

A FÜGGVÉNYFOGALOM BEVEZETÉSE A KÖZÉPISKOLÁBAN

DOKTORI ÉRTEKEZÉS

Katz Sándor

József Attila Tudományegyetem
Bolyai Intézete

Szeged

1985



Tartalom

I. <u>Bevezetés</u>	1
II. <u>A függvényfogalom fejlődése a matematikában</u>	4
- A primitív függvényfogalom korszaka	4
- Az ókor és a középkor függvényfogalma	6
- Az ujkori függvényfogalom	16
- A halmazelméleti függvényfogalom	30
III. <u>A függvény fogalma az iskolában</u>	34
IV. <u>Kísérlet a középiskolai függvénytani anyag ha- tékonyabb tanítására</u>	48
- A kísérlet kialakulása, célja	48
- A függvények tanításának előkészítéséről	55
- A függvény fogalma	65
- Hatványfüggvények, a függvények jellemzéséhez szükséges fogalmak	82
- Lineáris függvények	93
- Függvények összekapcsolása, néhány másod- és magasabb foku egész függvény	99
- Racionális törtfüggvények	108
- Néhány nem elemi függvény	113
- Az első osztályos valós függvénytani anyag rendszerezése, összefoglalása	120
V. <u>A kísérlet tapasztalatainak összegzése</u>	123
Mellékletek	125
Irodalom	129

A matematika egyik központi fogalma, a függvény a múlt század közepén került be a középiskolai tananyagba.

Petzval Ottó 1856-ban megjelent tankönyvében — még csak a függelékben — a következő ajánlással vezeti be 15 oldalnyi önálló függvénytan fejezetét: "Azok, kik az elemi mennyiségtannak elvégzése után a felsőbb mennyiségtannal megismerkedni szándékoznak, és az evvel rokon tudományokat üzni kívánják: kedvesen veendik már itt, egy a mennyiségtanban oly fontos és legnagyobb szerepet játszó tárggyal, a függvény-nyel /Funktion/ megismerkedhetni." [1.]

A következő évtizedek tankönyveiben a függvények még általában nem önálló anyagrészként szerepeltek, csupán néhány függvény került bemutatásra, mint valamely témakörhöz szükséges segédeszköz.

A függvények tanításában rejlő lehetőségeket a XX. század első éveiben ismerték fel. A Beke Manó vezette, 1906-ban alakult reformbizottság egyik legfontosabb célkitűzése a függványszerű gondolkodás kialakítása volt. "Ez az a tengely, amely körül egész reformmozgalmunk forog. Természetfelfogásunk leglényegesebb alkotó eleme a mennyiségek közötti összefüggés. Ez az a kép mely a természetben lefolyó dolgokat ábrázolja. Kell, hogy e kép olvasásában minden művelt ember gyakorlott legyen." [2.]

A függvények szerepének növelése, a széles körben alkalmazható függvényfogalom kialakítása azóta is a középiskolai tantervek célkitűzései között szerepel, de a célok

megvalósításában lassu volt az előrehaladás. Ennek okát a következőkben kereshetjük:

1. A függvényszerű gondolkodásmód kialakításához hosszabb időre van szükség. Ha a függvény a középiskolában lényegében új fogalomként kerül bevezetésre, akkor a tananyag elején más fogalmaknak /pl. a transzformációknak/ erre való építése nem lehet elég hatékony. Ha azt akarjuk, hogy a függvény valóban sok területen alkalmazható legyen, valóban a középiskolai matematika egyik központi fogalma legyen, akkor a reláció és a függvény fogalmának kialakítását már jóval előbb, a matematikával való ismerkedés korai szakaszában el kell kezdeni.
2. Az a kép, amelyben a függvény a matematikai kifejezéssel volt azonos, nem elég általános. A fenti célok megvalósításához szélesebb körben alkalmazható, általánosabb függvényfogalomra van szükség.
3. Egy általánosabb függvényfogalom kialakításához halmazelméleti ismeretekre, a halmazok alkalmazásában való jártasságra van szükség.

1979-ben, amikor a jelenlegi gimnáziumi tantervek és tankönyvek bevezetésre kerültek, még a tanulók jelentős része /84%-a, lásd: [3.] / a régi általános iskolai tanterv ismereteivel került a középiskolába. Ez a régi tanterv igen kevés függvényekkel kapcsolatos ismeretet tartalmazott, halmazokkal pedig egyáltalán nem foglalkozott.

1974-től un. ideiglenes, majd 1978-tól új tantervek kerültek fokozatos bevezetésre az általános iskolában.

1982-től már minden felső tagozatos az ideiglenes vagy az új tanterv szerint tanul, és 1986-tól már csak olyan tanulók végeznek az általános iskolában, akik már 8 évig új felfogásban, halmaz- és függvényszemléletre épülő új tanterv szerint tanulták a matematikát.

Ezeket a változásokat figyelembe véve az elmúlt években több gimnáziumi osztályban kísérletet végeztünk egy általánosabb függvényfogalom és egy hatékonyabb függvénytanítási módszer kialakítására.

Mielőtt ezen kísérletet bemutatnánk, tekintsük át a függvényfogalom fejlődését a matematikában, hogy lássuk milyen történeti előzményekre építhetjük a középiskolai függvényfogalmat.

A függvényfogalom fejlődése a matematikában

Minden periodizálás vitatható, és témánk szempontjából a periodizálás nem is alapvető, mégis a jobb tájékozódás és tagolás kedvéért célszerűnek láttuk a függvényfogalom fejlődését a következő szakaszokra osztani:

1. A primitív, oksági viszonyon alapuló, az absztrakciót nélkülöző függvényfogalom korszaka.
2. A relációk, összefüggések táblázatokban vagy szavakban történő rögzítésének, és ezen módszerek fejlődésének korszaka, amely időben az ókorra és a középkorra esik.
3. Az ujkori függvényfogalom korszaka, a változó mennyiség megjelenésétől a függvénytan szabatos, ellentmondásmentes elméletének megalkotásáig.
4. A halmazelméleten alapuló függvényfogalom térhódításának korszaka.

A primitív függvényfogalom korszaka

Az írásbeliség megjelenése előtti fogalmak kialakulásáról általában csak feltevéseink vannak, keveset tudunk ezek közül tényekkel igazolni. Minden jel arra mutat, hogy a függvény- és számfogalom csirái már az írás megjelenése előtti időkből származnak. A számlálás, számolás, valamint a különböző mennyiségek közötti összefüggések felismerése igen régóta fontos szerepet játszott az ember és környezetének kapcsolatában.

A szám és a függvény a legrégebben használt matematikai objektumok közé tartoznak. Fejlődésükben sok a hasonló vonás, például a tárgyak számlálásától ill. a konkrét mennyiségek közötti összefüggések felismerésétől igen hosszú absztrakciós folyamat vezetett a szám ill. a függvény fogalmának kialakulásáig. Mindkét objektumot évezredek óta használták anélkül, hogy a definíció szükségessége felmerült volna. A két fogalom fejlődése sok szállal összekapcsolódva végigkísérte és meghatározó módon befolyásolta a matematika történetét.

Az írásbeliség előtti számfogalom fejlődéséről valamivel több nyelvi, tárgyi forrásunk van mint a függvényfogalom kialakulásáról. Azt, hogy korábban is létezett ilyen fogalom, mutatja, hogy a legrégebb írásbeli emlékekben is olyan, a függvényfogalomhoz kapcsolódó matematikai ismeretek szerepelnek, amelyek kialakulásához hosszú idő kellett.

Az ember és környezetének kapcsolatában minden valóság szerint igen korán kialakultak olyan fogalmak, mint kisebb, nagyobb; több, kevesebb stb. Az ember észrevehette, tapasztalhatta, hogy bizonyos dolgok között szoros összefüggés van: magasabb fának hosszabb az árnyéka, nagyobb kő nehezebb, nagyobb terület bekerítéséhez hosszabb kerítés kell, nagyobb halból kevesebb is elég, stb. A tapasztalatok továbbadásához azok megfogalmazására is szükség volt.

Valószínű, hogy a legkorábbi elképzelésekben csak két-

féle függvény létezett: az "együtt növekedés" — minden monoton növekvő függvény, és a "fordítva változás" a monoton csökkenő függvények helyettesítésére. /Ahogy a mai napig is a mindennapi szóhasználatban sokan egyenes illetve fordított aránynak mondanak minden növekvő ill. csökkenő függvényt./

A relációtípusok további szétválásának fontos feltétele volt a számokkal való kifejezhetőség. A termelés kialakulása tette szükségessé a mérés megjelenését. A mennyiségi viszonyokat számokkal igyekeztek kifejezni, az addig kvalitatív relációkat kvantitatív formában lehetett megfogalmazni. A földmérés, az építészet, az időszámítás, a csillagászat sok számolást igénylő problémáihoz táblázatokot készítettek. A legrégebbi táblázatok mindig konkrét mennyiségek összetartozó értékeit tartalmazták. /Pl. négyzet oldala — területe/ A különböző alkalmazási területeken használt, de azonos szám-párokat tartalmazó táblázatok jelentős szerepet játszhattak az elvontabb függvényfogalom kialakulásában. Megindulhatott egy lassu folyamat, a mennyiségek közötti összefüggésekben a konkrét mennyiségekről fokozatosan az őket összekötő összefüggésre, szabályra tevődik át a hangsúly. Ez a függvényfogalom fejlődésének új korszakát jelentette.

Az ókor és a középkor függvényfogalma

Az ókori matematikai ismeretekről már írásbeli emlékeink vannak. Már a legrégebb papirusztekercseken és



agyagtáblákon is szerepeltek matematikai tárgyú ismeretek. A reláció- és függvényfogalom fejlődése az ókorban két uton haladt. Az egyik az összefüggéseknek táblázatba foglalása, a másik a szavakban történő rögzítés. Az ókor és a középkor matematikai művei jórészt szabálygyűjtemények voltak.

Az áttekintett 3500 év alatt a táblázatok és a különböző problémák megoldására adott szabályok jelentősen fejlődtek, de a függvény fogalmában jelentkező absztrakciós folyamat lassu volt, a függvény fogalmának fejlődésében robbanásszerű változásra nem került sor.

A viszonylag fejletlen egyiptomi matematikára még nem volt jellemző a táblázatok használata. Az ókori Babilonban viszont már mintegy 4000 éve többféle táblázat segítségével számoltak. Agyagtáblákon 1·1-től 60·60-ig terjedő szorzótábla, négyzet, köb, négyzetgyök, reciprok, n^3+n^2 táblázataik maradtak fenn. 60-as számrendszer, hatvanados törteket használtak. $\sqrt{2}$ értékére például $1 + \frac{25}{60}$ -ot adták meg, amelynek hibája egy ezreléknél kisebb.

Joval későbből, i. e. 600-500-as évekből maradtak fenn olyan számítások, amelyekben tiznél több hatvanados jegy szerepelt. Ezeket már nem a földmérés, az adózás, a kereskedelem problémáihoz használták, hanem a csillagászatához. A csillagászat, az asztrológia, a hajózáshoz szükséges tájékozódás igényei hozták létre a hur- és trigonometrikus táblázatokat. Ezeken a legszembetűnőbb a táblázatkészítés és alkalmazás módszereinek fejlődése.

A babiloni és egyiptomi csillagászati eredmények összefoglalásának tekinthető a hellén Ptolemaios *Almagest* /Nagy gyűjtemény/ című műve. Ebben hurtáblázatot is találhatunk, amely 0° -tól 90° -ig félfokonként megadta a középponti szöghöz tartozó hur hosszát. Ez a táblázat, és az egész *Almagest* nagy hatással volt a következő évszázadok matematikájára és csillagászatára, különösen az arab matematikára. Több ma is használatos elnevezés is az *Almagest*ből származik. Például Ptolemaios a kört első és másodrendű kicsiny részekre bontotta. Latinul: "partes minutae primae", "partes minutae secundae"; innen ered a minutum — perc és a secundum — másodperc elnevezés. [4.] A görög matematikára egyébként nem volt jellemző a táblázatok használata. A táblázatok a matematika gyakorlati alkalmazását segítették, de a görög matematika nem volt gyakorlati jellegű.

Az indiai matematika kapcsolatban volt a kínai, a babiloniai, a hellén és a későbbi arab matematikával, több ismeretet átvett ezekből /pl. az *Almagest* hatása is kimutatható/, de jelentős önálló eredményeik/pl. a tizes helyiértékes számírás, a 0 használata, egyes aritmetikai módszerek/ arab közvetítéssel még az európai matematikára is hatással voltak.

Az indiaiak alkalmaztak először hurtáblázatok helyett félhurtáblázatokat, amelyek már a sinus táblázattal ekvivalensek, "A hurról félhurra való áttérés messzemenő jelentőségű volt, mert természetes módon sugallta olyan függvények bevezetését, amelyek összekapcsolják egymással a derékszögű háromszög szögeit és oldalait." [5.]

A IV.-V. századból származó un. sziddhántákban a sinus mellett a cosinus és a sinus versus /a sugár és a cosinus különbsége/ táblázatok is szerepeltek.

Az indiai táblázatokban jól nyomon lehet követni a trigonometrikus függvények fejlődését. A legrégibb táblázatokon látszik, hogy szerkesztések alapján készültek. A táblázatok vizsgálatával egyre több összefüggést ismertek fel, /ezeket közölték is a táblázatok mellett,/ és a felismert összefüggések segítségével egyre pontosabb táblázatokot tudtak összeállítani. Bháskara a XII. században leírja a táblázat készítésének módját, amelyhez már az összegzési képleteket is használja, és így öt jegyre pontos táblázatokot állít össze. Az 1500 körül írt Tudományos gyűjtemény című művében Nilakantha már hatványsorokat használ táblázatai összeállításához, és π értéket tíz értékes jegyre adja meg.

Az arab matematikusok már a tangens és cotangens függvényeket is ismerték. /Battani: Az Almagest tökéletesítése című műve 900 körül íródott./ Az araboknál már valóban trigonometrikus függvényeknek tekinthetjük ezeket, mert nem csak a kör részeinek kiszámítására, hanem háromszögek adatainak meghatározására is használták őket. Ismerték a sinus és cosinus tételt, a háromszög területének trigonometrikus kiszámítási módját és a trigonometrikus szorzattáalakítási képleteket. Al-Kashi 1450-ben $1'$ -es felbontású, 9 jegy pontosságú táblázatot készít, és ehhez $\sin 1^\circ$ és π értékét 17 tizedes jegyre számolta ki.

Az ilyen csúcsteljesítmények a függvények mélyebb ismere-

tét kívánták meg, de a függvényfogalom tartalmi továbbfejlődése mégsem ebből az irányból indult el.

A mennyiségek közötti összefüggések közötti összefüggések táblázatba való foglalása mellett az ókorban és a középkorban általános módszer volt az összefüggések szavakban történő rögzítése. Egy adott állapot rögzítése a függvény statikus jellegének felel meg, kevésbé alkalmas a mennyiségek változásának vizsgálatára mint a táblázat.

A változó mennyiség fogalmának megjelenéséhez egy algebrai szimbolika kialakulására volt szükség.

Már a legrégebbi időktől jelentkeztek törekvések arra, hogy az összefüggéseket, a mennyiségeket és a műveleteket rövidebben jelöljék. Az egyiptomi matematika még csak a törtekre alkalmazott külön jelet. A babiloniai és a kínai írásmód nagyban segítette a matematikai szimbólumok kialakulását, hiszen ezekben az írásokban minden jel egy fogalmat jelent. Minden bizonnyal ez a két kultúra is hatással volt arra, hogy az indiai matematika is viszonylag fejlett szimbolikát használt. A műveleteket a megfelelő szavak rövidítésével, a mennyiségeket, ismeretleneket pedig betűvel jelölték. Ha több ismeretlen volt, akkor ugyanazzal a betűvel de különböző színekkel jelöltek. Ismerték a zárójel használatát is.

A görög matematika jelrendszere nem érte el ezt a szintet. A geometriában ugyan egyszerű jelöléseket alkalmaztak — a pontokat, egyeneseket, síkokat az ábécé nagybetűivel jelölték — algebrájuk jelölésrendszere azonban bonyolult volt. A kisbetűk náluk konkrét számjegyeket jelöltek,

/lásd pl. [6.] 17. o./. Így fel sem merülhetett, hogy a betűk változó mennyiségeket jelöljenek. Másrészt az algebrának nem is volt jelentős szerepe a görög matematikában. Elsősorban geometriai problémákkal foglalkoztak, az algebraiakat is igyekeztek geometrizálni. Az utolsó jelentős görög matematikus, Diophantos volt az, aki az addigi hagyományokkal szakítva inkább algebrával foglalkozott. Ő már használt rövidítéseket, kezdetleges algebrai nyelvet, de munkájának nem volt folytatója.

A görög matematika is jórészt arab közvetítéssel jutott el Nyugat-Európába. Az arab matematikából viszont teljesen hiányoztak a szimbólumok. Mivel a fejlettebb szimbolikával rendelkező babilonai és indiai matematika nem volt közvetlen hatással az európaira, az arab matematika hatása nem ösztönözte a függvényfogalom fejlődését segítő betűkifejezések használatát.

Európában a korai középkor sem gazdasági sem eszmei téren nem kedvezett a matematika fejlődésének. Jellemző példa erre, hogy a kor egyik legjelentősebb matematikusa, Gerbert ellen vádat emeltek, "hogy képes tetszőlegesen nagy számok osztására is, következésképp eladta magát az ördögnek." [5.]

A XII.-XIII. századtól az építészet, a hajózás, a technika fejlődése, a kereskedelem bővülése egyre több matematikai ismeretet igényelt. A megnyíló egyetemeken fèlelevenítették a görög matematikát, kibővítették az araboktól átvett ismeretekkel, és lassan új eredmények

is jelentkeztek.

Az algebra nyelvének egyszerűsítésére már a XV. század végén történtek kísérletek pl. Luca Pacioli és Nicolas Chuquet munkáiban, de jelentős előrelépés csak a XVI. században következett be. Elsősorban az egyenletek elméletének fejlődése inspirálta az egyszerűbb kifejezés módok alkalmazását. Francois Viète /1540-1603/ volt az első, aki következetesen használt betűkifejezéseket. Az ő eredményeit fejlesztette tovább Hariot és Girard, majd Descartes olyan jelölésrendszerig jutott el, amely már évszázadokig, sok vonásában napjainkig alkalmas formának bizonyult. /Descartes alkalmazta először a hatványok, a négyzetgyök mai jelölését, ő jelölte először az ábécé elejéről vett betűkkel az ismert, az ábécé végéről vett betűkkel az ismeretlen mennyiségeket./

Amikor az összefüggéseket betűkkel tudták kifejezni, amelyek helyére tetszőleges számokat lehetett helyettesíteni, kézenfekvővé vált a különböző értékek változásának vizsgálata, és ezzel adott volt a lehetőség a változó mennyiség fogalmának kialakulásához. Jó példája ez annak, amikor a sikeresen megválasztott forma nagymértékben segíti a tartalom fejlődését.

Az ujkori függvényfogalom kialakulásához vezető tényezők közül még a geometriai görbék vizsgálatának fejlődését, a koordinátamódszerek kialakulását érdemes felidézni.

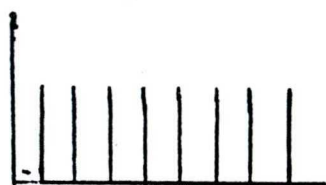
A görög matematikusok, elsősorban Archimedes eredmé-

nyei, a különböző geometriai szélsőérték-problémák megoldása, a kétoldali közelítés módszere, a terület, a térfogat, az ívhossz meghatározásában alkalmazott infinitézimális módszerek a differenciál- és integrálszámítás közvetlen előzményeinek tekinthetők, de időben több mint egy évezredre volt szükség, hogy ezek az eredmények továbbfejlődjenek.

Apollóniosz és Papposz igen magas szintet ért el a különböző görbék, kupszeletek, spirálisok vizsgálatában, de ezek az eredmények is csak a XV.-XVI. században kerültek újra felszínre.

Mielőtt a görbékkel kapcsolatos kutatások reneszanszáról szólnánk érdemes felidézni a XIV. század jeles francia tudósának Nicolaus Oresmicusnak az eredményit, mert az ezekből kialakuló koordinátamódszer jelentősen hozzájárult a görbék vizsgálatának eredményesebbé válásához. Oresmicus az *Értekezés a formák szélességéről* című 1370 körül írt művében fizikai mennyiségek változásait vizsgálta. Egy hosszúságnak nevezett tengely /időt, vagy helyet jelentett/ különböző pontjaiban, rá merőlegesen mérte fel a változó mennyiségek intenzitását — amelyet szélességnek nevezett./Innen a mű címe./

Osztályozta is az így ábrázolt mennyiségeket:



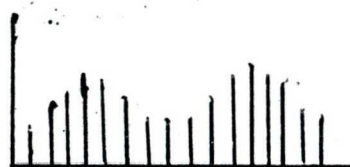
uniformis

/egyenletes/



uniformiter difformis

/egyenletesen egyenetlen/



difformiter difformis

/egyenetlenül egyenetlen/

Az egyenetlenül egyenetlen mozgásokról megállapítja, hogy a változás az extrémum közelében a leglassabb. Közel háromszáz évre volt szükség, hogy az Oresmicus munkáiban kibontakozó koordinátamódszer széles körben használatossá váljék.

A görög geometria eredményei először arab közvetítéssel kerültek Európába. A legjelentősebb fordító Gherardó volt, mintegy nyolcvan arab, és arab nyelvű görög művet fordított latinra a XII. században. A XII.-XIII. században megindult az eredeti görög szövegek felkutatása Sziciliában, illetve a keresztes háborúk révén, és megjelennek az első közvetlen görög — latin fordítások.

/William of Moerbeke 1260 körül, lásd [7.] 116. o./

Az európai szerzők munkái általában a görög és arab matematikai ismeretek feldolgozásai voltak, kevés új eredménnyel. Gregorius Valla /1430-1499/ Állhatatos és mulékony dolgokról című műve volt az első olyan munka Nyugat-Európában, amely kúpszeletekkel foglalkozott. Az egyenletek elméletének fejlődése mellett /harmad és negyedfoku egyenlet megoldása, Viète formulái/ fokozatosan a geometriai görbék vizsgálatára terelődött a figyelem. A XVII. század elejére gyűlt össze annyi ismeret, hogy a görbék és kifejezések közötti összefüggések vizsgálata egységes egészzé álljon össze. Szinte egyidőben két nagy matematikus is hasonló eredményekhez jut. Fermat Bevezetés a síkbeli és térbeli helyek elméletébe című 1636-ban megjelent műve legalább olyan tartalmas mint Descartes egy évvel később megjelent Geometriája, de Fermat a Viète algebra

nehézkesebb nyelvét használta, így nem volt olyan hatással a matematika fejlődésére mint Descartes munkája.

"Descartes azt vallotta, hogy az anyag legfontosabb tulajdonsága az oszthatóság és a mozgékonyosság. A matematikának ugyancsak ezeket a tulajdonságokat kell tükröznie. Ezt viszont lehetetlen csupán a számokkal, vagy csupán a geometriával elérni. A matematika univerzális tudomány kell hogy legyen, amely mindent tartalmaz, ami a rendezéssel és a mértékkel összefügg. Ezek az általános ideák 1637-ben kaptak konkrét megfogalmazást, amikor napvilágot látott Descartes híres, *Értekezés a módszerről* című műve. A könyv utolsó részének címe *Geometria*." [8.]

Descartes Geometriájának két gondolat az alapja: a változó mennyiség bevezetése, és a derékszögű koordinátarendszer használata. Mint láthatjuk a függvényfogalom fejlődésének vizsgált utjai — az algebrai szimbolikának, az összefüggések felírásának egyszerűsödéséből kialakuló változó mennyiség fogalma, a kifejezések és a geometriai görbék közötti összefüggések vizsgálata, és a koordinátamódszer — Descartes munkásságában futnak össze.

Engels sokat idézett állítása szerint: "A fordulópontot a matematikában Descartes változó mennyisége jelentette. Ezzel bevonult a matematikába a mozgás és a dialektika."

Az ujkori függvényfogalom

A XVII. század közepétől a Descartes által összekapcsolt két objektum, az algebrai kifejezés és a geometriai görbe került a matematikai érdeklődés középpontjába. A kutatások irányát Descartes a következőkben jelöli meg:

"Azt hiszem mindazt előhoztam, ami a görbe vonalak elemi ismeretéhez szükséges, ha még általában kifejtem a módszert, amely szükséges, hogy egy görbe bármely pontjához olyan egyenest huzzassunk, amely derékszögben metszi a görbét. S ki merem mondani, hogy ez nemcsak a legáltalánosabb és leghasznosabb feladat, amit csak ismerek, hanem ez az, amit a geometriában mindenkor tudni vágytam." [4.]

Világos, hogy ez a célkitűzés ekvivalens azzal, hogy tetszőleges függvénynek meg tudjuk határozni a differenciáhányadosát. Descartes polinomokra meg is találja a megoldást, de általánosan használható módszerig nem jut el.

A differenciálmódszerekkel párhuzamosan, de egyelőre még azoktól függetlenül, gyors fejlődésnek indulnak az integrálmódszerek is. Descartes Geometriájával egyidőben jelenik meg Cavalieri olasz matematikusnak "Geometria, amely az oszthatatlan folytonos mennyiségek segítségével új módon van kifejtve" című műve. Cavalieri kiválóan ismerte az antik szerzők infinitézimális számításokban elért eredményeit, valamint Galilei és Kepler e téren kifejtett gondolatait. Ezek továbbfejlesztése a mű, elsősorban terület és térfogatszámítási problémákra. Torricelli azt írta, hogy az oszthatatlanok geometriáját úgy adják kéz-

ről kézre a tudósok mint a tudomány csodáját.

A differenciál- és integrálmódszerek iránti lelkesedésnek elsősorban az volt az alapja, hogy az új módszerekkel matematikai és fizikai problémák sokaságát sikerült megoldani. A kor neves matematikusai és fizikusai alkalmazták és fejlesztik tovább ezeket a módszereket. Fermat, Pascal, Huygens, Wallis, Barrow munkássága nyomán az algebrából, a geometriából és a mechanikából a matematika új ága az analízis fejlődik ki, amely még az előzőek nyelvét használta. Tárgya a kifejezések, görbék, mozgások vizsgálata volt, ezekből fejlődött ki az újkor függvényfogalma, amelyre ekkor még sem külön elnevezés, sem definíció nem volt.

A függvény /functio^{*}/ elnevezést Leibniz használta először. Előbb csak szűkebb értelemben, görbékhez tartozó, különböző feltételeket teljesítő szakaszokra /pl. normálisokra, hurokra, érintőkre/ használta az elnevezést, majd később a görbéket, az őket leíró kifejezéseket, sőt ezek differenciálját is funciónak nevezte.

Newtonnál a fizikai eredetű fluxió — időtől függő változó /folyó/ mennyiség — tölt be hasonló szerepet.

Newton és Leibniz munkáiban kapcsolódik össze, és válik véglegesen a matematika önálló területévé a differenciál- és integrálszámítás. Leibniz nagy lépést tesz ezen módszerekhez tartozó szimbólika megteremtésében is. Newton és Leibniz függvényfogalma különböző erede-

^{*} A functus latin szóból — jelentése: teljesített, eleget tett.

tü ugyan, de sok területen hasonló eredményeket értek el, egymás eredményeit jól megértették. Mégis a következő évtizedekben a különböző területekről elinduló, más megfogalmazásban kapott hasonló eredmények egyeztetése, a megnövekedett információcsere szükségessé tette a használt fogalmak egyértelművé tételét, definiálását. A XVIII. század elejére szükségszerűvé vált annak meghatározása is, hogy mit értsenek függvényen.

A XVIII. század matematikusai arra törekedtek, hogy a függvényt más kézzelfoghatóbb fogalmakra vezessék vissza. Abban az időben a kifejezés vagy a görbe fogalma látszott alkalmasnak erre a célra. Leibniz tanítványa Johann Bernoulli 1718-ban a következő definíciót fogalmazta meg: "A változó mennyiség függvénye analitikus kifejezés, amely változó mennyiségből és állandó mennyiségekből van összetéve." [9.]

Ha a XVIII. század függvényfogalmát akarjuk vizsgálni, érdemes nyomonkövetni, hogy a kor legjelentősebb matematikusának, Leonard Eulernek /1707-1783/ hogyan változott az elképzelése a függvény mibenlétéről. Eulernek 1748-ban jelenik meg a függvénytan fejlődése szempontjából korszakalkotó jelentőségű műve az "Introductio in analysin infinitorum" /Bevezetés a végtelenek analízisébe/.

Ebben a függvényre szinte szó szerint azonos meghatározást ad volt tanárának, Bernoullinak definíciójával.

Euler először analitikus függvényen a négy alapművelet, a hatványozás és a gyökvonás segítségével előállítható, valamint a trigonometrikus, exponenciális, és logaritmusfüggvényeket értette. Az előbbieknek ma is használatos osztályozása /egész-, tört-, racionális, irracionális, algebrai függvényekre/, és az utóbbiak /transzcendensek/ maival azonos értelmezése és jelölése is az Introductioban jelent meg.

Euler függvényen az egész értelmezési tartományon azonos kifejezéssel adott függvényt értett, és úgy gondolta, hogy ha bármilyen kis intervallumon ismerjük is, abból az egész értelmezési tartományon meghatározhatjuk a függvényt. Ezen kívül úgy vélte, hogy minden függvény hatványsor alakjában előállítható. /A későbbiekben a függvény megadására vonatkozó fenti lehetőségek felsorolása helyett fokozatosan ez a feltétel, a hatványsorba fejthetőség jelentette az analitikusság kritériumát./

A fenti megszorítások erősen leszűkítették a függvények értelmezésének körét. Talán éppen ezért Euler egy másik definíciót is adott: "A függvény nem más mint a szabadon mozgó kéz által rajzolt görbe." [10.]

Bár az Introductio a függvénynek kifejezésként való felfogásával hosszú időre mintaként szolgált a függvénytan tankönyvek számára, Euler később mégis a függvénynek görbéként való értelmezését tartotta szimpatikusabbnak, általánosabbnak. A vita, hogy a kifejezés vagy a görbe

felel meg jobban a függvény természetének, a hur rezgéseinek vizsgálatával kapcsolatosan éleződött ki.

A koordinátarendszer $/0;0/$ és $/l;0/$ pontjai között kifeszített hur rezgéseit leíró

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

parciális differenciálegyenlet $y/0, t/=0$ és $y/l, t/=0$ feltételeket kielégítő általános megoldását 1747-ben D'Alembert adta meg $y = \varphi/at+x/ - \varphi/at-x/$ alakban, ahol φ tetszőleges olyan periodikus függvény, amelynek periodusa a hur hosszának kétszerese. D'Alembert ezt úgy értette, hogy φ tetszőleges analitikus kifejezés.

1748-ban megjelent tanulmányában Euler azt hangoztatta, hogy tetszőleges, "a szabadon mozgó kéz által rajzolt görbe" segítségével is megadható a megoldás.

A hur kezdeti állapotát — alakját és sebességét — leíró $y/x, 0/=f/x/$ és $\frac{\partial y}{\partial t}/x, 0/=g/x/$ függvények segítségével φ /egy additív konstanstól eltekintve/ meghatározható a $\varphi/x/ - \varphi/-x/ = f/x/$ és $\varphi/x/ + \varphi/-x/ = \frac{1}{a} \int g/x/dx$ egyenletekből, és itt f és g olyan görbe is lehet, amelynek "törései" vannak, és egyes darabjai között nincs összefüggés.

Daniel Bernoulli abból a feltevésből kiindulva, hogy a hur hangja az alaphangból és annak felhangjaiból tevődik össze, feltételezte, hogy a fenti differenciálegyenlet bármely megoldása

$$\sum_n a_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \cos \frac{n\pi a}{\ell} / t - \beta_n /$$

alakban adható meg.

"Bár az összegfüggvényről csak véges sok tag esetén volt nyilvánvaló, hogy a differenciálegyenletnek megoldása, az akkori matematikai közfelfogás szerint Bernoulli nem kételkedett abban, hogy végtelen sok tag esetén is hasonló a helyzet." [11]

Ahogy D'Alembert nem fogadta el Euler megoldását, azt, hogy tetszőleges "mechanikai", nem egyetlen analitikus kifejezéssel leírható görbe is lehet megoldás, úgy egyikük sem fogadta el Bernoulli megoldását.

Euler nem tudta elképzelni, hogy a $t=0$ kezdeti állapotban a hur alakját megadó

$$\sum_n \left(a_n \cos \frac{n\pi a}{\ell} \beta_n \right) \sin \frac{n\pi x}{\ell}$$

trigonometrikus sor törésekkel rendelkező, egyes darabjai között összefüggést nem tartalmazó görbéket is leírjon. D'Alembert még azt is kétségbevonta, hogy tetszőleges analitikus kifejezéssel adott függvény kifejthető lenne trigonometrikus sor alakjában.

A XVIII. században nem dőlt el a vita, az analitikus kifejezés és a görbe elsőbbségének, és ezek trigonometrikus sorokban való kifejezhetőségének kérdésében. Bár a század matematikusai számára a kifejezés és a görbe jelentette a függvényt, Euler mégis már 1775-ben olyan definíciót fogalmazott meg, amelyben nem hivatkozik sem az analiti-

kus kifejezésre, sem a görbékre: "Ha valamely mennyiség úgy függ egy másiktól, hogy a második változásával az első is változik, akkor az elsőt a második függvényének nevezzük." [10]

Eszerint már Euler eljutott a függvénynek mint megfeleltetésnek gondolatáig. Valószínű, hogy tartalmát tekintve a függvény Euler számára is mindvégig kifejezés vagy görbe maradt, a definíciót azonban jó érzékkel úgy fogalmazta meg, hogy túlmutatott azokon a korlátokon, amelyeket az adott kor matematikai ismereteinek szintje jelentett, és így a függvény általánosabb értelmezését tette lehetővé.

Időtálló definíciók többször születtek úgy, hogy jó érzékkel csak azt vették be a definícióba ami a matematikai lényegét kifejezte, a kor szintjének megfelelő "hordozeszközt" nem. Gondoljunk a folytonosság definíciójára, amelyet Cauchy Cours d'analyse című művében 1821-ben fogalmazott meg. "Valójában Cauchy még mindig csak olyan függvényekre gondolt, amelyek analitikus kifejezések segítségével állíthatók valahogyan elő. Erre mutat az, hogy miután a függvény fogalmát meghatározza: — y függvénye x -nek, ha az x mennyiség minden értékének megfelel az y mennyiség egy teljesen meghatározott értéke. — mindjárt hozzáfűzi, hogy a függvény explicit, ha az x -et y -nal összekötő egyenlet y -ra fel van oldva, és implicit, ha ez nem áll. A folytonosságot szerencsés kézzel mégis úgy definiálja, hogy abban szó sincs formulával való kifejezésről, hanem csak arról, hogy az x elegendő

kis megváltozásával az y is keveset változik." [11.]

Még a XVIII. században, 1797-ben Lacroix francia matematikus is igen általánosan értelmezte a függvényt:

"Minden mennyiséget, amelynek értéke egy vagy több más mennyiségtől függ, ez utóbbiak függvényének nevezzük, attól függetlenül, hogy tudjuk-e vagy sem azt, hogy milyen műveleteket kell elvégezni ahhoz, hogy ez utóbbiakból megkapjuk az előbbit." [8.]

A függvény megfeleltetésként való értelmezése a XIX. század első felében, többek között Fourier eredményei nyomán vált általánossá. Fourier 1807-től közölt dolgozatait 1822-ben A hő analitikus elmélete címen foglalta össze. A hő terjedésével kapcsolatos problémák adtak új lendületet a függvények trigonometrikus sorokban való előállításának elméletéhez.

Fourier azt állította, hogy tetszőleges összefüggő vonaldarabokból álló függvény — ha az egyes darabok definiálása között nincs is kapcsolat — előállítható

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

trigonometrikus sor alakjában, ahol az együtthatók f segítségével a következőképp fejezhetők ki:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

"Fourier eredményei, melyeket e feltevés alapján nyert, olyan nagyszámúak, jelentősek és a tapasztalattal mege-

gyezők voltak, hogy — félretéve Euler, D'Alambert és Lagrange ellenvéleményeit — a század legkiválóbb matematikusai most már nem e feltevés elvetésére, hanem bizonyítására feszítették meg erejüket. Nemsokára, 1829-ben jelent meg Dirichlet klasszikus dolgozata, amelyben teljes szigorúsággal bebizonyítja a Fourier szerint való sorbafejthetőséget a függvények egy tágosztályára: a véges sok monoton szakaszból álló függvényekre." [11.]

Ezzel az euleri, "szabadon mozgó kéz által rajzolt" görbe trigonometrikus sorok segítségével megfoghatóvá vált. Megszűnt az ellentmondás az analitikus kifejezések korlátozott volta és a funkcionális függések sokféleségéről alkotott elképzelések között. Lehetővé vált a függvénynek általános megfeleltetésként való értelmezése, és ezt a definíciókban is igyekeztek kifejezni. Fourier fentebb említett, híres, A hő analitikus elmélete című munkájában a következő definíciót adja: "Az $f(x)$ függvény teljesen tetszőleges függvényt jelent, vagyis valamennyi x értéknek megfelelő, általános törvénynek alárendelt, vagy alá nem rendelt értékek sorozatát." [8.]

Lobacsevszkij 1834-ben a következőket mondja a függvényről: "A minden x -re megadott, x -szel együtt állandóan változó számot x függvényének nevezzük. A függvény értékét vagy analitikus kifejezéssel, vagy olyan feltétellel kell megadni, amely módot ad minden szám

kipróbálására; és végül lehetséges, hogy létezik összefüggés, de ismeretlen marad." [10.]

Míg a XVIII. században a függvényt kifejezésnek vagy görbének tekintették, addig a XIX. században a függvény fokozatosan a szabály fogalmával vált azonossá. A függvény fogalma azáltal vált általánosabbá, hogy a szabály fogalmát egyre általánosabban értelmezték.

Nevezetes példája volt ennek a Dirichlet által konstruált következő függvény:

$$f/x/ = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \text{ racionális;} \\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$$

Dirichlet olyan általános függvénydefiníciót fogalmazott meg, amely a fentihez hasonló, korábban elképzelhetetlen függvények értelmezését is lehetővé tette:

"y az x függvénye, ha minden x értékhez hozzátartozik y-nak egy pontosan meghatározott értéke, és egyáltalán nem lényeges, hogy milyen módon történik a hozzárendelés." [10.]

Eddig a függvényfogalom tartalmi gazdagodása együttjárt a definíciók változásával, egyre általánosabb definíciók megfogalmazásával. A Dirichlet által 1837-ben megfogalmazott definíció már elég általánosnak bizonyult a XIX. század számára, annak ellenére, hogy a függvényekről alkotott kép ebben az időszakban is jelentősen változott.

Az új eredmények születése most sem járt kevesebb vi-

tával mint Euler, D'Alambert és Bernoulli idejében. A differenciál-és integrálszámítás, valamint a differenciálegyenletek alkalmazásának gyakorlati sikerei sokszor elfedték a függvények elméletének hiányosságait. A XVIII.-XIX. század fordulóján Lagrange próbált rendet teremteni ezen a területen, de a hatéérték fogalma, elsősorban a sorok konvergenciájának kérdései felderítetlenek maradtak.

A konvergencia fogalmának megalapozásában az első jelentős eredményeket Cauchy érte el. Ezek nyomán az egész korábbi, sokszor divergens sorokra építő analízis felülvizsgálatra szorult. "Mondják, hogy amikor Cauchy a párizsi Akadémia előtt a végtelen sorok konvergenciájáról szóló első értekezését felolvasta, Laplace-t annyira megzavarta, hogy a nagy ember hazarohant a *Mécanique céleste* /Égi mechanika/ sorait ellenőrizni." [12]

Jelentős eredményeket ért el a függvénytan alapjainak elméletében a XIX. század első felében alkotó cseh matematikus, Bolzano. A fogalmak tisztázásához, szétválasztásához több különleges függvényt konstruált, például mindenütt folytonos sehol nem differenciálható függvényt, de eredményeit nem publikálhatta.

Ilyen függvényt először Weierstrass berlini professzor publikált. Ő tekinthető az analízis egzakt alapjainak megteremtésében a Cauchy által megkezdett munka legjelentősebb folytatójának, az ő nevéhez fűződik az analízis ma is használt ε, δ apparátusának kiépítése.

A Descartes-tól Dirichlet-ig terjedő időszak a függvényfogalom fejlődésének extenzív szakasza volt, melyet az analitikus kifejezéstől az általános megfeleltetés fogalmáig terjedő tartalmi bővülés jellemezett.

Weierstrass tevékenységének idején, a XIX. század második felében a függvényfogalom egy erőteljes belső fejlődésen ment át. Tisztázódtak olyan fontos tulajdonságok, mint a folytonosság, a differenciálhatóság. Megadták ezek pontos definícióját, és azokat a tulajdonságokat, amelyekkel az egyes osztályokba tartozó függvények rendelkeznek. Tisztázták az egyes tulajdonságok egymáshoz való viszonyát.

Ez utóbbihoz kapcsolódva a függvény fogalmában egy tartalmi bővülés is jelentkezett. Az egyes tulajdonságok szétválasztásához, tételek bizonyításához egyre több speciális függvényt konstruáltak. Már nemcsak arról volt szó, hogy a függvény elfogadott definíciója lehetővé teszi olyan függvények értelmezését is, amelyeket nem egyetlen analitikus kifejezéssel definiálunk, hanem itt már ezek az igen változatosan konstruált függvények alkalmazást is nyertek, a függvénytan szerves részévé váltak.

"Az új vizsgálati iránnyal szemben nagyfokú bizalmatlanság nyilvánult meg, gyakran éppen a vezető matematikai tekintélyek részéről. Henri Poincaré így írt: Régebben ha egy új függvényt felfedeztek, ezt valami gyakorlati célból tettek; ma kimondottan azért talál-

ják fel ezeket, hogy atyáink következtetéseire rá-
cáfoljanak, s soha nem is fogják ezeket másra hasz-
nálani. Ch. Hermite még erősebb szavakat használt: Ré-
műlettel és borzalommal fordulok el el ettől a siral-
mas fekélytől: függvények, amelyeknek nincs derivált-
juk!" [11.]

Az ellenvéleményektől függetlenül az analízis fejlő-
dése az alapok felülvizsgálatának irányában haladt.
Ebben az irányban hatott Jordan és Peano mértékelmé-
lete, majd a századforduló idején Baire, Borel és
Lebesgue munkái révén megszületett a modern valós
függvénytan. Ezen alapvető változásokat már nem kö-
veti a függvény definíciójának rendszeres újrafogal-
mazása. A Dirichlet-féle függvényfogalom a valós függ-
vénytan legtöbb területén elég általánosnak bizonyult.

Az, hogy a definíció újrafogalmazására nem került sor,
nem jelenti azt, hogy annak értelmezésében nem követ-
kezett be változás. A függvénynek a XIX. századra
jellemző, szabályként való értelmezésével kapcsolat-
ban a századforduló táján kételyek merültek fel. En-
nek illusztrálásához tekintsük a következő hozzáren-
delést: Tetszőleges n pozitív természetes számhoz ren-
deljük az 1 vagy 0 számot aszerint, hogy π tizedestört
alakjában van-e egymást követő n 9-es, vagy nincs.

Az egyik tábor szerint: tetszőleges n -hez vagy létezik
 π tizedestört alakjában n egymást követő 9-es, vagy nem.
Harmadik lehetőség nincs, így tetszőleges n -hez egyér-

telműen vagy az 1, vagy a 0 érték tartozik; tehát ez függvény.

A másik tábor azt állította, hogy mivel nem ismerünk olyan szabályt, algoritmust amellyel el tudnánk dönteni tetszőleges n esetén, hogy létezik-e π tizedestört alakjában n egymást követő 9-es — sőt, lehet hogy ilyen szabály nem is létezik — így a fenti hozzárendelés nem függvény.

A kérdés lényegében ismét az volt, hogy hogyan lehet megadni függvényt? Ha különböző x -ekhez különböző módon rendelünk elemeket úgy, hogy ezek között semmiféle összefüggés nincs, akkor végtelen halmazon hogyan adhatjuk meg a hozzárendelést?

Senki nem kételkedett abban, hogy a véges sok utasításból álló szabállyal megadott függvényeknek van értelme, de van-e értelme szabály nélküli függvényeknek?

A halmazelmélet nyelvén fogalmazva: a véges sok utasítással adott függvények halmaza csak megszámlálható, míg a szabály nélküliek közül csak a folytonosaké kontinuum számosságú. Kizárhatjuk-e az analízisből a függvények többségét? A halmazelmélet kialakulása, az analízissel való összefonódása világossá tette, hogy a szabály nélküli függvényeknek helyük van az analízisben, sőt szükség van rájuk, hiszen gyakran van dolgunk olyan hozzárendelésekkel, amelyekben egy halmaz elemeihez olyan elemeket rendelünk, amelyekről csak azt tudjuk, hogy léteznek, és egyértelműen meghatározottak,

de nem adunk meg eljárást, szabályt ezek meghatározására.

A függvénynek szabályként való értelmezése mellett fokozatosan tért hódított a függvénynek mint tetszőleges módon összetartozó értékek halmazának értelmezése is. A Dirichlet-féle definíció lehetőséget ad ilyen értelmezésre is, de ezen új értelmezés már egy minden eddiginél általánosabb függvényfogalom kialakulásának előjele is volt.

A halmazelméleti függvényfogalom

A függvényfogalom fejlődésének korábbi korszakaiban a matematikusoknak az volt a törekvése, hogy a függvény fogalmát más, jól definiálható fogalmakra vezessék vissza /pl. az analitikus kifejezés fogalmára/. A Dirichlet-féle definíció nem felelt meg ennek a követelménynek, csak más rokonértelmű, hasonlóképpen nem definált fogalomra, a hozzárendelés, hozzátartozik fogalmára vezette vissza a függvényt. A Dirichlet-féle függvényfogalom alapvetően intuitív fogalom. A XIX. században nem merültek fel kételyek a definícióban szereplő "hozzátartozik" szó jelentésével kapcsolatban; és mivel a definíció elég általánosnak bizonyult, az alkalmazott függvények mind értelmezhetők voltak a definíció alapján, így az egzakt definícióra való törekvés nem látszott fontosnak, a Dirichlet-féle definícióval megoldottnak látszott a függvény fogalmának meghatározása.

A XX. század elején azonban újra felvetődött az egzakt definíció igénye. A matematika ujonnan született ága, a halmazelmélet összefogta a matematika különálló területeit. Sorra megalkották a matematika egyes ágainak halmazelméleti modelljét, és ebben a függvény Dirichlet-féle definíciója nem volt elég precíz, a benne szereplő "hozzátartozik" kifejezés nem volt elég egyértelmű.

Ismét olyan definíciót kerestek, amely jól definiálható fogalomra vezeti vissza a függvényt. Világos volt, hogy a korábbi próbálkozások /pl. a kifejezés segítségével adni egzakt definíciót/ nem vezethetnek eredményre, hiszen éppen ebben az időben következett be a függvényfogalom fentebb említett tartalmi bővülése, a szabály nélküli függvények elfogadása.

A korábbi időkben, elsősorban a XVIII. században úgy látszott, hogy azokat a definíciókat, amelyek más jobban definiálható fogalmakra kívánták visszavezetni a függvényt, a függvény fogalmának tartalmi fejlődése túlhaladta, kiszorította. Ugy tűnt, hogy az egzakt definícióra való törekvés és a függvényfogalom tartalmi bővülése ellentétes irányba hatnak. Érdekes módon mégis az egzakt definíció megszületését a függvény fogalmának egy újabb robbanásszerű tartalmi bővülése segítte elő.

A halmazelmélet fejlődése, a matematika más ágaiba való beépülése következtében már nemcsak valós szá-

mok egymáshoz rendelését tekintették függvénynek, hanem tetszőleges halmazok közötti egyértelmű megfeleltetéseket. Olyan sokféle hozzárendelést, hogy nyilvánvalóvá vált, hogy a függvény definíciójában nem a hozzárendelési módokat, lehetőségeket kell megadni, hanem éppen ezektől célszerű elvonatkoztatni.

Ma már kézenfekvőnek látszik, mégis lassan vált elfogadottá az absztrakció: a függvény rendezett párok halmaza. Pontosabban, az egyértelműség követelményét is figyelembe véve: a függvény rendezett párok olyan halmaza, amely nem tartalmaz azonos első elemmel rendelkező párokat.

Az, hogy minden függvény felfogható rendezett párok halmazaként, elég nyilvánvaló volt, de az, hogy rendezett párok minden fenti tulajdonságú halmaza függvény, már sokkal nehezebben gyökerezett meg a matematikai köztudatban. Minden bizonnyal közrejátszott ebben az is, hogy a függvény így megadott fogalma távol áll a funkcionális függésről alkotott mindennapi elképzelésektől.

Ez az oka annak is, hogy a halmazelméleti függvényfogalom nem szorította ki az intuitív függvényfogalmat; mindkettőt jelenleg is használjuk.

Nem ritka dolog az, hogy egy-egy fogalomnak több általánosan elfogadott definíciója is van, és mindig azt alkalmazzuk, amelyik kézenfekvőbb, alkalmasabb, jobban idomul az adott problémához. Ha felváltva

alkalmazunk két definíciót akkor általában szükséges megmutatnunk, hogy ekvivalensek. Ez azonban csak akkor szükséges és lehetséges, ha mindkét definíció más, jól definiált fogalmakra épül. Ha az egyik definíció intuitív, csak körülírása, más rokonértelmű, szintén nem definiált objektumokkal való meghatározása egy fogalomnak, akkor az egzakt definícióval való ekvivalencia bizonyításának nincs értelme. Ebben az esetben az egzakt definíció azt a célt szolgálhatja, hogy az intuitív definíciónál felmerülő értelmezési lehetőségeket egyértelművé tegye.

Ahogy a függvényfogalom változásait évszázadokon át élénk viták kísérték, úgy a mai napig is zajlanak az olykor igen szenvedélyes viták a halmazelméleti függvényfogalom alkalmazásáról és tanításáról. /Lásd pl. [15.] / Így nem csoda, hogy mind ez ideig nem valósult meg maradéktalanul az a lehetőség, hogy a matematika alkalmazói a halmazelméleti és az intuitív függvényfogalom körében is egyaránt otthonosan mozogjanak, és mindig a problémához jobban illőt alkalmazzák. Ezen a területen a matematika tanításának is komoly adósságai vannak.

A függvény fogalma az iskolában

A matematika új fogalmai általában felülről lefele haladva hódítanak teret a matematika tanításában, azaz először rendszerint a felsőoktatásban kapnak helyet, és általában hosszabb követési idővel jutnak el a közép- és alapfoku tananyagba.

Az újkori függvényfogalom kialakulásának időszakában a függvénytan ismeretek széleskörű gyakorlati alkalmazásaik miatt igen gyorsan egyetemi tananyaggá váltak.

Pl. L'Hospitálnak már 1696-ban tankönyve jelent meg A végtelen kicsinyek analizise címen, amely a differenciál- és integrálszámítás Johann Bernoulli előadásaiban elhangzó legfrissebb eredményeit adja közre. A függvénytan további fejlődésében is gyakori, hogy jelentős eredmények egyetemi előadások keretében kerülnek bemutatásra. Weierstrass például eredményeinek jelentős részét, /a mindenütt folytonos, sehol nem differenciálható függvényt is/ először előadásában ismertette.

Mint a bevezetésben említettük a függvény a múlt század közepén került a középiskolai tananyagba. Ez a matematikában a Dirichlet-féle függvényfogalom kialakulásának, alkalmazásának korszaka, de a középiskolai tananyagba még a kifejezésekre épülő függvényfogalom került. A minta Eulernak a történeti részben ismertett *Introductiója* volt. Nemcsak ekkor, a függvényfo-

galom középiskolában való megjelenésének időszakában, hanem még egy évszázadon át az euleri függvényfogalom volt az uralkodó az iskolai matematikában. Ha történt is utalás arra, hogy a függvény megfeleltetés, a tananyagban csak kifejezéssel megadott valós függvények szerepeltek.

A függvénynek következetesen egyértelmű hozzárendelésként való értelmezése, a kifejezéssel adottakon kívül más függvények alkalmazása, a geometriának a transzformációkra való építése, a függvényfogalom központi szerepének kiemelése az 1965-től tanított gimnáziumi és szakközépiskolai tantervekben és tankönyvekben jelentős előrelépést jelentett a függvények tanításában. Ez a tanterv hozta vissza a középiskolába a differenciál- és integrálszámítást is.

Ez a tanterv már elvileg lehetővé tette a matematika tudománya által használt intuitív függvényfogalommal egyenértékű fogalom kialakítását a középiskolában.

A tantervben kitűzött célok megvalósulását azonban a bevezetésben már részletezett okok: az általános iskolai ismeretek hiányos volta, a függvényfogalom kialakítására jutó idő rövidsége akadályozta. Így többnyire csak a szakosított tantervű osztályokban sikerült széles körben alkalmazható függvényfogalmat kialakítani. A jelzett akadályok még 1979-ben a következő, jelenleg is érvényben lévő tanterv bevezetésekor is fennálltak.

A középiskolai matematikatanítás jelenlegi feltételeinek megismeréséhez célszerű áttekinteni a matematika tanításában az utóbbi negyed században jelentkező korszerűsítési törekvéseket. A hagyományos matematikaoktatásban nemcsak a függvénytan, hanem az egész alap- és középfoku tananyag az Euler korabeli matematika iskolai változata volt. Azóta a matematikának olyan új ágai alakultak ki, mint a halmazelmélet, a matematikai logika, az absztrakt algebra, a valószínűségszámítás, a gráfelmélet, a számítástechnika. Nemcsak nálunk, hanem világszerte az ötvenes évek második felétől egyre erőteljesebben jelentkezett az igény az új eredményeknek a korszerű műveltségbe való beépítésére. Annál is inkább, mert várható volt, hogy amint a matematika tudományában történt, úgy az iskolai matematikában is az új területek módszerei és eredményei a hagyományos ismeretek tárgyalását is hatékonyabbá tehetik.

A matematikatanítás korszerűsítésének célkitűzése az volt, hogy "a matematika tudományának mai eredményei és szemlélete alapján határozzuk meg az iskolai tananyag tartalmát, s az így kiválasztott ismeretanyagot a modern pszichológiai és pedagógiai eredmények alkalmazásával, korszerű oktatási módszerek felhasználásával tanítjuk az iskolában." [15.]

Az 1962-ben Budapesten megrendezett Nemzetközi Matematikaoktatási Szimpozion megállapításainak és aján-

lásainak figyelembevételével 1963 szeptemberétől un. komplex matematikatanítási kísérlet indult az OPI irányításával. A kísérlet tapasztalatainak felhasználásával 1974-től az általános iskola első osztályában új tanterv, ezzel egyidőben ötödik osztályban un. ideiglenes tanterv került fokozatos bevezetésre. /Vagyis nem egyszerre minden első és ötödik osztályban, hanem személyi és anyagi okok miatt csak több lépcsőben léptek be a fenti tantervek./ Az alsó tagozatos tantervek felfutásával a felső tagozaton is az ideiglenes tantervet fokozatosan új tanterv váltja fel. A középiskola szempontjából néhány fontosabb dátum: 1979-ben a jelenlegi gimnáziumi tanterv bevezetésekor az általános iskolát végzett tanulók 84%-a régi, 16 %-a ideiglenes tanterv szerint tanult. 1982-től már egyetlen középiskolába lépő sem tanulta a régi tantervet: 92,5 % ideiglenes, 7,5% új tanterv szerint tanult. 1986-tól már minden tanuló az új tanterv ismereteivel kerül középiskolába. [3.]

Az ideiglenes és új tanterveknek egyaránt jellemzője, hogy egységes átfogó szempontok alapján épülnek fel. Ilyen átfogó szempontok a halmaz- és a függvényszemlélet. A halmazelméleti tárgyalásmód már az általános iskola első osztályában elkezdődik. Ennek segítségével tárgyalják a természetes számok szorzását, összeadását, később a geometriai alakzatokat, az oszthatóságot, az egyenleteket.

A függvényfogalom kialakítása is megkezdődik már az első iskolai évben egyszerű hozzárendelések, leképezések, szabályjátékok tárgyalásával. Fokozatosan bővül a megismert sorozatok, függvények geometriai leképezések köre. Nyolcadik osztályig széleskörű, sok területen alkalmazható függvényfogalom alakulhat ki. Az ideiglenes és az új tantervben is nyolcadik osztályban jutnak el a függvény fogalmának definiálásáig, de a két tanterv kialakította függvényfogalom nem azonos.

Az ideiglenes tanterv —ötödik osztálytól — azt a szemléletet igyekszik kialakítani, amelyben a függvény összetartozó párok halmaza. Nyolcadik osztályban a következő definícióig jutnak el:

"A direkt szorzat részhalmaza egy relációt határoz meg."

"Az olyan relációt, amely egy A halmaz minden egyes eleméhez a B halmaznak csak egy elemét rendeli hozzá, függvénynek nevezzük."

A hazai matematikatanításban ez az első példa a halmazelméleti függvényfogalom iskolai alkalmazására. Bár az ideiglenes tantervet fokozatosan az új tanterv váltja fel, érdemes a halmazelméleti fogalom és definíció alkalmazásának tapasztalatait röviden ismertetni.

Mint minden új dolog, az ideiglenes tanterv tanításánál is adódtak nehézségek. Az első néhány év tapasztalatai azt mutatták, hogy a relációk témakörben ki-

tüzött célok megvalósítása sikerült legkevesbé.

Egyrészt általános iskolások számára túl bonyolultan tárgyalja a relációkat, másrészt viszont a relációk alkalmazásának több lehetséges előnyét nem használja ki a tankönyv. /Pl. a transzformációk tanításában. Lásd [17.] /

Ezek után a függvény fogalma egy nem kellően megalapozott relációfogalomra épült. Bár a függvény fenti definíciója önmagában még egy jobban megalapozott relációfogalomra épülve is túl elvont lenne az általános iskolai tanulók számára. A fenti definíció nem egy intuitív alapon kialakított függvényfogalom fokozatos absztrakciójával születik meg, hanem mint a rendezett párok egy lehetséges osztályozása.

Mindezen fogalmi problémák mellett viszont a korábbi tanterveknél összehasonlíthatatlanul több függvénnnyel ismerkednek meg a tanulók. Sokkal nagyobb jártasságra tesznek szert a függvények ábrázolásában, grafikonok, táblázatok olvasásában, értelmezésében, a függvénytranszformációk alkalmazásában.

Összegezve azt mondhatjuk, hogy az ideiglenes tanterv függvénytani anyaga jelentős előrelépést jelentett a korábbi tantervekhez képest, de a halmazelméleti függvényfogalom alkalmazásában rejlő lehetőségeket nem tudta kihasználni.

Az új tanterv szerint tanulók már első osztálytól találkoznak szabályjátékokkal, párképzésekkel, megfelelő-

tetésekkel. A nyolc év során egyaránt találkoznak a halmazelméleti függvényszemléletet építő elemekkel, /pl. rendezett párok képzésével, táblázatokkal/, és a függvény megfeleltetés jellegét kidomborító ismeretekkel, /pl. nyíldiagramokkal/. A függvény definiálásának viszont a kevésbé elvont, általános iskolások számára könnyebben érthető módját választották: "Az egyértelmű megfeleltetéseket függvényeknek nevezzük." A függvénytani anyag még bővebb, változatosabb mint az ideiglenes tantervé. A függvény inverzének és a függvények összetételének tárgyalása a rendezett pár fogalmán, a halmazelméleti függvényszemléleten alapul. Az intuitív és a halmazelméleti függvényfogalom szerencsés összehangolása, a függvényszemlélet több területen, például a geometriai transzformációk tanításában történő alkalmazása, a változatos feladatanyag minden korábbinál magasabb szintű függvénytani ismeretek elsajátítását teszi lehetővé.

Az általános iskolából érkező tanulók körében végzett felméréseink is azt mutatják, hogy az ideiglenes és az új tanterv szerint tanulók függvényekkel kapcsolatos ismeretei felülmulják a más területek ismeretszintjét.

/A hagyományos tananyagból minden évben írt felmérő mellett az elmúlt években külön felmérőt írtunk halmazokkal, függvényekkel és a kvantorok használatával kapcsolatos feladatokból. /Lásd 1., 2. melléklet./

Az új témakörökből összeállított, általános és középiskolai tanárok által egyaránt nehezebbnek tartott feladatokból lényegesen jobb eredményt értek el a tanulók mint a hagyományos anyagból.

A felmerők, és később a függvények tanításában szerzett tapasztalatok nem mutattak lényeges különbséget az ideiglenes és az új tanterv szerint tanulók között az elemi függvények felismerésével, ábrázolásával, alkalmazásával kapcsolatos feladatokban; de a függvény fogalmával kapcsolatos kérdésekben már jelentős eltérések mutatkoztak. Az ideiglenes tanterv szerint tanulók közül senki nem tudott pontos definíciót adni a függvény fogalmára, körülírást is csak kevesen; meghatározás helyett példákat soroltak, szinte kizárólag valós függvények köréből. Az új tanterv szerint tanulóknak viszont nagyobb része emlékezett a tanult definícióra, és több példát is tudtak adni nem valós függvényekre, elsősorban a geometriai transzformációk köréből. /

Összegezve tapasztalatainkat: Az általános iskolából a középiskolába lépő tanulók tudják csoportosítani a hozzárendeléseket egyértelműség szempontjából; ismerik a lineáris függvényeket és ezeket tudják ábrázolni, jellemezni; ismerik és tudják alkalmazni az egyenes és fordított arányosságot; van némi gyakorlat a másodfoku és abszolútértékfüggvény transzformációkkal történő ábrázolásában; vannak még ismereteik a függvény inverzéről, és az összetett függvény-

ról, és az új tanterv szerint tanulók ezeket kis segítséggel a geometriai transzformációk és más nem valószínű függvények körében is tudják alkalmazni.

Ismereteik tehát sokrétűek, de azok alkalmazásában, és főleg azok megfogalmazásában nem elég magabiztosak.

Mindezeket középiskolában fel kell eleveníteni, rendszerezni kell, de nem szükséges új anyagként tárgyalni.

A következőkben azt vizsgáljuk, hogy milyen lehetőségek vannak középiskolában a függvényfogalom kialakítására?

1. Csak az intuitív fogalmat építjük ki.

Ez a jelenlegi tantervek, tankönyvek gyakorlata./Bár a Korányi-féle 4. osztályos tankönyvekben csak valószínű függvényekre szerepel a halmazelméleti definíció is, de a halmazelméleti fogalom alkalmazására nem kerül sor./

2. A megfeleltetés /reláció/ és a függvény fogalmát úgy fejlesztjük, hogy a tanulók számára természetes legyen, hogy ezek rendezett párok halmazával azonosak, és csak a halmazelméleti definíciót adjuk meg.

3. A függvényekkel való ismerkedés első szakaszában /pl. az első két évben/ csak az intuitív definíciót adjuk meg, de a függvényfogalmat úgy fejlesztjük, hogy később, /pl. fakultáción/ a halmazelméleti definíciót is megadhatunk, alkalmazhatunk.

Ezt a módszert alkalmazzák pl. a Szovjetunióban.

4. A kétféle függvényfogalmat párhuzamosan fejlesztjük, a középiskola első osztályában mindkét definíciót megfogalmazzuk, később pedig mindig azt a defini-

ciót, fogalmat alkalmazzuk, amelyik az adott problémához kézenfekvőbb.

A 2. koncepció általános iskolai megvalósítását tervezte az ideiglenes tanterv. Fogyatékokosságairól fentebb már szóltunk. Még középiskolában is a halmazelméleti definíció és fogalom önmagában túl absztrakt, távolesik a hétköznapi függés-fogalomtól.

Varga Tamás [18.] -ban hangoztatja a halmazelméleti függvényfogalom megismerésének szükségességét, de csak az intuitív fogalomra ráépítve: "A függvényfogalom /helyesebben fogalmak/ kialakításával elsőrendű célunk a tanulók intuíciónak fejlesztése. Az intuitive megragadott fogalomra ráépülhet minden egyéb: matematikai formanyelv, definíció, tételek, feladatmegoldási módszerek. Ha azonban ez hiányzik, akkor az az idő és energia amit az utóbb felsoroltak elsajátíttatására fordítunk, nagy részben kárbavész. Az intuitív fogalom jellemzője, hogy szervesen beépül a tanulók teljes fogalomrendszerébe — tehát nemcsak matematikai fogalmainak rendszerébe! — és ezért operatív."

A másik három koncepciót a gyakorlatban is kipróbáltuk, és a 4. változatot tartottuk a legeredményesebbnek. A gyakorlati megvalósításról később részletesen szólnunk, most csak néhány érvet sorolnánk fel a 4. koncepció mellett /és ezzel egyben az 1. és 3. lehetőségről is véleményt mondunk/.

Miért hasznos, ha a tanulók ismerik a halmazelméleti függvényfogalmat ?

1. Csak az intuitív fogalom tanítása általánosan azzal jár, hogy a tanulók szemében a függvény a szabály fogalmával azonosul. Ha viszont a halmazelméleti definíciót is ismerik, nyilvánvalóbb lesz számukra a függvények sokfélesége, általánosabb függvényfogalom alakulhat ki, természetes lesz a tanulók számára, hogy a függvénytani módszerek alkalmazhatók minden olyan területen, ahol összetartozó párokkal találkozunk, akkor is, ha nem ismernek olyan szabályt, amely az adott párokat állítja elő. Minden ilyen területen /nemcsak a matematikában!/ érvényesülhet a függvényyszerű gondolkodás.
2. Ha a tanulók tudják, hogy rendezett párok minden olyan halmaza, amelyben az első elemek különbözők, függvény, akkor kevésbé valószínű, olyan téves, később már nehezen megváltoztatható nézetek kialakulása, hogy minden valós függvény grafikonja vonal, hogy a függvények néhány kivételes helytől eltekintve folytonosak, stb. Ha az analízisben nem is használjuk közvetlenül a halmazelméleti fogalmat, annak szemléletfejlesztő hatása hasznos lehet.
3. Sok probléma egyszerűbbé válik a halmazelméleti definíció ismeretében. Pl.:
Mikor tekintünk két függvényt azonosnak ?
Mit értünk egy függvény inverzén ?

Mit értünk egy valós függvény grafikonján ?

Mit értünk két függvény szorzatán /összetett függvényén ?

4. A halmazelméleti függvényfogalom ismeretében sok feladat megoldása is egyszerűbbé válik. /Pl. a kreativitást jól fejlesztő konstrukciós feladatoké./ Tapasztalataink szerint az az idő és energia többlet, amelyet a halmazelméleti függvényfogalom kialakítására fordítunk, sok probléma egyszerűbb kezelhetőségével bőven megtérül.

Miért célszerű már első osztályban halmazelméleti függvényfogalmat és definíciót tanítani ?

1. Mint fentebb már említettük az általános iskolai új tantervekben jelentős szerepet kap a halmazelméleti függvényfogalom fejlesztése, és annak alkalmazására is sor kerül. Azok az anyagrészek, amelyekben a függvények rendezett párok halmazaként /is/ szerepelnek, /szabályjátékok, függvényképző automaták stb./ általában kedveltek a tanulók körében. A középiskola első osztályában még jól lehet ezekre az ismeretekre építeni, kár lenne hagyni, hogy feledésbe merüljenek, és csak később visszatérni a halmazelméleti fogalomra.
2. A középiskola első két évének anyagában sok olyan rész van, /függvény grafikonjának értelmezése, inverzfüggvény fogalmának kialakítása, geometriai transzformációk/ amelyekben segíthet, ha a függvényt rendezett párok halmazaként is értelmezzük.



3. A jelenlegi fakultációs rendszerben a leendő orvosok, biológusok, vegyészek, agrármérnökök többsége nem fakultatív tárgyként tanulja a matematikát. Ha az első két évben nem alakítunk ki általános, sok területen alkalmazható függvényfogalmat, akkor ez a nem fakultatív csoportokban aligha sikerülhet, a fentebb már említett téves függvénykép helyrehozása pedig még a fakultációs órákon is nehéz.

A halmazelméleti függvényfogalom tananyagba építésének egy minimális programja lehet, hogy a függvényfogalom kialakításánál felhívjuk a figyelmet arra, hogy a függvény rendezett párok halmazaként is felfogható; és később, ahol nagyon kézenfekvő, /pl. függvény grafikonja, inverze/ utalunk erre az értelmezésre, de pontos definíciókat nem adunk.

Az általánosabb, szélesebb körben alkalmazható függvényfogalom kialakításához azonban arra is szükség van, hogy rámutassunk: rendezett párok minden olyan halmaza, amely nem tartalmaz azonos első elemű párokat, függvény. Egy teljesebb halmazelméleti függvényfogalom kialakításához a középiskolában már definíciókra is szükség van.

Elképzelhető, hogy az összes függvénytani fogalomnál végigvisszük a kettős definíciót, de ez túlzott program lenne. Legcélszerűbbnek az látszik, ha a hozzárendelés és a függvény fogalmánál az intuitív és a halmazelméleti definíciót is megadjuk, a továbbiakban

pedig mindig azt a fogalmat, definíciót alkalmazzuk, amely az adott problémához kézenfekvőbb, egyszerűbb. Sok esetben persze csak szubjektív választ adhatunk arra a kérdésre, hogy melyik tárgyalásmód egyszerűbb. Mivel minden jel arra mutat, hogy a matematikában még hosszú ideig együtt lesz jelen a kétféle függvényfogalom a maga jórészt különböző jelölésrendszerével, így a középiskolában célszerű mindkettőt megismertetni a tanulókkal, és egy alapfoku jártasságot kialakítani mindkét fogalom- és jelölésrendszer használatában. Annál is inkább, mert mindkét fogalom- és jelölésrendszernek már az iskolai matematika tanításában vannak olyan előnyei, amelyekkel a másik nem rendelkezik. Miután /miközben/ ezt az alapfoku tájékozottságot mindkét területen kialakítottuk, már szubjektív szempontok alapján dönthetjük el, hogy milyen arányban szerepeljen az intuitív ill. halmazelméleti megközelítés szerinti tárgyalás.

Kísérlet a középiskolai függvénytani anyag
hatékonyabb tanítására

A kísérlet kialakulása, célja

Természetesen az általános iskolai reformok megkezdésének idején a középiskolában is jelentkezett az igény a korszerűbb ismeretek, hatékonyabb módszerek bevezetésére. A már említett 1965-ös tanterv kisebb módosításokkal, a módszerek fokozatos fejlesztésével megfeleltethető volna az elvárásoknak, amíg az általános iskolai tantervek felfutnak. A korábban már vázolt okok miatt azonban a tanterv céljait nem sikerült megvalósítani, sőt a hetvenes évek elején a tananyag csökkentésére került sor.

Világos volt, hogy hosszabb távon nem a tananyag csökkentése, hanem a hatékonyabb módszerek keresése a megoldás. A mi iskolánkban elsősorban a fizika szakosított tantervű osztályokban jelentkezett az igény a korszerűbb matematikai ismeretek iránt. Így merült fel a matematika más ágainak és a többi tantárgynak a tanítását jobban segítő, általánosabb függvényszemlélet kialakításának szükségessége.

Ezért a hetvenes évek közepétől ezekben az osztályokban kísérletet tettünk a függvénytani anyag átalakítására. Bár akkor még minden tanuló a régi általános iskolai tanterv ismereteivel került hozzánk, a változtatás lehetőségét mégis biztosította a szakosított tantervű osztályok jobb képességű és érdeklődőbb tanulóanyaga, a valamivel magasabb óraszám, és az is,

hogy ezen osztályok tanterve már az általánosabb függvényfogalom kialakításához nélkülözhetetlen halmazelméleti ismeretekkel kezdte a középiskolai anyagot.

1978-ban ezeket az ismereteket néhány órában beépítve a tananyagba, egy nem szakosított tantervű osztályban is a fizika tagozaton kialakított módszer szerint tanítottuk a függvényeket, és ez itt is a régebbinél eredményesebbnek bizonyult. Ekkor még csak az volt a tervünk, hogy elébe menjünk azoknak a változásoknak, amelyeket a tagozatos rendszer megszüntetése után az 1979-ben bevezetésre kerülő új tantervektől vártunk.

Az új tantervek és tankönyvek hoztak ugyan néhány pozitív változást, /például a halmazelméleti ismeretek bekerültek az anyagba/ de a függvénytan korábbi problémáinak jelentős része nem oldódott meg.

Az új gimnáziumi tanterv még kizárólag a régi általános iskolai tanterv minimális függvénytani anyagára épít, nem veszi figyelembe az ideiglenes és új tantervek belépésével lényegesen bővülő ismereteket.

Az első osztályos függvénytan színvonala igen alacsony, kevés függvénnnyel, függvénytulajdonsággal ismereteti meg a tanulókat. A szakközépiskolákban egy évvel korábban bevezetett tankönyvek anyaga gazdagabb, több színvonalas feladatot tartalmaz. A gimnáziumban két tankönyv közül választhatnak a tanárok, ezek közül különösen a Korányi-féle könyv függvényképe szegényes. Ez a kép a továbbtanuláshoz és az azt

előkészítő fakultációhoz nem nyújt megfelelő alapkat.

A hatékony tanítást gátolja az is, hogy a függvénytani anyag nem eléggé rendszerezett. Az első két év anyagában a tárgyalt függvények rendszerint egy más problémához kapcsolva kerülnek bemutatásra. /Pl.: egyenes arányosság, fordított arányosság, Pitagorasz tétele, másodfoku egyenlet megoldása./ A tananyag gerincét ezek a problémák alkotják, a függvények segédeszközként szerepelnek. Így a tanulók csak azokat a függvényeket ismerik amelyekkel konkrétan foglalkoztak, más hasonló függvényeket nem. Nem látják az összefüggéseket, az analógiákat. A rendszerezettség hiánya különösen első osztályban feltűnő, ahol a függvényekkel kapcsolatos ismeretek önálló fejezetet alkotnak.

Mindezen problémákat látva az új tanterv bevezetése után is indokoltnak láttuk folytatni a kísérletünket.

Kísérletünkben főleg az első osztályos függvénytani anyagot láttuk szükségesnek átalakítani, a következő évek anyagában alapvető szerkezeti átalakításokat nem tartottunk fontosnak, de az első osztályban kialakított módszereinket továbbra is alkalmaztuk.

Függvénytanítási kísérletünknek az volt a célja, hogy olyan függvényfogalmat, függvényszemléletet alakítsunk ki, amely segít a valóságban végbemenő folyamatok megismerésében, amely más tantárgyakban és a mindennapi életben egyaránt jól alkalmazható.

A matematika anyag rendszerében is központi szerepet szántunk a függvényeknek. Olyan függvényfogalmat és alkalmazási

szintet kívántunk kialakítani, amely a hagyományos /egyenletek, egyenlőtlenségek, szélsőértékfeladatok megoldása stb./, és az újabban alkalmazott területeken/transzformációk, logika, számítástechnika stb./ egyaránt segíti az ismeretek elsajátítását, amely az egész tananyagot átfogó egységesítő, rendszerező elvként szolgálhat, és amely megfelelő előkészítést nyújt a felsőbb matematikai ismeretekhez.

Ezen célok eléréséhez először is a függvénytani anyag rendszerezését tartottuk fontosnak. Különösen első osztályban a függvénytan alapjainak lerakásánál találtuk ezt szükségesnek, mert az általános iskolából hozott egyre több irányú ismeret elraktározását, magabiztosabb alkalmazását segíti, ha egy jól felépített rendszerbe sikerül azokat beépíteni. Az első osztályban kialakított rendszerbe később az elszortan jelentkező függvénytani ismereteket, újabb függvényeket is be lehet építeni.

Ha függvénytani szempontok alapján rendszerezzük az anyagot, akkor ez a tanítás hatékonyságát is növelheti, mert így nem különálló függvényeket, hanem összetartozó függvénycsoportokat vizsgálhatunk. Világosabb lehet az összefüggés az egyes függvények között, valamint a függvények és az őket definiáló kifejezések alakja között. Elérhetjük, hogy közvetlenül nem tárgyalt függvényeket is el tudjanak helyezni a rendszerben a tanulók, és tudják azokat vizsgálni, alkalmazni.

Mi legyen az a függvénytani szempont, amely szerint a függvények tanítását megszerezhetjük ?

A kifejezéseken alapuló euleri függvényfogalom jól felépített rendszer volt, de egyrészt a függvény fogalmának tartalmi bővülése messze túlhaladta a kifejezéssel adottakat, másrészt a középiskola felsőbb osztályaiban már nem is a definiáló kifejezések, hanem a tulajdonságok /monoton, periodikus, folytonos, differenciálható, integrálható, stb./ szerinti rendszerezésben tárgyaljuk a függvényeket. Mivel az utóbbi husz év tankönyvei már az eulerinél tartalmilag gazdagabb függvényfogalom kialakítását tűzték ki célul, a tulajdonságok szerinti rendszerezés pedig a függvényekkel való ismerkedés első szakaszában nem valósítható meg, így az első év függvénytani anyagából szinte mindenütt hiányzik a rendszerezettség, az egységes koncepció.

Ezzel párhuzamosan fokozatosan háttérbe szorult az elemi függvények egy jelentős része, anélkül, hogy a függvény fogalmának általánosításában lényeges áttörésre került volna sor.

A közelmúltban az általános és a középiskolában is több indokolt tananyagmódosítás, új témakör vagy fogalom bevezetése azzal járt, hogy a hagyományos ismeretekre kevesebb gondot fordítottak, így az új ismeretek bevezetése sem járt kellő eredménnyel. Vagy már a tananyag összeállításánál a tartalmi, vagy formai újítás mellett elhanyagolják a hagyományos ismeretek egy részét, /pl. a Korányi-féle első osztályos tankönyv egy következetes jelö-

lési rendszer kialakítására koncentrált, de emellett igen kevés függvényt tárgyal, hiányoznak a hatványfüggvények, lineáris törtfüggvények/; vagy a megfelelő arányban összeállított anyag tanítása során a tanítók, tanárok a még szokatlan új ismeretekre koncentrálnak fordítanak kevesebb gondot a hagyományos ismeretek, készségek kialakítására. Ez utóbbi történt sok esetben az új általános iskolai tantervek bevezetésekor.

Mindezeket szeretnénk volna elkerülni, és ezért az elemi függvények megismerését, és egy általánosabb, széles körben alkalmazható függvényfogalom kialakítását egyenrangú célnak tekintettük. E célok megvalósításához a függvények tanításának következő koncepcióját alakítottuk ki: Először az elemi függvényeket az őket meghatározó kifejezések alakja szerint rendszerezve tárgyaltuk. Ez a rendszer adta az első osztályos anyag vázát. Az elemi függvények ismerete olyan alap, amelyre a matematika szinte minden területén lehet építeni, amely mindenütt /más tantárgyak matematikai jellegű ismereteinél is/ biztonságot szolgáltat a tanulóknak. Közben nem tévesztettük szem elől a másik célt sem. Ahhoz, hogy a tanulók függvényképe ne legyen azonos a kifejezéssel adott függvényekkel, a fő tárgyalási irányon kívül is folyamatosan bővítettük a függvényfogalmat. A tárgyalt elemi függvények tulajdonságait /monotonitás, szélsőérték, párosság stb. / az első adódó alkalommal igyekeztünk pontosan megfogalmazni, és az éppen tárgyaltakon kívül is grafikonnal és más módokon próbáltunk olyan függvényeket megadni, amelyek

az adott tulajdonságokkal rendelkeznek, ill. nem rendelkeznek. Az összefoglalásnál már a tulajdonságok szerint is rendszereztük a függvényeket, és második osztály végéig fokozatosan a tulajdonságok szerinti rendszerezésre tevődött át a hangsúly.

Kísérletünk eredeti célkitűzései között nem szerepelt a halmazelméleti függvényfogalom széleskörű alkalmazása, de menet közben, amikor változatos hozzárendelések megadásával kívántunk egyensúlyt teremteni a kifejezéssel adott és az egyéb függvények között, fokozatosan erősödött az a meggyőződésünk, hogy csak a halmazelméleti függvényfogalom kialakításával tudjuk ezt az egyensúlyt megteremteni.

Már korábban is utaltunk rá, hogy a függvény felfogható rendezett párok halmazaként, és pl. a függvény inverzének, a valós függvény grafikonjának definiálásánál használtuk is ezt az értelmezést. Később azonban úgy láttuk, hogy szükség van annak hangsúlyozására is, hogy rendezett párok minden olyan halmaza függvény, amely nem tartalmaz azonos első elemű párokat. Ha ez természetessé vált a tanulók számára, akkor tudtak igazán sok példát adni különböző tulajdonságokkal rendelkező, ill. nem rendelkező függvényekre. Mivel több más területen is hasznosnak bizonyult a halmazelméleti fogalom ismerete, így az intuitív és a halmazelméleti függvényfogalom párhuzamos fejlesztése mellett döntöttünk.

Kísérletünk további célkitűzéseit /pl.: a kvantorok kezelésének, a bizonyítási készségnek fejlesztése/ a megfelelő anyagrészeknél részletezzük. Kísérletünkhöz szorosan kapcsolódik még a függvénytan előkészítéseként a valós számok halmazával és a kifejezésekkel kapcsolatos ismeretek bővítése.

A függvények tanításának előkészítéséről

A függvények megalapozott tanításához a megelőző, Számhalmazok, aritmetika című fejezetben feltétlenül szükségesnek találtuk a valós számok halmazát a tankönyvben levőnél sokkal részletesebben tárgyalni.

A valós számok fogalmának fejlesztését első osztályban a számegyenes szemléletes fogalmára és a tizedes törtekre alapoztuk, mert ezek alkalmazása az általános iskolából jól ismert. Segítségükkel már első osztályban szinte mindent elmondhatunk a valós számokról, ami középiskolában egyáltalán elmondható, és az állítások jelentős részét már itt igazolni tudtuk.

Természetesen nem lenne célszerű arra törekedni, hogy mindent bizonyítsunk. Az állítások egy részét szemlélet alapján elfogadtuk, a fogalmak egy részét ismertnek tekintettük, nem definiáltuk, de ilyen esetben is többször utaltunk történeti kialakulásukra, és arra hogyan lehetne egzaktabbá tenni a tárgyalást.

A természetes szám fogalmát ismertnek tekintettük, nem definiáltuk, de utaltunk rá, hogy milyen absztrakció során alakult ki a fogalom az azonos számosságú véges halmazok közös jellemzőjeként. A természetes számok körében elvégezhető összeadást és szorzást is ismertnek vettük, de itt is utaltunk rá, hogy miként származtatható az összeadás idegen halmazok egyesítése, a szorzás halmazok direkt szorzata segítségével. A tanulók számára nyilvánvaló volt, hogy az összeadás és a szorzás nem vezet ki a természetes számok halmazából.

Az $a + x = b$ $x=?$ $/a, b \in \mathbb{N}/$ egyenlet azonban már nem mindig oldható meg a természetes számok halmazán.

Az egyenlet megoldása b és a különbsége. A két természetes szám különbségeként felírható számok halmazát neveztük egész számok halmazának. Az egész számok halmazából nem vezet ki az összeadás, kivonás és a szorzás. Itt beszéltük meg, hogy az egész számokat hogyan lehet számegyenesen ábrázolni, majd a fentihez hasonlóan definiáltuk a racionális számok halmazát.

Az $a \cdot x = b$ $x=?$ $/a, b \in \mathbb{Z}, a \neq 0/$ egyenlet az egész számok halmazán nem mindig oldható meg. Az egyenlet megoldását b és a számok hányadosának nevezzük. A két egész szám hányadosaként felírható számokat racionális számoknak nevezzük. Az első négy alpművelet $/a$ 0 -val való osztás kivételével/ nem vezet ki a racionális számok halmazából. Itt beszéltük meg azt, hogy a racionális számokat hogyan ábrázolhatjuk számegyenesen, és felvetettük, vajon a racionális számok kitöltik a számegyenest? Ahhoz, hogy erre és további kérdésekre választ tudjunk adni, a következőkben a hatványozás azonosságaiival, számelméleti, oszthatósági kérdésekkel foglalkoztunk.

Az oszthatóság témakört a tankönyvek elég mostohán kezelik, mi több szempontból is szükségesnek tartottuk a részletesebb, alaposabb tárgyalást. Témánk szempontjából egyrészt azért érdekes, mert később a hozzárendelések osztályozásánál a tanulók is változatos, osztha-

tósággal kapcsolatos hozzárendeléseket tudnak megadni, konstruálni. A valós számokkal kapcsolatos további ismeretek egy része is számelméleti, oszthatósági ismereteken nyugszik. /Pl. később hivatkozunk majd arra, hogy egy természetes szám akkor és csak akkor n -dik hatvány, ha törzstényezős felbontásában minden kitevő osztható n -nel — ezért ezt az állítást itt igazoltuk./

A bizonyítási készség fejlesztésére is igen alkalmas ez a témakör. Változatos bizonyítási módszereket, pl. indirekt bizonyítást, skatulya elvet gyakorolhatják a tanulók egyszerű feladatokon. Függvénytanítási kísérletünkben is fontos szerepet szántunk a bizonyítási készség fejlesztésének, ezért is hangsúlyozzuk az oszthatóság és a függvények témakörének szoros kapcsolatát.

Ezután folytattuk a valós számok halmazának vizsgálatát, ezuttal tizedes törtek segítségével. A tizedes törteket általános iskolából ismerik a tanulók, de itt is röviden utaltunk a fogalom kialakulásának körülményeire, arra, hogy a mértékegység törtrészeivel történő méréssel, vagy a számegyenesen egy ponthoz tartozó szám keresésével hogyan juthatunk el a tizedes tört fogalmához. / [19.] I. 27.-28. old. / A valós számokkal kapcsolatos további ismerkedés a következő lépésekből állt:

1. A racionális számok vagy egészek, vagy véges tizedes törtek, vagy végtelen szakaszos tizedes törtek.

Megvizsgáltuk, hogy a $\frac{p}{q} / (p; q) = 1$ / racionális szám

mikor egész, mikor egyenlő véges tizedes törttel, és skatulya elvvel igazoltuk, hogy ha tizedes tört alakja végtelen, akkor szakaszos.

2. A véges, és végtelen szakaszos tizedes törtek felírhatók két egész szám hányadosaként.

Véges tizedes törtekre igazoltuk az állítást. Végtelen szakaszos tizedes törtekre a szokásos, általános iskolából is ismert módszert alkalmaztuk; pl. $0,\dot{1}\dot{3}$ átírására: $x = 0,\dot{1}\dot{3} = 0,131313\dots$

$$100x = 13,131313\dots$$

$$100x - x = 13$$

$$99x = 13$$

$$x = \frac{13}{99}$$

Megemlítettük, hogy később majd igazoljuk, valóban szabad így számolni végtelen tizedes törtekkel. A tanulók számra azonban meggyőző volt, hogy az osztások elvégzése a kiindulási tizedes törtekhez vezetett.

A fenti két tétel után tértünk vissza a korábban már felvetett kérdésre; kitöltik-e a racionális számok a számegyeneset? A válaszhoz a következő állításokat igazoltuk:

3. $\sqrt{2}$ nem írható fel két egész szám hányadosaként.

Indirekt módszerrel igazoltuk az állítást, majd a 2. állítást felhasználva szintén indirekt módszerrel igazoltuk, hogy $\sqrt{2}$ tizedes tört alakja végtelen nem szakaszos.

Vajon meg tudnánk adni tizedes tört formában végtelen nem szakaszosat is?

4. Mutassuk meg, hogy a $0,1010010001\dots$ szám /két egyes között mindig eggyel több 0 szerepel/ nem szakaszos tizedes tört, és ezért nem is racionális.

Az állítás mindkét részét indirekt uton igazoltuk, az utóbbinál felhasználtuk az 1. tételt.

Ezután még több példát is próbáltunk konstruálni tizedes tört alakban adott, nem racionális számokra.

Bár a tanulók példáikban a nem szakaszos tizedes törtet is valamilyen szabály alapján igyekeztek megadni, ennek ellenére nyilvánvaló volt számukra, hogy a "szabálytalanul" elhelyezkedő tizedesjegyekkel rendelkező végtelen tizedes törtek is nem racionális számot határoznak meg, és ezekhez képest a szakaszos tizedes törtek viszonylag ritkák. Ezért is tartottuk fontosnak tizedes törtek segítségével is bevezetni az irracionális számokat, mert enélkül a tanulók éppen úgy gondolnák, az irracionális számok a "kivételesek".

A 3. és 4. állításunk és a további példák azt mutatták, hogy a racionális számok körántsem töltik ki a számegyenest. Azokat a számokat, amelyek nem írhatók fel két egész szám hányadosaként, irracionális számoknak nevezzük, a racionális és irracionális számokat valós számoknak nevezzük. Az így bevezetett valós számokkal kapcsolatosan a tanulók számára igen nyilvánvalónak tűnt a következő állítás:

5. A valós számok és a számegyenes pontjai között

kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető.

Ezt az állításunkat első osztályban nem bizonyítottuk. Korábban, a tizedes törtek tárgyalásánál beszéltünk ugyan arról, hogy egy tizedes törttel adott szám helyét a számegyenesen, ill. a számegyenes egy pontjának megfelelő tizedes törtet hogyan kereshetjük, de az egyértelműséget egyelőre bizonyítás nélkül elfogadtuk.

A valós számok elhelyezkedésével kapcsolatosan a következő állítást még fontosnak tartottuk megfogalmazni:

6. A racionális és az irracionális számok a számegyenesen mindenütt sűrűn helyezkednek el, azaz bármely két valós szám között van racionális és irracionális szám is.

Az 5. tételt nem bizonyítottuk, de azzal kapcsolatban a tanulóknak nem is merültek fel kételyek. A 6. állítás már nem ilyen nyilvánvaló a számukra, de az, hogy a tizedes törtekkel részletesen foglalkoztunk, lehetővé tette, hogy ezt az állítást is közelebb vigyük a tanulókhöz. Ezt a következő feladatok segítségével kíséreltük meg:

- a, Az $a = 0,1010$ és a $b = 0,1011$ tizedes törteket folytassuk úgy, hogy olyan a_1 és b_1 végtelen tizedes törteket kapjunk, amelyek racionálisak, majd úgy is, hogy olyan a_2 és b_2 végtelen tizedes törteket kapjunk, amelyek irracionálisak.

b, Rendezzük nagyság szerint sorba a kapott a_1, b_1, a_2, b_2 számokat! Lehet-e köztük egyenlő?

c, A négy sorbarendezt szám három véges intervallumot határoz meg. Írj minden intervallumba egy racionális és egy irracionális számot is! Ha az intervallumok végpontjainak tizedes tört alakjából elég sok jegyet ismersz, mindig meg tudod ezt tenni ?

Az, hogy a tanulók könnyen tudtak a kívánt tulajdonságu, végtelenen szakaszos, tehát racionális; és a 4. példa mintájára irracionális számokat megadni, elfogadhatóvá tette számukra a 6. állítást is. Erre is és a valós számokkal kapcsolatos legtöbb kérdésre a négy év során még visszatérünk; a valós szám fogalmának fejlesztése végig napirenden marad.

A tantervben az algebra, az algebrai kifejezések tárgyalása a függvények után szerepel. Mivel az elemi függvények tárgyalását az őket meghatározó kifejezések alakja szerint kívánjuk rendszerezni, ezért legalább az egész és törtek kifejezések definiálását szükségesnek találtuk a Számhalmazok, aritmetika fejezetben.

Az egész és a racionális számhalmazok tárgyalásánál említettük, hogy ezekben az első három, ill. az első négy alpművelet elvégezhető. Az egész, a tört-, és a racionális kifejezéseket ezekkel állítottuk párhuzamba, aszerint, hogy bennük az ismeretlennel milyen műveleteket végzünk. Szükségesnek tartottuk ezeket a fogalmakat a függvények tárgyalása előtt tisztázni,

mert korábban előfordult, hogy a tanulók törtfüggvénynek tekintették pl. az $x \mapsto \frac{x}{2}$ függvényt is.

A továbbiakban — és később is minden anyagrész után — ismertetünk néhány feladatot, amelyekkel kiegészítettük az előirt feladatgyűjtemények anyagát. Ezek a feladatok szorosan kapcsolódnak függvénytárgyalási módszerünkhöz, mégis azért különítjük el a tananyag tárgyalásától, mert a feladatok nehézségi foka igen különböző az egészen egyszerűtől a több ötletet kívánó nehéz feladatig, így az osztálytól függ, hogy mennyit lehet beépíteni a tanórai munkába, melyik lehet szakköri feladat. Néhány szokványos, önmagában kevésbé érdekes feladatot is leírunk, ha a benne alkalmazott jelölés, vagy megfogalmazása eltér a tankönyvektől.

1. A következő halmazok közül melyekből nem vezet ki az összeadás, szorzás és kivonás? A: páros számok, B: páratlan számok, C: hárommal osztható számok. Adj meg a fenti tulajdonsággal rendelkező további halmazokat, és olyanokat is amelyekből csak a szorzás nem vezet ki !
2. Felírható-e x két egész szám hányadosaként, ha
a, $x^2=3$; b, $x^2=6$; c, $x^2=50$; d, $x^2=144$;
e, $x^3=2$; f, $x^n=7$ / $n \in \mathbb{N}, n > 1$ /; g, $x^n=8$ / $n \in \mathbb{N}, n > 1$ /
3. Igazoljuk, hogy ha $x^2=n$ / $n \in \mathbb{N}$ /, akkor x vagy egész, vagy irracionális!
4. Igazoljuk, hogy ha $x^k=n$ / $k \in \mathbb{N}^+, n \in \mathbb{N}$ /, akkor x vagy egész, vagy irracionális !

5. Felírható-e két egész szám hányadosaként
 $0,1234567891011\dots$ /a természetes számokat írjuk sorban egymás mellé/ ?
6. Egy urnában levő tíz cédulára felírjuk a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyeket. Ugy írunk tizedes törtet, hogy jegyeit az urnából huzzuk ki és a kihuzott számot mindig visszatesszük. Ha ezt az eljárást vég nélkül folytatnánk, akkor igaz-e a következő állítás? Mivel az urnában csak tíz különböző szám van, ezért legfeljebb 11 huzás után valamelyik jegy ismétlődik, tehát végtelen szakaszos tizedes törtet kapunk.
/Meglepően sok tanuló tartotta igaznak az állítást. A feladat igen alkalmas arra, hogy skatulyaelves bizonyításnál az ismétlődés feltételeit tisztázzuk./
7. Igazoljuk, hogy $\sqrt{2}$ tizedes tört alakjában van olyan számjegy, amely végtelen sokszor előfordul!
8. Igazoljuk, hogy $\sqrt{2}$ tizedes tört alakjában van két olyan számjegy, amely végtelen sokszor előfordul!
9. Milyen p és q relatív prim természetes számok esetén lesz $\frac{p}{q}$ értéke olyan végtelen tizedes tört, amelynek szakaszában csak egy jegy szerepel?
10. Mutassuk meg, hogy ha q egynél nagyobb 2-vel, 3-mal, 5-tel nem osztható szám, és $(p; q) = 1$, akkor $\frac{p}{q}$ tizedes tört alakjában van két olyan számjegy, amely végtelen sokszor előfordul !

11. Ábrázoljuk a következő halmazok egymáshoz való viszonyát!

E: egész kifejezések

T: törtkifejezések

R: racionális kifejezések

S: egész, szorzatok

O: egész, összegek

P: polinomok

Helyezzük el az ábrán a következő kifejezéseket:

$x/x+1/$, x^2+x+1 , $x/x+1/ +x^3$, $\frac{x-1}{x+1}$

A függvény fogalma

A fentebb vázolt előkészítés után kb. 20 órában a következő rendszerezésben tanítottuk a függvényeket:

- 1.- 3.ó. A függvény fogalma
- 4.- 6.ó. Hatványfüggvények, a függvények vizsgálatahoz szükséges fogalmak
- 7.- 8.ó. Lineáris függvények
- 9.- 12.ó. Függvények összekapcsolása, néhány másod- és magasabb fokú egészfüggvény
- 13.-14.ó. Törtfüggvények
- 15.-17.ó. Néhány nem elemi függvény
- 18.-20.ó. Összefoglalás, témazáró

Mint korábban már részleteztük, a tanulók széleskörű függvényteni ismeretekkel érkeznek az általános iskolából. Ezeknek az ismereteknek a szintje azonban igen változó. Minden tanulónak van már valamilyen fogalma a függvényről. A gyengébbeknél ez azt jelenti, hogy tudnak példákat mondani függvényekre, elsősorban valós függvényeket. A jobbak szélesebb skálán tudnak példákat sorolni, és néhányan azt is meg tudják fogalmazni, hogy az egyértelmű hozzárendeléseket nevezzük függvényeknek.

Igy nem a hozzárendelés és a függvény fogalmának kialakítása, hanem az ezekkel kapcsolatos ismeretek rendszerezése volt a célunk. Először változatos példákat gyűjtöttünk össze hozzárendelésekre, megfeleltetésekre, az

autó $\Rightarrow$ rendszám, állampolgár $\Rightarrow$ személyi szám típusuak-típusuaktól fokozatosan a matematikában alkalmazottak felé haladva: természetes szám $\Rightarrow$ törzstényezői, természetes szám $\Rightarrow$ pozitív osztóinak száma, egész szám $\Rightarrow$ négyzete, négyzetszámok $\Rightarrow$ azok az egész számok, amelyeknek ez a négyzete, sík pontjai $\Rightarrow$ tükörképük egy adott egyenesre, stb.

Ezen sokféle hozzárendelés rendszerezése a célunk. Ehhez célszerű lesz elvonatkoztatni attól, hogy mik a halmazok elemei: emberek, autók, pontok vagy számok.

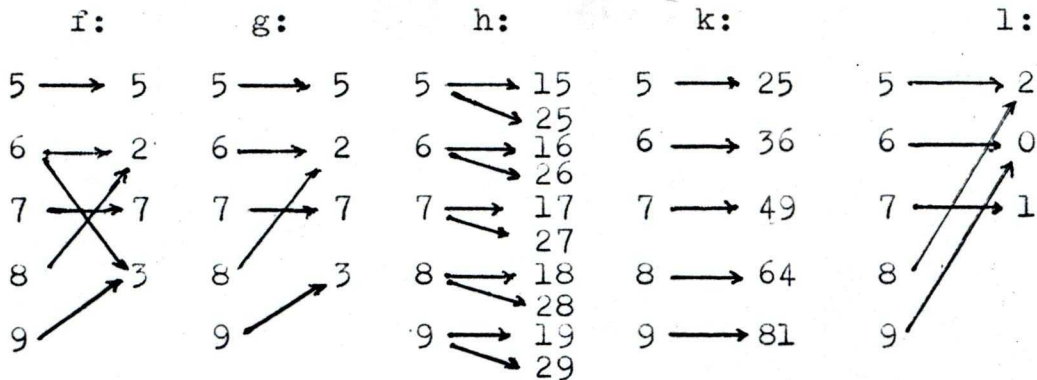
/A tanulók számára már nem szokatlan az a gondolat, hogy a valóságban tapasztaltakból absztrakció útján jönnek létre a matematikai fogalmak. A számfogalom és a természetes számokkal végzett műveletek kialakulásánál is utaltunk már hasonló absztrakciós folyamatra./

Az elvonatkoztatást segíti, ha nyíldiagrammal ábrázoljuk a hozzárendeléseket. Ábrázoljuk a következő hozzárendeléseket:

Legyen $A := \{5, 6, 7, 8, 9\}$

f:	Rendeljük A minden eleméhez	primosztóit !
g:	- " -	legkisebb primosztóját !
h:	- " -	azt a 10 és 30 közötti egész számot amelynek tizes maradéka az adott szám !
k:	- " -	négyzetét !
l:	- " -	hármass maradékát !

/Olyan kevés elemen értelmezett, egyszerű hozzárendeléseket válogattunk, amelyeken a hozzárendelések típusai könnyen áttekinthetők./



Kézenfekvő a hozzárendeléseket aszerint rendszerezni, hogy egy elemhez egy vagy több elemet rendeltünk; egy elemet egy vagy több elemhez rendeltünk.

/Ha a tanulók számára nem kézenfekvő ez a rendszerezési szempont, akkor rá lehet őket erre vezetni pl. úgy, hogy a fenti ábrát kettős írásvetítő fóliára készítjük el; az alsóra a számok helyét jelző köröket és a nyilakat rajzoljuk, a felsőre pedig a számokat. A felső lap levétele segítheti a számoktól való elvonatkoztatást, a nyilak elhelyezkedésére való koncentrációt. /

Eszerint a fenti hozzárendelések között van olyan, ahol A, minden elemtől csak egy nyíl indul ki, azaz bármely

elemhez csak egy elemet rendeltünk; /g,k,l/

B, minden elemhez csak egy nyíl mutat, azaz bármely

elemet csak egy elemhez rendeltünk hozzá. /h,k/

Csak az A feltétel teljesül a g és l hozzárendelésekre.

Csak a B feltétel teljesül a h hozzárendelésre.

Az A és B feltétel is teljesül a k hozzárendelésre.

Sem az A, sem a B feltétel nem teljesül az f hozzárendelésre.

Láthatjuk, hogy g és l azonos típusúak, a többiek páronként különbözők.

/Most következhetne a függvény definiálása, de hogyan célszerű a függvényt definiálni? Az olyan hozzárendelést nevezzük-e függvénynek, amely az első halmaz minden eleméhez pontosan egy elemet rendel hozzá, vagy amely legfeljebb egy elemet ?

Az utóbbit szerencsésebbnek tartottuk, tehát azt, hogy az értelmezési tartományon kívül egy bővebb halmazról is beszélünk, és azt kiindulási halmaznak nevezzük.

Ezzel szimmetrikusabbá válik a tárgyalás, mindkét oldalon létezik egy bővebb halmaz, /a kiindulási és a képhalmaz/, és egy szűkebb, /az értelmezési tartomány és az értékkészlet/.

Megkérdőjelezhető, van-e értelme függvényről beszélni, ha nem adjuk meg az értelmezési tartományt? Ha pedig azt megadjuk, akkor mi szükség van a bővebb kiindulási halmazra? Az értelmezési tartomány megadásához való ragaszkodás a függvény, mint szabály képhez kötődik, mondván: egy függvény akkor ismerünk, ha ismerjük az értelmezési tartományát és a hozzárendelési utasítást /szabályt, képletet, stb./. Az általánosabb függvényfogalom szerint a függvény rendezett párok halmaza, és a függvényt akkor ismerjük, ha ismerjük a hozzá tartozó párokat. Ez esetben az értelmezési tartománynak nincs kitüntetett szerepe, nem kell külön megadni.

A hagyományos függvényfogalom alkalmazása esetén is sokszor előfordul, hogy nem ismerjük, nem keressük a szűkebb halmazt, az értelmezési tartományt, csak egy kiindulási

halmazt. Ilyen volt például a fentebb már említett autók $\Rightarrow$ rendszám hozzárendelés. Pontosíthatjuk úgy, hogy rendeljük a magyarországi személyautókhoz a rendszámát. Ennek a hozzárendelésnek kiindulási halmaza a magyarországi személyautók halmaza, képhalmaza a két betűből és négy számjegyből álló jelrendszerek halmaza. Világos, hogy egy adott időpontban nem minden autónak van rendszáma és nem minden ilyen jel szerepel rendszámként, mégis sok autókkal, rendszámokkal kapcsolatos kérdésre tudunk válaszolni anélkül, hogy ismernénk a két szűkebb halmazt, azaz az autók közül mindazokat, amelyeknek egy adott időpontban van rendszámuk és a lehetséges jelek közül azokat, amelyek szerepelnek rendszámként. Például meg tudjuk találni ismerősünk autóját egy parkolóban rendszáma alapján anélkül, hogy a szűkebb halmazokat, tehát az értelmezési tartományt és az értékkészletet ismer-nénk.

A matematikában is előfordul, hogy el kell tekintenünk a szűkebb halmazok megadásától, pl. az $f(x) = \frac{1}{x^5 - 4x - 4}$ függvény esetén.

Mindezzel nem azt akarjuk mondani, hogy kifejezéssel adott függvény esetén nem kell az értelmezési tartomány megadására törekednünk, hanem csak azt, hogy sokszor van értelme /és előnye/ annak, ha a kiindulási halmaz fogalmával is találkozunk a tanulók.

A fentiekből az első példával indokoltuk a tanulóknak az általunk választott függvénydefiníciót./

A korábban vázolt négy hozzárendelési típus közül melyikhez tartozik a következő megfeleltetés: rendeljük a magyarországi személyautókhoz a rendszámát!

Mivel minden autónak legfeljebb egy rendszáma lehet, és bármely, két betűből és négy számjegyből álló jel legfeljebb egy autó rendszáma lehet, így az A és B feltétel is teljesül, vagyis ez a fenti k hozzárendeléssel azonos típusu.

A hozzárendelések között különösen fontos szerepe van azoknak, amelyekben az első elem ismeretében egyértelműen meg tudjuk határozni a hozzárendelt második elemet, /vagyis a fenti "A-típusu" hozzárendeléseknek/. Ezeket egyértelmű hozzárendeléseknek vagy függvényeknek nevezzük. Pontosabban: az olyan hozzárendeléseket, amelyekben az első halmaz bármely eleméhez a második halmaznak legfeljebb egy elemét rendeljük hozzá, függvényeknek nevezzük.

A hozzárendelések további tárgyalását áttekinthetőbbé, a tapasztalatok megfogalmazását sokszor egyszerűbbé teszi ha a hozzárendeléseket egy új megközelítési mód szerint is vizsgáljuk. A fenti hozzárendelések bármelyike felfogható rendezett párok halmazaként, pl. a fenti g hozzárendelés az $\{ /5;9/, /6;2/, /7;7/, /8;2/, /9;3/ \}$ halmazzal azonos. Sőt az is igaz, hogy rendezett párok bármely halmazában minden első elemhez tartozik második elem, ezért rendezett párok bármely halmaza hozzárendelést határoz meg, Így a két fogalom ekvivalens, és ezzel az eddig nem definiált hozzárendelés fogalmát is

más fogalommal, a rendezett pár fogalmával tudtuk megadni.

Ha azt akarjuk hangsúlyozni, hogy két halmaz, X és Y elemei közötti hozzárendelésről van szó, akkor úgy is fogalmazhatunk, hogy a hozzárendelés az $X \times Y$ direkt szorzat részhalmaza, és itt is igaz, hogy az $X \times Y$ direkt szorzat bármely részhalmaza X és Y halmazok közötti hozzárendelést, megfeleltetést határoz meg. Ebben a tárgyalási módban szokás relációnak is nevezni.

Egy H hozzárendeléshez tartozó párok első elemeinek halmazát a hozzárendelés értelmezési tartományának nevezzük és $D/H/$ -val jelöljük; a második elemek halmazát a hozzárendelés értékkészletének nevezzük és $R/H/$ -val jelöljük. Az előzőek szerint egy H hozzárendelést X és Y halmazok közötti hozzárendelésnek nevezzük, ha $D/H/ \subset X$ és $R/H/ \subset Y$. Az X halmazt kiindulási halmaznak, az Y halmazt képhalmaznak nevezzük.

Az intuitív fogalmi rendszerben azon elemek halmaza amelyekhez hozzárendelünk elemeket, az értelmezési tartomány, amelyeket hozzárendelünk, az értékkészlet.

A fenti f, g, h, k, l hozzárendeléseknél adjuk meg az értelmezési tartományt és az értékkészletet. Mindegyikben természetes számokhoz természetes számokat rendeltünk, így kiindulási és képhalmazuk lehet N . Melyiknek lehetne képhalmaza a prímszámok halmaza?

Mit mondhatunk a hozzárendelés rendezett párjairól, ha az függvény? Ha a hozzárendelés egyértelmű, akkor nem tartalmazhat azonos első elemmel rendelkező párokat, és

az is igaz, hogy ha rendezett párok valamely halmaza nem tartalmaz azonos első elemű párokat, akkor az egyértelmű hozzárendelést határoz meg, tehát függvényt. Így a függvény újabb definíciójához jutottunk: Függvény a rendezett párok bármely olyan halmaza, amely nem tartalmaz azonos első elemű párokat.

/Az eddigi legfontosabb fogalmakra az intuitív és a halmazelméleti definíciót is megfogalmaztuk — kivéve a hozzárendelés fogalmát, mert azt az intuitív fogalmi rendszerben definícióra nem szoruló alapfogalomnak tekintjük, — a további fogalmaknál már többnyire csak az egyik definíciót adjuk meg, azt amelyik egyszerűbb, könnyebben kezelhető. A függvény halmazelméleti definíciójának megfogalmazása után, még néhány példával illusztráltuk, hogy mennyiben ad ez szélesebb értelmezési lehetőséget, mint az intuitív fogalom./

Az általános iskolai feladatokban sokszor szerepeltek olyan gépek, amelyekbe ha beadunk egy számot, /vagy valamilyen más elemet,/ akkor a gép kiad egy ennek megfelelő elemet. Mit várnánk el egy ilyen géptől, hogy azt függvényképző gépnek nevezhessük./Csak azt, hogy azonos bemenő elemekhez azonos kijövő elemek tartozzanak, ezen túlsemmiféle szabály nem szükséges hogy fennáljon a bemenő és kijövő elemek között!./

Számítógépek bizonyos utasításra véletlenszerűen adnak ki egy számot. Elérhetjük, hogy ha egy számot beírunk a gépbe, akkor ehhez adjon ki egy "véletlen számot". Függvényt

képez-e így a gép? Hogyan lehetne elérni, /végtelen nagy memóriakapacitást feltételezve/ hogy függvényt képezzen? /Folyamatábrát a függvényképzéshez több tanuló is tudott készíteni, számítástechnika szakkörön megfelelő programot is írtak./

Térjünk most vissza a fentebb tárgyalt hozzárendelések B-vel jelzett tulajdonságára. Mit mondhatunk a B tulajdonságú hozzárendelések rendezett párjairól?

Bármely H hozzárendelés meghatároz egy "fordított irányú" hozzárendelést is, amelyet az adott hozzárendelés inverzének nevezünk, és H^{-1} -gyel jelöljük. Pontosabban:

$$H^{-1} := \{ /y;x/ \mid /x;y/ \in H \}$$

Eszerint egy hozzárendelésnek azt a tulajdonságát, hogy bármely elemet legfeljebb egy elemhez rendeljük hozzá, úgy is megfogalmazhatjuk, hogy az inverze függvény.

Ha egy f függvény nem tartalmaz azonos második elemmel rendelkező párokat, akkor kölcsönösen egyértelműnek, vagy invertálhatónak nevezzük, de az invertálható szó nem azt jelenti, hogy f -nek létezik inverze, /minden hozzárendelésnek van inverze,/ hanem azt, hogy f inverze is függvény. Ha f invertálható függvény, akkor az

$$f^{-1} := \{ /y;x/ \mid /x;y/ \in f \}$$

függvényt az f függvény inverzfüggvényének nevezzük.

A gyakorlatban használt hozzárendeléseknél gyakori, hogy a második elemek ismeretében határozzuk meg az első elemeket. Pl. egy oldat cukorfoka határozza meg a sűrűségét, de a sűrűség méréseéből következtetünk a cukorfokra. Mi-

lyen tulajdonságát használjuk itt fel a cukorfok $\Rightarrow$ sűrűség megfeleltetésnek ?

A kölcsönösen egyértelmű megfeleltetések esetén akár az első akár a második elem ismeretében meg tudjuk határozni a hozzá tartozó másik elemet. Adjunk erre példákat valós számokon, ill. pontthalmazokon értelmezett hozzárendelések köréből !

Ha egy f függvény értelmezési tartománya $D_f \subset \mathbb{R}$ és értékészlete $R_f \subset \mathbb{R}$, akkor az f függvényt valós függvénynek nevezzük.

Itt a függvényfogalom redukciójával jutottunk el a valós függvény fogalmáig. A matematika fejlődése során a függvény sokáig a valós függvénnyel volt azonos, és ennek a fogalomnak a kiterjesztésével alakult ki az az általánosabb függvényfogalom amelyet a fenti definícióinkban megadtunk.

/A matematika fogalmairól teljesebb kép alakul ki a tanulóknál, ha azok kialakulásának történetéről is hallanak. Ez egyrészt változatosabbá teszi a tananyag tárgyalását, másrészt segít abban, hogy a matematikai ismeretek jobban kapcsolódjanak a tanulók más területeken szerzett ismereteihez.

A történeti áttekintést a tananyag tárgyalásába olyan helyen szoktuk beépíteni, ahol a tanulók már elegendő ismerettel rendelkeznek a fogalmak fejlődésének megértéséhez, de még a további ismeretek elsajátításához is motivációt jelenthet a történeti kitérő. A függvénytan

tárgyalásában ezen a helyen szoktuk röviden áttekinteni a függvényfogalom fejlődését a változó mennyiség fogalmának kialakulásától a halmazelméleti függvényfogalom elterjedéséig. Az első részben ezekről bővebben szóltunk, így itt nem kívánjuk újra részletezni. /

A következő órákon elsősorban a valós függvényekkel kívánunk foglalkozni. Ahogy a matematika történetében jelentős lépés volt a szavakkal megfogalmazott összefüggések kifejezésekkel való leírása, úgy itt is az "f függvény rendelje minden valós számhoz a kétszeresénél eggyel kisebb valós számot" típusu hozzárendelési szabály helyett kifejezéssel adjuk meg a függvényt. A fenti szöveghez legközelebb álló jelölésmód:

$$f: R \rightarrow R, x \mapsto 2x-1$$

Ahol az első R az értelmezési tartományt, a második egy képhalmazt jelöl. Világos, hogy az értelmezési tartomány és a kifejezés egyértelműen meghatározza a függvényt alkotó párok halmazát, ezért nem szükséges az értékkészlet megadása is. A következő jelölés már a nem feltétlenül szükséges képhalmazt sem tünteti fel:

$$f: x \mapsto 2x-1 \quad x \in R.$$

Sokszor ehelyett is a még rövidebb

$$f/x/=2x-1 \quad x \in R$$

jelölést használjuk.

A kifejezés önmagában nem határozza meg a függvényt, pl:

$$f/x/=2x-1 \quad x \in R^+ \quad \text{és} \quad f/x/=2x-1 \quad x \in R^-$$

függvények nem azonos párokat tartalmaznak, sőt egyetlen közös elempárjuk sincs.



A kifejezéssel adott függvényeknél tehát a jelölésből ki kell derülni annak is, hogy mi az értelmezési tartomány. Ez azonban nem jelenti azt, hogy az értelmezési tartományt mindig ki kell írni. Egyetlen dolognak lehet az is a jele, hogy nem jelöljük meg. /Ha az összes többi megjelöljük./ Gazdaságos, célszerű, ha a leggyakrabban előforduló dologra nem használunk külön jelet. Kifejezéssel adott függvény értelmezési tartománya természetesen csak olyan halmaz lehet, amelyen az adott kifejezésnek értelme van, és legtöbbször a valós számoknak azt a legbővebb halmazát választjuk értelmezési tartománynak, amelyen a kifejezésnek értelme van. Így célszerű lesz abban megállapodni, hogy az értelmezési tartomány ilyen választása esetén nem kell azt külön feltüntetni, de minden más esetben fel kell írni.

Ezerint például az $f(x)=2x-1$ jelölést használhatjuk az $f(x)=2x-1 \quad x \in \mathbb{R}$ helyett, vagy $x \mapsto \frac{1}{x}$ rövidebb jelölést az $(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x}$ jelrendszer helyett, de például az $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$ függvény esetében már nem alkalmazhatjuk a rövidebb jelölést.

A feladatgyűjteményben, régebbi kiadású könyvekben $y=2x-1$, $y=x^2$, $y=\frac{1}{x}$ típusú függvényjelölést is használnak. Ezek az a függvényt értjük, amelyet az egyenletet kielégítő (x,y) rendezett párok alkotnak, de ezt a jelölést nem használjuk, zavart okozhat, hogy egyenletről vagy függvényről van-e szó.

A továbbiakban az lesz a célunk, hogy a matematikában és

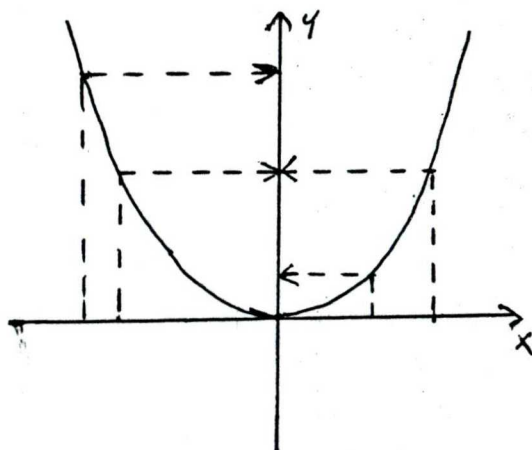
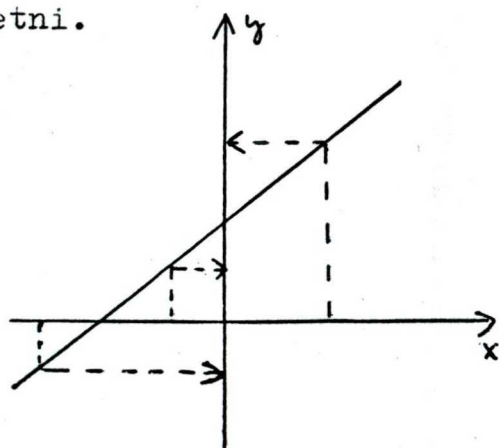
alkalmazásaiban igen fontos, kifejezéssel adott függvényeket vizsgáljuk, megállapítsuk milyen összefüggés van a kifejezés alakja és a függvény tulajdonságai között.

A tulajdonságok definiálásánál, általánosításoknál, példák adásánál azonban ne feledkezzünk meg arról, hogy a valós függvények halmaza lényegesen bővebb a kifejezéssel adottakénál, gondoljunk olyan függvényekre is, amelyek nem az egész értelmezési tartományukon azonos utasítással adottak, és olyan szabály nélküli függvényekre, amelyek rendezett párokkal adottak!

A függvények vizsgálatát jelentősen segítheti, szemléletessé teheti, ha grafikonjukat ábrázoljuk.

Descartes-féle derékszögű xy koordinátarendszerben egy f valós függvény grafikonjának nevezzük mindazoknak a $P/x; y/$ pontoknak a halmazát, amelyekre $/x; y/ \in f$. /Nemcsak valós függvénynek, hanem tetszőleges valós hozzárendelésnek ugyanígy értelmezhetjük a grafikonját./ Az $y=f/x/$ egyenletet a grafikon egyenletének nevezzük.

A grafikon bevezetésénél néhány példán célszerűnek találtuk a hozzárendelés irányát nyilak segítségével szemléltetni.

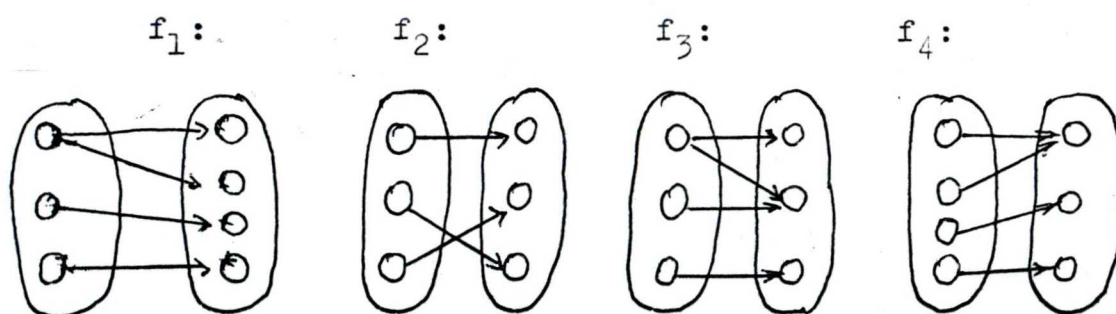


/Ha néhány grafikonon így megmutatjuk, hogy melyik számhoz

melyiket rendeljük hozzá, hogy milyen irányu hozzárendelést jelentenek a grafikon pontjai, akkor a tanulók a későbbiekben könnyebben felismerik, hogy melyik függvény kölcsönösen egyértelmű, könnyebben határozzák meg az értékkészletet, hasznos lesz ez az inverz függvény grafikonjának megadásánál, sőt még a folytonosság és a határérték ε -nal, δ -val történő megfogalmazását is könnyebben szemléltethetjük ez alapján./

Feladatok:

1. Vizsgáljuk egyértelműség szempontjából a következő, nyildiagrammal adott hozzárendeléseket!
/Itt is, és a következő feladatokban is a hozzárendelésnek és az inverzének egyértelműségét is vizsgáljuk!/
0



2. Vizsgáljuk egyértelműség szempontjából az alábbi, számpárokkal adott hozzárendeléseket:

$$g_1: \quad /1;2/, \quad /2;2/, \quad /3;2/$$

$$g_2: \quad /1;2/, \quad /1;3/, \quad /2;3/$$

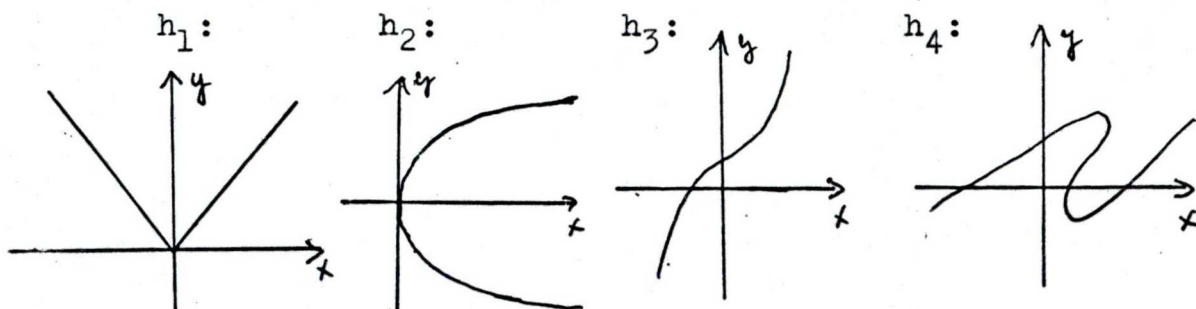
$$g_3: \quad /1;2/, \quad /2;3/, \quad /3;4/$$

$$g_4: \quad /1;2/, \quad /1;3/, \quad /1;4/$$

Ábrázoljuk koordináta rendszerben is a fenti párokat!

3. Vizsgáljuk egyértelműség szempontjából az alábbi, grafikonnal adott hozzárendeléseket!

/A grafikonnal adott hozzárendelést úgy értjük, hogy a grafikon pontjainak koordinátái adják a rendezett párokat./



4. Hasonlítsuk össze az előző három feladat f,g,h hozzárendeléseit, keressük meg az azonos típusokat, fogalmazzuk meg a tapasztalatokat!

5. Ha a koordináta-rendszerben "szétszórunk" pontokat, akkor a pontok koordinátái hozzárendelést határoznak meg. Milyen feltételeket kell kielégíteni a ponthalmaznak ahhoz, hogy a hozzárendelés

a, függvény legyen,

b, kölcsönösen egyértelmű legyen?

/A "szétszórunk" szóval azt akartuk hangsúlyozni, hogy a hozzárendelés, vagy függvény grafikonja nem feltétlenül vonal./

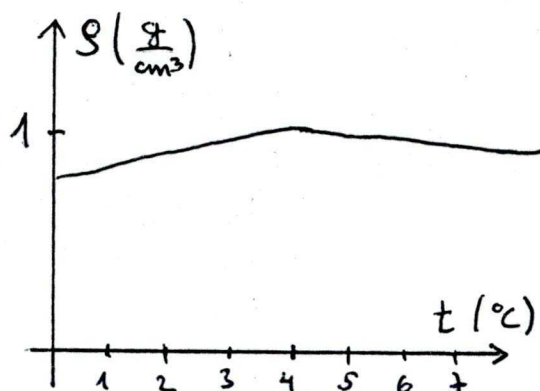
6. Az izzó fém hőmérséklete meghatározza a fém színét, a magasságtól függ, hogy mekkora a légnyomás. A gyakorlatban a második "elem"-ből határozzák meg az elsőt, azaz a szinből következtetnek a fém hőmérsékletére, a légnyomás méréssel határozzák meg a repülőgép magasságát. Milyen tulajdonságát használjuk fel ezeknél a

méréseknél a hőmérséklet $\rightarrow$ szín, magasság $\rightarrow$ légnyomás hozzárendeléseknek.

Keress hasonló "fordított mérés"-eket!

Igaz-e, hogy csak kölcsönösen egyértelmű megfeleltetések esetén tudjuk a második elemből az elsőt meghatározni?

7. A víz sűrűségének a hőmérséklettől való függését a következő grafikon mutatja. Meghatározhatjuk-e ez alapján a hőmérsékletből a sűrűséget, a sűrűségből a hőmérsékletet?



8. Adott a síkban az e és f egyenes. Az e egyenes pontjait vetítsük merőlegesen az f egyenesre. Vizsgáljuk egyértelműség szempontjából ezt a hozzárendelést e és f különböző helyzetei esetén!
9. Egy síkra állítsunk egy gömböt. A gömbnek az érintési ponttal szemközt A pontját kössük össze a sík egy tetszőleges pontjával. A sík ezen pontjához rendeljük az egyenesnek a gömbbel alkotott A -tól különböző metszéspontját! Vizsgáljuk egyértelműség szempontjából ezt a hozzárendelést!
10. Tekintsük a koordinátarendszer $OABC$ négyzetét, amelyben $O(0;0)$, $A(1;0)$, $B(1;-1)$, $C(0;-1)$. Forgassuk el az OA szakaszt A körül AB -be! Az AB szakasz tetszőleges B -től különböző P pontjához rendeljük a CP egye-

nesnek az x tengellyel alkotott metszéspontját!
 Vizsgáljuk egyértelműség szempontjából ezt a hozzárendelést. A forgatással együtt itta $(0;1]$ intervallum pontjainak feleltettük meg az $[1;\infty)$ intervallum pontjait.^(*) Lehet-e kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesíteni a $[0;1]$ és az $[1;\infty)$ intervallumok pontjai között?

Mutassuk meg, hogy a ~~(*)~~ hozzárendelés a

$$(0;1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x} \quad \text{függvénnyel azonos.}$$

/A második feltételnek megfelelő függvényt csak segítségével tudtak megadni a tanulók, pl:

$$[0;1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 2, & \text{ha } x=0 \\ 3, & \text{ha } x= \frac{1}{2} \\ \dots\dots\dots \\ n+1, & \text{ha } x= \frac{1}{n} \quad /n \geq 2, n \in \mathbb{N} \\ \dots\dots\dots \\ \frac{1}{x} & \text{egyébként} \end{cases}$$

11. Az alábbi függvények közül melyiknél hagyható el az értelmezési tartomány kiírása?

$$f/x/ = x^3 \quad x \in \mathbb{R}$$

$$g/x/ = x^4 \quad x \in \mathbb{R}^+$$

$$h/x/ = \frac{1}{x^2-1} \quad x \in (\mathbb{R} \setminus \{1, -1\})$$

$$k/x/ = \frac{1}{x^2+1} \quad x \in (\mathbb{R} \setminus \{1, -1\})$$

12. A fentiekben úgy adtunk meg függvényeket, hogy megadtunk egy kifejezést, és az értelmezési tartományt, /azaz a függvényhez tartozó párok első elemeinek halmazát/. Vajon kifejezéssel és az értékkészlet /azaz a párok második elemeinek/ meghatározásával is megadhatunk függvényt?

Hatványfüggvények, a függvények jellemzéséhez szükséges fogalmak

Mint fentebb már jeleztük, a következő anyagrészekben kifejezéssel adott függvényeket kívánunk vizsgálni. Először egész kifejezéssel adottakat, és közülük is először az alapvető fontosságú $f(x) = x^n$ típusú ún. hatványfüggvényeket.

/Azért kezdjük vizsgálatunkat a hatványfüggvényekkel, mert egyrészt logikus a többi egész függvény tárgyalását ezekre építeni, másrészt pedig a hatványfüggvényekkel kapcsolatban megfogalmazhatjuk, definálhatjuk mindazokat a függvénytulajdonságokat, amelyekre első osztályban szükségünk lesz.

A továbbiakban általában úgy járunk el, hogy egy adott kifejezéshez, vagy kifejezéscsoporthoz tartozó függvények grafikonját vázoljuk értéktáblázat alapján, majd a grafikon segítségével megfogalmazzuk a függvények tulajdonságait, és ezeket a kifejezések alapján ellenőrizzük.

Első osztályban még ez a függvényvizsgálati módszer van túlsúlyban, mert az elsősök még nem tudják a függvény tulajdonságait a kifejezésről leolvasni. A grafikon alapján megfogalmazott tulajdonságok ellenőrzését viszont már az első osztályosoktól is elvárhatjuk, és ezzel is fokozatosan előkészítjük azt a magasabb szintű függvényvizsgálati módszert, amelyben már a kifejezésből, a definícióból határozzuk meg a tulajdonságokat, és ezek alapján készítünk grafikonot.

Azt tapasztaltuk, hogy az első osztályosok megfelelően tudnak értéktáblázat alapján függvényeket ábrázolni, de általában lassan dolgoznak, az ábrázolás sok időt vesz el az órából. Ezért sokszor a következő órai anyaghoz tartozó függvényeket házi feladatként előre ábrázotattuk értéktáblázattal, és azt is kértük, hogy az ábrázolt függvények tulajdonságai közül fogalmazzanak meg amennyit tudnak.

Mivel az első osztályos függvénytani anyag jelentős része már az általános iskolában is szerepelt valamilyen formában, ezért minden anyagrész előtt célszerű rövid helyzetfelmérést végezni. A fenti házi feladatok ellenőrzése alkalmas volt erre./

A következő órák előkészítéseként az $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto x^4$, $x \mapsto x^5$ függvényeket kellett ábrázolni, és tulajdonságaikból minél többet összegyűjteni, megfogalmazni.

A hatványfüggvények tárgyalása lényegében ezen grafikonok elemzéséből, az összegyűjtött tulajdonságok megbeszéléséből, pontosításából, kiegészítéséből állt össze.

Először a "Minden grafikon illeszkedik az $/1;1/$ pontra.", "Minden páratlan kitevőjű függvény grafikonja illeszkedik a $/-1;-1/$ pontra.", "Egynél kisebb x-ekre a nagyobb kitevőjű függvény grafikonja a kisebb kitevőjű grafikonja "alatt halad". tipusu észrevételeket fogalmaztuk meg pontosabban, úgy, hogy azokat a definiáló kifejezések alapján igazolni lehessen: Bármely n -re $f/1/=1$, azaz $1^n=1$. Ha n páratlan, akkor $f/-1/=1$, azaz $/-1/^n = -1$. Ha $x \in (0,1)$ és $k > n$, akkor $x^k < x^n$.

/Az igazolás szükségességének elfogadását rendszerint segítette az, hogy némelyik tulajdonság — pl. a fenti harmadik — nem minden tanuló grafikonjáról volt leolvasható, és ez vitához vezetett. "Kissé hibás" grafikonok vázolásával könnyen lehet ilyen vitát provokálni, és ezzel is kialakítani a tanulóknak a grafikonról leolvasott tulajdonságok igazolásának igényét./

A "Pozitív x -ekre minden függvény növekvő.", "Páros kitevő esetén a függvényeknek van legkisebb értéke.", "A páros kitevőjű függvények grafikonja az y tengelyre szimmetrikus." típusú állítások igazolása előtt közösen megfogalmaztuk a monotonitás, a szélsőérték, a páros ill. páratlan függvény definícióját.

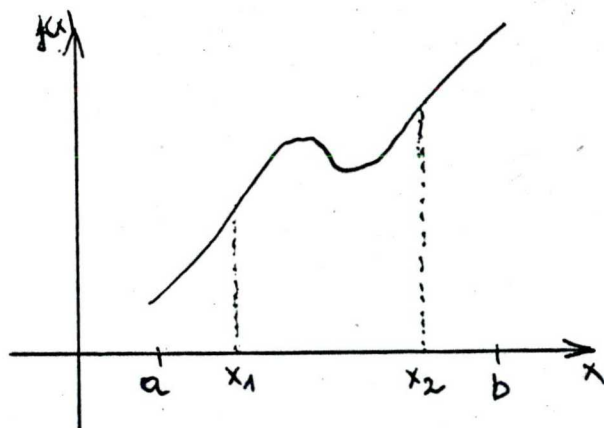
Pl. a monotonitás definíciójának megfogalmazása rendszerint a következő lépésekből állt:

Mit értünk azon, hogy egy f függvény egy $[a, b]$ intervallumon növekvő?

Általában a következő választ kaptuk: nagyobb x -hez nagyobb érték tartozik.

A következő grafikon segítségével mutattuk meg, hogy ez a megfogalmazás még nem pontos.

Itt $x_1 < x_2$ és $f(x_1) < f(x_2)$, mégsem állíthatjuk, hogy f növekvő.



/A matematika tanításának szinte minden területén hasznos, ha a tanulók hibáit nem közvetlenül javítjuk, hanem ellen-

példával mutatunk rá a pontatlanságra, és lehetőséget biztosítunk a tanulóknak, hogy maguk javítsák ki hibájukat. A függvénytanban általában könnyű ellenpéldát megadni, itt még azt is elérhetjük, hogy a tanulók is így javítsák egymás hibáit. Ez a módszer nagyban segíti a definíciók megértését, a tételekben a feltételek és a következmények közötti kapcsolat felismerését./

A fenti ellenpélda után a tanulók is meg tudták fogalmazni, hogy az intervallumból választott bármely $x_1 < x_2$ esetén teljesülnie kell az $f/x_1 < f/x_2$ feltételnek, és nyilvánvalóvá vált számukra, hogy a definícióban a bármely szó fontos. Apróbb finomítások /pl. monoton és szigorúan monoton eset megkülönböztetése/ után mindig volt olyan tanuló aki már a pontos definíciókat meg tudta fogalmazni.

Hasonlóan közös munkával fogalmaztuk meg a szélsőértékek, a páros, a páratlan függvény definícióját, ez utóbbiaknál megmutattuk, hogy a definíciókból következik: páros függvény grafikonja az y tengelyre, páratlan függvény grafikonja az origóra szimmetrikus /tehát ez következmény, és nem ez a definíció/.

Ezután grafikon, ill. rendezett párok segítségével olyan függvényeket adtunk meg, amelyek egy-egy tulajdonsággal rendelkeznek, ill. olyanokat, amelyekre valamely tulajdonság definíciója nem teljesül, majd megfogalmaztuk a definíciók tagadását. A "Mit értünk azon, hogy egy függvény egy $[a; b]$ intervallumon nem szigorúan monoton növekvő?" kérdésre korábban gyakran kaptunk olyan választ, hogy egy függvény nem növekvő, ha csökken. Azoknak a tanulóknak, akik már otthonosabban mozogtak a

halmazelméleti függvényfogalom körében, természetesebb volt, hogy egy függvény egy intervallumon nem feltétlenül növekvő vagy csökkenő. Az előző rész 5. feladatának /A síkban szétszórtunk pontokat.../ felidézése pedig minden tanuló előtt világossá tette, hogy a növekedést nem a csökkenéssel kell tagadni.

A növekedés és a többi tanult definíció tagadásának megfogalmazásával a tanulók eljutottak annak felismeréséhez, hogy a "bármely" szó helyett a tagadásban a "van olyan" kvantort használjuk. A helyi szélsőérték definíciójának és tagadásának megfogalmazásában pedig azt is láthatták, hogy a "van olyan" kvantort a "bármely" helyettesíti a tagadásban.

A függvénytanak ebben a részében, ahol sok definícióval találkozhatnak a tanulók, önmagában is fontos feladatnak tekintettük a kvantorok helyes használatának kialakítását, ezen kívül azonban az anyagrész másik fontos célkitűzéséhez, a bizonyítási készség fejlesztéséhez is szorosan kapcsolódik a kvantorok használata.

"Köztudott, hogy a középiskolai matematikatanítás egyik legnehezebb feladata a bizonyítási készség kialakítása. A tanulók általában idegenkednek a bizonyítási feladatoktól. Nehezen különböztetik meg a feltételt az állítástól, problémát okoz a "bármely" és "van olyan" kvantorok használata, indirekt bizonyításoknál az állítás tagadása. A legegyszerűbb bizonyítási feladatokban is gyakori probléma az, hogy a tanulók nem tudják milyen bizonyítási módot alkalmazzanak, mikor elegendő egyetlen példát adni, mikor nem bizonyít a

példa, még a sok példa sem.

Mindez nem meglepő, hiszen a tanulók nagyon kevés bizonyítási feladattal találkoznak általános iskolai matematikatanulmányaik folyamán. A többi természettudományos tárgybán pedig sokszor néhány tapasztalat alapján általános érvényű törvényeket fogalmaznak meg. Ezért matematikaórán is néhány kísérletet, próbálgatást bizonyító érvényűnek fogadnak el." [24.]

A bizonyítási készség fejlesztése hosszú folyamat. A tapasztalatok szerint ez az egyik olyan terület, ahol a legnagyobb különbségek szoktak kialakulni a tanulók tudásában. Vannak akik néhány példa után már jó érzékkel választják ki a megfelelő bizonyítási módot, és logikusan végigvezetik az igazolás lépéseit. Legtöbb tanulónak viszont igen sok bemutatott példa, és még több igen egyszerű, önállóan is megoldható feladat szükséges a bizonyítási készség fejlesztéséhez.

Ha az utóbbi csoportba tartozó tanulóknál ez a fokozatosság hiányzik, /ha csak a geometriai transzformációknál és a hozzájuk kapcsolódó tételeknél találkoznak először a nem mindig egyszerű bizonyításokkal,/ akkor az önálló bizonyítási készség általában nem alakul ki, akkor ezen tanulók számára az "Igazold...", a "Bizonyítsd be ..." kezdetű feladatok mindig idegenek maradnak.

A függvénytant olyan területnek tartjuk, amely alkalmas ezen fokozatosság biztosítására. A hatványfüggvények fentebb megfogalmazott tulajdonságainak igazolása egyrészt alkalmas volt igen egyszerű bizonyítási feladatok önálló megoldására, másrészt fejlesztette a tanulók igényét arra, hogy a megfogalma-

zott állításokat igazolni is kell.

A definiált tulajdonságok segítségével még sok különböző nehézségű bizonyítási feladatot fogalmazhatunk meg. Mivel a függvénytan igen szemléletes, a tanulók legtöbbször könnyen megsejtnetik a helyes választ, könnyen tudnak példákat adni grafikon vázolásával, vagy rendezett párok megadásával.

Példaként nézzük meg részletesebben két ilyen feladat megoldását:

1. Lenet-e egy $\mathbb{R}$ -en értelmezett szigorúan monoton növekvő függvény a , páros; b , páratlan?

Az a , kérdésre némi próbálgatás után nemleges választ adtak a tanulók. Azt próbáltuk megértetni velük, hogy ha az osztályban senki sem talál olyan függvényt, amely páros és szigorúan monoton növekvő, még nem jelenti azt, hogy nincs is ilyen függvény. Háttha más tudna ilyen függvényt megadni? Csak sejtjük, hogy nincs ilyen függvény, igazolni is kell, hogy ilyen nem létezik! Hogyan? Ha azt akarjuk igazolni, hogy valami nem létezik, kézenfekvő az indirekt bizonyítási mód.

Tegyük fel, hogy az f függvény páros és szigorúan monoton növekvő. Ha páros, akkor bármely $x_0 \in \mathbb{R}$ esetén $f/x_0/ = f/-x_0/$. Ha x_0 pozitív, akkor $-x_0 < x_0$, és a szigorúan monoton növekedés miatt $f/-x_0/ < f/x_0/$. Ez ellentmondás, tehát valóban nem létezik $\mathbb{R}$ -en értelmezett szigorúan monoton növekvő, páros függvény.

A b, kérdésre igenlő a válasz: elég megadni egyetlen megfelelő függvényt, pl. az $f/x/=x$; $x \in \mathbb{R}$ függvény szigoruan monoton növekvő és páratlan. A definíciók alapján mindkét állítás nyilvánvaló.

2. a, Igaz-e, hogy minden szigoruan monoton függvény kölcsönösen egyértelmű ?

b, Igaz-e, hogy minden kölcsönösen egyértelmű függvény szigoruan monoton ?

Az a, kérdésre a válasz: Igaz. Hiszen ha egy függvény szigoruan monoton /például növekvő/, akkor az értelmezési tartományból választott bármely $x_1 < x_2$ esetén $f/x_1/ < f/x_2/$.

Tehát különböző x értékekhez különböző függvényértékek tartoznak, azaz a függvény kölcsönösen egyértelmű.

Amíg nem hangsúlyoztuk, hogy rendezett párok minden olyan halmaza függvény, amelyben nincsenek azonos első elemek, addig a b, állítást is igaznak vélték a tanulók, mert ha olyan grafikont /vonalat/ próbáltak rajzolni, amely nem szigoruan növekvő, akkor rendre azt tapasztalták, hogy ugyanazt az értéket többször is felveszi. A halmazelméleti függvényfogalom ismeretében viszont a tanulók többsége tudott adni olyan függvényt rendezett párokkal, amely kölcsönösen egyértelmű, de nem szigoruan monoton. Pl.:

$$f := \{ /0;0/, /1;2/, /2;1/ \}$$

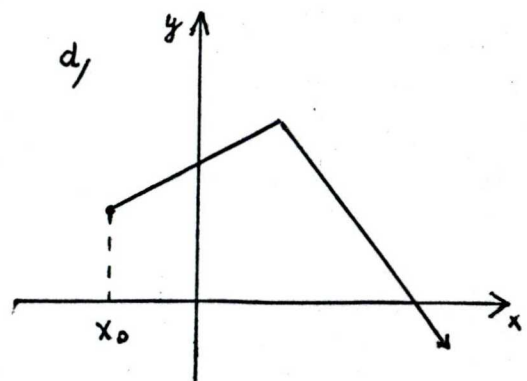
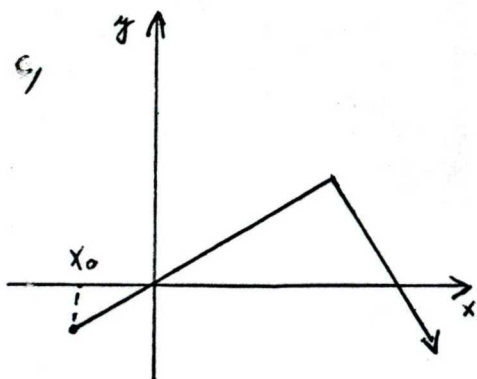
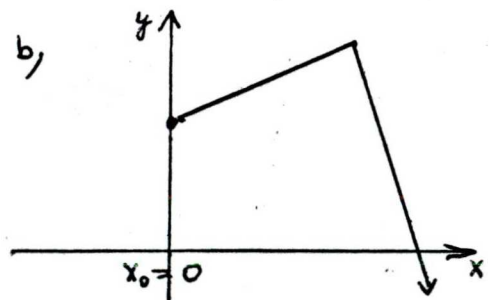
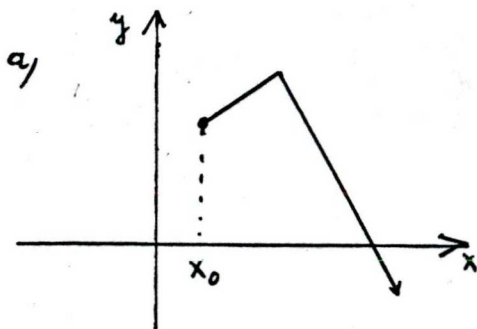
Megemlítettük, hogy később majd olyan függvényt is konstruálunk, amely $\mathbb{R}$ -en értelmezett, kölcsönösen egyértelmű, de egyetlen intervallumon sem monoton.

/Ilyen különleges függvényeket addig is adtunk meg, amíg csak az intuitív fogalmat tanítottuk, de akkor a tanulók számára idegennek, mesterkéltnak tündek ezek a példák. A halmazelméleti függvényfogalom ismeretében természetesebb lett a tanulók számára az ilyen függvények létezése, sőt maguk is tudtak egyszerűbb példákat konstruálni./

Feladatok:

1. Milyen x értékekre igaz, hogy
$$x^{100} = x^{101}, \quad x^{100} = x^{102}, \quad x^{99} = x^{101},$$
$$x^{100} < x^{101}, \quad x^{100} < x^{102}, \quad x^{99} < x^{101} \quad ?$$
2. Fogalmazzuk meg a monotonitás, a páros, ill. páratlan függvény definícióját rendezett párok segítségével! Adjunk meg olyan 5 rendezett párból álló függvényt, amely a, páros; b, páratlan !
3. Van-e olyan függvény, amely páros is, páratlan is ?
4. Milyen a, b, c értékekre lesz páros, ill. páratlan az $f(x) = ax + b$, és a $g(x) = ax^2 + bx + c$ függvény?
5. Mutassuk meg, hogy egy polinóm akkor és csak akkor páros /páratlan/, ha csak páros /páratlan/ kitevőjű tagokat tartalmaz!
6. Mutassuk meg, hogy ha egy origóra szimmetrikus halmazon értelmezett függvény kifejezésében x csak páros kitevővel szerepel, akkor a függvény páros! Igaz-e, hogy ha minden kitevő páratlan, akkor a függvény is páratlan ?

7. Igazoljuk, hogy páros függvények összege és szorzata páros; páratlan függvények összege páratlan, szorzata páros! Mit mondhatunk egy páros és egy páratlan függvény összegéről, ill. szorzatáról ?
8. Mutassuk meg, hogy ha az f függvény értelmezési tartománya szimmetrikus az origóra, akkor az $F(x)=f(x)+f(-x)$ függvény páros, a $G(x)=f(x)-f(-x)$ függvény páratlan !
9. Mutassuk meg, hogy minden olyan függvény, amelynek értelmezési tartománya szimmetrikus az origóra, felírható egy páros és egy páratlan függvény összegeként ! Bontsuk fel egy páros és egy páratlan függvény összegére az $f(x)=x^2+2x+3$, és a $g(x)=\frac{1}{x^2+2x+3}$ függvényeket !
10. Folytassuk a függvény grafikonját az x_0 ponttól balra, úgy, hogy az egy mindenütt értelmezett páros /páratlan/ függvény grafikonja legyen !

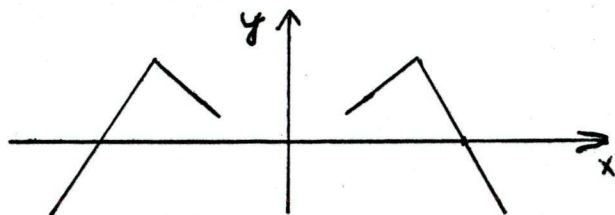


11. Az $\mathbb{R}$ -en értelmezett f és g függvények szigorúan monoton növekvők, a h függvény szigorúan monoton csökkenő. Mit állíthatunk az $f+g$, $f-g$, $f+h$, $f-h$, $f \cdot g$, $f \cdot h$ függvények növekedési viszonyairól?

12. Lehet-e $\mathbb{R}$ -en értelmezett páros, ill. páratlan függvénynek pontosan egy szélsőértéke?

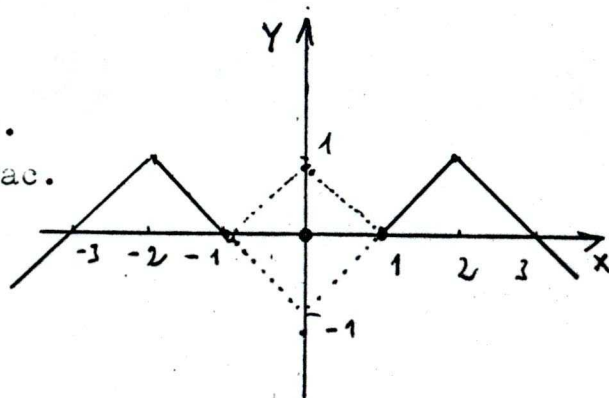
13. Lehet-e $\mathbb{R}$ -en értelmezett páratlan, ill. páros függvénynek pontosan kettő szélsőértéke?

/Ez utóbbi két feladat első részéhez könnyű megfelelő példát adni, a második kérdéseknél viszont az első próbálgatások azt mutatják, hogy nincs megfelelő függvény. Tehát azt, hogy páratlan függvénynek nem lehet pontosan egy szélsőértéke, /és ez igaz is; indirekt módszerrel könnyen igazolható/, és úgy tűnik, hogy ha egy páros függvénynek van két szélső értéke, pl. maximuma, akkor közben kell lenni egy minimumnak is:



A halmazelméleti függvényfogalmat ismerő tanulók között azonban volt olyan, aki /a Dirichlet-féle függvény megismerése után/ tudott olyan páros függvényt megadni, amelynek pontosan két szélsőértéke van:

$$f(x) = \begin{cases} 3 - |x|, & \text{ha } |x| > 2 \\ |x| - 1, & \text{ha } 1 \leq |x| \leq 2, \text{ vagy} \\ & \text{ha } 0 < |x| < 1 \text{ és } x \text{ rac.} \\ 1 - |x|, & \text{ha } 0 < |x| < 1 \text{ és } x \text{ irrac.} \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$



Lineáris függvények

Az egész kifejezések által meghatározott függvények körében a hatványfüggvények után a legfeljebb elsőfoku polinomokkal foglalkozunk. Az $f(x)=ax+b$ alakú függvényeket lineáris függvényeknek nevezzük.

A lineáris függvényekkel való ismerkedés végigkíséri az általános iskola nyolc osztályának matematika anyagát. Először táblázattal, elempárokkal adott lineáris függvényekkel találkoznak a tanulók; negyedik osztálytól grafikusán is ábrázolják ezeket, majd hetedik osztályban azt is megfogalmazzák, hogy mit határoz meg a és b az $f(x)=ax+b$ függvény grafikonján. Mégis a tanulók jelentős része középiskolában is értéktáblázattal ábrázolja a lineáris függvényeket. A tapasztalati úton szerzett ismeretek alkalmazásában kevés a tudatosság. Ezt mutatta, hogy ha lineáris függvényekkel együtt ábrázoltattuk az $f(x)=\frac{x^2+50x}{100}$ függvényt, akkor /mivel kis abszolútértékű x -ekre a grafikon jól illeszkedik a $g(x)=\frac{1}{2}x$ függvény grafikonjára/ az f függvény grafikonját is egyenesnek ábrázolták./

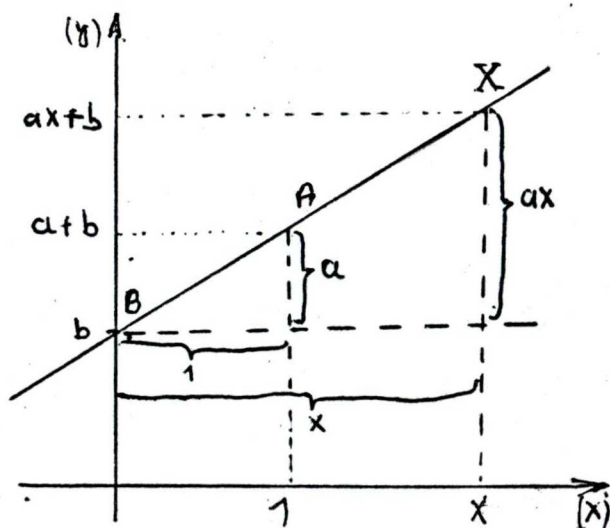
Ez a példa ismét alátámasztotta a tanulók számára, hogy az előző anyagrészben kialakított módszerünket, azt, hogy a tulajdonságokat a függvényt definiáló kifejezés alapján igazoljuk, itt is célszerű alkalmazni, és nem elégszünk meg azzal, hogy egy tulajdonságot csak szemlélet alapján olvasunk le. Például az $f(x)=2x-3$, a $g(x)=-x-3$ és a $h(x)=\frac{1}{2}x-3$ függvények grafikonjának értéktáblázattal tör-

téno ábrázolása után a tanulók megállapítják, hogy mindegyik függvény grafikonja illeszkedik a $/0;-3/$ pontra, a $k/x/=3x+2$, és az $l/x/=-2x+2$ függvények grafikonja pedig a $/0;2/$ pontra; "ezért" az $f/x/=ax+b$ függvény kifejezésében b azt mutatja meg, hogy a grafikon hol metszi az y tengelyt.

Az ilyen, néhány példa utáni általánosítás nagyon természetes a tanulóknak. Egészen más típusu gondolkodásmód alakítható ki, ha az ilyen következtetéseket általánosan is igazoljuk: A fenti következtetés valóban helyes, mert az $f/x/=ax+b$ függvény az $x=0$ helyen $f/0/=a \cdot 0 + b = b$ értéket vesz fel, tehát a grafikon tényleg illeszkedik a $/0;b/$ pontra. Ha látják a tanulók, hogy az igazolás ilyen egyszerű, akkor önmaguknak is fel merik tenni a kérdést: Mindig igaz az ami a példákban úgy látszik?

Hasonlóan egyszerű megmutatni, hogy mit határoz meg a az $f/x/=ax+b$ függvény grafikonján: Láttuk, $f/0/=b$, továbbá $f/1/=a+b=f/0/+a$. Ugyanigy tetszőleges x -re $f/x/=ax+b$ és $f/x+1/=a/x+1/+b=ax+a+b=f/x/+a$. Tehát ha x eggyel nő, akkor $f/x/$ a -val változik. Ha $a > 0$, akkor nő, ha $a < 0$, akkor csökken, ha $a=0$, akkor nem változik.

Ugyanigy megmutathatjuk, hogy a grafikon tetszőleges pontja illeszkedik a $B/0;b/$ és $A/1;a+b/$ pontok által meghatározott egyenesre. Valóban tetszőleges x -re $\frac{ax}{x} = \frac{a}{1}$, így az ábrán látható, hogy az A, B és X pontok egy egyenesre illeszkednek. Tehát a



definiáló kifejezésből következik, hogy az $f(x) = ax + b$ függvény grafikonja egyenes. /Innen a lineáris függvény elnevezés. Linea: vonal, egyenes/

Igaz-e, hogy minden egyenes lineáris függvény grafikonja?

Ha $a=0$, akkor az $x \mapsto b$ függvényt állandó, vagy konstans függvénynek nevezzük, ha $a \neq 0$, akkor az $f(x) = ax + b$ függvény elsőfoku.

Ha $|a|$ nagyobb, akkor a függvény "gyorsabban változik", az egyenes meredekebb, ezért a -t az egyenes meredekségének nevezzük.

/A 2. osztályos új fizika tananyagban alapvető szerepet szánunk a függvények változási gyorsaságának. Azoknál a tanulóknál, akik nem fakultáción tanulják a matematikát, későbbi tanulmányaikban sem fordul elő ez a fogalom, ezért egyrészt a fizika tanulásának segítéséhez, másrészt egy általánosabb függvénykép kialakításához célszerűnek láttuk egy alapfoku tájékoztatást adni erről a fogalomról. A lineáris függvényekhez kapcsolódva, csak monoton függvényekre fogalmaztuk meg a változási gyorsaság értelmezését./

Egy f monoton függvénynek egy $[x_1; x_2]$ intervallumon vett változásán az $f(x_2) - f(x_1)$ különbséget értjük.

Egy lineáris függvény "gyorsan változik", ha meredekségének abszolútértéke nagy. A meredekséget az előző ábra szerint a megfelelő derékszögű háromszögek befogóinak hányadosa adta. Ehhez hasonlóan tetszőleges f monoton

függvény $[x_1; x_2]$ intervallumhoz tartozó változási gyorsaságát is definiálhatjuk az $\frac{f/x_2 - f/x_1}{x_2 - x_1}$ hányadossal.

/Nem monoton függvény esetén is definiálhatjuk a fenti hányadost, de ilyen esetben, ha a hányados abszolútértéke kicsi, még nem biztosítja azt, hogy a függvény az intervallumon "kevésbé változik"./

A lineáris függvények jellemző tulajdonsága, hogy változási gyorsaságuk bármely intervallumon állandó. /Igazoljuk!/
0

Az $f/x = kx$, $k \neq 0$ függvényt egyenes arányosságnak nevezzük.

/Tapasztalataink szerint az egyenes arányosságot általános iskolából jól ismerik a tanulók, ezért nem tárgyaltuk új anyagként, csak néhány kérdés, feladat segítségével elevenítettük fel./

Ábrázold Venn-diagramon a következő halmazokat:

A: lineáris függvények, B: elsőfoku függvények,

C: konstans függvények, D: egyenes arányosságok!

Igaz-e, hogy ha x növekedésével együtt f/x is nő, akkor f egyenes arányosság?

Mondj olyan állításokat két mennyiségről, amelyek igazak, ha köztük egyenes arányosság van!

Mondj olyanokat, amelyekből következik, hogy a két mennyiség között egyenes arányosság van!

Mondj olyanokat, amelyek ekvivalensek azzal, hogy a két mennyiség között egyenes arányosság van!

Feladatok:

1. Melyik az a lineáris függvény, amelynek grafikonja az y tengelyt a $/0;3/$ pontban metszi, és illeszkedik az $a; /1;5/$, $b; /1;-2/$, $c; /2;7/$ —
 $d; /-1;2/$, $e; /3;3/$, $f; /0;5/$ pontra ?
2. Melyik az a lineáris függvény, amely grafikonjának meredeksége 2, és illeszkedik az $a; /0;3/$, $b; /1;4/$, $c; /-1;1/$, $d; /2;7/$ pontra ?
3. Melyik az a lineáris függvény, amelynek grafikonja illeszkedik az $a; /0;1/$ és $/1;4/$, $b; /-1;4/$ és $/1;3/$,
 $c; /3;2/$ és $/4;2/$, $d; /3;2/$ és $/3;3/$ pontokra ?
4. Melyik az az egyenes arányosság, amelynek egy össze-
tartozó értékpárja:
 $a; /3; 0,3/$, $b; /0,3; 3/$, $c; /-3; 0,3/$?
/Igen hasznosnak találtuk az ilyen "fordított" feladato-
kat, amikor a függvény tulajdonságaiból kell meghatároz-
ni a definiáló kifejezést. Ezek segítségével tudtuk fel-
mérni, hogy a tanulók valóban értik-e a kifejezések és
a tulajdonságok, a grafikon közötti összefüggéseket./
5. Melyik az a lineáris függvény amelynek értékkészleté-
be 3 beletartozik, de 4 nem.
6. Láttuk, hogy az $f/x/=ax+b$ függvény rendelkezik a kö-
vetkező két tulajdonsággal:
 $f/0/=b$ és bármely $x \in R$ esetén $f/x+1/=f/x/+a$.
Ha egy R -en értelmezett f függvény rendelkezik ez-

zel a két tulajdonsággal, akkor ebből következik-e, hogy f az $x \mapsto ax+b$ függvénnyel azonos ?

7. Az $f(x) = ax+b$ lineáris függvényt általában úgy ábrázoljuk, hogy a $(0;b)$ és $(1;b+a)$ pontokat kötjük össze. Hogyan lehetne pontosabban /rácspontok összekötésével/ ábrázolni az
 $a; x \mapsto \frac{1}{8}x$, $b; x \mapsto \frac{3}{8}x-2$, $c; x \mapsto \frac{p}{q} + r$ / $p,q,r \in \mathbb{Z}$ / függvényeket ?
8. Lehet-e rácspontok összekötésével ábrázolni az
 $x \mapsto \sqrt{2} x$ függvényt ?
9. Mutassuk meg, hogy az origón kívül van olyan rácspont, amely $\frac{1}{1000}$ -nél kisebb távolságra van az
 $x \mapsto \sqrt{2} x$ függvény grafikonjától !
10. Hány rácsponton haladhat át egy lineáris függvény grafikonja ?

Függvények összekapcsolása, néhány másod- és magasabb foku egészfüggvény

Az elsőnél magasabb foku egészfüggvények vizsgálata előtt tekintsünk át néhány módszert arra, hogy adott függvényekből hogyan tudunk új függvényeket előállítani.

Feladatainkban már korábban is utaltunk arra a lehetőségre, hogy két adott /valós/ függvény értelmezési tartományának közös részéből választott x elemhez rendeljük hozzá a két függvény x helyen felvett értékeinek összegét, különbségét, szorzatát, hányadosát, /az utóbbi esetben kizárva az értelmezési tartományból a nevező zérushelyeit/.

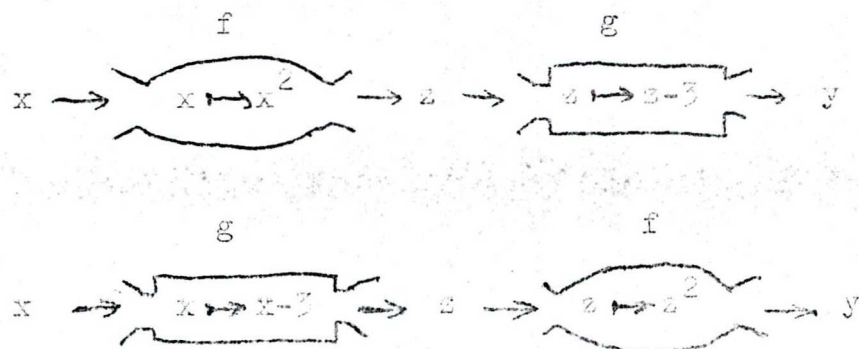
Az így értelmezett új függvények értékeinek meghatározása egy konkrét helyen egyszerű ugyan, de az új függvény tulajdonságainak megadása az eredeti függvényekéből nem mindig egyszerű. /Pl. két monoton növekvő függvény különbsége már nem feltétlenül monoton növekvő./ Így összeg-, különbség-, szorzat- és hánydosfüggvények tulajdonságait sokszor nem is a tagok, ill. tényezők tulajdonságaiból állapítjuk meg, más módszereket kell ezek megállapítására keresnünk.

Új függvények előállításának másik módszere, a függvények összetétele. Az új általános iskolai tanterv részletesen foglalkozik a függvények összetételével, ún. függvényképző gépek összekapcsolásával téve ezt szemléletessé. Középiskolában is célszerűnek találtuk ezen szemléletes módszerrel kezdeni a függvények összetételének vizsgálatát.

Pl; Kapcsoljuk össze az f "négyzetre emelő gépet" azzal

a g géppel, amely "minden bemenő értékből 3-at kivon"!.

Ezt kétféle sorrendben is megtehetjük:



Mindkét esetben az f és g függvények segítségével egy-egy új függvényt állítottunk elő. Itt csak bemenő értékekkel foglalkozunk, azaz x és z lehet az f vagy g bemenő értéke.

Az első gépet $f \circ g$ -vel, a másodikat $g \circ f$ -vel jelöljük.

A további jelölések, elnevezések bevezetésénél tekintünk csak a második függvényre.

Mivel "bemenő" és "kijövő" elemekről van szó, először lesz a függvények összetételének definícióját a halmazelméleti fogalom segítségével megadni. A fenti ábráról leolvasható a definíció:

$$f \circ g := \{ /x; y/ \mid \exists z; /x; z/ \in g \wedge /z; y/ \in f \}$$

Az így definiált $f \circ g$ függvényt az f és g függvények összetett függvényének, vagy kompozíciójának nevezzük, és az $f \circ g$ függvény x helyen felvett $/x$ -hez tartozó/ értékét $(f \circ g)(x)$ -szel, vagy $f(g(x))$ -szel jelöljük.

Mint fentebb láttuk a függvények összetétele nem kommutatív. Az $f \circ g$, vagy másként $x \mapsto f(g(x))$ függvényben szokás az f függvényt külső, a g függvényt belső függvénynek nevezni.

A hagyományos definíció jobban követi az összetett függvény helyettesítési értékének kiszámítási módját, de sokkal bonyolultabb a megfogalmazása, mert külön kell szólni az értelmezési tartomány meghatározásáról. A halmazelméleti megközelítésben ez a definícióból következik. Rögtön látszik, hogy $D_{f \circ g} \subset D_g$ és $R_{f \circ g} \subset R_f$.

Milyen kapcsolat van f és g valamint $f \circ g$ tulajdonságai között ?

Megmutatjuk, hogy ha egy tetszőleges f valós függvényt egy g lineáris függvénnyel kapcsolunk össze, akár belső akár külső függvényként, akkor $f \circ g$, vagy $g \circ f$ grafikonja f grafikonjának egyszerű transzformációjával származtatható, így tulajdonságaik is f és g tulajdonságainak segítségével megállapíthatók.

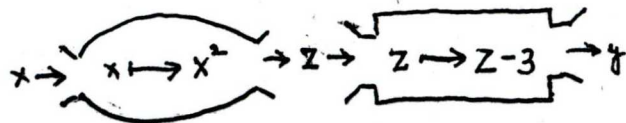
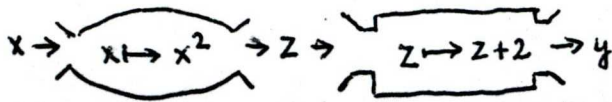
Ha f a belső függvény /vagyis az f függvényt "kapcsoljuk" előre, és ennek értéke a lineáris függvény bemenő eleme/, akkor f értéktranszformációjáról beszélünk, ha f a külső függvény, akkor f változótranszformációjáról.

A lineáris függvényben végzett műveleteket is részekre bontjuk, szorzásra és hozzáadásra. Ha $a < 0$ számmal szorzunk, akkor azt is két részre bontjuk, $|a|$ -kel és -1 -gyel való szorzásra.

A továbbiakban az $f(x) = x^2$ függvény lineáris transzformációit vizsgáljuk. Az első példákban még használjuk a gépek szemléletes egymáshozkapcsolását, azután ezt fokozatosan elhagyjuk.

Kapcsoljunk az $f(x) = x^2$ függvény után "hozzáadó" gépet, amely

2-t, ill. -3-at ad hozzá a bemenő értékekhez:



x	
x^2	
x^2+2	
x^2-3	

Ha a kapott összetett függvények grafikonját értéktáblázat alapján vázoljuk, azt tapasztaljuk, hogy azok az $f(x)=x^2$ függvény grafikonjából eltolással kaphatók.

A tapasztalati uton nyert sejtésünket most is igyekezzünk általánosan is igazolni. Valóban tetszőleges f valós függvény és $b \neq 0$ valós szám esetén igaz, hogy az $x \mapsto f(x)+b$ függvény grafikonját az $x \mapsto f(x)$ függvény grafikonjából y tengely irányu b egységgel való eltolással kaphatjuk? Ez valóban így van, mert tetszőleges $x \in D_f$ esetén b -val változik a függvény értéke, azaz a párok második eleme, így a grafikon pontjainak második koordinátája is.

Legyen most a második függvény a $z \mapsto az; a > 0, a \neq 1$ függvény, azaz vizsgáljuk meg, hogy a grafikonnak milyen transzformációját eredményezi, ha a függvény értékét egytől különböző számmal szorozzuk. Vizsgáljuk külön az egynél nagyobb és az egynél kisebb, pozitív számmal való szorzást! Az $x \mapsto 3x^2$ és $x \mapsto \frac{1}{2}x^2$ függvények grafikonjának ábrázolása után láttuk, hogy a szorzás y tengely irányu nyújtást,

ill. zsugorítást eredményez.

Valóban tetszőleges f függvény esetén az $x \mapsto af/x$ függvény bármely $x \in D_f$ helyen a -szor akkora értéket vesz fel, mint az f függvény. Azaz a grafikon pontjai valóban a -szor nagyobb, /ha $a > 1$ /, vagy a -szor kisebb, /ha $a < 1$ / távolságra kerülnek az x tengelytől.

Hasonlóan megmutattuk, hogy a függvény értékének -1 -gyel való szorzása a grafikon x tengelyre való tükrözését eredményezi.

Ezután az $x \mapsto x^2$ belső és a $z \mapsto az+b$ külső függvényekből összetett függvény ábrázolását három vagy négy lépésben végeztük el aszerint, hogy a pozitív vagy negatív. Pl. az $x \mapsto -2x^2+3$ függvény ábrázolási sorrendje: x^2 , $2x^2$, $-2x^2$, $-2x^2+3$. Vajon felcserélhető-e a transzformációk sorrendje? Beláttuk, hogy a második és a harmadik lépés felcserélhető, de a negyedikkel nem lehet őket felcserélni.

Milyen változást okoz a függvény grafikonján, ha belső függvényként kapcsolunk hozzá egy lineáris függvényt?

A fentiekhez hasonlóan, először konkrét példákon, majd általánosan beláttuk, hogy az $x \mapsto f/x+d$ függvény d -vel kisebb helyeken veszi fel ugyanazt az értéket mint az f függvény, ha $d > 0$; és $-d$ -vel nagyobb helyeken, ha $d < 0$. Ez az f függvény grafikonjának eltolását eredményezi x tengely mentén negatív vagy pozitív irányban.

Az $x \mapsto f/cx$ függvény, ha $c > 1$ akkor c -szer kisebb abszolútértékű helyeken, ha $0 < c < 1$, akkor $\frac{1}{c}$ -szer nagyobb abszolút-

értékű helyeken veszi fel ugyanazt az értéket, mint f .
Tehát a szorzás itt is zsugorítást, ill. nyújtást eredményez, ezuttal y tengelyre merőleges irányban.

Végül már konkrét példa nélkül is meg tudták fogalmazni a tanulók, hogy az $f(-x)$ függvény -1 -szer akkora helyeken veszi fel ugyanazt az értéket, mint f , így grafikonja az f függvény grafikonjából y tengelyre való tükrözéssel kapható.

Egy táblázatban is összefoglaltuk az érték- és változótranszformációkat, szöveges leírás mellett nyilakkal is jelöltük az eltolások, nyújtások, zsugorítások irányát. Tapasztalatunk szerint így a tanulók jobban látják az összefüggéseket, könnyebben megjegyzik a transzformációkat. Ezután több transzformáció egymásutáni alkalmazására oldottunk meg feladatokat, újra megbeszélve a transzformációs lépések sorrendjét. Első osztályban még nem vettünk olyan feladatokat, amelyekben változó szorzása, és a változóhoz való hozzáadás is szerepelt volna, tehát az összetett feladatokban is legfeljebb egy változótranszformáció szerepelt.

A gyakorló feladatokban először $x \mapsto ax - u/2 + v$ alakú függvényeket ábrázoltunk. Megemlítettük, hogy tetszőleges $x \mapsto ax^2 + bx + c$ alakú másodfoku függvényt át tudunk alakítani a fenti formába, és így minden másodfoku függvényt az $x \mapsto x^2$ függvény lineáris transzformációival ábrázolhatunk. Ezzel majd második osztályban foglalkozunk. /Valójában nem a másodfoku függvények ábrázolása volt a fő célunk,

hanem ezek segítségével tartottuk leginkább célszerűnek a függvénytranszformációk tárgyalását. Ezt első osztályban azért tartottuk fontosnak részletesen tárgyalni, mert egyrészt itt még frissek az általános iskolából hozott ilyen irányú ismeretek, kár lenne hagyni, hogy feledésbe merüljenek; másrészt a következő órák anyagához szükség is lesz a transzformációkra./

Néhány magasabb foku, $x \mapsto a/x-u/3+v$ és $x \mapsto a/x-u/4+v$ alakú függvényt is ábrázoltunk transzformációval, majd értéktáblázat alapján vázoltuk az $x \mapsto x^3-x$ függvény grafikonját. A grafikonból, pl. abból, hogy három zérushelye van, látható, hogy nem származtatható az $f/x=x^3$ függvény lineáris transzformációival. Ha különbségfüggvényként fogjuk fel, és grafikus összegzéssel akarjuk ábrázolni, akkor sem tudjuk pontosan meghatározni a szélsőértékeit.

Elmondtuk, hogy a harmad- és magasabb foku függvények többségének tulajdonságait az eddigi módszerekkel nem tudjuk meghatározni, grafikonjukat nem tudjuk pontosan ábrázolni. Harmadik osztályban, fakultáción más, hatékonyabb módszereket is fogunk tanulni a függvények vizsgálatára.

/Fontosnak tartjuk, hogy a tanulók a megismert módszerek korlátaival is tisztában legyenek, és kapjanak kitekintést arra vonatkozóan, hogy későbbi tanulmányaikban milyen irányban bővítjük ezeket az ismereteket./

Feladatok:

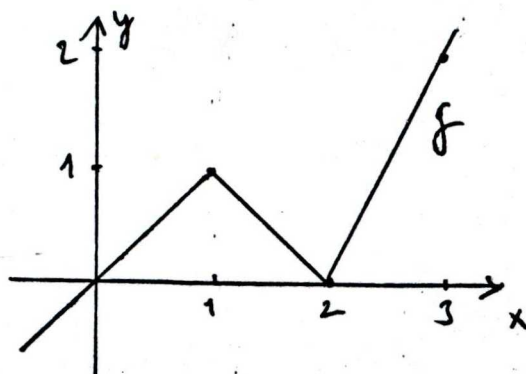
1. Igazoljuk, hogy az $f/x=x^2$ függvény grafikonja para-

bola, tehát azt, hogy létezik olyan F pont és v egyenes, hogy a grafikon bármely $P/x; x^2/$ pontjának F -től és v -től mért távolsága egyenlő!

/Az általános iskolából ismert Pitagorasz tétel segítségével könnyen igazolták az állítást a tanulók. Gyengébbeknek esetleg megadhatjuk F és v helyét. A jobbaknak nem okozott gondot annak igazolása sem, hogy az $f/x = ax^2$ grafikonja, és vele együtt az $f/x = x^2$ függvény bármely lineáris transzformációjának grafikonja parabola. /

2. Igazold, hogy az $f/x = x^4$ függvény grafikonja nem parabola !
3. Előállíthatjuk-e a páros kitevőjű hatványfüggvényeket az $f/x = x^2$ függvény lineáris transzformációival ?
4. Egy f függvény grafikonjának tetszőleges $P/x; f/x/$ pontját milyen koordinátájú pontokba viszik át az egyes transzformációk ?
5. Melyek azok a transzformációk, amelyek nem változtatják meg egy függvény értékkészletét ?
6. Melyek azok a transzformációk, amelyek páros függvényt párosba, ill. páratlan függvényt páratlanba visznek át ?
7. Az $f/x = a/x - u/2 + v$ függvény értékkészlete $f/x \leq 3$, a grafikon két pontja $/4; 0/$ és $/6; 0/$. Határozzuk meg a, u, v értékét !

8. Az ábrázolt f függvény grafikonja alapján vázoljuk a $g/x/ = f^2/x/$ és a $h/x/ = f^3/x/$ függvények grafikonját. Keres-
sün az egyes grafikondarabok-
nak megfelelő kifejezéseket!



9. Keressünk összefüggést az f és g függvények változási
gyorsasága és a $h/x/ = f/x/ - g/x/$ függvény növekedési vi-
szonyai között. Hogyan határozhatnánk meg ennek segít-
ségével a $h/x/ = x^2 - x$ függvény minimumát ?

Racionális törtfüggvények

Az egészfüggvények tárgyalása után a törtfüggvények vizsgálatát az $x \mapsto x^{-n}$ $/n=1,2,3,4/$ függvénycsoport tanulmányozásával kezdtük. Mint a pozitív egész kitevőjű hatványfüggvényeknél, itt is házi feladatként kellett ezeket ábrázolni, és a tulajdonságaikat összegyűjteni.

/Ezen házi feladatok megbeszélése, ellenőrzése jó alkalom volt arra, hogy a tanulók függvényekkel kapcsolatos ismereteinek szintjét, az eddig tanultak alkalmazási készségét felmérjük. Mivel a függvények jellemzéséhez szükséges fogalmakat — monotonitás, szélsőérték, párosság, stb. — már ismerték, így minden lényeges tulajdonságot meg tudtak fogalmazni, az állítások igazolásáról azonban még sokan megfeledkeztek. Az viszont megnyugtató volt, hogy miután felhívtuk erre a figyelmüket, már többségük tudta hogyan fogjon hozzá a tulajdonságok igazolásához, és önállóan el is tudta azt végezni.

Itt már sok megtérült abból az időből, energiából amit a fogalmak pontos meghatározására, a bizonyítási készség fejlesztésére fordítottunk./

Külön foglalkoztunk az $x \mapsto \frac{1}{x}$ függvénnyel, megemlítve, de még nem igazolva, hogy grafikonja hiperbola; és az

$\frac{1}{x^2}$, $x \mapsto \frac{1}{x^4}$, $x \mapsto \frac{2}{x^2}$ függvényekkel. Az utóbbiakról azért

említettünk azért, mert az utóbbiakban be kell látni, mert mindig

az x és $\frac{1}{x^2}$ az x és $\frac{2}{x^2}$ az x és $\frac{1}{x^4}$ az x és $\frac{2}{x^4}$ az

A fordított arányosságot szintén nem tárgyaltuk új anyagként, csak néhány ismétlő kérdés alapján felelevenítettük az általános iskolában tanultakat.

Ezután rátértünk a lineáris törtfüggvények ábrázolására. Azokat a törtfüggvényeket, amelyek számlálója elsőfoku vagy konstans-, nevezője elsőfoku függvény, lineáris törtfüggvényeknek nevezzük. Általános alakjuk $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$, $c \neq 0$. A lineáris törtfüggvények a nevező zérushelyének kivételével mindenütt értelmezhetők. Ábrázolásukat a következő feladatsor segítségével végeztük;

Az $x \mapsto \frac{1}{x}$ függvény transzformációival ábrázoljuk a következő függvényeket.

a, $x \mapsto \frac{1}{x} - 2$, b, $x \mapsto \frac{1}{x-2}$, c, $x \mapsto \frac{2}{x}$,

d, $x \mapsto \frac{1}{2x} \left(= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} \right)$, e, $x \mapsto \frac{1}{2x+4} \left(= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+2} \right)$,

f, $x \mapsto \frac{x}{x-2} \left(= \frac{x-2}{x-2} + \frac{2}{x-2} = 1 + \frac{2}{x-2} \right)$,

g, $x \mapsto \frac{x+1}{2x+4} \left(= \frac{1}{2} \cdot \frac{x+1}{x+2} = \frac{1}{2} \left[\frac{x+2}{x+2} - \frac{1}{x+2} \right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+2} \right)$,

h, $x \mapsto \frac{3x+1}{2x+4} \left(= \frac{3}{2} \cdot \frac{x+1/3}{x+2} = \frac{3}{2} \cdot \left[\frac{x+2}{x+2} - \frac{5/3}{x+2} \right] = \frac{3}{2} - \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{x+2} \right)$,

i, $x \mapsto \frac{x+2}{2x+4} \left(= \frac{1}{2} \cdot \frac{x+2}{x+2} = \frac{1}{2} \right)$, $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

Ezen feladatsor után megállapíthattuk, hogy a lineáris törtfüggvények, ha számlálójuk nem konstansszorosa a nevezőnek, ábrázolhatók az $x \mapsto \frac{1}{x}$ függvény lineáris transzformációival.

A bonyolultabb, g, h feladatoknál, hogy a gyengébb tanulók el ne vesszenek a részletekben, nem végeztük el az



ábrázolást, csak felsoroltuk, hogy milyen transzformációs lépéseket kellene végeznünk. A házi feladatokban is csak ennyit kértünk, ha az átalakítások gyakorlása volt a cél. Több feladat közül csak egynél kellett az ábrázolást is elvégezni, de az ábrázolásnál mindig kértük, hogy legalább két pont leolvasott koordinátáit ellenőrizzék az eredeti feladatban. Órán is rendszeresen ellenőriztettük néhány pont leolvasott koordinátáit. Nagyon fontos, hogy a tanulóknak kialakítsuk az ellenőrzés igényét, és tudják is, hogyan lehet ellenőrizni önálló munkájukat.

Vajon a másodfoku nevezőjű törtfüggvényeket tudjuk-e az $f(x) = \frac{1}{x^2}$ függvény lineáris transzformációival származtatni? Általában egy racionális törtfüggvényt /egy egész és egy legalább elsőfoku egész függvény hányadosát/ tudunk-e a megfelelő fokszámu negatív egész kitevőjű hatványfüggvény lineáris transzformációival ábrázolni?

Míg az egész függvényeknél minden másodfoku függvény ábrázolható a megfelelő fokszámu $x \mapsto x^2$ hatványfüggvény transzformációival, a magasabb fokúak már nem mindig, addig a törtfüggvényeknél már a másodfoku nevezőjűek sem mind származtathatók az $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ lineáris transzformációival.

Már az értelmezési tartományok vizsgálata mutatja, hogy az $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, $g(x) = \frac{1}{x^2-1}$, $h(x) = \frac{1}{x-1/2}$ függvények közül csak h ábrázolható az $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ transzformációival.

A másik kettőt a nevezőben levő függvény tulajdonságai /párosság, zérushelyek, szélsőérték helye és értéke/ alapján vázoltuk.

Értéktáblázattal, a kifejezések alaposabb vizsgálatával, /Pl.: Milyen értékeket vesz fel a függvény a nevező zérushelyének jobb és baloldali környezetében? Milyen értékeket vesz fel, ha $|x|$ nagy? Párosság, páratlanság felismerésével/ még több törtfüggvényt is vizsgáltunk, pl:

$$x \mapsto \frac{x}{x^2+1}, \quad x \mapsto \frac{x}{x^2-1}, \quad x \mapsto \frac{x^3}{x^2-1},$$

Láttuk, hogy a tulajdonságok, elsősorban a szélsőértékek meghatározásához még más módszerek is szükségesek lesznek. Néhány fontosabb függvény, pl.: $x \mapsto \frac{x^2+1}{x} \left(= x + \frac{1}{x} \right)$ tulajdonságait egyszerűbb ötletekkel is meg tudjuk majd határozni, de később a törtfüggvények vizsgálatához is általánosabb módszereket keresünk.

Feladatok:

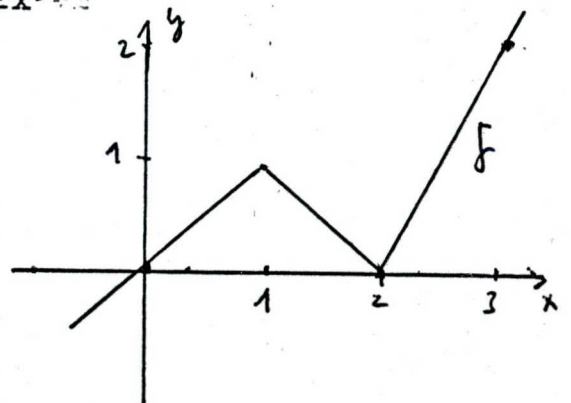
1. Előállíthatjuk-e az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvény lineáris transzformációival az

$$a, \quad g(x) = \frac{1}{x^3}, \quad b, \quad h(x) = \frac{1}{x^{2n+1}} \quad /n > 1/$$

függvényeket ?

2. Rendezett párok egy halmazában az első elemek egy 1 dm^3 térfogatú négyzetes oszlop alakú edény alapélének hosszával egyenlők, a második elemek a hozzátartozó oldalél hosszával azonosak /dm-ben mérve/. Milyen függvényt határoznak meg ezek a párok ?

3. Rendezett párok első és második elemeiről fogalmazz meg olyan állításokat,
- amelyekből következik, hogy köztük fordított arányosság van;
 - amelyek következnek abból, hogy köztük fordított arányosság van;
 - amelyek ekvivalensek azzal, hogy köztük fordított arányosság van !
4. Határozzuk meg az $f/x/ = \frac{x}{ax+b}$ függvényben a és b értéket, ha $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $R_f = \mathbb{R} \setminus \{4\}$!
5. Határozzuk meg az $f/x/ = \frac{ax+b}{x+c}$ függvényben a, b, c értéket, ha tudjuk, hogy $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $R_f = \mathbb{R} \setminus \{4\}$, továbbá azt, hogy a grafikon tükrözött, és kétszeresen nyújtott az $x \mapsto \frac{1}{x}$ függvény grafikonjához viszonyítva!
6. Ábrázoljuk az $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ függvény transzformációival:
- $x \mapsto \frac{x^2+1}{x^2}$, b, $x \mapsto \frac{x^2+2x}{x+1/2}$
7. Ábrázoljuk az $x \mapsto \frac{1}{x^3}$ függvény transzformációival:
- $x \mapsto \frac{x^3-1}{x^3}$, b, $x \mapsto \frac{3x^3-1}{2x^3-1}$
8. Az ábrázolt f függvény grafikonja alapján vázoljuk a $g/x/ = \frac{1}{f/x/}$ és a $h/x/ = f\left(\frac{1}{x}\right)$ függvények grafikonját!



Néhány nem elemi függvény

/A tankönyvekben a nem elemi függvények közül legfeljebb csak az abszolútérték függvények részletesebb tárgyalására kerül sor, ha szerepel is néhány más nem elemi függvény, akkor azokat a tankönyvek éppen csak megemlítik, a tanítás során pedig sokszor idő hiánya miatt teljesen kimaradnak.

Ezzel szemben mi függvénytáitási módszerünkben fontos szerepet szántunk a nem elemi függvényeknek. Az abszolútérték függvények tárgyalásakor lehetőségünk nyílt arra, hogy több függvényvizsgálati, grafikonszerkesztési módszert párhuzamosan alkalmazzunk, összehasonlítsunk. A törtrész-, egészrész-, előjelfüggvényeket számítástechnikai alkalmazásaik miatt is fontosnak tartottuk részletesebben, több feladattal tárgyalni.

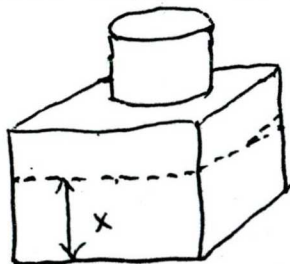
Tárgyalásunkban eddig a függvények grafikonjának megszerkesztésére, vizsgálatára helyeztük a hangsúlyt. A szemléletesség miatt ezt hasznosnak tartottuk, de a nem elemi függvények tárgyalásában és az összefoglalásban már igyekeztünk helyrebillenteni az egyensúlyt. A nem elemi függvények között bemutattunk néhány olyat, amelynek tulajdonságai a grafikonról nem olvashatók le, sőt olyat is, amelynek grafikonja egyetlen intervallumon sem rajzolható meg. Így ezen függvények tulajdonságait közvetlenül a definícióból állapítottuk meg, az összefoglalásban pedig már a többi függvény tulajdonságait

is igyekeztünk közvetlenül a definícióból származtatni. Tehát a nem elemi függvények nemcsak mint különlegességek szerepeltek az anyagban, hanem fontos didaktikai szerepük is volt egyrészt abban, hogy a korábban általánosan értelmezett függvényfogalmat felidézzük, felszínen tartsuk; másrészt abban a folyamatban, amelyben a kifejezésekről, a grafikonokról fokozatosan a tulajdonságok szerinti rendszerezésre tevődik át a hangsúly. /

Elemi függvénynek nevezzük az egész értelmezési tartományán egyetlen kifejezéssel adott függvényeket. Nem elemi függvényeket definiálhatunk úgy, hogy a valós számok különböző részhalmazain más-más kifejezéssel adjuk meg a függvényt. Írásmódjuk alapján "kapcsos" függvényeknek is szokták ezeket nevezni. Ábrázoljuk, és határozzuk meg a tulajdonságait a következő függvényeknek:

$$f/x/ = \begin{cases} x-2, & \text{ha } x \geq 1 \\ -x, & \text{ha } x < 1 \end{cases}, \quad g/x/ = \begin{cases} x^2-1, & \text{ha } x < -1 \text{ vagy } x > 1 \\ 0, & \text{ha } -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Egy tintásüveg alsó része 3cm élű kocka, a felső része henger, amelynek átmérője és magassága 2cm. Írjuk fel a benne levő folyadék térfogatát, a folyadéknak az üveg aljától mért x magasságának függvényében! Ábrázoljuk is a kapott $V/x/$ függvényt!



Már általános iskolában is találkoztunk egy "kapcsos" függvénnel: az abszolútérték függvénnel. Egy nem negatív szám abszolútértékén önmagát értjük, negatív szám

abszolútértéke a szám -1-szeresével egyenlő, azaz:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq 0 \\ -x, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

Ábrázoljuk, s határozzuk meg az $x \mapsto |x|$ függvény tulajdonságait!

/Az abszolútértékfüggvények ábrázolása gyengébb tanulóknak nehezebben szokott menni, mert összetett feladat, felbontásból és intervallumonként különböző függvények ábrázolásából áll. Célszerűnek láttuk a két lépést szétválasztani, először gyakorolni a kapcsos függvények ábrázolását, vizsgálatát, és csak ezután térni rá az összetettebb abszolútérték függvények ábrázolására./

Határozzuk meg, mely valós x -ekre lesz $|x-2|=x-2$?

A többi valós x -re mivel lesz egyenlő $|x-2|$?

Ábrázoljuk felbontással az $f(x)=|x-2|$ függvényt !

Ábrázoljuk az f függvényt az $x \mapsto |x|$ függvény transzformációjával is !

Ábrázoljuk mindkét módszerrel a $g(x)=|x-3|+1$ és $h(x)=2|x|-1$ függvényeket.

Ábrázoljuk felbontással az $x \mapsto |x-2|+2x$ függvényt.

Származtatható-e ez az $x \mapsto |x|$ függvény lineáris transzformációival?

Ha f bonyolultabb függvény, akkor a $g(x)=|f(x)|$ függvényt úgy is ábrázolhatjuk, hogy nem algebrai módszerrel állapítjuk meg, hogy f hol nem negatív, és hál negatív, hanem pl. transzformációval ábrázoljuk f grafikonját, és ahol az negatív értékeket vesz fel, ott tükrözzük az x tengelyre.

Ábrázoljuk ezzel a módszerrel a következő függvényeket:

$$x \mapsto |x^2 - 1|, \quad x \mapsto ||x| - 1|, \quad x \mapsto |||x| - 1| - 1|, \quad x \mapsto \left| \frac{x-1}{x-2} \right|$$

Ezután definiáltuk valós számok egészrészét, törtrészét; majd ábrázoltuk és vizsgáltuk az $x \mapsto [x]$, $x \mapsto \{x\}$, és az $x \mapsto \operatorname{sgn} x$ függvényeket, és néhány feladatom próbáltuk még alaposabbá tenni ezek ismeretét. Pl.: Kapcsoljuk össze a fenti függvényeket az $x \mapsto x^2$ függvénnyel mindkét lehetséges sorrendben!

A továbbiakban még néhány "kapcsos" függvényt vizsgálunk, de most nem úgy bontjuk részeire a valós számok halmazát, hogy a részek összefüggő intervallumot alkossanak, hanem a racionális és az irracionális számok halmaza lesz a két részhalmaz. Ehhez először röviden felelevenítettük a valós számokkal kapcsolatos, fentebb már vázolt ismereteket.

Dirichlet francia származású matematikus nevéhez fűződik a következő igen egyszerűen definiálható, mégis sok érdekes tulajdonsággal rendelkező függvény:

$$D/x/ = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \text{ racionális,} \\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$$

Bár a függvény csak két értéket vesz fel grafikonját mégsem tudjuk megrajzolni, legfeljebb azt tehetjük, hogy megrajzolunk két egyenest, amelyek a grafikon pontjait tartalmazzák, és megállapodunk abban, hogy egyszer az egyikken, másszor a másikon képzeljük a grafikon pontját. Így a tulajdonságokat sem tudjuk automatikusan leolvas-

ni a grafikonról. Pl a két egyenes szimmetrikusnak látszik az y tengelyre, de mivel az egyenesek "lyukasak", feltétlenül ellenőrizni kell, hogy minden x -re teljesül-e, hogy $f(-x) = -f(x)$? Ugyanigy a definíció, és a valós számokról szerzett korábbi ismereteink alapján igazolhatjuk, hogy a függvény egyetlen intervallumon sem monoton növekvő vagy csökkenő.

Az $f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \text{ racionális,} \\ -x, & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$ függvényt is csak

a fentihez hasonló megállapodással tudjuk ábrázolni. A két egyenes, amely a grafikon pontjait tartalmazza, itt is szimmetrikus helyzetű az y tengelyre, de itt az ellenőrzés azt mutatja, hogy bármely x -re $f(-x) = -f(x)$. Tehát a szemlélet alapján feltételezett tulajdonság nem teljesül, a függvény nem páros, hanem páratlan. Ez a példa jól mutatja a grafikus ábrázoláson alapuló függvényvizsgálati módszer korlátait. Érdekes tulajdonsága még ennek a függvénynek, hogy kölcsönösen egyértelmű, de egyetlen intervallumon sem monoton.

Még a fenti megállapodással sem tudjuk ábrázolni a

$g(x) = \begin{cases} q, & \text{ha } x = \frac{p}{q}; (p; q) = 1, q > 0 \\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$ függvényt, hi-

szen az bármely intervallumon bármilyen nagy számnál nagyobb értéket is felvesz.

Ezen utóbbi példák lényegesen módosították a tanulók elképzeléseit a függvényekről. A folytonos vonalakkal ábrázolt racionális függvények után ismét erősítették

a függvények sokféleségéről alkotott elképzeléseket, segítettek annak a képnek a fenntartásában, amelyben a függvény rendezett párok halmaza. Ezek a példák jó alapokat biztosítottak a későbbi függvénykonstrukciós feladatokhoz. A kreatív gondolkodást kiválóan fejlesztik azok a feladatok, amelyekben adott tulajdonságu objektumokat, jelen esetben függvényeket kell konstruálni. Ha nem kötjük meg a tanulók gondolkodását azzal, hogy csak folytonos függvényekkel dolgoztatjuk őket, ha bátran mutatunk nekik meglepő példákat, néhány felhasználható módszert, akkor nagyrészüket meglepően messze el tud jutni a kreativitást igénylő feladatokban is. Az utóbbi években azt tapasztaltuk, hogy az adott tulajdonságu objektumok konstruálását előíró feladatok és a számítógépes programok írása között sok hasonlóság, kimutatható kapcsolat van. Azok a tanulók, akik az egyikben eredményesek, a másik területen is gyorsabban haladnak./

Feladatok:

1. Ábrázoljuk és vizsgáljuk a következő függvényeket:

$$x \mapsto |||x| - 1| - 1| - 1|, \quad x \mapsto ||x| + 2x|, \quad x \mapsto |x-1| + |x-3|$$

2. Az $f/x/ = a|x-u|+v$ függvényben határozzuk meg a, u, v értékét, ha

a, $R_f: [0; \infty)$, $f/2/=2$, $f/4/=2$

b, $R_f: (-\infty; 2]$, $f/2/=0$, $f/4/=1$

c, $f/2/=1$, $f/3/=4$, $f/6/=1$

3. Oldjuk meg grafikus módszerrel:

a, $|x^2-2|=2$, b, $\left|\frac{3}{x}\right|=2x+5$, c, $||x-1|-2|=1$

4. Milyen p esetén lesz megoldása a következő egyenleteknek :

a, $2|x-2| = -x + p$

b, $2-|x-4| = px$

c, $|x+2| + |x-3| = p$

5. Egy f függvény D_f értelmezési tartományát fel tudjuk bontani olyan részhalmazokra, amelyek mindegyikén f monoton növekvő. Következik-e ebből, hogy f D_f -en is monoton növekvő. /Az $x \mapsto \{x\}$ függvény az ellenpélda./

6. Ábrázoljuk és vizsgáljuk a következő függvényeket:

$x \mapsto [|x|]$, $x \mapsto |[x]|$, $x \mapsto \{ |x| \}$, $x \mapsto |x| \cdot x$, $x \mapsto \frac{|x|}{x}$

7. Legyen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ értelmezett, páratlan függvény! Mit állíthatunk a következő függvényekről?

$x \mapsto f(|x|)$, $x \mapsto |f(x)|$, $x \mapsto \operatorname{sgn} f/x/$

8. Adjunk meg olyan $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amelynek értékkészlete:

a, a páros számok halmaza; b, a $(0;1]$ intervallum

9. Adjunk meg olyan $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amely egyetlen intervallumon sem monoton, de $|f|$ monoton növekvő $\mathbb{R}$ -en!

Az első osztályos valós függvénytan anyag rendszerezése, összefoglalása

Az első osztályos algebra anyagban még többször sor kerül a függvényekkel kapcsolatos ismeretek felidézésére /pl. az $x \mapsto \frac{x^2-1}{x-1}$ és $x \mapsto \frac{x+2}{x^2+4x+4}$ típusú függvények ábrázolásánál/, alkalmazására /elsősorban az egyenletek, egyenletrendszerek megoldásánál/. Sőt az Összefoglalás előtt célszerűnek láttuk a következő témából előrehozni egy "Az egyenlet mint logikai függvény, egyenletek grafikus megoldása" címen összefogható, 2-3 órában tárgyalható anyagrészt. Ez egyrészt lehetővé tette különböző függvények ábrázolásának további gyakorlását, másrészt előnyös volt azért is, mert gyakorlás közben a függvények egy alkalmazási területével is megismerkedhettek a tanulók.

Ezután kezdtünk hozzá a függvénytan anyag összefoglalásához. Az elemi függvényeket eddig az őket meghatározó kifejezések alakja szerint rendszerezve tárgyaltuk. Összefoglalásunk reprezentálja a középiskolai függvénytan felépítését. Először konkrét, elsősorban elemi függvényeket, hasonló típusú függvénycsoportok tulajdonságait vizsgáljuk. Összefüggéseket keresünk a definiáló kifejezések alakja és a tulajdonságok között, ezen összefüggések jobb megértéséhez a tulajdonságok felől is közelítünk a megismert függvényekhez, és fokozatosan a tulajdonságok szerinti rendszerezésre helyezzük a hangsúlyt.



Itt is először felelevenítettük a definiáló kifejezések szerint csoportosítva a tanult elemi függvényeket, majd a megismert tulajdonságok szerint tekintettük át ezeket /pl.: melyek R -en értelmezettek, melyeknek van "szakadásuk"; melyek kölcsönösen egyértelműek; melyek monoton növekvők, ill. csökkenők egész értelmezési tartományukon; melyeknek van szélsőértéke; melyik páros, melyik páratlan?/.

Észrevéve, hogy bizonyos tulajdonságok között kapcsolat van, /pl.: a szigorúan monoton függvény kölcsönösen egyértelmű, vagy páros függvény nem lehet kölcsönösen egyértelmű/ igyekeztünk a tulajdonságok egymáshoz való viszonyát tisztázni. Először úgy, hogy több tulajdonsággal egyszerre rendelkezőket kerestünk az ismert függvények között. Ha nem találtunk megfelelőt, akkor az ismert elemi függvényekből próbáltunk ilyent konstruálni /például olyan f függvényt amelyre $D_f=R$, $R_f=R^-$ /, vagy csak egy grafikont megadni, esetleg az ismert nem elemi függvények segítségével, vagy rendezett párok megadásával igyekeztünk példát adni. /pl. páros függvény, amelynek két szélsőértéke van/.

Ha egyik módszerrel sem sikerült példát adni, akkor megpróbáltuk bizonyítani, hogy ilyen függvény nem is létezik /pl.: csak negatív értékeket felvevő páratlan függvény./

Az ilyen függvénykonstruálási és bizonyítási feladatok nehézségi fokát igen széles skálán lehet változtatni,

igy igen alkalmasak a differenciált foglalkoztatásra.

Témazáró dolgozatot az elmúlt években az alábbi feladat-sorból irattam. Zárójelben egy 1982-ben 29 fős és egy 1984-ben 22 fős általános tagozatu osztályban elért eredmények.

1. Az $f: x \mapsto ax+b$ függvényben határozzuk meg a és b értékét,

a, ha f grafikonja illeszkedik a $/0;2/$ és $/1;-1/$ pontokra, /90 ill. 84%/

b, ha f olyan egyenes arányosság, amelynek egy összetartozó értékpárja: $/3; 0,3/$ /69% ill. 66%/

c, ha f értékkészletébe 3 beletartozik, de 4 nem.
/indoklás!/ /41% ill. 42%/

2. Ábrázold a következő függvényeket, és határozd meg értékkészletüket: a, $x \mapsto -/x+2/2+3$ /72% ill. 77%/

b, $x \mapsto |x+3| - x$ /65% ill. 62%/

3. Oldd meg grafikusan:

$$2x-5 = \frac{1}{x-2}, \quad 2x-5 \leq \frac{1}{x-2} \quad /57\% \text{ ill. } 68\%$$

4. Határozzuk meg a következő függvények értékkészletét:

a, $x \mapsto \frac{x+2}{x-3}$, b, $x \mapsto \{x\} + 1$, c, $x \mapsto \{x+1\}$!
/53% ill. 71%/ /53% ill. 57%/ /45% ill. 41%/

5. Adj meg olyan R -en értelmezett, mindenütt negatív értékű függvényt, amely a, páros /62% ill. 61%/

b, páratlan! /38% ill. 52%/

/Ahol szükséges, indokold válaszodat!/
/Az egész dolgozat eredménye: 57% ill. 63 %./

A kísérlet tapasztalatainak összegzése

Az első osztályos valós függvénytani anyag befejezésével természetesen nem ért véget függvénytani kísérletünk. Az első osztályban kialakított módszereinket a továbbiakban is tudtuk hasznosítani. Példaként felsorolunk ebből néhány lehetőséget.

A tanulók számára természetes volt a transzformációk függvényként /rendezett pontpárok halmazaként/ való értelmezése. A függvények inverzéről kompozíciójáról tanultakat is jól tudtuk hasznosítani a transzformációk inverzének, szorzatának és ezeknek az identikus leképezéssel alkotott kapcsolatának tárgyalásánál.

A függvények inverzének a halmazelméleti tárgyalásmódban megfogalmazható egyszerűbb definíciója, a függvény leszűkítésének egyszerűbb értelmezése /az elempárok egy részhalmaza — leszűkítés helyett kifejezőbb is a részfüggvény elnevezés/ a négyzetgyökfüggvény és vele együtt a többi hatványfüggvény inverzének tárgyalását egyszerűbbé tette.

A függvénytranszformációk és a függvények tulajdonságainak ismerete könnyebbé tette a másodfoku és a trigonometrikus függvények tanulmányozását, így a tanulók másodfoku és trigonometrikus egyenletekkel egyenlőtlenségekkel kapcsolatos feladatokban szívesen alkalmazták függvénytani módszereket.

A második osztályos anyag végén, a függvénytani össze-

foglalóban már nem volt ismeretlen a valós függvények és a geometriai transzformációk tulajdonságok szerinti rendszerezése. Itt valóban az első két éves függvénytananyag szintézisét lehetett megteremteni, változatos bizonyítási és függvénykonstrukciós feladatok megoldásával.

Az analízis tanítására is kedvező hatással volt, hogy a tanulók sokféle valós függvényt ismertek, könnyen tudtak példát adni valamely tulajdonsággal rendelkező, ill. nem rendelkező függvényre. Nem volt idegen számukra a kettős ϵ, δ -ás és sorozatos/ definíciórendszer használata sem.

A fakultációs csoportokban tudtuk összehasonlítani a tanulók függvénytan ismereteit azokkal, akik az első két évben a tankönyv függvénytan anyagát tanulták. Azt tapasztaltuk, hogy kísérletünkben úgy sikerült általánosabb, szélesebb körben alkalmazható függvényfogalmat kialakítani, hogy közben a függvények tanításának hagyományos területeit is eredményesebbé tettük. Sokkal több függvényt ismertek a tanulóink, magabiztosabban kezelték azokat.

Általában a függvényekkel kapcsolatos ismereteiket a tanulók szilárdnak, társaikénál sokoldalubbnak érezték. Tanulóink is megkedvelték ezt a témakört.

1. melléklet

A szakfelügyelő által javasolt felmérő feladatai 1. osztályosoknak a hagyományos általános iskolai anyagból.

/1983-ban írta 99 első osztályos tanuló/

1. Rendezzük növekedő sorrendbe a következő számokat:

$$-\frac{9}{7}, \quad \frac{5}{9}, \quad \frac{11}{5}, \quad -\frac{7}{8}, \quad -\frac{1}{2}. \quad /1 \text{ pont/}$$

2. Mennyi az összege:

$$/+20,05/+/-0,6/+/-1,4/+/-\frac{2}{7}+/+1,95/+/\frac{2}{7}/ \quad /1 \text{ pont/}$$

3. Mit adtunk $+\frac{17}{5}$ -hoz, ha -3 -at kaptunk? /1 pont/

4. Végezzük el a lehető legrövidebb uton:

$$/+ \frac{2}{3} // +76 // -0,1 // - \frac{3}{2} // +10 // -0,25/. \quad /1 \text{ pont/}$$

5. Melyik számot szoroztuk $-\frac{5}{6}$ -dal, ha a szorzat

$$\text{értéke } -\frac{2}{3}/? \quad /1 \text{ pont/}$$

6. Mennyi a $3a^2-4$ kifejezés helyettesítési értéke,

$$\text{ha } a = -\frac{3}{4}; \quad \text{ha } a = -0,7? \quad /2 \text{ pont/}$$

7. Egyenlő szárú háromszög egyik alapján levő szög β .

Mekkora a szárak által bezárt szög? Mekkora lehet β ?

/2 pont/

8. Három falucskának összesen 4500 lakosa van. A második faluban kétszer annyian élnek mint az elsőben, a harmadikban pedig 500-zal kevesebben, mint a másodikban.

Hány lakosa van mindegyik falunak? /3 pont/

9. Oldjuk meg x-re a következő egyenleteket:

$$/5x+3/-/2x-4/= /x-2/-/x+3/ \quad /2 \text{ pont/}$$

$$/2\frac{1}{2}x-1\frac{1}{3}/-/3\frac{1}{4}-\frac{1}{3}x+/ -x-1/=8\frac{5}{8} \quad /4 \text{ pont/}$$

10. Egy egyenlő szárú háromszög egyik külső szöge 87° .
mekkorák a háromszög szögei? /3 pont/

11. Egy három cm sugarú kör köré husz cm-es átfogóju
derékszögű háromszöget írunk. Mekkora a háromszög
területe? /5 pont/

Elérhető összesen 26 pont.

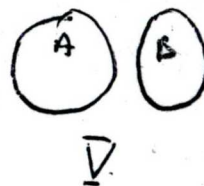
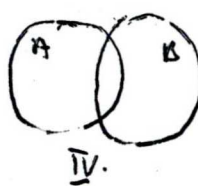
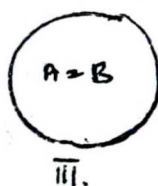
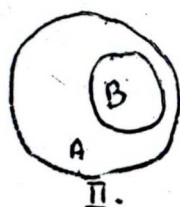
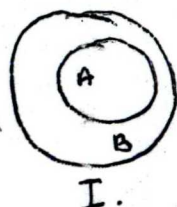
Az elért pontok átlaga 8,31 pont

A teljesítmény 31,9%.

2. melléklet

Felmérő az általános iskolai anyag Halmazok, Logika, Függvények témaköreiből

1. Az alább ábrázolt halmazoknál mely esetekben igaz, hogy
- a, a B halmaz minden eleme A-nak is eleme?
 - b, a B halmaznak van olyan eleme amely A-nak nem eleme?
 - c, Fogalmazd meg mi jellemző az A és B halmazok elemeire az I. esetben?



Ezuttal feladatonként is közöljük az 1983-ban 99 tanuló által irt. felmérő eredményeit:

Az a, kérdésnél a II. esetet megjelölte 86%, a III. esetet 93%, hibásat jelölt 8%.

A b kérdésnél az I. esetet megjelölte 64%, a IV. esetet 88%, az V. esetet 75%; hibásat jelölt 14%.

A c, kérdésre jól válaszolt 32%, részben jól 25%./

2. Egy osztályban mindenki sportol a következő két sportág valamelyikében: x tanuló focizik, y tanuló kosárlabdázik, közülük z tanuló focizik is, kosárlabdázik is. Írd fel x,y,z segítségével, hány tanuló jár az osztályba? /jó választ adott 56%/

3. Fogalmazd meg a következő állítások tagadását:

- a, András és Béla szereti a komoly zenét. / 1 %/
- b, Zsuzsi vagy Kati moziba megy. / 31 %/

4. Az A számhalmaz minden eleme nagyobb hatnál.

A következő állítások közül melyik a fenti tagadása?

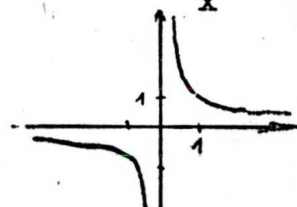
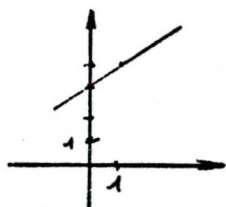
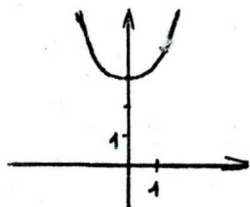
- a, Az A halmaz minden eleme 6-nál kisebb. /26%/
- b, Az A halmaz minden eleme 6-nál nem nagyobb. /35%/
- c, Az A halmaznak van 6-nál kisebb eleme. /3%/
- d, Az A halmaznak van 6-nál nem nagyobb eleme. /0%/
- /Több rossz választ jelölt meg 41%/

5. A következő állítást tekintsük igaznak: "Minden jó távolugró magas." Melyik igaz a következő állítások közül:

- a, Ha magas, akkor jó távolugró. /64%/
- b, Ha nem magas, akkor nem jó távolugró. /78%/
- c, Ha nem jó távolugró, akkor nem magas. /59%/
- d, Van olyan jó távolugró aki nem magas. /88%/

6. Az alábbi öt függvény közül négyet ábrázoltunk. Melyiknek melyik a grafikonja? Ábrázold a hiányzót! Melyik fejezhet ki egyenes ill. fordított arányosságot?

$$f/x/ = x+3, \quad g/x/ = 2x-1, \quad h/x/ = \sqrt{x-3}, \quad k/x/ = x^2+3, \quad l/x/ = \frac{1}{x}$$



/66%, 89%, 63% 69% ismerte el./

A g függvényt 57% tudta ábrázolni, 39% írta, hogy csak l lehet fordított arányosság, 7% pedig azt hogy egyik sem lehet egyenes arányosság./

Az egész dolgozatban elért eredmény 52,9%.

Irodalom

1. Petzval Ottó: Elemi mennyiségtan felgymnasumok és reáliskolák használatára
Pesten, 1856.
2. Beke Manó, Mikola Sándor: A középiskolai matematikai tanítás reformja
Franklin Társ. Bp. 1909.
3. Hódi Endre: Az új matematikai tankönyvek bemutatása
elő
Pedagógiai Szemle 1982. évi 4. sz.
4. E. Colerus: Pythagorastól Hilbertig
Franklin Társulat Bp.
5. A. P. Juskevics: A középkori matematika története
Gondolat, Bp. 1982.
6. Szabó Árpád: A görög matematika kibontakozása
Magvető, Bp. 1978.
7. Simonyi Károly: A fizika kulturtörténete
Gondolat, Bp. 1978.
8. K. A. Ribnyikov: A matematika története
Tankönyvkiadó Bp. 1974.
9. N. Vilenkin: Hogyan keletkezett és fejlődött a függvény fogalma
Kvant 1977. évi 7. sz. /Orosz nyelven/
10. G. E. Silov: Mi is az a függvény?
Mat. v. školje 1970. év 1. sz. /Orosz nyelven/
11. Sz.-Nagy Béla: Valós függvények és függvénysorok
Tankönyvkiadó Bp. 1965.
12. D. J. Struik: A matematika rövid története
Gondolat, Bp. 1958.
13. Hajnal-Hamburger: Halmazelmélet
Tankönyvkiadó, Bp. 1983.

14. P.R. Halmos: Elemi halmazelmélet
Műszaki Könyvkiadó, Bp. 1981.
15. Székely-Doby S.: Két nyelven beszélnek
Műszaki Élet, 1983./12.sz.
16. Szendrei János: A matematikaoktatás korszerűsítéséről
OPI cikkgyűjtemény, 1977.
17. Pollák György: Megjegyzések az általános iskola 7. osztályának ideiglenes tankönyvéről
A Matematika Tanítása 1977./3. sz.
18. Varga Tamás: A függvényfogalom előkészítése
A Matematika Tanítása 1983./3-4.sz.
19. Kalmár László: Bevezetés a matematikai analízisbe
Tankönyvkiadó, Bp. 1982.
20. Davis- Hersh: A matematika élménye
Műszaki Könyvkiadó, Bp. 1984.
21. Varga Tamás: Relációk és függvények
A Matematika Tanítása 1977./3.sz.
22. G.V.Dorofeev: A függvény fogalma a matematikában és az iskolában
Mat.v. skolje 1978./2. /Orosz nyelven/
23. A.N.Kolmogorov: Mi is az a függvény?
Mat.v. skolje 1978./2. /Orosz nyelven/
24. Katz Sándor: A bizonyítási készség fejlesztése
függvénytani feladatok segítségével
A Matematika Tanítása 1980./5.sz.
25. Katz Sándor: Különleges függvények szerepe a középiskolai matematika tanításában
A Matematika Tanítása 1981./1.sz.
26. Katz Sándor: Függvények a középiskola első osztályában
A Matematika Tanítása 1984./6.sz.