \dots, f_n: (X; \mathcal{T}, \leq) \rightarrow \mathcal{A}$  folytonos monoton leképezések  $/n > 0/$ , pedig  $n$ -változós műveletjel,  $f = \mu(f_1, \dots, f_n)$ .

Akkor

$$[a]f^{-1} = [a]\mu(f_1, \dots, f_n)^{-1} = \bigcup_{\mu(b_1, \dots, b_n) \geq a} (\{b_1\}f_1^{-1} \cap \dots \cap \{b_n\}f_n^{-1}) =$$

$/\mu$  monotonitása folytán/

$$= \bigcup_{\mu(b_1, \dots, b_n) \geq a} ([b_1]_{f_1}^{-1} \cap \dots \cap [b_n]_{f_n}^{-1}).$$

Ez mutatja, hogy  $\varphi$  művelettartó /a nullváltozós műveletek esetét az olvasóra bizzuk/.

Végül  $f \leq g$  azzal ekvivalens, hogy minden  $a \in A$ -ra  $[a]_f^{-1} \subseteq [a]_g^{-1}$ , vagyis  $\xi_f(a) \leq \xi_g(a)$ , tehát (8) értelmében azzal, hogy  $\xi_f \leq \xi_g$ . Q. E. D.

/Megjegyezzük, hogy a bizonyításban hallgatólagosan felhasználtuk, hogy  $\cup, \cap$  és  $\vee, \wedge$  ugyanazt jelenti, tekintve, hogy  $\cap$ -t a Priestley-tere segítségével reprezentáltuk!/

Hogy a definíció a Boole-bővítés fogalmának általánosítása, az is nyilvánvaló most már, mert triviális rendezésű  $\mathcal{L}$  mellett (6) át-  
 megy (1)-be, (7) (2)-be, (8) pedig triviális rendezést definiál.

## K Ö S Z Ö N E T N Y I L V Á N I T Á S

Az értekezés matematikai részének kidolgozásában igen sok segítséget kaptam H u h n A n d r á s docenstől, a matematikai tudományok kandidátusától. Az ő javaslatára kezdtem e témában vizsgálókat, melyek eredményességéhez nagymértékben hozzájárultak az ő hasznos ötletei és tanácsai. A tételek megsejtésének legnagyobb része az ő érdeme, és tőle származik a disztributív bővítés direkt definíciójának gondolata.

Munkámban és az algebrában való elmélyedésben további nagy segítséget kaptam C s á k á n y B é l a tanszékvezető egyetemi tanártól, a matematikai tudományok doktorától is.

Minkettőlüknek ezuton is szeretnék köszönetet mondani értékes támogatásukért.

Lenkehegyi Attila  
tanársegéd

- [1] S. L. B l o o m, Varieties of ordered algebras, J. Comp. System Sci., 13(1976), 200-212.
- [2] M. S. B u r g i n, Free topological groups and universal algebras (Russian), Dokl. Akad. Nauk USSR, 204(1972), No. 1, 9-12.
- [3] S. B u r r i s, Boolean powers, Algebra Universalis, 5(1975), 341-360.
- [4] C s á s z á r Ákos, Bevezetés az általános topológiába, Akadémiai Kiadó, Budapest (1970).
- [5] B. A. D a v e y, D. D u f f u s, R. W. Q u a c k e n b u s h and I. R i v a l, Exponents of finite simple lattices, J. London Math. Soc., 17(1978), 203-211.
- [6] B. A. D a v e y and I. R i v a l, Exponents of lattice-ordered algebras, preprint No. 79-1, La Trobe University (1979). /Melbourne, Australia/
- [7] B. A. D a v e y and H. W e r n e r, Dualities and equivalences for varieties of algebras, to appear in Colloq. Math. Soc. János Bolyai (33, Lattice Theory).
- [8] A. D e l e a n u and I. B u c u r, Introduction to the Theory of Categories and Functors, Wiley & Sons LTD, London-New York-Sydney (1968).
- [9] L. F u c h s, On partially ordered algebras I, Colloq. Math., 14(1966), 115-130.
- [10] L. F u c h s, Partially Ordered Algebraic Systems, Pergamon Press, Oxford-London-New York-Paris (1963).
- [11] M. I. G o u l d and G. G r ä t z e r, Boolean extensions and normal subdirect powers of finite universal algebras, Math. Z., 99(1967), 16-25.
- [12] G. G r ä t z e r, General Lattice Theory, Akademie-Verlag, Berlin (1978).
- [13] G. G r ä t z e r, Universal Algebra, 2nd ed., Springer-Verlag, New York-Berlin (1979).
- [14] Tah-Kai H u, On the topological duality for primal algebra theory, Algebra Universalis, 1(1971), 152-154.

- [15] Tah-Kai H u, Stone duality for primal algebra theory, Math. Z., 110(1969), 180-198.
- [16] B. J ó n s s o n, Algebras whose congruence lattices are distributive, Math. Scand., 21(1967), 110-121.
- [17] J. L. K e l l e y, General Topology, Van Nostrand, Princeton, Toronto-New York-London (1957).
- [18] K. K u r a t o w s k i, Introduction to Set Theory and Topology, Pergamon Press, New York-Oxford-London-Paris (1961).
- [19] B. M i t c h e l l, Theory of Categories, Academic Press, New York-London (1965).
- [20] Evelyn N e l s o n, Filtered products of congruences, Algebra Universalis, 8(1978), 266-268.
- [21] B. P a r e i g i s, Categories and Functors, Academic Press, New York-London (1970).
- [22] A. F. P i x l e y, Functionally complete algebras generating permutable and distributive classes, Math. Z., 114(1970), 361-372.
- [23] H. A. P r i e s t l e y, Representation of distributive lattices by means of ordered Stone spaces, Bull. London Math. Soc., 2(1970), 186-190.
- [24] H. A. P r i e s t l e y, Ordered topological spaces and the representation of distributive lattices, Proc. London Math. Soc., (3) 24(1972), 507-530.
- [25] R. W. Q u a c k e n b u s h, Pseudovarieties of finite algebras isomorphic to bounded distributive lattices, Discrete Math., 28(1979), 189-192.
- [26] D. S c h w e i g e r t, Über endliche, ordnungspolynomvollständige Verbände, Monatsh. Math., 78(1974), 68-76.
- [27] W. T a y l o r, Varieties of topological algebras, J. Austral Math. Soc., 23 (Series A) (1977), 207-241.
- [28] R. W i l l e, Eine Charakterisierung endlicher ordnungspolynomvollständiger Verbände, Arch. Math. (Basel), 28(1977), 557-560.
- [29] A. L. Foster, Generalized Boolean theory of universal algebras, Part I., Math. Z., 58(1953), 306-336.; Part II., Math. Z., 59(1953), 191-199.

