B 2147

EGYETEMI DOKTORI ÉRTEKEZÉS

Puskás Csaba

AUTOMATÁK FÉLCSOPORTJAIRÓL

Budapest, 1982

József Attila Tudományegyetem Központi Könyvtára
SZEGED
B 2147

B E V E Z E T É S

Az automaták algebrai elmélete az 1950-es évektől kezdve alakult ki. Az elmélet egyik fő iránya az, hogy az automatákhoz algebrai strukturákat, általában félcsoportokat, rendelünk abból a célból, hogy az illető algebrai strukturák szerkezetéből az automata szerkezetére és müködésére következtethessünk. Ilyen célra használható pl. az automata karakterisztikus félcsoportja, endomorfizmus-félcsoportja és automorfizmus-csoportja, amelyeket elsősorban kimenő jel nélküli automaták szerkezetének vizsgálatára vezettek be. A kimenő jel nélküli automaták karakterisztikus félcsoportjának fogalma J.R.MYHILL [19] és A.NERODE [20] munkássága nyomán alakult ki, bár magát az elnevezést A.C.FLECK [13] használta először. A kimenő jel nélküli automaták számos osztálya jól jellemezhető a fenti félcsoportok segitségével. Ilyen tekintetben már eléggé jól ismert automataosztályok pl. a ciklikus és a kommutativ ciklikus automaták osztálya [22], [24], az erősen összefüggő automaták osztálya [15], [16], [22], [34], a kvázi-perfekt és a perfekt automaták osztálya [2], [12], [15], [33], az irányitható automaták osztálya [3], [5] stb.

A [26] dolgozatban PEÁK ISTVÁN bevezette a kimenő jel nélküli automaták általánositott endomorfizmus-félcsoportjának ill. általánositott automorfizmus-csoportjának fogalmát. Ezek a strukturák a tekintett automata bemenő halmazától

nagyobb mértékben függnek, mint az endomorfizmus-félcsoport ill. automorfizmus-csoport. Mig azonos állapothalmazu és izomorf karakterisztikus félcsoportu automaták endomorfizmus--félcsoportjai ill. automorfizmus-csoportjai egyenlők, addig általánositott endomorfizmus-félcsoportjaik ill. általánositott automorfizmus-csoportjaik általában nem izomorfak. A [26] dolgozatban jelent meg először a Mealy-automaták karakterisztikus félcsoportjának, endomorfizmus-félcsoportjának és automorfizmus-csoportjának fogalma.

Ezek bevezetésének célja az volt, hogy a félcsoportelméleti eszközök alkalmazhatók legyenek az automaták kimeneti viselkedésének vizsgálatára is. Azóta a Mealy-automaták karakterisztikus-félcsoportjának több jellemzője ismertté vált, elsősorban DANG HUU DAO munkássága nyomán /lásd pl [6], [7], [8] [9]/.

Értekezésem szintén a [26]-ban felvetett problémákhoz kapcsolódik és három fejezetből áll.

Az 1. fejezetben ismertetjük az alapvető fogalmakat és áttekintjük a korábbi eredményeket.

A 2. fejezetben kimenő jel nélküli automaták általánositott endomorfizmus-félcsoportjaival ill. általánositott automorfizmus-csoportjaival foglalkozunk. A 2.1 §-ban az automaták és X-homomorf képeik általánositott endomorfizmus-félcsoportjai közötti kapcsolatot vizsgáljuk, a 2.2 §-ban egy speciális automata osztály általánositott endomorfizmus-félcsoportját jellemezzük. A 2.3 § fő eredményének a 2.3.5 tétel

tekinthető, ami azt mutatja ki, hogy minden legfeljebb megszámlálhatóan végtelen csoport fellép alkalmasan választott redukált bemenetü automata általánositott automorfizmus-csoportjaként. Ezenkivül a 2.3 §-ban jellemezzük az erősen ciklikus kvázi-automaták általánositott automorfizmus-csoportjait.

A 3. fejezetben Mealy-automaták [26]-ban bevezetett félcsoport-jellemzőivel foglalkozunk. A 3.1 §-ban a kimenő jel nélküli automaták karakterisztikus félcsoportjaira vonatkozó állitásokat általánositunk Mealy-automaták esetére. A 3.2 és 3.3 paragrafusokban Mealy-automaták endomorfizmus-félcsoportjaival és automorfizmus-csoportjaival kapcsolatos vizsgálatokat végzünk. A 3.4 §-ban pedig kapcsolatot keresünk Mealy-automaták diszjunkt direkt szorzatának ill. heterogén direkt szorzatának endomorfizmus-félcsoportjai és a komponens automaták endomorfizmus-félcsoportjai között.

Köszönetemet fejezem ki Peák István egyetemi docensnek, aki munkámat figyelemmel kisérte, irányitotta és számos fontos észrevétellel segitette.

1. F E J E Z E T

FÉLCSOPORTELMÉLETI ÉS AUTOMATAELMÉLETI ELŐZMÉNYEK

Ebben a fejezetben felsoroljuk azokat a fogalmakat és eredményeket, amelyeket a dolgozat további részében gyakran felhasználunk. Az 1.1 §-ban félcsoportok moduláris jobb-kongruenciáival kapcsolatos fogalmakat és eredményeket közlünk, mig az 1.2 ill. 1.3 paragrafust a kimenő jel nélküli ill. Mealy-automatákkal kapcsolatos előkészületeknek szenteljük.

1.1 §. Félcsoportelméleti előkészületek

Az erősen ciklikus automaták félcsoportjainak vizsgálata során sokszor kihasználjuk a félcsoportok moduláris jobb-kongruenciáinak néhány tulajdonságát. Az itt közölt és nem bizonyitott állitások igazolásai megtalálhatók [4]-ben.

1.1.1 DEFINICIŐ. Legyen S egy félcsoport. A $\rho \subseteq S \times S$ jobb-kongruenciát modulárisnak nevezzük, ha létezik S-nek olyan e eleme, hogy

$$es \equiv s(\rho)$$

minden $s(\in S)$-re teljesül. Egy ilyen e elemre azt mondjuk, hogy e baloldali egységeleme S-nek mod ρ .

1.1.2 DEFINICIÓ. Legyen ρ jobb-kongruencia az S félcsoporton. Az $s \in S$ elemet S <u>jobb-egységének</u> hivjuk modulo ρ, ha minden $t(\in S)$-hez létezik olyan $t' \in S$ elem, amelyre

$$st' \equiv t(\rho)$$

fennáll.

1.1.3 DEFINICIÓ. Legyen ρ egy jobb-kongruencia S-en és $s \in S$. Akkor a

$$\rho^s = \langle (t,t') \in S \times S \mid (st,st') \in \rho \rangle$$

jobb-kongruenciát ρ <u>eltolásának</u> nevezzük. Ha s jobb-egysége S-nek mod ρ, akkor ρ^s-t a ρ jobb-kongruencia <u>konjugáltjának</u> hivjuk.

Könnyü megmutatni, hogy $(\rho^s)^t = \rho^{st}$ minden $s,t \in S$ párra fennáll és

$$s \equiv t(\rho) \Rightarrow \rho^s = \rho^t$$

teljesül.

1.1.4 DEFINICIÓ. A $\rho \subseteq S \times S$ jobb-kongruencia <u>normalizátorán</u> az

$$N(\rho) = \langle s \in S \mid \rho \leq \rho^s \rangle$$

részhalmazt, mig <u>erős normalizátorán</u> az

$$N'(\rho) = \langle s \in S \mid \rho = \rho^s \rangle$$

részhalmazt értjük.

A paragrafus további részében feltesszük, hogy ρ véges indexü.

Megmutatható, hogy $N'(\rho) \neq \emptyset$ pontosan akkor, ha ρ moduláris jobb-kongruencia, ugyanis a $\rho = \rho^s$ feltételből következik, hogy s jobb-egysége S-nek mod ρ és igy az

$$sf \equiv s(\rho)$$

kongruenciát kielégitő $f \in S$ elem baloldali egységeleme S-nek mod ρ. Másrészt, ha e baloldali egységeleme S-nek mod ρ, akkor $e \in N'(\rho)$.

1.1.1 TÉTEL. $N(\rho)$ $[N'(\rho)]$ vagy üres vagy részfélcsoport S-ben és ρ szerinti ekvivalencia osztályok egyesitése. A ρ leszükitése az $N(\rho)$ $[N'(\rho)]$ félcsoportra kongruencia $N(\rho)$-n $[N'(\rho)$-n$]$.

1.1.2 TÉTEL. Ha ρ moduláris jobb-kongruencia S-en és e S-nek baloldali egységeleme mod ρ, akkor

$$N_e(\rho) = \langle s \in N(\rho) \mid se \equiv s(\rho)\rangle$$

bal-ideálja $N(\rho)$-nak és

$$N'_e(\rho) = \langle s \in N'(\rho) \mid se \equiv s(\rho)\rangle$$

bal-ideálja $N'(\rho)$-nak, továbbá mind $N_e(\rho)$ mind $N'_e(\rho)$ ρ-osztályok uniója.

A fenti két tétel alapján könnyen belátható, hogy az $N_e(\rho)/\rho$ baloldali főideál $N(\rho)/\rho$-ban és $N'_e(\rho)/\rho$ baloldali főideálja $N'(\rho)/\rho$-nak.

1.1.3 TÉTEL. $N_e(\rho)/\rho$ egységelemes félcsoport és $N'_e(\rho)/\rho$ csoport.

Bizonyitás: Az első állitás nyilvánvalóan következik az 1.1.1 és 1.1.2 tételekből és $N_e(\rho)$ megadásából. A második állitás igazolása végett először megmutatjuk, hogy $N'(\rho)/\rho$

jobb-csoport. Legyenek $[s]_\rho$, $[t]_\rho$ és $[u]_\rho$ tetszőleges elemei $N'(\rho)/\rho$ -nak ugy, hogy

$$[s]_\rho \cdot [t]_\rho = [s]_\rho [u]_\rho .$$

Akkor $st \equiv su(\rho)$, azaz $t \equiv u(\rho^s)$. Felhasználva, hogy $\rho = \rho^s$, mert $s \in N'(\rho)$, kapjuk, hogy $t \equiv u(\rho)$ teljesül, tehát $[t]_\rho = [u]_\rho$. Ezzel megmutattuk, hogy $N'(\rho)/\rho$ bal-kancellativ. Másrészt, $N'(\rho)$ minden s eleme jobb-egysége S-nek mod ρ , ezért tetszőleges $t \in S$ elemhez van olyan $t' \in S$, amelyre

$$st' \equiv t(\rho)$$

teljesül. Megmutatjuk, hogy ha $t \in N'(\rho)$, akkor $t' \in N'(\rho)$ is fennáll. Ez viszont azonnal adódik, abból, hogy $\rho^{st'} = (\rho^s)^{t'}$, $\rho^s = \rho = \rho^t$ és

$$st' \equiv t(\rho) \implies \rho^{st'} = \rho^t .$$

Akkor viszont minden $[s]_\rho$, $[t]_\rho \in N'(\rho)/\rho$ esetén létezik $N'(\rho)/\rho$-ban megoldása az

$$[s]_\rho \, x = [t]_\rho$$

egyenletnek, azaz $N'(\rho)/\rho$ jobb-egyszerü. Ezzel igazoltuk, hogy $N'(\rho)/\rho$ jobb-csoport. Mivel $N'_e(\rho)/\rho$ az $[e]_\rho$ idempotens által generált baloldali főideálja $N'(\rho)/\rho$-nak, kapjuk, hogy $N'_e(\rho)/\rho$ csoport. □

1.2.§. Kimenő jel nélküli automaták félcsoportjai, néhány nevezetes osztályuk

1.2.1 DEFINICIÓ. Kimenő jel nélküli automatán értünk minden olyan $\underline{A} = (A,X,\delta)$ rendszert, amely a nemüres A és X halmazokból, valamint a $\delta : A \times X \to A$ függvényből áll. Az A halmaz elemeit $\underline{A}$ állapotainak, az X halmaz elemeit $\underline{A}$ bemenő jeleinek nevezzük, magukat a halmazokat pedig $\underline{A}$ állapothalmazának ill. bemenő halmazának mondjuk. A δ függvényre az átmenetfüggvény elnevezést használjuk.

1.2.2 DEFINICIÓ. Egy kimenő jel nélküli $\underline{A} = (A,X,\delta)$ automatát végesnek mondunk, ha az A és X halmazok végesek.

Tetszőleges X halmaz esetén jelölje X^* és X^+ az X által generált szabad monoidot ill. az X által generált egységelem nélküli szabad félcsoportot. X^* és X^+ elemeit X fölötti szavaknak nevezzük. Tehát $X^* = X^+ \cup \langle e \rangle$, ahol e az üres szó.

A δ függvény értelmezését kiterjesztjük ugy, hogy legyen $\delta : A \times X^* \to A^*$ és tetszőleges $a \in A$, $p \in X^*$ párra

$$\delta(a,p) = \begin{cases} a & \text{ha } p = e \\ a_1 a_2 \ldots a_n & \text{ha } p = x_1 x_2 \ldots x_n \quad (n > 0) \end{cases}$$

teljesüljön, ahol

$$a_1 = \delta(a,x_1), \quad a_2 = \delta(a_1,x_2), \ldots, a_n = \delta(a_{n-1},x_n) .$$

Tetszőleges nemüres q szó esetén a szó utolsó betüjét $\overset{\smile}{q}$ jelöli, de a $\delta(a,p)$ szó utolsó betüjének jelölésére az ap

alakot használjuk, azaz

$$ap = \overline{\delta(a,p)} = a_n .$$

Tetszőleges $\underline{A} = (A,X,\delta)$ kimenő jel nélküli automata minden $a \in A$ állapotához hozzárendelhető egy, az X^+ félcsoporton értelmezett $R_{\underline{A},a}$ jobb-kongruencia a

$$\forall\, p,q \in X^+ : p \equiv q(R_{\underline{A},a}) \iff ap = aq$$

definicióval. Könnyü belátni, hogy ezek

$$R_{\underline{A}} = \bigcap_{a \in A} R_{\underline{A},a}$$

közös része kongruencia X^+-on, amelyet az $\underline{A}$ által indukált <u>Myhill-Nerode-féle kongruenciának</u> nevezünk [19, 20].

1.2.3 DEFINICIŐ [13]. Az $X^+/R_{\underline{A}}$ faktorfélcsoportot az $\underline{A}$ kimenő jel nélküli automata <u>karakterisztikus félcsoportjának</u> hivjuk és $S(\underline{A})$-val jelöljük.

Tetszőleges A halmaz esetén jelölje Ω_A az A fölötti <u>teljes transzformációfélcsoportot</u>, melyben a szorzást minden $\alpha,\beta \in \Omega_A$ és $a \in A$ esetén az

$$(\alpha\cdot\beta)(a) = \alpha(\beta(a))$$

összefüggéssel adjuk meg. Ω_A részfélcsoportjait A fölötti <u>transzformációfélcsoportoknak</u> nevezzük.

Minden $p \in X^+$ szó indukálja az $\underline{A} = (A,X,\delta)$ kimenő jel nélküli automata A állapothalmazának egy $m_p : a \to ap$ $(a \in A)$ transzformációját. Az $S_{\underline{A}} = \langle m_p \mid p \in X^+\rangle$ halmaz Ω_A-nak részfélcsoportja. Könnyen megmutatható, hogy $S_{\underline{A}}$ és $S(\underline{A})$ anti-

-izomorfak. Ez lehetővé teszi, hogy $\underline{A}$ karakterisztikus félcsoportját absztrakt félcsoportnak tekintsük és hol X^+ faktorfélcsoportjaként, hol pedig Ω_A részfélcsoportjaként reprezentáljuk.

1.2.4 DEFINICIŐ. Egy $\underline{A} = (A,S,\delta)$ kimenő jel nélküli automatát <u>kvázi-automatának</u> nevezünk, ha S bemenő halmaza félcsoport és δ átmenetfüggvényére teljesül, hogy minden $s,s'(\in S)$-re és $a(\in A)$-ra

$$\delta(a,ss') = \delta(\delta(a,s),s'),$$

ahol ss' az s és s' elemek S-beli szorzatát jelöli.

Megjegyezzük, hogy az $\underline{A}_S = (S,S,\delta_S)$ alaku kvázi-automatákat, ahol a δ_S átmenetfüggvény a

$$\forall\, s,s' \in S : \delta_S(s,s') = ss'$$

összefüggéssel van definiálva, <u>félcsoport-automatáknak</u> hivjuk.

1.2.1 TÉTEL. <u>Tetszőleges félcsoport fellép alkalmas kimenő jel nélküli automata karakterisztikus félcsoportjaként</u>.

1.2.5 DEFINICIŐ. Legyenek $\underline{A} = (A,X,\delta)$ és $\underline{B} = (B,X',\delta')$ tetszőleges kimenő jel nélküli automaták. Valamely $f : A \to B$ $g : X \to X'$ leképezéspárt az $\underline{A}$ automata $\underline{B}$-be való <u>homomorfizmusának</u> nevezünk, ha tetszőleges $a \in A$ és $x \in X$ esetén

$$f(\delta(a,x)) = \delta'(f(a),g(x))$$

teljesül. Ha az (f,g) homomorfizmus egy-egyértelmü leképezésekből áll, akkor <u>izomorfizmusnak mondjuk</u>. Ha (f,g) $\underline{A}$-nak

B-re való homomorfizmusa, azaz f és g ráképezések, akkor azt mondjuk, hogy B az A-nak homomorf képe. Végül, A izomorf B-vel, jelekben: $A \approx B$, ha létezik A-nak B-re való izomorfizmusa. Ha $X = X'$ és $g : X \to X$ az identikus leképezés, akkor az (f,g) homomorfizmust [izomorfizmust] A-homomorfizmusnak [A-izomorfizmusnak] hivjuk. Hasonlóan, ha $A = B$ és $f : A \to A$ az identikus leképezés, akkor az (f,g) homomorfizmust [izomorfizmust] X-homomorfizmusnak [X-izomorfizmusnak] mondjuk.

1.2.6 DEFINICIÓ. Egy kimenő jel nélküli $A = (A,X,\delta)$ automata önmagába való A-homomorfizmusait endomorfizmusoknak, önmagára való A-izomorfizmusait automorfizmusoknak nevezzük. A endomorfizmusai Ω_A részmonoidját alkotják, ezt a transzformációmonoidot az A automata endomorfizmus-félcsoportjának nevezzük és E(A)-val jelöljük. A automorfizmusai E(A)-nak részcsoportját alkotják, amelyet A automorfizmus-csoportjának hivunk és G(A)-val jelölünk.

1.2.2 TÉTEL. Minden egységelemes félcsoport fellép egy alkalmasan választott kimenő jel nélküli automata endomorfizmus-félcsoportjaként és tetszőleges csoport izomorf valamely kimenő jel nélküli automata automorfizmus-csoportjával.

1.2.7 DEFINICIÓ [26]. Egy kimenő jel nélküli $A = (A,X,\delta)$ automata önmagába való homomorfizmusait általánositott endomorfizmusoknak, önmagába való izomorfizmusait általánositott automorfizmusoknak nevezzük.

Ha (f_1,g_1) és (f_2,g_2) két tetszőleges általánositott endomorfizmusa $\underline{A}$-nak, akkor minden $a(\in A)$-ra és $x(\in X)$-re

$$(f_1f_2)(\delta(a,x)) = f_1(f_2(\delta(a,x))) = f_1(\delta(f_2(a),g_2(x))) =$$
$$= \delta(f_1(f_2(a)),g_1(g_2(x))) = \delta((f_1f_2)(a),(g_1g_2)(x))$$

teljesül, azaz $\underline{A}$ általánositott endomorfizmusainak $E_g(\underline{A})$ halmaza zárt az

$$(f_1,g_1)(f_2,g_2) := (f_1f_2,g_1g_2)$$

szorzásra nézve. Igy $E_g(\underline{A})$ egységelemes félcsoport, ahol $(\varepsilon_A,\varepsilon_X)$ az egységelem. $E_g(\underline{A})$-t az $\underline{A}$ automata <u>általánositott endomorfizmus-félcsoportjának</u> nevezzük. Az általánositott automorfizmusok $E_g(\underline{A})$-nak részcsoportját alkotják, amelyet az $\underline{A}$ automata <u>általánositott automorfizmus-csoportjának</u> hivunk és $G_g(\underline{A})$-val jelölünk.

1.2.3 TÉTEL [26]. $E(\underline{A})$ <u>normális részmonoidja</u> $E_g(\underline{A})$-<u>nak</u> <u>és</u> $G(\underline{A})$ <u>normális részcsoportja</u> $G_g(\underline{A})$-<u>nak</u>.

1.2.4 TÉTEL. <u>Ha</u> $\underline{A} \approx \underline{B}$, <u>akkor</u> $S(\underline{A}) \approx S(\underline{B})$, $E(\underline{A}) \approx E(\underline{B})$, $G(\underline{A}) \approx G(\underline{B})$, $E_g(\underline{A}) \approx E_g(\underline{B})$ <u>és</u> $G_g(\underline{A}) \approx G_g(\underline{B})$.

1.2.8 DEFINICIŐ. Legyenek $\underline{A} = (A,X,\delta)$ és $\underline{B} = (B,X',\delta')$ olyan kimenő jel nélküli automaták, amelyekre $B \subseteq A$ és $X' \subseteq X$ teljesül. A $\underline{B}$ automatát $\underline{A}$ <u>részautomatájának</u> nevezzük, ha δ' a δ függvénynek a $B \times X'$ halmazra való szükitése. Ha $A = B$, akkor $\underline{B}$-t az $\underline{A}$ automata X-<u>részautomatájának</u>, ha $X = X'$, akkor $\underline{B}$-t az $\underline{A}$ automata A-<u>részautomatájának</u> mondjuk.

A paragrafus hátralevő részében feltesszük, hogy a vizsgált automaták végesek.

1.2.9 DEFINICIÓ. Egy $\underline{A} = (A,X,\delta)$ kimenő jel nélküli automatát ciklikusnak nevezünk, ha létezik olyan $a_o \in A$ állapota, hogy minden $a \in A$ állapothoz van olyan $p \in X^*$ szó, amelyre $a_o p = a$ teljesül. Az ilyen a_o állapotot $\underline{A}$ generátor elemének hívjuk. Azt mondjuk, hogy $\underline{A}$ erősen ciklikus, ha ciklikus és a_o generátor eleméhez létezik olyan nemüres p_o szó, amelyre $a_o p_o = a_o$. Ilyenkor az a_o állapotot erős generátornak nevezzük.

1.2.5 TÉTEL [22]. Ha $\underline{A} = (A,X,\delta)$ erősen ciklikus kimenő jel nélküli automata és a_o egy erős generátora, akkor $E(\underline{A})$ izomorf $N_{p_o}(R_{\underline{A},a_o})/R_{\underline{A},a_o}$ -lal és $G(\underline{A})$ izomorf $N'_{p_o}(R_{\underline{A},a_o})/R_{\underline{A},a_o}$ -lal, ahol a $p_o \in X^+$ szóra $a_o p_o = a_o$ teljesül. Ha $\underline{A}$ ciklikus de nem erősen ciklikus, akkor $E(\underline{A}) - \langle 1 \rangle$ izomorf $N(R_{\underline{A},a_o})/R_{\underline{A},a_o}$ -lal és $G(\underline{A})$ az egység csoport.

A ciklikus kimenő jel nélküli automaták karakterisztikus félcsoportjai és endomorfizmus-félcsoportjai közötti kapcsolat a következőképpen jellemezhető [15] :

Legyen $\eta_{\underline{A},a_o}$ az $S(\underline{A})$ félcsoporton értelmezett jobb-kongruencia, ugy, hogy

$$\forall\, C_{\underline{A}}[p], C_{\underline{A}}[q] \in S(\underline{A}):\ C_{\underline{A}}[p] \equiv C_{\underline{A}}[q] (\eta_{\underline{A},a_o}) \iff a_o p = a_o q\ ,$$

akkor $E(\underline{A}) - \langle 1 \rangle$ izomorf $N(\eta_{\underline{A},a_o})/\eta_{\underline{A},a_o}$ -lal, ha $\underline{A}$ ciklikus

de nem erősen ciklikus és $E(\underline{A})$ izomorf $N_{C_{\underline{A}}[p_o]}(\eta_{\underline{A},a_o})/\eta_{\underline{A},a_o}$-lal és $G(\underline{A})$ izomorf $N'_{C_{\underline{A}}[p_o]}(\eta_{\underline{A},a_o})/\eta_{\underline{A},a_o}$-lal, ha $\underline{A}$ erősen ciklikus.

1.2.10 DEFINICIŐ [15,33]. Egy $\underline{A} = (A,X,\delta)$ kimenő jel nélküli automatát <u>kvázi-állapot-függetlennek</u> nevezünk az a állapotára nézve, ha

$$\forall\, a' \in A : \quad R_{\underline{A},a} \leq R_{\underline{A},a'}.$$

teljesül. Azt mondjuk, hogy $\underline{A}$ <u>állapot-független</u>, ha minden $a, a' \in A$-ra

$$R_{\underline{A},a} = R_{\underline{A},a'}$$

érvényes.

Könnyü megmutatni, hogy egy ciklikus $\underline{A}$ automata csak generátor elemére nézve lehet kvázi-állapot-független.

1.2.6 TÉTEL [15]. <u>Legyen $\underline{A}$ erősen ciklikus kvázi-állapot-független kimenő jel nélküli automata. Akkor</u> $E(\underline{A})$ <u>izomorf</u> $S(\underline{A})$ <u>baloldali főideáljával, melyet</u> $C_{\underline{A}}[p_o]$ <u>generál, ahol</u> $\underline{a}$ $p_o(\in X^+)$-<u>ra</u> $a_o p_o = a_o$ <u>teljesül. Továbbá</u> $E(\underline{A}) \approx S(\underline{A})$ <u>pontosan akkor, ha</u> $S(\underline{A})$ <u>monoid</u>.

1.2.7 TÉTEL [15]. <u>Legyen $\underline{A}$ erősen ciklikus, kimenő jel nélküli automata. Akkor a következő állitások ekvivalensek</u>:

(i) $E(\underline{A})$ <u>izomorf</u> $S(\underline{A})$-<u>val.</u>

(ii) $E(\underline{A})$ <u>rendje egyenlő az</u> $\underline{A}$ <u>állapotainak számával</u>.

(iii) $(\forall\, a \in A)(\exists\, (f,\varepsilon_X) \in E(\underline{A})) : \; f(a_o) = a$.

(iv) $\underline{A}$ <u>kvázi-állapot-független automata és</u> $S(\underline{A})$ <u>monoid</u>.

1.2.11 DEFINICIŐ. Egy $\underline{A} = (A,X,\delta)$ kimenő jel nélküli automatát <u>erősen összefüggőnek</u> mondunk, ha minden $a,a' \in A$ párra létezik $p \in X^*$, hogy $ap = a'$.

1.2.8 TÉTEL [15]. <u>Legyen $\underline{A}$ erősen ciklikus kimenő jel nélküli automata. Akkor a következő állitások ekvivalensek.</u>

(i) $G(\underline{A})$ <u>izomorf</u> $S(\underline{A})$-<u>val</u>.

(ii) $G(\underline{A})$ <u>rendje egyenlő</u> $\underline{A}$ <u>állapotainak számával</u>.

(iii) $(\forall\, a,a' \in A)(\exists\, (f,\varepsilon_X) \in G(\underline{A})):\ f(a) = a'$.

(iv) $\underline{A}$ <u>állapot-független és</u> $S(\underline{A})$ <u>csoport</u>.

Megjegyezzük, hogy ha egy véges, erősen ciklikus automata állapot-független, akkor erősen összefüggő.

1.2.12 DEFINICIŐ [33]. Az $\underline{A} = (A,X,\delta)$ kimenő jel nélküli automatát <u>kvázi-perfektnek</u> mondjuk, ha erősen összefüggő, állapot-független és $S(\underline{A})$ csoport.

Könnyen belátható, hogy az 1.2.8 tétel ekvivalens feltételeket ad arra, hogy egy véges, erősen ciklikus automata kvázi-perfekt legyen.

1.2.13 DEFINICIŐ. Az $\underline{A} = (A,X,\delta)$ kimenő jel nélküli automatát <u>kommutativnak</u> mondjuk, ha minden $a \in A$ és $x,x' \in X$ esetén

$$axx' = ax'x$$

teljesül.

Könnyü megmutatni, hogy a kommutativ ciklikus automaták osztálya részosztályát képezi a ciklikus kvázi-állapot-független automaták osztályának.

1.2.14 DEFINICIŐ [36]. Az $\underline{A} = (A,X,\delta)$ kimenő jel nélküli automatát perfektnek nevezzük, ha erősen összefüggő és kommutativ.

A perfekt automaták osztálya részosztályát képezi a kvázi-perfekt automaták osztályának.

1.3 § Mealy-automaták félcsoportjai és osztályozása

Ebben a paragrafusban a kimenő jel nélküli automatákra bevezetett fogalmak Mealy-automatákra való kiterjesztését adjuk meg.

1.3.1 DEFINICIŐ [17]. Mealy-automatán értünk minden olyan $\underline{A} = (A,X,Y,\delta,\lambda)$ rendszert, amely a nemüres A,X és Y halmazokból, valamint a $\delta : A \times X \to A$ és a $\lambda : A \times X \to Y$ függvényekből áll. Az A elemei az állapotok, X a bemenő jelek halmaza és Y a kimenő jelek halmaza. A δ függvényt átmenetfüggvénynek, a λ-t pedig kimenetfüggvénynek nevezzük.

A δ és λ függvényeket kiterjesztjük a következőképpen. Legyen $\delta : A \times X^* \to A^*$ és $\lambda : A \times X^* \to Y^*$, ugy, hogy minden $a(\in A)$-ra és az e üres szóra

$$\delta(a,e) = a \quad \text{és} \quad \lambda(a,e) = e ,$$

mig tetszőleges $p = x_1x_2\ldots x_n \in X^+$ bemenő szó esetén

$$\delta(a,p) = a_1a_2\ldots a_n \in A^+$$

és

$$\lambda(a,p) = y_1 y_2 \cdots y_n \in Y^+$$

teljesüljön, ahol

$$a_1 = \delta(a,x_1), \quad a_2 = \delta(a_1,x_2), \ldots, a_n = \delta(a_{n-1},x_n)$$

és

$$y_1 = \lambda(a,x_1), \quad y_2 = \lambda(a_1,x_2), \ldots, y_n = \lambda(a_{n-1},x_n) .$$

Az $\underline{A}$ automatát <u>Moore-automatának</u> mondjuk, ha minden $a,a' \in A$ és $x,x' \in X$ esetén

$$\delta(a,x) = \delta(a',x') \Rightarrow \lambda(a,x) = \lambda(a',x') .$$

Az $\underline{A} = (A,X,Y,\delta,\lambda)$ Mealy-automata <u>vetületén</u> az $\underline{A}^* = (A,X,\delta)$ kimenő jel nélküli automatát értjük és <u>kimenő jel nélküli ekvivalensének</u> azt az $\underline{A}' = (A',X,\delta')$ automatát nevezzük, amelynek állapothalmaza $A' = Y \times A$ és δ' átmenetfüggvénye minden $(y,a)(\in Y \times A)$-ra és $x(\in X)$-re

$$\delta'((y,a),x) = (\lambda(a,x),\delta(a,x)) .$$

Az $\underline{A}$ minden a állapotához hozzárendelünk egy, az X^+ félcsoporton értelmezett $R'_{\underline{A},a}$ jobb-kongruenciát a

$$\forall\, p,q \in X^+ \quad p \equiv q(R'_{\underline{A},a}) \Leftrightarrow ap = aq \text{ és } \overline{\lambda(a,p)} = \overline{\lambda(a,q)}$$

definicióval. Könnyü igazolni, hogy az

$$R'_{\underline{A}} = \bigcap_{a \in A} R'_{\underline{A},a}$$

reláció kongruencia X^+ -on.

1.3.2 DEFINICIÓ [26]. Az $X^+/R'_{\underline{A}}$ faktorfélcsoportot az $\underline{A}$ Mealy-automata <u>karakterisztikus félcsoportjának</u> nevezzük és $S'(\underline{A})$-val jelöljük.

Mivel $R'_{\underline{A}} \leq R_{\underline{A}^*}$ teljesül, az $\underline{A}$ Mealy-automata karakterisztikus félcsoportjának homomorf képe $\underline{A}$ vetületének karakterisztikus-félcsoportja. Másrészt, ha $\underline{A}$ Moore-automata, akkor $R'_{\underline{A}} = R_{\underline{A}^*}$ és ezért $S'(\underline{A}) = S(\underline{A}^*)$ teljesül.

1.3.1 TÉTEL [6]. <u>Legyen</u> $\underline{A} = (A,X,Y,\delta,\lambda)$ <u>tetszőleges Mealy-automata és</u> $\underline{A}' = (A',X,\delta')$ <u>kimenő jel nélküli ekvivalense</u> $\underline{A}$ <u>-nak. Akkor</u> $S'(\underline{A}) = S(\underline{A}')$.

Mivel kimenő jel nélküli automaták karakterisztikus félcsoportja reprezentálható az állapothalmazuk feletti teljes transzformációfélcsoportban az 1.3.1 tétel szerint a Mealy-automaták karakterisztikus félcsoportja is reprezentálható transzformációfélcsoportként, nevezetesen egy $\underline{A} = (A,X,Y,\delta,\lambda)$ Mealy-automata $S'(\underline{A})$ karakterisztikus-félcsoportja anti-izomorf az $S_{\underline{A}}, (\subseteq \Omega_Y \times A)$ transzformáció félcsoporttal.

Legyenek T és S tetszőleges félcsoportok és END(T) a T endomorfizmus-félcsoportja, amelyben a szorzást tetszőleges $t \in T$ elemre az

$$(fg)(t) = f(g(t)) \qquad (f,g \in END(T))$$

szabállyal definiáljuk. Legyen φ az S-nek END(T)-be való tetszőleges homomorfizmusa és jelölje φ_s az $s \in S$ elem képét a φ leképezésnél.

Definiáljuk az $R = T \times S$ halmazon a

$$(t_1,s_1)(t_2,s_2) = (t_1\varphi_{s_1}(t_2),s_1s_2) \qquad (t_1,t_2 \in T,\ s_1,s_2 \in S)$$

összefüggéssel megadott müveletet. Akkor R e müveletre nézve félcsoportot alkot.

1.3.3 DEFINICIŐ [11,21]. Az R félcsoportot a T és S félcsoportok φ kapcsolat-homomorfizmussal megadott szemidirekt szorzatának nevezzük és $R = T \times_{\varphi} S$ -sel jelöljük.

1.3.4 DEFINICIŐ [6]. Legyen S′ tetszőleges félcsoport. Azt mondjuk, hogy S′ a T és S félcsoportok szubszemidirekt szorzata, jelekben: $S' = T \times_{\varphi}^{sub} S$, ha

(1) S′ részfélcsoportja az $R = T \times_{\varphi} S$ félcsoportnak és

(2) $(\forall s \in S)(\exists t \in T): (t,s) \in S'$.

1.3.2 TÉTEL [6]. Legyen S tetszőleges félcsoport. Ha S előállítható egy U jobb-zéró félcsoport és egy T félcsoport szubszemidirekt szorzataként, akkor létezik olyan $\underline{A}$ Mealy-automata, amelyre $S \approx S'(\underline{A})$ teljesül.

1.3.5 DEFINICIŐ. Legyenek $\underline{A} = (A,X,Y,\delta,\lambda)$ és $\underline{B} = (B,X',Y',\delta',\lambda')$ tetszőleges Mealy-automaták. Az $f: A \to B$, $g: X \to X'$ és $h: Y \to Y'$ leképezés hármast az $\underline{A}$ automata $\underline{B}$ -be való homomorfizmusának nevezzük, ha minden $a \in A$ és $x \in X$ esetén

(1) $$f(\delta(a,x)) = \delta'(f(a),g(x))$$

és

(2) $$h(\lambda(a,x)) = \lambda'(f(a),g(x))$$

teljesül. Ha f,g és h rāképezések, akkor azt mondjuk,

hogy B homomorf képe A-nak. Ha f,g és h kölcsönösen egyértelmü leképezések, akkor az (f,g,h) leképezés-hármast izomorfizmusnak nevezzük. Azt mondjuk, hogy A izomorf B-vel, jelekben $A \approx B$, ha létezik A-nak B-re való izomorfizmusa. Ha $X = X'$ és $Y = Y'$, továbbá $g : X \to X$ és $h : Y \to Y$ az identikus leképezések, akkor az (f,g,h) homomorfizmust [izomorfizmust] A-homomorfizmusnak [A-izomorfizmusnak] hivjuk. Analóg definiciókkal kapjuk az X-homomorfizmus, X-izomorfizmus, Y-homomorfizmus Y-izomorfizmus, AX-homomorfizmus, AX-izomorfizmus, AY-homomorfizmus, AY-izomorfizmus, XY-homomorfizmus és XY-izomorfizmus fogalmakat.

1.3.6 DEFINICIÓ [26]. Legyen A Mealy-automata. A-nak önmagába való homomorfizmusát endomorfizmusnak, A-nak önmagára való izomorfizmusát automorfizmusnak nevezzük. A összes endomorfizmusának E'(A) halmaza monoidot alkot az

$$(f,g,h)(f',g',h') := (ff',gg',hh')$$

szorzásra nézve. Az E'(A) monoidot az A Mealy-automata endomorfizmus-félcsoportjának hivjuk. E'(A) részcsoportját képezik A összes automorfizmusai. Ezt a részcsoportot A automorfizmus-csoportjának nevezzük és G'(A)-val jelöljük.

Könnyü megmutatni, hogy ha (f,g,h) automorfizmusa A-nak, akkor G'(A)-ban érvényes az

$$(f,g,h)^{-1} = (f^{-1},g^{-1},h^{-1})$$

invertálási szabály.

Bevezetjük a következő jelöléseket:

$$E_A(\underline{A}) := \langle (f,g,h) \in E'(\underline{A}) \mid g = \varepsilon_X \text{ és } h = \varepsilon_Y \rangle ,$$
$$G_A(\underline{A}) := \langle (f,g,h) \in G'(\underline{A}) \mid g = \varepsilon_X \text{ és } h = \varepsilon_Y \rangle ,$$
$$E_{AX}(\underline{A}) := \langle (f,g,h) \in E'(\underline{A}) \mid h = \varepsilon_Y \rangle ,$$
$$G_{AX}(\underline{A}) := \langle (f,g,h) \in G'(\underline{A}) \mid h = \varepsilon_Y \rangle ,$$
$$E_{AY}(\underline{A}) := \langle (f,g,h) \in E'(\underline{A}) \mid g = \varepsilon_X \rangle ,$$
$$G_{AY}(\underline{A}) := \langle (f,g,h) \in G'(\underline{A}) \mid g = \varepsilon_X \rangle .$$

Könnyen belátható, hogy $E_A(\underline{A})$, $E_{AX}(\underline{A})$ és $E_{AY}(\underline{A})$ részmonoidjai $E'(\underline{A})$-nak. Ezeket rendre az $\underline{A}$ Mealy-automata A-<u>endomorfizmus-félcsoportjának</u>, AX-<u>endomorfizmus-félcsoportjának</u> és AY-<u>endomorfizmus-félcsoportjának</u> nevezzük. Hasonlóan, $G_A(\underline{A})$, $G_{AX}(\underline{A})$ és $G_{AY}(\underline{A})$ részcsoportjai $G'(\underline{A})$-nak, ezeket $\underline{A}$ A-<u>automorfizmus-csoportjának</u>, AY-<u>automorfizmus-csoportjának</u> ill. AY-<u>automorfizmus-csoportjának</u> hivjuk.

1.3.3 TÉTEL. <u>Ha</u> $\underline{A}$ <u>és</u> $\underline{B}$ <u>izomorf Mealy-automaták, akkor</u> $S'(\underline{A}) \approx S'(\underline{B})$, $E'(\underline{A}) \approx E'(\underline{B})$ <u>és</u> $G'(\underline{A}) \approx G'(\underline{B})$.

A Mealy-automaták egy lehetséges osztályozása a hozzájuk rendelt kimenő jel nélküli automaták segitségével történik.

1.3.7 DEFINICIŐ [9]. Legyen $\underline{A} = (A,X,Y,\delta,\lambda)$ tetszőleges Mealy-automata, $\underline{A}^* = (A,X,\delta)$ az $\underline{A}$ vetülete és

$\underline{A}' = (A', X, \delta')$ az $\underline{A}$ kimenő jel nélküli ekvivalense. Jelöljön P egy, a kimenő jel nélküli automatákra definiált tulajdonságot. Azt mondjuk, hogy az $\underline{A}$ Mealy-automata P-automata, ha $\underline{A}^*$ P-tulajdonságu és $\underline{A}$-t MP-automatának mondjuk, ha $\underline{A}'$ rendelkezik a P tulajdonsággal.

A fenti definiciónak megfelelően soroljuk a Mealy-automatákat ciklikus, M-ciklikus, kommutativ, M-kommutativ stb. osztályokba.

2. F E J E Z E T

KIMENŐ JEL NÉLKÜLI AUTOMATÁK ÁLTALÁNOSITOTT ENDOMORFIZMUS-FÉLCSOPORTJA ÉS ÁLTALÁNOSITOTT AUTOMORFIZMUS-CSOPORTJA

Ebben a fejezetben kimenő jel nélküli automaták általánositott endomorfizmus-félcsoportjával és automorfizmus--csoportjával foglalkozunk. Az 1. §-ban kapcsolatot keresünk a kimenő jel nélküli automaták és X-homomorf képeik általánositott endomorfizmus-félcsoportjai, illetve általánositott automorfizmus-csoportjai között. A 2.§-ban redukált bemenetü kvázi-automaták általánositott endomorfizmus-félcsoportjait vizsgáljuk. Végül, a 3.§-ban a kimenő jel nélküli redukált automaták általánositott automorfizmus-csoportjaival foglalkozunk.

Mivel ebben a fejezetben csak kimenő jel nélküli automatákat vizsgálunk, a rövidség kedvéért a "kimenő jel nélküli" jelzőt elhagyjuk.

2.1.§. Automaták és X-homomorf képeik általánositott endomorfizmus-félcsoportjai és általánositott automorfizmus-csoportjai.

Emlékeztetőül, az $\hat{\underline{A}} = (A,\hat{X},\hat{\delta})$ automatát az $\underline{A} = (A,X,\delta)$ automata X-homomorf képének nevezzük, ha létezik olyan

$\psi : X \to \hat{X}$ leképezése X-nek $\hat{X}$-re, hogy minden $a \in A$ és $x \in X$ esetén

$$\delta(a,x) = \hat{\delta}(a,\psi(x))$$

teljesül. Az $\underline{A}$ és $\hat{\underline{A}}$ automatákat X-izomorfaknak mondjuk, ha a $\psi : X \to \hat{X}$ $\underline{A}$-nak X-homomorfizmusa $\hat{\underline{A}}$-re, egy-egyértelmü ráképezés. Az $\underline{A}$ automatát <u>redukált bemenetünek</u> mondjuk, ha eleget tesz a következő feltételnek;

$$(\forall\, a \in A)(\forall\, x_1,x_2 \in X):\ \delta(a,x_1) = \delta(a,x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 .$$

Könnyen igazolható, hogy egy $\underline{A}$ automata pontosan akkor redukált bemenetü, ha minden X-homomorf képe X-izomorf $\underline{A}$-val.

Nem nehéz megmutatni, hogy ha $\hat{\underline{A}}$ X-homomorf képe $\underline{A}$-nak, akkor $S(\hat{\underline{A}}) \approx S(\underline{A})$, $E(\hat{\underline{A}}) = E(\underline{A})$ és $G(\hat{\underline{A}}) = G(\underline{A})$ teljesül. Ezzel szemben $\hat{\underline{A}}$ és $\underline{A}$ általánositott endomorfizmus-félcsoportjaira érvényes a következő:

2.1.1 TÉTEL. <u>Ha az</u> $\hat{\underline{A}} = (A,\hat{X},\hat{\delta})$ <u>automata</u> X-<u>homomorf képe az</u> $\underline{A} = (A,X,\delta)$ <u>automatának, akkor</u> $E_g(\hat{\underline{A}})$ <u>homomorf képe</u> $E_g(\underline{A})$ <u>egy részmonoidjának</u>.

Bizonyitás: Legyen $\psi : X \to \hat{X}$ $\underline{A}$-nak X-homomorfizmusa $\hat{A}$-ra. Tekintsük a ψ leképezés által indukált $\psi \circ \psi^{-1}$-gyel jelölt ekvivalencia relációt az X halmazon, azaz legyen

$$\forall\, x,x' \in X \qquad x(\psi \circ \psi^{-1})x' \Leftrightarrow \psi(x) = \psi(x').$$

A $\psi \circ \psi^{-1}$ ekvivalencia reláció meghatározza az X halmaz egy osztályozását. Az x elemet tartalmazó ekvivalencia osztályt $[x]_\psi$ -vel jelöljük.

Legyen $(\hat{f},\hat{g})$ tetszőleges általánositott endomorfizmusa az $\hat{\underline{A}}$ automatának. Bevezetjük a következő jelölést;

$$T_{\hat{g}} = \langle g : X \to X \mid \forall\, x \in X : \psi(g(x)) = \hat{g}(\psi(x))\rangle.$$

Megmutatjuk, hogy minden $g \in T_{\hat{g}}$ esetén $(\hat{f},g)$ általánositott endomorfizmusa $\underline{A}$-nak. Valóban, minden $a \in A$, $x \in X$ párra

$$\hat{f}(\delta(a,x)) = \hat{f}(\hat{\delta}(a,\psi(x))) = \hat{\delta}(\hat{f}(a),\ \hat{g}(\psi(x))) =$$

$$= \hat{\delta}(\hat{f}(a),\psi(g(x))) = \delta(\hat{f}(a),\ g(x))$$

teljesül, igazolva ezzel, hogy $(\hat{f},g) \in E_g(\underline{A})$ tetszőleges $g(\in T_{\hat{g}})$-re. Tekintsük most az $E = \bigcup_{(\hat{f},\hat{g})\in E_g(\hat{\underline{A}})} \ \bigcup_{g\in T_{\hat{g}}} (\hat{f},g)$ részhalmazát $E_g(\underline{A})$-nak. Megmutatjuk, hogy E részmonoidja $E_g(\underline{A})$-nak. Legyen $(\hat{f}_1,g_1)$ és $(\hat{f}_2,g_2)$ két tetszőleges eleme E-nek. Akkor létezik két olyan $(\hat{f}_1,\hat{g}_1)$ és $(\hat{f}_2,\hat{g}_2)$ általánositott endomorfizmusa $\hat{\underline{A}}$-nak, hogy $g_1 \in T_{\hat{g}_1}$ és $g_2 \in T_{\hat{g}_2}$, azaz minden $x(\in X)$-re

$$\psi(g_1(x)) = \hat{g}_1(\psi(x)) \quad \text{és} \quad \psi(g_2(x)) = \hat{g}_2(\psi(x))$$

teljesül. Ebből következik, hogy minden $x \in X$ esetén

$$\psi((g_1g_2)(x)) = \psi(g_1(g_2(x))) = \hat{g}_1(\psi(g_2(x))) = \hat{g}_1(\hat{g}_2(\psi(x))) =$$

$$= (\hat{g}_1\hat{g}_2)(\psi(x))$$

is fennáll, igazolva ezzel, hogy $g_1g_2 \in T_{\hat{g}_1\hat{g}_2}$. Tehát azt kapjuk, hogy $(\hat{f}_1,g_1)(\hat{f}_2,g_2) \in E$. Másrészt $\varepsilon_X \in T_{\varepsilon_{\hat{X}}}$ nyilvánvalóan teljesül, ezért $(\varepsilon_A,\varepsilon_X) \in E$. Ezzel igazoltuk,

hogy E részmonoidja $E_g(\underline{A})$-nak. Hátra van még annak megmutatása, hogy $E_g(\hat{\underline{A}})$ homomorf képe E-nek. Ennek igazolása végett felhivjuk a figyelmet arra, hogy minden $(\hat{f},g) \in E$ olyan általánositott endomorfizmusa $\underline{A}$-nak, hogy a $g : X \to X$ transzformáció eleget tesz a

$$\forall\, x,x' \in X \quad [x]_\psi = [x']_\psi \Rightarrow [g(x)]_\psi = [g(x')]_\psi$$

feltételnek. Ebből következik, hogy az a $\varphi : E \to E_g(\hat{\underline{A}})$ megfeleltetés, amelyre

$$\varphi : (\hat{f},g) \to (\hat{f},\hat{g}) \qquad ((\hat{f},g) \in E, (\hat{f},\hat{g}) \in E_g(\hat{A})\ g \in T_{\hat{g}})$$

teljesül, jól definiált és E megadása alapján ráképzés is. Amint azt a fentiekben már megmutattuk,

$$g_1 \in T_{\hat{g}_1}, g_2 \in T_{\hat{g}_2} \Rightarrow g_1g_2 \in T_{\hat{g}_1\hat{g}_2},$$

igy a

$$\varphi((\hat{f}_1,g_1)(\hat{f}_2,g_2)) = \varphi(\hat{f}_1\hat{f}_2,g_1g_2) = (\hat{f}_1\hat{f}_2,(\widehat{g_1g_2})) = (\hat{f}_1\hat{f}_2,\hat{g}_1\hat{g}_2) =$$
$$= (\hat{f}_1,\hat{g}_1)(\hat{f}_2,\hat{g}_2) = \varphi((\hat{f}_1,g_1))\varphi((\hat{f}_2,g_2))$$

számolással kapjuk, hogy φ homomorizmus. □

Ha az $\underline{A} = (A,\hat{X},\hat{\delta})$ automata X-homomorf képe az $\underline{A} = (A,X,\delta)$ automatának, akkor általánositott automorfizmus-csoportjaik között általában nincs olyan kapcsolat, mint általánositott endomorfizmus-félcsoportjaik között.

Legyen Z egy nem-üres halmaz és C egy osztályozása Z-nek. Azt mondjuk, hogy C <u>uniform</u> osztályozás, ha C minden osztálya azonos számosságu.

2.1.2 TÉTEL [30]. Legyen a redukált bementü $\hat{\underline{A}} = (A,\hat{X},\hat{\delta})$ automata az $\underline{A} = (A,X,\delta)$ automata X-homomorf képe. Ha az $\underline{A}$-nak $\hat{\underline{A}}$-re való $\psi : X \to \hat{X}$ X-homomorfizmusa uniform osztályozást indukál $\underline{A}$ bemenő jeleinek X halmazán, akkor $G_g(\hat{\underline{A}})$ homomorf képe $G_g(\underline{A})$-nak.

Bizonyitás: Legyen (f,g) tetszőleges eleme $G_g(\underline{A})$-nak. Először azt mutatjuk meg, hogy a $g : X \to X$ leképezés eleget tesz a

$$\forall\, x_1,x_2 \in X : \psi(x_1) = \psi(x_2) \Rightarrow \psi(g(x_1)) = \psi(g(x_2))$$

feltételnek. Tetszőleges $a \in A$ esetén a $\psi(x_1) = \psi(x_2)$, egyenlőség maga után vonja, hogy

$$\delta(a,x_1) = \hat{\delta}(a,\psi(x_1)) = \hat{\delta}(a,\psi(x_2)) = \delta(a,x_2).$$

Ezért

$$\forall\, a \in A: \hat{\delta}(f(a),\psi(g(x_1))) = \delta(f(a),g(x_1)) = f(\delta(a,x_1)) =$$
$$= f(\delta(a,x_2)) = \delta(f(a),g(x_2)) = \hat{\delta}(f(a),\psi(g(x_2)))$$

teljesül, ami, figyelembe véve, hogy $f : A \to A$ egy egyértelmü ráképezés és $\hat{\underline{A}}$ redukált bemenetü automata, mutatja, hogy $\psi(g(x_1)) = \psi(g(x_2))$. Tekintsük azt a $\hat{g} : \hat{X} \to \hat{X}$ leképezést, amelyre teljesül, hogy

(1) $\qquad \forall\, x \in X : \hat{g}(\psi(x)) = \psi(g(x))$.

Igazoljuk, hogy ha $(f,g) \in G_g(\underline{A})$, akkor $(f,\hat{g}) \in G_g(\hat{\underline{A}})$ is fennáll. Tetszőleges $a \in A$ és $\hat{x} \in \hat{X}$ párra, kapjuk, hogy

$$f(\hat{\delta}(a,\hat{x})) = f(\delta(a,x)) = \delta(f(a),g(x)) = \hat{\delta}(f(a),\psi(g(x))) =$$
$$= \hat{\delta}(f(a),\hat{g}(\psi(x))) = \hat{\delta}(f(a),\hat{g}(\hat{x})),$$

ahol $x \in X$ olyan bemenő jele $\underline{A}$-nak, hogy $\psi(x) = \hat{x}$. Igy $(f,\hat{g}) \in E_g(\hat{\underline{A}})$. Meg kell még mutatni, hogy $\hat{g}$ egy-egyértelmü ráképezés. Legyen $\hat{x}_1,\hat{x}_2 \in \hat{X}$. Ha $\hat{g}(\hat{x}_1) = \hat{g}(\hat{x}_2)$, akkor minden $a \in A$ esetén

$$f(\hat{\delta}(a,\hat{x}_1)) = \hat{\delta}(f(a),\hat{g}(\hat{x}_1)) = \hat{\delta}(f(a),\hat{g}(\hat{x}_2)) = f(\hat{\delta}(a,\hat{x}_2))$$

teljesül, igy tekintve, hogy f egy-egyértelmü ráképezés és $\hat{\underline{A}}$ redukált bemenetü automata, azt kapjuk, hogy $\hat{x}_1 = \hat{x}_2$. Mivel $g : X \to X$ ráképezés, ezért (1)-ből $\hat{g}$ ráképezés volta következik.

Legyen ezek után $\varphi : G_g(\underline{A}) \to G_g(\hat{\underline{A}})$ az az a hozzárendelés, amelyre $\varphi((f,g)) = (f,\hat{g})$ $((f,g) \in G_g(\underline{A}),\ (f,\hat{g}) \in G_g(\hat{\underline{A}}))$. Mivel a ψ X-homomorfizmus uniform osztályozást indukál X-en, azaz bármely $\hat{x}_1,\hat{x}_2 \in \hat{X}$ esetén a $\psi^{-1}(\hat{x}_1)$ és $\psi^{-1}(\hat{x}_2)$ teljes inverz képek egyenlő számosságuak, ezért φ ráképezés. Végül, felhasználva, hogy

$$\forall\, x \in X : (\widehat{g_1g_2})(\psi(x)) = \psi((g_1g_2)(x)) = \psi(g_1(g_2(x))) =$$
$$= \hat{g}_1(\psi(g_2(x))) = \hat{g}_1(\hat{g}_2(\psi(x))) = (\hat{g}_1\hat{g}_2)(\psi(x)),$$

kapjuk, hogy

$$\varphi((f_1,g_1)(f_2,g_2)) = \varphi((f_1f_2,g_1g_2)) = (f_1f_2,(\widehat{g_1g_2})) =$$
$$= (f_1,\hat{g}_1)(f_2,\hat{g}_2) = \varphi((f_1,g_1))\varphi((f_2,g_2)),$$

tehát φ homomorfizmus. $\square$

Megjegyzés: Könnyü igazolni, hogy ha a ψ X-homomorfizmus által indukált felbontása X-nek; $X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_r$, akkor a φ homomorfizmus magja izomorf a G_{X_i} $(i=1,2,\ldots,r)$ szimmetrikus csoportok direkt szorzatával.

2.2 § Automaták általánositott endomorfizmus-félcsoportjairól

Ebben a paragrafusban kimenő jel nélküli automaták általánositott endomorfizmus-félcsoportjait vizsgáljuk. A vizsgálat középpontjában a redukált bemenetü, ciklikus kváziautomaták állnak. Ezek közül is az állapot-független automatákra kapott eredmények az érdekesebbek.

Mindenekelőtt néhány könnyen igazolható tulajdonságot sorolunk fel. Legyen $\underline{A} = (A,X,\delta)$ egy tetszőleges automata.

1./ Ha van olyan $a \in A$, $x \in X$ állapot-bemenet párja $\underline{A}$-nak, amelyre $\delta(a,x) = a$ teljesül, akkor $E_g(\underline{A})$ tartalmazza az $(\tilde{a},\tilde{x})$ leképezéspárt, ahol $\tilde{a} : A \to A$ az a leképezés, amelyre $\tilde{a}(b) = a$ teljesül minden $b \in A$ esetén és $\tilde{x}$ hasonlóan értelmezett konstans leképezés X-en.

2./ Ha $\underline{A}$-nak van egy a stabil állapota, azaz

$$\forall x \in X : \delta(a,x) = a,$$

akkor $(\tilde{a},g) \in E_g(\underline{A})$ minden $g \in \Omega_X$ esetén teljesül.

3./ Ha $\underline{A}$-nak van olyan $x \in X$ bemenete, amely az állapothalmaz identikus leképezését indukálja, akkor $(f,\tilde{x}) \in E_g(\underline{A})$ minden $f \in \Omega_A$ esetén fennáll.

4./ Ha $\underline{A}$ nem redukált bemenetü automata, akkor van $E_g(\underline{A})$-nak (ε_A, g) alaku eleme, ahol $g \neq \varepsilon_X$.

Definiálunk két kongruencia relációt $E_g(\underline{A})$-n a következőképpen:

$$(f_1,g_1) \equiv (f_2,g_2)(\tau_1) \iff f_1 = f_2$$

és

$$(f_1,g_1) \equiv (f_2,g_2)(\tau_2) \iff g_1 = g_2 .$$

Jelölje C azoknak az $\underline{A}$ automatáknak az osztályát, amelyek kielégitik a következő feltételeket:

(1) τ_1 az identikus reláció $E_g(\underline{A})$-n.

(2) $E_g(\underline{A})/\tau_2$ izomorf $END(S(\underline{A}))$ egy részmonoidjával.

Azonnal belátható a 4-es tulajdonság alapján, hogy a C osztály csak redukált bemenetü automatákat tartalmaz.

2.2.1 TÉTEL [29]. <u>Ha</u> $\underline{A} = (A,X,\delta)$ <u>redukált bemenetü állapot-független automata, akkor</u> $\underline{A} \in C$.

Bizonyitás: Az (1) feltétel teljesülését igazolandó, tegyük fel, hogy $(f,g_1),(f,g_2) \in E_g(\underline{A})$ és $g_1 \neq g_2$. Akkor van olyan $\bar{x} \in X$, amelyre $g_1(\bar{x}) \neq g_2(\bar{x})$ teljesül. Mivel tetszőleges $a \in A$ állapotra

$$\delta(f(a)\ g_1(\bar{x})) = f(\delta(a,\bar{x})) = \delta(f(a),g_2(\bar{x}))$$

teljesül, másrészt $\underline{A}$ állapot-független, azt kapjuk, hogy $g_1(\bar{x})$ és $g_2(\bar{x})$ ekvivalensek mod $R_{\underline{A}}$, ami ellentmond annak, hogy $\underline{A}$ redukált bemenetü automata.

Vegyünk most egy tetszőleges (f,g) általánositott endomorfizmust $E_g(\underline{A})$-ból. A $g : X \to X$ transzformációt természetes módon kiterjesztjük X^* endomorfizmusává, a következő módon:

$$g(p) := \begin{cases} e & \text{ha} \quad p = e \\ g(x_1)g(x_2)\ldots g(x_n) & \text{ha} \quad p=x_1x_2\ldots x_n \in X^+ . \end{cases}$$

Hozzárendelünk minden $(f,g) \in E_g(\underline{A})$ általánositott endomorfizmushoz egy $\eta_g : S(\underline{A}) \to S(\underline{A})$ leképezést, ugy, hogy $\eta_g(C_{\underline{A}}[p]) := C_{\underline{A}}[g(p)]$ minden $C_{\underline{A}}[p] (\in S(\underline{A}))$-ra, ahol $C_{\underline{A}}[p]$ a $p \in X^+$ szót tartalmazó ekvivalencia osztály mod $R_{\underline{A}}$. Mivel $\underline{A}$ állapot-független automata, kapjuk, hogy

$$p \equiv q(R_{\underline{A}}) \iff \exists a \in A : ap = aq \Rightarrow f(ap) = f(aq) \iff f(a)g(p) = \\ = f(a)g(q) \iff g(p) \equiv g(q)(R_{\underline{A}})$$

minden $p,q \in X^+$ esetén teljesül, igy η_g jól-definiált.

Másrészt,

$$\eta_g(C_{\underline{A}}[p]C_{\underline{A}}[r]) = \eta_g(C_{\underline{A}}[p.r]) = C_{\underline{A}}[g(pr)] = C_{\underline{A}}[g(p)g(r)] = \\ = C_{\underline{A}}[g(p)]C_{\underline{A}}[g(r)] = \eta_g(C_{\underline{A}}[p])\eta_g(C_{\underline{A}}[r]) ,$$

tehát η_g homomorfizmus. η_g megadásából közvetlenül adódik, hogy az

$[(f,g)]_{\tau_2} \to \eta_g \quad ([(f,g)]_{\tau_2} \in E_g(\underline{A})/\tau_2,\ \eta_g \in END(S(\underline{A})))$

hozzárendelés izomorfizmus. Ezzel megmutattuk, hogy teljesül a C automata osztályt definiáló (2) feltétel is. □

Most C egy fontos részosztályát alkotó, az erősen ciklikus állapot-független automaták általánositott endomorfizmus-félcsoportjait jellemezzük. Először is bizonyitjuk a következő tételt:

2.2.2 TÉTEL [15]. <u>Ha az</u> $\underline{A} = (A,X,\delta)$ <u>erősen ciklikus állapot-független automata, akkor</u> $S(\underline{A})$ <u>karakterisztikus félcsoportja bal-kancellativ és tartalmaz baloldali egységelemet</u>.

Bizonyitás: Legyen p,q és r három olyan szó X^+-ból, melyekre $pq \equiv pr(R_{\underline{A}})$ teljesül. Azt kell megmutatnunk, hogy ebből $q \equiv r(R_{\underline{A}})$ következik. Mivel $\underline{A}$ állapot-független, ezért minden $a \in A$ állapotra $R_{\underline{A},a} = R_{\underline{A}}$ áll fenn. Ezért

$$pq \equiv pr(R_{\underline{A}}) \iff \exists\, a \in A : apq = apr ,$$

tehát $pq \equiv pr(R_{\underline{A}}) \iff \exists\, a \in A: apq = apr \iff q \equiv r(R_{\underline{A},ap}) \iff$ $\iff q \equiv r(R_{\underline{A}})$. Ezzel igazoltuk, hogy $S(\underline{A})$ bal-kancellativ.

Másrészt, ha $p_o \in X^+$ olyan szó, amelyre $a_o p_o = a_o$, ahol a_o egy erős generátora $\underline{A}$-nak, akkor minden $p \in X^+$ esetén kapjuk, hogy

$$p_o p \equiv p(R_{\underline{A},a_o}) \ , \text{ azaz } \quad p_o p \equiv p(R_{\underline{A}}),$$

tehát $C_{\underline{A}}[p_o]$ baloldali egységeleme $S(\underline{A})$-nak. □

2.2.3 KÖVETKEZMÉNY [15]. <u>Ha az</u> $\underline{A} = (A,X,\delta)$ <u>automata</u> A <u>állapothalmaza véges és állapot-független, vagy ha erősen</u>

<u>összefüggő és állapot-független, akkor</u> $S(\underline{A})$ <u>jobb-csoport.</u>

Bizonyitás: Az $\underline{A}$ állapot-függetlenségéből már következik, hogy $S(\underline{A})$ bal-kancellativ /lásd. 2.2.2 tétel bizonyitását/ és minden bal-kancellativ véges félcsoport jobb-csoport. Ezért az első állitás igaz. Igy azt kell még megmutatnunk, hogy ha $\underline{A}$ erősen összefüggő állapot-független automata, akkor $S(\underline{A})$ jobb-egyszerü is. Tekintsünk két tetszőleges $p,q \in X^+$ szót és legyen $a \in A$ tetszőleges állapot. Mivel $\underline{A}$ erősen összefüggő, van olyan $r \in X^+$, amelyre

$$(ap)r = aq \ , \text{ azaz } \quad pr \equiv q(R_{\underline{A},a})$$

teljesül. Ebből $\underline{A}$ állapot-függetlensége miatt

$$pr \equiv q(R_{\underline{A}})$$

következik. Ezzel igazoltuk, hogy minden $C_{\underline{A}}[p], C_{\underline{A}}[q] \in S(\underline{A})$ esetén a

$$C_{\underline{A}}[p]t = C_{\underline{A}}[q]$$

egyenletnek van megoldása $S(\underline{A})$-ban, tehát $S(\underline{A})$ jobb-egyszerü. A 2.2.2 tétel szerint $S(\underline{A})$ bal-kancellativ is, azaz $S(\underline{A})$ jobb-csoport. □

2.2.4 TÉTEL [29]. <u>Ha</u> $\underline{A} = (A,X,\delta)$ <u>erősen ciklikus, állapot-független, redukált bemenetü automata, akkor</u> $\underline{A}$ <u>izomorf az</u> $\underline{A}_{S(\underline{A})} = (S(\underline{A}), S'(\underline{A}), \delta_{S(\underline{A})})$ <u>automatával, ahol</u>

$$S'(\underline{A}) = \langle C_{\underline{A}}[p] \in S(\underline{A}) \mid \exists\, x \in X: \ p \equiv x(R_{\underline{A}})\rangle$$

<u>és</u>

$$\delta_{S(\underline{A})}(C_{\underline{A}}[p], C_{\underline{A}}[x]) = C_{\underline{A}}[px].$$

Bizonyitás: Legyen $a_o \in A$ erős generátora $\underline{A}$-nak és tekintsük a $\varphi : A \to S(\underline{A})$, $\psi : X \to S'(\underline{A})$ leképezéseket, ahol

$$\varphi(a) = C_{\underline{A}}[p] \iff a = a_o p \qquad (a \in A,\ p \in X^+)$$

és

$$\psi(x) = C_{\underline{A}}[x] \qquad (x \in X) .$$

Mivel $\underline{A}$ erősen ciklikus állapot-független automata, ezért φ egy-egyértelmü ráképezés. Tekintve, hogy $\underline{A}$ redukált bemenetü, $S'(\underline{A})$ megadásából következik, hogy ψ ugyancsak egy-egyértelmü ráképezés. Végül, ha $a = a_o p$ és x tetszőleges állapot-bemenet párja $\underline{A}$-nak, akkor

$$\varphi(\delta(a,x)) = \varphi(\delta(a_o p,x)) = \varphi(a_o px) = C_{\underline{A}}[px] =$$

$$= \delta_{S(\underline{A})}(C_{\underline{A}}[p],C_{\underline{A}}[x]) = \delta_{S(\underline{A})}(\varphi(a),\psi(x))$$

teljesül, igazolva ezzel, hogy (φ,ψ) izomorfizmus. □

Az 1.2.4 tétel szerint izomorf automaták általánositott endomorfizmus-félcsoportjai izomorfak. Igy az 1.2.4 - 2.2.4 tételek érthetővé teszik, hogy vizsgáljuk az olyan $\underline{A}_S = (S,S,\delta_S)$ félcsoport-automaták általánositott endomorfizmus-félcsoportjait, ahol S baloldali egységelemet tartalmazó bal-kancellativ félcsoport.

Néhány, a félcsoportok elméletében jól ismert fogalomra és eredményre van szükségünk. Egy $f : S \to S$ leképezést az S félcsoport <u>bal-transzlációjának</u> nevezünk, ha minden $s,s' \in S$ párra

$$f(ss') = f(s)s'$$

teljesül. Minden $t(\in S)$-re az $f_t : S \to S$ leképezés, amelyre

$$\forall s \in S : f_t(s) = ts$$

áll fenn u.n. belső bal-transzláció. Egy S félcsoport minden bal-transzlációja belső bal-transzláció akkor és csak akkor, ha S tartalmaz baloldali egységelemet. Egy S félcsoport bal-transzlációi részfélcsoportot alkotnak Ω_S-ben, a belső bal-transzlációk L_S félcsoportja S-nek homomorf képe. Meg kell jegyezzük, hogy [4]-gyel ellentétben két bal-transzláció f és f' szorzatát a

$$\forall s \in S : (f.f')(s) := f(f'(s))$$

egyenlőséggel értelmezzük.

2.2.5 LEMMA Ha S baloldali egységelemet tartalmazó, bal-kancellativ félcsoport, akkor minden $\eta(\in END(S))$-re az $\eta' : L_S \to L_S$ transzformáció, amely az

$$\eta'(f_s) = f_{\eta(s)} \qquad (f_s \in L_S)$$

összefüggéssel van definiálva, endomorfizmusa L_S -nek.

Bizonyitás: Először azt kell megmutatnunk, hogy η' jól-definiált. Legyen e az S félcsoport egy baloldali egységeleme, f egy tetszőleges bal-transzlációja. Akkor minden $s \in S$ esetén

$$f(s) = f(es) = f(e)s$$

és

$$f(e) = f(ee) = f(e)e$$

teljesül, ami azt mutatja, hogy f az $f(e) \in Se$ elemmel való bal-transzlációja S-nek. Másrészt, ha $s_1 s_2 \in Se$, akkor

$$f_{s_1} = f_{s_2} \iff s_1 = s_2$$

áll fenn. Ez abból következik, hogy Se-ben az e jobb-oldali egységelem is, igy az alábbi

$$s_1 = s_1 e = f_{s_1}(e) = f_{s_2}(e) = s_2 e = s_2$$

számitás mutatja a szükségességet, mig az elegendőség nyilvánvaló. Mivel bal-kancellativ félcsoportban minden idempotens baloldali egységelem, ezért ha e' tetszőleges idempotense S-nek, akkor minden $s(\in S)$-re

$$f_s = f_{se'} \qquad (f_s \in L_S)$$

teljesül. Ezek után, mostmár tetszőleges $s_1, s_2 \in S$-re kapjuk, hogy

$$f_{s_1} = f_{s_2} \iff \exists e' \in S : \ e'e' = e' \ \text{ és } \ s_1 = s_2 e' .$$

Ezért, igaz a következő implikáció:

$$f_{s_1} = f_{s_2} \implies \eta'(f_{s_1}) = f_{\eta(s_1)} = f_{\eta(s_2)} = \eta'(f_{s_2}) .$$

Végül, minden $f_s, f_{s'} \in L_S$ esetén

$$\eta'(f_s f_{s'}) = \eta'(f_{ss'}) = f_{\eta(ss')} = f_{\eta(s)\eta(s')} =$$

$$= f_{\eta(s)} f_{\eta(s')} = \eta'(f_s)\eta'(f_{s'})$$

teljesül, igazolva ezzel, hogy $\eta' \in END(L_S)$. □

A 2.2.5 lemma felhasználásával igazolni tudjuk a következő tételt:

2.2.6 TÉTEL [29]. Ha $\underline{A}_S = (S,S,\delta_S)$ félcsoport-automata, melyben S baloldali egységelemet tartalmazó bal-kancellativ félcsoport, akkor általánositott endomorfizmus-félcsoportja izomorf az $E(\underline{A}_S)$ és END(S) félcsoportok $E(\underline{A}_S) \times_\varphi END(S)$ szemidirekt szorzatával.

Bizonyitás: A félcsoport-automaták átmenet-függvényének definiciójából következik, hogy $E(\underline{A}_S) = L_S$. Tekintsük az $E(\underline{A}_S) \times_\varphi END(S)$ szemidirekt szorzatot, melyben $\varphi: END(S) \to END(E(\underline{A}_S))$ a

$$\varphi(\eta) := \eta' \qquad (\eta \in END(S) \quad \eta' \in END(E(\underline{A}_S)))$$

összefüggéssel adott, ahol η' a 2.2.6 lemmában szereplő endomorfizmusa L_S-nek. Könnyen belátható, hogy φ valóban homomorfizmus. Legyen a ψ leképezés a

$$\psi : (f_s,\eta) \to (f_{(s,\eta)},\eta) \qquad (f_s \in L_S,\ \eta \in END(S))$$

definicióval megadva, ahol $f_{(s,\eta)}: S \to S$ leképezésre

$$f_{(s,\eta)}(t) = s\eta(t)$$

teljesül minden $t \in S$ esetén. Megmutatjuk, hogy $(f_{(s,\eta)},\eta)$ általánositott endomorfizmusa $\underline{A}_S$-nek. Valóban, minden $s_1,s_2 (\in S)$-re

$$f_{(s,\eta)}(\delta_S(s_1,s_2)) = f_{(s,\eta)}(s_1s_2) = s\eta(s_1s_2) = s\eta(s_1)\eta(s_2) =$$
$$= \delta_S(s\eta(s_1),\eta(s_2)) = \delta_S(f_{(s,\eta)}(s_1),\eta(s_2))$$

áll fenn. A ψ leképezés egyértelmüsége értelmezéséből következik.

Másrészt, ha $(f_{(s_1,\eta_1)},\eta_1),(f_{(s_2,\eta_2)},\eta_2)(\in E_g(\underline{A}_S))$ -re

$$(f_{(s_1,\eta_1)},\eta_1) = (f_{(s_2,\eta_2)},\eta_2) ,$$

akkor $\eta_1 = \eta_2$ és $f_{(s_1,\eta_1)} = f_{(s_2,\eta_2)}$. Igy S egy e idempotens elemére

$$s_1\eta_1(e) = f_{(s_1,\eta_1)}(e) = f_{(s_2,\eta_2)}(e) = s_2\eta_2(e)$$

egyenlőség teljesül. Mivel $\eta_1(e) = \eta_2(e)$ idempotens S-ben és ezért baloldali egységelem is mert S bal-kancellativ, azt kapjuk, hogy az $f_{s_1},f_{s_2} \in L_S$ bal-transzlációk egyenlők. Ezzel igazoltuk, hogy ψ egy-egyértelmü. Legyen most (f,g) tetszőleges általánositott endomorfizmusa $\underline{A}_S$-nek. Véve egy e baloldali egységelemet és tetszőleges s_1,s_2 elemeket S-ből, azt kapjuk, hogy

$$f(s_1) = f(es_1) = f(\delta_S(e,s_1)) = \delta_S(f(e),g(s_1)) = f(e)g(s_1)$$

és

$$f(e)g(s_1s_2) = \delta_S(f(e),g(s_1s_2)) = f(\delta_S(e,s_1s_2)) =$$
$$= f(\delta_S(s_1,s_2)) = \delta_S(f(s_1),g(s_2)) = f(s_1)g(s_2) =$$
$$= f(e)g(s_1)g(s_2)$$

teljesül. Ebből, S bal-kancellativ voltát kihasználva $g \in END(S)$, és $f = f_{(f(e),g)}$ következik, tehát ψ ráképezés. Végül, tekintsük az $(f_s,\eta),(f_t,\bar{\eta})$ elemeket $E(\underline{A}_S) \times_\varphi END(S)$-ben. Ezekre, egyrészt

$$\psi((f_s,\eta)(f_t,\bar{\eta})) = \psi((f_s\eta'(f_t), \eta\bar{\eta})) = \psi(f_sf_{\eta(t)}, \eta\bar{\eta}) =$$
$$= \psi(f_{s\eta(t)}, \eta\bar{\eta})) = (f_{(s\eta(t),\eta\bar{\eta})}, \eta\bar{\eta}) ,$$

továbbá

$$\psi((f_s,\eta)) = (f_{(s,\eta)}) \quad \text{és} \quad \psi(f_t,\bar{\eta}) = (f_{(t,\bar{\eta})}, \bar{\eta})$$

teljesül. De minden $s_1,s_2 (\in S)$-re

$$(f_{(s,\eta)} f_{(t,\bar{\eta})})(\delta_S(s_1,s_2)) = f_{(s,\eta)}(\delta_S(t\bar{\eta}(s_1),\bar{\eta}(s_2))) =$$

$$= \delta_S(s\eta(t\bar{\eta}(s_1)),\eta(\bar{\eta}(s_2))) = \delta_S(s\eta(t)(\eta\bar{\eta})(s_1),(\eta\bar{\eta})(s_2) =$$

$$= \delta_S(f_{(s\eta(t),\eta\bar{\eta})}(s_1),(\eta\bar{\eta})(s_2)) = f_{(s\eta(t),\eta\bar{\eta})}(\delta_S(s_1,s_2))$$

áll fenn, amiből következik, hogy

$$\psi((f_s,\eta)(f_t,\bar{\eta})) = \psi(f_s,\eta))\psi(f_t,\bar{\eta}) \ .$$

Ezzel igazoltuk, hogy ψ művelettartó, teljessé téve ezzel a tétel bizonyitását.

Az 1.2.4 - 2.2.4 és 2.2.6 tételek felhasználásával adódik a

2.2.7. KÖVETKEZMÉNY [29]. <u>Legyen</u> $\underline{A} = (A,X,\delta)$ <u>redukált bemenetü, erősen ciklikus és állapot-független automata. Jelölje</u> $S'(\underline{A})$ <u>az</u> $\underline{A}$ <u>karakterisztikus félcsoportjának azt a részhalmazát, amely a</u> $C_{\underline{A}}[x]$ $(x \in X)$ <u>osztályokból áll és legyen</u>

$$END_{S'(\underline{A})}(S(\underline{A})) = \langle \eta \in END(S(\underline{A})) \mid \forall\, x \in X: \eta(C_{\underline{A}}[x]) \in S'(\underline{A})\rangle.$$

<u>Akkor</u> $E_g(\underline{A})$ <u>izomorf</u> $E(\underline{A})$ <u>és</u> $END_{S'(\underline{A})}(S(\underline{A}))$ <u>szemidirekt szorzatával</u>.

2.3.§ Automaták általánositott automorfizmus-csoportjairól

Ebben a paragrafusban redukált bemenetü kimenő jel nélküli automaták általánositott automorfizmus-csoportjaira vonatkozó eredményeket közlünk. Ennek a résznek a fő eredménye megitélésünk szerint annak igazolása, hogy minden véges vagy megszámlálható csoport izomorf egy redukált bemenetü automata általánositott automorfizmus-csoportjával. Ezt az eredményt a 2.3.5 tétel tartalmazza. Ezen kivül ebben a paragrafusban félcsoport-automaták általánositott automorfizmus-csoportjait vizsgálva a csoport holomorf egy általánositásához jutunk. A paragrafust az erősen ciklikus kvázi-automaták általánositott automorfizmus-csoportjának és karakterisztikus félcsoportjának kapcsolatát mutató jellemzéssel zárjuk.

Definiálunk két relációt $G_g(\underline{A})$ -n a következőképpen: Legyen

$$(f,g) \equiv (f',g')(\tau_1) \iff f = f'$$

és

$$(f,g) \equiv (f',g')(\tau_2) \iff g = g'$$

minden $(f,g),(f',g') \in G_g(\underline{A})$ esetén. Könnyü látni, hogy mindkét reláció kongruencia reláció és $G_g(\underline{A})/\tau_2 = G_g(\underline{A})/G(\underline{A})$. Két egyszerü állitást igazolunk a bevezetett relációkkal kapcsolatban.

2.3.1 LEMMA [30]. $\underline{A}$ τ_1 reláció akkor és csak akkor az egyenlőségi reláció $G_g(\underline{A})$-n, ha $\underline{A} = (A,X,\delta)$ redukált bemenetü automata.

Bizonyitás: Először tegyük fel, hogy $\underline{A}$ redukált bemenetü automata és legyen $(f,g),(f,g') \in G_g(\underline{A})$. Akkor minden $a \in A$ és $x \in X$ esetén

$$\delta(f(a),g(x)) = f(\delta(a,x)) = \delta(f(a),g'(x))$$

teljesül, amiből, figyelembe véve, hogy f egy-egyértelmü ráképezés, az következik, hogy

$$\forall\, x \in X : \quad g(x) \equiv g'(x)(R_{\underline{A}}) \ .$$

Akkor, kihasználva, hogy $\underline{A}$ redukált bemenetü automata, kapjuk, hogy $g = g'$.

Forditva, legyen x' és x'' két olyan bemenő jele $\underline{A}$-nak, amelyre

$$x' \equiv x''(R_{\underline{A}})$$

teljesül. Definiáljuk a $g : X \to X$ leképezést a következőképpen: legyen

$$g(x) := \begin{cases} x & \text{ha } x \neq x' \text{ és } x \neq x'' \\ x'' & \text{ha } x = x' \\ x' & \text{ha } x = x'' \ . \end{cases}$$

Könnyü belátni, hogy $(\varepsilon_A,g) \in G_g(\underline{A})$ és

$$(\varepsilon_A,\varepsilon_X) \equiv (\varepsilon_A,g)(\tau_1) \ . \quad \square$$

A fenti lemma egy fontos következménye az, hogy redukált bemenetü automaták általánositott automorfizmus-csoportja

reprezentálható az állapothalmaz feletti szimmetrikus csoportban.

2.3.2 LEMMA [30]. <u>A</u> $G_g(\underline{A})/G(\underline{A})$ <u>faktorcsoport izomorf az</u> $S(\underline{A})$ <u>automorfizmus-csoportjának részcsoportjával</u>.

Bizonyitás: Legyen (f,g) egy általánositott automorfizmusa az $\underline{A} = (A,X,\delta)$ automatának. Kiterjesztjük a $g : X \to X$ leképezést X^* automorfizmusává a következőképpen; legyen $g(e) = e$, az e üres szóra és tetszőleges $p = x_1x_2\ldots x_n \in X^+$ esetén legyen

$$g(p) := g(x_1)g(x_2)\ldots g(x_n).$$

Az $(f,g) \in G_g(\underline{A})$ elemhez rendeljük hozzá $\underline{A}$ karakterisztikus félcsoportjának azt az $\eta_g : S(\underline{A}) \to S(\underline{A})$ leképezését, amelyre

$$\eta_g(C_{\underline{A}}[p]) = C_{\underline{A}}[g(p)]$$

teljesül minden $p \in X^+$ esetén. Megmutatjuk, hogy η_g jól-definiált. Tekintsünk ezért két tetszőleges p és q szót X^+-ból, amelyre $p \equiv q(R_{\underline{A}})$ teljesül. Mivel f egy-egyértelmü ráképezés, érvényes a következő:

$$p \equiv q(R_{\underline{A}}) \iff \forall\, a \in A:\ ap = aq \iff \forall\, a \in A:\ f(ap) = f(aq) \iff$$

$$\iff \forall\, a \in A:\ f(a)g(p) = f(a)g(q) \iff g(p) \equiv g(q)(R_{\underline{A}}) .$$

Ebből következik, hogy η_g jól-definiált, sőt egy-egyértelmü leképezés. Mivel $g : X^* \to X^*$ automorfizmus, ebből következik, hogy η_g ráképzés is. Tekintsük most $S(\underline{A})$ két tetszőleges elemét $C_{\underline{A}}[p]$ és $C_{\underline{A}}[r]$-et. Ezekre érvényes a

következő:

$$\eta_g(C_{\underline{A}}[p]C_{\underline{A}}[r] = \eta_g(C_{\underline{A}}[pr]) = C_{\underline{A}}[g(pr)] =$$

$$= C_{\underline{A}}[g(p).g(r)] = C_{\underline{A}}[g(p)]C_{\underline{A}}[g(r)] = \eta_g(C_{\underline{A}}[p])\eta_g(C_{\underline{A}}[r]).$$

Ez mutatja, hogy η_g automorfizmusa $S(\underline{A})$-nak. Az

$$(f,g) \to \eta_g$$

hozzárendelés homomorfizmus, hiszen minden $C_{\underline{A}}[p] \in S(\underline{A})$ esetén

$$(\eta_{g_1}\eta_{g_2})(C_{\underline{A}}[p]) = \eta_{g_1}(\eta_{g_2}(C_{\underline{A}}[p])) = \eta_{g_1}(C_{\underline{A}}[g_2(p)]) =$$

$$= C_{\underline{A}}[g_1(g_2(p))] = C_{\underline{A}}[(g_1g_2)(p)] = \eta_{g_1g_2}(C_{\underline{A}}[p])$$

teljesül. Könnyen belátható, hogy a homomorfizmus magja $G(\underline{A})$, amiből már következik az állitás. □

Mint azt az 1.2.2 tételben megfogalmaztuk, minden csoport izomorf valamely automata automorfizmus-csoportjával. A következőkben megmutatjuk, hogy ha G véges vagy megszámlálható csoport, akkor létezik olyan redukált bemenetü $\underline{A} = (A,X,\delta)$ automata, amelyre $G_g(\underline{A}) \approx G$ teljesül.

Az állitás igazolásához előkészületekre van szükségünk. Bevezetünk néhány uj fogalmat. Tekintsünk egy $\underline{A} = (A,X,\delta)$ automatát. Minden $x \in X$ bemenő jelhez rendeljük hozzá az $m_x: A \to A$ transzformációt, amelyre $m_x(a) = \delta(a,x)$ $(a \in A)$ teljesül és legyen $M_{\underline{A}} = \langle m_x: A \to A \mid x \in X\rangle$. Mint az 1. fejezetben emlitettük $S(\underline{A})$ hűen reprezentálható Ω_A-ban az $S_{\underline{A}}$ transzformáció félcsoporttal és könnyen látható,

hogy $M_{\underline{A}}$ generálja $S_{\underline{A}}$-t.

Legyen $C(M_{\underline{A}})$, $M_{\underline{A}}$ <u>centralizátora</u> Ω_A-ban, amelyet a

$$C(M_{\underline{A}}) := \langle \alpha \in \Omega_A \mid \forall\, m_x \in M_{\underline{A}}: \alpha m_x = m_x \alpha \rangle$$

összefüggéssel definiálunk és jelölje $N(M_{\underline{A}})$ $M_{\underline{A}}$ <u>normalizátorát</u> Ω_A-ban, ahol

$$N(M_{\underline{A}}) := \langle \alpha \in \Omega_A \mid \alpha M_{\underline{A}} = M_{\underline{A}} \alpha \rangle$$

az értelmező egyenlőség. Bevezetjük $M_{\underline{A}}$ <u>permutáció centralizátorának</u> /röviden p-<u>centralizátor</u>/ és <u>permutáció normalizátorának</u> /röviden p-<u>normalizátor</u>/ fogalmát. Az előbbire a $C_p(M_{\underline{A}})$ az utóbbira az $N_p(M_{\underline{A}})$ jelölést használjuk. Definiáló egyenlőségeik:

$$C_p(M_{\underline{A}}) := C(M_{\underline{A}}) \cap G_A \quad \text{és} \quad N_p(M_{\underline{A}}) := N(M_{\underline{A}}) \cap G_A$$

ahol G_A az A állapothalmaz feletti szimmetrikus csoportot jelöli. A következő állitások közvetlenül beláthatók:

(1) $N(M_{\underline{A}})$ monoid és $C(M_{\underline{A}})$ részmonoidja $N(M_{\underline{A}})$-nak.

(2) $N_p(M_{\underline{A}})$ csoport és $C_p(M_{\underline{A}})$ normális részcsoportja $N(M_{\underline{A}})$-nak.

(3) $C(M_{\underline{A}}) = C([M_{\underline{A}}])$ és $C_p(M_{\underline{A}}) = C_p([M_{\underline{A}}])$.

(4) $N_p(M_{\underline{A}})$ részcsoportja $N_p([M_{\underline{A}}])$-nak.

A fenti (3) és (4) pontban $[M_{\underline{A}}] \subseteq \Omega_A$ az $M_{\underline{A}}$ által generált transzformáció félcsoportot jelöli. Jólismert, hogy tetszőleges $\underline{A}$ automata esetén az $E(\underline{A})$ endomorfizmus-félcsoport az $S_{\underline{A}}$ centralizátora Ω_A-ban. Ezért (3) figyelembe-

vételével kapjuk, hogy

$$E(\underline{A}) = C(M_{\underline{A}}) \quad \text{és} \quad G(\underline{A}) = C_p(M_{\underline{A}}) .$$

2.3.3. LEMMA [30]. <u>Ha</u> $\underline{A} = (A,X,\delta)$ <u>redukált bemenetü automata, akkor</u> $G_g(\underline{A})$ <u>izomorf</u> $N_p(M_{\underline{A}})$ <u>-val</u>.

Bizonyitás: A 2.3.1 lemma szerint az

$$(f,g) \to f \qquad ((f,g) \in G_g(\underline{A}))$$

megfeleltetés izomorfizmus, igy elegendő megmutatnunk, hogy $G_g(\underline{A})$-nak pontosan $N_p(M_{\underline{A}})$ a képe a fenti megfeleltetésnél. Legyen (f,g) tetszőleges általánositott endomorfizmusa $\underline{A}$-nak, akkor minden $a \in A$, $x \in X$ párra

$$f(\delta(a,x)) = \delta(f(a),g(x)),$$

azaz

$$fm_x = m_{g(x)}f$$

minden $m_x \in M_{\underline{A}}$ esetén. Mivel $g : X \to X$ egy-egyértelmü ráképezés, kapjuk, hogy

$$fM_{\underline{A}} = M_{\underline{A}}f ,$$

ami mutatja, hogy $f \in N_p(M_{\underline{A}})$.

Forditva; tegyük fel, hogy $f \in N_p(M_{\underline{A}})$. Akkor minden $m_x \in M_{\underline{A}}$ elemhez létezik egy és csak egy $m_{\bar{x}}$ az $M_{\underline{A}}$ transzformáció halmazban, amelyre

$$fm_x = m_{\bar{x}}f$$

teljesül. Definiáljuk a $g_f : X \to X$ leképezést a következőképpen: legyen

$$\forall\, x \in X: \quad g_f(x) := \bar{x} \iff fm_x = m_{\bar{x}} f \,.$$

A g_f leképezés egy-egyértelmü és ráképezés, mert f az állapothalmaz permutációja, igy az $m_{\bar{x}} = fm_x f^{-1}$ egyértelmüen meghatározott minden $m_x \in M_{\underline{A}}$ esetén, másrészt $\underline{A}$ redukált bemenetü automata és ezért a bemenő jelek X halmaza és $M_{\underline{A}}$ között egy-egyértelmü megfeleltetés létezik. Minthogy minden $a \in A$ és $x \in X$ esetén

$$f(\delta(a,x)) = (fm_x)(x) = (m_{g_f(x)} f)(a) = \delta(f(a), g_f(x))$$

teljesül, kapjuk, hogy $(f, g_f) \in G_g(\underline{A})$. □

2.3.4 LEMMA. <u>Ha</u> A <u>nemüres véges vagy megszámlálhatóan végtelen halmaz, akkor létezik olyan</u> α <u>transzformáció</u> Ω_A <u>-ban, amelyre</u> $C_p(\alpha)$ <u>az egyelemü csoport</u>.

Bizonyitás: Tegyük fel, hogy A elemei természetes számokkal vannak indexezve. Definiáljuk az $\alpha : A \to A$ transzformációt a következőképpen: Legyen $\alpha := \varepsilon_A$ ha $|A| = 1$ és ha $|A| > 1$, akkor legyen

$$\alpha(a_i) = \begin{cases} a_m & \text{ha } i = 1, \\ a_{i-1} & \text{ha } i > 1, \end{cases}$$

ahol m egy tetszőlegesen rögzitett $|A|$-nál kisebb természetes szám. Megmutatjuk, hogy a fenti α transzformációra teljesül a $C_p(\alpha) = \langle \varepsilon_A \rangle$ követelmény. Ha $|A| = 1$, akkor az állitás nyilvánvaló, ezért tegyük fel, hogy $|A| > 1$ és $\pi \in C_p(\alpha)$. Akkor $\pi\alpha\pi^{-1} = \alpha$ és igy

József Attila Tudományegyetem Könyvtára SZEGED

$$(1) \qquad (\pi\alpha\pi^{-1})(\pi(a_1)) = \pi(\alpha(a_1)) = \pi(a_m) = \pi(\alpha(a_{m+1})) =$$
$$= (\pi\alpha\pi^{-1})(\pi(a_{m+1}))$$

teljesül. Mivel a_m az egyetlen olyan A-beli elem, amely két különböző elemnek képe, nevezetesen $\alpha(a_1) = \alpha(a_{m+1}) = a_m$, ezért $\pi(a_m) = a_m$. Ha $m > 1$, akkor abból a feltevésből, hogy $\pi(a_{m-j}) = a_{m-j}$ következik, hogy

$$\pi(a_{m-(j+1)}) = \pi(\alpha(a_{m-j})) = (\pi\alpha\pi^{-1})(\pi(a_{m-j})) = (\pi\alpha\pi^{-1})(a_{m-j}) =$$
$$= \alpha(a_{m-j}) = a_{m-(j+1)}$$

minden j $(0 \leq j < m-1)$ esetén, tehát az is következik, hogy $\pi(a_1) = a_1$. Ez, (1) figyelembevételével, maga után vonja $\pi(a_{m+1}) = a_{m+1}$ teljesülését. Másrészt abból a feltevésből, hogy $\pi(a_{m+k}) = a_{m+k}$ $(k \geq 1)$ következik, hogy

$$\alpha(\pi(a_{m+k+1})) = \pi(\alpha(a_{m+k+1})) = \pi(a_{m+k}) = a_{m+k}$$

és mivel a_{m+k+1} az egyetlen olyan A-beli elem, amelyet α a_{m+k}-ra képez, kapjuk, hogy $\pi(a_{m+k+1}) = a_{m+k+1}$. Igy teljes indukcióval adódik, hogy π A minden elemét önmagára képezi. □

Most igazoljuk az igért 2.3.5 tételt.

2.3.5 TÉTEL [30]. <u>Ha</u> G <u>véges vagy megszámlálhatóan végtelen rendü csoport, akkor létezik olyan redukált bemenetü</u> $\underline{A} = (A,X,\delta)$ <u>kimenő jel nélküli automata, amelyre</u> G <u>izomorf</u> $G_g(\underline{A})$-<u>val</u>.

Bizonyitás: Tekintsük az $\underline{A} = (G,X,\delta)$ automatát, amelyre teljesül, hogy $|G| = |X|$ és létezik $g \to x_g$ $(g \in G, x_g \in X)$ egy-egyértelmü ráképzés. A δ átmenetfüggvényt definiáljuk a következőképpen: Legyen e a G csoport egységeleme és $m_e : G \to G$ egy olyan transzformáció Ω_G-ben, amelyre $C_p(m_e)$ az egyelemü csoport. A 2.3.4 lemma szerint ilyen m_e transzformáció létezik. Minden $g \in G$ elemhez rendeljünk egy $m_g : G \to G$ transzformációt, amelyet az

$$m_g := \pi_g m_e \pi_g^{-1}$$

összefüggéssel definiálunk, ahol $\pi_g : G \to G$ a G csoport $g \in G$ által indukált jobb-transzlációját jelöli, azaz minden $\bar{g} \in G$ esetén

$$\pi_g(\bar{g}) = \bar{g}g$$

teljesül. Ezek után a $\delta : G \times X \to G$ átmenetfüggvényt definiáljuk a

$$(\forall\ \bar{g} \in G)(\forall\ x_g \in X): \delta(\bar{g},x_g) = m_g(\bar{g})$$

összefüggéssel. Az $\underline{A}$ automata megadásából következik, hogy

$$M_{\underline{A}} = \langle m_g \mid g \in G \rangle$$

és m_e választása miatt $\underline{A}$ redukált bemenetü. A 2.3.3 lemma értelmében tételünk bizonyitásához még azt kell megmutatni, hogy $N_p(M_{\underline{A}})$ izomorf G-vel. A fenti konstrukcióból következik, hogy G minden jobb-transzlációja eleme $N_p(M_{\underline{A}})$-nak. Másrészt, ha $\pi \in N_p(M_{\underline{A}})$, akkor létezik egy $m_g \in M_{\underline{A}}$ elem, amelyre $\pi m_e = m_g \pi$, azaz

$$\pi m_e \pi^{-1} = \pi_g m_e \pi_g^{-1}$$

teljesül. Ebből $\pi_g^{-1}\pi \in C_p(m_e)$ következik és mivel $C_p(m_e)$ az egyelemü csoport, kapjuk, hogy $\pi_g = \pi$ áll fenn. Tehát $N_p(M_{\underline{A}})$ a G csoport jobb-transzlációinak csoportja. Ismert, hogy egy csoport izomorf jobb-transzlációinak csoportjával. Ezt az eredményt és a 2.3.3 lemmát felhasználva, kapjuk, hogy a konstruált $\underline{A}$ automatára $G \approx G_g(\underline{A})$ teljesül. □

A következő részben redukált bemenetü félcsoport-automaták általánositott automorfizmus-csoportjait vizsgáljuk.

Tekintsünk egy $\underline{A}_S = (S,S,\delta_S)$ félcsoport-automatát. Könnyen belátható, hogy $M_{\underline{A}_S}$ az S félcsoport belső jobb--transzlációinak félcsoportja, melyet R_S-sel fogunk jelölni. Meg kell jegyeznünk, hogy R_S-et Ω_S részfélcsoportjának tekintjük és ennek megfelelően $r_s, r_{s'} \in R_S$ $(s,s' \in S)$ belső jobb-transzlációk szorzatát a

$$\forall\, \bar{s} \in S: \quad (r_s r_{s'})(\bar{s}) := r_s(r_{s'}(\bar{s})) \quad (=(\bar{s}s')s)$$

összefüggéssel értelmezzük ellentétben [4]-gyel, ahol a jobb-transzlációkat jobb-operátorként kezelik. A fentiekből következik, hogy az $\underline{A}_S$ automata pontosan akkor redukált bemenetü, ha az S félcsoport <u>bal-reduktiv</u>, azaz, tetszőleges s és s′ elemekre fennáll, hogy

$$\forall\, x \in S: \quad xs = xs' \Rightarrow s = s' .$$

A 2.3.3 lemma szerint $G_g(\underline{A}_S) \approx N_p(R_S)$ teljesül esetünkben, ezért vizsgálnunk kell R_S p-normalizátorát Ω_S-ben, ahol S bal-reduktiv félcsoport.

2.3.6 TÉTEL [30]. Ha S bal-reduktiv félcsoport, akkor $N_p(R_S)$-nek részcsoportja az S félcsoport $AUT(S)$ automorfizmus-csoportja és $N_p(R_S)$ a $C_p(R_S)$-nek $AUT(S)$-sel való faktormentes Schreier-bővitése.

Bizonyitás: Az első állitást igazolandó, legyen τ tetszőleges automorfizmusa S-nek. Akkor minden $r_s \in R_S$ és $s' \in S$ esetén

$$(\tau r_s)(s') = \tau(r_s(s')) = \tau(s's) = \tau(s')\tau(s) = r_{\tau(s)}(\tau(s')) = \\ = (r_{\tau(s)}\tau)(s')$$

teljesül és mivel S bal-reduktiv félcsoport, az $r_s \to r_{\tau(s)}$ megfeleltetés egy-egyértelmü ráképezés. Ezért $\tau R_S = R_S\tau$, azaz $\tau \in N_p(R_S)$. A tétel második felének bizonyitása végett legyen π tetszőleges eleme $N_p(R_S)$-nek. Akkor minden $r_s (\in R_S)$-hez létezik pontosan egy olyan $r_{s'} \in R_S$ elem, amelyre

$$\pi r_s = r_{s'}\pi$$

teljesül, igy π-hez egyértelmüen hozzárendelhető egy $\varphi_\pi : S \to S$ automorfizmus a

$$\forall s \in S : \varphi_\pi(s) := s' \iff \pi r_s = r_{s'}\pi \quad (\iff \pi r_s \pi^{-1} = r_{s'})$$

definicióval. Valóban, φ_π egy-egyértelmü ráképezés volta következik abból, hogy S bal-reduktiv félcsoport és ezért $s \to r_s$ $(s \in S \quad r_s \in R_S)$ egy-egyértelmü megfeleltetés. Másrészt, ha $r_{s_1}, r_{s_2} \in R_S$ párra

$$\pi r_{s_1} = r_{s_1'}\pi \qquad \text{és} \qquad \pi r_{s_2} = r_{s_2'}\pi$$

akkor

$$\pi r_{s_1 s_2} = \pi r_{s_2} r_{s_1} = r_{s_2'} \pi r_{s_1} = r_{s_2'} r_{s_1'}\pi = r_{s_1' s_2'}\pi$$

teljesül, amiből következik, hogy

$$\varphi_\pi(s_1 s_2) = \varphi_\pi(s_1)\varphi_\pi(s_2) \ .$$

Most megmutatjuk, hogy a $\pi \to \varphi_\pi$ megfeleltetés $N_p(R_S)$-nek endomorfizmusa $AUT(S)$-re. Ehhez, mivel S minden τ automorfizmusa önmagára képződik, elegendő azt bizonyitani, hogy a megfeleltetés müvelettartó. Legyen $\pi_1 . \pi_2 \in N_p(R_S)$ és s tetszőleges eleme S-nek. Akkor

$$\varphi_{\pi_1\pi_2}(s) = s' \iff (\pi_1\pi_2) r_s = r_{s'}(\pi_1\pi_2) \iff$$

$$\iff (\pi_1\pi_2) r_s (\pi_1\pi_2)^{-1} = r_{s'} \iff \pi_1(\pi_2 r_s \pi_2^{-1})\pi_1^{-1} = r_{s'} \iff$$

$$\iff \varphi_{\pi_1}(\varphi_{\pi_2}(s)) = s' \iff (\varphi_{\pi_1}\varphi_{\pi_2})(s) = s'$$

érvényes, amivel állitásunkat igazoltuk. Látható, hogy $N_p(R_S)$-nek $AUT(S)$-re való fenti endomorfizmusánál $C_p(R_S)$ az endomorfizmus magja és mert S minden τ automorfizmusa önmagára képeződik, kapjuk, hogy $N_p(R_S) = C_p(R_S)AUT(S)$. Ebből következik, hogy $N_p(R_S)$ a $C_p(R_S)$-nek $AUT(S)$-el való faktormentes bővitése. □

<u>Megjegyzések:</u> Az R_S p-centralizátorát Ω_S-ben az S félcsoport azon bal-transzlációi alkotják, amelyek S-et önmagára képezik le egy-egyértelmüen. Ez a következőképpen látható

be. Legyen $\pi \in C_p(R_S)$. Akkor

$$\pi(s')s = r_s(\pi(s')) = (r_s\pi)(s') = (\pi r_s)(s') = \pi(r_s(s')) = \\ = \pi(s's)$$

minden $r_s \in R_S$ és $s' \in S$ esetén. Másrészt, ha $\lambda : S \to S$ bal-transzlációja S-nek, azaz minden $s,s' \in S$ párra

$$\lambda(s's) = \lambda(s')s ,$$

akkor minden $r_s \in R_S$ és $s' \in S$ esetén

$$(\lambda r_s)(s') = \lambda(r_s(s')) = \lambda(s's) = \lambda(s')s = r_s(\lambda(s')) = \\ = (r_s\lambda)(s') ,$$

vagyis $\lambda \in C(R_S)$. Ebből pedig következik, hogy S egy λ bal-transzlációja pontosan akkor eleme $C_p(R_S)$-nek, ha S-nek önmagára való egy-egyértelmü leképezése.

A fenti megjegyzésből és a 2.3.6 tételből következik, hogy ha S csoport, akkor $N_p(R_S)$ az S holomorfja. Ezért $N_p(R_S)$ ugy tekinthető, mint a holomorf fogalmának általánositása bal-reduktiv félcsoportok esetére.

Mivel $C_p(R_S)$ éppen az $\underline{A}_S$ automata automorfizmus--csoportja a 2.3.6 tétel és a 2.3.3 lemma felhasználásával azonnal adódik az alábbi

2.3.7 KÖVETKEZMÉNY [30]. <u>Ha</u> $\underline{A}_S = (S,S,\delta_S)$ <u>redukált bemenetü félcsoport-automata, akkor</u> $G_g(\underline{A}_S)$ <u>izomorf</u> $G(\underline{A}_S)$-<u>nek</u> AUT(S)-<u>el való faktormentes Schreier-féle bővitésével</u>.

A fenti eredmények illusztrálására meghatározzuk egy redukált bemenetü félcsoport-automata általánositott auto-

morfizmus-csoportját.

Példa: Tekintsük a következő Cayley-táblával megadott S félcsoportot:

S	e	f	a	b	c	d
e	e	f	a	b	c	d
f	e	f	a	b	c	d
a	a	c	b	e	d	f
b	b	d	e	a	f	c
c	a	c	b	e	d	f
d	b	d	e	a	f	c

Könnyen belátható, hogy S bal-reduktiv félcsoport, sőt S egy jobb-csoport.

Az $\underline{A}_S = (S,S,\delta_S)$ automata átmenet táblája a következő:

$\underline{A}_S$	e	f	a	b	c	d
e	e	e	a	b	a	b
f	f	f	c	d	c	d
a	a	a	b	e	b	e
b	b	b	e	a	e	a
c	c	c	d	f	d	f
d	d	d	f	c	f	c

Mivel S-nek van baloldali egységeleme, ezért minden bal-transzlációja belső bal-transzláció. Igy a Cayley táblából közvetlenül leolvasható, hogy

$$G(\underline{A}_S)(=C_p(R_S)) = \langle \varepsilon_S, f_a, f_b \rangle,$$

ahol

$$\varepsilon_S = \begin{vmatrix} e & f & a & b & c & d \\ e & f & a & b & c & d \end{vmatrix}, \quad f_a = \begin{vmatrix} e & f & a & b & c & d \\ a & c & b & e & d & f \end{vmatrix}, \quad f_b = \begin{vmatrix} e & f & a & b & c & d \\ b & d & e & a & f & c \end{vmatrix}.$$

Könnyü ellenőrizni, hogy

$$AUT(S) = \langle \varepsilon_S, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \rangle ,$$

ahol

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} e & f & a & b & c & d \\ f & e & c & d & a & b \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} e & f & a & b & d & c \\ e & f & b & a & d & c \end{pmatrix}, \quad \varphi_3 = \begin{pmatrix} e & f & a & b & c & d \\ f & e & d & c & b & a \end{pmatrix}.$$

Bevezetjük a következő jelöléseket: Legyenek

$$f_{1i} := \varphi_i \qquad (i=1,2,3),$$

$$f_{21} = \begin{pmatrix} e & f & a & b & c & d \\ c & a & d & f & b & e \end{pmatrix} = \varphi_1 f_a , \qquad f_{31} = \begin{pmatrix} e & f & a & b & c & d \\ d & b & f & e & e & a \end{pmatrix} = \varphi_1 f_b ,$$

$$f_{22} = \begin{pmatrix} e & f & a & b & c & d \\ b & d & a & e & c & f \end{pmatrix} = \varphi_2 f_a , \qquad f_{32} = \begin{pmatrix} e & f & a & b & c & d \\ a & c & e & b & f & d \end{pmatrix} = \varphi_2 f_b ,$$

$$f_{23} = \begin{pmatrix} e & f & a & b & c & d \\ d & b & c & f & a & e \end{pmatrix} = \varphi_3 f_a , \qquad f_{33} = \begin{pmatrix} e & f & a & b & c & d \\ c & a & f & d & e & b \end{pmatrix} = \varphi_3 f_b .$$

Akkor $\underline{A}_S$ automata általánositott automorfizmus-csoportja, amint az $\underline{A}_S$ átmenet táblájan közvetlenül ellenőrizhető:

$$G_g(\underline{A}_S) = \langle (\varepsilon_S,\varepsilon_S), (f_a,\varepsilon_S), (f_b,\varepsilon_S), (f_{11},\varphi_1), (f_{21},\varphi_1), (f_{31},\varphi_1), (f_{12},\varphi_2), (f_{22},\varphi_2), (f_{32},\varphi_2) (f_{13},\varphi_3), (f_{23},\varphi_3), (f_{33},\varphi_3) \rangle .$$

Végül, felirjuk $G_g(\underline{A}_S)$ Cayley-tábláját, a következő jelöléseket használva:

$$g_{1o} = (\varepsilon_S,\varepsilon_S) , \quad g_{2O} = (f_a,\varepsilon_S) , \quad g_{3O} = (f_b,\varepsilon_S)$$

és

$$g_{ij} = (f_{ij},\varphi_j) , \qquad (i=1,2,3;\ j=1,2,3) .$$

$G_g(\underline{A}_S)$	g_{10}	g_{20}	g_{30}	g_{11}	g_{21}	g_{31}	g_{12}	g_{22}	g_{32}	g_{13}	g_{23}	g_{33}
g_{10}	g_{10}	g_{20}	g_{30}	g_{11}	g_{21}	g_{31}	g_{12}	g_{22}	g_{32}	g_{13}	g_{23}	g_{33}
g_{20}	g_{20}	g_{30}	g_{10}	g_{21}	g_{31}	g_{11}	g_{32}	g_{12}	g_{22}	g_{33}	g_{13}	g_{23}
g_{30}	g_{30}	g_{10}	g_{20}	g_{31}	g_{11}	g_{21}	g_{22}	g_{32}	g_{12}	g_{23}	g_{33}	g_{13}
g_{11}	g_{11}	g_{21}	g_{31}	g_{10}	g_{20}	g_{30}	g_{13}	g_{23}	g_{33}	g_{12}	g_{22}	g_{32}
g_{21}	g_{21}	g_{31}	g_{11}	g_{20}	g_{30}	g_{10}	g_{33}	g_{13}	g_{23}	g_{32}	g_{12}	g_{22}
g_{31}	g_{31}	g_{11}	g_{21}	g_{30}	g_{10}	g_{20}	g_{23}	g_{33}	g_{13}	g_{22}	g_{32}	g_{12}
g_{12}	g_{12}	g_{22}	g_{32}	g_{13}	g_{23}	g_{33}	g_{10}	g_{20}	g_{30}	g_{11}	g_{21}	g_{31}
g_{22}	g_{22}	g_{32}	g_{12}	g_{23}	g_{33}	g_{13}	g_{30}	g_{10}	g_{20}	g_{31}	g_{11}	g_{21}
g_{32}	g_{32}	g_{12}	g_{22}	g_{33}	g_{13}	g_{23}	g_{20}	g_{30}	g_{10}	g_{21}	g_{31}	g_{11}
g_{13}	g_{13}	g_{23}	g_{33}	g_{12}	g_{22}	g_{32}	g_{11}	g_{21}	g_{31}	g_{10}	g_{20}	g_{30}
g_{23}	g_{23}	g_{33}	g_{13}	g_{22}	g_{32}	g_{12}	g_{31}	g_{11}	g_{21}	g_{30}	g_{10}	g_{20}
g_{33}	g_{33}	g_{13}	g_{23}	g_{32}	g_{12}	g_{22}	g_{21}	g_{31}	g_{11}	g_{20}	g_{30}	g_{10}

A táblázatból leolvasható, hogy az $N = \langle g_{10}, g_{20}, g_{30} \rangle$ normális részcsoportja $G_g(\underline{A}_S)$-nek és N izomorf $G(\underline{A}_S)$-sel. Ellenőrizhető az is, hogy

$$G_g(\underline{A}_S) = N + Ng_{11} + Ng_{12} + Ng_{13}$$

az N-szerinti mellékosztályokra bontása $G_g(\underline{A}_S)$-nek és $H = \langle g_{10}, g_{11}, g_{12}, g_{13} \rangle$ olyan részcsoportja $G_g(\underline{A}_S)$-nek, amelyre

$$H \approx AUT(S) \ .$$

Ezután a véges, erősen ciklikus, redukált bementü kvázi-automaták általánositott automorfizmus-csoportjait jellemezzük. Az adandó reprezentáció leirja azt a kapcsolatot, ami egy ilyen automata karakterisztikus félcsoportja

és általánositott automorfizmus-csoportja között van.

Könnyen belátható, hogy egy $\underline{A} = (A,S,\delta)$ erősen ciklikus kvázi-automata pontosan akkor redukált bemenetü, ha egy a_o erős generátorához rendelt $R_{\underline{A},a_o}$ moduláris jobb-kongruencia az egyenlőségi reláción kivül nem tartalmaz más kongruencia relációt. Ebben az esetben $S(\underline{A}) \approx S$ teljesül.

Tekintsük most az S félcsoport és AUT(S) automorfizmus-csoportjának

$$T = S \times_{\varphi} AUT(S)$$

szemidirekt szorzatát, ahol a $\varphi : AUT(S) \to END(S)$ kapcsolat-homomorfizmus az identikus beágyazás. Tehát, minden $(s,\tau),(s',\tau') \in T$-re

$$(s,\tau)(s',\tau') = (s\tau(s'),\tau\tau')$$

összefüggéssel van értelmezve a szorzás T-ben. A T félcsoporton definiáljuk az R relációt a következőképpen: legyen minden $(s,\tau),(s',\tau') \in T$ esetén

$$(s,\tau) \equiv (s',\tau')(R) \iff s \equiv s'(R_{\underline{A},a_o}) \text{ és } \tau = \tau' .$$

Könnyü megmutatni, hogy R moduláris jobb-kongruencia a T félcsoporton. Ha e jelöli S egy baloldali egységelemét mod $R_{\underline{A},a_o}$, akkor az (e,ε_S) pár baloldali egységeleme T-nek mod R . Most felhasználva az I. fejezet Félcsoportelméleti előkészületek cimü paragrafusának eredményeit, megadjuk a T félcsoport olyan részfélcsoportját, amelynek faktorfélcsoportjával hüen reprezentálható $G_g(\underline{A})$.

Az R moduláris jobb-kongruencia

$$N'(R) = \langle (s,\tau) \in T \mid R = R^{(s,\tau)} \rangle$$

erős normalizátora T-nek olyan részfélcsoportja, hogy R leszükitése $N'(R)$-re kongruencia reláció $N'(R)$-en. Mind $N'(R)$, mind

$$N'_{(e,\varepsilon_S)}(R) = \langle (s,\tau) \in N'(R) \mid (s,\tau)(e,\varepsilon_S) \equiv (s,\tau)(R) \rangle$$

balideálja, R-szerinti ekvivalencia osztályok egyesitése. Mivel $N'(R)/R$ jobb-csoport az $N'_{(e,\varepsilon_S)}(R)/R$ baloldali főideálja csoport. A fenti jelöléseket használva igaz a következő

2.3.8 TÉTEL [30]. <u>Ha $\underline{A} = (A,S,\delta)$ erősen ciklikus, redukált bemenetü kvázi-automata, akkor az $\underline{A}$ automata általánositott automorfizmus-csoportja izomorf az $N'_{(e,\varepsilon_S)}(R)/R$ csoporttal</u>.

Bizonyitás: Tekintsük azt a ψ leképezést, amely minden $[(s,\tau)](\in N'_{(e,\varepsilon_S)}(R)/R)$ elemhez hozzárendeli az $(f_{(s,\tau)},\tau)$ leképezéspárt, ahol $f_{(s,\tau)}: A \to A$ ugy, hogy

$$\forall\, a(= a_o s') \in A: f_{(s,\tau)}(a) = a_o s\tau(s')$$

és τ az (s,τ) pár második komponense. Megmutatjuk, hogy $(f_{(s,\tau)},\tau)$ általánositott automorfizmusa $\underline{A}$-nak. Először ehhez igazolnunk kell, hogy $f_{(s,\tau)}$ jól-definiált. Legyen $a = a_o s' = a_o s'' \in A$, azaz

$$s' \equiv s''(R_{\underline{A},a_o}) .$$

Akkor, tekintve, hogy tetszőleges $\tau \in AUT(S)$ esetén

$$(s',\tau') \equiv (s'',\tau')(R)$$

és $(s,\tau) \in N'(R)$, kapjuk, hogy

$$(s,\tau)(s',\tau') \equiv (s,\tau)(s'',\tau')(R),$$

tehát

$$s\tau(s') \equiv s\tau(s'')(R_{\underline{A},a_o}) .$$

Ebből pedig következik, hogy

$$f_{(s,\tau)}(a_o s') = f_{(s,\tau)}(a_o s'')$$

teljesül. Annak igazolásához, hogy $f_{(s,\tau)}$ egy-egyértelmü leképezés tegyük fel, hogy az $a, a' \in A$ elemekre

$$f_{(s,\tau)}(a) = f_{(s,\tau)}(a') .$$

Legyen $a = a_o s'$ és $a' = a_o \bar{s}$. Akkor

$$a_o s\tau(s') = f_{(s,\tau)}(a) = f_{(s,\tau)}(a') = a_o s\tau(\bar{s}) ,$$

azaz

$$s\tau(s') \equiv s\tau(\bar{s}) \ (R_{\underline{A},a_o})$$

következik. Ezért

$$(s,\tau)(s',\tau') \equiv (s,\tau)(\bar{s},\tau')(R)$$

teljesül minden $\tau'(\in AUT(S))$-re és ez, $R = R^{(s,\tau)}$ miatt, implikálja

$$(s',\tau') \equiv (\bar{s},\tau')(R)$$

érvényességét. Igy kapjuk, hogy

$$s' \equiv \bar{s}(R_{\underline{A},a_o}) ,$$

ami ekvivalens

$$a = a_o s' = a_o \bar{s} = a'$$

teljesülésével. Másrészt, (s,τ) jobb-egysége T-nek mod R és igy s jobb-egysége S-nek mod $R_{\underline{A},a_o}$. Ebből következik, hogy tetszőleges $s'(\in S)$-hez létezik olyan $\bar{s} \in S$, hogy

$$s\bar{s} \equiv s'(R_{\underline{A},a_o}) ,$$

ezért tetszőleges $a = a_o s'(\in A)$-hoz létezik $\bar{a} = a_o \tau^{-1}(\bar{s})(\in A)$, amelyre

$$f_{(s,\tau)}(\bar{a}) = a_o s\tau(\tau^{-1}(\bar{s})) = a_o s\bar{s} = a_o s' = a$$

teljesül. Tehát $f_{(s,\tau)}$ ráképezés. Mivel τ automorfizmusa S-nek, ugyancsak egy-egyértelmü ráképezés. Végül, minden $a = a_o s' \in A$ és $s'' \in S$ esetén

$$f_{(s,\tau)}(\delta(a,s'')) = f_{(s,\tau)}(a_o s's'') = a_o s\tau(s's'') =$$

$$= a_o s\tau(s')\tau(s'') = \delta(f_{(s,\tau)}(a),\tau(s'')),$$

amivel megmutattuk, hogy $(f_{(s,\tau)},\tau)$ általánositott automorfizmusa $\underline{A}$-nak, azaz ψ a $G_g(\underline{A})$-ba képez.
Megmutatjuk, hogy ψ egy-egyértelmü ráképezés. Tegyük fel, hogy

$$[(s,\tau)],[(s',\tau')] \ (\in N'_{(e,\varepsilon_S)}(R)/R) \text{ -re } (f_{(s,\tau)},\tau) =$$

$$= (f_{(s',\tau')},\tau') .$$

Akkor minden $a(\in A)$-ra

$$f_{(s,\tau)}(a) = f_{(s',\tau')}(a)$$

és minden $\bar{s}(\in S)$-re

$$\tau(\bar{s}) = \tau'(\bar{s})$$

teljesül. Az utóbbi egyenlőségből azonnal adódik, hogy

$\tau = \tau'$, mig az első egyenlőséget $a_o (\in A)$-ra alkalmazva kapjuk, hogy

$$a_o s\tau(e) = f_{(s,\tau)}(a_o) = f_{(s',\tau')}(a_o) = a_o s'\tau'(e),$$

ahol e baloldali egységeleme S-nek mod $R_{\underline{A},a_o}$. Akkor, kihasználva, hogy $(s,\tau),(s',\tau') \in N'_{(e,\varepsilon_S)}(R)$, azaz

$$(s\tau(e),\tau) \equiv (s,\tau)(R) \quad \text{és} \quad (s'\tau'(e),\tau') \equiv (s',\tau')(R)$$

kapjuk, hogy $a_o s = a_o s'$ és igy

$$[(s,\tau)] = [(s',\tau')].$$

Legyen most (f,g) tetszőleges általánositott automorfizmusa $\underline{A}$-nak. Akkor minden $a \in A$ és $s',s'' \in S$ esetén

$$f(a)g(s's'') = f(as's'') = f(as')g(s'') = f(a)g(s')g(s''),$$

amiből $g \in AUT(S)$ következik, mert $\underline{A}$ redukált bemenetü automata. Legyen $f(a_o) = a_o s$. Akkor s jobb-egysége S-nek mod $R_{\underline{A},a_o}$, mert az a_o erős generátor képe erős generátor. Tetszőleges $a = a_o s'$ esetén

$$f(a) = f(a_o s') = f(a_o)g(s') = a_o sg(s').$$

Igy, ha $a = a_o s' = a_o s''$, akkor

$$a_o sg(s') = f(a_o s') = f(a) = f(a_o s'') = a_o sg(s''),$$

amiből - tekintve, hogy f egy-egyértelmü ráképezése A-nak önmagára - kapjuk, hogy $(s,g) \in N'(R)$. Mivel $a_o e = a_o$ miatt

$$a_o sg(e) = f(a_o e) = f(a_o) = a_o s,$$

nyerjük, hogy $(s,g) \in N'_{(e,\varepsilon_S)}(R)$. Az f-hez rendelt $s(\in S)$

megadásából következik, hogy szerepét minden olyan $\bar{s} \in S$ elem átveheti, amelyre $a_o s = a_o \bar{s}$, azaz

$$s \equiv \bar{s}(R_{\underline{A},a_o})$$

teljesül. Végül, tetszőleges $a = a_o s' \in A$ állapotra

$$f(a) = a_o s g(s') = f_{(s,g)}(a)$$

mutatja, hogy $f = f_{(s,g)}$. Igy csupán azt kell még megmutatnunk, hogy ψ művelettartó leképezés. Legyen $a = a_o s'$ tetszőleges állapot és $s'' \in S$ tetszőleges bemenet. Akkor az

$$(f_{s,\tau} f_{(\bar{s},\bar{\tau})})(\delta(a,s'')) = f_{(s,\tau)}(f_{(\bar{s},\bar{\tau})}(a_o s' s'')) =$$

$$= f_{(s,\tau)}(a_o \bar{s}\,\bar{\tau}(s's'')) = a_o s\tau(\bar{s}\,\bar{\tau}(s's'')) = a_o s\tau(\bar{s})(\tau\bar{\tau})(s's'') =$$

$$= f_{(s\tau(\bar{s}),\tau\bar{\tau})}(a_o s' s'') = f_{(s\tau(\bar{s}),\tau\bar{\tau})}(\delta(a,s''))$$

számolás alapján kapjuk, hogy

$$\psi([(s,\tau)][(\bar{s},\bar{\tau})]) = \psi([(s\tau(\bar{s}),\tau\bar{\tau})]) = f_{(s\tau(\bar{s}),\tau\bar{\tau})} =$$

$$= f_{(s,\tau)} f_{(\bar{s},\bar{\tau})} = \psi([(s,\tau)])\psi([(s,\bar{\tau})]) \ .$$

Ezzel a tétel bizonyitását befejeztük.

3. F E J E Z E T

MEALY-AUTOMATÁK FÉLCSOPORTJAIROL

Ebben a fejezetben Mealy-automaták karakterisztikus félcsoportjairól, endomorfizmus-félcsoportjairól és automorfizmus-csoportjairól lesz szó. A 3.1.§-ban a Mealy-automaták karakterisztikus félcsoportját vizsgáljuk. Ebben a részben igazolunk néhány olyan állitást, melyeknek analogonjai érvényesek kimenő jel nélküli automaták karakterisztikus félcsoportjára is. A 3.2-3.3.§-okban a Mealy-automaták különböző endomorfizmus-félcsoportjaival és automorfizmus-csoportjaival foglalkozunk. A 3.4.§-ban Mealy-automaták diszjunkt direkt szorzatának és heterogén direkt szorzatának endomorfizmus-félcsoportjai és a komponens automaták endomorfizmus-félcsoportjai közötti kapcsolatot vizsgáljuk.

3.1.§ Mealy-automaták karakterisztikus félcsoportjairól

A Mealy-automaták karakterisztikus félcsoportjainak számos jellemzőjét Dang Huu Dao [6,7,8,9] dolgozataiban találhatjuk. A következő 3.1.-3.15 tételek kimenő jel nélküli automatákra vonatkozó analogonjai jól ismertek [14,23, 24]. Bizonyitásaikat szinte szó szerint átvehettük.

3.1.1 TÉTEL [32]. Ha a $\underline{B} = (B,X',Y',\delta',\lambda')$ Mealy-automata homomorf képe az $\underline{A} = (A,X,Y,\delta,\lambda)$ Mealy-automatának, akkor $S'(\underline{B})$ homomorf képe $S'(\underline{A})$-nak.

Bizonyitás: Legyen (ψ_1,ψ_2,ψ_3) $\underline{A}$-nak $\underline{B}$-re való homomorfizmusa, azaz, legyenek $\psi_1: A \to B$, $\psi_2: X \to X'$ és $\psi_3: Y \to Y'$ olyan egyértelmü ráképezések, hogy minden $a \in A$ és $x \in X$ esetén

$$\psi_1(\delta(a,x)) = \delta'(\psi_1(a),\psi_2(x))$$

és

$$\psi_3(\lambda(a,x)) = \lambda'(\psi_1(a),\psi_2(x)).$$

A ψ_2 és ψ_3 leképezéseket kiterjesztjük $\psi_2: X^* \to X'^*$ és $\psi_3: Y^* \to Y'^*$ homomorfizmusokká, azaz legyen

$$\psi_2(p) := \begin{cases} e & \text{ha } p = e, \\ \psi_2(x_1)\psi_2(x_2)\ldots\psi_2(x_n) & \text{ha } p = x_1x_2\ldots x_n \in X^+ \end{cases}$$

és

$$\psi_3(q) := \begin{cases} e & \text{ha } q = e, \\ \psi_3(y_1)\psi_3(y_2)\ldots\psi_3(y_m) & \text{ha } q = y_1y_2\ldots y_m \in Y^+ \end{cases}$$

Akkor minden $a \in A$ és $p \in X^*$ esetén

$$\psi_1(ap) = \psi_1(a)\psi_2(p) \quad \text{és} \quad \psi_3(\lambda(a,p)) = \lambda'(\psi_1(a),\psi_2(p)).$$

Ezek után definiáljuk az $\eta : S'(\underline{A}) \to S'(\underline{B})$ leképezést ugy, hogy minden $C'_{\underline{A}}[p] (\in S'(\underline{A}))$-ra legyen

$$\eta(C'_{\underline{A}}[p]) := C'_{\underline{B}}[\psi_2(p)],$$

ahol $C'_{\underline{A}}[p]$ a p szót tartalmazó ekvivalencia osztálya X^+-nak mod $R'_{\underline{A}}$ és $C'_{\underline{B}}[\psi_2(p)]$ a $\psi_2(p)$ szót tartalmazó ekvivalencia

osztálya X'^{+}-nak mod $R'_{\underline{B}}$. Ha $p,q(\in X^{+})$-ra $p \equiv q(R'_{\underline{A}})$ teljesül, azaz

$$\forall\, a \in A : \quad ap = aq \quad \text{és} \quad \overline{\lambda(a,p)} = \overline{\lambda(a,q)} ,$$

akkor minden $a(\in A)$-ra

$$\psi_1(a)\psi_2(p) = \psi_1(ap) = \psi_1(aq) = \psi_1(a)\psi_2(q)$$

és

$$\overline{\lambda'(\psi_1(a),\psi_2(p))} = \overline{\psi_3(\lambda(a,p))} = \psi_3(\overline{\lambda(a,p)}) = \psi_3(\overline{\lambda(a,q)}) =$$
$$= \overline{\psi_3(\lambda(a,q))} = \overline{\lambda'(\psi_1(a),\psi_2(q))} .$$

Ebből, tekintve, hogy $\psi_1 : A \to B$ ráképezés, következik, hogy

$$\psi_2(p) \equiv \psi_2(q)(R'_{\underline{B}}) ,$$

ami mutatja, hogy η jól-definiált. Mivel ψ_2 az X^{*}-nak X'^{*}-ra való homomorfizmusa, kapjuk, hogy η ráképezés. Végül az

$$\eta(C'_{\underline{A}}[p]C'_{\underline{A}}[q]) = \eta(C'_{\underline{A}}[pq]) = C'_{\underline{B}}[\psi_2(pq)] = C'_{\underline{B}}[\psi_2(p)\psi_2(q)] =$$
$$= C'_{\underline{B}}[\psi_2(p)]C'_{\underline{B}}[\psi_2(q)] = \eta(C'_{\underline{A}}[p])\eta(C'_{\underline{A}}[q])$$

számolással nyerjük, hogy η homomorfizmus. □

Amint az jól ismert, egy $\overline{\underline{A}} = (\overline{A},\overline{X},\overline{Y},\overline{\delta},\overline{\lambda})$ Mealy-automatát az $\underline{A} = (A,X,Y,\delta,\lambda)$ Mealy-automata részautomatájának nevezzük, ha $\overline{A} \subseteq A$, $\overline{X} \subseteq X$, $\overline{Y} \subseteq Y$ és $\overline{\delta}$ és $\overline{\lambda}$ a δ illetve λ függvények leszükitése az $\overline{A} \times \overline{X}$ halmazra.

3.1.2 TÉTEL [32]. <u>Ha az</u> $\overline{\underline{A}} = (\overline{A},\overline{X},\overline{Y},\overline{\delta},\overline{\lambda})$ <u>Mealy-automata az</u> $\underline{A} = (A,X,Y,\delta,\lambda)$ <u>Mealy-automatának részautomatája</u>,

akkor $S'(\underline{\bar{A}})$ homomorf képe $S'(\underline{A})$ egy részfélcsoportjának.

Bizonyitás: Tekintsük az $R'_{\underline{A}}$ kongruencia $\bar{X}^+$-ra való leszükitését. Mivel $\bar{A} \subseteq A$ és $\bar{Y} \subseteq Y$, ezért tetszőleges két $\bar{p}, \bar{q} \in \bar{X}^+$ szóra

$$\bar{p} \equiv \bar{q}(R'_{\underline{A}}) \Rightarrow \bar{p} \equiv \bar{q}(R'_{\underline{\bar{A}}})$$

teljesül, azaz

$$R'_{\underline{A}} \mid \bar{X}^+ \leq R'_{\underline{\bar{A}}} ,$$

ahol $R'_{\underline{A}} \mid \bar{X}^+$ az $R'_{\underline{A}}$ kongruencia $\bar{X}^+$-ra való leszükitését jelöli. Ebből következik az állitás. □

3.1.3 KÖVETKEZMÉNY [32]. Ha az $\underline{A}$ Mealy-automata izomorfan beágyazható a $\underline{B}$ Mealy-automatába, akkor $S'(\underline{A})$ homomorf képe $S'(\underline{B})$ egy részfélcsoportjának.

3.1.1 DEFINICIÓ [10]. Azt mondjuk, hogy az $\underline{A} = (A,X,Y,\delta,\lambda)$ Mealy-automata heterogén direkt szorzata az $\underline{A}_i = (A_i,X_i,Y_i,\delta_i,\lambda_i)$ $(i=1,\dots,n)$ Mealy-automatáknak, ha

$$A = A_1\times\dots\times A_n , \quad X = X_1\times\dots\times X_n , \quad Y = Y_1\times\dots\times Y_n$$

és minden $(a_1,\dots,a_n) \in A$ és $(x_1,\dots,x_n) \in X$ párra

$$\delta((a_1,\dots,a_n),(x_1,\dots,x_n)):=(\delta_1(a_1,x_1),\dots,\delta_n(a_n,x_n))$$

ill.

$$\lambda((a_1,\dots,a_n),(x_1,\dots,x_n)):=(\lambda_1(a_1,x_1),\dots,\lambda_n(a_n,x_n)) .$$

3.1.4 TÉTEL [32]. Ha az $\underline{A} = (A,X,Y,\delta,\lambda)$ Mealy-automata az $\underline{A}_i = (A_i,X_i,Y_i,\delta_i,\lambda_i)$ $(i=1,\dots,n)$ Mealy-automaták heterogén direkt szorzata, akkor $S'(\underline{A})$ az $S'(\underline{A}_i)$ $(i=1,\dots,n)$ félcsoportok szubdirekt szorzata.

Bizonyitás: Legyen $\underline{A} = (A,X,Y,\delta,\lambda)$ heterogén direkt szorzata az

$$\underline{A}_i = (A_i,X_i,Y_i,\delta_i,\lambda_i) \quad (i=1,\dots,n)$$

automatáknak. Akkor minden $p \in X^+$ szó

$$p = (x_1^{(1)},\dots,x_n^{(1)})\dots(x_1^{(k)},\dots,x_n^{(k)})$$

alaku, ahol $x_i^{(j)} \in X_i$ minden $i(=1,\dots,n)$-re és $j(=1,\dots,k)$--re. Tekintsük azt a $\varphi : X^+ \to X_1^+ \otimes \dots \otimes X_n^+$ leképezést, amelyre

$$\varphi((x_1^{(1)},\dots,x_n^{(1)})\dots(x_1^{(k)},\dots,x_n^{(k)})) =$$
$$= (x_1^{(1)}\dots x_1^{(k)},\dots,x_n^{(1)}\dots x_n^{(k)})$$

teljesül. Könnyen belátható, hogy φ az X^+-t az $X_1^+ \otimes \dots \otimes X_n^+$ azon részfélcsoportjára képezi le izomorf módon, amely az olyan

$$(p_1,\dots,p_n) \qquad (p_i \in X_i^+)$$

alaku vektorokból áll, amelyekre $|p_1| = \dots = |p_n|$. Ha a $p,q \in X^+$ szavakra $\varphi(p) = (p_1,\dots,p_n)$ és $\varphi(q) = (q_1,\dots,q_n)$, akkor

$$p \equiv q(R'_{\underline{A}}) \iff \underset{i=1,\dots,n}{\forall\ i}\ [p_i \equiv q_i(R'_{\underline{A}_i})]$$

Ebből, tekintve, hogy φ az X^+-nak $X_1^+ \otimes \dots \otimes X_n^+$-ba való

izomorfizmusa, kapjuk, hogy a

$\psi : C'_{\underline{A}}[p] \to (C'_{\underline{A}_1}[p_1], \ldots, C'_{\underline{A}_n}[p_n])$ $(C'_{\underline{A}}[p] \in S'(\underline{A}), C'_{\underline{A}_i}[p_i] \in S'(\underline{A}_i))$

leképezés $S'(\underline{A})$-nak izomorfizmusa $S'(\underline{A}_1) \otimes \ldots \otimes S'(\underline{A}_n)$-be, ahol

$$(p_1, \ldots, p_n) = \varphi(p) \qquad (p \in X^+,\ p_i \in X_i^+) .$$

Másrészt, ha $C'_{\underline{A}_i}[p_i]$ tetszőleges eleme $S'(\underline{A}_i)$-nek valamely i $(1 \le i \le n)$-re, akkor véve olyan

$$p_1 \in X_1^+, \ldots, p_{i-1} \in X_{i-1}^+, p_{i+1} \in X_{i+1}^+, \ldots, p_n \in X_n^+$$

szavakat, melyekre

$$|p_1| = \ldots = |p_{i-1}| = |p_{i+1}| = \ldots = |p_n| = |p_i|$$

és azt a $p \in X^+$ szót, amelyre

$$\varphi(p) = (p_1, \ldots, p_n),$$

a $(C'_{\underline{A}_1}[p_1], \ldots, C'_{\underline{A}_n}[p_n])$ vektor a $C'_{\underline{A}}[p]$ képe lesz a ψ leképezés mellett. Ezzel megmutattuk, hogy $S'(\underline{A})$ szubdirekt szorzata az $S'(\underline{A}_i)$ $(i=1,\ldots,n)$ félcsoportoknak. □

3.1.5 TÉTEL [32]. <u>Ha egy</u> $\underline{A} = (A,X,Y,\delta,\lambda)$ <u>Mealy-automatának van olyan</u> x_o <u>bemenő jele, amelyre</u>

$$(\forall\, a \in A)(\forall\, x \in X):\ \delta(a,x_o) = a \ \ \underline{\text{és}}\ \ \lambda(a,x) = \overline{\lambda(a,xx_o)}$$

<u>teljesül és</u> $\underline{A}$ <u>heterogén direkt szorzata az</u> $\underline{A}_i = (A_i, X_i, Y_i, \delta_i, \lambda_i)$ $(i=1,\ldots,n)$ <u>Mealy-automatáknak, akkor</u> $S'(\underline{A})$ <u>izomorf</u> $S'(\underline{A}_1) \otimes \ldots \otimes S'(\underline{A}_n)$-<u>nel</u>.

Bizonyitás: Először megmutatjuk, hogy $\underline{A}$ Moore-automata. Valóban, ha $\delta(a,x) = \delta(a',x')$ teljesül, ahol $a,a' \in A$ és $x,x' \in X$, ugy

$$\lambda(a,x) = \overbrace{\lambda(a,xx_o)} = \lambda(\delta(a,x),x_o) = \lambda(\delta(a',x'),x_o) =$$
$$= \overbrace{\lambda(a',x'x_o)} = \lambda(a',x').$$

Akkor az $\underline{A}_i$ $(i=1,\dots,n)$ komponens automaták is Moore-automaták. Mivél, ha $\underline{A}$ Moore-automata, akkor $S'(\underline{A}) = S(\underline{A}^*)$, alkalmazható a kimenő jel nélküli automaták karakterisztikus félcsoportjaira vonatkozó analóg állitás ([14], 5.1.7 Tétel) bizonyitása. Ennek megfelelően; legyenek $C'_{\underline{A}_i}[p_i]$ $(i=1,\dots,n)$ az $S'(\underline{A}_i)$ $(i=1,\dots,n)$ félcsoportok tetszőleges elemei. A tétel feltételeiből következik, hogy minden $\underline{A}_i$ automatának van olyan $x_{o_i} \in X_i$ bemenő jele, hogy

$$\forall\, a \in A_i : \delta_i(a,x_{o_i}) = a .$$

Ezért, az $S'(\underline{A}_1) \otimes \dots \otimes S'(\underline{A}_n)$ direkt szorzat bármely $(C'_{\underline{A}_1}[p_1],\dots,C'_{\underline{A}_n}[p_n])$ eleméhez vannak olyan

$$p'_1 \in X_1^+ ,\dots, p'_n \in X_n^+$$

szavak, hogy

$$|p'_1| = \dots = |p'_n|$$

és

$$p_1 \equiv p'_1(R'_{\underline{A}_1}),\dots,p_n \equiv p'_n(R'_{\underline{A}_n}) .$$

Akkor az előző tétel szerint, van olyan $p \in X^+$, amelyre $\varphi(p) = (p'_1,\dots,p'_n)$ és ezért

$$\psi : C'_{\underline{A}}[p] \to (C'_{\underline{A}_1}[p],\ldots,C'_{\underline{A}_n}[p_n]),$$

azaz $S'(\underline{A})$ az $S'(\underline{A}_1) \otimes \ldots \otimes S'(\underline{A}_n)$ direkt szorzatra képződik a ψ izomorfizmus mellett. □

3.1.6 TÉTEL [32]. <u>Ha az</u> $\underline{A} = (A,X,Y,\delta,\lambda)$ <u>Mealy-automata</u> M-<u>állapot-független, akkor az</u> $S'(\underline{A})$ <u>karakterisztikus félcsoport bal-kancellativ. Ha ezen kivül</u> $\underline{A}$ <u>véges vagy</u> M-<u>erősen összefüggő is, akkor</u> $S'(\underline{A})$ <u>jobb-csoport</u>.

Bizonyitás: Az első állitás igazolásához, azt kell megmutatnunk, hogy tetszőleges $r \in X^+$ esetén

$$rp \equiv rq(R'_{\underline{A}}) \Rightarrow p \equiv q(R'_{\underline{A}}) \qquad (p,q \in X^+)$$

teljesül. Mivel $\underline{A}$ M-állapot-független, azaz minden $a,b \in A$ párra

$$R'_{\underline{A},a} = R'_{\underline{A},b} (= R'_{\underline{A}}),$$

azért

$$rp \equiv rq(R'_{\underline{A}}) \Leftrightarrow \exists\, a \in A: \ arp = arq \ \text{ és } \ \overline{\lambda(a,rp)} = \overline{\lambda(a,rq)}.$$

De ebből azonnal következik, hogy

$$p \equiv q(R'_{\underline{A},ar}) ,$$

azaz, ujra kihasználva $\underline{A}$ M-állapot-függetlenségét, kapjuk, hogy

$$p \equiv q(R'_{\underline{A}}).$$

Mivel minden peródikus bal-kancellativ félcsoport jobb-csoport és véges Mealy-automata karakterisztikus félcsoportja nyilván véges, kapjuk, hogy ha $\underline{A}$ véges és M-állapot-független,

akkor $S'(\underline{A})$ jobb-csoport. Igy már csak azt kell megmutatnunk, hogy ha $\underline{A}$ M-állapot-független és M-erősen összefüggő, akkor $S'(\underline{A})$ jobb-egyszerü. Vegyük $S'(\underline{A})$-ból a tetszőleges $C'_{\underline{A}}[p]$, $C'_{\underline{A}}[q]$ elemeket és legyen a tetszőleges állapota $\underline{A}$-nak. Tegyük fel, hogy

$$ap = a' \ , \quad aq = a'' \quad \text{és} \quad \overline{\lambda(a,q)} = y \quad (y \in Y).$$

Kihasználva, hogy $\underline{A}$ M-erősen összefüggő, adódik, hogy létezik olyan $r \in X^+$ szó, amelyre

$$a'r = a'' \qquad \text{és} \qquad \overline{\lambda(a',r)} = y$$

fennáll. Akkor

$$apr = aq \quad \text{és} \quad \overline{\lambda(a,pr)} = \overline{\lambda(ap,r)} = \overline{\lambda(a',r)} = \overline{\lambda(a,q)} \ ,$$

azaz

$$pr \equiv q(R'_{\underline{A},a}) \ .$$

Ebből $\underline{A}$ M-állapot-függetlensége miatt következik, hogy

$$pr \equiv q(R'_{\underline{A}})$$

és igy $C'_{\underline{A}}[r]$ $(\in S'(\underline{A}))$ kielégiti a

$$C'_{\underline{A}}[p] \ x = C'_{\underline{A}}[q]$$

egyenletet. Ezzel megmutattuk, hogy $S'(\underline{A})$ jobb-egyszerü. □

A következő tételben elegendő feltételt adunk arra, hogy egy Mealy-automata Moore-automata legyen.

3.1.7 TÉTEL [32]. <u>Minden</u> $\underline{A} = (A,X,Y,\delta,\lambda)$ <u>erősen ciklikus</u> M-<u>kommutativ Mealy-automata</u> M-<u>kvázi-állapot-független Moore-automata</u>.

Bizonyitás: Legyen a_o erős generátor állapota $\underline{A}$-nak. Először azt igazoljuk, hogy $\underline{A}$ M-kvázi-állapot-független a_o-ra nézve, azaz minden $a(\in A)$-ra

$$R'_{\underline{A},a_o} \leq R'_{\underline{A},a}$$

teljesül. Vegyünk két olyan p és q szót X^+-ból, amelyekre $p \equiv q(R'_{\underline{A},a_o})$, azaz, $a_o p = a_o q$ és $\overline{\lambda(a_o,p)} = \overline{\lambda(a_o,q)}$. Akkor $\underline{A}$ M-kommutativitását kihasználva, az $a = a_o r$ $(r \in X^+)$ állapotra kapjuk, hogy

$$ap = a_o rp = a_o pr = a_o qr = a_o rq = aq$$

és

$$\overline{\lambda(a,p)} = \overline{\lambda(a_o r,p)} = \overline{\lambda(a_o,rp)} = \overline{\lambda(a_o,pr)} = \overline{\lambda(a_o p,r)} =$$

$$\overline{\lambda(a_o q,r)} = \overline{\lambda(a_o,qr)} = \overline{\lambda(a_o,rq)} = \overline{\lambda(a_o r,q)} = \overline{\lambda(a,q)} ,$$

ami mutatja, hogy $p \equiv q(R'_{\underline{A},a})$ teljesül. A második állitás bizonyitása végett tekintsük azt a $p_o \in X^+$ szót, amelyre $a_o p_o = a_o$. Ilyen szó létezik, mert $\underline{A}$ erősen ciklikus. A p_o szót tartalmazó $C'_{\underline{A}}[p_o]$ ekvivalencia osztály mod $R'_{\underline{A}}$, $S'(\underline{A})$-nak egységeleme, mert tetszőleges $p \in X^+$ szóra

$$a_o p_o p = a_o p \quad \text{és} \quad \overline{\lambda(a_o,p_o p)} = \overline{\lambda(a_o p_o,p)} = \overline{\lambda(a_o,p)}$$

teljesül és $\underline{A}$ M-kvázi-állapot-független lévén, $R'_{\underline{A},a_o} = R'_{\underline{A}}$, továbbá $S'(\underline{A})$ kommutativ $\underline{A}$ M-kommutativitása miatt. Tegyük fel, hogy az a és a' állapotokra és a $p,q \in X^+$ szavakra $ap = a'q$. Akkor

$$ap_o p = app_o = ap \quad \text{és} \quad a'p_o q = a'qp_o = a'q ,$$

továbbá

$$\overline{\lambda(a,p)} = \overline{\lambda(a,pp_o)} = \overline{\lambda(ap,p_o)} = \overline{\lambda(a'q,p_o)} = \overline{\lambda(a',qp_o)} =$$
$$= \overline{\lambda(a'q)} ,$$

tehát

$$ap = a'q \Rightarrow \overline{\lambda(a,p)} = \overline{\lambda(a',q)} .$$

Ez mutatja, hogy $\underline{A}$ Moore-automata. □

Megjegyzés: [27]-ben Peák István bizonyitotta, hogy erősen ciklikus M-kvázi-állapot-független Mealy-automata karakterisztikus félcsoportjában van baloldali egységelem. Másrészt, Dang Huu Dao [8] dolgozatából ismert, hogy ha egy $\underline{A}$ Mealy-automata $S'(\underline{A})$ karakterisztikus félcsoportja tartalmaz jobboldali egységelemet, akkor $\underline{A}$ Moore-automata. Ezeket az eredményeket kihasználva a fenti tétel bizonyitásának második fele azonnal adódik.

3.2.§ Mealy-automaták endomorfizmus-félcsoportjai és automorfizmus-csoportjai

Az alábbi vizsgálatokban fel fogjuk tételezni, hogy a tekintett Mealy-automatáknak nincs valódi Y-részautomatájuk, azaz

$$(\forall\ y \in Y)(\exists\ a \in A)(\exists\ x \in X) : \lambda(a,x) = y .$$

3.2.1 TÉTEL [32]. Legyen $\underline{A} = (A,X,Y,\delta,\lambda)$ tetszőleges Mealy-automata. Akkor $E'(\underline{A})$ izomorfan beágyazható $\underline{A}$ vetületének $E_g(\underline{A}^*)$ általánositott endomorfizmus-félcsoportjába.

$E_A(\underline{A})$, $E_{AX}(\underline{A})$ és $E_{AY}(\underline{A})$ normális részmonoidjai $E'(\underline{A})$-nak. $E_A(\underline{A})$ normális részmonoid $E_{AX}(\underline{A})$-ban és $E_{AY}(\underline{A})$-ban is. A megfelelő állitások érvényesek az automorfizmus-csoportok esetében is.

Bizonyitás: $E'(\underline{A})$ definiciójából következik, hogy ha (f,g,h) egy endomorfizmusa $\underline{A}$-nak, akkor (f,g) általánositott endomorfizmusa $\underline{A}^*$-nak és hasonlóan, $G'(\underline{A})$ definiciója szerint érvényes az $(f,g,h) \in G'(\underline{A}) \Rightarrow (f,g) \in G_g(\underline{A}^*)$ implikáció. A többi állitás bizonyitása céljából definiáljuk a következő kongruencia relációkat $E'(\underline{A})$-n:

$$(f,g,h) \equiv (f',g',h')(\Theta_A) \iff g = g' \text{ és } h = h',$$
$$(f,g,h) \equiv (f',g',h')(\Theta_{AX}) \iff h = h',$$
$$(f,g,h) \equiv (f',g',h')(\Theta_{AY}) \iff g = g' .$$

Az $E'(\underline{A})/\Theta_A$ faktor monoidban $E_A(\underline{A})$ az egységelem osztály, igy $E_A(\underline{A})$ normális részmonoid $E'(\underline{A})$-ban. Hasonlóan, $E'(\underline{A})/\Theta_{AX}$-ben $E_{AX}(\underline{A})$ és $E'(\underline{A})/\Theta_{AY}$-ban $E_{AY}(\underline{A})$ az egységelem, azaz mind $E_{AX}(\underline{A})$ mind $E_{AY}(\underline{A})$ normális részmonoidja $E'(\underline{A})$-nak. Mivel a Θ_A reláció $E_{AX}(\underline{A})$-ra illetve $E_{AY}(\underline{A})$--ra való leszükitései ugyancsak kongruencia relációk, jelölje ezeket Θ'_A és Θ''_A, továbbá $E_{AX}(\underline{A})/\Theta'_A$-ben és $E_{AY}(\underline{A})/\Theta''_A$-ben is $E_A(\underline{A})$ az egységelem, kapjuk, hogy $E_A(\underline{A})$ mind $E_{AX}(\underline{A})$-nak mind $E_{AY}(\underline{A})$-nak normális részmonoidja. Az automorfizmus--csoportok esetei hasonlóan kezelhetők. □

Megjegyzés: Könnyü belátni, hogy $E'(\underline{A})$-nak $E_g(\underline{A}^*)$-ba való izomorf beágyazásakor $E_{AY}(\underline{A})$ az $E(\underline{A}^*)$-ba képződik le

és természetesen $G_{AY}(\underline{A})$ képe $G(\underline{A}^*)$ részcsoportja.

3.2.1 DEFINICIÓ. Az $\underline{A} = (A,X,Y,\delta,\lambda)$ Mealy-automata két a és a' állapotát <u>ekvivalensnek</u> nevezzük, jelben: $a \equiv_{\underline{A}} a'$, ha

$$\forall\, p \in X^* : \lambda(a,p) = \lambda(a',p)$$

teljesül. Azt mondjuk, hogy $\underline{A}$ <u>redukált</u> automata, ha az

$$a \equiv_{\underline{A}} a' \Rightarrow a = a'$$

implikáció minden $a,a' \in A$ esetén érvényes.

3.2.2 TÉTEL [32]. <u>Ha</u> $\underline{A} = (A,X,Y,\delta,\lambda)$ <u>redukált automata, akkor</u> $E_A(\underline{A}) = G_A(\underline{A})$ <u>az egyelemü csoport</u>.

Bizonyitás: Megmutatjuk, hogy minden $a(\in A)$-ra és $(f,\varepsilon_X,\varepsilon_Y)(\in E_A(\underline{A}))$-ra,

$$a \equiv_{\underline{A}} f(a)$$

teljesül. Vegyünk egy tetszőleges $p = x_1x_2\ldots x_n$ szót X^*-ból. Legyen

$$\delta(a,x_1x_2\ldots x_n) = a_1a_2\ldots a_n ,$$

ahol $a \in A$ egy tetszőlegesen választott állapota $\underline{A}$-nak és

$$a_1 = \delta(a,x_1),\quad a_2 = \delta(a_1,x_2),\quad \ldots,\quad a_n = \delta(a_{n-1},x_n).$$

Akkor

$$f(a_1) = \delta(f(a),x_1),\ f(a_2) = \delta(f(a_1),x_2),\ldots,f(a_n) = \\ = \delta(f(a_{n-1}),x_n),$$

azaz

$$\delta(f(a),x_1x_2\ldots x_n) = f(a_1)f(a_2)\ldots f(a_n) .$$

Ebből következik, hogy

$$\lambda(a,p) = \lambda(a,x_1)\lambda(a_1,x_2)\ldots\lambda(a_{n-1},x_n) =$$

$$= \lambda(f(a),x_1)\lambda(f(a_1),x_2)\ldots\lambda(f(a_{n-1}),x_n) = \lambda(f(a),p),$$

igazolva ezzel, hogy $a \equiv_{\underline{A}} f(a)$ teljesül. Tekintve, hogy a egy tetszőleges állapota $\underline{A}$-nak és $\underline{A}$ redukált automata, kapjuk, hogy $f = \varepsilon_A$ és igy $E_A(\underline{A}) = G_A(\underline{A})$ az egységcsoport. □

Az $E'(\underline{A})$ értelmezéséből azonnal következik, hogy ha $f : A \to A$ és $g : X \to X$ olyan leképezés-pár, hogy $(f,g) \in E_g(\underline{A}^*)$, akkor legfeljebb egy olyan $h : Y \to Y$ leképezés létezik, amelyre $(f,g,h) \in E'(\underline{A})$ teljesül. Hasonlóan, tetszőleges $f : A \to A$ állapot-transzformációhoz legfeljebb egy olyan $h : Y \to Y$ transzformáció létezik, amelyre $(f,\varepsilon_X,h) \in E_{AY}(\underline{A})$ fennáll. Bevezetve a

$$Pr_1(E_{AY}(\underline{A})) = \langle f : A \to A \mid (f,\varepsilon_X,h) \in E_{AY}(\underline{A})\rangle,$$

$$Pr_3(E_{AY}(\underline{A})) = \langle h : Y \to Y \mid (f,\varepsilon_X,h) \in E_{AY}(\underline{A})\rangle$$

projekciókat, a fentiek alapján könnyen igazolható, hogy a $Pr_1(E_{AY}(\underline{A}))$ transzformáció-félcsoport az A halmaz felett, a $Pr_3(E_{AY}(\underline{A}))$ transzformáció-félcsoport az Y halmaz felett és absztrakt félcsoportoknak tekintve őket $Pr_3(E_{AY}(\underline{A}))$ homomorf képe $Pr_1(E_{AY}(\underline{A}))$-nak. Ugyanilyen értelemben használva a $Pr_1(G_{AY}(\underline{A}))$ és a $Pr_3(G_{AY}(\underline{A}))$ jelöléseket, $Pr_3(G_{AY}(\underline{A}))$ mint absztrakt csoport homomorf képe az ugyancsak

absztrakt csoportnak tekintett $Pr_1(G_{AY}(\underline{A}))$-nak.

3.2.3 TÉTEL. <u>Ha az</u> $\underline{A} = (A,X,Y,\delta,\lambda)$ <u>Mealy-automata redukált, akkor</u> $Pr_1(E_{AY}(\underline{A})) \approx Pr_3(E_{AY}(\underline{A}))$ <u>és</u> $Pr_1(G_{AY}(\underline{A})) \approx$ $\approx Pr_3(G_{AY}(\underline{A}))$.

Bizonyitás: Nyilván elegendő az első összefüggést igazolnunk $G_{AY}(\underline{A}) \subseteq E_{AY}(\underline{A})$ miatt. Tételezzük fel, hogy az első összefüggés nem érvényes, azaz, létezik két (f_1,ε_X,h) és (f_2,ε_X,h) AY-endomorfizmusa $\underline{A}$-nak, ahol $f_1 \neq f_2$ és igy létezik $a \in A$, amelyre $f_1(a) \neq f_2(a)$. Legyen $p = x_1x_2\ldots x_n$ tetszőleges szó X^+-ból. Akkor érvényesek az alábbi egyenlőségek:

$$\lambda(f_1(a),x_1) = h(\lambda(a,x_1)) = \lambda(f_2(a),x_1),$$

$$\lambda(f_1(a)x_1,x_2) = \lambda(f_1(ax_1),x_2) = h(\lambda(ax_1,x_2)) = \lambda(f_2(ax_1),x_2) =$$
$$= \lambda(f_2(a)x_1,x_2) ,$$
$$\vdots$$
$$\lambda(f_1(a)x_1\ldots x_{n-1},x_n) = \lambda(f_1(ax_1\ldots x_{n-1}),x_n) = h(\lambda(ax_1\ldots x_{n-1},x_n))$$
$$= \lambda(f_2(ax_1\ldots x_{n-1}),x_n) = \lambda(f_2(a)x_1\ldots x_{n-1},x_n) ,$$

amiből azt kapjuk, hogy

$$\lambda(f_1(a),p) = \lambda(f_2(a),p) .$$

Mivel $p \in X^+$ tetszőleges szó volt, ebből következik, hogy

$$f_1(a) \equiv_{\underline{A}} f_2(a) ,$$

ami ellentmond $\underline{A}$ redukáltságának. □

<u>Megjegyzés:</u> Nem nehéz megmutatni, hogy a 3.2.2 tétel

következik a 3.2.3 tétel első állitásából, ugyanakkor, ha $E_A(\underline{A}) = G_A(\underline{A})$ az egyelemü csoport, akkor $Pr_1(G_{AY}(\underline{A})) \approx$ $\approx Pr_3(G_{AY}(\underline{A}))$ teljesül.

Ha automatához félcsoport- vagy csoportjellemzőt rendelünk, automatikusan vetődik fel az a kérdés, hogy melyek azok a félcsoportok illetve csoportok, amelyek izomorfak valamely automata adott tipusu félcsoport-illetve csoportjellemzőjével. A következő tétel Mealy-automaták endomorfizmus-félcsoportjaira és automorfizmus-csoportjaira vonatkozólag ilyen jellemzést ad.

3.2.4 TÉTEL [32]. Legyen E tetszőleges egységelemes félcsoport. Akkor léteznek olyan $\underline{A}$ és $\underline{B}$ Mealy-automaták, amelyekre $E \approx E_A(\underline{A})$ és $E \approx E_{AY}(B)$ teljesül. Ha G tetszőleges csoport, akkor léteznek olyan $\underline{C}$ és $\underline{D}$ Mealy-automaták, amelyekre $G \approx G_A(\underline{C})$ és $G \approx G_{AY}(\underline{D})$ áll fenn. Végül, ha G' tetszőleges véges vagy megszámlálható rendü csoport, akkor léteznek olyan $\underline{E}$ és $\underline{F}$ Mealy-automaták, melyekre $G' \approx G_{AX}(\underline{E})$ és $G' \approx G'(\underline{F})$ érvényes.

Bizonyitás: Egy tetszőleges $\underline{A} = (A,X,Y,\delta,\lambda)$ Mealy-automatára, a 3.2.1 tétel szerint, igaz, hogy $E'(\underline{A})$ izomorfan beágyazható $E_g(\underline{A}^*)$-ba és $G'(\underline{A})$ izomorfan beágyazható $G_g(\underline{A}^*)$-ba. Ha $\underline{A}$-nak $\lambda : A \times X \to Y$ kimenet-függvénye egy-egyértelmü ráképezés,vagy ha $\underline{A}$-nak csak egy kimenő jele van, akkor nyilván $E'(\underline{A}) \approx E_g(\underline{A}^*)$ és $G'(\underline{A}) \approx G_g(\underline{A}^*)$ teljesül. Könnyen belátható az is, hogy ha az $\underline{A}$ kimenet-függvénye

József Attila Tudományegyetem Könyvtár SZEGED

bijektiv, akkor $E_{AY}(\underline{A}) \approx E(\underline{A}^{*})$ és $G_{AY}(\underline{A}) \approx G(\underline{A}^{*})$ mig, ha $\underline{A}$-nak csak egy kimenő jele van, akkor $E_A(\underline{A}) \approx E(\underline{A}^{*})$ és $G_A(\underline{A}) \approx G(\underline{A}^{*})$ teljesülnek. Ennélfogva, a tétel állításai következnek az értekezésben igazolt 2.3.5 tételből és abból a már emlitett tényből, hogy minden monoid illetve csoport izomorf valamely kimenő jel nélküli automata endomorfizmus-félcsoportjával illetve automorfizmus-csoportjával. □

Meg kell jegyeznünk, hogy [28]-ban konstruktiv bizonyitás található annak igazolására, hogy tetszőleges egységelemes félcsoport izomorf valamely Mealy-automata A-endomorfizmus-félcsoportjával.

Jól ismert tény, hogy ha az $\underline{A} = (A,X,\delta)$ kimenő jel nélküli automata karakterisztikus félcsoportját reprezentáljuk Ω_A-ban az $S_{\underline{A}}$ transzformáció félcsoporttal, akkor az $E(\underline{A})$ endomorfizmus-félcsoport éppen $S_{\underline{A}}$ centralizátora Ω_A-ban. Azt is láttuk a II. fejezet 3. paragrafusában, hogy ha $\underline{A}$ redukált bemenetü automata, akkor $E(\underline{A})$, $G(\underline{A})$ és $G_g(\underline{A})$ izomorf az $M_{\underline{A}}(\subseteq \Omega_A)$ transzformáció halmaz Ω_A-ban vett centralizátorával, p-centralizátorával és p-normalizátorával. Most hasonló állitásokat igazolunk Mealy-automaták esetére.

3.2.5 TÉTEL. <u>Legyen</u> $\underline{A} = (A,X,Y,\delta,\lambda)$ <u>tetszőleges Mealy-automata és legyen</u> $\underline{A}' = (Y \times A,X,\delta')$ <u>kimenő jel nélküli ekvivalense</u> $\underline{A}$-<u>nak</u>. <u>Akkor</u> $E'(\underline{A})$ <u>izomorfan beágyazható</u>

$E_g(\underline{A}')$-be és ezen izomorf leképezés $E_{AY}(\underline{A})$-t $E(A')$-be viszi.

Bizonyitás: Legyen (f,g,h) tetszőleges endomorfizmusa $\underline{A}$-nak. Rendeljük (f,g,h)-hoz az $F : Y \times A \to Y \times A$, $g : X \to X$ leképezésekből álló (F,g) párt, ahol

$$\forall (y,a) \in Y \times A : \quad F((y,a)) := (h(y),f(a)).$$

Akkor minden $(y,a) \in Y \times A$ és $x \in X$ esetén

$$F(\delta'((y,a),x)) = F(\lambda(a,x),\delta(a,x)) = (h(\lambda(a,x)),f(\delta(a,x))) =$$

$$= (\lambda(f(a),g(x)),\delta(f(a),g(x))) = \delta'((h(y),f(a)),g(x)) =$$

$$= \delta'(F((y,a)),g(x))$$

teljesül, mutatva, hogy (F,g) általánositott endomorfizmusa $\underline{A}'$-nek. A hozzárendelés megadásából rögtön következik, hogy az

$$(f,g,h) \to (F,g)$$

leképezés izomorfizmus és ha $g = \varepsilon_X$, akkor $(F,g) \in E(\underline{A}')$. □

Megfogalmazzuk a fenti tétel egy következményét.

3.2.6 KÖVETKEZMÉNY [32]. $\underline{A} = (A,X,Y,\delta,\lambda)$ tetszőleges Mealy-automata. Akkor létezik $S'(\underline{A})$-nak egy φ anti-izomorfizmusa és $E_{AY}(\underline{A})$-nak egy ψ izomorfizmusa $\Omega_{Y \times A}$-ba, ugy, hogy $\psi(E_{AY}(\underline{A}))$ részmonoidja $\varphi(S'(\underline{A}))$ $\Omega_{Y \times A}$-ra vonatkozó centralizátorának.

Bizonyitás: Mint azt Dang Huu Dao [6]-ban megmutatta, $S'(\underline{A}) = S(\underline{A}')$, ahol $\underline{A}' = (Y \times A,X,\delta')$ az $\underline{A}$ kimenő jel

nélküli ekvivalense. Másrészt, $S_{\underline{A}'}$ ($\subseteq \Omega_{Y \times A}$) anti-izomorf képe $S(\underline{A}')$-nek. Ez biztositja φ létezését. Ugyanakkor a 3.2.5 tétel szerint a

$$\psi : (f,\varepsilon_X,h) \to F$$

leképezés, ahol $F : Y \times A \to Y \times A$ az $F((y,a)) = (h(y),f(a))$ $((y,a) \in Y \times A)$ összefüggéssel van megadva, izomorfizmus és $(F,\varepsilon_X) \in E(\underline{A}')$. □

Az $\underline{A} = (A,X,Y,\delta,\lambda)$ Mealy-automata minden $x \in X$ bemenő jeléhez rendeljük hozzá azt az $m'_x : Y \times A \to Y \times A$ leképezést, amelyre

$$\forall (y,a) \in Y \times A: m'_x((y,a)) = (\lambda(a,x),\delta(a,x))$$

teljesül és legyen $M'_{\underline{A}} = \langle m'_x \mid x \in X \rangle$. Az $\underline{A}$ Mealy-automatát <u>redukált bemenetü</u> automatának mondjuk, ha minden $x,\bar{x} \in X$ esetén

$$m'_x = m'_{\bar{x}} \Rightarrow x = \bar{x}$$

érvényes. A fenti 3.2.6 következmény redukált bemenetü Mealy-automaták esetén a következőképpen bővithető ki:

3.2.7 KÖVETKEZMÉNY. <u>Ha</u> $\underline{A} = (A,X,Y,\delta,\lambda)$ <u>redukált bemenetü Mealy-automata, akkor</u> $E_{AY}(\underline{A})$ <u>izomorf</u> $C(M'_{\underline{A}})$ <u>egy részmonoidjával,</u> $G_{AY}(\underline{A})$ <u>izomorf</u> $C_p(M'_{\underline{A}})$ <u>egy részcsoportjával és</u> $G'(\underline{A})$ <u>izomorf</u> $N_p(M'_{\underline{A}})$ <u>egy részcsoportjával</u>.

Bizonyitás: Mivel az $M'_{\underline{A}}$ transzformáció halmaz generálja az $S_{\underline{A}'}$ félcsoportot és $C(M'_{\underline{A}}) = C([M'_{\underline{A}}])$ valamint $C_p(M'_{\underline{A}}) = C_p([M'_{\underline{A}}])$, ezért csak az utolsó állitás szorul igazolásra. Az viszont a 2.3.3 lemma figyelembevételével következik a 3.2.5 tételből, hiszen $E'(\underline{A})$-nak $E_g(\underline{A}')$-be való izomorf beágyazásakor $G'(\underline{A})$ a $G_g(\underline{A}')$-be képeződik. A 2.3.3 lemma alkalmazhatóságát biztositja, hogy ha $\underline{A}$ redukált bemenetü Mealy-automata, akkor $\underline{A}'$, kimenő jel nélküli ekvivalens is redukált bemenetü. □

3.3.§ Erősen ciklikus Mealy-automaták AY-endomorfizmus-félcsoportjainak egy jellemzése

Ebben a paragrafusban végig feltesszük, hogy a tekintett Mealy-automaták végesek.

Emlékeztetünk arra, hogy az 1.3.7 definicióval összhangban az $\underline{A} = (A,X,Y,\delta,\lambda)$ Mealy-automata pontosan akkor erősen ciklikus, ha $\underline{A}^* = (A,X,\delta)$, vetülete erősen ciklikus. Jól ismert eredmény, hogy $E(\underline{A}^*)$ izomorf az $N_{p_o}(R_{\underline{A},a_o})/R_{\underline{A},a_o}$ faktor-félcsoporttal, ahol $p_o(\in X^+)$-ra

$$a_o p_o = a_o$$

érvényes (1.2.5 tétel). A következő részben erősen ciklikus Mealy-automaták AY-endomorfizmus-félcsoportját reprezentáljuk hasonló módon.

Bevezetjük a $\rho_{\underline{A},a_o}$ relációt az X^+ szabad félcsoporton. Legyen

$$\forall p,q \in X^+: \quad p \equiv q(\rho_{\underline{A},a_o}) \iff \overline{\lambda(a_o,p)} = \overline{\lambda(a_o,q)} .$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy $\rho_{\underline{A},a_o}$ ekvivalencia reláció X^+-on. Tekintsük X^+ következő részhalmazát: legyen

$$L(\rho_{\underline{A},a_o}) = \langle q \in X^+ \mid \forall\, r,s \in X^+: r \equiv s(\rho_{\underline{A},a_o}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow qr \equiv qs(\rho_{\underline{A},a_o})\rangle .$$

Az $L(\rho_{\underline{A},a_o})$ részhalmazra igazak az alábbi lemmák.

3.3.1 LEMMA [32]. $L(\rho_{\underline{A},a_o})$ <u>részfélcsoportja az</u> X^+ <u>szabad félcsoportnak, a</u> $\rho_{\underline{A},a_o}$ <u>reláció</u> $L(\rho_{\underline{A},a_o})$-<u>ra való leszükitése bal-kongruencia és</u> $L(\rho_{\underline{A},a_o})$ $R_{\underline{A},a_o}$ -<u>szerinti ekvivalencia osztályok egyesitése</u>.

Bizonyitás: $L(\rho_{\underline{A},a_o})$ nem üres, hiszen p_o eleget tesz az $L(\rho_{\underline{A},a_o})$ definiciójában szereplő követelménynek. Tekintsük most a tetszőleges $p,q \in L(\rho_{\underline{A},a_o})$ elemeket. Akkor minden r,s $(\in X^+)$-ra:

$$r \equiv s(\rho_{\underline{A},a_o}) \Rightarrow qr \equiv qs(\rho_{\underline{A},a_o}) \Rightarrow pqr \equiv pqs(\rho_{\underline{A},a_o}),$$

azaz $pq \in L(\rho_{\underline{A},a_o})$. $L(\rho_{\underline{A},a_o})$ definiciójából közvetlenül adódik, hogy a $\rho_{\underline{A},a_o}$ reláció $L(\rho_{\underline{A},a_o})$-ra való leszükitése bal-kongruencia. Legyen most $p \in L(\rho_{\underline{A},a_o})$ és tegyük fel, hogy $p \equiv q(R_{\underline{A},a_o})$ teljesül a $q \in X^+$ szóra. Akkor minden $r,s \in X^+$ esetén

$$r \equiv s(\rho_{\underline{A},a_o}) \Rightarrow pr \equiv ps(\rho_{\underline{A}a_o}) .$$

Ugyanakkor, a $p \equiv q(R_{\underline{A},a_o})$, azaz az $a_op = a_oq$ összefüggést kihasználva azt kapjuk, hogy

$$a_opr = a_oqr \quad \text{és} \quad \overline{\lambda(a_o,pr)} = \overline{\lambda(a_op,r)} = \overline{\lambda(a_oq,r)} = \overline{\lambda(a_o,qr)}$$

valamint

$$a_ops = a_oqs \quad \text{és} \quad \overline{\lambda(a_o,ps)} = \overline{\lambda(a_op,s)} = \overline{\lambda(a_oq,s)} = \overline{\lambda(a_o,qs)}$$

teljesülnek, azaz

$$pr \equiv qr(R_{\underline{A},a_o} \cap \rho_{\underline{A},a_o}) \quad \text{és} \quad ps \equiv qs(R_{\underline{A},a_o} \cap \rho_{\underline{A},a_o})$$

is fennállnak. Kihasználva, hogy $\rho_{\underline{A},a_o}$ tranzitiv, kapjuk, hogy

$$qr \equiv qs(\rho_{\underline{A},a_o}),$$

tehát $q \in L(\rho_{\underline{A},a_o})$. □

3.3.2 LEMMA [32]. $N(R_{\underline{A},a_o}) \cap L(\rho_{\underline{A},a_o})$ <u>részfélcsoportja</u> $N(R_{\underline{A},a_o})$-<u>nak és</u> $R_{\underline{A},a_o}$-<u>szerinti ekvivalencia osztályok egyesitése</u>. $N_{p_o}(R_{\underline{A},a_o}) \cap L(\rho_{\underline{A},a_o})$ <u>bal-ideálja</u> $N(R_{\underline{A},a_o}) \cap L(\rho_{\underline{A},a_o})$-<u>nak és ugyancsak</u> $R_{\underline{A},a_o}$-<u>szerinti ekvivalencia osztályok uniója</u>.

Bizonyitás: Mivel az $R_{\underline{A},a_o}$ moduláris jobb-kongruencia $N(R_{\underline{A},a_o})$ normalizátora is tartalmazza a p_o szót, ezért $N(R_{\underline{A},a_o}) \cap L(\rho_{\underline{A},a_o})$ nem üres. Másrészt $N(R_{\underline{A},a_o})$ is és $L(\rho_{\underline{A},a_o})$ is részfélcsoport X^+-ban és mindkét

részfélcsoport $R_{\underline{A},a_o}$-szerinti ekvivalencia osztályok egyesitése. Ebből következik az első állitás. $N_{p_o}(R_{\underline{A},a_o})$ bal-ideálja $N(R_{\underline{A},a_o})$-nak és $R_{\underline{A},a_o}$-szerinti osztályok egyesitése, továbbá $p_o \in N_{p_o}(R_{\underline{A}a_o})$. Igy $N_{p_o}(R_{\underline{A},a_o}) \cap L(\rho_{\underline{A},a_o})$ bal-ideál az $N(R_{\underline{A},a_o}) \cap L(\rho_{\underline{A},a_o})$ félcsoportban és $R_{\underline{A},a_o}$ bizonyos osztályaiból áll. □

A fenti két lemma felhasználásával igazoljuk a következő tételt.

3.3.3 TÉTEL [32]. <u>Ha</u> $\underline{A} = (A,X,Y,\delta,\lambda)$ <u>erősen ciklikus Mealy-automata, akkor</u> $E_{AY}(\underline{A})$ <u>izomorf az</u> $(N_{p_o}(R_{\underline{A},a_o}) \cap L(\rho_{\underline{A},a_o}))/R_{\underline{A},a_o}$ <u>faktor-félcsoporttal.</u>

Bizonyitás: Tekintsük $(N_{p_o}(R_{\underline{A},a_o}) \cap L(\rho_{\underline{A},a_o}))/R_{\underline{A},a_o}$ egy tetszőleges $[p]$ elemét és legyen

$$\varphi : [p] \to (f_p, \varepsilon_X, h_p) \quad (f_p : A \to A,\ h_p : Y \to Y)$$

az a hozzárendelés, amelyre

$$f_p(a) = a_o pq \qquad (a = a_o q \in A,\ q \in X^+)$$

és

$$h_p(y) = \overline{\lambda(a_o, ps)} \qquad (y = \overline{\lambda(a_o, s)} \in Y,\ s \in X^+) .$$

Először azt mutatjuk meg, hogy az f_p és h_p leképezések jól definiáltak és φ jól meghatározott hozzárendelés. Ha a $(\in A)$-ra, $a = a_o q = a_o r$ $(q,r \in X^+)$, ugy $q \equiv r(R_{\underline{A},a_o})$.

De akkor $pq \equiv pr(R_{\underline{A},a_o})$ is teljesül, mert $p \in N(R_{\underline{A},a_o})$, azaz $a_o pq = a_o pr$. Ez pontosan azt jelenti, hogy

$$f_p(a_o q) = f_p(a_o r).$$

Ha $y(\in Y)$-ra, $y = \overline{\lambda(a_o,s)} = \overline{\lambda(a_o,t)}$ $(s,t \in X^+)$, akkor $s \equiv t(\rho_{\underline{A},a_o})$, amiből $p \in L(\rho_{\underline{A},a_o})$ miatt $ps \equiv pt(\rho_{\underline{A},a_o})$, azaz $\overline{\lambda(a_o,ps)} = \overline{\lambda(a_o,pt)}$ következik. Ezért kapjuk, hogy

$$h_p(\overline{\lambda(a_o,s)}) = h_p(\overline{\lambda(a_o,t)})$$

teljesül. Másrészt, ha $[p] = [p']$, tehát $p \equiv p'(R_{\underline{A},a_o})$ $(p,p' \in N(R_{\underline{A},a_o}))$, akkor tetszőleges $a = a_o q \in A$ esetén

$$f_p(a) = f_p(a_o q) = a_o pq = a_o p'q = f_{p'}(a_o q) = f_{p'}(a)$$

és tetszőleges $y = \overline{\lambda(a_o,s)} \in Y$ kimenő jelre

$$h_p(\overline{\lambda(a_o,s)}) = \overline{\lambda(a_o,ps)} = \overline{\lambda(a_o p,s)} = \overline{\lambda(a_o p',s)} =$$

$$= \overline{\lambda(a_o,p's)} = h_{p'}(\overline{\lambda(a_o,s)}) .$$

Most megmutatjuk, hogy $(f_p,\varepsilon_X,h_p) \in E_{AY}(\underline{A})$. Valóban, tetszőleges $a = a_o q \in A$ és $x \in X$ párra

$$f_p(\delta(a,x)) = f_p(\delta(a_o q,x)) = f_p(a_o qx) = a_o pqx =$$

$$= \delta(a_o pq,x) = \delta(f_p(a_o q),s) = \delta(f_p(a),x)$$

és

$$h_p(\lambda(a,x) = h_p(\lambda(a_o q,x)) = h_p(\overline{\lambda(a_o,qx)}) = \overline{\lambda(a_o,pqx)} =$$

$$= \lambda(a_o pq,x) = \lambda(f_p(a_o q),x) = \lambda(f_p(a),x).$$

Ezzel igazoltuk, hogy φ az $(N_{p_o}(R_{\underline{A},a_o}) \cap L(\rho_{\underline{A},a_o}))/R_{\underline{A},a_o}$ -nak $E_{AY}(\underline{A})$-ba való leképezése. Legyen most (f,ε_X,h)

tetszőleges AY-endomorfizmusa $\underline{A}$-nak és tegyük fel, hogy $f(a_o) = a_o p$ $(p \in X^+)$. Megmutatjuk, hogy $p \in N_{p_o}(R_{\underline{A},a_o}) \cap$ $\cap L(\rho_{\underline{A},a_o})$ és $f = f_p$, $h = h_p$. Valóban, ha $q \equiv r(R_{\underline{A},a_o})$ teljesül a $q, r \in X^+$ szavakra, akkor $a_o q = a_o r$. Ebből következik, hogy

$$a_o pq = (a_o p)q = f(a_o)q = f(a_o q) = f(a_o r) = f(a_o)r =$$
$$= (a_o p)r = a_o pr ,$$

azaz $p \in N(R_{\underline{A},a_o})$. Az $a_o p_o = a_o$ egyenlőség miatt igaz, hogy

$$a_o pp_o = (a_o p)p_o = f(a_o)p_o = f(a_o p_o) = f(a_o) = a_o p,$$

azaz $pp_o \equiv p(R_{\underline{A},a_o})$ és igy $p \in N_{p_o}(R_{\underline{A},a_o})$. Másrészt, tetszőleges $a = a_o q$ $(q \in X^+)$ állapotra érvényes, hogy

$$f(a) = f(a_o q) = f(a_o)q = a_o pq = f_p(a_o)q =$$
$$= f_p(a_o q) = f_p(a),$$

tehát $f = f_p$. Továbbá, ha $s \equiv t(\rho_{\underline{A},a_o})$ teljesül az $s,t \in X^+$ szavakra, akkor $\overline{\lambda(a_o,s)} = \overline{\lambda(a_o,t)}$, tehát

$$\overline{\lambda(a_o,ps)} = \overline{\lambda(a_o p,s)} = \overline{\lambda(f(a_o),s)} = h(\overline{\lambda(a_o,s)}) =$$
$$= h(\overline{\lambda(a_o,t)}) = \overline{\lambda(f(a_o),t)} = \overline{\lambda(a_o p,t)} = \overline{\lambda(a_o,pt)},$$

azaz $p \in L(\rho_{\underline{A},a_o})$. Ezzel megmutattuk, hogy $p \in N_{p_o}(R_{\underline{A},a_o}) \cap$ $\cap L(\rho_{\underline{A},a_o})$. A kapott $f = f_p$ egyenlőség maga után vonja a $h = h_p$ egyenlőséget is, mert a vizsgált, Y-részautomatát nem tartalmazó Mealy-automaták bármely f állapot transzformációjához legfeljebb egy olyan h kimenet transzformáció létezik, amelyre $(f,\varepsilon_X,h) \in E_{AY}(\underline{A})$.

Mint láttuk, ha $p \equiv p'(R_{\underline{A},a_o})$, akkor $f_p = f_{p'}$ és $h_p = h_{p'}$, igy megmutattuk, hogy a φ leképezés $(N_{p_o}(R_{\underline{A},a_o}) \cap \cap L(\rho_{\underline{A},a_o}))/R_{\underline{A},a_o}$ -nak egy-egy-egyértelmü leképezése $E_{AY}(\underline{A})$-ra. Végül, legyen $[p],[q] \in (N_{p_o}(R_{\underline{A},a_o}) \cap L(\rho_{\underline{A},a_o}))/R_{\underline{A},a_o}$ Akkor az $a = a_o r$ állapotra

$$f_p f_q(a) = f_p(f_q(a)) = f_p(a_o qr) = a_o pqr = f_{pq}(a)$$

és $y = \overline{\lambda(a_o,s)}$ $(\in Y)$-ra

$$h_p h_q(y) = h_p h_q(\overline{\lambda(a_o s)}) = h_p(\overline{\lambda(a_o,qs)}) = \overline{\lambda(a_o,pqs)} =$$

$$= \overline{\lambda(a_o pq,s)} = \overline{\lambda(f_{pq}(a_o),s)} = h_{pq}(\overline{\lambda(a_o,s)}) = h_{pq}(y),$$

tehát φ izomorfizmus. $\square$

Hasonló reprezentáció kapható $G_{AY}(\underline{A})$-ra, ha a következő módositásokat hajtjuk végre: vesszük $N(R_{\underline{A},a_o})$ helyett $N'(R_{\underline{A},a_o})$-t, $N_{p_o}(R_{\underline{A},a_o})$ helyett $N'_{p_o}(R_{\underline{A},a_o})$-t és $L'(\rho_{\underline{A},a_o})$-t, ahol $N'(R_{\underline{A},a_o})$ és $N'_{p_o}(R_{\underline{A},a_o})$ az 1.1.4 definicióban megadott félcsoport és annak bal-ideálja, mig

$$L'(\rho_{\underline{A},a_o}) := \langle r \in X^+ \mid \forall\, s,t \in X^+ : s \equiv t(\rho_{\underline{A},a_o})$$

$$rs \equiv rt(\rho_{\underline{A},a_o})\rangle .$$

A bevezetett jelöléseket használva, kapjuk a következő tételt.

3.3.4 TÉTEL [32]. <u>Ha</u> $\underline{A} = (A,X,Y,\delta,\lambda)$ <u>erősen ciklikus Mealy-automata, akkor</u> $G_{AY}(\underline{A})$ <u>izomorf az</u> $(N'_{p_o}(R_{\underline{A},a_o}) \cap \cap L'(\rho_{\underline{A},a_o}))/R_{\underline{A},a_o}$ <u>csoporttal</u>.

Bizonyitás: A részletes bizonyitás helyett, ami a 3.3.3 tétel igazolásához hasonló, csak arra mutatunk rá, hogy $(N'_{p_o}(R_{\underline{A}a_o}) \cap L'(\rho_{\underline{A},a_o}))/R_{\underline{A},a_o}$ valóban csoport. Mint azt az 1.2.5 tétel mutatja, $G(\underline{A}^*)$ izomorf $N'_{p_o}(R_{\underline{A},a_o})/R_{\underline{A},a_o}$-lal, igy csak azt kell megmutatni, hogy ha $(f,\varepsilon_X) \in G(\underline{A}^*)$ olyan automorfizmus, amelyre a

$$h(\overline{\lambda(a_o,s)}) := \overline{\lambda(f(a_o),s)} \qquad (\overline{\lambda(a_o,s)} \in Y)$$

összefüggéssel definiált $h : Y \to Y$ leképezés egy-egyértelmü ráképezés, akkor a

$$h'(\overline{\lambda(a_o,s)}) := \overline{\lambda(f^{-1}(a_o),s)} \qquad (\overline{\lambda(a_o,s)} \in Y)$$

által definiált $h' : Y \to Y$ leképezés is egy-egyértelmü ráképezés. Ez viszont azonnal következik abból, hogy minden $y = \overline{\lambda(a_o,s)} \in Y$ esetén

$$h'h(y) = h'h(\overline{\lambda(a_o,s)}) = h'(\overline{\lambda(f(a_o),s)}) = \overline{\lambda(f^{-1}(f(a_o)),s)} =$$
$$= \overline{\lambda(a_o,s)} = y$$

teljesül. □

Tekintsünk egy $\underline{A} = (A,X,Y,\delta,\lambda)$ Mealy-automatát. Az $\underline{A}$ automata minden $a \in A$ állapotához hozzárendelünk egy $\rho_{\underline{A},a}$ ekvivalencia relációt, amely X^+-on van értelmezve a következőképpen:

$$p \equiv q(\rho_{\underline{A},a_o}) \iff \overline{\lambda(a,p)} = \overline{\lambda(a,q)} .$$

Könnyen belátható, hogy a

$$\rho_{\underline{A}} = \bigcap_{a \in A} \rho_{\underline{A},a}$$

reláció bal-kongruencia X^+-on és az $\underline{A}$ karakterisztikus félcsoportját definiáló $R'_{\underline{A}}$ kongruenciára az

$$R'_{\underline{A}} = R_{\underline{A}} \cap \rho_{\underline{A}}$$

összefüggés érvényes.

A bevezetett jelölésekkel a 3.3.3 és 3.3.4 tételek egy következményét kapjuk:

3.3.5 KÖVETKEZMÉNY [32]. <u>Ha</u> $\underline{A} = (A,X,Y,\delta,\lambda)$ <u>erősen ciklikus Mealy-automata, akkor</u> $E_{AY}(\underline{A}) \approx E(\underline{A}^*)$ <u>teljesülésének szükséges és elegendő feltétele, hogy</u>

$$\forall\, p \in N_{p_o}(R_{\underline{A},a_o}) : \quad \rho_{\underline{A},a_o} \leq \rho_{\underline{A},a_o p}$$

<u>és</u> $G_{AY}(\underline{A}) \approx G(\underline{A}^*)$ <u>akkor és csak akkor áll fenn, ha</u>

$$\forall\, q \in N'_{p_o}(R_{\underline{A},a_o}) : \quad \rho_{\underline{A},a_o} = \rho_{\underline{A},a_o q} \,.$$

3.3.1 DEFINICIÓ [32]. Az $\underline{A} = (A,X,Y,\delta,\lambda)$ Mealy-automatát <u>kimenet-függetlennek</u> nevezzük, ha minden $a,b \in A$ esetén

$$\rho_{\underline{A},a} = \rho_{\underline{A},b} \,.$$

3.3.2 DEFINICIÓ [32]. Az $\underline{A} = (A,X,Y,\delta,\lambda)$ Mealy-automatát az $a \in A$ állapotára nézve <u>kvázi-kimenet-függetlennek</u> nevezzük, ha minden $b(\in A)$-ra

$$\rho_{\underline{A},a} \leq \rho_{\underline{A},b} \,.$$

Ha $\underline{A}$ ciklikus Mealy-automata, akkor $\underline{A}$-t kvázi-kimenet-függetlennek mondjuk, ha van olyan generátor állapota, amelyre nézve kvázi-kimenet-független.

Megjegyzés: Ha az $\underline{A}$ ciklikus Mealy-automata a_o generátor állapotára nézve kvázi-kimenet-független és b_o ugyancsak generátor állapota $\underline{A}$-nak, akkor $\rho_{\underline{A},a_o} = \rho_{\underline{A},b_o}$. Következésképpen, ha egy erősen összefüggő Mealy-automata kvázi-kimenet-független, akkor kimenet-független.

Ha $\underline{A}$ egy erősen ciklikus Mealy-automata, akkor $|E(\underline{A}^*)| \leq |A| \leq |S(\underline{A}^*)|$ mindig teljesül. Másrészt a 3.2.1 tételből következik, hogy $|E_{AY}(\underline{A})| \leq |E(\underline{A}^*)|$ is fennáll. Igy a kimenő jel nélküli automatákra érvényes 1.2.7 tétel felhasználásával kapjuk a következő tételt:

3.3.6 TÉTEL [32]. <u>Legyen</u> $\underline{A} = (A,X,Y,\delta,\lambda)$ <u>erősen ciklikus Mealy-automata. Akkor a következő állitások ekvivalensek:</u>

(i) $E_{AY}(\underline{A})$ <u>izomorf</u> $S(\underline{A}^*)$-<u>gal.</u>

(ii) $|E_{AY}(\underline{A})| = |A|$.

(iii) $(\forall\, a \in A)\ (\exists (f,\varepsilon_X,h) \in E_{AY}(\underline{A})):\ f(a_o) = a$,

<u>ahol</u> a_o <u>egy erős generátor állapota</u> $\underline{A}$-<u>nak</u>.

(iv) $\underline{A}$ <u>kvázi-állapot-független, kvázi-kimenet-független automata és</u> $S(\underline{A}^*)$ <u>egységelemes félcsoport</u>.

Bizonyitás: Mivel minden $\underline{A} = (A,X,Y,\delta,\lambda)$ erősen

ciklikus Mealy-automatára

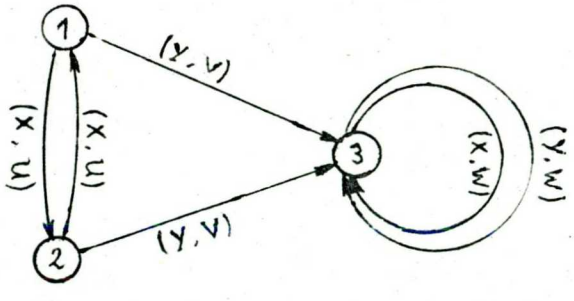
$$|E_{AY}(\underline{A})| \leq |E(\underline{A}^{*})| \leq |A| \leq |S(\underline{A}^{*})|$$

egyenlőtlenségek teljesülnek, ezért az első három állitás ekvivalenciája azonnal következik az 1.2.7 tételből, továbbá ezek bármelyike implikálja, hogy $\underline{A}^{*}$ kvázi-állapot-független és $S(\underline{A}^{*})$ egységelemes félcsoport. Igy (iv)-nek a többi állitással való ekvivalenciája következik abból, hogy minden (f,ε_X,h) AY-endomorfizmusra és tetszőleges $a \in A$ állapotra

$$R_{\underline{A},a} \leq R_{\underline{A},f(a)} \qquad \text{és} \qquad \rho_{\underline{A},a} \leq \rho_{\underline{A},f(a)}$$

teljesül, másrészt egy erősen ciklikus kvázi-állapot-független és kvázi-kimenet-független $\underline{A}$ Mealy-automatára $E_{AY}(\underline{A}) \approx$ $\approx E(\underline{A}^{*})$, ebből pedig ujra kihasználva az 1.2.7 tételt kapjuk, hogy (iii) és (iv) ekvivalensek. □

1. Példa: A kvázi-kimenet-függetlenséget illusztrálandó, tekintsük az $\underline{A} = (\langle 1,2,3\rangle, \langle x,y\rangle, \langle u,v,w\rangle, \delta, \lambda)$ automatát, melynek müködését gráfjával adjuk meg:



Könnyen ellenőrizhető, hogy

$$E_{AY}(\underline{A}) = \langle(\varepsilon_A,\varepsilon_X,\varepsilon_Y),(f_1,\varepsilon_X,\varepsilon_Y),(f_2,\varepsilon_X,h)\rangle,$$

ahol

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \text{ és } h = \begin{pmatrix} u & v & w \\ w & w & w \end{pmatrix}.$$

Az automata kimeneti viselkedését szemléltethetjük a $\lambda_p : A \to Y$ $(p \in X^+)$ függvényekkel, melyek a $\lambda_p(a) = \overline{\lambda(a,p)}$ $(a \in A)$ összefüggéssel vannak megadva.

Ezek:

$$\lambda_{x^k} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ u & u & w \end{pmatrix} \quad (k \geq 1), \quad \lambda_{x^\ell y} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ v & v & w \end{pmatrix} \quad (\ell \geq 0),$$

$$\lambda_{y^2 p} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ w & w & w \end{pmatrix} \quad (p \in X^*).$$

Látható, hogy $\rho_{\underline{A},1} = \rho_{\underline{A},2} < \rho_{\underline{A},3}$, azaz $\underline{A}$ kvázi-kimenet-független mind az 1 mind a 2 állapotára nézve.

3.3.7 TÉTEL [32]. <u>Legyen</u> $\underline{A} = (A,X,Y,\delta,\lambda)$ <u>ciklikus Mealy-automata</u>. <u>Akkor a következő állitások ekvivalensek</u>:

(i) $G_{AY}(\underline{A})$ <u>izomorf</u> $S(\underline{A}^*)$-<u>gal</u>.

(ii) $|G_{AY}(\underline{A})| = |A|$.

(iii) $(\forall\, a,a' \in A)(\exists (f,\varepsilon_X,h) \in G_{AY}(\underline{A})) : f(a) = a'$.

(iv) $\underline{A}$ <u>kvázi-perfekt kimenet-független automata</u>.

Bizonyitás: A részletes bizonyitás helyett, ami az 1.2.8 tétel felhasználásával könnyen kapható, csak arra

kell rámutatnunk, hogy (iii)-ból következik, hogy $\underline{A}$ kimenet-független, mert minden (f,ε_X,h) $(\in G_{AY}(\underline{A}))$-ra és tetszőleges $a \in A$ állapotra

$$R_{\underline{A},a} = R_{\underline{A},f(a)} \quad \text{és} \quad \rho_{\underline{A},a} = \rho_{\underline{A},f(a)} .$$

Másrészt, a kimenet-függetlenség miatt $G_{AY}(\underline{A}) \approx G(\underline{A}^*)$ érvényes, ami biztositja az 1.2.8 tétel felhasználhatóságát. □

<u>2. Példa:</u> Kimenet-független perfekt Mealy-automatára mutatunk egy egyszerü példát. Legyen $\underline{A} = (\langle 1,2,3\rangle, \langle x,y\rangle, \langle u,v,w\rangle, \delta, \lambda)$ az alábbi átmenet-kimenet táblázattal adott Mealy-automata:

$\underline{A}$	1	2	3
x	(2,u)	(3,v)	(1,w)
y	(3,w)	(1,u)	(2,v)

Könnyen ellenőrizhető, hogy

$$G_{AY}(\underline{A}) = \langle(\varepsilon_A,\varepsilon_X,\varepsilon_Y),(f_1,\varepsilon_X,h_1),(f_2,\varepsilon_X,h_2)\rangle,$$

ahol

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad h_1 = \begin{pmatrix} u & v & w \\ v & w & u \end{pmatrix} \text{ és}$$

$$h_2 = \begin{pmatrix} u & v & w \\ w & u & v \end{pmatrix} .$$

Az is látható, hogy $\underline{A}$ kimenet-független, mert tetszőleges $p \in X^+$ szóra a $\lambda_p : A \to Y$ leképezés az alábbiak valamelyike;

$$\lambda_x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ u & v & w \end{pmatrix}, \quad \lambda_{x^2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ v & w & u \end{pmatrix}, \quad \lambda_{x^3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ w & u & v \end{pmatrix},$$

ami mutatja, hogy $\rho_{\underline{A},1} = \rho_{\underline{A},2} = \rho_{\underline{A},3}$ $(=\rho_{\underline{A}})$.

3.3.8 TÉTEL [32]. <u>Ha $\underline{A}$ ciklikus kvázi-állapot-független és kvázi-kimenet-független Mealy-automata, akkor</u> M-<u>kvázi-állapot-független</u>. <u>Ha $\underline{A}$ állapot-független és kimenet-független Mealy-automata, akkor</u> M-<u>állapot-független</u>.

Bizonyitás: Az első állitás bizonyitása végett tegyük fel, hogy a_o generátor állapota $\underline{A}$-nak. Akkor minden $a(\in A)$-ra

$$R_{\underline{A},a_o} \leq R_{\underline{A},a} \quad \text{és} \quad \rho_{\underline{A},a_o} \leq \rho_{\underline{A},a} .$$

Vegyünk két tetszőleges $p,q \in X^+$ szót, melyekre

$$p \equiv q(R'_{\underline{A},a_o}),$$

azaz

$$p \equiv q(R_{\underline{A},a_o}) \quad \text{és} \quad p \equiv q(\rho_{\underline{A},a_o}) .$$

Akkor minden $a \in A$ állapotra

$$p \equiv q\ (R_{\underline{A},a}) \quad \text{és} \quad p \equiv q(\rho_{\underline{A},a}) ,$$

azaz

$$p \equiv q(R'_{\underline{A},a})$$

teljesül. Tehát $R'_{\underline{A},a_o} \leq R'_{\underline{A},a}$ minden $a(\in A)$-ra fennáll. A második állitás bizonyitása hasonló, ezért nem részletezzük. □

3.4.§ Mealy-automaták kompozicióinak endomorfizmus-félcsoportjairól és automorfizmus-csoportjairól

Ebben a részben azt vizsgáljuk, hogy milyen kapcsolat van Mealy-automaták kompozicióinak endomorfizmus-félcsoportjai és a komponensek endomorfizmus-félcsoportjai között. Először a diszjunkt direkt szorzat esetével foglalkozunk. Kimenő jel nélküli automatákra W. Dörfler [10] vezette be ezt a fogalmat, majd Mealy-automatákra és általánositott szekvenciális gépekre Peák I. [27] általánositotta a következőképpen:

3.4.1 DEFINICIÓ [27]. Legyenek $\underline{A}_1 = (A_1, X_1, Y_1, \delta_1, \lambda_1)$ és $\underline{A}_2 = (A_2, X_2, Y_2, \delta_2, \lambda_2)$ általánositott szekvenciális gépek. Azt mondjuk, hogy az

$$\underline{A} = \underline{A}_1 \otimes \underline{A}_2 = (A_1 \times A_2,\ X_1 \cup X_2,\ Y_1 \cup Y_2, \delta, \lambda)$$

általánositott szekvenciális gép $\underline{A}_1$ és $\underline{A}_2$-nek <u>diszjunkt direkt szorzata</u>, ha

$$\delta((a_1,a_2),x) = \begin{cases} (\delta_1(a_1,x),a_2) & \text{ha } x \in X_1 - X_2 \\ (\delta_1(a_1,x),\delta_2(a_2,x)) & \text{ha } x \in X_1 \cap X_2 \\ (a_1,\delta_2(a_2,x)) & \text{ha } x \in X_2 - X_1 \end{cases}$$

és

$$\lambda((a_1,a_2),x) = \begin{cases} \lambda_1(a_1,x) & \text{ha } x \in X_1 - X_2 \\ \lambda_1(a_1,x)\lambda_2(a_2,x) & \text{ha } x \in X_1 \cap X_2 \\ \lambda_2(a_2,x) & \text{ha } x \in X_2 - X_1 \end{cases}$$

minden $(a_1,a_2) \in A_1 \times A_2$ és $x \in X_1 \cup X_2$ esetén.

Könnyen igazolható, hogy ha $\underline{A}_1$ és $\underline{A}_2$ Mealy-automaták és bemenő jeleik halmazai diszjunktak, akkor diszjunkt direkt szorzatuk is Mealy-automata. Azt mondjuk, hogy az $\underline{A} = \underline{A}_1 \otimes \underline{A}_2$ Mealy-automata az $\underline{A}_1$ és $\underline{A}_2$ Mealy-automaták <u>teljesen diszjunkt direkt szorzata</u>, ha az $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ feltétel mellett még az $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$ feltétel is teljesül.

Az első tétel megfogalmazásához még egy definicióra van szükségünk.

3.4.2 DEFINICIÓ. Az $\underline{A}$ Mealy-automatát <u>gyengén összefüggőnek</u> nevezzük, ha átmenet-kimenet gráfja, amelyet itt mint irányitás nélküli gráfot tekintünk, összefüggő.

A következő tétel kimenő jel nélküli automatákra vonatkozó analógját W. Dörfler bizonyitotta [10]-ben. Bizonyitásának ötletét felhasználtuk.

3.4.1 TÉTEL [32]. <u>Legyen</u> $\underline{A} = \underline{A}_1 \otimes \underline{A}_2$ <u>teljesen diszjunkt direkt szorzata az</u> $\underline{A}_1$ <u>és</u> $\underline{A}_2$ <u>Mealy-automatáknak. Akkor</u> $E'(\underline{A}_1) \otimes E'(\underline{A}_2)$ <u>izomorfan beágyazható</u> $E'(\underline{A})$-<u>ba. Hasonlóan</u> $E_{AY}(\underline{A}_1) \otimes E_{AY}(\underline{A}_2)$ <u>izomorf</u> $E_{AY}(\underline{A})$ <u>egy részmonoidjával, de ha mind</u> $\underline{A}_1$ <u>mind</u> $\underline{A}_2$ <u>gyengén összefüggő Mealy-automaták, akkor</u> $E_{AY}(\underline{A}_1) \otimes E_{AY}(\underline{A}_2) \approx E_{AY}(\underline{A})$ <u>teljesül</u>.

Bizonyitás: Hozzárendelünk minden $(f_1,g_1,h_1) \in E'(\underline{A}_1)$

és $(f_2,g_2,h_2) \in E'(\underline{A}_2)$ párhoz egy (f,g,h) leképezésekből álló hármast, ahol

$$f : A_1 \times A_2 \to A_1 \times A_2 ,$$

$$f((a_1,a_2)) = (f_1(a_1),f_2(a_2)) \qquad ((a_1,a_2) \in A_1 \times A_2),$$

$$g : X_1 \cup X_2 \to X_1 \cup X_2 , \quad g(x) = \begin{cases} g_1(x) & \text{ha } x \in X_1 , \\ g_2(x) & \text{ha } x \in X_2 \end{cases}$$

és

$$h : Y_1 \cup Y_2 \to Y_1 \cup Y_2 , \quad h(y) = \begin{cases} h_1(y) & \text{ha } y \in Y_1, \\ h_2(y) & \text{ha } y \in Y_2 . \end{cases}$$

Megmutatjuk, hogy $(f,g,h) \in E'(\underline{A})$. Tekintsük $\underline{A}$ egy tetszőleges (a_1,a_2) állapotát és x bemenetét. Akkor

$$f(\delta(a_1,a_2),x)) = \begin{cases} f(\delta_1(a_1,x),a_2) = (f_1(\delta_1(a_1,x)),f_2(a_2)) = \\ \quad = (\delta_1(f_1(a_1),g_1(x)),f_2(a_2)) \quad \text{ha } x \in X_1 , \\ f(a_1,\delta_2(a_2,x)) = (f_1(a_1,f_2(\delta_2(a_2,x))) = \\ \quad = (f_1(a_1),\delta_2(f_2(a_2),g_2(x))) \quad \text{ha } x \in X_2 \end{cases}$$

és

$$\delta(f((a_1,a_2)),g(x)) = \delta((f_1(a_1),f_2(a_2)),g(x)) =$$

$$= \begin{cases} (\delta_1(f_1(a_1),g_1(x)),f_2(a_2)) & \text{ha } x \in X_1, \\ (f_1(a_1), \delta_2(f_2(a_2),g_2(x))) & \text{ha } x \in X_2 , \end{cases}$$

továbbá

$$h(\lambda((a_1,a_2),x)) = \begin{cases} h_1(\lambda_1(a_1,x)) = \lambda_1(f_1(a_1),g_1(x)) & \text{ha } x \in X_1 , \\ h_2(\lambda_2(a_2,x)) = \lambda_2(f_2(a_2),g_2(x)) & \text{ha } x \in X_2 \end{cases}$$

és

$$\lambda(f((a_1,a_2)),g(x)) = \lambda((f_1(a_1),f_2(a_2)),g(x)) =$$

$$= \begin{cases} \lambda_1(f_1(a_1),g_1(x)) & \text{ha } x \in X_1 , \\ \lambda_2(f_2(a_2),g_2(x)) & \text{ha } x \in X_2 . \end{cases}$$

Ebből látható, hogy teljesülnek az

$$f(\delta((a_1,a_2),x)) = \delta(f((a_1,a_2)),g(x))$$

és a

$$h(\lambda((a_1,a_2),x)) = \lambda(f((a_1,a_2)),g(x))$$

feltételek. Könnyen belátható, hogy a megadott hozzárendelés izomorfizmus, ezért ennek igazolását elhagyjuk. Az is nyilvánvaló, hogy a fentiekben megadott izomorf beágyazás az $E_{AY}(\underline{A}_1) \otimes E_{AY}(\underline{A}_2)$ direkt szorzatot $E_{AY}(\underline{A})$-ba képezi, ezért csak azt igazoljuk még, hogy ha $\underline{A}_1$ és $\underline{A}_2$ gyengén összefüggő Mealy-automaták, akkor $E_{AY}(\underline{A}_1) \otimes E_{AY}(\underline{A}_2) \approx E_{AY}(\underline{A})$. Tekintsünk egy tetszőleges $(f,\varepsilon_{X_1 \cup X_2},h)$ AY-endomorfizmust $E_{AY}(\underline{A})$-ból. Legyenek (a_1,a_2) és $(a_1,\bar{a}_2)$ olyan állapotok, hogy $a_2 = \bar{a}_2 p$ teljesüljön valamilyen $p \in X_2^+$ szóra, másrészt tegyük fel, hogy $f((a_1,a_2)) = (a_1',a_2')$ és $f((a_1,\bar{a}_2)) = (a_1'',a_2'')$.

Akkor

$$(a_1',a_2') = f((a_1,a_2)) = f((a_1,\bar{a}_2),p)) = f((a_1,\bar{a}_2))p =$$
$$= (a_1'',a_2'')p = (a_1'',a_2''p),$$

amiből következik, hogy $a_1' = a_1''$. Mivel $\underline{A}_2$ gyengén

összefüggő, azaz bármely két a_2, $\tilde{a}_2$ állapotához található olyan $a_2 = a_{2,0}, a_{2,1}, \ldots, a_{2,n} = \tilde{a}_2$ állapotsorozat, hogy

$$\exists p_i \in X_2^+ : \quad a_{2,i} = a_{2,i-1}p_i \quad \text{vagy} \quad a_{2,i-1} = a_{2,i}p_i \qquad (i=1,\ldots,n),$$

ezért tetszőleges (a_1,a_2), $(a_1,\tilde{a}_2)$ párra érvényes az

$$f((a_1,a_2)) = (a_1',a_2') \quad \text{és} \quad f((a_1,\tilde{a}_2)) = (a_1'',a_2'') \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a_1' = a_1''$$

implikáció. Így létezik olyan $f_1 : A_1 \to A_1$ leképezés, amelyre

$$f((a_1,a_2)) = (f_1(a_1),a_2')$$

teljesül minden (a_1,a_2) $(\in A_1 \times A_2)$-re. Hasonlóan mutatható meg, hogy létezik olyan $f_2 : A_2 \to A_2$ leképezés is, hogy minden $(a_1,a_2) \in A_1 \times A_2$ esetén

$$f((a_1,a_2)) = (a_1',f_2(a_2)).$$

Ennélfogva,

$$\forall (a_1,a_2) \in A_1 \times A_2 : f((a_1,a_2)) = (f_1(a_1),f_2(a_2)).$$

Most megmutatjuk, hogy $(f_1,\varepsilon_{X_1},h_1) \in E_{AY}(\underline{A}_1)$ és $(f_2,\varepsilon_{X_2},h_2) \in E_{AY}(\underline{A}_2)$, ahol h_1 és h_2 a h leképezésnek Y_1-re illetve Y_2-re való leszükitései. Valóban, tetszőleges $x(\in X_1 \cup X_2)$-re kapjuk, hogy

$$f(\delta((a_1,a_2),x)) = \begin{cases} f(\delta_1(a_1,x),a_2) = (f_1(\delta_1(a_1,x)),f_2(a_2)) & \text{ha } x\in X \\ f(a_1,\delta_2(a_2,x)) = (f_1(a_1),f_2(\delta_2(a_2,x))) & \text{ha } x\in X \end{cases}$$

és

$$\delta(f((a_1,a_2)),x) = \delta((f_1(a_1),f_2(a_2)),x) =$$

$$= \begin{cases} (\delta_1(f_1(a_1),x),f_2(a_2)) & \text{ha } x \in X_1, \\ (f_1(a_1),\delta_2(f_2(a_2),x)) & \text{ha } x \in X_2, \end{cases}$$

másrészt

$$h(\lambda(a_1,a_2),x)) = \begin{cases} h(\lambda_1(a_1,x)) & \text{ha } x \in X_1, \\ h(\lambda_2(a_2,x)) & \text{ha } x \in X_2 \end{cases}$$

és

$$\lambda(f((a_1,a_2)),x) = \lambda((f_1(a_1),f_2(a_2)),x) =$$

$$= \begin{cases} \lambda_1(f_1(a_1),x) & \text{ha } x \in X_1, \\ \lambda_2(f_2(a_2),x) & \text{ha } x \in X_2. \end{cases}$$

Ebből pedig, kihasználva, hogy $(f,\varepsilon_{X_1 \cup X_2},h) \in E_{AY}(\underline{A})$, következik, hogy

$$f_1(\delta_1(a_1,x)) = \delta_1(f_1(a_1),x), \quad h(\lambda_1(a_1,x)) = \lambda_1(f_1(a_1),x) \ (x \in X_1)$$

és

$$f_2(\delta_2(a_2,x)) = \delta_2(f_2(a_2),x), \ h(\lambda_2(a_2,x)) = \lambda_2(f_2(a_2),x) \ (x \in X_2). \ \square$$

3.4.2 KÖVETKEZMÉNY [32]. <u>Legyen</u> $\underline{A} = \underline{A}_1 \otimes \underline{A}_2$ <u>az</u> $\underline{A}_1$ <u>és</u> $\underline{A}_2$ <u>Mealy-automaták teljesen diszjunkt direkt szorzata. Akkor</u> $G'(\underline{A}_1) \otimes G'(\underline{A}_2)$ <u>izomorfan beágyazható</u> $G'(\underline{A})$-<u>ba és</u> $G_{AY}(\underline{A}_1) \otimes G_{AY}(\underline{A}_2)$ <u>izomorf</u> $G_{AY}(\underline{A})$ <u>egy részcsoportjával. Továbbá, ha mind</u> $\underline{A}_1$ <u>mind</u> $\underline{A}_2$ <u>gyengén összefüggő, akkor</u> $G_{AY}(\underline{A}_1) \otimes G_{AY}(\underline{A}_2) \approx G_{AY}(\underline{A})$ <u>teljesül</u>.

Az állitás igazolása szinte szó szerinti ismétlése a 3.4.1 tétel bizonyitásának,ezért elhagyjuk.

Könnyen belátható, hogy Mealy-automaták több tényezős teljesen diszjunkt direkt szorzata is értelmezhető és a fenti eredmények érvényesek maradnak. Most a heterogén direkt szorzat endomorfizmus-félcsoportjairól és automorfizmus-csoportjairól bizonyitunk be hasonló állitást.

3.4.3 TÉTEL Legyen az $\underline{A} = (A,X,Y,\delta,\lambda)$ Mealy-automata az $\underline{A}_i = (A_i,X_i,Y_i,\delta_i,\lambda_i)$ $(i=1,\dots,n)$ Mealy-automaták heterogén direkt szorzata. Akkor $E'(\underline{A}_1) \otimes \dots \otimes E'(\underline{A}_n)$ izomorfan beágyazható $E'(\underline{A})$-ba és $E_{AY}(\underline{A}_1) \otimes \dots \otimes E_{AY}(\underline{A}_n)$ izomorfan beágyazható $E_{AY}(\underline{A})$-ba. Ha $\underline{A}$ gyengén összefüggő és létezik olyan $x_o \in X$ bemenő jele, amelyre

$$\forall\, a \in A : \quad \delta(a,x_o) = a$$

teljesül, akkor $E_{AY}(\underline{A}_1) \otimes \dots \otimes E_{AY}(\underline{A}_n)$ izomorf az $E_{AY}(\underline{A})$ monoiddal.

Bizonyitás: Az egyszerüség kedvéért a tételt két tényezős heterogén direkt szorzat esetére igazoljuk, az általános eset teljes indukcióval ebből könnyen kapható. Legyen tehát $\underline{A} = \underline{A}_1 \times \underline{A}_2 = (A_1 \times A_2, X_1 \times X_2, Y_1 \times Y_2, \delta, \lambda)$ a vizsgált Mealy-automata. Könnyü megmutatni, hogy ha $(f_1,g_1,h_1) \in E'(\underline{A}_1)$ és $(f_2,g_2,h_2) \in E'(\underline{A}_2)$, akkor az (f,g,h) leképezéshármas, ahol

$$f : A_1 \times A_2 \to A_1 \times A_2 : \quad f((a_1,a_2)) = (f_1(a_1),f_2(a_2))$$

$$((a_1,a_2) \in A_1 \times A_2),$$

$$g : X_1 \times X_2 \to X_1 \times X_2 : g((x_1,x_2)) = (g_1(x_1),g_2(x_2))$$
$$((x_1,x_2) \in X_1 \times X_2)$$

és

$$h : Y_1 \times Y_2 \to Y_1 \times Y_2 : h((y_1,y_2)) = (h_1(y_1),h_2(y_2))$$
$$((y_1,y_2) \in Y_1 \times Y_2)$$

endomorfizmusa $\underline{A}$-nak. Valóban, tetszőleges $(a_1,a_2) \in A_1 \times A_2$ és $(x_1,x_2) \in X_1 \times X_2$ esetén

$$f(\delta((a_1,a_2),(x_1,x_2)) = f((\delta_1(a_1,x_1),\delta_2(a_2,x_2))) =$$

$$= (f_1(\delta_1(a_1,x_1)),f_2(\delta_2(a_2,x_2))) = (\delta_1(f_1(a_1),g_1(x_1)),$$

$$,\delta_2(f_2(a_2),g_2(x_2))) = \delta((f_1(a_1),f_2(a_2)),(g_1(x_1),g_2(x_2))) =$$

$$= \delta(f((a_1,a_2)),g((x_1,x_2)))$$

és

$$h(\lambda((a_1,a_2),(x_1,x_2))) = h((\lambda_1(a_1,x_1),\lambda_2(a_2,x_2))) =$$

$$= (h_1(\lambda_1(a_1,x_1)),h_2(\lambda_2(a_2,x_2))) = (\lambda_1(f_1(a_1),g_1(x_1)),$$

$$,\lambda_2(f_2(a_2),g_2(x_2))) = \lambda((f_1(a_1),f_2(a_2)),(g_1(x_1),g_2(x_2))) =$$

$$= \lambda(f((a_1,a_2)),g((x_1,x_2)))$$

teljesül. Nem nehéz belátni, hogy az adott hozzárendelés izomorfizmus és ezzel kapjuk a tétel első állitását. Mivel $E'(\underline{A}_1) \otimes E'(\underline{A}_2)$-nek $E'(\underline{A})$-ba való izomorf beágyazásánál az $E_{AY}(\underline{A}_1) \otimes E_{AY}(\underline{A}_2)$ monoid $E_{AY}(\underline{A})$-ba képződik le, csak a harmadik állitás igazolása maradt hátra. Ennek bizonyitása végett tekintsünk egy tetszőleges $(f,\varepsilon_{X_1 \times X_2},h) \in E_{AY}(\underline{A})$

elemet. Legyenek továbbá (a_1,a_2) és $(a_1,\bar{a}_2)$ olyan állapotai $\underline{A}$-nak, hogy létezik olyan $p_2 \in X_2^+$ szó, amelyre $a_2 = \bar{a}_2 p_2$. Legyen $p_1 \in X_1^+$ olyan szó, amelyre $|p_1| = |p_2|$ és minden $a_1 (\in A_1)$-re $a_1 p_1 = a_1$. A $p_1 = x_{10}^{|p_2|}$ szó kielégiti ezt a követelményt, ahol x_{10} az $\underline{A}$ automata x_o bemenő jelének első komponense. Legyen $f((a_1,a_2)) = (a_1',a_2')$ és $f((a_1,\bar{a}_2)) = (a_1'',a_2'')$. Akkor

$$(a_1',a_2') = f((a_1,a_2)) = f((a_1,\bar{a}_2)(p_1,p_2)) = f((a_1,\bar{a}_2))(p_1,p_2) =$$

$$= (a_1'',a_2'')(p_1,p_2) = (a_1'',a_2''p_2),$$

azaz $a_1' = a_1''$. Tekintve, hogy $\underline{A}$ gyengén összefüggő és ezért $\underline{A}_1$ és $\underline{A}_2$ is gyengén összefüggő, kapjuk, hogy tetszőleges (a_1,a_2), $(a_1,\tilde{a}_2)$ állapotokra érvényes az

$$f((a_1,a_2)) = (a_1',a_2') \text{ és } f((a_1,\tilde{a}_2)) = (a_1'',a_2'') \Rightarrow a_1' = a_1''$$

implikáció, azaz van olyan $f_1 : A_1 \to A_1$ leképezés, hogy

$$f((a_1,a_2)) = (f_1(a_1),a_2')$$

teljesül minden $(a_1,a_2)(\in A_1 \times A_2)$-re. Hasonló számolással kapható, hogy van olyan $f_2 : A_2 \to A_2$ leképezés, hogy minden $(a_1,a_2)(\in A_1 \times A_2)$-re

$$f((a_1,a_2)) = (a_1',f_2(a_2)),$$

azaz

$$\forall (a_1,a_2) \in A_1 \times A_2 : f((a_1,a_2)) = (f_1(a_1),f_2(a_2))$$

érvényes. Tekintsük most az (y_1,y_2) és $(y_1,\bar{y}_2)$ kimenő jeleit $\underline{A}$-nak. Legyen $y_1 = \lambda_1(a_1,x_1)$, $y_2 = \lambda_2(a_2,x_2)$ és

$\bar{y}_2 = \lambda_2(\bar{a}_2,\bar{x}_2)$ $(a_1 \in A_1,\ a_2,\bar{a}_2 \in A_2,\ x_1 \in X_1, x_2,\bar{x}_2 \in X_2)$.
Mivel $(f,\varepsilon_{X_1 \times X_2},h) \in E_{AY}(\underline{A})$, kapjuk, hogy

$$h((y_1,y_2)) = h(\lambda((a_1,a_2),(x_1,x_2))) = \lambda(f((a_1,a_2)),(x_1,x_2)) =$$
$$= \lambda((f_1(a_1),f_2(a_2)),(x_1,x_2)) = (\lambda_1(f_1(a_1),x_1),\lambda_2(f_2(a_2),x_2))$$

és hasonló számolással adódik, hogy

$$h((y_1,\bar{y}_2)) = (\lambda_1(f_1(a_1),x_1),\lambda_2(f_2(\bar{a}_2),\bar{x}_2)).$$

Ez mutatja, hogy van olyan $h_1 : Y_1 \to Y_1$ leképezés, hogy minden $(y_1,y_2) \in Y_1 \times Y_2$ esetén

$$h((y_1,y_2)) = (h_1(y_1),y_2').$$

Ugyanigy igazolható, hogy van olyan $h_2 : Y_2 \to Y_2$ leképezés is, hogy minden $(y_1,y_2) \in Y_1 \times Y_2$ esetén

$$h((y_1,y_2)) = (y_1',h_2(y_2)).$$

Ezért h megadható $h = (h_1,h_2)$ alakban. Végül, megmutatjuk, hogy $(f_1,\varepsilon_{X_1},h_1) \in E_{AY}(\underline{A}_1)$ és $(f_2,\varepsilon_{X_2},h_2) \in E_{AY}(\underline{A}_2)$. Mivel $(f,\varepsilon_{X_1 \times X_2},h) \in E_{AY}(\underline{A})$, kapjuk, hogy minden $(a_1,a_2) \in A_1 \times A_2$ és $(x_1,x_2) \in X_1 \times X_2$ esetén

$$(f_1(\delta_1(a_1,x_1)),f_2(\delta_2(a_2,x_2))) = f((\delta_1(a_1,x_1),\delta_2(a_2,x_2))) =$$
$$= f(\delta((a_1,a_2),(x_1,x_2))) = \delta(f((a_1,a_2)),(x_1,x_2)) =$$
$$= \delta((f_1(a_1),f_2(a_2)),(x_1,x_2)) = (\delta_1(f_1(a_1),x_1),\delta_2(f_2(a_2),x_2))$$

és

$$(h_1(\lambda_1(a_1,x_1)),h_2(\lambda_2(a_2,x_2))) = h((\lambda_1(a_1,x_1),\lambda_2(a_2,x_2))) =$$

$$= h(\lambda((a_1,a_2),(x_1,x_2))) = \lambda(f((a_1,a_2)),(x_1,x_2)) =$$

$$= \lambda((f_1(a_1),f_2(a_2)),(x_1,x_2)) = (\lambda_1(f_1(a_1),x_1),\lambda_2(f_2(a_2),x_2))$$

teljesül. Ebből következik, hogy minden $a_1 \in A_1$ és $x_1 \in X_1$ párra

$$f_1(\delta_1(a_1,x_1)) = \delta_1(f_1(a_1),x_1) \text{ és}$$

$$h_1(\lambda_1(a_1,x_1)) = \lambda_1(f_1(a_1),x_1)$$

és minden $a_2 \in A_2$ és $x_2 \in X_2$ esetén

$$f_2(\delta_2(a_2,x_2)) = \delta_2(f_2(a_2),x_2) \text{ és}$$

$$h_2(\lambda_2(a_2,x_2)) = \lambda_2(f_2(a_2),x_2)$$

áll fenn, azaz $(f_1,\varepsilon_{X_1},h_1) \in E_{AY}(\underline{A}_1)$ és $(f_2,\varepsilon_{X_2},h_2) \in E_{AY}(\underline{A}_2)$. Tehát az $E_{AY}(\underline{A}_1) \otimes E_{AY}(\underline{A}_2)$ direkt szorzat $E_{AY}(\underline{A})$-ra képződik le az izomorf beágyazás során. □

3.4.4 KÖVETKEZMÉNY. <u>Ha az</u> $\underline{A} = (A,X,Y,\delta,\lambda)$ <u>Mealy-automata az</u> $\underline{A}_i = (A_i,X_i,Y_i,\delta_i,\lambda_i)$ $(i=1,\dots,n)$ <u>Mealy-automaták heterogén direkt szorzata, akkor</u> $G'(\underline{A}_1) \otimes \dots \otimes G'(\underline{A}_n)$ <u>izomorfan beágyazható</u> $G'(\underline{A})$-<u>ba és</u> $G_{AY}(\underline{A}_1) \otimes \dots \otimes G_{AY}(\underline{A}_n)$ <u>izomorfan beágyazható</u> $G_{AY}(\underline{A})$-<u>ba. Ha</u> $\underline{A}$ <u>gyengén összefüggő és létezik olyan</u> $x_o \in X$ <u>bemenő jele, amelyre</u>

$$\forall\, a \in A : \delta(a,x_o) = a$$

<u>teljesül, akkor</u> $G_{AY}(\underline{A})$ <u>izomorf a</u> $G_{AY}(\underline{A}_1) \otimes \dots \otimes G_{AY}(\underline{A}_n)$ <u>direkt szorzattal</u>.

I r o d a l o m

[1] M.A.ARBIB (ed.), Algebraic Theory of Machines, Languages and Semigroups, Academic Press, New York - London, 1968.

[2] I.BABCSÁNYI, A félperfekt kváziautomatákról, Matematikai Lapok 21 (1970), 95-102.

[3] J.ČERNÝ, On directable automata, Kybernetika (Praha), 7 (1971), 289-298.

[4] A.H.CLIFFORD-G.B.PRESTON, The Algebraic Theory of Semigroups, Vol. 1,2, Providence, R.I., 1961, 1967.

[5] DANG HUU DAO, Az irányitható automaták félcsoportjairól, Automataelméleti Füzetek, 1978/1, 1-28 old., ELTE TTK, Numerikus és Gépi Matematikai Tanszékének Kiadványai, Budapest, 1978.

[6] DANG HUU DAO, On the characteristic semigroups of Mealy-automata, K. Marx Univ. of Economics, Dept. of Math., Budapest, 1979, No. DM 79-1, pp. 1-36.

[7] DANG HUU DAO, On a problem of I. Peák, K. Marx Univ. of Economics, Dept. of Math., Budapest, 1979, No. DM 79-1, pp. 37-53.

[8] DANG HUU DAO, A characterization of Moore-semigroups, K. Marx Univ. of Economics, Dept. of Math., Budapest, 1979, No. DM 79-3, pp. 1-34.

[9] DANG HUU DAO, Az automaták karakterisztikus félcsoportjairól, Kandidátusi értekezés, Budapest, 1980.

[10] W.DÖRFLER, The cartesian composition of automata, Math.Syst. Theory, 11 (1978), 239-257.

[11] S.EILENBERG, Automata, Languages and Machines, Vol.B, Academic Press, New York-London, 1976.

[12] A.C.FLECK, Isomorphism groups of automata, J.Assoc. Comp. Machinery, 9 (1962), 469-476.

[13] A.C.FLECK, On the automorphism group of an automaton, J. Assoc. Comp. Machinery, 12 (1965), 566-569.

[14] F.GÉCSEG-I.PEÁK, Algebraic Theory of Automata, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1972.

[15] Y.MASUNAGA-S.NOGUCHI-J.OIZUMI, A characterization of automata and a direct product decomposition, J.Comp. Syst. Sci., 13 (1976), 74-89.

[16] MASAMI ITO, Structures of Automata and Automorphism Groups, Doctoral dissertation, Tohoku University,1978.

[17] G.H.MEALY, A method for synthesizing sequential circuits, Bell System Techn. J., 34 (1955), 1045-1079.

[18] E.F.MOORE, Gedanken-experiments on sequential machines, Automata Studies, Princeton, 1956, 129-153.

[19] J.R.MYHILL, Finite automata and the representation of events, WADC Techn. Rep., 1957, 112-123.

[20] A.NERODE, Linear automaton transformations, Proc. Amer. Math. Soc., 9 (1958), 541-544.

[21] B.H.NEUMANN, Embedding theorems for semigroups, J. London Math. Soc., 35 (1960), 184-192.

[22] R.H.OEHMKE, On the structure of an automaton and its input semigroup, J. Assoc. Comp. Machinery, 10 (1963), 521-525.

[23] I.PEÁK, Автоматы и полугруппы, I, Acta Sci.Math., 25 (1964), 193-201.

[24] I.PEÁK, Автоматы и полугруппы, II. Acta Sci. Math., 26 (1965), 49-54.

[25] I.PEÁK, Bevezetés az automaták elméletébe, I-III, Egyetemi jegyzet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1977-78, 1980.

[26] I.PEÁK, Generalizations of some semigroups corresponding to automata. Some problems, K. Marx Univ. of Economics, Dept. of Math., Budapest, 1978, No. DM 78-1, pp. 1-30.

[27] I.PEÁK, A concept of state-independency for Mealy-automata, in Papers on Automata Theory, I, K.Marx Univ. of Economics, Dept. of Math., Budapest, 1980, No. DM 80-2, pp. 35-47.

[28] I.PEÁK, On a common reprezentation of some semigroups of Mealy-automata, in Papers on Automata Theory, II, K.Marx Univ. of Economics, Dept. of Math., Budapest, 1980, No. DM 80-5, pp. 1-12.

[29] CS.PUSKÁS, Notes on generalized endomorphism semigroups of automata without outputs, in Selected Papers

on Mathematics, K. Marx Univ. of Economics, Dept. of Math., Budapest, 1980, No. DM 80-1, pp. 35-44.

[30] CS.PUSKÁS, On the generalized automorphism groups of automata without outputs, in Papers on Automata Theory, I, K. Marx Univ. of Economics, Dept. of Math., Budapest, 1980, No. DM 80-2,pp. 1-34.

[31] CS.PUSKÁS, A remark on the generalized automorphism groups of automata without outputs, in Papers on Automata Theory, II, K. Marx Univ. of Economics, Dept. of Math., Budapest, 1980, No. DM 80-5 pp. 69-78.

[32] CS.PUSKÁS, On the semigroups of Mealy-automata, in Papers on Automata Theory, III, K. Marx Univ. of Economics, Dept. of Math., Budapest, 1981, No.DM 81-2, pp. 1-39.

[33] CH.A.TRAUTH, Group-type automata, J. Assoc. Comp. Machinery, 13 (1966), 170-175.

[34] E.J.TULLY, Reprezentation of a semigroup by transformations of a set, Amer. J.Math., 83 (1961), 533-542.

[35] G.P.WEEG, The group and semigroup associated with automata, in Proc. Symp. Math. Theory of Automata, ed. J. Fox (Brooklyn, 1962), 257-266.

[36] G.P.WEEG, The structure of an automaton and its operation-preserving transformation group, J.Assoc. Comp. Machinery, 9 (1962), 345-349.