Leszálló fatranszformációk kompoziciójának indukálhatósága

Egyetemi doktori értekezés

Kovács Tibor

József Attila Tudományegyetem Kalmár László
Kibernetikai Laboratórium
Szeged, 1986.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

A faautomata fogalmának alapja az a felismerés, hogy a véges automaták véges unáris algebráknak tekinthetők, amelyek bemenetei (ebben a felfogásban) unáris polinom-szimbólumok. Ha a véges automaták ilyen értelmezésénél elhagyjuk az unaritás követelményét, akkor a faautomaták fogalmához jutunk. Hasonlóképpen tekinthetők a fatranszformátorok a szekvenciális gépek általánositásának. Ennek az általánositásnak azonban egymástól lényegesen eltérő módjai vannak. Az általánositás során a fák feldolgozási irányának megválasztásával juthatunk a leszálló (a levelektől a gyökér felé halad), illetve a felszálló (a gyökértől a levelek felé halad) fatranszformátorok fogalmához.

Az igy nyert fogalom jelentőségét mutatják például azok az eredmények, amelyek szerint a faautomaták által felismert erdők osztálya lényegében megegyezik a környezetfüggetlen nyelvtanok derivációs fáiból álló erdők osztályával, illetve azok, amelyek a fatranszformációk kompoziciójával előálló n-felületi erdők és a hozzájuk tartozó front nyelvek hierarchijára vonatkoznak (ld. például [1.b.]). Hasonlóan a kérdéskör fontosságát mutatja a szintaxisvezérelt forditással való nyilvánvaló kapcsolata.

Az az ut amelyen a fatranszformátorok fogalmához el lehet jutni, egyben fölveti azt a kérdést is, hogy, amint az a szekvenciális gépek esetén fennáll, zárt-e a leszálló illetve a felszálló fatranszformációk osztálya a kompozicióra nézve. Ismert, hogy a zártság egyik esetben sem marad meg. Mind a leszálló, mind a felszálló fatranszformációkra vonatkozóan ismertek bizonyos elegendő feltételek a kompozició indukálhatóságára. A dolgozatban a leszálló fatranszformációk esetében egy szükséges és elegendő feltételt adunk az indukálhatóságra vonatkozóan, s bizonyos részosztályok esetén megadjuk a feltétel eldöntési algoritmusát is.

2. Fák, faautomaták

A dolgozatban használt univerzális algebrai formalizmust először STEINBY vezette be ([9]), s ezt illetve ehhez hasonlót használ a legtöbb e kérdéskörrel foglalkozó munka. A téma legátfogóbb, különféle kapcsolataira is kiterjedő, ismertetését találjuk [1.a]-ban és [1.b]-ben. Itt az általunk felhasznált valamennyi eredmény, bizonyitásával együtt megtalálható. [2] hasonló formalizmust használva mutatja be a faautomaták és fatranszformációk fontosabb tulajdonságait. [3], [4], [5], [6] és [7] az általunk vizsgált kérdéssel közvetlen kapcsolatban lévő problémák megoldásával foglalkoznak.

Mind ebben a fejezetben, mind a dolgozat további részében [1.a] és [1.b] alapján vezetjük be a fogalmakat, bár a formalizmust és a felhasznált fogalmak körét [12] tapasztalatait felhasználva kissé módositjuk.

2.1. Definició

Müveleti szimbólumok halmazán a páronként diszjunkt F_0, F_1, ... szimbólumhalmazok $F=F_0 \cup F_1 \cup \ldots$ egyesitését értjük. Az F_m $(m \geqq 0)$ halmazbeli szimbólumokat m-változós müveleti szimbólumoknak nevezzük. Ha F véges, akkor rangolt ábécének nevezzük.

2.2. Definició

Legyen Z olyan halmaz, amely diszjunkt F-fel. A Z feletti F-fák $T_F(Z)$ halmazán azt a legszükebb U halmazt értjük, amelyre:

(i) $F_0 \cup Z \subseteq U$

(ii) $f(p_1,\ldots,p_m) \in U$ valahányszor $f \in F_m$ $(m \geqq 1)$ és $p_1,\ldots, p_m \in U$.

2.3. Definició

A $p(\in T_F(Z))$ fa root(p) gyökerét a következő feltételekkel határozzuk meg:

(i) ha $p \in F_0 \cup Z$, akkor root(p)=p

(ii) ha $p=f(p_1,\ldots,p_m)$, akkor root(p)=f

2.4. Definició

Legyen $p(\in T_F(Z))$ tetszőleges fa. A p fa részfáinak sub(p) halmazán a következőt értjük:

(i) ha $p \in F_0 \cup Z$, akkor $\mathrm{sub}(p)=\{p\}$

(ii) ha $p=f(p_1,\ldots,p_m)$, akkor $\mathrm{sub}(p)=\{p\} \cup \bigcup_{i=1}^{m} \mathrm{sub}(p_i)$.

Világos, hogy a fákat fa alaku gráfokkal, amelyeknek csucsait $F \cup Z$ elemeivel cimkézzük, reprezentálhatjuk.

A gráfreprezentáció lehetőséget kinál arra, hogy megkülönböztessük a részfák egyes előfordulásait. Ebben az értelemben megismételve a 2.4. definiciót kapjuk a p fa részfái előfordulásainak $\mathrm{sub}^*(p)$ halmazát.

A következőkben $\mathrm{sub}^*(p)$-n értelmezünk néhány relációt.

2.5. Definició

Legyen $p(\in T_F(Z))$ tetszőleges fa, és $p_1, p_2 \in \mathrm{sub}^*(p)$.

(i) $p_1=p_2$ ha $\mathrm{sub}(p_1)=\mathrm{sub}(p_2)$

(ii) $p_1\equiv p_2$ ha $\mathrm{sub}^*(p_1)=\mathrm{sub}^*(p_2)$

(iii) $p_1\leq p_2$ ha $p_1 \in \mathrm{sub}(p_2)$

(iv) $p_1 \trianglelefteq p_2$ ha $p_1 \in \mathrm{sub}^*(p_2)$

Azt, hogy u csucsa p-nek igy jelöljük: $u \in p$. Ha $p_1 \trianglelefteq p$ és a gráfreprezentációban $\mathrm{root}(p_1)$-nek megfelelő csucs u, akkor jelölésben:

$u=\mathrm{root}(p_1)$ ill. $p_1=\mathrm{root}^{-1}(u)$.

2.6. Definició

A $p(\in T_F(Z))$ fa $h(p)$ magasságát a következők alapján értelmezzük:

(i) ha $p \in F_0 \cup Z$, akkor $h(p)=0$

(ii) ha $p=f(p_1,\dots,p_m)$, akkor $h(p)=\max(h(p_i) \mid i=1,\dots,m)+1$.

A p fa 0 magasságu részfáit a p leveleinek is szokás nevezni. Világos, hogy h(p) nem más, mint a p-t reprezentáló gráfban a gyökértől a levelekig vezető utak hosszainak maximuma.

2.7. Definició

A $T_F(Z)$ részhalmazait Z feletti F-erdőknek (vagy egyszerübben erdőknek) nevezzük. Nyilvánvaló, hogy ha F és Z véges, akkor $T_F(Z)$ elemei magasságuk növekvő sorrendjében megszámlálható módon fölsorolhatók.

2.8. Példa

Legyen F a következő rangolt ábécé:

$F=F_0 \cup F_1 \cup F_2$, $F_0=\{s\}$, $F_1=\{f\}$, $F_2=\{g\}$.

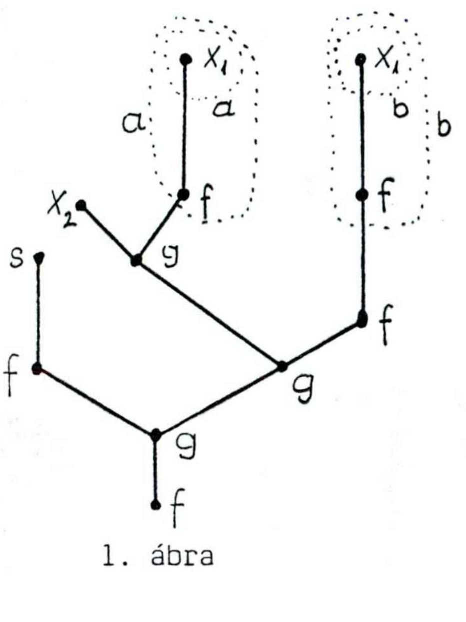
Legyen $Z=\{x_1, x_2\}$.

Ekkor például a $p=f(g(f(s), g(g(x_2, f(x_1)), f(f(x_1)))))$ fa $T_F(Z)$-beli. A p fa gráfreprezentációját az 1. ábrán láthatjuk. Ekkor a részfák halmaza:

$\mathrm{sub}(p)=\{p, g(f(s), g(g(x_2,f(x_1)), f(f(x_1)))), f(s), s, g(g(x_2,f(x_1)), f(f(x_1))), g(x_2, f(x_1)), x_2, f(x_1), x_1, f(f(x_1))\}$.

$\mathrm{sub}^*(p)$ abban különbözik, hogy benne x_1-nek és $f(x_1)$-nek két előfordulása szerepel.

Ebben a fában: $h(p)=5$, $h(f(s))=1$, $h(g(x_2,f(x_1)))=2$, valamint:



1. ábra

$f(x_1)^a = f(x_1)^b$, de nem $f(x_1)^a \equiv f(x_1)^b$;

$f(f(x_1)) \gtrsim f(x_1)^a$, $f(f(x_1)) \not\succeq f(x_1)^b$, de nem $f(f(x_1)) \not\succeq f(x_1)^a$.

Tekintsünk egy tetszőleges nem-üres A halmazt és egy m nem-negativ egész számot. Ekkor minden egyes f: $A^m \longmapsto A$ leképezést (ahol A^m az A halmaz m-szeres Descartes-szorzata) az A-n értelmezett m-változós müveletnek nevezünk. Legyen $(F)_A$ az A-n értelmezett müveletek valamely halmaza. Az $A_F=(A, (F)_A)$ rendszert univerzális algebrának mondjuk. Jelölje $(F_m)_A$ (m=0, 1, ...) az összes m-változós $(F)_A$-beli müvelet halmazát. Amennyiben minden m-re $(F_m)_A=\{(f)_A \mid f\in F_m\}$, akkor azt mondjuk, hogy A_F F-algebra, $(f)_A$ pedig az f müveleti szimbólumnak az A_F-ban való realizáltja.

A $p(\in T_F(X_n))$ fa A_F-ban való realizáltján a következőket értjük ($X_n=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$):

(i) ha $p=x_i$ $(1\leq i\leq n)$, akkor $(p)_A(a_1,\dots,a_n)=a_i$

(ii) ha $p=f(p_1,\dots,p_m)$, akkor $(p)_A(a_1,\dots,a_n)=(f)_A((p_1)_A(a_1,\dots,a_n), \dots, (p_m)_A(a_1,\dots,a_n))$, ahol $a_1,\dots,a_n$ tetszőleges elemek A-ból.

2.9. <u>Definició</u>

Legyen F egy rangolt ábécé. Az $\underline{\underline{A}}=(A_F,\underline{a},A')$ rendszert n-változós (determinisztikus) F-automatának nevezzük, ahol

(i) A_F véges F-algebra, $A_F=(A, (F)_A)$. A elemeit állapotoknak nevezzük.

(ii) $\underline{a}=(a^{(1)},\dots,a^{(n)})$ $(a^{(i)}\in A;\ i=1,\dots,n)$, az $\underline{\underline{A}}$ kezdővektora.

(iii) A' $(\subseteq A)$ a végállapotok halmaza.

2.10. <u>Definició</u>

Legyen $\underline{\underline{A}}$ F-automata. Ekkor a $T(\underline{\underline{A}})=\{p \mid p\in T_F(X_n),\ (p)_A(a^{(1)},\dots,a^{(n)})\in A'$ halmazt az $\underline{\underline{A}}$ által felismert erdőnek nevezzük.

2.11. Definició

A faautomatákkal felismerhető erdőket reguláris erdőknek nevezzük.

3. Fatranszformációk

Jelöljenek a továbbiakban F, G, H rangolt ábécéket; X, Y, Z jelölje a következő változóhalmazokat: $X=\{x_1, x_2,\ldots\}$, $Y=\{y_1, y_2,\ldots\}$, $Z=\{z_1, z_2, \ldots\}$. Valamint vezessük be az $X_n=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ $(n\geq 1)$ jelölést X részhalmazaira (hasonlóan az Y_n és Z_n jelöléseket).

Ezenkivül szükségünk lesz a segédváltozók $E=\{e_1,e_2,\ldots,e_n,\ldots\}$ (ill. $E_n=\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$) halmazára. A segédváltozók szerepe a részfák egy adott fában való előfordulásainak kijelölése lesz. Legyen E diszjunkt a többi halmazokkal. Az E halmaz elemeire, az előfordulásaik azonositására, használni fogjuk az e_i, e_{ij}, e_{ijk}, ... jelöléseket is.

3.1. Definició

A $\tau(\subseteq T_F(X_n)\times T_G(Y_m))$ halmazokat fatranszformációknak nevezzük.

Ha τ-t $T_F(X_n)$ és $T_G(Y_m)$ elemei közti relációnak tekintjük, akkor természetes módon értelmezhetjük, a $\tau_1 \circ \tau_2$ kompoziciót és a τ_1^{-1} inverzet is. Ezek természetesen ismét fatranszformációk lesznek. A τ fatranszformáció $\{p \mid \exists q:(p,q)\in\tau\}$ értelmezési tartománya és $\{q \mid \exists p:(p,q)\in\tau\}$ értékkészlete a szokásos jelentéssel bir. Továbbá, ha $T_1(\subseteq T_F(X_n))$ és $T_2(\subseteq T_G(Y_m))$, akkor $\tau(T_1)=\{q \mid \exists p\in T_1:\ (p,q)\in\tau\}$ és $\tau^{-1}(T_2)=\{p \mid \exists q\in T_2:\ (p,q)\in\tau\}$.

A következőkben, ha a q fában a segédváltozók közül csupán $e_1,\ldots,e_n$ fordulhatnak elő, akkor a $q(e_1,\ldots,e_n)$ jelölést használjuk. Továbbá, amenynyiben $p_1,\ldots,p_n$ tetszőleges fák, akkor $q(p_1,\ldots,p_n)$ azt a fát jelöli, amelyet ugy kapunk, hogy q-ban e_i $(1\leq i\leq n)$ minden előfordulását p_i-vel helyettesitjük.

Ha a $e_1,\ldots,e_1$ segédváltozók előfordulásainak számát is hangsulyozni kivánjuk, akkor a következő jelöléseket használjuk:

$q(e_{1},\dots,e_{1s_1},\dots,e_{11},\dots,e_{1s_1})$,

$q(e_{111},\dots,e_{11t_{11}},\dots,e_{1s_1 1}),\dots,e_{1s_1 t_{1s_1}},\dots,e_{111},\dots,e_{11t_{11}},\dots,e_{1s_1 1},\dots,$
$e_{1s_1 t_{1s_1}})$,

valamint $q(\underline{e}_{ij})$ illetve $q(\underline{e}_{ijk})$.

3.2. Definició

Az $\underline{A}=(T_F(X_J), A, T_G(Y_K), A', S_A)$ rendszert leszálló fatranszformátornak (1-transzformátornak) nevezzük, ahol:

(i) F és G rangolt ábécék, X_J és Y_K véges változóhalmazok.

(ii) A olyan rangolt ábécé, amely csupa egyváltozós müveleti szimbólumból áll - az állapothalmaz. (Feltételezzük, hogy A diszjunkt az $\underline{A}$ 1-transzformátor definiciójában szereplő többi halmazzal, kivéve A'-t.)

(iii) $A'(\subseteq A)$ a végállapotok halmaza.

(iv) S_A a következő két tipusu átirási szabályok véges halmaza:

(1) $x_i \to a(q)$ $(x_i \in X_J,\ a \in A,\ q \in T_G(Y_K))$

(2) $f(a_1e_1,\dots,a_ke_k) \longrightarrow a(q(e_1,\dots,e_k))$

$(f \in F_K;\ a_1,\dots,a_k,\ a \in A;\ e_1,\dots,e_k \in E;\ q(e_1,\dots,e_k) \in T_G(Y_m \cup E_k))$.

A $p \to a(q)$ átirási szabályra a $\pi=(l\pi, r\pi)=p,a(q))$ alakokat is használjuk.

A következőkben ha $a(\in A)$ állapot, t pedig fa, akkor $a(t)$ helyett at-t irunk. Hasonlóan, ha T tetszőleges erdő, akkor AT az $\{at \mid a \in A,\ t \in T\}$ erdőt jelöli.

3.3. Definició

Az $\underline{A}$ 1-transzformátor lineáris, ha átirási szabályainak jobb oldalában minden egyes e_i $(\in E)$ változó legfeljebb egyszer fordul elő.

$\underline{A}$ nemtörlő, ha a (2) tipusu átirási szabályok jobb oldalában minden $e_i (1 \le i \le k);\ f \in F_K)$ változó legalább egyszer előfordul.

$\underline{A}$ determinisztikus, ha nincs két olyan különböző átirási szabálya, amelynek bal oldalai megegyeznek.

3.4. Definició

Legyen $\underline{A}$ l-transzformátor, p és q pedig $T_F(X_J \cup AT_G(Y_K))$-beli fa. Azt mondjuk, hogy q a p fából megkapható közvetlen derivációval $\underline{A}$-ban, ha a q a p fából ugy áll elő, hogy:

(i) $x_i \in X_J$-nek p-ben való valamely előfordulását egy S_A-beli $x_i \to aq$ átirási szabály aq jobb oldalával helyettesitjük, vagy

(ii) az $f(a_1p_1,\dots,a_kp_k)$ részfának valamely p-beli előfordulását az $aq(p_1,\dots,p_k)$ fával helyettesitjük, ahol az $f(a_1e_1,\dots,a_ke_k) \to aq(e_1,\dots,e_k)$ átirási szabály S_A-ban van.

A közvetlen derivációt $p \Rightarrow_{\underline{A}} q$-val jelöljük.

A $\Rightarrow_{\underline{A}}$ reláció reflexiv-tranzitiv $\Rightarrow_{\underline{A}}^*$-val jelöljük. Ha teljesül a $p \Rightarrow_{\underline{A}}^* q$ összefüggés, akkor azt mondjuk, hogy q levezethető p-ből $\underline{A}$-ban.

3.5. Definició

A $\mathcal{T}_{\underline{A}} = \{(p,q) \mid p \in T_F(X_J),\ q \in T_G(Y_K),\ p \Rightarrow_{\underline{A}}^* aq,\ a \in A'\}$ relációt az $\underline{A}$ l-transzformátor által indukált leszálló fatranszformációnak (l-transzformációnak) nevezzük.

Az l-transzformátorok egy fát a leveleitől a gyökere felé haladva alakitanak át.

3.6. Definició

Az $\underline{A}=(T_F(X_J),\ A,\ T_G(Y_K),\ A',\ S_A)$ rendszert felszálló fatranszformátornak (f-transzformátornak) nevezzük, ahol:

(i) F és G rangolt ábécék, X_J és Y_K véges változóhalmazok.

(ii) A olyan rangolt ábécé, amely csupa egyváltozós müveleti szimbólumból áll - az állapothalmaz. (Itt is feltételezzük, hogy A diszjunkt az $\underline{A}$ f-transzformátor definiciójában szereplő összes többi halmazzal, kivéve A'-t).

(iii) $A'(\subseteq A)$ a kezdőállapotok halmaza.

(iv) S_A az alábbi két tipusu átirási szabályok véges halmaza:

(1) $ax_i \to q \quad (a \in A,\ x_i \in X_J,\ q \in T_G(Y_K))$

(2) $af(e_1,\dots,e_k) \to q(e_1,\dots,e_k)$

$(a \in A,\ f \in F_k,\ e_1,\dots,e_k \in E,\ q \in T_G(Y_m \cup AE_k))$.

3.7. Definició

Az $\underline{A}$ f-transzformátor lineáris, ha átirási szabályainak jobb oldalában minden egyes $e_i (\in E)$ változó legfeljebb egyszer fordul elő.

$\underline{A}$ nemtörlő, ha a (2) tipusu átirási szabályok jobb oldalában minden e_i $(1 \leq i \leq k;\ f \in F_k)$ változó legalább egyszer előfordul.

$\underline{A}$ determinisztikus, ha nincs két olyan különböző átirási szabálya, amelynek bal oldalai megegyeznek, és A' egy elemü.

3.8. Definició

Legyen $\underline{A}$ f-transzformátor, p és q pedig $T_G(AT_F(X_J \cup E) \cup Y_K)$-beli fa. Azt mondjuk, hogy q a p fából megkapható közvetlen derivációval $\underline{A}$-ban, ha a q a p fából ugy áll elő, hogy:

(i) $ax_i (\in AX_J)$-nek p-ben való valamely előfordulását egy S_A-beli $ax_i \to q$ átirási szabály q jobb oldalával helyettesitjük, vagy

(ii) az $af(p_1,\dots,p_k)$ részfának valamely p-beli előfordulását a $q(p_1,\dots,p_k)$ fával helyettesitjük, ahol az $af(e_1,\dots,e_k) \to q(e_1,\dots,e_k)$ szabály S_A-ban van.

A közvetlen derivációra az f-transzformátorok esetén is a $\Rightarrow_{\underline{A}}$ jelölést használjuk.

A $\Rightarrow_{\underline{A}}$ reláció reflexiv-tranzitiv lezártját $\Rightarrow^{*}_{\underline{A}}$ jelöli.

3.9. Definició

A $\tau_{\underline{A}} = \{(p,q) \mid p \in T_F(X_J),\ q \in T_G(Y_K),\ ap \Rightarrow^{*}_{\underline{A}} q,\ a \in A'\}$ relációt az $\underline{A}$ f-transzformátor által indukált felszálló fatranszformációnak (f-transzformátornak) nevezzük.

Az f-transzformátorok egy fát a gyökerétől a levelei felé haladva alakitanak át.

3.10. Definició

Legyen $\underline{A}$ és $\underline{B}$ 1-(f-)transzformátor. Azt mondjuk, hogy $\underline{A}$ és $\underline{B}$ ekvivalensek, ha $\tau_{\underline{A}} = \tau_{\underline{B}}$.

3.11. Példa

Legyen $\underline{A} = (T_F(X_1), \{a_1, a_2\}, T_G(X_1), \{a_2\}, S_A)$ és $\underline{B} = (T_G(X_1), \{b_1, b_2, b_3\}, T_G(X_1), \{b_3\}, S_B)$ 1-transzformátor, ahol: $F = F_1 = \{f\}$; $G = F \cup G_2$, $G_2 = \{g\}$;

S_A elemei: $x_1 \to a_1x_1$ (a.1)

$f(a_1e_1) \to a_1f(e_1)$ (a.2)

$f(a_1e_1) \to a_2g(e_1,e_1)$ (a.3)

S_B elemei: $x_1 \to b_1f(f(x_1))$ (b.1), $x_1 \to b_2f(x_1)$ (b.2)

$f(b_1e_1) \to b_1f(f(x_1))$ (b.3), $f(b_2e_1) \to b_2f(f(x_1))$ (b.4),

$g(b_1e_1,\ b_2e_2) \to b_3g(e_1, f(e_2))$ (b.5)

Ekkor egy $\underline{A}$-beli levezetés például:

$f(f(f(x_1))) \xRightarrow{(a.1)}_{\underline{A}} f(f(f(a_1x_1))) \xRightarrow{(a.2)}_{\underline{A}} f(f(a_1f(x_1)) \xRightarrow{(a.2)}_{\underline{A}} f(a_1f(f(x_1))) \xRightarrow{(a.3)}_{\underline{A}}$

$\xRightarrow{(a.3)}_{\underline{A}} a_2g(f(f(x_1)),\ f(f(x_1)))$, vagyis:

$f(f(f(x_1)) \Rightarrow^{*}_{\underline{A}} a_2g(f(f(x_1)),\ f(f(x_1)))$.

Egy $\underline{B}$-beli levezetés:

$$g(f(f(x_1)),\ f(f(x_1))) \xRightarrow{(b.1)}_{\underline{B}} g(f(f(b_1f(f(x_1)))),\ f(f(x_1))) \xRightarrow{(b.2)}_{\underline{B}}$$

$$\xRightarrow{(b.2)}_{\underline{B}} g(f(f(b_1\ f(f(x_1)))),\ f(f(b_2f(x_1)))) \xRightarrow{(b.3)}_{\underline{B}}$$

$$\xRightarrow{(b.3)}_{\underline{B}} g(f(b_1\ f(f(f(f(x_1))))),\ f(f(b_2f(x_1)))) \xRightarrow{(b.4)}_{\underline{B}}$$

$$\xRightarrow{(b.4)}_{\underline{B}} g(f(b_1f(f(f(f(x_1))))),\ f(b_2f(f(f(x_1))))) \xRightarrow{(b.3)}_{\underline{B}}$$

$$\xRightarrow{(b.3)}_{\underline{B}} g(b_1f(f(f(f(f(f(x_1)))))),\ f(b_2\ f(f(f(x_1))))) \xRightarrow{(b.4)}_{\underline{B}}$$

$$\xRightarrow{(b.4)}_{\underline{B}} g(b_1f(f(f(f(f(f(x_1)))))),\ b_2f(f(f(f(f(x_1)))))) \xRightarrow{(b.5)}_{\underline{B}}$$

$$\xRightarrow{(b.5)}_{\underline{B}} b_3g(f(f(f(f(f(f(x_1)))))),\ f(f(f(f(f(f(x_1))))))),$$

vagyis: $g(f(f(x_1)),\ f(f(x_1))) \xRightarrow{*}_{\underline{B}} b_3g(f(f(f(f(f(f(x_1)))))),$

$f(f(f(f(f(f(x_1))))))).$

Látható, hogy:

$$\tau_{\underline{A}} = \{(f^k(x_1),\ g(f^{k-1}(x_1),\ f^{k-1}(x_1)))\ |\ k \geqq 1\},$$

$$\tau_{\underline{B}} = \{(g(f^k(x_1),\ f^l(x_1)),\ g(f^{2k}(x_1),\ f^{2l}(x_1)))\ |\quad k \geqq 0,\ l \geqq 0\},$$

$$\tau_{\underline{A}} \circ \tau_{\underline{B}} = \{(f^k(x_1),\ g(f^{2k}(x_1),\ f^{2k}(x_1)))\ |\quad k \geqq 1\}.$$

Legyen $\underline{C}$ a következő 1-transzformátor:

$$\underline{C} = (T_F(x_1),\ \{c_1,\ c_2\},\ T_G(x_1),\ \{c_2\},\ S_C),$$

S_C elemei: $x_1 \longrightarrow c_1f(f(x_1)),$

$f(c_1e_1) \longrightarrow c_1f(f(e_1)),$

$f(c_1e_1) \longrightarrow c_2g(e_1,e_1).$

Ekkor $\tau_{\underline{C}} = \tau_{\underline{A}} \circ \tau_{\underline{B}}$.

Láthatjuk, hogy $\underline{A}$ nem-lineáris ((a.3) szabály), $\underline{B}$ pedig nem-determinisztikus ((b.1) és (b.2) szabály).

Rögzitsük a dolgozat további részére a következő jelöléseket:

Legyenek $\underline{A}=(T_F(X_J),\ A,\ T_G(Y_K),\ A',\ S_A)$ valamint $\underline{B}=(T_G(Y_K),\ B,$ $T_H(Z_L),\ B',\ S_B)$ 1-transzformátorok;

$a,\ a_0,\ a_1,\ a_i,\ a_{ij},\ \dots$ A-beli elemeket, $b,\ b_0,\ b_i,\ b_{ij},\ b_{ijk},\ \dots$ pedig B-beli elemeket jelölnek.

Legyen $\hat{T}_G(Y_K \cup E_u)$ a $T_G(Y_K \cup E_u)$ erdő azon fáinak halmaza, amelyekben minden egyes $e_i (1 \leq i \leq u)$ változó legfeljebb egyszer fordul elő. Ekkor $\pi (\in S_A)$-t felirhatjuk $f(a_1e_1,\dots,a_1e_1) \to a\bar{r}(e_{11},\dots,e_{1s_1},\dots,e_{11},\dots, e_{1s_1})$ alakban, ahol $s_i \geq 0$ $(1 \leq i \leq 1)$, $\bar{r} \in \hat{T}_G(Y_K \cup E_u)$, $u=s_1+\dots+s_1$.

Legyen $\bar{r}(b_{11}e_{11},\dots,b_{1s_1}e_{1s_1})$ valamely S_A-beli átirási szabály jobb oldalán levő $\hat{T}_G(Y_K \cup E_u)$-beli fa.

Legyen $\bar{r}(b_{11}e_{11},\dots,b_{1s_1}e_{1s_1}) \overset{*}{\underset{\underline{B}}{\Longrightarrow}} bq(e_{11},\dots,e_{1s_1})$. Itt is átjelölhetjük $q(e_{11},\dots,e_{1s_1})$-t az előzőek szerint ugy, hogy ehelyett $\bar{r}(b_{11}e_{11},\dots,b_{1s_1}e_{1s_1}) \overset{*}{\underset{\underline{B}}{\Longrightarrow}} b\bar{q}(e_{111},\dots,e_{11t_{11}},\dots,e_{1s_11},\dots,e_{1s_1t_{1s_1}})$ legyen, ahol $\bar{q} \in \hat{T}_H(Z_K \cup E_V)$, $t_{ij} \geq 0$ $(1 \leq i \leq 1,\ 1 \leq j \leq s_i)$, $v=t_{11}+\dots+t_{1s_1}$.

Ezt rövidebben $\bar{r}(\underline{be}) \overset{*}{\underset{\underline{B}}{\Longrightarrow}} b\bar{q}(\underline{e}')$ alakban is fogjuk irni.

[2]-ben Engelfriet az l- és f-transzformátorok alapvető tulajdonságainak igen jellemző megfogalmazását adja:

(B): az l-transzformátorok az egyes részfákat először átalakitják (ha tudják), és ezután az átalakitás eredményét törölhetik, vagy megtöbbszörözhetik.

(T): az f-transzformátorok az egyes részfákat megtöbbszörözés után különbözőképpen alakithatják át.

(T'): az f-transzformátorok az egyes részfákat, azok elemzése nélkül törölhetik.

Lényegében véve ezek a megfogalmazások, valamint a következőkben ismertetésre kerülő eredmények, adják a kezünkbe annak a kulcsát, milyen szükséges és elegendő feltétel adható arra, hogy az $\underline{A}$ és $\underline{B}$ l-transzformátorokhoz létezzen $\underline{C}$ l-transzformátor, melyre $\mathcal{T}_{\underline{C}} = \mathcal{T}_{\underline{A}} \circ \mathcal{T}_{\underline{B}}$.

Jelölje $\mathcal{L}$ az l-transzformációk, $\mathcal{F}$ pedig az f-transzformációk osztályát. Jelölje a determinisztikusságot a $\mathcal{D}$, a linearitást az $\mathcal{L}$, a nem-törlőséget pedig az $\mathcal{N}$ prefixum. A teljesen definiált, egyállapotu, determinisztikus l- (f-)transzformációk osztályát leszálló (felszálló) homomorfizmusok osztályának nevezzük. Bizonyitható, hogy a két osztály megegyezik. Jelölje ezt $\mathcal{H}$.

Ismertek, és az általunk vizsgált kérdés szempontjából fontosak a következő eredmények (bizonyitásukkal együtt megtalálhatók [1.b]-ben, [2]-ben):

(i) Ha $\underline{A}$ l-transzformátor, akkor $\mathcal{T}_{\underline{A}}^{-1}(T_G(Y_K))$ reguláris erdő, a felismerő faautomata effektive megkonstruálható.

(ii) Ha $R_1(\subseteq T_F(X_J))$ és $R_2(\subseteq T_G(Y_K))$ reguláris erdők, $\underline{A}$ l-transzformátor, akkor van $\underline{A}'$ l-transzformátor, hogy $\mathcal{T}_{\underline{A}'}(R_1) = \mathcal{T}_{\underline{A}}(R_1) \cap R_2$. A megfelelő felismerő faautomaták ismeretében $\underline{A}'$ effektive megkonstruálható.

(iii) Az identikus fatranszformáció mind leszálló, mind felszálló fatranszformátorként $\mathcal{L}\mathcal{N}\mathcal{H}$-beli.

(iv) Az $\mathcal{L}$ és az $\mathcal{F}$ osztály összehasonlithatatlan.

(v) $\mathcal{L}\mathcal{N}\mathcal{L} = \mathcal{L}\mathcal{N}\mathcal{F}$.

(vi) $\mathcal{L}\mathcal{L} \circ \mathcal{L} = \mathcal{L}$; $\mathcal{L} \circ \mathcal{D}\mathcal{L} = \mathcal{L}$; $\mathcal{L} \circ \mathcal{H} = \mathcal{L}$.

(vii) $\mathcal{F} \circ \mathcal{L}\mathcal{N}\mathcal{F} = \mathcal{F}$; $\mathcal{H} \circ \mathcal{F} = \mathcal{F}$.

(viii) Bármely l- (és f-) transzformátorról algoritmikusan eldönthető, hogy egyértékü leképezést valósit-e meg (ld. [6] és [7]).

(ix) Az előzőek felhasználásával mind az l-, mind az f-transzformátorok esetén megadható egy-egy (az előzőekben megadottaknál erősebb) elegendő feltétel a kompozició indukálhatóságára. A feltétel algoritmikusan eldönthető. (ld. [12]).

4. Tipusok

4.1. Definició

Legyen $\underline{A}$ 1-transzformátor, és tekintsük a következő d levezetést: $d:p \Rightarrow_{\underline{A}}^{*} ar$. Legyen $p_F \in sub^{*}(p)$, $root(p_F)=u$.

Ekkor $W_A(p_F)=\{r_F \mid r_F \in sub^{*}(r);\ p_F \Rightarrow_{\underline{A}}^{*} a_F r_F$ részlevezetés d-ben$\}$,

$W_A(u)=\{root(r_F) \mid r_F \in W_A(p_F)\}$.

Legyen $\underline{B}$ 1-transzformátor, és $d:p \Rightarrow_{\underline{A}}^{*} ar$, $r \Rightarrow_{\underline{B}}^{*} bq$.

Ekkor $W_{AB}(p_F)=\{q_F \mid q_F \in sub^{*}(q);\ p_F \Rightarrow_{\underline{A}}^{*} a_F r_F,\ r_F \Rightarrow_{\underline{B}}^{*} b_F q_F$ részlevezetés d-ben$\}$,

$W_{AB}(u)=\{root(q_F) \mid q_F \in W_{AB}(p_F)\}$.

Ha $r_F \in W_A(p_F)$ (vagy $q_F \in W_{AB}(p_F)$), akkor azt mondjuk, hogy p_F képe r_F (vagy q_F).

Jelölje N a természetes számok halmazát, N^n pedig ennek n-szeres Descartes-szorzatát ($n \geq 1$). Legyen $I \subseteq N^n$, és $i=(i_1,\dots,i_{j-1},i_j,i_{j+1},\dots,i_n)$. Vezessük be a következő jelöléseket:

(i) $P_j(i)=i_j$ $\quad (1 \leq j \leq n)$.

(ii) $P_j(I)=\{P_j(i) \mid i \in I\}$.

(iii) $V_j(i,I)=\{(i_1,\dots,i_{j-1},1,i_{j+1},i_n) \mid (i_1,\dots,i_{j-1},i_j,i_{j+1},\dots,i_n)=i,\ (i_1,\dots,i_{j-1},1,i_{j+1},\dots,i_n) \in I\}$ $\quad (1 \leq j \leq n)$

(iv) $first_j=\min\{P_j(i) \mid i \in I\}$ $\quad (1 \leq j \leq n)$.

(v) $next_j(1)=\min\{P_j(i) \mid i \in I,\ P_j(i)>1\}$ $\quad (1 \leq j \leq n)$.

4.2. Definició

Az $I(\subseteq N^n)$ halmazt teljes n-tipus indexhalmaznak nevezzük, ha

(i) $\forall i_1,\dots,i_n$-re ha $i_j \in P_j(I)$($\forall_j(1 \leq j \leq n)$-re), akkor $(i_1,\dots,i_n) \in I$.

(ii) $\forall_j(1 \leq j \leq n)$-re $P_j(I)$ végtelen.

(Másképpen ez azt jelenti, hogy $I=A_1 x \dots x A_n$), ahol $\forall_j(1 \leq j \leq n)$-re $A_j \subseteq N$ és A_j végtelen.)

Az $I(\subseteqq N^n)$ halmaz esetén $L(I)$ jelölje azt a legszükebb teljes n-tipus indexhalmazt, amellyre $I \subseteqq L(I)$.

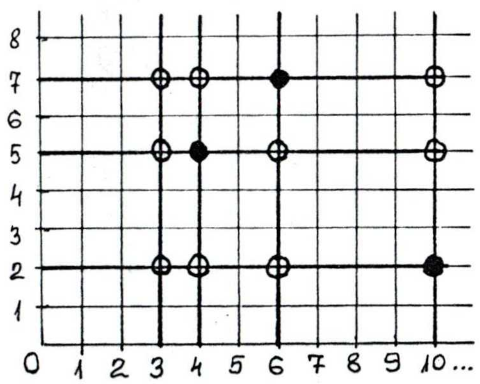
Adott I-re $L(I)$ nyilván létezik és egyértelmü (a projekciók szorzata).

4.3. Definició

Az $I(\subseteqq N^n)$ halmazt n-tipus indexhalmaznak nevezzük, ha (i) $\forall_j$ $(1 \leqq j \leqq n)$-re $P_j(I)$ végtelen,

és (ii) $\forall_i(\in I)$-re $\forall_j(1 \leqq j \leqq n)$-re $P_j(V_j(i,L(I))) \setminus P_j(V_j(i,I))$ véges.

Világos, hogy P_j a j-edik projekciót, V_j a j-edik koordinátatengellyel párhuzamos egyenes és I metszetét jelenti, ha az indexhalmaz elemeit az n-dimenziós tér "rácspontjaival" reprezentáljuk.



O: I elemei

●: $L(I) \setminus I$ elemei

4.4. ábra: Egy 2-tipus és a hozzá tartozó teljes 2-tipus reprezentációja az n-dimenziós tér rácspontjaival.

4.5. Definició

Legyenek $\underline{A}$ és $\underline{B}$ 1-transzformátorok, a D halmaz pedig álljon $\underline{A}$-beli és $\underline{B}$-beli levezetésekből alkotott párokból. Azt mondjuk, hogy D n-tipus, ha:

(i) $D = \{d_i \mid d_i : p_i \overset{*}{\underset{\underline{A}}{\Longrightarrow}} a_i r_i,\ r_i \overset{*}{\underset{\underline{B}}{\Longrightarrow}} b_i q_i;\ a_i \in A,\ b_i \in B,\ i \in I\}$.

(ii) I n-tipus indexhalmaz.

(iii) $\forall_i(\in I)$-re $a_i = a$ és $b_i = b$; $a \in A'$, $b \in B'$.

(iv) $\exists s_1,\dots,s_n > 0$; $\exists\, t_{11},\dots,t_{1s_1},\dots,t_{n1},\dots,t_{ns_n} \geqq 0$, $\sum_{k=1}^{s_1} t_{jk} > 0$ $(j=1,\dots,n)$, hogy $\forall i(\in I)$-re: $p_i = \bar{p}(p_i^1,\dots,p_i^n)$,

$$r_i=\bar{r}(\underbrace{r_i^1,\ldots,r_i^1}_{s_1},\ldots,\underbrace{r_i^n,\ldots,r_i^n}_{s_n})$$

$$q_i=\bar{q}(\underbrace{q_i^{11},\ldots,q_i^{11}}_{t_{11}},\ldots,\underbrace{q_i^{1s_1},\ldots,q_i^{1s_1}}_{t_{1s_1}},\ldots,\underbrace{q_i^{n1},\ldots,q_i^{n}}_{t_{n1}},\ldots,$$

$$\underbrace{q_i^{ns_n},\ldots,q_i^{ns_n}}_{t_{ns_n}})$$

(v) $\bar{p}(a_1e_1,\ldots,a_ne_n) \overset{*}{\underset{\underline{A}}{\Longrightarrow}} a\bar{r}\ (e_{11},\ldots,e_{1s_1},\ldots,e_{n1},\ldots,e_{ns_n}),$
$\bar{r}(b_{11}e_{11},\ldots,b_{ns_n}e_{ns_n}) \overset{*}{\underset{\underline{B}}{\Longrightarrow}} b\bar{q}(e_{111},\ldots,e_{11t_{11}},\ldots,$
$e_{ns_n1},\ldots,e_{ns_nt_{ns_n}}).$

(vi) $\forall_i(\in I)$-re, $\forall_j(1\leq j\leq n)$-re, $\forall_k(1\leq k\leq s_j)$-ra

$$p_i^j \overset{*}{\underset{\underline{A}}{\Longrightarrow}} a_jr_i^j,\ r_i^j \overset{*}{\underset{\underline{B}}{\Longrightarrow}} b_{jk}q_i^{jk}.$$

(vii) $\forall i_1,i_2(\in I)$-re, $\forall_j(1\leq j\leq n)$-re $\forall k\ (1\leq k\leq s_j)$-ra

ha $P_j(i_1)=P_j(i_2)$, akkor a

$p_{i_1}^j \overset{*}{\underset{\underline{A}}{\Longrightarrow}} a_j\, r_{i_1}^j,\ r_{i_1}^j \overset{*}{\underset{\underline{B}}{\Longrightarrow}} b_{jk}q_{i_1}^{jk}$ valamint a

$p_{i_2}^j \overset{*}{\underset{\underline{A}}{\Longrightarrow}} a_jr_{i_2}^j,\ r_{i_2}^j \overset{*}{\underset{\underline{B}}{\Longrightarrow}} b_{jk}\ q_{i_2}^{jk}$ levezetések azonosak.

(viii) $\forall j(1\leq j\leq n)$-re

(a) $\forall i\ (\in I)$-re $p_i^j=\bar{p}_l^j(p^j)$ $\quad (l=P_j(i))$.

(b) Legyen $\bar{\bar{p}}^j_{first_j}(e)=\bar{p}^j_{first_j}(e)$.

$\forall i\ (\in I)$-re $\bar{p}^j_{next_j(l)}(e)=\bar{p}_l^j\ (\bar{\bar{p}}^j_{next_j(l)}(e))$ $\quad (l=P_j(i))$.

(c) ha $n>1$, akkor $\exists K_j$, hogy

$\forall i\ (\in I)$-re $0<h\ (\bar{\bar{p}}_l^j(e))\leq K_j$ $\quad (l=P_j(i))$.

(ix) Legyen $Q_{jk}=\{q_i^{jk} \mid i \in I\}$ $(1 \leq j \leq n,\ 1 \leq k \leq s_j,\ t_{jk}>0)$.

Q_{jk} vagy egy elemü vagy végtelen.

(x) $\forall j\ (1 \leq j \leq n)$-re $\exists k\ (1 \leq k \leq s_j,\ t_{jk}>0)$, hogy Q_{jk} végtelen.

(xi) $\forall j\ (1 \leq j \leq n)$-re $\forall k\ (1 \leq k \leq s_j,\ t_{jk}>0)$-ra ha Q_{jk} végtelen, akkor $h(q_i^{jk}) \to \infty (P_j(i) \to \infty,\ i \in I)$.

A későbbiekben, ha bizonyos részfáknak vagy más objektumoknak valamely D n-tipushoz való tartozását ki akarjuk hangsulyozni, akkor a $\bar{p}(e_1,\ldots,e_n)/D$, p_i^j/D, $\underline{A}/D$, $T_H(Z_L)/D$, I/D, ... jelöléseket fogjuk alkalmazni.

4.6. Megjegyzés

Az n-tipus definiciója egyszerüen értelmezhető egyetlen $\underline{C}$ 1-transzformátor esetére is, ha az $\underline{A}$ 1-transzformátornak ilyenkor az identikus transzformációt indukáló legegyszerübb 1-transzformátort (lineáris nem-törlő homomorfizmust) választjuk ($\underline{B}$-nek pedig $\underline{C}$-t).

4.7. Definició

Azt mondjuk, hogy a D n-tipus teljes, ha I/D teljes n-tipus indexhalmaz.

Világos, hogy bármely D n-tipushoz megadható egy $L(D)$ teljes n-tipus, melyre $D \subseteq L(D)$ és $I/(L(D))=L(I/D)$.

Legyen $I \subseteq N^n$ és $O(j,1,I)=\{(i_1,\ldots,i_{j-1},i_{j+1},\ldots,i_n) \mid (i_1,\ldots,i_{j-1},1,i_{j+1},\ldots,i_n) \in I\}$.

Nyilvánvaló, hogy ha D n-tipus, akkor az a D^* halmaz, amelyet a j-edik komponens rögzitésével kapunk (azaz amelyre $D^* \neq \emptyset$, $D^* \subseteq D$, $I/D^*=O(j,1,I/D)$) maga is (n-1)-tipus, és ha D teljes, akkor D^* is az.

4.8. Definició

(i) Legyen $d: p \xRightarrow[A]{*} ar$, $r \xRightarrow[B]{*} bq$.

Ekkor $d_p(d)=p$, $d_q(d)=q$.

(ii) Legyen D A-beli és B-beli levezetésekből képzett párok halmaza.

Ekkor $\mathcal{T}(D)=\{(d_p(d),\ d_q(d))\ |\ d \in D\}$.

4.9. Definició

A D_1 és D_2 n-tipusokat hasonlónak nevezzük, ha

(i) Kiindulási- és cél ábécéik megegyeznek

(azaz $T_F(X_J)/D_1 = T_F(X_J)/D_2$ és $T_H(Z_L)/D_1 = T_H(Z_L)/D_2$).

(ii) $\bar{p}/D_1 = \bar{p}/D_2$.

(iii) $\bar{q}/D_1 = \bar{\bar{q}}(\bar{q}^1_{11},\ldots,\bar{q}^1_{1u_1},\ldots,\bar{q}^1_{n1},\ldots,\bar{q}^1_{nu_n})$,

$\bar{q}/D_2 = \bar{\bar{q}}(\bar{q}^2_{11},\ldots,\bar{q}^2_{1u_1},\ldots,\bar{q}^2_{n1},\ldots,\bar{q}^2_{nu_n})$, $u_1,\ldots,u_n \geq 0$.

(iv) Legyen $E^W_j = \{e_{vkl}\ |\ 1 \leq v \leq n,\ 1 \leq k \leq s_v / D_W,\ 1 \leq l \leq t_{vk} / D_W,$ valamint $v=j$ vagy Q_{vk}/D_W egyelemü$\}$.

Ekkor $\forall j (1 \leq j \leq n)$-re, $\forall u (1 \leq u \leq u_j)$-ra, $\forall w (w=1,2)$-re

$\bar{q}^w_{ju} \in T_H(Z_L \cup E^w_j)$.

(v) $\forall j\ (1 \leq j \leq n)$-re $\forall u\ (1 \leq u \leq u_j)$-ra

$h(\bar{q}^1_{ju}) \cdot h(\bar{q}^2_{ju}) = 0$.

(vi) Ha $\bar{q}^w_{ju} \in T_H(Z_L)$ $(1 \leq j \leq n,\ 1 \leq u \leq u_j),\ 1 \leq w \leq 2)$,

akkor $\bar{q}^{3-w}_{ju} \notin T_H(Z_L)$, de ha e_{vkl} előfordul $\bar{q}^{3-w}_{ju}$-ben, akkor

Q_{vk}/D_{3-w} egyelemü.

4.10. Megjegyzés

Legyen D_1 és D_2 1-tipus.

Ekkor szükségképp D_1 és D_2 teljes 1-tipus is.

Legyen $\mathcal{T}(D_1) = \mathcal{T}(D_2)$.

Ekkor szükségképp D_1 és D_2 hasonló is lesz.

4.11. Példa

Legyen $\underline{A}=(T_F(X_1), \{a\}, T_F(X_1), \{a\}, S_A)$ és $\underline{B}=(T_F(X_1), \{b\}, T_F(X_1), \{b\}, S_B)$ 1-transzformátor.

Legyen $F=F_1\cup F_2$; $F_1=\{f\}$; $F_2=\{g\}$.

$S_A=\{x_1 \to ax_1;\ f(ae_1)\to af(e_1);\ f(ae_1)\to ag(f(e_1),\ f(e_1));$
$g(ae_1,\ ae_2)\to ag(e_1,\ e_2)\}.$

$S_B=\{x_1\to bx_1;\ f(be_1)\to bf(e_1);\ g(be_1,be_2)\to bg(e_1,e_2);\ g(be_1,be_2)\to bg(e_2,e_1)$.

Legyen $D=\{f^2(g(f^k(x_1),\ f^{21}(x_1)))\overset{*}{\underset{\underline{A}}{\Rightarrow}} af^2(g(g(f^k(x_1),f^k(x_1)),f^{21}(x_1))),$
$f^2(g(g(f^k(x_1),\ f^k(x_1)),\ f^{21}(x_1)))\overset{*}{\underset{\underline{B}}{\Rightarrow}} bf^2(g(f(^{21}(x_1),\ g(f^k(x_1),\ f^k(x_1))))$
ahol $(k,l)\in I_D\}$.

$\bar{p}=f^2(g(f\ e_1),\ e_2))$; $p^1_{(k,l)}=f^{k-1}(x_1)$; $p^2_{(k,l)}=f^{21}(x_1)$;

$\bar{r}=f^2(g(g(f(e_1)\ \ f(e_{12}),\ e_{21}))$; $r^1_{(k,l)}=f^{k-1}(x_1)$; $r^2_{(k,l)}=f^{21}(x_1)$;

$\bar{q}=f^2(g(e_{211},g(f(e_{111}),\ f(e_{121}))))$; $q^{11}_{(k,l)}=f^{k-1}(x_1)$; $q^{21}_{(k,l)}=f^{21}(x_1)$;
$q^{21}_{(k,l)}=f^{k-1}(x_1)$;

Legyen $I_1=\{(k,l)\mid k>4,\ l>2\}$ és $I_2=\{(k,l)\mid k,\ l>2;\ k\neq l\}$.

$I_D=I_2$ esetén D n-tipus, de nem teljes n-tipus, $I_D=I_1$ esetén D teljes n-tipus lesz.

5. Tipusok és ekvivalencia

5.1. Állitás

Legyen $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$ 1-transzformátor, legyen $\tau_{\underline{A}}\circ\tau_{\underline{B}}=\tau_{\underline{C}}$. Legyen D_1-tipus ($\underline{A}$ és $\underline{B}$ levezetésekből). Ekkor van $D'(\subseteq D)$ és D^* ($\underline{C}$ levezetésekből) 1-tipus hogy $\tau(D^*)=\tau(D')\subseteq\tau(D)$.

Bizonyitás

Mivel $\tau_{\underline{A}}\circ\tau_{\underline{B}}=\tau_{\underline{C}}$ igy $\forall d(\in D)$-hez van d^* $\underline{C}$ levezetés, hogy $d_p(d)=d_p(d^*)$, $d_q(d)=d_q(d^*)$.

Tekintsük ezeknek a levezetéseknek egy halmazát, $\forall i\in I$-hez pontosan egy d^*_i-ot véve. Jelölje ezt D^*_o.

Tekintsük a $\bar{p}(e)/D$ D_o^*-ban előforduló részlevezetéseit. Ezek nyilván csak véges sokan lehetnek: $\bar{p}(c^m e_1) \overset{*}{\underset{\underline{C}}{\Longrightarrow}} c_m \bar{q}_m(e_{11},\ldots,e_{v_m})$, ahol $m=1,2,\ldots,M$; c^m, $c_m \in C$; $c_m \in C'$; $v_m \geqq 0$.

Ekkor $\forall i \in I$-hez $\exists m(i)$ $(m_{(i)} \in \{1,\ldots,M\})$ $\exists q_i^{m(i)} (\in T_H(Z_L))$,

$$\text{hogy } q_i = \bar{q}(\underbrace{q_i^{11},\ldots,q_i^{11}}_{t_{11}}, \ldots, \underbrace{q_i^{1s_n},\ldots,q_i^{1s_1}}_{t_{1n}}) = \bar{q}_m(\underbrace{q_i^{m(i)},\ldots,q_i^{m(i)}}_{v_{m(i)}}),$$

$$p_i^1 \overset{*}{\underset{\underline{C}}{\Longrightarrow}} c^{m(i)} q_i^{m(i)}. \qquad (*)$$

Az azonos $m(i)$-hez tartozó $(m(i)=1,\ldots,M)$ D-beli levezetéseket soroljuk egy halmazba. Legyen ez D_m $(m=1,\ldots,M)$. A $(*)$ szerint a D_m-beli levezetésekhez tartozó D_0^*-beli levezetések halmaza legyen D_m^*. Legyen $I_m = \{i \mid i \in I_D,\ d_i \in D_m\}$, $Q_m = \{q_i^m \mid i \in I_m\}$.

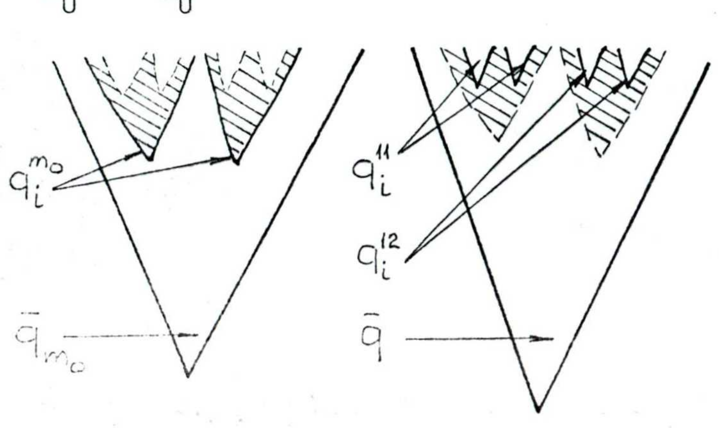
Mivel D 1-tipus, igy van $k_0 (1 \leqq k_0 \leqq s_1)$, hogy Q_{1k_0} végtelen. Ha $\forall m$ $(1 \leqq m \leqq M)$-re Q_m egyelemü, akkor $\{d_q(d^*) \mid d^* \in D_0^*\}$ véges, ami lehetetlen mert $\{d_q(d^*) \mid d^* \in D_0^*\} = \{d_q(d) \mid d \in D\}$ és mert Q_{1k_0} végtelensége miatt $\{d_q(d) \mid d \in D\}$ végtelen.

Tehát van m_0 $(1 \leqq m_0 \leqq M)$, hogy Q_{m_0} végtelen. Ekkor I_{m_0} nyilván végtelen (és igy 1-tipus indexhalmaz).

$(*)$ alapján világos, hogy egy megfelelő K_0 számra:

$$h(q_i^{m_0}) \geqq h(q_i^{1k_0}) - K_0 \qquad \forall i \in I_{m_0}\text{-ra.}$$

Mivel $h(q_i^{1k_0}) \to \infty (i \to \infty,\ i \in I_D)$, s igy $h(q_i^{1k_0}) \to \infty (i \to \infty,\ i \in I_{m_0})$ is igaz, ezért $h(q_i^{m_0}) \to \infty (i \to \infty,\ i \in I_{m_0})$. Vagyis D_{m_0} és $D_{m_0}^*$ 1-tipusok és $\tau(D_{m_0}^*) = \tau(D_{m_0}) \leqq \tau(D)$.



5.2. Ábra

A besatirozott rész minden $i \in I_{m_0}$-ra $(*)$ szerint megegyezik, magassága lehet a K_0 szám.

5.3. Állitás

Legyen $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$ 1-transzformátor, $\mathcal{T}_{\underline{A}} \circ \mathcal{T}_{\underline{B}} = \mathcal{T}_{\underline{C}}$.
Legyen D teljes 2-tipus ($\underline{A}$ és $\underline{B}$ levezetésekből). Ekkor van $D'(\subseteq D)$ és D^* ($\underline{C}$ levezetésekből) teljes 2-tipus, hogy $\mathcal{T}(D^*) \subseteq \mathcal{T}(D') \subseteq \mathcal{T}(D)$ és D^*, D', D hasonlóak.

Bizonyitás

Mivel $\mathcal{T}_{\underline{A}} \circ \mathcal{T}_{\underline{B}} = \mathcal{T}_{\underline{C}}$, igy minden $d(\in D)$ levezetéshez van d^* $\underline{C}$ levezetés, hogy $d_p(d)=d_p(d^*)$, $d_q(d)=d_q(d^*)$.
Legyen $D_0^* = \{d^* \mid \exists d: d_p(d)=d_p(d^*),\ d_q(d)=d_q(d^*),\ d \in D,\ d^*\ \underline{C}\ \text{levezetés}\}$.
Tekintsük a $\bar{p}(e_1,e_2)/D$ D_0^*-ban előforduló részlevezetéseit. Ezek nyilván csak véges sokan vannak (M db):

$$\bar{p}(c^{m1}e_1,\ c^{m2}e_2) \xrightarrow[\underline{C}]{*} c_m\bar{q}_m\ (e_{11},\ldots,e_{1v_m^1},\ e_{21},\ldots,e_{2v_m^2}),$$

ahol $m=1,\ldots,M$; c^{m1}, $c^{m2} \in C$; $c_m \in C'$, v_m^1, $v_m^2 \geqq 0$, $\bar{q}_m \in \hat{T}_H(Z_L \cup E)$.
Világos, hogy ekkor $\forall i(\in I/D)$-hez van (egy vagy több) $m(i)$ $(1 \leqq m(i) \leqq M)$ és $q^1_{im(i)}$, $q^2_{im(i)}$ $(\in T_H(Z_L))$, hogy

$$p_i^1 \xrightarrow[\underline{C}]{*} c^{m(i)1}\ q^1_{im(i)}\ ,\quad p_i^2 \xrightarrow[\underline{C}]{*} c^{m(i)2}\ q^2_{im(i)}$$

és $$q_i/D = \bar{q}_{m(i)}\ (\underbrace{q^1_{im(i)},\ldots,q^1_{im(i)}}_{v_m^1},\ \underbrace{q^2_{im(i)},\ldots,q^2_{im(i)}}_{v_m^2}) =$$

$$= \bar{q}(q_i^{11},\ldots,q_i^{11},\ldots,q_i^{1s_1},\ldots,q_i^{1s_1},\ q_i^{21},\ldots,q_i^{21},\ldots,q_i^{2s_2},\ldots,q_i^{2s_2})|D \qquad (*)$$

A továbbiakban azt fogjuk megvizsgálni, hogy $\bar{q}$-ban ill $\bar{q}_{m(i)}$-ben az egyes q_i^{jk} ill. $\bar{q}^w_{im(i)}$ fák hogyan helyezkednek el egymáshoz képest. (Ennek az a célja, hogy kiválasszunk egy m^* számot $(1 \leqq m^* \leqq M)$, amelyre megkonstruálhatunk a D_0^*-beli levezetésekből egy, az állitásnak megfelelő, D^* tipust, ahol $\bar{q}/D^* = \bar{q}_{m(i)}$ lesz.)

Minden $i(\in I/D)$-re tekintsük a $d_i(\in D)$ levezetést és egy vele ekvivalens d^* levezetést. Legyen m' m(i)-nek az az értéke, amelyre (*) teljesül (a d^* választás esetén). Az ekvivalenciát $(d_p(d_i)=d_p(d^*),\ d_q(d_i)=d_q(d^*))$ figyelembe véve nyilvánvaló, hogy $\bar{q}/D$ és $\bar{q}_{m'}$ felirható ugy, hogy:

(**): (i) $\bar{q}=\bar{\bar{q}}(\bar{q}^1_{11},\ldots,\bar{q}^1_{1u_1},\ \bar{q}^1_{21},\ldots,\ \bar{q}_{2u_2})$,

$\bar{q}_{m'}=\bar{\bar{q}}(\bar{q}^2_{11},\ldots,\bar{q}^2_{1u_1},\ \bar{q}^2_{21},\ldots,\ \bar{q}_{2u_2})$ $\qquad (u_1,\ u_2 \geqq 0)$

(ii) $\bar{\bar{q}}\in \hat{T}_H(Z_L \cup E)$

(iii) $\bar{\bar{q}}$ a $\bar{q}$ és $\bar{q}_{m'}$ fák maximális közös része

(azaz: $\forall j(j=1,2)$-re, $\forall u(1\leq u \leq u_j)$-re $h(\bar{q}^1_{ju})\cdot h(\bar{q}^2_{ju}) = 0$).

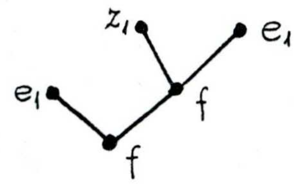
Az adott két levezetés (d_i és d^*) esetén végezzük el a következő átalakitásokat:

(i) cseréljük ki $\bar{q}$-ban és $\bar{q}_{m'}$-ben e_{1kl} és e_{2kl} előfordulásait rendre e_1-re ill. e_2-re.

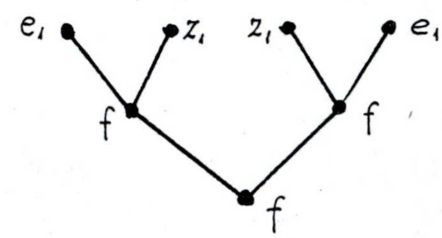
(ii) Ha $h(\bar{q}^1_{ju})=0$ és $h(\bar{q}^2_{ju})$-ban e_1 és e_2 csucs is van, akkor egészitsük ki $\bar{q}$-t rendre $\bar{\bar{p}}^j_{first_j}(e),\ \bar{\bar{p}}^j_{next_j(first_j)}(e),\ldots$ azon d_i-beli képével, amelyet $\bar{q}^2_{ju}$ kijelölt. Ezt mindaddig folytassuk, amig (lépésenként ujra előállitva a (**) szerinti felbontást) a kiegészitett $\bar{q}$-ban nem szerepel a kiindulási $\bar{q}^2_{ju}$ valamennyi nem E-beli csucsa.

Példaként tekintsük a következőket:

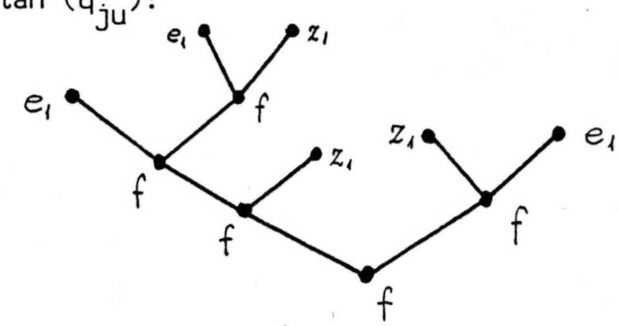
Az 1. kiegészités után ($\bar{q}^1_{ju}$):



A 2. kiegészités után ($\bar{q}^1_{ju}$):



A 3. kiegészités után ($\bar{q}^1_{ju}$):



(iii) Ha $h(\bar{q}^2_{ju})=0$ és $h(\bar{q}^1_{ju})$-ben e_1 és e_2 csucs is van, akkor az előzővel megegyező módon $\bar{q}_{m'}$-t egészitjük ki a megfelelő d^*-beli képekkel.

(ii)-t és (iii)-at elvégezzük $\forall j(j=1,2)$-re és $\forall u(1 \leqq u \leqq u_j)$-re.

Igy minden d_i és d^* (ekvivalens) levezetésre kapunk egy

$[\bar{q}/D]_i = \bar{\bar{q}}^*(\bar{\bar{q}}^1_{11},\dots, \bar{\bar{q}}^1_{1v_1}, \bar{\bar{q}}^1_{21},\dots, \bar{\bar{q}}^1_{2v_2})$ és egy

$[\bar{q}_{m'}]^*_i = \bar{\bar{q}}^*(\bar{\bar{q}}^2_{11},\dots,\bar{\bar{q}}^2_{1v_2}, \bar{\bar{q}}^2_{21},\dots, \bar{\bar{q}}^2_{2v_2})$ fát $(v_1, v_2 \geqq 0)$,

amelyekre: (i) $h(\bar{\bar{q}}^1_{ju}) \cdot h(\bar{\bar{q}}^2_{ju})=0$ $(j=1,2;\ 1 \leqq u \leqq v_j)$.

(ii) $\bar{\bar{q}}^* \in \hat{T}_H(Z_L \cup E)$

(iii) $\bar{\bar{q}}^w_{ju} \in T_H(Z_L \cup \{e_j\})$ $(w=1,2;\ j=1,2;\ 1 \leqq u \leqq v_j)$.

valamint (iv) $\bar{\bar{q}}^* = \bar{q}(\bar{q}^*_{11},\dots,\bar{q}^*_{1u_1}, \bar{q}^*_{21},\dots, \bar{q}^*_{2u_2})$.

Vizsgáljuk meg, a következő esetek milyen $i(\in I/D)$ mellett fordulhatnak elő:

(1) $\bar{q}^1_{ju}, \bar{q}^2_{ju} \in T_H(Z_L)$.

(2) $\bar{\bar{q}}^1_{ju}=e_1$ vagy $\bar{\bar{q}}^1_{ju}=e_2$ és $\bar{\bar{q}}^2_{ju} \in T_H(Z_L)$.

(3) $\bar{\bar{q}}^1_{ju} \in T_H(Z_L)$ és $\bar{\bar{q}}^2_{ju} = e_1$ vagy $\bar{\bar{q}}^2_{ju} = e_2$.

(4) $\bar{\bar{q}}^1_{ju} = e_1$ és $\bar{\bar{q}}^2_{ju}$-ben e_2 előfordul vagy

$\bar{\bar{q}}^1_{ju} = e_2$ és $\bar{\bar{q}}^2_{ju}$-ben e_1 előfordul.

(5) $\bar{\bar{q}}^2_{ju} = e_1$ és $\bar{\bar{q}}^1_{ju}$-ben e_2 előfordul vagy

$\bar{\bar{q}}^2_{ju} = e_2$ és $\bar{\bar{q}}^1_{ju}$-ben e_1 előfordul.

(6) $\bar{\bar{q}}^1_{ju} = e_1$ és $\bar{\bar{q}}^2_{ju}$-ben csak e_1 fordul elő vagy

$\bar{\bar{q}}^1_{ju} = e_2$ és $\bar{\bar{q}}^2_{ju}$-ben csak e_2 fordul elő vagy

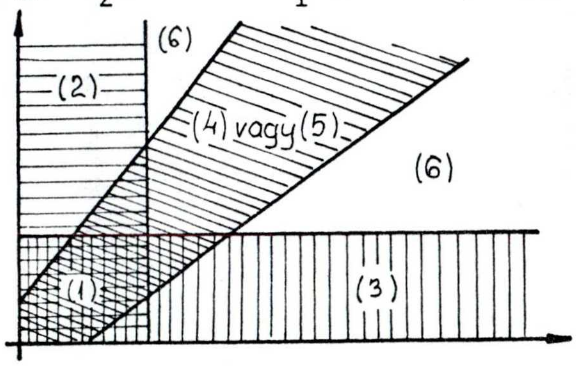
$\bar{\bar{q}}^2_{ju} = e_1$ és $\bar{\bar{q}}^1_{ju}$-ben csak e_1 fordul elő vagy

$\bar{\bar{q}}^2_{ju} = e_2$ és $\bar{\bar{q}}^1_{ju}$-ben csak e_2 fordul elő.

Az (1) eset azt jelenti, hogy az utoljára felhasznált $\bar{\bar{p}}^j_l(e)$ adott d_i-beli (vagy d^*-beli) képe olyan, hogy vagy részfája a megfelelő $\bar{q}^1_{ju}$ (vagy $\bar{q}^2_{ju}$) fának vagy annak egy részéből és valamely q^{jk}_i (vagy $q^j_{im(i)}$ megfelelő részfájából (részfáiból) áll össze. Mivel $h(\bar{\bar{p}}^j_l(e)) \leqq \max(K_1, K_2)$, igy kell hogy legyen olyan K_0 szám, melyre $\forall j(j=1,2) \forall l(l \in P_j(I))$ és $\forall q^*(\in W(\bar{\bar{p}}^j_l(e)))$ esetén $h(q^*) \leqq K_0$. Ez azt jelenti (4.5.(x) és (xi) pontja miatt), hogy az (1) eset csak olyan $i(\in I)$-kre fordulhat elő, amelyeknek mindkét komponense egy (4.5. (xi)-ből adódó) véges korlát alatt marad, illetve akkor, ha a szóba került q^{jk}-ra Q_{jk} egyelemü. (***)

A (2) és (3) eset azt jelenti, hogy ilyenkor valamely q^{jk}_i (ill. $q^j_{im(i)}$) megfelelő részfájának egy tőle függetlenül adott részfával kell megegyeznie. Mivel ez a legutoljára felhasznált $\bar{\bar{p}}^j_l(e)$ képének része, igy magassága K_0-nál nem lehet több. Vagyis ez az eset is csak olyan $i(\in I)$-kre fordulhat elő, amelyeknek az egyik komponense egy véges (4.5. (xi)-ből adódó) korlát alatt marad.

A (4) és (5) eset azt jelenti, hogy adott $P_1(i)$-re (ill. $P_2(i)$-re valamely $q^j_{im(i)}$ (ill. q^{jk}_i) megfelelő részfájának egy tőle függetlenül adott részfával kell megegyeznie. Mivel ez a legutoljára felhasznált $\bar{\bar{p}}^j_l(e)$ képének részéből és valamely $q_i^{3-j,k}$ (ill. $q_{im(i)}^{3-j}$) fából áll össze, ez az eset rögzített $P_1(i)$-re (ill. $P_2(i)$-re) (4.5. (x) és (xi) miatt) csak véges sokszor fordulhat elő. (Ez a rácspont-reprezentációban azt jelenti, hogy egy oszlopban (sorban) véges sokszor fordulhat elő.) Mivel, ha Q_{jk} végtelen, akkor $h(q_i^{jk}) \longrightarrow \infty (P_j(i) \longrightarrow \infty,\ i \in I)$, igy arra a legkisebb $P_2(i)$-re (jelöljük $MP_2(i)$-vel) (ill. $P_1(i)$-re, jelben: $MP_1(i)$), amelyre rögzitett $P_1(i)$ (ill. $P_2(i)$) esetén a (4) (ill. az (5)) feltétel teljesülhet, igaz az, hogy $MP_2(i) \longrightarrow \infty (P_1(i) \longrightarrow \infty,\ i \in I)$ (ill. $MP_1(i) \longrightarrow \infty (P_2(i) \longrightarrow \infty,\ i \in I)$).



5.4. ábra

Az (1)-(6) esetek előfordulásának lehetősége.

Az eddigiek azt jelentik, hogy ha az (1), (2), (3) esetekből származó korlát alatti komponensü $i(\in I/D)$ indexektől eltekintünk, akkor az olyan m^*-okra $(1 \leq m^* \leq M)$, amelyek végtelen sok oszlopban (sorban) fordulnak elő végtelen sokszor ($\forall i(\in I/D)$-re $m(i)$-t $(*)$ szerint választva), a kiegészités eredményeként kapott $[\bar{q}/D]_i$ és $[\bar{q}_{m(i)}]_i^*$ rendelkeznek a következő tulajdonságokkal:

(i) $[\bar{q}/D]_i = \bar{\bar{q}}^*(\bar{\bar{q}}_{11}^1, \ldots, \bar{\bar{q}}_{1v_1}^1, \bar{\bar{q}}_{21}^1, \ldots, \bar{\bar{q}}_{2v_2}^1)$

$[\bar{q}_{m(i)}]_i^* = \bar{\bar{q}}^*(\bar{\bar{q}}_{11}^2, \ldots, \bar{\bar{q}}_{1v_1}^2, \bar{\bar{q}}_{21}^2, \ldots, \bar{\bar{q}}_{2v_2}^2)$ $\quad (v_1, v_2 \geq 0)$

(ii) $h(\bar{\bar{q}}_{ju}^1) \cdot h(\bar{\bar{q}}_{ju}^2) = 0 \quad (j=1,2;\ 1 \leq u \leq v_j)$

(iii) $\bar{\bar{q}}^* \in \hat{T}_H(Z_L \cup E)$

(iv) $\bar{\bar{q}}_{ju}^w \in T_H(Z_L \cup \{e_j\}) \quad (w=1,2;\ j=1,2;\ 1 \leq u \leq v_j)$

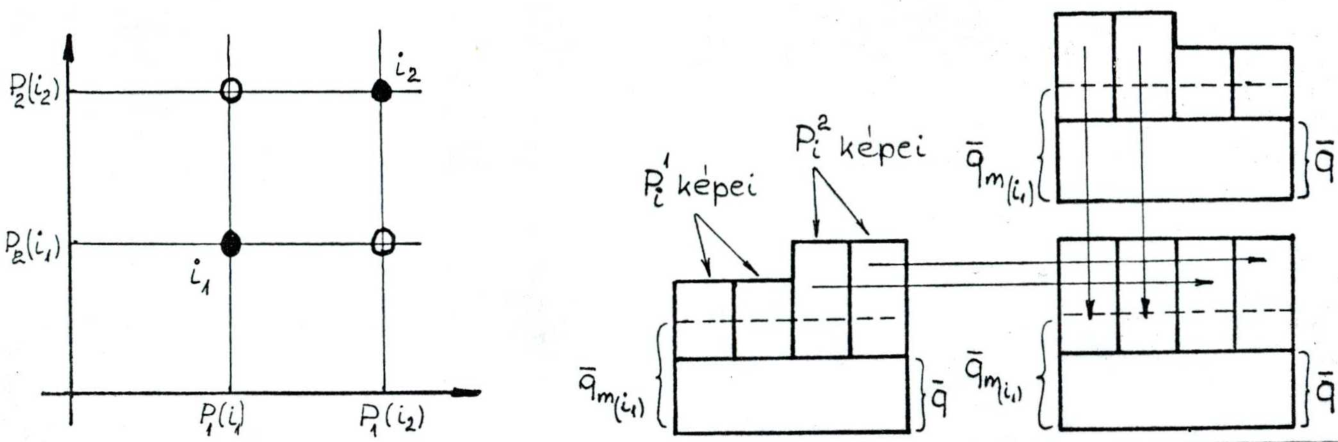
(v) $\bar{\bar{q}}^* = \bar{\bar{q}}(\bar{q}_{11}^*, \ldots, \bar{q}_{1u_1}^*, \bar{q}_{21}^*, \ldots, \bar{q}_{2u_2}^*) \quad (u_1, u_2 \geq 0) \qquad (****)$

Vegyük észre, hogy (***)-ot figyelembe véve, hogy ezek alapján a kiindulásnál (ld. (*)) adott felbontásban $\bar{q}^1_{ju}$-ról és $\bar{q}^2_{ju}$ ($j=1,2$; $1 \leq u \leq u_j$)-ről kimondható, hogy vagy csak e_{jkl} fordul elő bennük E-beli elemként, vagy ha $e_{3-j,kl}$ előfordul, akkor $Q_{3-j,k}$ egyelemü.

Látható, hogy ezek a tulajdonságok épp azok, amelyeket a hasonlóság definiciójában $\bar{q}/D_1$-re és $\bar{q}/D_2$-re kiróttunk, azaz ha $\bar{q}/D$ ill. $\bar{q}_{m^*}$-ot ($1 \leq m^* \leq M$) ki tudjuk teljes 2-tipussá egésziteni, akkor azok hasonlók lesznek.

Következő lépésként megfogalmazunk egy szabályt, amit "négyszög-szabály"-nak nevezünk:

Ha i_1, i_2 ($\in I$)-re (*) szerint $m(i_1)=m(i_2)$ választható és $P_1(i_1) \neq P_1(i_2)$, $P_2(i_1) \neq P_2(i_2)$, akkor $(P_1(i_2), P_2(i_1))$-re és $(P_1(i_1), P_2(i_2))$-re is teljesül (*) $m(i_1)$-el, föltéve, hogy $\bar{q}$-ra és $\bar{q}_{m(i_1)}$-re teljesülnek a (****) feltételei. Ennek bizonyitására gondoljunk arra, hogy $(P_1(i_1), P_2(i_1))$-ről $(P_1(i_2), P_2(i_1))$-re áttérve $q^{1k}_{i_1}$ és $q^1_{i_1 m(i_1)}$ fog kicserélődni, valamint hogy $(P_1(i_2), P_2(i_2))$-ről $(P_1(i_2), P_2(i_1))$-re áttérve $q^{2k}_{i_2}$ és $q^2_{i_2 m(i_2)}$ fog megváltozni, ilyenkor a két kiindulási egyenlőség és a $\bar{q}$ és $\bar{q}_{m(i_1)}$ hasonlósága miatt az egyenlőség (a megfelelő d_i és a létrehozott d^* levezetés eredeménye között) $(P_1(i_2), P_2(i_1))$-re is szükségképp teljesülni fog. Ez ugyanigy igazolható $(P_1(i_1), P_2(i_2))$-re is.



5.5. ábra A négyszögszabály szemléltetése

A következőkben megadjuk I/D-nek egy olyan I^* részhalmazát, amely maga is teljes 2-tipus indexhalmaz, és valamilyen m-re $\forall i(\in I^*)$-ra $m=m(i)$ választható. Tekintsük $O(1, first_1, I/D)$-t. Itt lenni kell olyan m_0-nak, hogy végtelen sok $i(\in O(1, first_1, I/D))$-re $m_0=m(i)$ választható ((*) szerint). Legyen ez az I_1 halmaz. Ennek minden oszlopára $(O(1,P_1(i), I_1))$ vizsgáljuk meg, hogy mely m-ek fordulnak elő az adott oszlopban ((*) szerint választhatóan) végtelen sokszor. Ha végtelen sok olyan van amelyben m_0 választható végtelen sokszor, akkor a többi oszlopot elhagyva, befejezzük a szükitést. Ha nem, akkor elhagyjuk az összes olyan oszlopot amelyben m_0 végtelen sokszor választható (véges sok van!). Legyen az igy kapott halmaz I_2. A szükités módja miatt nyilván I_2 is teljes 2-tipus indexhalmaz. I_2-re végezzük el ujra az előzőekben leirt szükitést. Ebben azonban m_0 már nem játszhat szerepet (s nyilván a későbbiekben sem!). Igy ez az eljárás, az m lehetséges értékeinek véges száma $(1\leq m\leq M)$ miatt, véges sok lépésben olyan I_{m^*} teljes 2-tipus indexhalmazt szolgáltat, amelynek első oszlopában minden d_i $(i\in I_{m^*})$-hoz választható m^* ((*) szerint), továbbá minden oszlopban végtelen sokszor választható m^* (*) szerint.

Ez az előzőekben mondottak szerint azt jelenti, hogy $\bar{q}$ és $\bar{q}_{m^*}$ teljesiti a hasonlóság feltételeit. Igy a négyszög-szabály alapján kimondható, hogy I_{m^*} minden elemére d_i-hez van vele ekvivalens d_i^* $\underline{C}$ levezetés és ez (*) szerint m^*-gal választható.

Ha minden $i(\in I_{m^*})$-ra d_i-hez a d_i^* $\underline{C}$ levezetést az $(1_1,first_2)$ és $(first_1, 1_2)$ $(1_1\in P_1(I_{m^*}),\ 1_2\in P_2(I_{m^*}))$ indexekhez tartozó $\underline{C}$ levezetésekből állitjuk össze (a négyszög-szabály által kinált módon), akkor könnyen ellenőrizhető, hogy az igy előállt $D^*=\{d_i^* \mid i\in I_{m^*}\}$ halmaz teljes 2-tipus lesz. Ezek után az is nyilvánvaló, hogy $D'=\{d_i \mid i\in I_{m^*}\}$ mellett $\mathcal{T}(D^*)=\mathcal{T}(D')\subseteq\mathcal{T}(D)$ és D^*, D' és D hasonlóak.

5.6. Állitás

Legyen $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$ 1-transzformátor, legyen $\mathcal{T}_{\underline{A}} \circ \mathcal{T}_{\underline{B}} = \mathcal{T}_{\underline{C}}$.
Legyen D teljes n-tipus ($\underline{A}$ és $\underline{B}$ levezetésekből) ($n \geq 2$). Ekkor van $D'(\cong D)$ és D^{*} ($\underline{C}$ levezetésekből) teljes n-tipus, hogy $\mathcal{T}(D^{*}) = \mathcal{T}(D') \cong \mathcal{T}(D)$ és D^{*}, D', D hasonlóak.

Bizonyitás

A bizonyitást az 5.3.-ban adott bizonyitás magasabb dimenzióra való általánositásával végezzük.

(i) $\mathcal{T}_{\underline{A}} \circ \mathcal{T}_{\underline{B}} = \mathcal{T}_{\underline{C}}$-t felhasználva $\bar{p}(e_1,\dots,e_n)/D$-nek nyilván megadható M számu $\underline{C}$ levezetése és (*) összefüggés, tetszőleges n-re ($n \geq 2$).

(ii) Az (1)-(6) esetek előfordulásainak lehetőségéről mondottak a több változó esetére is szó szerint átvihetők (e_1 és e_2 helyett e_{j_1} és e_{j_2}-vel, ill. oszlop helyett (n-1) dimenziós altérrel).

(iii) A négyszög-szabály azonos sikban lévő pontok esetén több dimenzióban is szó szerint megismételhető.

(iv) I/D 2 dimenziós szükitési eljárása teljes indukációval átvihető magasabb dimenzióra. Az (n-1) dimenzióról n dimenzióra való áttéréskor megismételve a 2 dimenziós szükitési eljárást oszlopok helyett (n-1) dimenziós alterekkel.

(v) Az igy meghatározott $I_m{*}$ teljes n-tipus indexhalmazról ugyanigy bizonyitható, hogy $\forall i(\in I_m{*})$-re $m^{*}=m(i)$ választható (*) szerint.

(vi) $\forall i(\in I_m{*})$-ra a d_i-vel ekvivalens d_i^{*} $\underline{C}$ levezetéseket a first_j ($j=1,\dots,n$) elemekhez tartozó $\underline{C}$ levezetésekből a négyszög-szabály felhasználásával összeállitva ugyanigy megkapjuk a megfelelő teljes n-tipusokat, melyekre: $\mathcal{T}(D^{*}) = \mathcal{T}(D') \cong \mathcal{T}(D)$ és D^{*}, D', D hasonlók.

5.7. Állitás

Legyen $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$ 1-transzformátor, legyen $\mathcal{T}_{\underline{A}} \circ \mathcal{T}_{\underline{B}} = \mathcal{T}_{\underline{C}}$.
Legyen D n-tipus ($\underline{A}$ és $\underline{B}$ levezetésekből) ($n \geq 2$). Ekkor van $D'(\subseteq D)$ és D^* ($\underline{C}$ levezetésekből) n-tipus, hogy $\mathcal{T}(D^*) = \mathcal{T}(D') \subseteq \mathcal{T}(D)$ és D^*, D', D hasonlóak.

Bizonyitás:

A 4.7. definicióhoz tett megjegyzésünk szerint D-hez van $L(D)$ teljes n-tipus ($D \subseteq L(D)$). Ehhez 5.6. szerint van D_L^* teljes n-tipus ($\underline{C}$ levezetésekből), hogy $\mathcal{T}(D_L^*) \subseteq \mathcal{T}(L(D))$ és hasonlóak. Tekintsük D_L^*-nak $I/D \cap I/D_L^*$ által meghatározott részhalmazát. (Legyen ez D^*). D^* nyilván maga is hasonló lesz D-vel. I/D^*-ra pedig a fenti összefüggés miatt igaz lesz, hogy
$\forall i (\in I/D^*)$-ra $\forall j (1 \leq j \leq n)$-re

$$P_j(V_j(i, L(I/D^*))) \setminus P_j(V_j(i, I/D^*)) =$$
$$= P_j(V_j(i, L(I/D^*))) \setminus P_j(V_j(i, I)) \subseteq$$
$$\subseteq P_j(V_j(i, L(I))) \setminus P_j(V_j(i, I)),$$ ami véges.

Tehát I/D^* n-tipus indexhalmaz. $I/D' = I/D^*$ választással pedig épp az állitásunkat nyerjük.

5.8. Megjegyzés

Az 5.1., 5.6. és 5.7. állitásokkal, ha $\underline{A}$-nak az identikus transzformációt indukáló lineáris nem-törlő leszálló homomorfizmust választjuk, akkor két tetszőleges 1-transzformátor által indukált fatranszformáció ekvivalenciájára vonatkozó szükséges feltételt nyerünk. Ez lehetőséget ad az 1-transzformációk részosztályaira olyan feltételek megadására, amelyek mellett az ekvivalencia kizárható. A feltétel bonyolultsága és a tipusok effektiv konstruálhatóságának hiánya miatt azonban ez a gyakorlati alkalmazhatóság szempontjából (eldönthetőség) nem sok eredménnyel biztat.

6. Az f-tulajdonság

6.1. Definició

Legyen $d{:}p \overset{*}{\underset{A}{\Rightarrow}} ar$, $r \overset{*}{\underset{B}{\Rightarrow}} bq$; $a \in A'$, $b \in B'$.

Legyen továbbá:

(i) $p=\bar{p}(p_F)$

(ii) $r_F^1, r_F^2 \in W_A(p_F)$, $r_F^1 \not\equiv r_F^2$.

(iii) $q_F^1 \in W_B(r_F^1)$, $q_F^2 \in W_B(r_F^2)$.

(iv) Legyen $\bar{q}_F \in sub^*(q)$ olyan, hogy

(a) $q_F^1 \trianglelefteq \bar{q}_F$, $q_F^2 \trianglelefteq \bar{q}_F$

(b) ha $\bar{q}_F' \in sub^*(\bar{q}_F)$ és $\bar{q}_F' \not\equiv \bar{q}_F$, akkor

nem igaz, hogy $q_F^1 \trianglelefteq \bar{q}_F'$ és $q_F^2 \trianglelefteq \bar{q}_F'$.

Ekkor:

(1) q_F^1 <u>f</u> q_F^2 ha $q_F^1 \neq q_F^2$.

(2) q_F^1 <u>erős-f</u> q_F^2, ha

(a) q_F^1 <u>f</u> q_F^2

(b) vagy (b.i) nem $q_F^1 \equiv q_F^2$ és nem $q_F^2 \equiv q_F^1$.

vagy (b.ii) $q_F^1 \equiv q_F^2$, de nincs $q_F^*(\in sub^*(\bar{q}_F))$,

hogy $q_F^1 \trianglelefteq q_F^*$, $q_F^* = q_F^2$.

vagy (b.iii) $q_F^2 \equiv q_F^1$, de nincs q_F^* $(\in sub^*(\bar{q}_F))$,

hogy $q_F^2 \trianglelefteq q_F^*$, $q_F^* = q_F^1$.

(3) q_F^1 <u>gyenge-f</u> q_F^2, ha

(a) q_F^1 <u>f</u> q_F^2

(b) nem q_F^1 <u>erős-f</u> q_F^2 .

Az (1), (2), (3) esetekben p_F-et (root(p_F)-et) rendre f-, erős-f-, ill. gyenge-f-részfának (csucsnak) nevezzük.

6.2. Definició

Legyen $q \in T_H(Z_L \cup E)$, $q_F \in sub^*(q)$.

(i) $q \setminus^* q_F = \bar{q}$, ha $q = \bar{q}\ (q_F)$.

(ii) $q \setminus q_F = \bar{q}$, ha $q = \bar{q}(q_F^1, \dots, q_F^m)$ $(m \geq 0)$,

$q_F^j = q_F (1 \leq j \leq m)$, és $\forall q_F^0 (\in sub^*(\bar{q}))$-ra

$\exists j_0 (1 \leq j_0 \leq m)$ $q_F^0 = q_F$.

A definicióban meghatározott müveletek a q_F részfának ill. a részfa előfordulásainak q-ból való elhagyását jelenti. (Ilyenkor $\bar{q}$-ban értelemszerüen egy uj segédszimbólum jelenik meg q_F helyén. Ez az uj segédszimbólum választható E valamely addig nem használt elemének is.)

6.3. Definició

Legyen $p \in T_F(X_J \cup E)$, $E' \subseteq E$.

Ekkor $sub(p)\,|_{E'} = \{p^* \mid p^* \in sub(p),\ p^* \notin T_F\ (X_J \cup (E \setminus E'))\}$,

$sub^*(p)\,|_{E'} = \{p^* \mid p^* \in sub^*(p),\ p^* \notin T_F\ (X_J \cup (E \setminus E'))\}$.

$sub(p)|\,e_j$ tulajdonképpen p azon részfáit tartalmazza, amelyekben az e_j segédszimbólum előfordul ($e_j \in E$).

6.4. Definició

Legyen D n-tipus $(n \geq 2)$. Ekkor $u_f(D)$ $\bar{p}/D$-nek olyan csucsa, amelyre teljesülnek, hogy:

(i) Legyen $\bar{p}/D$ felbontható a következő alakban:

$\bar{p}/D = \bar{p}_0(\bar{p}_1(e_1,\ \bar{p}_2(e_2), \dots,\ \bar{p}_n(e_n),\ \bar{p}_{n+1}, \dots,\ \bar{p}_{n+v}))$ $(v \geq 0)$.

(ii) $\bar{p}_1$ olyan, hogy bármely $p' \in sub^*(\bar{p}_1)$ részfára vagy p' segédszimbólum vagy $p' \in sub(\bar{p}_1)\,|_{e_1}$.

(Azaz $\bar{p}_1$ a root($\bar{p}_1$)-et és e_1-et összekötő ut csucsaihoz közvetlenül kapcsolódó részfák ($\setminus^*$ müvelet szerinti) elhagyásával álljon elő.)

(iii) Legyen $\bar{\bar{p}}$ olyan eleme $sub(\bar{p}_1)|_{e_1}$-nek, amelyre $j(2 \leq j \leq n)$, hogy $root(\bar{\bar{p}})$ gyökere $sub(\bar{p})|_{e_j}$ valamely elemének, de nincs $\bar{\bar{p}}$-nek olyan valódi részfája, amelyre ugyanez igaz lenne (erre a j-re).

(Azaz $root(\bar{\bar{p}})$ egy az e_1-től $root(\bar{p})$-hoz és egy az e_j-től $root(\bar{p})$-hoz vezető ut találkozási pontja.)

Ekkor $u_f(D) = root(\bar{\bar{p}})$.

$u_f(D)$-t később bizonyitandó okból a D n-tipushoz tartozó forditási pontnak nevezzük. Világos, hogy létezhet olyan D n-tipus, amelyhez több különböző forditási pont tartozik.

6.5. Definició

Legyen D n-tipus $(n \geq 2)$. Ekkor $u_{fk}(D)$ $\bar{q}/D$-nek olyan csucsa, amelyre teljesül, hogy:

(i) $\exists e_{1k_1l_1}, e_{j_2k_2l_2} \in E$, $2 \leq j_2 \leq n$,

$$1 \leq k_1 \leq s_1/D, \quad 1 \leq l_1 \leq t_{1k_1}/D,$$
$$1 \leq k_2 \leq s_{j_2}/D, \quad 1 \leq l_2 \leq t_{j_2k_2}/D.$$

(ii) Q_{1k_1}/D és $Q_{j_2k_2}/D$ végtelen.

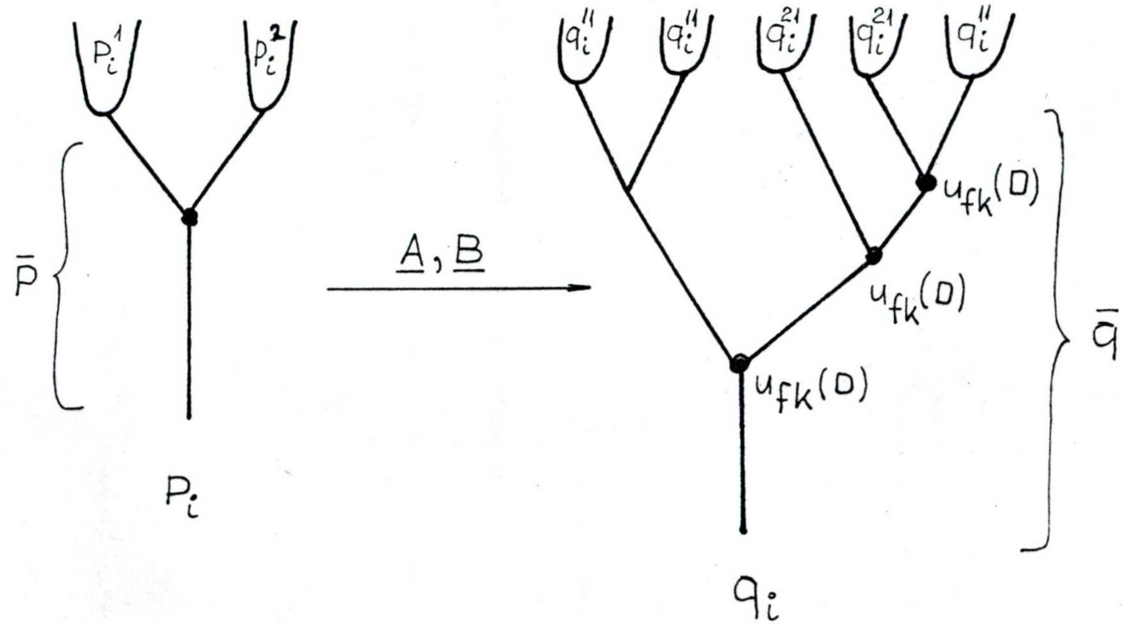
(iii) Legyen $\bar{q}_1 \in sub^*(\bar{q}/D)|_{\{e_{1k_1l_1}, e_{j_2k_2l_2}\}}$

és $\forall \bar{q}_2 (\in sub^*(\bar{q}_1), \bar{q}_2 \neq \bar{q}_1)$-ra $\bar{q}_2 \notin sub^*(\bar{q}/D)|_{\{e_{1k_1l_1}, e_{j_2k_2l_2}\}}$.

(Azaz $\bar{q}_1$ a legszükebb $e_{1k_1l_1}$-et és $e_{j_2k_2l_2}$-t is tartalmazó részfa. Ezt a későbbiekben az adott két csucs ($e_{1k_1l_1}$ és $e_{j_2k_2l_2}$) vagy részfa (amelynek a két kiválasztott csucs gyökere) minimális burkolójának fogjuk nevezni.)

Ekkor $u_{fk}(D) = root(\bar{q}_1)$.

Világos, hogy $u_{fk}(D)$ (hasonlóan $u_f(D)$-hez) nem szükségképp egyértelmü.



6.6. ábra $u_f(D)$ és $u_{fk}(D)$ egy D 2-tipus esetén.

6.7. Definició

A D n-tipust ($n \geq 1$) erős-f tipusnak nevezzük, ha

(i) $\bar{p}(e_1, \ldots, e_n)/D$ felbontható a következő alakban:

$$\bar{p}(e_1, \ldots, e_n)/D = \bar{p}_0(\bar{p}_1(e_1, \bar{p}_2(e_2), \ldots, \bar{p}_n(e_n), \bar{p}_{n+1}, \ldots, \bar{p}_{n+v})),$$

$v \geq 0.$

(ii) $\forall p^*(\in \mathrm{sub}(\bar{p}_1))$-ra

vagy (1) $h(p^*)=0$

vagy (2) $p^* \in \mathrm{sub}(\bar{p}_1)|_{e_1}$

(iii) $\exists k_1, l_1, k_2, l_2 (1 \leq k_1 \leq s_1/D,\ 1 \leq k_2 \leq s_1/D,\ 1 \leq l_1 \leq t_{1k_1}/D,$

$1 \leq l_2 \leq t_{1k_1}/D)$, hogy

(1) $k_1 \neq k_2$

(2) Q_{lk_1}/D és Q_{lk_2}/D végtelen

(3) $\forall i(\in I/D)$-re $q_i^{lk_1}$ <u>erős-f</u> $q_i^{lk_2}$ (az l_1 és l_2 által kijelölt előfordulásokkal)

(iv) $\forall p^*(\in sub(\bar{p}_1)|_{e_1})$-re $\exists q_1^*, q_2^* (\in W_{AB}(p^*))$, hogy $\forall i(\in I/D)$-re

(1) $q_1^*(\ldots, q_i^{jk}, \ldots) \underline{\vdash} q_i^{lk_1}$, $q_2^*(\ldots, q_i^{jk}, \ldots) \underline{\vdash} q_i^{lk_2}$

(2) $q_1^*(\ldots, q_i^{jk}, \ldots)$ <u>erős-f</u> $q_2^*(\ldots, q_i^{jk}, \ldots)$.

(v) $\forall i(\in I/D)$-re igaz, hogy nincs olyan $p^*(\in sub(\bar{p}_1)|_{e_1})$, hogy valamely q_1^{**} és q_2^{**} $(\in sub^*(\bar{q}))$ esetén

(1) $q_i^{lk_1} \underline{\dashv} q_1^{**}(\ldots, q_i^{jk}, \ldots) \underline{\dashv} q_1^*(\ldots, q_i^{jk}, \ldots)$

(2) $q_i^{lk_2} \underline{\dashv} q_2^{**}(\ldots, q_i^{jk}, \ldots) \underline{\dashv} q_2^*(\ldots, q_i^{jk}, \ldots)$

(3) $q_1^{**}(\ldots, q_i^{jk}, \ldots) = q_2^{**}(\ldots, q_i^{jk}, \ldots)$

(q_1^* és q_2^* az adott p^*-ra a (iv) szerint kiválasztott részfák)

6.8. <u>Definició</u>

Legyen D erős-f tipus.

(1) $\forall j(1 \leq j \leq n)$-re, $\forall k(1 \leq k \leq s_j)/D$-ra, $\forall l(1 \leq l \leq t_{jk}/D)$-re legyen $BQ_{jkl} \in sub^*(\bar{q}/D)$, ugy, hogy:

(i) $\exists q' \in W_{AB}(\bar{p}_1(e_1, \bar{p}_2(e_2), \ldots, \bar{p}_n(e_n), \bar{p}_{n+1}, \ldots, \bar{p}_{n+v}))/D$, hogy $BQ_{jkl} \in sub^*(q')|_{e_{jkl}}$

(ii) $\forall m(1 \leq m \leq n)$-re, $\forall u(1 \leq u \leq s_m\ D)$-ra, $\forall w(1 \leq w \leq t_{mu}/D)$-re ha $m \neq j$ és Q_{mu} végtelen akkor $BQ_{jkl} \notin sub^*(\bar{q}/D)|_{e_{muw}}$.

(iii) $\forall q'(\underline{\vdash} BQ_{jkl})$-re ha $q' \neq BQ_{jkl}$ akkor (iii) nem teljesül q'-re.

(2) $\forall i(\in I/D)$-re $\forall j(1 \leq j \leq n)$-re legyen $BQ_{ij} \in T_H(Z_L)$ ugy, hogy:

(i) $BQ_{ij} \in \bigcap_{k=1}^{s_j/D} \bigcap_{l=1}^{t_{kl}/D} sub(BQ_{jkl}(\ldots, q_i^{mu}, \ldots)) = RQ_{ij}$

Q_{jk} végtelen

(ii) $\forall q'(\in T_H(Z_L))$-re ha $BQ_{ij} \neq q'$ és $BQ_{ij} \leqq q'$, akkor $q' \not\leqq RQ_{ij}$.

BQ_{ij}-t belső burkolónak nevezzük. Meg kell jegyeznünk, hogy még BQ_{jkl} egyértelmü és létezik, addig BQ_{ij} nem feltétlenül egyértelmü és nem is biztos, hogy létezik. Erre példa a következő (nyilván lehetséges) két eset ($\bar{p}=f(e)$):

(a) BQ_{ij} nem egyértelmü:

$f(f^i(x_1)) \xrightarrow{A} g(f^i(x_1), f^i(x_1))$

$g(f^i(x_1), f^i(x_1)) \xrightarrow{B} g(f^i(h(x_1,x_2,x_3)), f^i(h(x_1,x_2,x_4)))$.

Itt belső burkoló lehet x_1 ill. x_2 is.

(b) BQ_{ij} nem létezik:

$f(f^i(x_1)) \xrightarrow{A} g(f^i(x_1), f^i(x_1))$

$g(f^i(x_1), f^i(x_1)) \xrightarrow{B} g(f^i(x_1), f^i(x_2))$

6.9. <u>Definició</u>

Legyen D erős-f tipus.

Minden $i(\in I/D)$-re legyen:

(i) $KQ_i \in sub(q_i)$

(ii) $\forall j(1 \leqq j \leqq n/D)$-re, $\forall k(1 \leqq k \leqq s_j/D)$-ra, $\forall l(1 \leqq l \leqq t_{jk}/D)$-re

ha Q_{jk}/D végtelen

akkor $\exists \overline{KQ}_i^{jkl}$ $(\in sub^*(\bar{q}/D))$, hogy

(1) $\overline{KQ}_i^{jkl}(\ldots, q_i^{jk}, \ldots) = KQ_i$

(2) $\overline{KQ}_i^{jkl} \trianglerighteq e_{jkl}$

(3) ha BQ_{ij} létezik, akkor annak (e_{jkl} által meghatározott) $BQ'_{ij}(\in sub^*(q_i/D))$ előfordulására $\overline{KQ}_i^{jkl}(\ldots, q_i^{jk}, \ldots)$ $\trianglerighteq BQ'_{ij}$.

(iii) $\forall q'(\in sub(q_i/D))$-re, ha q'-re (i) és (ii) teljesül, akkor $KQ_i \leqq q'$. (Azaz KQ_i a legszükebb ilyen fa.)

KQ_i-t külső burkolónak nevezzük. Világos, hogy KQ_i mindig létezik és egyértelmü. Megjegyezzük, hogy a 6.8. és 6.9. definiciók általában n-tipusokra is értelmezhetők. Könnyen látható, hogy ekkor ha nincsenek a felbontásban f-részfák és D 1-tipus akkor $BQ_{il}/D=KQ_i/D$ ($\forall i(\in I/D)$-re) ill. ha D n-tipus ($n>1$), akkor KQ_i-nek BQ_{im}-hez nem tartozó csucsai között van $u_{fk}(D)$ valamennyi lehetséges értéke.

6.10. Definició

Legyen D erős-f tipus. Tekintsük a következő eljárást:

(1) $\forall i(\in I/D)$-re q_i-ben jelöljük meg azokat a csucsokat amelyek KQ_i valamely előfordulásában vannak, de nem valamely BQ_{im} előfordulásban és nem egy olyan q_i^{mk} előfordulásban, ahol Q_{mk} egyelemü.

(2) $\forall i(\in I/D)$-re q_i-ben jelöljük meg (az előzőtől megkülönböztethető módon) mindazokat a csucsokat, amelyek:

(a) ha BQ_{il} létezik, akkor valamely előfordulásának gyökerét root(q_i)-vel összekötő uton vannak.

(b) ha BQ_{il} nem létezik, akkor valamely q_i^{lk} (Q_{lk} végtelen) előfordulásban szereplő $W_{AB}(p^1/D)$-beli részfa gyökerét root(q_i)-vel összekötő uton vannak.

(3) Képezzük a két jelölés közös részét. Azaz csak azok a csucsok legyenek megjelölve, amelyeket (1) és (2) szerint is megjelöltünk.

(4) Képezzük azt a legbővebb $\overline{VQ}(\in T_H(Z_K \cup E))$ fát, amelyre minden $i(\in I/D)$ esetén, alkalmas $q_i^w(1\leq w\leq v_i, v_i\geq 0)$ fákra: $\overline{VQ}(q_i^1,\ldots,q_i^{v_i})=q_i$. ($\overline{VQ}$ tehát legalább $\bar{q}$ csucsait tartalmazza.)

(5) Tekintsük $\overline{VQ}$ azon csucsait, amelyek $\forall i(\in I/D)$-re (3) szerint meg vannak jelölve.

(Ezek a csucsok $\overline{VQ}$-ban több fa alaku részgráfot feszitenek ki. Legyenek ezek $\overline{VQ}_1$, ..., $\overline{VQ}_u$.)

(6) $VAL(D)=\{\overline{VQ}_1, \ldots, \overline{VQ}_u\}$.

VAL(D)-t a D erős-f tipus értékének nevezzük. Ez a fenti második példát alapul véve, a $\bar{p}/D$ értelmezésétől függően, lehet g(e,e), g(f(e), f(e)), $g(f^2(e), f^2(e))$, ... Világos, hogy ha $D' \leq D$, akkor VAL(D') nem lehet szükebb mint VAL(D).

6.11. Definició

A D 1-tipust véges-f tipusnak nevezzük, ha

$\exists k_1$ $(1 \leq k_1 \leq s_1/D)$, hogy

Q_{1k_1}/D egyelemü.

A továbbiakban egy tetszőleges véges-f tipus esetén k_1/D a fenti értéket fogja jelenteni, mig k_2/D $(1 \leq k_2 \leq s_1/D)$ egy olyan értéket melyre Q_{1k_2}/D végtelen.

6.12. Definició

Ha D véges-f tipus, akkor $VAL(D)=Q_{1k_1}/D$.

6.13. Definició

A $D=\{d \mid d:p \underset{\underline{A}}{\overset{*}{\Rightarrow}} ar,\ r \underset{\underline{B}}{\overset{*}{\Rightarrow}} bq,\ a \in A',\ b \in B'\}$ halmazt véges-f elemnek nevezzük, ha:

(i) $\exists s_1 \geq 0,\ s_2 > 0,\ t_{11}, \ldots, t_{1s_1}, \ldots, t_{s_21}, \ldots, t_{s_2s_1} \geq 0,$

$v_1, \ldots, v_{s_2} \geq 0$, hogy $\sum_{\substack{j=1 \\ v_j > 0}}^{s_2} \frac{v_j}{v_j} \geq 2$ és

$p=\bar{p}(\bar{\bar{p}}(p^1))$

$$r=\bar{r}(\underbrace{\bar{\bar{r}}(\underbrace{r^1,\dots,r^1}_{s_1}),\ \dots,\ \bar{\bar{r}}(\underbrace{r^1,\dots,r^1}_{s_1})}_{s_2})$$

$$q=\bar{q}(\underbrace{\bar{q}^1(\underbrace{q^{11},\dots,q^{11}}_{t_{11}},\dots,\underbrace{q^{1s_1},\dots,q^{1s_1}}_{t_{1s_1}}),\dots,\bar{q}^1(\underbrace{q^{11},\dots,q^{11}}_{t_{11}},\underbrace{q^{1s_1},\dots,q^{1s_1}}_{t_{1s_1}})}_{v_1}),\dots$$

$$\dots,\underbrace{\bar{q}^{s_2}(\underbrace{q^{s_21},\dots,q^{s_21}}_{t_{s_21}},\dots,\underbrace{q^{s_2s_1},\dots,q^{s_2s_1}}_{t_{s_2s_1}}),\dots,\bar{q}^{s_2}(\underbrace{q^{s_21},\dots,q^{s_21}}_{t_{s_21}},\dots,\underbrace{q^{s_2s_1},\dots,q^{s_2s_1}}_{t_{s_2s_1}})}_{v_{s_2}})$$

(ii) $\bar{p}(\bar{a}e)\overset{*}{\underset{\underline{A}}{\Longrightarrow}} a\bar{r}(e_1,\dots,e_{s_2})$

$\bar{r}(\bar{b}_1e_1,\dots,\bar{b}_{s_2}e_{s_2})\overset{*}{\underset{\underline{B}}{\Longrightarrow}} b\bar{q}(e_{11},\dots,e_{1v_1},\dots,e_{s_21},\dots,e_{s_2v_{s_2}})$

(iii) $\bar{\bar{p}}(\bar{\bar{a}}e)\overset{*}{\underset{\underline{A}}{\Longrightarrow}} \bar{a}\ \bar{\bar{r}}(e_1,\dots,e_{s_1})$

$\bar{\bar{r}}(\bar{b}_{j1}e_1,\dots,\bar{b}_{js_1}e_{s_1})\overset{*}{\underset{\underline{B}}{\Longrightarrow}} \bar{b}_j\ \bar{q}^j(e_{11},\dots,e_{1t_{j1}},\dots,e_{s_11},\dots,e_{s_1t_{js_1}})$

$(j=1,\dots,s_2)$

(iv) $p^1\overset{*}{\underset{\underline{A}}{\Longrightarrow}} \bar{\bar{a}}\ r^1$

$r^1\overset{*}{\underset{\underline{A}}{\Longrightarrow}} \bar{b}_{jk}q^{jk}\quad (j=1,\dots,s_2;\ k=1,\dots,s_1)$

(v) Legyen $R_j=\tau^{-1}_{\underline{A}_{\bar{a}}}\ (\tau^{-1}_{\underline{B}_{\bar{b}_j}}\ (\bar{q}^j(\dots,q^{jk},\dots))\bigcap_{\substack{m=1\\ m\neq j}}^{s_2}\tau^{-1}_{\underline{B}_{\bar{b}_m}}\ (T_H(Z_L))),$

$Q_{jl}=\tau_{\underline{B}_{\bar{b}_l}}\ (\tau_{\underline{A}_{\bar{a}}}\ (R_j))\quad (j=1,\dots,s_2;\ l=1,\dots,s_2).$

$\exists a_1,\dots,u_M$ $(M\geq 2;\ 1\leq u_m\leq s_2;\ m=1,\dots,M)$, hogy

$\forall m(1\leq m\leq M)$-re: nincs w_m, hogy $Q_{u_m w_m}$ végtelen.

(vi) $\forall p^*(\in sub^*(\bar{\bar{p}})|_e)$-re

$\exists q_1^*, q_2^* \in W_{AB}(p^*)$ és $w_1,w_2 \in \{u_m/m=1,\ldots,M\}$, hogy $\bar{q}^{w_1}(\ldots,q^{w_1k},\ldots) \underline{\succeq} q_1^*(\ldots,q^{w_1k},\ldots)$, $\bar{q}^{w_2}(\ldots,q^{w_2k},\ldots)$

$\underline{\succeq} q_2^*(\ldots,q^{w_2k},\ldots)$ és $q_1^*(\ldots,q^{w_1k},\ldots)$ erős-f $q_2^*(\ldots,q^{w_2k},\ldots)$.

(vii) Ha $\sum_{j,k} t_{jk} > 0$, akkor legyen p^*, r^*, q^* olyan, hogy

$p^* \underset{A}{\Longrightarrow}^* \bar{\bar{a}}r^*$, $r^* \underset{B}{\Longrightarrow}^* \bar{b}_{jk}\, q_{jk}^*$ $(j=1,\ldots,s_2;\ k=1,\ldots,s_1)$ ugy hogy $\forall j(1\leq j\leq s_2)$-re, $\forall k(1\leq k\leq s_1)$-re ha $t_{jk}>0$ és nincs m, hogy $j=u_m$, akkor $q_{ja}^* = q_{jk}^{jk}$.

Legyen $d^*(p^*)$ az a levezetés, amelyet ugy kapunk d-ből, hogy benne p^1 levezetéseit p^* fenti levezetéseire cseréljük.

Legyen $D^* = \{d^*(p^*) | p^* \in T_F(X_J)$, $d^*(p^*)$-ra az (i)-(vi) feltételek teljesülnek a d-nek megfelelő felbontással $(p^1=p^*)\}$.

Ekkor $\{d_q(d^*) |\ d^* \in D^*\}$ véges.

6.14. Definició

Legyen D véges-f elem.

(i) $\forall m(1\leq m\leq M/D)$-re legyen $\bar{q}_{u_m}^*$ az a fa, amelyet $\bar{q}^{u_m}$-ből ugy kapunk, hogy elhagyjuk belőle azokat a csucsokat (a műveletnek megfelelően) amelyek nem egy $e_{u_m k}(\in E)$ levelet és $\bar{q}^{u_m}$ gyökerét összekötő uton vannak, azaz $\bar{q}_{u_m}^*$ olyan lesz, hogy $\forall q' \in sub(\bar{q}_{u_m}^*)$-re vagy $h(q')=0$, vagy $q' \in sub(\bar{q}_{u_m}^*)|_E$.

(ii) $q_{u_m}^* = \bar{q}_{u_m}^*(\ldots,q^{u_m k},\ldots)$

(iii) $VAL(D) = \{q_{u_m}^*/D | m=1,\ldots,M/D\}$.

6.15. Definició

A $D=\{d/d: p \overset{*}{\Longrightarrow}_{\underline{A}} ar,\ r \overset{*}{\longrightarrow}_{\underline{B}} bq,\ a\in A',\ b\in B'\}$ halmazt gyenge-f elemnek nevezzük, ha:

(i) $\exists s>0, t_1,\dots,t_s \geq 0$, hogy

$$p=\bar{p}(\bar{\bar{p}}),$$

$$r=\bar{r}(\underbrace{\bar{\bar{r}},\dots,\bar{\bar{r}}}_{s}),$$

$$q=\bar{q}(\underbrace{\bar{\bar{q}}^1,\dots,q^1}_{t_1},\dots,\underbrace{q^s,\dots,q^s}_{t_s}).$$

(ii) $\bar{p}(\bar{a}e) \overset{*}{\Longrightarrow}_{\underline{A}} a\,\bar{r}(e_1,\dots,e_s)$,

$\bar{r}(b_1e_1,\dots,b_se_s) \overset{*}{\Longrightarrow}_{\underline{B}} b\bar{q}(e_{11},\dots,e_{1t_1},\dots,e_{s1},\dots,e_{st_s})$.

(iii) $\bar{\bar{p}} \overset{*}{\Longrightarrow}_{\underline{A}} a\bar{\bar{r}}$,

$\bar{\bar{r}} \overset{*}{\Longrightarrow}_{\underline{B}} b_jq^j$ $(j=1,\dots,s)$

(iv) Legyen $R_j = \mathcal{T}^{-1}_{\underline{A}_{\bar{a}}}\left(\mathcal{T}^{-1}_{\underline{B}_{b_j}}(q^j) \bigcap_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{s} \mathcal{T}^{-1}_{\underline{B}_{b_k}}(T_H(Z_L))\right)$,

$Q_{jl} = \mathcal{T}_{\underline{B}_{b_l}}(\mathcal{T}_{\underline{A}_{\bar{a}}}(R_j))$ $(j=1,\dots,s;\ l=1,\dots,s)$.

$\exists u_1,\dots,u_M$ $(M\geq 2;\ 1\leq u_m\leq s;\ m=1,\dots,M)$, hogy

$\forall m(1\leq m\leq M)$-re: nincs w_m, hogy $Q_{u_mw_m}$ végtelen.

(v) $\forall m_1(1\leq m_1\leq M)$-re, $\forall m_2(1\leq m_2\leq M)$-re (ha $m_1\neq m_2$)

$q^{u_{m_1}}$ gyenge-f $q^{u_{m_2}}$.

Világos, hogy (v) alapján automatikusan igaz, hogy van k_1 és k_2 $(k_1,k_2\in\{u_m/m=1,\dots,M\},\ k_1\neq k_2)$, hogy $\forall m(1\leq m\leq M)$-re $q^{k_1}\leq q^{u_m}$ és $q^{u_m}\leq q^{k_2}$.

6.16. Definició

Legyen D gyenge-f elem.

(i) $\bar{\bar{q}} = q^{k_2}\setminus q^{k_1}$.

(ii) VAL(D) = $\bar{\bar{q}}$.

VAL(D)-t véges-f tipus, véges-f elem és gyenge-f elem esetén is a megfelelő objektum értékének nevezzük.

6.17. Példa

Legyen $\underline{A}$ és $\underline{B}$ olyan l-transzformátor, amelyeknek a szabályhalmaza a következő:

S_A: $x_1 \to a_1x_1$, $f(a_1e) \to a_1f(e)$, $f(a_1e) \to a_2f(e)$, $f(a_2e) \to a_3g(e,e,e,e)$.

S_B: $x_1 \to b_1f(x_2)$, $f(b_1e) \to b_1e$,

$x_1 \to b_7h(x_1)$, $f(b_7e) \to b_2g(e,e,f(x_1), f(x_1))$, $f(b_2e) \to b_2f(f(e))$,

$x_1 \to b_8f(x_1)$, $f(b_8e) \to b_3g(h(x_1),h(x_1),e,e)$, $f(b_3e) \to b_3f(f(e))$,

$x_1 \to f(f(g(h(x_1),h(x_1), f(x_1),f(x_1))))$, $f(b_4e) \to b_4f(f(e))$, $f(b_4e) \to b_5h(e)$,

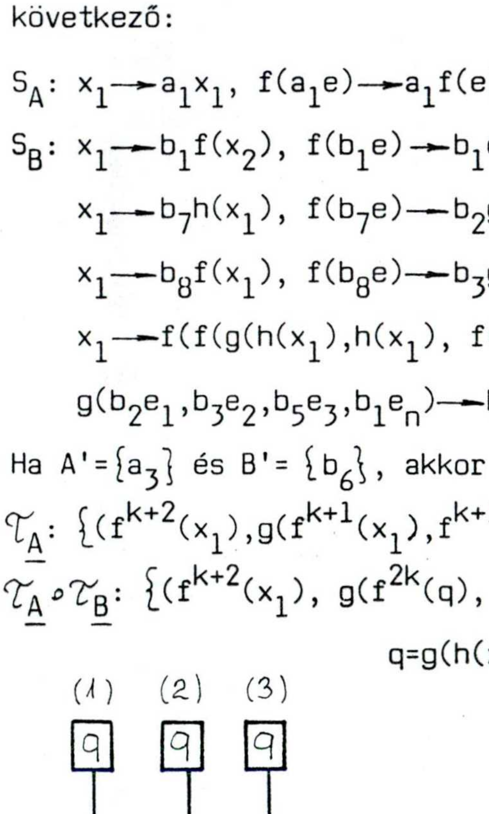
$g(b_2e_1,b_3e_2,b_5e_3,b_1e_n) \to b_6g(e_1,e_2,e_3,e_4)$.

Ha $A'=\{a_3\}$ és $B'=\{b_6\}$, akkor az általuk indukált transzformáció:

$\tau_{\underline{A}}$: $\{(f^{k+2}(x_1), g(f^{k+1}(x_1), f^{k+1}(x_1), f^{k+1}(x_1), f^{k+1}(x_1))) \mid k \in N\}$

$\tau_{\underline{A}} \circ \tau_{\underline{B}}$: $\{(f^{k+2}(x_1), g(f^{2k}(q), f^{2k}(q), h(f^{2k+2}(q)), f(x_2))) \mid k \in N,$

$q=g(h(x_1), h(x_1), f(x_1), f(x_1))\}$.



Az (1) és (3) ágakat figyelembe véve erős-f tipushoz jutunk, amelynek értéke $g(e_1,e_2, h(f(f(e_3)))e_4)$.

Az (1) és (4) ágakat figyelembe véve véges-f tipushoz jutunk, amelynek értéke $f(x_2)$.

Az (1) és (2) ágakon q levezetését figyelembe véve véges-f elemhez jutunk, amelynek értéke $\{h(x_1), f(x_1)\}$. Az (1), (2) és (3) ágakon $f^3(x_1)$ levezetéseit figyelembe véve gyenge-f elemhez jutunk, amelynek értéke $f^4(e)$.

7. Az f-tulajdonság és az indukálhatóság

7.1. Állitás

Legyen $\underline{A}$, $\underline{B}$ és $\underline{C}$ l-transzformátor, ugy hogy $\mathcal{T}_{\underline{A}} \circ \mathcal{T}_{\underline{B}} = \mathcal{T}_{\underline{C}}$. Legyen D erős-f tipus ($\mathcal{T}_{\underline{A}} \circ \mathcal{T}_{\underline{B}}$-ben). Ekkor $\underline{C}$-nek van olyan szabálya, amelynek jobb oldala (részgráfként) tartalmazza VAL(D)-beli gráfokat.

Bizonyitás

5.1. ill. 5.7. alapján tudjuk, hogy van D' ($\mathcal{T}_{\underline{A}} \circ \mathcal{T}_{\underline{B}}$-ben) és D^{*}($\mathcal{T}_{\underline{C}}$-ben) n-tipus, hogy D, D' és D^{*} hasonlóak és $\mathcal{T}(D^{*}) = \mathcal{T}(D') \equiv \mathcal{T}(D)$. VAL(D) definiciója alapján tudjuk (ld. 6.10.), hogy VAL(D') nem lehet szükebb mint VAL(D). Vizsgáljuk meg a D^{*}-beli levezetéseket. Mivel D és D^{*} hasonlóak, igy minden $i(\in I/D^{*})$-ra p_i^j/D D-beli ill. D^{*}-beli levezetéseinek eredményei $(W_{AB}(p_i^j/D)$ és $W_C(p_i^j/D))$ között a hasonlóság által meghatározott (ld. 4.9. (iii).) különbség van.

Az l-transzformátorok müködésmódja miatt egy részfának csak egyféle képe lehet. Ez azt jelenti, hogy p_i $\underline{C}$-beli forditása során csak olyan kép állhat elő, ami a D-hez tartozó belső burkoló része, vagy ami tartalmazza a D-hez tartozó külső burkolót, hisz ezek definiciója (ld. 6.8. és 6.9.) alapján világos, hogy ellenkező esetben egy részfának többféle képe kellene, hogy legyen.

Ez pedig azt jelenti, hogy egyetlen szabály alkalmazásával (a $\underline{C}$-beli levezetésben) kell, hogy elérjük az addig a belső burkoló által tartalmazott kép, a külső burkolót tartalmazó képpé egészüljön ki. VAL(D) definiciója (ld. 6.10) alapján ez a szabály (amit $\underline{C}$-ben alkalmazunk) jobb oldalában legalább VAL(D)-t tartalmaznia kell.

7.2. <u>Definició</u>

Legyen $\underline{A}$, $\underline{B}$ és $\underline{C}$ l-transzformátor, ugy hogy $\mathcal{T}_{\underline{A}} \circ \mathcal{T}_{\underline{B}} = \mathcal{T}_{\underline{C}}$. Legyen D erős-f tipus ($\mathcal{T}_{\underline{A}} \circ \mathcal{T}_{\underline{B}}$-ben). Ekkor a $\underline{C}$ szabályhalmazában (S_C-ben) a 7.1. szerint D-hez tartozó szabályt a D-hez konjugált szabálynak nevezzük és SC(D)-vel jelöljük.

7.3. <u>Állitás</u>

Legyen $\underline{A}$, $\underline{B}$ és $\underline{C}$ l-transzformátor, ugy hogy $\mathcal{T}_{\underline{A}} \circ \mathcal{T}_{\underline{B}} = \mathcal{T}_{\underline{C}}$. Legyen D erős-f tipus ($\mathcal{T}_{\underline{A}} \circ \mathcal{T}_{\underline{B}}$-ben). Legyen $u_f(D)$ egy D-hez tartozó forditási pont. Legyen D^* n-tipus ($\mathcal{T}_{\underline{C}}$-ben), $\mathcal{T}(D)=\mathcal{T}(D^*)$, D és D^* hasonlóak. Ekkor a D^*-beli levezetésekben SC(D)-t pontosan $u_f(D)$-ben kell alkalmazni.

<u>Bizonyitás</u>

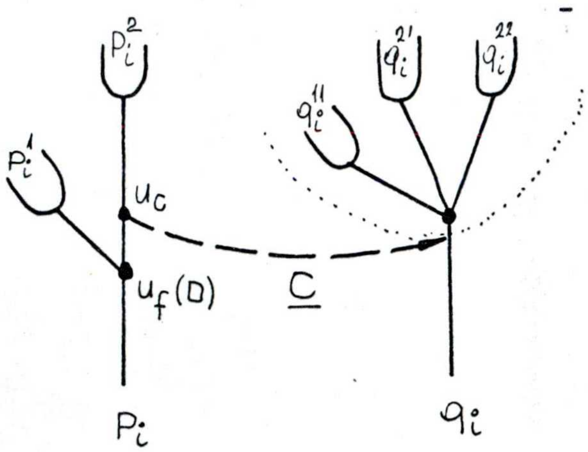
$u_f(D)$ definiciója alapján (ld. 6.4.) világos, hogy $u_f(D)$ egyben D^*-ban is forditási pont.

Tegyük fel, hogy SC(D)-t a D^*-beli levezetésekben olyan u_c csucsban alkalmazzuk (p_i-ben), amelyik $u_f(D)$ felett van p_i-ben, azaz $root^{-1}(u_c) \supseteq root^{-1}(u_f(D))$, $root^{-1}(u_c) \neq root^{-1}(u_f(D))$.

SC(D) alkalmazása, mivel annak jobb oldala tartalmazza VAL(D)-t, egyben azt is jelenti, hogy az igy előállt képnek tartalmaznia kellene q_i^j/D^*-ot mindazokra a j-kre ahol $e_j \in E^2/u_f(D) \setminus E^1/u_f(D)$. Ez viszont azt is jelentené, hogy valamely p_i^j ($i \in I/D^*$, $j \in E^1/u_f(D)$) részfából, $\mathcal{T}(D)=\mathcal{T}(D^*)$ és $\bar{p}/D$ D^*-beli levezetésének egyértelmüsége miatt, végtelen sok különböző képet kellene $\underline{C}$-ben előállitani (hisz $h(q_i^j) \to \infty$ ($P_j(i) \to \infty$, $i \in I/D^*$) $\forall j (1 \leq j \leq n)$-re).

Ez pedig nyilván lehetetlen.

(Itt $E^2/u_f(D) = \{e_j \mid e_j \in root^{-1}(u_f(D))\}$ és $E^1/u_f(D) = \{e_j \mid \exists p' : e_j \in p',$ $p' \in sub^*(root^{-1}(u_f(D)))|_{e_1}$, $p' \neq root^{-1}(u_f(D))\}$.)

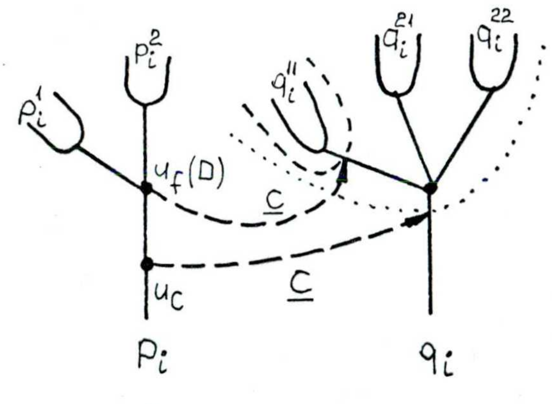


7.4. <u>ábra</u> Ha D^*-ban u_c magasabban van p_i-ben mint $u_f(D)$.

Tegyük fel, hogy SC(D)-t a D^*-beli levezetésekben olyan u_c csucsban alkalmazzuk (p_i-ben), amelyik $u_f(D)$ alatt van p_i-ben, azaz $\mathrm{root}^{-1}(u_c) \not\leq \mathrm{root}^{-1}(u_f(D))$, $\mathrm{root}^{-1}(u_c) \neq \mathrm{root}^{-1}(u_f(D))$.

Az, hogy SC(D)-t u_c-ben alkalmazzuk, egyben azt is jelenti, hogy u_c feletti csucsban előálló kép (mivel SC(D) jobb oldala tartalmazza VAL(D)-t) nem tartalmazhatja q_i^j/D^*-ot mindazokra a j-kre ahol $e_j \in E^2/u_f(D) \setminus E^1/u_f(D)$.

Ez viszont $\bar{p}/D$ D^*-beli levezetésének egyértelmüsége miatt azt is jelentené, hogy $p_i \setminus * \mathrm{root}^{-1}(u_f(D))$-ből (ami gráfként $\bar{p}/D$ része) végtelen sok különböző képet tudna $\underline{C}$ előállitani (hisz $h(q_i^j) \longrightarrow \infty (P_j(i) \longrightarrow \infty,\ i \in I/D^*)$ $\forall j (1 \leq j \leq n)$-re). Ez pedig nyilván lehetetlen.



7.5. <u>ábra</u> Ha D^*-ban u_c alacsonyabban van p_i-ben mint $u_f(D)$.

7.6. <u>Állitás</u>

Legyen $\underline{A}$, $\underline{B}$ 1-transzformátor, D erős-f tipus $\tau_{\underline{A}} \circ \tau_{\underline{B}}$-ben. Legyen $u_f^1(D)$ és $u_f^2(D)$ két különböző D-hez tartozó forditási pont. Ekkor $\tau_{\underline{A}} \circ \tau_{\underline{B}}$ nem indukálható 1-transzformátorral.

Bizonyitás

Tegyük fel, hogy van $\underline{C}$ 1-transzformátor, hogy $\mathcal{T}_{\underline{A}} \circ \mathcal{T}_{\underline{B}} = \mathcal{T}_{\underline{C}}$. Ekkor 5.1. ill. 5.7. alapján van D' és D^* n-tipus, hogy D, D', D^* hasonlóak és $\mathcal{T}(D^*) = \mathcal{T}(D') \equiv \mathcal{T}(D)$ (D' $\mathcal{T}_{\underline{A}} \circ \mathcal{T}_{\underline{B}}$-beli, D^* $\mathcal{T}_{\underline{C}}$-beli).
$u_f(D)$ definiciója alapján (ld. 6.4.) $u_f^1(D)$ és $u_f^2(D)$ egyben $u_f^1(D')$ és $u_f^2(D')$ is. Igy 7.3. alapján SC(D') $u_f^1(D')$-ben és $u_f^2(D')$-ben is alkalmazni kellene (és csak ott!) a D^*-beli levezetésekben.
$u_f^1(D') \neq u_f^2(D')$ miatt feltehető, hogy például $u_f^2(D')$ magasabban van $\bar{p}/D'$-ben mint $u_f^1(D')$. SC(D') $u_f^1(D')$-beli alkalmazása azt jelentené, hogy az $u_f^2(D')$ forditási pont alatt kerülne alkalmazásra, ami 7.3. szerint lehetetlen. Miként az is, hogy SC(D')-t $u_f^2(D')$-ben alkalmazzuk, mert ez azt jelentené, hogy SC(D') az $u_f^1(D')$ forditási pont felett kerülne alkalmazásra.
Ez pedig ellentmondás: nem létezhet a $\underline{C}$ 1-transzformátor.

7.7. Megjegyzés

Legyen $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$ 1-transzformátor ($\mathcal{T}_{\underline{A}} \circ \mathcal{T}_{\underline{B}} = \mathcal{T}_{\underline{C}}$), D ($\mathcal{T}_{\underline{A}} \circ \mathcal{T}_{\underline{B}}$-ben) D^* ($\mathcal{T}_{\underline{C}}$-ben) n-tipus, D és D^* hasonlóak, $\mathcal{T}(D^*) = \mathcal{T}(D)$, D erős-f tipus. Legyen u_c az a csucs p_i-ben ($i \in I/D^*$) ahol SC(D) alkalmazzuk. Tegyük fel, hogy $n \geqq 2$. Ekkor $u_c \doteq u_f(D)$. p_i D-beli felbontása alapján $root^{-1}(u_c)/\bar{p}$ felirható $f(\bar{p}_1'(e_1), \bar{p}_2(e_2), \ldots, \bar{p}_n(e_n), \bar{p}_{n+1}, \ldots, \bar{p}_{n+m})$ alakban, ahol $f \in F_{n+m}$. Az u_c-ben alkalmazott szabály jobb oldalában $e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}, \ldots, e_{n+m}$ segédváltozók fordulhatnak elő (esetleg többször is.) Ez azt mutatja, hogy SC(D) tartozhat egy olyan (n+m)-tipushoz is, ahol a fenti felbontás helyett az $f(\bar{p}_1'(e_1), \bar{p}_2(e_2), \ldots, \bar{p}_n(e_n), \bar{p}_{n+1}'(e_{n+1}), \ldots, \bar{p}_{n+m}'(e_{n+m}))$ felbontás áll. Ez egyben azonban azt is jelenti, hogy a $\bar{p}_1$ többi csucsában kapcsolódó $\bar{p}_u/D$ ($m < u < v/D$) részfák képeit is tartalmazni kell rSC(D)-nek. Ennek felel meg az, hogy $u_f(D)$ többértelmüsége esetén (7.6. szerint) a $\mathcal{T}_{\underline{A}} \circ \mathcal{T}_{\underline{B}} = \mathcal{T}_{\underline{C}}$ nem állhat. (Végtelen sok különböző rSC(D)-nek kellene lennie.)

7.8. Állitás

Legyen $\underline{A}$, $\underline{B}$ l-transzformátor. Legyen $\tau_{\underline{A}} \circ \tau_{\underline{B}}$-ben végtelen sok különböző értékü erős-f tipus. Ekkor $\tau_{\underline{A}} \circ \tau_{\underline{B}}$ nem indukálható l-transzformátorral.

Bizonyitás

Tegyük fel, hogy van $\underline{C}$ l-transzformátor, hogy $\tau_{\underline{A}} \circ \tau_{\underline{B}} = \tau_{C}$. Ekkor minden D erős-f tipushoz ($\tau_{\underline{A}} \circ \tau_{\underline{B}}$-beli) van SC(D) S_c-beli szabály, hogy rSC(D) tartalmazza VAL(D)-t.
Mivel végtelen sok különböző VAL(D) létezik $\tau_{\underline{A}} \circ \tau_{\underline{B}}$-ben, igy bármely M számhoz lenni kell olyan $\pi (\in S_c)$ szabálynak, hogy $h(r\pi) \geqq M$. Ebből az következne, hogy S_c-nek végtelen sok eleme van, ami pedig lehetetlen.
Tehát nem létezhet a $\underline{C}$ l-transzformátor.

7.9. Állitás

Legyen $\underline{A}$, $\underline{B}$ l-transzformátor. Legyen $\tau_{\underline{A}} \circ \tau_{\underline{B}}$-ben végtelen sok különböző értékü véges-f tipus. Ekkor $\tau_{\underline{A}} \circ \tau_{\underline{B}}$-ben végtelen sok különböző értékü erős-f tipus van.

Bizonyitás

Legyen D egy tetszőleges véges-f tipus. Legyen D-re $\varphi(D) = (a_1/D,$ $b_{1k_1}/D,\ b_{1k_2}/D,\ \{b_{1k} \mid 1 \leqq k \leqq s_1/D\})$.
$\varphi(D)$-nek nyilván csak véges sok különböző értéke lehet. Végtelen sok különböző értékü véges-f tipus lévén lenni kell olyan értéknek, amelyik végtelen sok különböző értékü véges-f tipushoz tartozik.
Rendezzük ezeket $h(q_i^{1k_1}/D)$ szerint növekvő sorrendbe:
$D^1, D^2, \ldots$ véges-f tipusok, $h(q_i^{1k_1}/D^m) \longrightarrow \infty \ (m \longrightarrow \infty)$.
$\forall m (\in N)$-re válasszunk egy d^m levezetést D^m-ből, ugy hogy
$h(q_i^{1k_2}/d^m) - h(q_i^{1k_1}/D^m) > h(\bar{q}/D^1) + m$. $\quad (*)$

Mivel $\forall m(\in N)$-re $h(q_i^{1k_2}) \longrightarrow \infty (i \longrightarrow \infty,\ i \in I/D^m)$, ezt megtehetjük.

Legyen D_0 a következő levezetések halmaza:

(i) $\bar{p}/D_0 = \bar{p}/D^1$, $\bar{r}/D_0 = \bar{r}/D^1$, $\bar{q}/D_0 = \bar{q}/D^1$, a D^1-beli levezetéssel.

(ii) $I/D_0 = N$

(iii) $\forall m(\in N)$-re

$p_m^1/D_0 = p_i^1/d^m$, $r_m^1/D_0 = r_i^1/d^m$

(iv) $\forall m(\in N)$-re, $\forall k(1 \leqq k \leqq s_1/D)$-ra

q_m^{1k}/D_0 olyan, hogy $r_i^1 \overset{*}{\underset{B}{\Longrightarrow}} b_{11} q_i^{11}$, $q_i^{11}/d^m = q_m^{1k}/D_0$, $b_{11}/d^m = b_{1k}/D^1$

(azaz részlevezetés d^m-ben).

(v) $k_1/D_0 = k_1/D^1$, $k_2/D_0 = k_2/D^1$.

(vi) k_1/D_0-ra és k_2/D_0-ra a korábban kiválasztott részlevezetések szerepelnek (ld. (*)).

Szükitsük D_0-t a következő módon ($k=1,\dots,s_1/D^1$, $k \neq k_1/D_0$, $k \neq k_2/D_0$):

(i) Ha $\{h(q_m^{1k}/D_0) \mid m \in I/D_0\}$ nem korlátos, kiválasztható olyan $I^k (\subseteq I^1 \subseteq I/D_0,\ 1 < k)$, hogy $h(q_m^{1k}/D_0 \longrightarrow \infty (m \longrightarrow \infty,\ m \in I^k)$.

(ii) Ha $\{h(q_m^{1k}/D_0) \mid m \in I/D_0\}$ korlátos, akkor $\{q_m^{1k}/D_0 \mid m \in I/D_0\}$ véges. Igy kiválasztható $I^k (\subseteq I^1 \subseteq I/D_0,\ 1 < k)$, hogy $\forall m(\in I^k)$-re q_m^{1k}/D_0 megegyezik.

$k=1,2,\dots$ ($k \leqq s_1/D^1$, $k \neq k_1/D_0$, $k \neq k_2/D_0$)-re ezt a szükitést lépésenként elvégezve egy $I_0^*(\subseteq N)$ ill. ezáltal egy $D_0^*(\subseteq D_0)$ halmazhoz jutunk.

D_0^*-ban $q_m^{1k_1}$ erős-f $q_m^{1k_2}$ lesz legfeljebb véges sok $m(\in I_0^*)$ esetét kivéve. Az ezek elhagyásával nyert halmaz legyen D^*. D^*-ról ellenőrizhető, hogy erős-f tipus lesz.

Világos az is, hogy D^* bármely végtelen részhalmaza maga is erős-f tipus lesz. (**)

Vizsgáljuk meg $\forall i(\in I/D^*)$-re $\overline{VQ}_i$-t (ld. 6.10.).

(*) alapján látszik, hogy $h(\overline{VQ}_i) \longrightarrow \infty (i \longrightarrow \infty,\ i \in I/D^*)$. Ez azt is jelenti, hogy bármely K_0 számra végtelen sok $i \in I/D^*$ van, hogy $h(\overline{VQ}_i) > K_0$. Osztályozzuk ezeket $\overline{VQ}_i$ "alsó része" szerint, azaz tekintsük a $\overline{VQ}_i$-t reprezentáló gráfnak azt a részét amelyet ugy kapunk, hogy $\overline{VQ}_i$-ból elhagyjuk azokat a csucsokat (a \ müveletnek megfelelően) amelyeknek $\overline{VQ}_i$ gyökerétől való távolságra (az összekötő ut hossza) K_0-nál nagyobb.
Igy végtelen sok $\overline{VQ}_i$-t (minden K_0-ra) véges sok osztályba soroltunk. Ebből következik, hogy valamelyik osztály végtelen sok elemet tartalmaz. D^*-nak a K_0-hoz igy kijelölt részhalmaza legyen $D^*_{K_0}$. Ez (**) szerint erős-f tipus. A kiválasztás módja miatt $h(VAL(D^*_{K_0})) \geq K_0$. Ez pedig azt jelenti, hogy végtelen sok különböző értékü erős-f tipus van $\mathcal{T}_{\underline{A}} \circ \mathcal{T}_{\underline{B}}$-ben.

7.10. <u>Állitás</u>

Legyen $\underline{A}$, $\underline{B}$ l-transzformátor. Legyen $\mathcal{T}_{\underline{A}} \circ \mathcal{T}_{\underline{B}}$-ben végtelen sok különböző értékü véges-f elem. Ekkor $\mathcal{T}_{\underline{A}} \circ \mathcal{T}_{\underline{B}}$-ben végtelen sok különböző értékü erős-f tipus van.

<u>Bizonyitás</u>

Vegyük észre, hogy bármely D véges-f elem esetén $\bar{p}/D$ felbontható ugy, hogy $\bar{p}(e) = \bar{p}'(\bar{p}_0(\bar{p}_1(e), \bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_n))$, $\bar{p}_0 \in F_n$, és a D-ben szereplő levezetés a $\bar{p}/D' = \bar{p}'(\bar{p}_0(e, \bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_n))/D$, $\bar{\bar{p}}/D' = \bar{p}_1(\bar{\bar{p}})/D$ felbontással egy D' véges-f elemet szolgáltat, de a $\bar{p}/D'' = \bar{p}'$, $\bar{\bar{p}}/D'' = p_0(p_1(\bar{\bar{p}}), \bar{p}_2, \ldots, p_n)/D$ felbontás mellett D"-ben 6.13. (v) vagy (vi) feltétele nem teljesül (azaz $M/D''=1$ vagy (vi) $\bar{\bar{p}}/D'$-re nem teljesül).
Egy tetszőleges D véges-f elemre legyen
$\varphi_1(D) = (\bar{\bar{a}}/D'', \{\bar{b}_j \mid 1 \leq j \leq s_2/D''\})$.
$\varphi_1(D)$ értékei révén a véges-f elemeknek egy véges osztályozását szolgáltatja. Végtelen sok különböző értékü véges-f elem lévén ebben az osztályozásban

van végtelen sok különböző értékü elemet tartalmazó osztály. Legyen ez D^{φ_1}. Legyen egy tetszőleges $D(\in D^{\varphi_1})$ véges-f elemre $\varphi_2(D)$ a $\bar{p}_0/D$ D-ben előforduló részlevezetéseinek halmaza. Ez értékei révén D^{φ_1}-nek egy véges osztályozását adja. Mint az előbb, most is van végtelen osztály. Legyen ez D^{φ_2}.

Szükitsük D^{φ_2}-t olymódon, hogy csak azokat a véges-f elemeket tartsuk meg, amelyekre $\bar{p}/D = \bar{p}/D'$. Legyen ez D^{φ_3}.

Ha $D\in D^{\varphi_2}$, akkor φ_2 és D' értelmezése alapján nyilván $D'\in D^{\varphi_2}$ is.

A VAL(D)-ben szereplő fák, D' értelmezése alapján, szükségképp részfái a VAL(D')-ben szereplőknek (+), kivéve ha valamely véges-f tipus értékének részfái (ld. 6.13. (v) és 6.11.). Ha ez a kivételes eset végtelen sok különböző részfára fordulna elő, akkor 7.9. alapján állitásunkat igazoltuk. Ha (+)-ra csak véges sok kivétel van, akkor a D^{φ_3}-ban szereplő véges-f elemek értékeiben előforduló fáknak végtelen sok különböző részfája van, vagyis D^{φ_3} végtelen sok különböző értékü véges-f elem van.

Vegyük észre, hogy minden $D(\in D^{\varphi_3})$-re vagy $M/D''=1$, vagy $\bar{p}_0(\bar{\bar{p}},\bar{p}_2,\ldots,\bar{p}_n)/D''$ képeinek (legalábbis amelyek nem egy véges-f tipus értékének részfái) belső burkolója (ld. 6.8.) tartalmazza $\bar{\bar{p}}$ megfelelő (6.13. (v) szerint $u_1, \ldots, u_M/D$-hez tartozó) képeit ("$\leqq$" értelemben). (Gondoljunk D" értelmezésére!)

Ebből pedig következik, hogy van $\bar{p}_0(\bar{\bar{p}},\bar{p}_2,\ldots,\bar{p}_n)/D''$-nek olyan képe, amely $\forall p^*(\in \mathrm{sub}(\bar{\bar{p}}'/D)\ _e$-re, ill. $\bar{\bar{p}}''$-re ha $\sum_{j,k} t_{jk}/D=0)$ esetén tartalmazza a 6.13. (vi)-nek megfelelő képeket. Ezek teszik lehetővé, hogy képezzük a $\mathcal{T}_{\underline{A}}\circ\mathcal{T}_{\underline{B}}$-beli levezetések következő D_0 halmazát:

A véges-f elemek definiciója alapján (6.13. (v)) bármely D véges-f elemre van $m_1,m_2(1\leqq m_1\leqq M/D,\ 1\leqq m_2\leqq M/D,\ m_1\neq m_2)$, hogy $\bar{q}^{u_{m_1}}(\ldots,q^{u_{m_1}k},\ldots)$ <u>erős-f</u> $\bar{q}^{u_{m_2}}(\ldots,q^{u_{m_2}k},\ldots)$.

Legyen $\varphi_4(D) = (\bar{a}/D,\ \bar{b}_{m_1}/D,\ \bar{b}_{m_2}/D,\ \{\bar{b}_j/1 \leq j \leq s_2/D\})$.
Világos, hogy φ_4 D^{φ_3}-on egy véges osztályozást valósit meg. Igy kijelölhető ennek egy D^{φ_4} osztálya, amely végtelen sok különböző értékü véges-f elemet tartalmaz.

Rendezzük ezeket $h(\bar{q}^{u_{m_1}}(\ldots,q^{u_{m_1}k},\ldots)/D)$ szerint növekvő sorrendbe:
$D^1, D^2, \ldots$ és $h(\bar{q}^{u_{m_1}}(\ldots,q^{u_{m_1}k},\ldots)/D^i) \longrightarrow \infty (i \longrightarrow \infty,\ i \in N)$, (++)

6.13. (v) alapján biztos, hogy nem lehet olyan q' fa, hogy végtelen sok $i(\in N)$-re $q' = \bar{q}^{u_{m_2}}(\ldots,q^{u_{m_2}k},\ldots)/D^i$ legyen. Ez pedig azt is jelenti, hogy $h(\bar{q}^{u_{m_2}}(\ldots,q^{u_{m_2}k},\ldots)/D^i) \longrightarrow \infty (i \longrightarrow \infty,\ i \in N)$ (+++).

Legyen D_0 a következő levezetések halmaza:

(i) $\bar{p}/D_0 = \bar{p}/D^1$, $\bar{r}/D_0 = \bar{r}/D^1$, $\bar{q}/D_0 = \bar{q}/D^1$, a D'-beli levezetéssel.

(ii) $I/D_0 = N$

(iii) $\forall i(\in N)$-re

$p_i^1/D_0 = \bar{\bar{p}}(p^1)/D^i$, $r_i^1/D_0 = \bar{\bar{r}}(r^1,\ldots,r^1)/D^i$

(iv) $\forall i(\in N)$-re $\forall w(1 \leq w \leq s_2/D^i)$-re

q_i^{1w}/D_0 olyan, hogy $\bar{\bar{r}}(r^1,\ldots,r^1) \overset{*}{\underset{B}{\Longrightarrow}} \bar{b}_1\bar{q}^1(\ldots,q^{jk},\ldots)/D^i$,

$q_i^{1w}/D_0 = \bar{q}^1(\ldots,q^{jk},\ldots)/D^i$, $\bar{b}_1/D^i = b_w/D^1$ (azaz $\bar{b}_w$-re "végződő" részlevezetés D^i-ben).

(v) $k_1/D_0 = u_{m_1}/D^1$, $k_2/D_0 = u_{m_2}/D^1$.

(vi) k_1/D_0-ra és k_2/D_0-ra a korábban kiválasztott (ld. (++) és (+++)) részlevezetések szerepelnek.

Pontosan a 7.9.-ben bemutatott módon $k=1,2,\ldots(k \leq s_2/D,\ k \neq k_1/D_0,\ k \neq k_2/D_0)$-re szükitsük D_0-t. Az igy kapott D_0^*-ban $q_i^{1k_1}$ erős-f $q_i^{1k_2}$ lesz legfeljebb véges sok $i(\in I/D_0^*)$ esetét kivéve. Az ezek elhagyásával nyert halmaz legyen $\bar{D}$.
$\bar{D}$-ról ellenőrizhető, hogy erős-f tipus lesz.

Legyen $\forall i(\in I/\bar{D})$-re $\varphi_5(D^i) = \emptyset$, ha $s_1/D^i = 0$ vagy $\sum\limits_{j,k} t_{jk}/D^i = 0$,

ill. $\varphi_5(D^i) = (\bar{\bar{a}}/D^i, \{\bar{\bar{b}}_{u_m k}/D^i \mid 1 \leq m \leq M/D^i,\ 1 \leq k \leq s_1/D^i\}, \{\bar{\bar{b}}_{jk}/D^i \mid 1 \leq j \leq s_2/D^i,$
$1 \leq k \leq s_1/D^i\})$ egyébként.

Világos, hogy φ_5 véges osztályozást szolgáltat D^{φ_4}-nek $I/\bar{D}$ által meghatározott részhalmazán. Mivel ez nyilván végtelen sok különböző értékü véges-f elemet tartalmaz, igy ennek az osztályozásnak lesz végtelen eleme. Legyen ez D^{φ_5}.

Ha ez a $\emptyset$ értékhez tartozó osztály, akkor nyilván $h(\bar{q}^{u_m 1}/D^i) \longrightarrow \infty (i \longrightarrow \infty,$ $i \in D^{\varphi_5})$.

Ha D^{φ_5} nem a $\emptyset$ értékhez tartozó osztály, akkor vizsgáljuk meg a $\{h(\bar{q}^{u_{m_1}}/D^i) \mid$ $i \in I/D^{\varphi_5}\}$ halmazt. Ha ez korlátos, akkor a D^{φ_5}-beli véges-f elemekre 6.13. (vii) csak ugy teljesülhet, ha a $\{q^{jk}/D^i \mid i \in D^{\varphi_5}$, nincs u_m/D^i, hogy $j = u_m/D^i\}$ halmaz végtelen, ami azt jelenti, hogy végtelen sok különböző értékü véges-f tipusnak kell lenni $\mathcal{T}_{\underline{A}} \circ \mathcal{T}_{\underline{B}}$-ben (ld. 6.13. (v)). Igy 7.9. szerint $\mathcal{T}_{\underline{A}} \circ \mathcal{T}_{\underline{B}}$-ben végtelen sok értékü erős-f tipusnak kell lenni.

Ha a $\{h(\bar{q}^{u_m 1}/D^i) \mid i \in I/D^{\varphi_5}\}$ halmaz végtelen, akkor nyilván kiválasztható egy D^{φ_6} részhalmaza D^{φ_5}-nek, amelyre $h(\bar{q}^{u_m 1}/D^i) \longrightarrow \infty (i \longrightarrow \infty\ i \in I/D^{\varphi_6})$. (*)

Legyen D^* a $\bar{D}$-nak az I/D^{φ_6} által meghatározott részhalmaza. D^*, mint a $\bar{D}$ erős-f tipus végtelen részhalmaza, maga is erős-f tipus.

Innen pontosan a 7.9.-ben adott módon (szószerint megismételve az ott elmondottakat) D^*-ból előállitható végtelen sok különböző értékü erős-f tipus.

7.11. <u>Állitás</u>

Legyen $\underline{A}$, $\underline{B}$ 1-transzformátor. Legyen $\mathcal{T}_{\underline{A}} \circ \mathcal{T}_{\underline{B}}$-ben végtelen sok különböző értékü gyenge-f elem. Ekkor $\mathcal{T}_{\underline{A}} \circ \mathcal{T}_{\underline{B}}$-ben végtelen sok különböző értékü erős-f tipus van.

Bizonyitás

Legyen D egy tetszőleges gyenge-f elem.

Legyen $\varphi(D) = (a_1/D,\ b_{k_1}/D,\ b_{k_2}/D,\ \{b_j/D \mid 1 \leq j \leq s/D\})$. $\varphi(D)$ a gyenge-f elemekre vonatkozóan (értékei révén) egy véges osztályozást határoz meg. Végtelen sok különböző értékü gyenge-f elem lévén ennek az osztályozásnak van olyan osztálya, amelyhez végtelen sok különböző értékü gyenge-f elem tartozik. Rendezzük ezeket h(VAL(D)) szerint növekvő sorrendbe: D^1, D^2, ...

6.16. (iv) alapján (mert minden q' fára csak véges sok $i(\in N)$-re lehet $q' = q^{k_1}/D^i$ vagy $q' = q^{k_2}/D^i$), igy

$h(q^{k_1}/D^i) \longrightarrow \infty\ (i \longrightarrow \infty,\ i \in N)$,

$h(q^{k_2}/D^i) \longrightarrow \infty\ (i \longrightarrow \infty,\ i \in N)$ és

$h(VAL(D^i)) \longrightarrow \infty\ (i \longrightarrow \infty,\ i \in N)$. (*)

Legyen D_0 a $\underline{\mathcal{T}_A} \circ \underline{\mathcal{T}_B}$-beli levezetések következő halmaza:

(i) $\bar{p}/D_0 = \bar{p}/D^1$, $\bar{r}/D_0 = \bar{r}/D^1$, $\bar{q}/D_0 = \bar{q}/D^1$, a D^1-beli levezetéssel.

(ii) $I/D_0 = N$.

(iii) $\forall i(\in N)$-re

$p_i^1/D_0 = \bar{\bar{p}}/D^i$, $r_i^1/D_0 = \bar{\bar{r}}/D^i$

(iv) $\forall i(\in N)$-re, $\forall k(1 \leq k \leq s/D^1)$-ra

q_i^{1k}/D_0 olyan, hogy $\bar{\bar{r}} \overset{*}{\underset{\underline{B}}{\Longrightarrow}} b_1 g^1/D^i$, $q_i^{1k}/D_0 = q^1/D^i$,

$b_{1k}/D_0 = b_1/D^i$ (azaz b_{1k}-ra "végződő" részlevezetés D^i-ben).

(v) $k_1/D_0 = k_1/D^1$, $k_2/D_0 = k_2/D^1$.

(vi) k_1/D_0-ra és k_2/D_0-ra a korábban kiválasztott (ld. (*)) részlevezetések szerepelnek.

Pontosan a 7.9.-ben bemutatott módon $k=1,2,\ldots(k \leq s/D^1,\ k \neq k_1/D_0,\ k \neq k_2/D_0)$-re szükitsük D_0-t. Az igy kapott D_0^*-ban $q_i^{1k_1}$ erős-f $q_i^{1k_2}$ lesz legfeljebb véges sok $i(\in I/D_0^*)$ esetét kivéve. Az ezek elhagyásával nyert halmaz legyen D^*.

D^*-ról ellenőrizhető, hogy erős-f tipus lesz. Innen a 7.9.-ben adott módon (szószerint megismételve az ott elmondottakat) D^*-ból előállitható végtelen sok különböző értékü erős-f tipus.

7.12. Tétel

Legyen $\underline{A}$, $\underline{B}$ tetszőleges l-transzformátor. $\mathcal{T}_{\underline{A}} \circ \mathcal{T}_{\underline{B}}$ akkor és csakis akkor indukálható l-transzformátorral, ha csak véges sok különböző értékü erős-f tipus van $\mathcal{T}_{\underline{A}} \circ \mathcal{T}_{\underline{B}}$-ben és ezek mindegyikéhez pontosan egy forditási pont tartozik.

Bizonyitás

Legyen $\underline{A}$, $\underline{B}$ l-transzformátor. Ha rájuk nem teljesül a megadott feltétel, akkor 7.8. és 7.6. alapján $\mathcal{T}_{\underline{A}} \circ \mathcal{T}_{\underline{B}}$ nem indukálható l-transzformátorral. Tegyük fel, hogy $\mathcal{T}_{\underline{A}} \circ \mathcal{T}_{\underline{B}}$-re teljesül a megadott feltétel. Ekkor 7.9., 7.10. és 7.11. alapján az is feltehető, hogy véges sok különböző értékü véges-f tipus, véges-f elem és gyenge-f elem van.
Tegyük fel, hogy ismerjük VAL(D) maximális értékét $\mathcal{T}_{\underline{A}} \circ \mathcal{T}_{\underline{B}}$-re vonatkozóan (D itt az előbbieken kivül erős-f tipus is lehet). A 8. fejezetben $\underline{A}$, $\underline{B}$ és ezen adat ismeretében megkonstruálunk egy $\underline{C}$ l-transzformátort, amiről a 9. fejezetben megmutatjuk, hogy $\mathcal{T}_{\underline{A}} \circ \mathcal{T}_{\underline{B}} = \mathcal{T}_{\underline{C}}$.

8. A kompoziciót indukáló l-transzformátor konstrukciója

A $\mathcal{T}_{\underline{A}} \circ \mathcal{T}_{\underline{B}}$-t indukáló l-transzformátor konstrukciójához első lépésként alakitsuk át $\underline{A}$-t és $\underline{B}$-t olymódon, hogy azokból az A és B-beli állapotokból, amelyekbe egy részlevezetés eljut, el lehessen dönteni, az addig előállitott képrészfa szerepelni fog-e az eredményfában, vagy törlődik. Ehhez definiáljuk a képorientált l-transzformátor fogalmát.

8.1. Definició

Legyen $\underline{A}=(T_F(X_J), A, T_G(Y_K), A', S_A)$ 1-transzformátor. Azt mondjuk, hogy $\underline{A}$ képorientált, ha

(i) $A = A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $A' \subseteq A_1$.

(ii) Legyen $p_1(a_2 e) \overset{*}{\underset{\underline{A}}{\Longrightarrow}} a_1 r_1(e_1,\dots,e_n)$, $p_2 \overset{*}{\underset{\underline{A}}{\Longrightarrow}} a_2 r_2$; $a_1 \in A_1$.

Ekkor $(n>0)$ és $(a_2 \in A_1)$ ekvivalens.

8.2. Állitás

Bármely $\underline{A}$ 1-transzformátorhoz van $\underline{A}^*$ 1-transzformátor, hogy $\tau_{\underline{A}} = \tau_{\underline{A}^*}$, és $\underline{A}^*$ képorientált.

Bizonyitás

Legyen $\underline{A} = (T_F(X_J), A, T_G(Y_K), A', S_A)$ valamint $\underline{A}^* = (T_F(X_J), \bar{A}, T_G(Y_K), \bar{A}', S_A^*)$, ahol $\bar{A} = A \times \{0,1\}$, $\bar{A}' = A' \times \{1\}$.

S_A^* elemeit a következőképp kapjuk:

(i) $x_i \in X_J$, $x_i \to ar \in S_A \Longleftrightarrow x_i \to (a,j)\, r \in S_A^*$ $(j=0,1)$.

(ii) $f_0 \in F_0$, $f_0 \to ar \in S_A \Longleftrightarrow f_0 \to (a,j)\, r \in S_A^*$ $(j=0,1)$.

(iii) $f \in F_m$, $f(a_1 e_1,\dots,a_m e_m) \to a\bar{q}(e_{11},\dots,e_{1s_1},\dots,e_{m1},\dots,e_{ms_m}) \in S_A$

$$\Longleftrightarrow f((a_1,j_1)e_1,\dots,(a_m,j_m)e_m) \to (a,j)\bar{q}(e_{11},\dots,e_{1s_1},\dots,e_{m1},\dots,e_{ms_m}) \in S_A^*$$

és (1) ha $\sum_{k=1}^{n} s_k = 0$ akkor $j \in \{\emptyset,1\}$, és $\forall k(1 \leqq k \leqq n)$-ra $j_k=0$

(2) ha $\sum_{k=1}^{n} s_k > 0$ akkor

(2.a) $\forall k(1 \leqq k \leqq n)$-re ha $s_k=0$ akkor $j_k=0$

(2.b) $\forall k(1 \leqq k \leqq n)$-re ha $s_k>0$ akkor $j=j_k$.

Tekintsük az $\bar{A}_1 = A \times \{1\}$, $\bar{A}_2 = A \times \{0\}$ felbontást. Ekkor nyilván $\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 = \emptyset$, $\bar{A}' \subseteq \bar{A}_1$.

$\forall a \in A, \forall p \in T_F(X_J)$ esetén $p \overset{*}{\underset{\underline{A}}{\Longrightarrow}} ar \Longleftrightarrow p \overset{*}{\underset{\underline{A}^*}{\Longrightarrow}} (a,0)r$. (I)

Ez az állitás h(p) szerinti teljes indukcióval $\underline{A}^*$ konstrukciója alapján nyilván adódik.

$\forall a \in A, \forall p \in T_F(X_J)$ esetén $p \overset{*}{\underset{\underline{A}}{\Longrightarrow}} ar \Longleftrightarrow p \overset{*}{\underset{\underline{A}^*}{\Longrightarrow}} (a,1)\ r$. (II)

Az állitást h(p) szerinti teljes indukcióval igazoljuk.

h(p) = 0 esetén ez (i) és (ii) alapján nyilvánvaló.

h(p) 0. $p=f(p_1,\dots,p_m)$. $p_k \overset{*}{\underset{\underline{A}}{\Longrightarrow}} a_k r_k$ $(k=1,\dots,m)$,

$$f(a_1e_1,\dots,a_me_m) \to a\bar{q}(e_{11},\dots,e_{1s_1},\dots,e_{m1},\dots,e_{ms_m}) \in S_A.$$

$\sum_{k=1}^{n} s_k = 0$ esetén (1) és (I) alapján az állitás igaz.

$\sum_{k=1}^{n} s_k > 0$ esetén az indukciós hipotézist ill. (I)-et alkalmazva

$$p_k \overset{*}{\underset{\underline{A}^*}{\Longrightarrow}} (a_k,0)\ r_k\ (s_k=0),\ p_k \overset{*}{\underset{\underline{A}^*}{\Longrightarrow}} (a_k,1)\ r_k\ (s_k>0)\ (k=1,\dots,m).$$

(2) alapján $f(\dots,(a_k,j_k)e_k,\dots) \to (a,1)\ \bar{q}(e_{11},\dots,e_{1s_1},\dots,e_{m1},\dots,$ $e_{ms_m}) \in S^*_A$ (ha $s_k=0$ akkor $j_k=0$, ha $s_k>0$ akkor $j_k=1$; $k=1,\dots,m$).

Ez azt jelenti, hogy $p \overset{*}{\underset{\underline{A}^*}{\Longrightarrow}} (a,1)\ r$.

(II)-t A'-re alkalmazva azt kapjuk, hogy $\tau_{\underline{A}} = \tau_{\underline{A}^*}$.

Legyen $p_1(a_1,j)e) \overset{*}{\underset{\underline{A}^*}{\Longrightarrow}} (a_1,1)\ r_1(e_1,\dots,e_n)$, $p_2 \overset{*}{\underset{\underline{A}^*}{\Longrightarrow}} (a_2,j)\ r_2$.

Ha j=1, akkor (iii) alapján világos, hogy p_1 levezetése során a $sub(p_1)|_e$-beli részfák gyökerénél alkalmazott szabályokban a megfelelő $s_k>0$, $j_k=1$ és a jobb oldalon szereplő (a,1) állapotban 1=1, ez pedig azt jelenti, hogy $n>0$. Hasonlóan ha j=0, akkor (iii) alapján világos, hogy p_1 levezetése során valamely $sub(p_1)|_e$-beli részfa gyökerénél alkalmazott szabályban vagy $\sum_{k=1}^{m} s_k=0$, vagy a megfelelő $s_k=0$, $j_k=0$ kell hogy legyen. Ez pedig azt jelenti, hogy n=0.

Tehát $\underline{A}^*$ képorientált.

8.3. Állitás

Ha $\underline{A}$ és $\underline{B}$ 1-transzformátorok, akkor a hozzájuk konstruált $\underline{A}^*$ és $\underline{B}^*$ képorientált transzformátorok esetén minden $\tau_{\underline{A}} \circ \tau_{\underline{B}}$-beli levezetéshez pontosan egy $\tau_{\underline{A}^*} \circ \tau_{\underline{B}^*}$-beli levezetés van, és itt minden p' részfára $W_{AB}(p') \equiv W_{A^*B^*}(p')$.

Bizonyitás

A képorientált transzformátorra 8.2.-ben adott konstrukció alapján látszik, hogy minden S_A-beli szabályhoz pontosan két S_A^*-beli szabály van, s a kettő közül azt kell egy adott levezetés adott pontján alkalmazni, amelyik megfelel a képorientáltságnak, azaz a szabály jobb oldalán szereplő állapotban j=0, ha a részfának az adott levezetésben az eredményfában nincs képe, és j=1, ha van. Ez ugyanigy igaz $\underline{B}$-re is.

A kompoziciót indukáló 1-transzformátor konstrukciójához ezek alapján feltehetjük, hogy a szóbanforgó 1-transzformátorok képorientáltak.

Legyen $a \in A$, $b_1,\dots,b_k \in B$, $R(a,b_1,\dots,b_k) = \tau^{-1}_{\underline{A}_a} \left(\bigcap_{m=1}^{k} \tau^{-1}_{\underline{B}_{b_m}} \right. (T_K(Z_L))) \; (k \geq 1)$

$Q_m(a,b_1,\dots,b_k) = \tau_{\underline{B}_{b_m}} (\tau_{\underline{A}_a} (R)) \quad (1 \leq m \leq k)$.

Legyen $HV = \max\{q / q \in Q_m(a,b_1,\dots,b_k)$-ra valamely $a \in A$, $b_1,\dots,b_k \in B$, $1 \leq m \leq k$, $(k \geq 1)$ esetén, ahol $Q_m(a,b_1,\dots,b_k)$ véges$\}$.

Megjegyezzük, hogy tetszőleges $\underline{A}$, $\underline{B}$ 1-transzformátorok esetén HV effektive meghatározható, mert tetszőleges leszálló n-felületi erdő végessége algoritmikusan eldönthető. Ez az eredmény bizonyitásával együtt megtalálható pl. [2]-ben. (Leszálló n-felületi erdőnek nevezünk egy T halmazt, ha valamely $\underline{A}_1,\dots,\underline{A}_n$ 1-transzformátorokra $T = \tau_{\underline{A}_n}(\dots(\tau_{\underline{A}_1}(R))\dots)$, ahol R egy tetszőleges reguláris erdő.)

Feltehetjük azt is, hogy $\mathcal{T}_{\underline{B}}(\mathcal{T}_{\underline{A}}(T_F(X_J)))$ végtelen, ellenkező esetben ugyanis a 7.12.-ben adott feltétel automatikusan teljesül és egyszerüen megadható a $\mathcal{T}_{\underline{A}} \circ \mathcal{T}_{\underline{B}}$-t indukáló l-transzformátor (a konstrukció kifejtett formában megtalálható [12]-ben). $\mathcal{T}_{\underline{B}}(\mathcal{T}_{\underline{A}}(T_F(X_J)))$ végessége pedig a fentiek szerint algoritmikusan eldönthető.

Jelölje HF a $\mathcal{T}_{\underline{A}} \circ \mathcal{T}_{\underline{B}}$-ben létező erős-f tipusok, véges-f tipusok, véges-f elemek, gyenge-f elemek értékeként (VAL(D)-ben) előforduló fák magasságának maximumát. (Az, hogy HF effektive meghatározható-e tetszőleges $\underline{A}$, $\underline{B}$ l-transzformátorok esetén, még nyitott kérdés, de a 7. fejezetben mondottak alapján igaz, hogy ha $\underline{A}$ és $\underline{B}$ teljesiti a 7.12.-ben adott feltételt, akkor HF egy véges érték.)

Legyen $\pi \in S_A$. $NL(\pi)=0$, ha $e\pi = x_i (\in X_J)$ vagy $1\pi = f_0 (\in F_0)$, illetve

$NL(\pi) = \max\{s_k \ k=1,\ldots,n\}$ ha $\pi = (f(a_1e_1,\ldots,a_ne_n),\ a\bar{q}(e_{11},\ldots,e_{ns_n}))$.

Legyen $NL(\underline{A}) = \max\{NL(\pi) | \pi \in S_A\}$.

Legyen $HS(\underline{A}) = \max\{h(r\pi) | \pi \in S_A\}$, $HS(\underline{B}) = \max\{h(r\pi) | \pi \in S_B\}$.

Legyen S egy véges halmaz. U(S,i) jelölje az S halmaz elemeiből álló i dimenziós vektorok halmazát, $\bar{U}(S,i)$ pedig jelölje az U(S,i) részhalmazainak halmazát. Legyen A_1, A_2 és B_1, B_2 az A ill. B halmazok 8.1.-nek, azaz a képorientáltságnak, megfelelő felosztása. Legyen φ egy uj jel.

8.4. Az állapot-, és végállapothalmaz

Legyen $HL = 2\cdot HF + \max(HV,HF) + 2\cdot HS(\underline{A}) \cdot HS(\underline{B})$.

$QF = \{q | q \in T_H(Z_L \cup \{e\}),\ h(q) \leq HL\}$

$QFV = \{ q | q \in T_H(Z_L \cup B_1 \{e_0, e_1\}),\ q \notin T_H(Z_L),\ q \notin T_H(Z_L \cup B_1 \{e_1\}),$

$h(q) \leq HL,\ \forall q_1, q_2 \in sub^*(q)\text{-ra ha } q_1 = b_1e_0,\ q_2 = b_2e_0, \text{ akkor } b_1 = b_2\}.$

$BQF = \{b\varphi | b \in B_2\} \cup \{bq | b \in B_1,\ q \in QF\}.$

$$C = \left[A_2 \times \{\varphi\}\right] \cup \left[A_1 \times \bigcup_{i=1}^{NL(\underline{A})} \bar{U}(BQF \cup QFV, i)\right].$$

$C' = A' \times \left\{\{be\}/b \in B'\right\}$. Világos, hogy $C' \subseteq C$.

Legyen $c \in QFV \cup BQF$. Jelölje $\beta(c)$ azt a B-beli állapotot amelyik c-ben előfordul ($c \in BQF$) ill. azt, amelyik c-ben e_0 fordul elő ($c \in QFV$). Jelölje $\alpha(c)$ azt a fát, amelyet ugy kapunk c-ből, hogy elhagyjuk belőle a B-beli állapotokat (és e_0-t e_1-re cseréljük, ha $c \in QFV$).

A konstrukció célját szemléltetve azt mondhatjuk, hogy a $\underline{C}$ 1-transzformátor ugy müködik majd, hogy az egyes részfákból előállitja azt ami a képeikben közös, és megjegyzi a különbözetet a $\mathcal{T}_{\underline{A}} \circ \mathcal{T}_{\underline{B}}$-beli forditáshoz képest. (Erre szolgálnak a BQF elemei). Erős-f tipus forditási pontjánál "megelőlegezi" azt a képet amit majd a $\mathcal{T}_{\underline{A}} \circ \mathcal{T}_{\underline{B}}$-beli forditás előállitana és feljegyzi ezt az "előleget", hogy eszerint folytathassa a forditást. (Erre szolgálnak a QFV elemei. Itt e_0 az egyes részfák helyének kijelölését biztositja majd.)

8.5. A szabályhalmaz

(I) Legyen $\mathfrak{T} \in S_A$, $NL(\mathfrak{T})=0$.

(1) $r\mathfrak{T} = ar$, $a \in A_2$.

Ekkor $1\mathfrak{T} \longrightarrow (a,\varphi)\ Z_1 \in S_C$.

(2) $r\mathfrak{T} = ar$, $a \in A_1$; $BQ^1 = \{r \overset{*}{\underset{\underline{B}}{\Longrightarrow}} bq \mid b \in B_1\}$, $B^2 = \{bq \mid r \overset{*}{\underset{\underline{B}}{\Longrightarrow}} bq,\ b \in B_2\}$.

Ekkor $1\mathfrak{T} \longrightarrow (a,c)\ Z_1 \in S_C$,

$c \in \bar{U}(B^2 \cup BQ^1, i)$, $1 \leq i \leq NL(\underline{A})$.

(3) $r\mathfrak{T} = ar$, $a \in A_1$; $r \overset{*}{\underset{\underline{B}}{\longrightarrow}} bq$, $b \in B'$.

Ekkor $1\mathfrak{T} \longrightarrow (a,c)q \in S_C$,

$c = \{be\}$.

(II) Legyen $\mathcal{T} \in S_A$, $NL(\mathcal{T}) > 0$.

(4) $r\mathcal{T} = a\bar{r}$, $a \in A_2$.

Ekkor $1\mathcal{T} \longrightarrow (a, \varphi)\ z_1 \in S_c$.

(5) $f(a_1e_1, \dots, a_ne_n) \longrightarrow a\bar{r}(e_{11}, \dots, e_{1s_1}, \dots, e_{n1}, \dots, e_{ns_n}) \in S_A$, $a \in A_1$.

Ekkor $f((a_1, \bar{c}_1)e_1, \dots, (a_n, \bar{c}_n)e_n) \longrightarrow (a, \bar{c})\ \bar{q} \in S_c$, föltéve, hogy

(i) ha $a_j \in A_2$ akkor $\bar{c}_j = \varphi$ $(1 \leq j \leq n)$.

(ii) ha $a_j \in A_1$ akkor $\bar{c}_j \in \bar{U}(BQF \cup QFV, s_j)$ $(1 \leq j \leq n)$.

(iii) van $\underline{c}_1, \dots, \underline{c}_I$ $(I \geq 1)$,

$\underline{c}_i = (c_i^1, \dots, c_i^n)$, $c_i^j = (c_i^{j1}, \dots, c_i^{js_j})$ $(1 \leq i \leq I,\ 1 \leq j \leq n,\ a_j \in A_1)$.

$\forall i(1 \leq i \leq I)$-re $\forall j(1 \leq j \leq n)$-re $c_i^j \in \bar{c}_j$ és

$\forall j(1 \leq j \leq n)$-re $\forall c(\in \bar{c}_j)\ \exists i_c$, hogy $c_i^j = c$.

(iv) $\forall i(1 \leq i \leq I)$-re $\exists d_i$ levezetés, hogy

$\bar{r}(b_{11}^i e_{11}, \dots, b_{ns_n}^i e_{ns_n}) \overset{*}{\underset{B}{\Longrightarrow}} b_i \bar{q}^i$ és

$\forall j(1 \leq j \leq n)$-re $\forall k(1 \leq k \leq s_j)$-re $b_{jk}^i = \beta(c_i^{jk})$.

(v) $\forall i(1 \leq i \leq I)$-re ha $\exists j,k(1 \leq j \leq n,\ 1 \leq k \leq s_j)$ hogy $b_{jk}^i \in B_1$,

akkor $b_i \in B_1$.

(vi) $\forall i(1 \leq i \leq I)$-re $\forall j(1 \leq j \leq n)$-re ha $\exists k(1 \leq k \leq s_j)$ hogy

$c_i^{jk} \in QFV \setminus BQF$ akkor $\forall k(1 \leq k \leq s_j)$-re $c_i^{jk} \in QFV \cup$

$\left[BQF \cap (B_1 T_H(Z_L) \cup B_2 \varphi)\right]$.

(vii) $\exists I_0, I_1, \dots, I_M$ $(\subseteq [1, I])$ $(I_0 \cap I_m = \emptyset, 1 \leq m \leq M;\ I_1, \dots, I_M$

nem feltétlenül diszjunkt), hogy

(a) $\forall i(\in I_0)$-ra $\forall j(1 \leq j \leq n)$-re $\forall k(1 \leq k \leq s_j)$-re $c_i^{jk} \in BQF$

(b) $\forall m(1 \leq m \leq M)$-re $\forall j(1 \leq j \leq n)$-re $(\exists c_i^{jk} \in QFV \setminus BQF,\ i \in I_m)$

$\exists q_{jm}$, hogy $\forall i(\in I_m)$-re $\forall k(1 \leq k \leq s_j)$-re q_{jm} előáll

c_i^{jk}-ból ugy, hogy $\alpha(c_i^{jk})$-ban minden be_0 és be_1 alaku

részfát e-re cserélünk.

Legyen igaz az is, hogy minden $q'(\in sub^*(q_{jm}),\ q' = e)$

pontosan egy $i_0(\in I_m)$ $k_0(1 \leq k_0 \leq s_j)$ pár esetén felel meg $c_{i_0}^{jk_0}$-ban be_0-nak.

(viii) $\forall i(1 \leq i \leq I)$-re q^i legyen előállitható, a következő módon:

(a) $\bar{q}^i$-ben $\forall e_{jkl}(\in E)$-t cseréljünk ki $\alpha(c_i^{jk})$-ra, ha $c_i^{jk} \in BQF$. Legyen ez a fa q_i^*.

(b) $\forall m(1 \leq m \leq M)$-re minden q_{jm} fa (páronként idegen) részfája q_i^*-nak $(i \in I_m)$.

Ekkor $q^i = q_i^* \setminus q_{jm}$ és $q^i \neq q_i^*$.

(c) Ha a (b) feltétel nem teljesül, akkor nincs j_1, j_2 $(1 \leq j_1 \leq n,\ 1 \leq j_2 \leq n,\ j_1 \neq j_2)$ hogy van $c_{i_1}^{j_1k_1}$, $c_{i_2}^{j_2k_2} \in QFV \setminus BFQ$. Ekkor $\forall m(1 \leq m \leq M)$-re $\exists q_m = q_{jm}$ $(\forall j(1 \leq j \leq n)$-re, ha (vii.b) szerint van q_{jm} és $\forall i(\in I_m)$-re

$$q^i = q_m \setminus q_i^* \quad \text{és} \quad q^i \neq q_i^* .$$

(ix) ha I=1 és $\forall j(1 \leq j \leq n)$ $\forall k(1 \leq k \leq s_j)$-re $c_1^{jk} \in BQF \cap \cap (B_1 T_H(Z_L) \cup B_2 \varphi)$, és $b_1 \in B'$,

akkor $\bar{q} = q^1$, $\bar{c} = \{b_1 e\}$.

(x) ha $\forall i(1 \leq i \leq I)$ $\forall j(1 \leq j \leq n)$ $\forall k(1 \leq k \leq s_j)$-re $c_i^{jk} \in B_2 \varphi$ és $b_i \in B_2$,

akkor $\bar{q} = z_1$, $\bar{c} = \varphi$.

(xi) ha $\forall i(1 \leq i \leq I)$ $\forall j(1 \leq j \leq n)$ $\forall k(1 \leq k \leq s_j)$-re $c_i^{jk} \in BQF \cap \cap \left[B_1 T_H(Z_L) \cup B_2 \varphi\right]$

és $\exists i_0$, $b_{i_0} \in B_1$,

akkor ha

(a) nincs u $(1 \leq u \leq I)$ $h(q^u) > HL$,

ekkor $c^i = b_i q^i$ $(b_i \in B_1)$ ill. $c^i = b_i \varphi (b_i \in B_2)$;

$\bar{q}=z_1$; $\bar{c}\in\bar{U}(\{c^i \mid 1\leq i\leq I\}, w)$, $1\leq w\leq NL(\underline{A})$;

és $\bar{c}$-ban $\forall c^i(1\leq i\leq I)$ előfordul.

(b) van u $(1\leq u\leq I)$ $h(q^u)>HL$,

ekkor $\bar{q}$ a legbővebb olyan fa, amely $\forall i(1\leq i\leq I$, h $h(q^i)>HF)$ $\bar{q}\in sub(q^i)$; $c^i=b_iq^i\setminus\bar{q}$ (ha $h(q^i)>HF$) ill. $c^i=b_iq^i$ (ha $h(q^i)\leq HF$) ill. $c^i=b_i\varphi$ $(b\in B_2)$; $\bar{c}\in\bar{U}(\{c^i \mid 1\leq i\leq I\}, w)$, $1\leq w\leq NL(\underline{A})$; és $\bar{c}$-ban $\forall c^i(1\leq i\leq I)$ előfordul.

(xii) ha $\forall i(1\leq i\leq I)$ $\forall j(1\leq j\leq n)$ $\forall k(1\leq k\leq s_j)$-re $c_i^{jk}\in BQF$ és van $c_{i_1}^{j_nk_1}$ köztük, hogy $c_{i_1}^{j_1k_1}\in BQF\setminus(B_1T_H(Z_L)\cup B_2\varphi)$, akkor létezzen az $\bar{q}'$ fa, amely a legbővebb olyan fa, hogy $\forall i(1\leq i\leq I, q^i\notin T_H(Z_L))$-re $\bar{q}'\in sub(q^i)$ és nincs olyan q' fa $(q'\in sub(q^u)$, $1\leq u\leq I$, $q'\in E)$, hogy q' nem részfája (a gráfreprezentációban) $\bar{q}'$ valamely előfordulásának.

(a) Ha van $c_{i_1}^{j_1k_1}$, $c_{i_2}^{j_2k_2}\in BQF\setminus(B_1T_H(Z_L)\cup B_2\varphi)$, $j_1\neq j_2$, akkor $[1,I]$-t osztályozzuk ujra (vii) szerint olyan q^* fa segitségével, amely $\forall i(1\leq i\leq I$, $q^i\notin T_H(Z_L))$-re $q^*\geq q^i$ és $h(q^*)\leq HL$.

Ha ezt megtehetjük, akkor q^* és $q^i(1\leq i\leq I)$ (esetleg többszöri) felhasználásával képezzünk (vii)-nek megfelelő QFV-beli elemeket. Legyenek ezek c^{im} $(1\leq i\leq I$, m pedig a (vii)-nek megfelelő "csoport" (I_m) sorszáma). Legyen $c^i=b_i\varphi$ ha $b_i\in B_2$ és $c^i=b_iq^i$ ha $q^i\in T_H(Z_L)$, $h(q^i)\leq HF$, ill. $c^i=b_iq^i$, $q^i\in T_H(Z_L\cup\{e\})\setminus T_H(Z_L)$. Ekkor $\bar{q}=q^*$; $\bar{c}\in\bar{U}(\{c^i, c^{im}\}, w)$, $1\leq w\leq NL(\underline{A})$; és $\bar{c}$-ban minden c^{im}, $b_i\varphi$ legalább egyszer szerepel, valamint b_iq^i állapotok közül azok, amelyekre q^*-ban q^i nem fordul elő, és azok ahol $q^i\in T_H(Z_L\cup\{e\})\setminus T_H(Z_L)$

(b) Ha nincs j_1, j_2 hogy $j_1 \neq j_2$ $c_{i_1}^{j_1 k_1}$, $c_{i_2}^{j_2 k_2} \notin (B_1 T_H(Z_L) \cup B_2 \varphi)$ akkor $\bar{q}=\bar{q}'$, $c^i = b_i(q^i \setminus \bar{q}')$, $\bar{c} \in \bar{U}(\{c^i \mid 1 \leq i \leq I\}, w)$, $1 \leq w \leq NL(\underline{A})$, és $\bar{c}$-ban $\forall c^i (1 \leq i \leq I)$ előfordul.

(xiii) ha van $c_{i_1}^{j_1 k_1} \in QFV$, akkor

(a) ha van $c_{i_1}^{j_1 k_1}$, $c_{i_2}^{j_2 k_2} \notin (B_1 T_H(Z_L) \cup B_2 \varphi)$, $j_1 \neq j_2$ és (viii.b) teljesül, akkor (xii.a)-val megegyező módon kapjuk az S_C-beli szabályt.

(b) ha nincs j_1, j_2 hogy $c_{i_1}^{j_1 k_1}$, $c_{i_2}^{j_2 k_2} \notin (B_1 T_H(Z_L) \cup B_2 \varphi)$ és (viii.c) teljesül, akkor $\bar{q}=z_1$ valamint $c^i = b_i \varphi$ ha $b_i \in B_2$, $c^i = b_i q^i$ ha $q^i \in T_H(Z_L \cup \{e\})$.

$\forall m (1 \leq m \leq M)$-re a (vii) szerinti felbontásnak megfelelően ugy kapjuk $\forall i (\in I_m)$-re c^i-t, hogy $q_{j_1 m}$-ből (ld. (vii)) elhagyjuk (a $\setminus$ müvelet szerint) q^u-t ($u \in I_m$). Az elhagyás által meghatározott helyen $b_{j_1 k_1}^i$ e_0-t, a többi helyen a d_i levezetés által meghatározott b_{jk}^i e_1-t tesszük az E-beli részfa helyére.

$\bar{c} \in \bar{U}(\{c^i \mid 1 \leq i \leq I\}, w)$, $1 \leq w \leq NL(\underline{A})$ és $\forall c^i (1 \leq i \leq I)$ előfordul $\bar{c}$-ban.

Mielőtt a 7.12-ben adott feltétel elegendőségét igazolnánk a $\tau_{\underline{A}} \circ \tau_{\underline{B}} = \tau_{\underline{C}}$ állitás bizonyitásával, vizsgáljuk meg, hogyan szemléltethető a $\underline{C}$ 1-transzformátor konstrukciója és müködése.

Tekintsünk egy $d: p \overset{*}{\underset{\underline{A}}{\Rightarrow}} ar$, $r \overset{*}{\underset{\underline{B}}{\Rightarrow}} bq (a \in A', b \in B')$ levezetést és vele párhuzamosan egy vele ekvivalens $\underline{C}$-beli levezetést. A $\underline{C}$ 1-transzformátor müködését ugy képzelhetjük el, hogy p minden leveléhez vesszük a levél d-beli részlevezetéseit és ezekből képezünk $[B_1 T_H(Z_L) \cup B_2 \varphi]$-beli állapotot. (ld. 8.5. (1)-(3)). Ahogy haladunk p gyökere felé, az ujabb csucsok képeivel kiegészitjük ezeket az állapotokat. (ld. 8.5.(5) (xi) (a))

Amikor az állapotokban szereplő fák már elég magasak ($h(\alpha(c)) > HL$) ahhoz, hogy megállapitsuk véges-f tipus vagy véges-f elem értékéhez tartozik-e, akkor a nem ezek közé tartozó $\alpha(c)$-knek a legbővebb közös részfáját forditjuk az adott csucsnál ($\underline{C}$-ben) és $BQF \setminus \left[B_1 T_H(Z_L) \cup B_2 \varphi\right]$-beli elemeket képezünk belőlük. (ld. 8.5. (5).(xi).(b).)

A továbbiakban minden csucsból a "felhalmazódott" $\alpha(c)$-k legbővebb közös részét, a belső burkolóját forditjuk (ld. 8.5. (5).(xii).(b)). (*)

Amikor egy erős-f tipus forditási pontjához érünk, ott "megelőlegezzük" $\underline{C}$-beli forditásunkban a külső burkolónak megfelelő képet. (ld. 8.5. (5). (xiii).(a)). Ezután figyelemmel követjük, hogy a d levezetésben valóban előáll-e a megelőlegezett képrész (8.5. (5) (vii) és (xiii).(b)).

Amikor az "előleg" d-ben is előállt, akkor (*)-nak megfelelő állapotokba kerülünk, s ennek megfelelően kezeljük azt az esetet is, ha ez a csucs egyben egy következő erős-f tipus forditási pontja (8.5. (5).(xii).(a)).

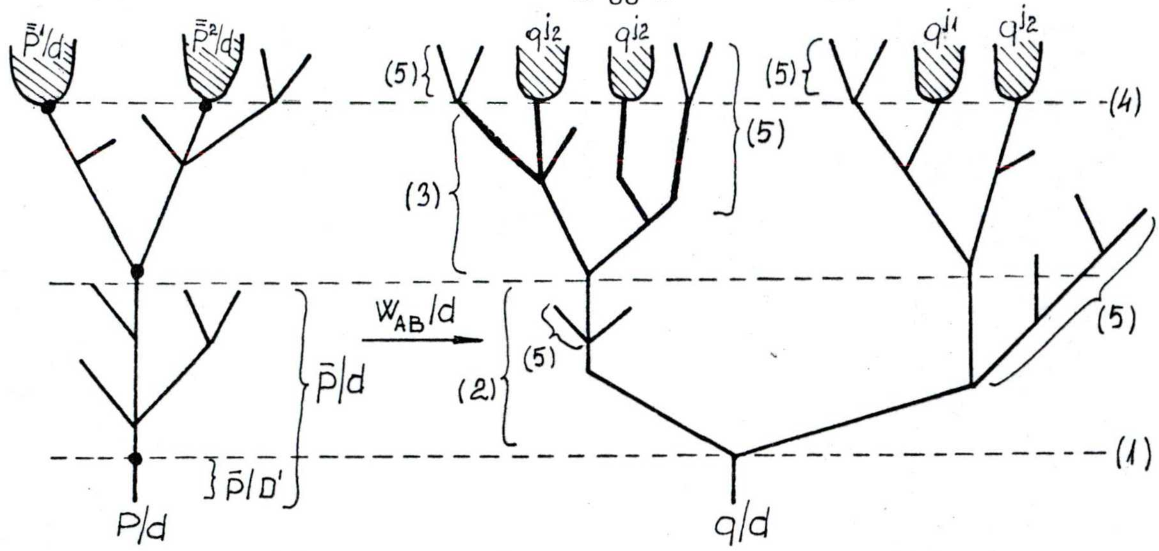
Ha a forditási pontban adott "előleg" nem felel meg d-nek vagy a feltételezett részlevezetések $\mathcal{T}_{\underline{A}} \circ \mathcal{T}_{\underline{B}}$-ben nem léteznek, az adott $\underline{C}$-beli levezetés nem lesz folytatható. (Ennek biztositására szolgál 8.5.(5) (vii)-(viii) ill. (i)-(vii).)

9. A feltétel elegendősége

Legyen az $\underline{A}$ és $\underline{B}$ l-transzformátor képorientált és teljesüljön rájuk a 7.12-ben adott feltétel. Vizsgáljunk meg egy tetszőleges $d{:}p \overset{*}{\underset{\underline{A}}{\Longrightarrow}} ar$, $r \overset{*}{\underset{\underline{B}}{\Longrightarrow}} bq$ ($a \in A'$, $b \in B'$) levezetést abból a szempontból, hogy leirható-e $QFV \cup BQF$-beli állapotokkal az egyes részfák képeinek eltérése d-ben. Tekintsük d-nek egy olyan felbontását, ami megfelel 6.15. (i)-(iii) feltételeinek. Legyen R_j és Q_{jl} értelmezése ugyancsak 6.15. (iv)-nek megfelelő.

Legyen $I_0 \subseteq [1, s/d]$, hogy $\forall j(\in I_0)$-ra $\exists u_j (1 \leq u_j \leq s/d)$, Q_{ju_j} végtelen.
Ez Q_{jl} értelmezése és a véges-f tipus definiciója alapján azt is jelenti, hogy van D_j véges-f tipus, hogy $q^j/d = VAL(D_j)$ $(j \in I_0)$, s igy $h(q^j/d) \leq HF < HL$.
Ha $D=\{d\}$ gyenge-f elem, akkor $h(VAL(D)) \leq HF$ és $\forall j(\notin I_0,\ 1 \leq j \leq s/d)$-re
$q^j/d = \bar{q}_j(q^{k_1}/D, \dots, q^{k_l/D})$, $h(\bar{q}_j) \leq h(VAL(D))$.
Ha Q_m $(\bar{a}/d, b_1/d, \dots, b_s/d)$-t a 8.4.-ben adott módon értelmezzük, és $m(\notin I_0,\ 1 \leq jn \leq s/d)$-re Q_m véges, akkor $h(q^m/d) \leq HV < HL$. (*)
Ha van k_1, k_2 $(1 \leq k_1 \leq s/d,\ 1 \leq k_2 \leq s/d,\ k_1 \neq k_2,\ k_1, k_2 \notin I_0)$, hogy q^{k_1} <u>erős-f</u> q^{k_2}, akkor vagy $D=\{d\}$ véges-f elem, vagy $d \in D$ és D erős-f tipus, ha nincs (és nem gyenge-f elem D), akkor $\forall_{j,l}(1 \leq j \leq s/d,\ 1 \leq l \leq s/d;\ l, j \notin I_0)$-re $q^j = q^l$, s igy a különbség leirására $e(\in QF)$ megfelelő. (**)
Határozzuk meg $D=\{d\}$-ben $\bar{p}/d$-nek azt a felbontását, amelyet egy tetszőleges D véges-f elemre 7.10.-ben D'-vel ill. D"-vel jelöltünk (azaz a legszükebb olyan részfát, ahol más nem teljesiti 6.13. (vi) "összefüggőségi" feltételét.) Képezzük ehhez a D' által meghatározott felbontáshoz a 6.13. (vii)-nek megfelelő D^* halmazt. Világos, hogy ha $\mathcal{T}(D^*)$ véges, akkor D' véges-f elem (s igy D is!), ha pedig $\mathcal{T}(D^*)$ végtelen, akkor D^* erős-f tipus és $d \in D^*$.

Ha D' véges-f elem, akkor $h(q^j/d) \leq HF(j \notin I_0;\ 1 \leq j \leq s/d)$.
Ha $d \in D^*$ és D^* erős-f tipus, akkor vizsgáljuk meg $\bar{\bar{p}}/d$ részfáit a gyökere felől a levelek felé haladva. Azaz ugyanezen d levezetés olyan felbontásából kiindulva ismételjük meg az eddigieket, ahol ha $\bar{\bar{p}}/d = f(\bar{\bar{p}}_1,\dots,\bar{\bar{p}}_n)$, akkor $\bar{p}/d' = \bar{p}/d(f(\bar{\bar{p}}_1,\dots,e_w,\dots,\bar{\bar{p}}_n))$, $1 \leq w \leq n$, $\bar{\bar{p}}/d' = \bar{\bar{p}}_w$.
Mindezt minden $\bar{\bar{p}}$-beli (a gyökerétől a levelei felé vezető) uton addig folytassuk, amig gyenge-f elemhez, véges-f elemhez nem jutunk (esetleg (*)-nak vagy (**)-nak megfelelő esethez), illetve ha valamely uton az áttéréseknél ujra és ujra erős-f tipushoz jutunk, akkor addig folytassuk ezt az eljárást, amig az ezen felbontásnál nyert D' felbontás megegyezik az eredetivel (azaz a d-hez tartozóval).
Ez az utóbbi eset azt jelenti, hogy q^j/d-nek ($j \notin I_0$, $1 \leq j \leq s/d$) olyan felbontását kapjuk (az összes megvizsgált utat figyelembe véve), hogy
$q^j/d = \bar{q}^j(q_1,\dots,q_1,\dots,q_w,\dots,q_w,\ q_{j,w+1},\dots,q_{j,w+v})$ ahol $q_1,\dots,q_w$ az egyes erős-f tipust szolgáltató utakon képezhető belső burkoló, $q_{j,w+1},\dots,q_{j,w+v}$ pedig valamely véges-f tipus vagy véges-f elem értékében előforduló fa része. Mivel minden esetben a megjelölt uton haladva erős-f tipushoz jutunk, igy az is igaz, hogy $\bar{q}^j$ valamely $\bar{D}$ erős-f tipusra részgráfja $VAL(\bar{D})$-nak.
Ez pedig azt jelenti, hogy $\bar{q}^j(e_1,\dots,e_1,\dots,e_w,\dots,e_w,\ q_{j,w+1},\dots,q_{j,w+v}) =$
$= q_j^*$ esetén $h(q_j^*) \leq \underbrace{HS(\underline{A}) * HS(\underline{B})}_{(1)} + \underbrace{HF}_{(2)} + \underbrace{HF}_{(3)} + \underbrace{HS(\underline{A}) * HS(\underline{B})}_{(4)} + \underbrace{\max(HF,HV)}_{(5)}$.



9.1. <u>ábra</u> (1) egy csucsból fordítható kép magasságának maximuma (D' és D'' esetén $h(W_{AB}(\bar{\bar{p}}/D'))$ és $h(W_{AB}(\bar{\bar{p}}/D''))$ közti eltérés)

(2) D és D' esetén $h(W_{AB}(\bar{p}/D))$ és $h(W_{AB}(\bar{p}/D'))$ közti eltérés, ez a részgráf $VAL(D^*)$-része ("oldalágak" nélkül) igy nem lehet HF-nél magasabb.

(3) $\bar{\bar{p}}/d$ részfáinak vizsgálata során nyert képrész, része $VAL(D^*)$-nak ("oldalágak" nélkül), igy nem lehet HF-nél magasabb.

(4) egy csucsból fordítható kép magasságának maximuma (az adott uton $\bar{\bar{p}}/d$-ben utoljára megvizsgált csucsból)

(5) "oldalágak": véges-f tipusok, véges-f elemek, (∗)-nak megfelelő esetek.

Az eddigiek alapján tehát kimondhatjuk a következőt:

9.2. <u>Állítás</u>

Legyen $d: p \overset{*}{\underset{\underline{A}}{\Longrightarrow}} ar$, $r \overset{*}{\underset{\underline{B}}{\Longrightarrow}} bq$ ($a \in A'$, $b \in B'$), $\bar{\bar{p}} \in sub^*(p)$, $\bar{\bar{p}} \overset{*}{\underset{\underline{A}}{\Longrightarrow}} \bar{a}\,\bar{\bar{r}}$, $\bar{\bar{r}} \overset{*}{\underset{\underline{B}}{\Longrightarrow}} b_1 q^1, \ldots, \bar{\bar{r}} \overset{*}{\underset{\underline{B}}{\Longrightarrow}} b_s q^s$ (és ez $\bar{\bar{p}}$ összes részlevezetése d-ben).

Ha $\underline{A}$ és $\underline{B}$ képorientált és a 7.12.-nek megfelelő 1-transzformátorok, akkor minden $j(1 \leqq j \leqq s)$-re van I_0 és I_1
$(I_0 \cap I_1 = \emptyset;\ I_0,\ I_1 \subseteq [1,s])$, hogy

(i) $h(q^j) \leqq HL \quad (j \in I_0)$

(ii) $\exists q^*(\in T_H(Z_L))$ hogy $\forall j(\in I_1)$-re

$q^j = \bar{q}^j(q^*,\dots,q^*)$ vagy $q^* = \bar{q}^j(q^1,\dots,q^s)$

és $h(\bar{q}^j) \leqq HL$.

Bizonyitás

Az előzőekhez azt kell meg hozzáfüznünk, hogy a 7.12. feltétel azt is kimondja, hogy minden D erős-f tipusra $u_f(D)$ egyértelmü. Igy megtehetjük azt, hogy egy erős-f tipushoz tartozó levezetés esetén a forditási pont fölött a belső burkolót, alatta a külső burkolót választjuk q^*-nak, és $\bar{q}^j$-t ehhez viszonyitva határozzuk meg.

9.3. Állitás

Legyen $\bar{p}(ae) \overset{*}{\Longrightarrow}_{\underline{A}} a_0\bar{r}$, $a_0 \in A'$. Ebben az esetben $p \overset{*}{\Longrightarrow}_{\underline{A}} ar$, $a \in A_1$ akkor és csakis akkor ha $p \overset{*}{\Longrightarrow}_{\underline{C}} (a,\varphi)z_1$.

Bizonyitás

A bizonyitást $h(p)$ szerinti teljes indukcióval végezzük. Ha $h(p)=0$, akkor $p \longrightarrow ar \in S_A$ és igy 8.5. (1) szerint $p \longrightarrow (a,\varphi)z_1 \in S_C$ és megforditva.

Tegyük fel, hogy $h(p) > 0$.

$p = f(p_1,\dots,p_n)$; $f \in F_n$; $f(a_1e_1,\dots,a_ne_n) \longrightarrow a\bar{\bar{r}}(e_{11},\dots,e_{ns_n}) \in S_A$;

$p_i \overset{*}{\Longrightarrow}_{\underline{A}} a_ir_i \quad (i=1,\dots,n)$.

Mivel $\underline{A}$ képorientált, $a \in A_2$, $a_0 \in A' \subseteq A_1$ igy $a_1,\dots,a_n \in A_2$ és $p_i \overset{*}{\Longrightarrow}_{\underline{C}} (a_i,\varphi)z_1$ $(i=1,\dots,n)$.

8.5. (1) ill. 8.5. (4) szerint $f((a_1\varphi)e_1,\ldots,(a_n\varphi)e_n) \to (a,\varphi)z_1 \in S_C$.
Igy $p \overset{*}{\underset{C}{\Rightarrow}} (a,\varphi)z_1$.

9.4. Állitás

Ha $d: p \overset{*}{\underset{A}{\Rightarrow}} ar$, $r \overset{*}{\underset{B}{\Rightarrow}} bq$, $a \in A'$, $b \in B'$ akkor $p \overset{*}{\underset{C}{\Rightarrow}} (a,\{be\})q$.

Bizonyitás

Legyen $\bar{p} \in sub^*(p)$. $h(\bar{p})$ szerinti teljes indukcióval megkonstruáljuk a $p \overset{*}{\underset{C}{\Rightarrow}} (a,\{be\})q$ levezetést.

Legyen $h(\bar{p}) = 0$. Tekintsük $\bar{p}$-nak az összes d-beli részlevezetését.
Ha $p=\bar{p}$, akkor 8.5. (3) szerint $p \to (a, \{be\})\, q \in S_C$.
Ha $p \neq \bar{p}$, akkor képezzünk $[B_1T_H(Z_L) \cup B_2\varphi]$-beli elemet minden előfordulásból, s ezekből $\bar{U}$ (BQF, i)-beli elemeket az előfordulások számának és sorrendjének megfelelően. (i értékét a $\bar{p}$ alatti csucsnál alkalmazott S_A-beli szabályból határozhatjuk meg.)
Ha $\bar{p} \to ar$, $a \in A_2$, a $\bar{p}$ d-beli levezetése, akkor 8.5. (1) (ill. 9.3.) szerint járunk el.
Legyen $h(\bar{p}) > 0$. $\bar{p} = f(p_1,\ldots,p_n)$, $f \in F_n$. Tegyük fel, hogy a $p_j \Rightarrow (a, \bar{c}_j)q_j$ levezetéseket már megkonstruáltuk $(j=1,\ldots,n)$.
Legyen $f(a_1e_1,\ldots,a_ne_n) \to a\bar{r}(e_{11},\ldots,e_{ns_n})$, $\bar{r}(b^i_{11}e_{11},\ldots,b^i_{ns_n}e_{ns_n}) \overset{*}{\underset{B}{\Rightarrow}}$
$\overset{*}{\underset{B}{\Rightarrow}} b_i\bar{q}^i$ $(i=1,\ldots,I)$, és legyen ez az összes részlevezetés.
Ekkor az $f((a_1,\bar{c}_1)e_1,\ldots,(a_n,\bar{c}_n)e_n) \to (a,\bar{c})\bar{q}$ szabály akkor lesz S_C-ben, ha 8.5.-nek megfelel. Amennyiben azonban $\bar{c}_j$ $(j=1,\ldots,n)$ a 9.2.-nek megfelelően képzett fákból és a fenti részlevezetésekből a d levezetés alapján előállitott $\bar{U}$(BQF $\cup$ QFV, w)-beli elem, akkor 8.5. esetei szerint haladva ellenőrizhető, hogy a szükséges szabály S_C-ben lesz (A $\bar{c}$-ben előforduló BQF$\cup$QFV-beli elemeket 8.5. előirásainak megfelelően képezzük, miként $\bar{q}$-t

is. $\bar{c} \in \bar{U}(BQF \cup QFV, w')$ lesz, w' értékét a $\bar{p}$ gyökere alatti csucsnál alkalmazott S_A-beli szabályból határozhatjuk meg (ha ilyen nincs, azaz $p=\bar{p}$, akkor $w'=1$).)

9.5. Állitás

Ha $p \overset{*}{\Rightarrow}_{\underline{C}} (a, \{be\})q$, $a \in A'$, $b \in B'$ akkor $\exists r$, hogy $p \overset{*}{\Rightarrow}_{\underline{A}} ar$, $r \overset{*}{\Rightarrow}_{\underline{B}} bq$.

Bizonyitás

h(p) szerinti teljes indukcióval bizonyitsuk be a következő állitást (melyből a fenti állitás automatikusan következik):

Ha $p \overset{*}{\Rightarrow}_{\underline{C}} (a,\bar{c})q$, $a \in A_1$, akkor $\exists r$, hogy minden c-re, ($c \in BQF \cup QFV$ és c előfordul $\bar{c}$-ben) $p \overset{*}{\Rightarrow}_{\underline{A}} ar$, $r \overset{*}{\Rightarrow}_{\underline{A}} \beta(c)q_c$,

ahol: (i) ha $c=b\varphi$ akkor $q_c \in T_H(Z_L)$.

(ii) ha $c \in B_1 T_H(Z_L)$ akkor $q_c = \alpha(c)$.

(iii) ha $c \in BQF \setminus [B_1 T_H(Z_L) \cup B_2 \varphi]$ akkor $q_c = \alpha(c)(q, \dots, q)$.

(iv) ha $c \in QFV$ akkor van $c_1, \dots, c_w$ hogy $c_1, \dots, c_w$ mindegyike előfordul $\bar{c}$-ban és c előfordul $c_1, \dots, c_w$ között, valamint $q = \alpha(c)(q_{c_1}, \dots, q_{c_w})$.

Az állitás bizonyitása végett legyen $h(p) = 0$.

Ekkor $p \to (a, \bar{c})q \in S_C$. Ehhez lenni kell $p \to ar$ szabálynak S_A-ban és $r \overset{*}{\Rightarrow}_{\underline{B}} b_i q_i$ $(1 \leq i \leq I)$ levezetéseknek. Minden c-re ami $\bar{c}$-ban előfordul van i_c, hogy $b_{i_c} = \beta(c)$, $q_{i_c} = \alpha(c)$. Mivel ha $h(p) = 0$ csak (i) és (ii) állhat fönn, az állitás $h(p) = 0$-ra igaz.

Legyen $h(p) > 0$. Ekkor $p = f(p_1, \dots, p_n)$, $p_j \overset{*}{\Rightarrow}_{\underline{C}} (a, \bar{c}_j)\, q_j$ $(1 \leq j \leq n)$,

$\pi = f((a_1, \bar{c}_1)e_1, \dots, (a_n, \bar{c}_n)e_n) \to (a, \bar{c})\bar{q} \in S_C$,

$q = \bar{q}(q_1, \dots, q_n)$.

9.3. alapján $p_j \overset{*}{\Rightarrow}_{\underline{C}} (a, \varphi)z_1$, ha $a \in A_2$.

8.5. alapján van $\mathcal{T}_A = f(a_1e_1,\dots,a_ne_n) \to a\bar{r} \in S_A$ szabály.

Tegyük fel, hogy $p_j \overset{*}{\underset{\underline{C}}{\Rightarrow}} (a,\bar{c}_j)q_j$-re már igaz az állitás $(j=1,\dots,n)$.

Ha $\mathcal{T}$ 8.5. (2) vagy (3) alapján került S_C-be akkor az állitás automatikusan igaz (a $h(p) = 0$ eset mintájára).

Legyen $c \in BQF \cup QFV$ és forduljon elő $\bar{c}$-ban. Minden ilyen c-hez van 8.5. (5) (iv) szerint $r\mathcal{T}_A$-nak levezetése, amelynek figyelembevételével áll elő c az adott levezetéshez 8.5. (5) (iv) alapján kapcsolódó c_i^{jk} elemekből.

Legyen ez a 8.5. (5) (iv) szerinti i_0-adik levezetés. Ekkor $r\mathcal{T}_A$-t és a 8.5. (5) (viii) szerint képzett q^{i_0}-t kiegészitve a $c_{i_0}^{jk}$ elemekhez az indukciós hipotézis szerint létező r^j és $q_{c_{i_0}}^{jk}$ fákkal kapunk egy r és q_c fát. $(1 \leq j \leq n,\ r \in T_G(Y_K),\ q_c \in T_H(Z_L))$.

Innen 8.5. (5) alapján már egyszerüen ellenőrizhető, hogy állitásunk igaz, hisz

(1) ha $c = b\varphi$ akkor q_c megfelelő.

(2) ha $c \in B_1T_H(Z_L)$ akkor $\alpha(c) = q_c$ (ld. 8.5. (5) (ix), (x))

(3) ha $c \in BQF \setminus [B_1T_H(Z_L) \cup B_2\varphi]$ akkor $q_c = \alpha(c)\ (q,\dots,q)$.
(ld. 8.5. (5) (xi), (xii.b)).

(4) ha $c \in QFV$ akkor 8.5. (5) (vii) szerint épp megfelelő $c_1,\dots,c_w$ elemekhez jutunk és $q = \alpha(c)\ (q_{c_1},\dots,q_{c_w})$ lesz.
(ld. 8.5. (5), (xii.a), (xiii.a)).

10. A feltétel eldönthetőségéről

Az eddigiek során megadtuk annak szükséges és elegendő feltételét hogy két tetszőleges l-transzformátor által indukált transzformáció kompoziciója mikor lesz maga is l-transzformáció. Fontos kérdés, hogy a feltétel fennállása algoritmikusan eldönthető-e tetszőleges $\underline{A}$ és $\underline{B}$ l-transzformátor esetén. Ez a kérdés általános esetben nyitott marad, de $\underline{A}$-ra illetve $\underline{B}$-re kiróhatóak olyan feltételek, amelyek mellett a 7.12.-ben adott feltétel algoritmikusan eldönthető lesz.

A további mondandónk egyszerüsitése érdekében definiáljuk az összefüggő 1-transzformátor fogalmát.

10.1. <u>Definició</u>

Az $\underline{A} = (T_F(X_J), A, T_G(Y_K), A', S_A)$ 1-transzformátort összefüggőnek nevezzük, ha minden $\mathfrak{r}\,(\in S_A)$ szabályhoz van olyan $p \overset{*}{\underset{\underline{A}}{\Longrightarrow}} ar$ $(a \in A')$ levezetés, hogy abban $\mathfrak{r}$-t felhasználjuk.

10.2. <u>Állitás</u>

Minden $\underline{A}$ 1-transzformátorhoz megadható olyan $\underline{A}^{*}$ összefüggő 1-transzformátor, amelynek állapothalmaza, végállapothalmaza, szabályhalmaza része $\underline{A}$ megfelelő komponensének, és valamennyi végállapotba $\underline{A}$-beli levezetés $\underline{A}^{*}$-ban azonos módon megismételhető.

Ezt az állitást itt nem bizonyitjuk, egy igen szellemes bizonyitása található [10] -ben illetve [12]-ben található egy f-transzformátorokra adott bizonyitás, amely analóg módon megismételhető az 1-transzformátorok esetére.

Megjegyezzük, hogy mind az összefüggőség fogalma, mind pedig a két bizonyitás ötlete analóg a [9]-ben adott redukált automata fogalmával és létezésének bizonyitási módjával.

Vizsgáljuk meg, milyen $\underline{A}$ és $\underline{B}$ 1-transzformátorokra tudjuk megadni a 7.12.-ben mondott feltétel eldöntési algoritmusát!

10.2. és 8.2., 8.3. alapján feltehetjük, az általánosság korlátozása nélkül, hogy $\underline{A}$ és $\underline{B}$ képorientált és összefüggő.

Először vegyük sorra a már ismert feltételeket.

(a) Ha $\underline{A}$ lineáris, akkor $\mathcal{T}_{\underline{A}} \circ \mathcal{T}_{\underline{B}}$-ben nem lehet olyan levezetés, amelyben a kiindulási fa valamely részfájának két különböző képe van, s igy a 7.12.-ben mondott feltétel nyilván teljesül. Hasonlóképp nyilván teljesül akkor is, ha a $\underline{B}$ 1-transzformátor determinisztikus. (Mindez megfelel annak az ismert eredménynek, hogy $\mathcal{L} = \mathcal{L}\mathcal{L} \circ \mathcal{L} = \mathcal{L} \circ \mathcal{D}\mathcal{L}$.)

(b) A fenti két megfigyelés egyszerüen tovább finomitható. A linearitás feltétele nyilván helyettesithető azzal, hogy $\underline{A}$ szabályai közül azok, amelyeknek jobb oldala A_1-beli (kép-) állapotot tartalmaz, lineárisak. $\underline{B}$ determinisztikusságával egyenértékü eredményt ad az is, ha csak azt követeljük meg, hogy arra a $\underline{B}^*$ 1-transzformátorra, amely abban tér el $\underline{B}$-től, hogy végállapothalmaza B_1-gyel (a képállapotok halmazával) egyezik meg, $\mathcal{T}_{\underline{B}^*}$ függvény legyen. Az, hogy egy 1-transzformáció függvény-e, [6] és [7] szerint algoritmikusan eldönthető.

(c) Az előzőekben olyan eseteket láttunk, amikor a 7.12.-ben mondott feltétel ugy teljesül, hogy $\mathcal{T}_{\underline{A}} \circ \mathcal{T}_{\underline{B}}$-ben egyáltalán nincs f-tulajdonságu levezetés.
[12]-ben megtalálhatjuk annak bizonyitását, hogy algoritmikusan eldönthető véges sok f-tulajdonságu levezetés van-e $\mathcal{T}_{\underline{A}} \circ \mathcal{T}_{\underline{B}}$-ben. Nyilván ilyenkor a 7.12.-ben mondott feltétel teljesül: nincs erős-f tipus, véges-f tipus és csak véges sok különböző értékü gyenge-f elem és véges-f elem lehet $\mathcal{T}_{\underline{A}} \circ \mathcal{T}_{\underline{B}}$-ben.

(d) Ismert, hogy az általánositott szekvenciális gépek ekvivalencia problémája (s igy, mivel azok unáris véges ábécéken operáló 1-transzformátoroknak tekinthetők, az 1-transzformátorok ekvivalencia problémája is) megoldhatatlan. A következő megfontolásaink az általánositott szekvenciális gépek ekvivalencia problémájának és a 7.12.-ben megadott fel-

tétel eldönthetőségének kapcsolatára (illetve 10.11.-ben megfogalmazandó sejtésünk szerint, függetlenségére) vonatkoznak.
Ehhez definiáljuk az l-transzformációk egy osztályát, amelyet az általánositott szekvenciális gépeknek feleltethetünk meg. Egy eldöntési algoritmus és példák segitségével rávilágitunk a két probléma különbözőségére. Ezután megadunk egy olyan algoritmikusan eldönthető tulajdonságot az l-transzformátorokra, amelynek megléte esetén a 7.12.-ben mondott feltétel algoritmikusan eldönthető lesz.

10.3. Definició

Az $\underline{A} = (T_F(X_1), A, T_G(X_1), A', S_A)$ l-transzformátort szekvenciálisnak nevezzük, ha

(i) $F = F_1$, $G = G_1$.

(ii) $NL(\underline{A}) = 1$.

10.4. Definició

Az $\underline{A} = (T_F(X_1), A, T_G(Y_K), A', S_A)$ l-transzformátort kvázi-szekvenciálisnak nevezzük, ha

(i) $F = F_1$.

(ii) $NL(\underline{A}) = 1$.

Jelölje $\underline{A}_0$ a következő l-transzformátort:

(i) $\underline{A}_0 = (T_F(X_J), \{a_0,a_1\}, T_G(X_J), \{a_1\}, S_A)$, $G'=F \cup G_2$, $G_2=\{g\}$.

(ii) $\forall i(1 \leq i \leq J)$-re $x_i \longrightarrow a_0x_i$ és $x_i \longrightarrow a_1g(x_i,x_i)$ S_A-ban van.

(iii) $\forall f(f \in F_n)$-re $f(a_0e_1,\dots,a_0e_n) \longrightarrow a_0f(e_1,\dots,e_n)$ és

$$f(a_0e_1,\dots,a_0e_n) \longrightarrow a_1g(f(e_1,\dots,e_n), f(e_1,\dots,e_n)) \ S_A\text{-ban van.}$$

Világos, hogy $\mathcal{T}_{\underline{A}} = \{(p,g(p,p)) \mid p \in T_F(X_J)\}$.

Jelölje $\underline{B}_0(\underline{A},\underline{B})$ a tetszőleges $\underline{A}$, $\underline{B}$ l-transzformátorokra a következő l-transzformátort (tegyük fel, hogy $A \cap B = \emptyset$):

(i) $\underline{A} = (T_G(X_J),\ A,\ T_H(Z_L),\ A',\ S_A)$, $\underline{B} = (T_G(X_J),\ B,\ T_H(Z_L),\ B',\ S_B)$.

(ii) $\underline{B}_0(\underline{A},\underline{B}) = (T_{G'}(X_J),\ A \cup B \cup \{v\},\ T_H(Z_L),\ \{v\}, S_A \cup S_B \cup S_0)$.

(iii) $\exists g : g \in G_2,\ g \in H_2$

(iv) $\forall a(\in A')$-re $\forall b(\in B')$-re $g(ae_1, be_2) \longrightarrow vg(e_1,e_2)$ S_0-ban van.

Világos, hogy $\tau_{\underline{B}_0(\underline{A},\underline{B})} = \{(g(p_1,p_2),\ g(q_1,q_2)) \mid (p_1,q_1) \in \tau_{\underline{A}},\ (p_2,q_2) \in \tau_{\underline{B}}\}$.

10.5. Állitás

Ha $\underline{A}$ és $\underline{B}$ kvázi-szekvenciális 1-transzformátorok, akkor $\tau_{\underline{A}_0} \circ \tau_{\underline{B}_0(\underline{A},\underline{B})}$-ről eldönthető, hogy indukálható-e 1-transzformátorral.

Bizonyitás

Tekintsünk egy tetszőleges $d: p \overset{*}{\Longrightarrow}_{\underline{A}_0} q(p,p)$, $g(p,p) \overset{*}{\Longrightarrow}_{\underline{B}_0(\underline{A},\underline{B})} v\ g(q_1,q_2)$ levezetést.

$\forall p'(\in sub^*(p))$-re root(p')-höz rendeljük hozzá $(a_0,[a,b])$-t, ha $p' \overset{*}{\Longrightarrow}_{\underline{A}} aq_1'$, $p' \overset{*}{\Longrightarrow}_{\underline{B}} bq_2'$ részlevezetés d-ben.

Legyen az igy kapható cimkék száma K_0.

Világos, ha $h(p) > K_0$, akkor van $p = p_1(p_2(p_3))$ felbontás, hogy p_2 és p_3 gyökerének cimkéje megegyezik. Ekkor $g(q_1,q_2) = g(q_{11}(q_{21}(q_{31})),\ q_{12}(q_{22}(q_{32})))$ vagy $g(q_1,q_2) = g(q_{11}(q_{21}(q_{31})), q_{12})$ vagy $g(q_1,q_2) = g(q_{11}q_{12}(q_{22}(q_{32})))$ vagy $g(q_1,q_2) = g(q_{11},q_{12})$, ahol p_3 képei q_{31}, q_{32} p_2 képei q_{21}, q_{22} (ha részfái q_1-nek ill. q_2-nek). A további felbontásai $g(q_1,q_2)$-nek a cimkék azonossága és $\underline{A}$, $\underline{B}$ feltételezhető képorientáltsága miatt nem lehetségesek. Nyilvánvaló, hogy a d-beli részlevezetések felhasználásával mind $p_1(p_3)$-nak, mind $p^i = p_1(\underbrace{p_2(\ldots(p_2}_{i\ db}(p_3))\ldots))$-nak $(i \geq 1)$ összeállitható $\tau_{\underline{A}_0} \circ \tau_{\underline{B}_0(\underline{A},\underline{B})}$-beli levezetése. Ezt az eljárást redukciónak, ill. iterációnak fogjuk nevezni.

A továbbiakban feltesszük, (ezen bizonyitásunk során), hogy $h(p_2) \leq K_0$.

Ha van a d-levezetésben olyan felbontás, ahol $h(q_{21}) = h(q_{22}) = 0$ vagy q_{21} és q_{22} nem részfája q_1-nek ill. q_2-nek, akkor hajtsuk végre a $p_1(p_3)$ redukciót. Ezt mindaddig ismételjük meg, amig olyan d' levezetéshez nem jutunk, amelyben ilyen felbontás már nincs.

Világos, hogy $g(q_1, q_2)/d = g(q_1,q_2)/d'$.

Vizsgáljuk meg a következő eseteket:

(i) $h^*(q_{2j}) > 0$, $h^*(q_{2,3-j}) = 0$, $q_{3,3-j} \doteq q_{3-j}$ $(1 \leq j \leq 2)$.

(ii) $h^*(q_{2j}) > h^*(q_{2,3-j}) > 0$ $(1 \leq j \leq 2)$.

(iii) $h^*(q_{21}) = h^*(q_{22}) > 0$ és q_{31} <u>erős-f</u> q_{32}.

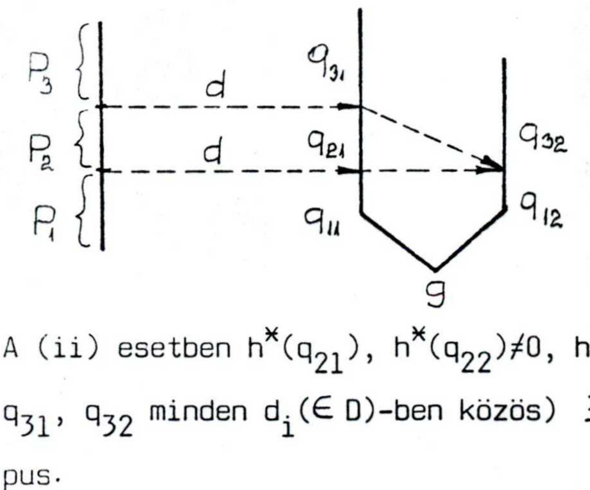
(iv) Az (i)-(iii) nem eredményezi, hogy $\tau_{\underline{A_0}} \circ \tau_{\underline{B_0}}(\underline{A},\underline{B}) \in \mathcal{L}$.

Itt $h^*(q)$ alatt a q fában a leghosszabb olyan gyökértől levélhez vezető ut hosszát értjük, ahol a levél E-beli ($q \in T_H(Z_L \cup E)$, $q \notin T_H(Z_L)$).

Tekintsük a $D = \{d_i \mid i \in N\}$ halmazt, ahol d_i a p^i-nek megfelelő iterációval nyert levezetés.

Az (i) esetben egyszerüen ellenőrizhető, hogy D véges-f tipus.

Legyen $(a_0, [a,b])$ $p_2(p_3)$ gyökerének cimkéje. A 8.3.-ban definiált $Q_m(a;b_1,\ldots,b_K)$ erdőről, mint ott elmondtuk, eldönthető hogy véges-e. Ha $h^*(q_{2j}) = 0$ és $Q_j(a_0;\ a,b)$ végtelen, akkor világos hogy p_3-at más részfákra cserélve végtelen sok különböző értékü véges-f tipushoz jutunk.

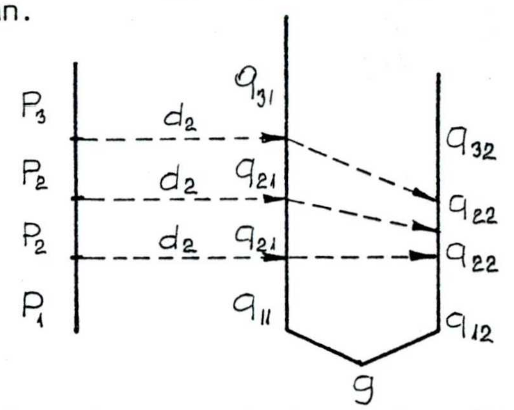


10.5.1. <u>ábra</u>

Az (i) eset szemléltetése.

A (ii) esetben $h^*(q_{21})$, $h^*(q_{22}) \neq 0$, $h^*(q_{21}) \neq h^*(q_{22})$ alapján (mivel q_{11}, q_{12}, q_{31}, q_{32} minden $d_i (\in D)$-ben közös) $\exists M$, hogy $D_M = \{d_i \mid d_i \in D,\ i > M\}$ erős-f tipus.

Ekkor $\forall n(n>M)$-re $D_n = \{d_i \mid d_i \in D,\ i>n\}$ is erős-f tipus. A $VAL(D_n)$-nek megfelelő gráfban $(\underbrace{q_{21}(\ldots(q_{21}}_{n\ db}(e))\ldots)$ ill. $\underbrace{q_{22}(\ldots(q_{22}}_{n\ db}(e))\ldots)$-ből származóan) van legalább $n \cdot |h^*(q_{21}) - h^*(q_{22})|$ hosszuságu ut. Ez pedig azt jelenti, hogy $\tau_{\underline{A}_0} \circ \tau_{\underline{B}_0(\underline{A},\underline{B})}$-ben végtelen sok különböző értékü erős-f tipus van.

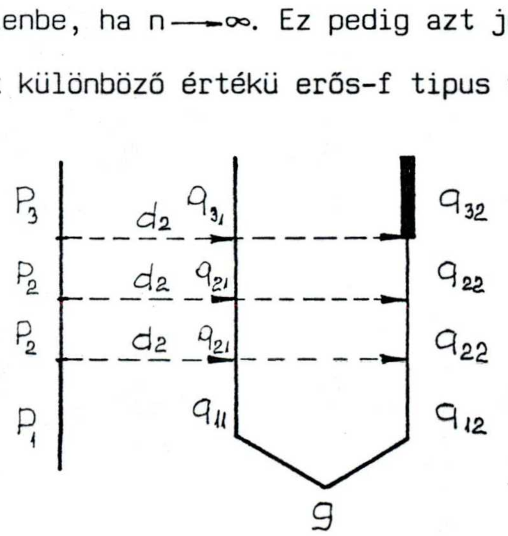


10.5.2. ábra

A (ii) eset szemléltetése, a d_2 levezetés ábrázolásával.

A (iii) esetben vegyük észre, hogy bármilyen is a p_1 fa, annak bármely p' részfájára $p'(p_2(p_3))$ erős-f tulajdonságu és 6.7. (v) is szükségképp teljesül.

Igy $D_n = \{d_i \mid i>n\}$ egy olyan felbontással ahol $\bar{p}/D_n = p_1(\underbrace{p_2(\ldots(p_2}_{n\ db}(e))\ldots))$, erős-f tipus lesz, és a $VAL(D_n)$ gráfbeli leghosszabb (gyökértől levélhez vezető) ut hossza monoton nőve tart a végtelenbe, ha $n \to \infty$. Ez pedig azt jelenti, hogy $\tau_{\underline{A}_0} \circ \tau_{\underline{B}_0(\underline{A},\underline{B})}$-ben végtelen sok különböző értékü erős-f tipus van.

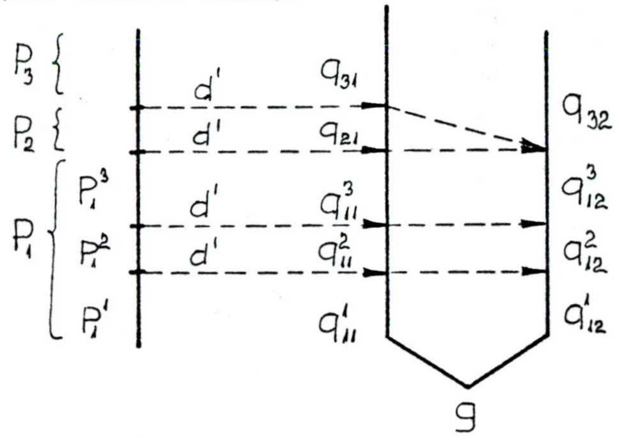


10.5.3. ábra

A (iii) eset szemléltetése d_2 ábrázolásával.

$d_2 \in D_2$ lévén, $VAL(D_2)$-nek $g(q_{11}(q_{21}(q_{21}(e))),\ q_{12}(q_{22}(q_{22}(e))))$ felel meg.

A (iv) eset az eddigiek alapján azt jelenti, hogy a (ii) és a (iii) esetek egyáltalán nem fordulhatnak elő. Vegyük azonban azt is figyelembe, hogy az (i) esetben VAL(D) = $q_{1j}(q_{2j}(q_{3j}))$ s igy p_1 olyan felbontásainál amelyek nem (i)-nek felelnek meg, szükségképpen (iii)-nak kell hogy megfeleljenek (ld. 10.5.4. ábra).



10.5.4. ábra

$q_{11}^3(q_{21}(q_{31})$ erős-f $q_{12}^3(q_{32})$ szükségképp a kiindulási felbontás $(p_1(p_2(p_3))=p)$ tulajdonsága miatt.

Egyébként d' bármely felbontásánál (a (iv) esetben) $h^*(q_{21}) = h^*(q_{22}) > 0$ kell hogy legyen, és $q_{31} \leqq q_{32}$ vagy $q_{32} \leqq q_{31}$, illetve q_{31}, q_{32} közül legfeljebb egy fordul elő $g(q_1, q_2)$-ben.

Ez azt jelenti, hogy $q_{31} = q_{32}$ vagy q_{31} gyenge-f q_{32}. Ha $\tau_{\underline{A}_0} \circ \tau_{\underline{B}_0(\underline{A},\underline{B})}$-ben végtelen sok különböző értékü gyenge-f elem van, akkor 7.11. szerint benne végtelen sok különböző értékü erős-f tipus van. A 7.11. bizonyitás módja alapján világos (ld. 10.5.5. ábra), hogy lenni kell olyan d^* levezetésnek, amelyben valamely felbontásnál a (iii) eset teljesül. Mindezek alapján azt mondhatjuk, ha $\tau_{\underline{A}_0} \circ \tau_{\underline{B}_0(\underline{A},\underline{B})}$-ben nincs olyan levezetés, amelyre az (i)-(iii) esetek alapján a 7.12.-ben mondott feltétel nem teljesül, akkor $\tau_{\underline{A}_0} \circ \tau_{\underline{B}_0(\underline{A},\underline{B})} \notin \mathcal{L}$, ellenkező esetben $\tau_{\underline{A}_0} \circ \tau_{\underline{B}_0(\underline{A},\underline{B})} \in \mathcal{L}$.

Hogyan állapitható meg, hogy $\tau_{\underline{A}_0} \circ \tau_{\underline{B}_0(\underline{A},\underline{B})}$-ben az (i)-(iii) esetek valamelyike előfordul-e?

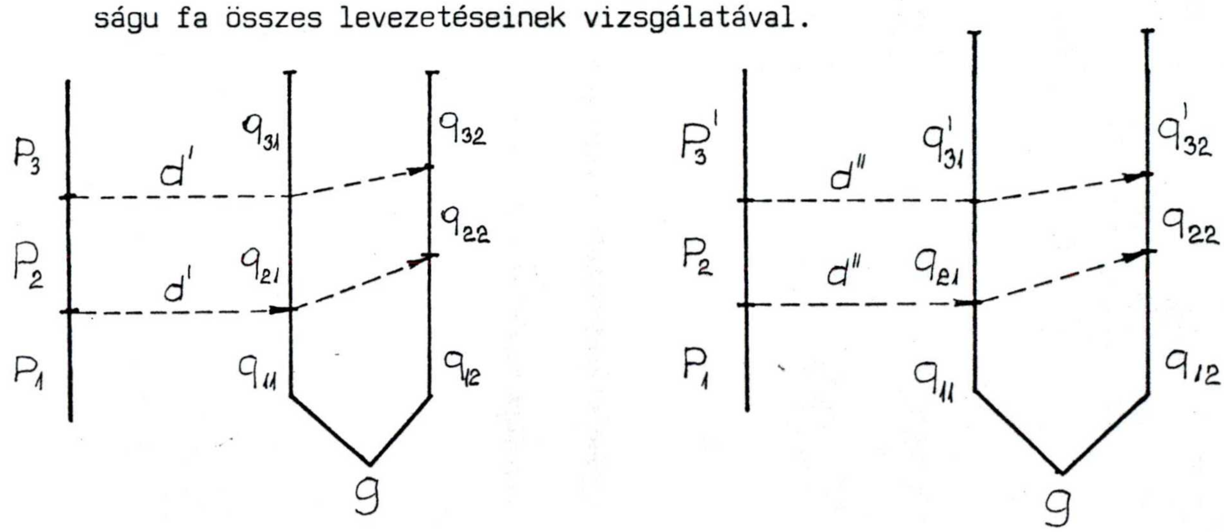
Redukciós lépések egymásutáni alkalmazásával elérhető, hogy $h(p_1) \leqq K_0$ legyen, mivel $p_2(p_3)$ és képei változás nélkül megtalálhatók a redukció eredményeként előálló levezetésben, s igy ugyanazon eset egy másik előfordulásához jutunk.

Az (i) esetben (mivel előfordulása független p_3-tól ill. q_{31}, q_{32}-től), ugyanigy elérhető, hogy $h(p_3) \leqq K_0$ legyen.

(I) Az (i) eset előfordulása eldönthető az összes legfeljebb $3K_0$ magasságu fa összes levezetéseinek vizsgálatával.

A (ii) esetről ((i)-esettel megegyező módon) elmondhatjuk:

(II) A (ii) eset előfordulása eldönthető az összes legfeljebb $3K_0$ magasságu fa összes levezetéseinek vizsgálatával.



10.5.5. ábra Ha $h(p_2)$ (és $h^*(q_{21})$, $h^*(q_{22})$) elég nagy (végtelen sok gyenge-f elem van!), akkor p_2-nek lesz olyan felbontása d"-ben, ami (iii)-nak felel meg.

A (iii) eset előfordulásának eldöntéséhez tegyük fel, hogy az (i)-(ii) esetek nem fordulnak elő $\tau_{\underline{A}_0} \circ \tau_{\underline{B}_0(\underline{A},\underline{B})}$-ben. Azt is feltehetjük, a (iii) esetnek megfelelő felbontásban p_3-nak nincs olyan felbontása, hogy $p_3 = p_{31}(p_{32}(p_{33}))$, $q_{31} \overset{d}{=} q_1$, $q_{32} \overset{d}{=} q_2$, p_{32} és p_{31} gyökerének cimkéje megegyezik, $\{q_{32}^1, q_{32}^2\} = W(p_{32})/d'$, $h^*(q_{32}^j) > 0$, $h^*(q_{32}^{3-j}) = 0$, mert mint ahogy azt a (iv) vizsgálatánál mondtuk, ekkor lenni kellene olyan levezetésnek, amiből végtelen sok különböző értékü véges-f tipus állitható elő.

Vegyük figyelembe azt is, hogy:

(*) ha p valamely p' részfájának q_1' és q_2' képére q_1' <u>erős-f</u> q_2', akkor minden $p''(\in sub^*(p))$-re ha $p'' \leq p'$ akkor p" képeire (q_1'' és q_2'') igaz, hogy q_1'' <u>erős-f</u> q_2''.

Bontsuk fel p_3-at $p_3=p_{31}(p_{32})$ alakban ugy, hogy p_{32} legyen a legbővebb olyan részfája p_3-nak, amelynek nincsenek erős-f tulajdonságu képei. (**)

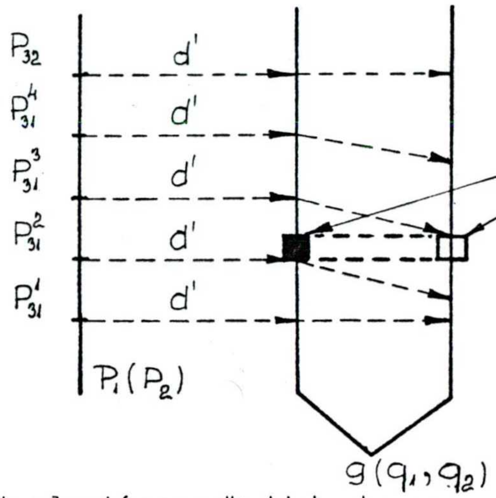
Ha $h(p_{32})>K_0$, akkor alkalmazható p_{32}-re egy redukció. A redukciónál kihagyott ($g(q_1,q_2)$-ből) képrészekre (legyenek ezek q_{321}^2, q_{322}^2) $h^*(q_{321}^2) = h^*(q_{322}^2)>0$, amint azt eddigi feltevéseink biztositják.

Legyen p_{32}' a p_{32}-ből redukcióval nyert fa. p_{32}' képei vagy egyenlők, vagy gyenge-f tulajdonságuak, vagy erős-f tulajdonságuak. Az első két esetben $p_{31}(p_{32}')$ ugyanazon, a harmadik esetben pedig (**)-nak megfelelő felbontásán ismételjük meg a redukciós lépést. Igy elérhető, hogy a (**)-nak megfelelő felbontásban (a redukciók eredményeként előállt levezetésben) $h(p_{32}) \leq K_0$ legyen.

(*) alapján az előző eljárás utolsó lépésének eredményeként kapott levezetésben redukciók egymásutánjával elérhető, hogy $h(p_{31}) \leq 2K_0$ legyen.

Ugyanis, ha $h(p_{31})>2K_0$, akkor $p_{31} = p_{31}^1(p_{31}^2(p_{31}^3(p_{31}^4(e))))$ és p_{31}^2, p_{31}^3, p_{31}^4 gyökerének cimkéje azonos. Ha mind a $p_{31}^1(p_{31}^3(p_{31}^4(e)))$ mind a $p_{31}^1(p_{31}^4(e))$ redukció esetén a $p_{31}'(p_{32})$ felbontás nem felel meg (**)-nak (p_{32} nem a legbővebb) akkor a $p_{31}^1(p_{31}^2(p_{31}^4(e))$ redukció megfelelő eredményt ad. Ennek az az oka, hogy ha az első két redukció nem megfelelő, akkor vagy nem f-tulajdonságu képeket vagy gyenge-f elemet (ugyanazon VAL(D) értékkel!) kell hogy eredményezzen s igy $p_{31}^1(p_{31}^2(p_{31}^3(p_{31}^4(e))))$ részfái is csak ugy lehettek erős-f tulajdonságuak, ha p_{31}^2 két képében van olyan eltérés, ami az erős-f tulajdonságot okozza.

(ld. 10.5.6. ábra). Világos, ha ez megmarad (p_{31}^2), akkor az erős-f tulajdonság is megmarad a redukció eredményeként előálló levezetésben ($p_{31}^1(p_{31}^2(p_{31}^4(e)))$).



10.5.6. ábra

Az erős-f tulajdonságot okozó rész p_{31}^2 képeiben.

Ezek alapján mondhatjuk, hogy:

(III) A (iii) eset előfordulása (ha az (i) és (ii) esetek nem fordulnak elő $\tau_{\underline{A}_0} \circ \tau_{\underline{B}_0(\underline{A},\underline{B})}$-ben) eldönthető az összes legfeljebb $5K_0$ magasságu fa összes levezetéseinek vizsgálatával.

Összefoglalva eddigi eredményeinket azt kaptuk, hogy az indukálhatóság 7.12.-ben megfogalmazott feltétele ekvivalens azzal, hogy $\tau_{\underline{A}_0} \circ \tau_{\underline{B}_0(\underline{A},\underline{B})}$-ben az (i)-(iii) esetek nem fordulnak elő. Ez (I), (II), (III) szerint algoritmikusan eldönthető, s igy a 7.12.-ben mondott feltétel is.

Tekintsük a következő példákat az ekvivalencia probléma és a 7.12.-ben adott szükséges és elegendő feltétel kapcsolatára.

10.6. Példa

(i) $\underline{A}$ és $\underline{B}$ ekvivalens, $\tau_{\underline{A}_0} \circ \tau_{\underline{B}_0(\underline{A},\underline{B})} \in \mathcal{L}$.

$\underline{A} = (T_F(X_1), \{a_0, a_1\}, T_F(X_1), \{a_1\}, S_A)$

$\underline{B} = (T_F(X_1), \{b_0, b_1\}, T_F(X_1), \{b_1\}, S_B)$

S_A elemei: $x_1 \to a_0 f(x_1)$ $\quad$ S_B elemei: $x_1 \to b_0 f(f(x_1))$

$f(a_0 e) \to a_0 f(e)$ $\quad$ $f(b_0 e) \to b_0 f(e)$

$f(a_0 e) \to a_1 f(f(e))$ $\quad$ $f(b_0 e) \to b_1 f(e)$

$\mathcal{T}_{\underline{A}} = \{(f^k(x_1),\ f^{k+2}(x_1)) \mid k \geq 1\}.$ $\quad$ $\mathcal{T}_{\underline{B}} = \{(f^k(x_1),\ f^{k+2}(x_1)) \mid k \geq 1\}.$

$\mathcal{T}_{\underline{A}_0} \circ \mathcal{T}_{\underline{B}_0(\underline{A},\underline{B})} = \{(f^k(x_1),\ g(f^{k+2}(x_1),\ f^{k+2}(x_1))) \mid k \geq 1\}.$

Itt minden levezetés, minden felbontással gyenge-f elem. Bármely gyenge-f elemre VAL(D) = f(e).

(ii) $\underline{A}$ és $\underline{B}$ ekvivalens, $\mathcal{T}_{\underline{A}_0} \circ \mathcal{T}_{\underline{B}_0(\underline{A},\underline{B})} \notin \mathcal{L}$.

$\underline{A} = (T_F(X_1), \{a_0, a_1\},\ T_F(X_1), \{a_1\},\ S_A)$

$\underline{B} = (T_F(X_1), \{b_0, b_1\},\ T_F(X_1), \{b_1\},\ S_B)$

S_A elemei: $x_1 \to a_0 x_1$ $\quad$ S_B elemei: $x_1 \to b_0 x_1$

$f(a_0 e) \to a_0 f(e)$ $\quad$ $f(b_0 e) \to b_0 f(e)$

$f(a_0 e) \to a_0 e$ $\quad (*)$ $\quad$ $f(b_0 e) \to b_0 e$ $\quad (*)$

$f(a_0 e) \to a_1 f(e)$ $\quad$ $f(b_0 e) \to b_1 f(e)$

$f(a_0 e) \to a_1 e$ $\quad$ $f(b_0 e) \to b_1 e$

$\mathcal{T}_{\underline{A}} = \{(f^k(x_1),\ f^l(x_1)) \mid k \geq 1,\ k \geq l \geq 0\}$ $\quad$ $\mathcal{T}_{\underline{B}} = \mathcal{T}_{\underline{A}}$ (hisz S_A és S_B egyforma!)

$\mathcal{T}_{\underline{A}_0} \circ \mathcal{T}_{\underline{B}_0(\underline{A},\underline{B})} = \{(f^k(x_1),\ g(f^l(x_1),\ f^m(x_1))) \mid k \geq 1,\ k \geq l \geq 0,\ k \geq m \geq 0\}.$

Itt végtelen sok különböző értékü véges-f tipus állitható elő a (*)-gal jelölt szabályok segitségével.

(iii) $\underline{A}$ és $\underline{B}$ nem ekvivalens, $\mathcal{T}_{\underline{A}_0} \circ \mathcal{T}_{\underline{B}_0(\underline{A},\underline{B})} \in \mathcal{L}$.

$\underline{A} = (T_F(X_1),\ \{a_0, a_1\},\ T_F(X_1),\ \{a_1\},\ S_A)$

$\underline{B} = (T_F(X_1),\ \{b_0, b_1\},\ T_F(X_1),\ \{b_1\},\ S_B)$

S_A elemei: $x_1 \to a_0 x_1$ $\quad$ S_B elemei: $x_1 \to b_0 x_1$

$f(a_0 e) \to a_0 f(e)$ $\quad$ $f(b_0 e) \to b_0 f(e)$

$f(a_0 e) \to a_1 h(f(e))$ $\quad$ $f(b_0 e) \to b_1 f(h(e))$

$\mathcal{T}_{\underline{A}} = (f^k(x_1),\ h(f^k(x_1)))\ |\ k \geqq 1\}$ $\quad \mathcal{T}_{\underline{B}} = \{(f^k(x_1),\ f(h(f^{k-1}(x_1))))\ |\ k \geqq 1\}$

$\mathcal{T}_{\underline{A}_0} \circ \mathcal{T}_{\underline{B}_0(\underline{A},\underline{B})} = \{(f^k(x_1),\ g(h(f(f^{k-1}(x_1))),\ f(h(f^{k-1}(x_1)))))\ |\ k \geqq 1\}.$

Itt minden levezetés egy erős-f tipusba sorolható, melyre VAL(D) =

= g(h(f(e)), f(h(e))).

(iv) $\underline{A}$ és $\underline{B}$ nem ekvivalens, $\mathcal{T}_{\underline{A}_0} \circ \mathcal{T}_{\underline{B}_0(\underline{A},\underline{B})} \notin \mathcal{L}$.

$\underline{A} = (T_F(X_1),\ \{a_0, a_1\},\ T_F(X_1),\ \{a_1\},\ S_A)$

$\underline{B} = (T_F(X_1),\ \{b_0, b_1\},\ T_F(X_1),\ \{b_1\},\ S_B)$

S_A elemei: $x_1 \longrightarrow a_0x_1$ $\qquad$ S_B elemei: $x_1 \longrightarrow b_0x_1$

$f(a_0e) \longrightarrow a_0f(f(e))$ $\qquad$ $f(b_0e) \longrightarrow b_0f(e)$

$f(a_0e) \longrightarrow a_1f(f(e))$ $\qquad$ $f(b_0e) \longrightarrow b_1f(e)$

$\mathcal{T}_{\underline{A}} = \{(f^k(x_1),\ f^{2k}(x_1))\ |\ k \geqq 1\}$ $\qquad$ $\mathcal{T}_{\underline{B}} = \{(f^k(x_1),\ f^k(x_1))\ |\ k \geqq 1\}$

$\mathcal{T}_{\underline{A}_0} \circ \mathcal{T}_{\underline{B}_0(\underline{A},\underline{B})} = \{(f^k(x_1),\ g(f^{2k}(x_1),\ f^k(x_1)))\ |\ k \geqq 1\}.$

Itt minden $k (k \geqq 1)$ számra van D_k erős-f tipus, hogy $VAL(D_k) = g(f^k(e), e)$.

Példáinkat egészitsük ki egy heurisztikus megfigyeléssel:

A 7.12.-ben mondott feltétel eldöntéséhez létező levezetésekből kell levezetések létező csoportjaira következtetnünk, mig az ekvivalencia probléma eldöntéséhez levezetések nemlétéből kellene levezetések nem-létét igazolni.

Jelölje $\underline{U}(p)$ a p fa gráfreprezentációjában a gyökértől levélhez vezető utak halmazát.

10.7. Definició

Az $\underline{A}$ 1-transzformátort n-szeresen nem-lineáris, ha bármely $p \overset{*}{\underset{\underline{A}}{\Longrightarrow}} ar$ $(a \in A')$ levezetésben $\forall u (\in \underline{U}(p))$ uton legfeljebb n db olyan nem-lineáris szabályt alkalmazunk, amelynek jobb oldala r-nek részgráfja (azaz nem törlődik).

Ha valamely n-re $\underline{A}$ n-szeresen nem-lineáris, akkor azt mondjuk, hogy $\underline{A}$ végesen nem-lineáris.

10.8. Állitás

Bármely $\underline{A}$ 1-transzformátorról eldönthető hogy n-szeresen nem-lineáris-e.

Bizonyitás

Az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy $\underline{A}$ képorientált. Ekkor az n-szeres nem-linearitás azt jelenti, hogy az $u(\in \underline{U}(p))$ uton legfeljebb n db olyan nem-lineáris szabályt alkalmazhatunk, amelynek jobb oldala képállapotot (A_2-beli állapotot) tartalmaz.

Tekintsünk egy $d: p \Rightarrow^*_{\underline{A}} ar$ $(a \in A')$ levezetést.

p minden p_0 részfájának gyökeréhez rendeljük hozzá cimkeként azt az a_0 állapotot, amelyre $p_0 \Rightarrow^*_{\underline{A}} a_0 r_0$ részlevezetés d-ben.

Legyen $\underline{A}$ állapotainak száma K_0.

A következőkben egy redukéiós lépésekből álló eljárással bebizonyitjuk, hogy ha $\underline{A}$ nem n-szeresen nem-lineáris, akkor van $p \Rightarrow^*_{\underline{A}} ar$ $(a \in A')$, $u \in \underline{U}(p)$, hogy u-ban legalább (n+1) db képállapotba jutó nem-lineáris szabályt alkalmazunk és $h(p) \leqq K_1$ $(K_1 = (n+3) \cdot (K_0 + 1))$.

Tegyük fel, hogy $\underline{A}$ nem n-szeresen nem-lineáris. Ekkor kell hogy legyen $p \Rightarrow^*_{\underline{A}} ar$ $(a \in A')$ és $u \in \underline{U}(p)$, ami a fentieknek megfelel, legfeljebb csak $h(p) > K_1$.

Legyen $p = p_0(p_1(\ldots(p_{n+1}(p_{n+2}))\ldots))$, ugy hogy $root(p_j)$ $(0 \leqq j \leqq n+2)$ csucsa u-nak, $h(p_{n+2}) = 0$, $\forall i(1 \leqq i \leqq n+1)$-re $root(p_i)$ olyan, aminél d-ben a jobb oldalában képállapotot tartalmazó nem-lineáris szabályt alkalmazunk.

Legyen $0 \leqq k \leqq n+1$. Értelmezzük $h^*(p_k)$-t (10.6. mintájára) ugy, hogy $h^*(p_k)$ az u ut p_k-ba eső részének hossza legyen.

Ha $h^*(p_k) > K_0+1$, akkor p_k felbontható $p_k(e) = p_k^1(p_k^2(p_k^3(e)))$ alakban, ahol $h^*(p_k^1) > 0$, $h^*(p_k^2) > 0$, p_k^2 és p_k^3 gyökerének cimkéje megegyezik.

Igy alkalmazhatjuk azt a redukciót, melynek során d-ben $p_k(e)$-t és levezetését $p_k^1(p_k^3(e))$-re és (d-beli részlevezetésekből képzett) levezetéseire cseréljük.

Az igy nyert d' levezetésben is legalább (n+1) képállapotot tartalmazó nem-lineáris szabályt alkalmazunk ($p_i(1 \leq i \leq n+1)$ gyökerénél) és $h^*(p_k) > h^*(p_k^1(p_k^3(e)))$.

Világos, hogy ilyen redukciós lépések sorozatával eljuthatunk egy olyan d_0 levezetéshez, ahol $\forall k(0 \leq k \leq n+1)$-re $h^*(p_k) \leq K_0+1$.

Legyen $0 \leq k \leq n+1$. Ekkor p_k felbontható $p_k(e) = \bar{p}_k(e, p_k^1, \ldots, p_k^{v_k})$ és $\forall p'(\in sub(\bar{p}_k))$-re vagy $h(p') = 0$ vagy $p' \in sub(\bar{p}_k)|_e$ $(v_k \geq 0)$.

Bármely $m(1 \leq m \leq v_k)$-re, ha $h(p_k^m) > K_0$ akkor $p_k^m = p_k^{m1}(p_k^{m2}(p_k^{m3}))$, p_k^{m2} és p_k^{m3} gyökerének cimkéje azonos.

Alkalmazzuk azt a redukciót, amelynél p_k^m-et $p_k^{m1}(p_k^{m3})$-ra cseréljük. Ez a redukció nyilván nem változtatja meg a p_i $(1 \leq i \leq n+1)$ gyökerénél alkalmazott szabályt. Ilyen redukciós lépések ismételgetésével elérhető, hogy $\forall k(0 \leq k \leq n+1)$-ra $\forall m(1 \leq m \leq v_k)$-re $h(p_k^m) \leq K_0$. Ez alapján $\forall k(0 \leq k \leq n+1)$-re elérhető hogy $h(p_k) \leq 2K_0+1$ és $h^*(p_k) \leq K_0+1$ legyen.

Ez pedig azt jelenti, hogy elérhető $h(p) \leq K_1$.

10.9. <u>Állitás</u>

Tetszőleges $\underline{A}$ l-transzformátorról eldönthető, hogy végesen nem-lineáris-e.

<u>Bizonyitás</u>

Az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy $\underline{A}$ képorientált. Tekintsünk egy $d: p \overset{*}{\underset{\underline{A}}{\Longrightarrow}} ar$ $(a \in A')$ levezetést. p minden p_0 részfájának gyökeréhez rendeljük hozzá cimkeként azt az a_0 állapotot, amelyre $p_0 \overset{*}{\underset{\underline{A}}{\Longrightarrow}} a_0 r$ részlevezetés d-ben.

Legyen $\underline{A}$ állapotainak száma K_0.

Ha $\underline{A}$ végesen nem-lineáris akkor van n, hogy $\underline{A}$ n-szeresen nem-lineáris.

Legyen $h^*(p')$ $(p'\in T_F(X_J \cup E),\ p' \notin T_F(X_J))$ p' gráfreprezentációjában a leghosszabb olyan $\underline{U}(p)$-beli ut, amelynek egyik végpontja E-beli (mint 10.6.-ban).

Legyen $p=p_1(p_2(p_3))$, $p_2(e) = p_{21}(p_{22}(p_{23}(e)))$, $h^*(p_{22}) = 1$, p_2 és p_3 gyökerének cimkéje azonos, d-ben a root(p_{22}) csucsnál alkalmazzunk olyan nem-lineáris szabályt, amelynek jobb oldalában képállapot van. (*)

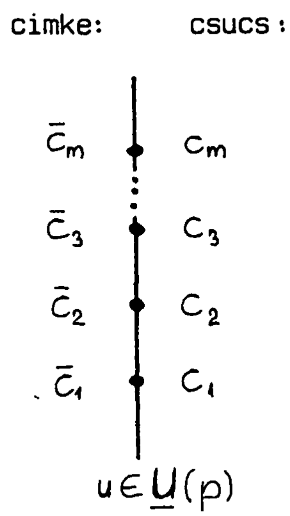
Ha van $\mathcal{T}_{\underline{A}}$-ban (*)-nak megfelelő levezetés, akkor ennek $p^i = p_1(\underbrace{p_2(\ldots(p_2}_{i}(p_3))\ldots))$ iterációjával (ha p_2-nek minden helyen a d-beli részlevezetését használjuk az uj levezetés megalkotásakor) minden $i(i \geqq 1)$-re olyan levezetéshez jutunk, amelyben van olyan $\underline{U}(p^i)$-beli ut, amelynek legalább i db csucsában ($p_{22}(e)$ i-szeri előfordulása miatt) olyan nem-lineáris szabályt alkalmazunk, amelynek jobb oldalában képállapot van. Ez azt jelenti, hogy ilyenkor $\underline{A}$ nem lehet végesen nem-lineáris.

Ha $\mathcal{T}_A$-ban nincs (*)-nak megfelelő levezetés, akkor minden olyan c csucs amelyben képállapotba jutó nem-lineáris szabályt alkalmazunk, három diszjunkt részre osztja a p fa (adott d levezetéshez tartozó) cimkéinek halmazát: (a) c alatti csucs cimkéi

(b) c feletti csucs cimkéi

(c) nem (a) vagy (b)-beli cimkék.

Világos, hogy bármely további c' ugyanilyen tulajdonságu csucs ezt az osztályozás tovább finomitja. Ahhoz, hogy egyetlen $\underline{u}(p)$-beli uton K_0-nál több ilyen csucs lehessen az kellene, hogy K_0-nál több féle cimke legyen (ami nem igaz). Ezért ilyenkor $\underline{A}$ n-szeresen nem-lineáris és $n \leq K_0$. (ld.10.9.1. ábra)



10.9.1. ábra

$(a)/c_1 \lneqq (a)/c_2 \lneqq (a)/c_3 \lneqq \ldots,$

$\ldots \lneqq (b)/c_{m-2} \lneqq (b)/c_{m-1} \lneqq (b)/c_m,$

azaz $(a)/c_n \setminus (a)/c_{k-1} \geqq \{\bar{c}_k\}$

$(b)/c_{k-1} \setminus (b)/c_k \geqq \{\bar{c}_k\}.$

Ha elérhető redukciós lépések sorozatával, hogy egy olyan $d_0 : p_0 \xrightarrow[\underline{A}]{*} a_0 r_0$ ($a_0 \in A'$) levezetéshez jussunk d-ből, amely megfelel (*)-nak (ha d megfelelt) és $h(p_0) \leqq K_1$ ($K_1 = 4K_0+1$), akkor $\mathcal{T}_{\underline{A}}$ végesen nem-linearitásának eldöntési algoritmusát kapjuk.

Világos, hogy ha egy redukciós lépésben p_2, p_{22} és p_3 gyökerét (levezetéssel együtt) "átmentjük" az uj levezetésbe, akkor ha a kiindulási levezetés megfelelt (*)-nak, akkor a redukció eredménye is megfelel.

Tekintsük a $d : p \xrightarrow[\underline{A}]{*} ar$ ($a \in A'$) (*)-nak megfelelő levezetést:

$p = p_1(p_2(p_3)$, $p_2(e) = p_{21}(p_{22}(p_{23}(e)))$.

Legyen még $p_1 = \bar{p}_1(e, p_1^1, \ldots, p_1^{v_1})$, $p_{21} = \bar{p}_{21}(e, p_{21}^1, \ldots, p_{21}^{v_{21}})$,

$p_{23}(e) = \bar{p}_{23}(e, p_{23}^1, \ldots, p_{23}^{v_{23}})$, $\forall p' \in \mathrm{sub}(\bar{p}_t)$-re $h(p') = 0$ vagy $p' \in \mathrm{sub}(\bar{p}_t)|_e$, ($t=1, 21, 23$), $p_{22} = \bar{p}_{22}(e, p_{22}^1, \ldots, p_{22}^{v_{22}})$, $h(\bar{p}_{22}) = 1$.

Ekkor világos, hogy redukciós lépések sorozatával elérhető hogy $h^*(\bar{p}_t) \leqq K_0$, $h(p_s^k) \leqq K_0$ ($t=1, 21, 23$; $s=1, 21, 22, 23$; $1 \leqq k \leqq v_s$) és $h(p_3) \leqq K_0$.

Ez azt jelenti, hogy elérhető $h(p) \leqq K_1$.

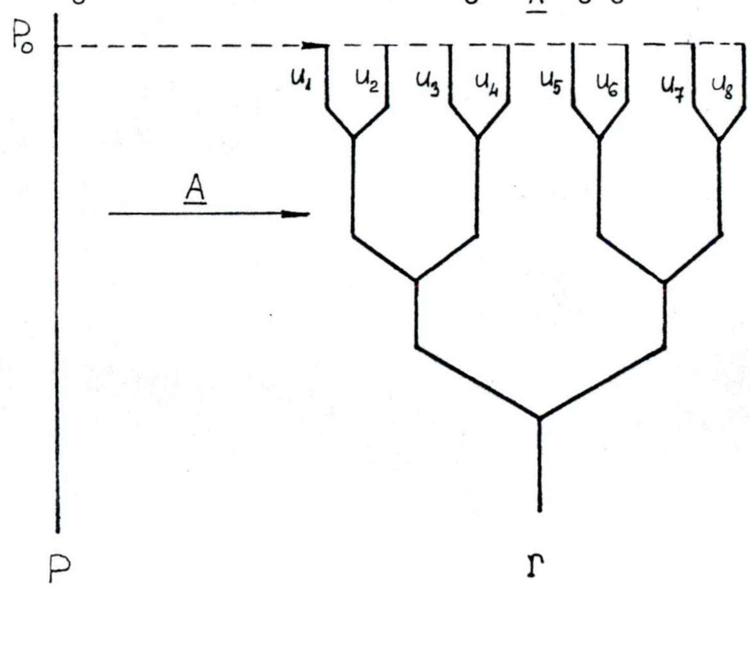
10.10. Állitás

Ha $\underline{A} = (T_F(X_J),\ A,\ T_G(Y_K),\ A',\ S_A)$ l-transzformátor, ahol $F=F_1$, akkor ha $\underline{A}$ és $\underline{B}$ végesen nem-lineáris l-transzformátorok akkor $\tau_{\underline{A}} \circ \tau_{\underline{B}}$-ről eldönthető, hogy indukálható-e l-transzformátorral.

Bizonyitás

Ha $\underline{A}$ és $\underline{B}$ végesen nem-lineáris, akkor van n_1 és n_2, hogy $\underline{A}$ n_1-szeresen nem-lineáris, $\underline{B}$ n_2-szeresen nem-lineáris.
Az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy $\underline{A}$ és $\underline{B}$ képorientált. Legyen $d: p \overset{*}{\Longrightarrow}_{\underline{A}} ar,\ r \overset{*}{\Longrightarrow}_{\underline{B}} bq$ $(a \in A',\ b \in B')$ tetszőleges levezetés. Mint eddigi bizonyitásainkban, most is bevezetünk egy cimkézést, és ennek alapján a redukció és az iteráció tevékenységét. Bebizonyitjuk hogy a 7.12.-ben adott feltétel ekvivalens bizonyos tulajdonságu redukciós lépések létezésével, majd megmutatjuk, hogy adható egy felső korlát, hogy ha van ilyen redukció, akkor ennél alacsonyabb fa levezetésében elő kell fordulnia.

(a) Első lépésként adjuk meg d alapján p cimkézését! Világos, hogy p egy részfájának r-ben legfeljebb $n_0 = NL(\underline{A})^{n_1}$ db képe lehet. Tekintsük azt a legszükebb p_0 részfát, amelyre $p_0 \overset{*}{\Longrightarrow}_{\underline{A}} a_0 r$ $(a \in A_1)$ részlevezetés d-ben. Minden p_0' $(\in \mathrm{sub}(p_0),\ p_0' \neq p_0)$-re $\mathrm{root}(p_0')$ cimkéje legyen az az $a_0'(\in A)$ állapot, melyre $p_0' \overset{*}{\Longrightarrow}_{\underline{A}} a_0' r_0'$ részlevezetés d-ben.



10.10.1. ábra

A $p \overset{*}{\Longrightarrow}_{\underline{A}} ar$ levezetés szemléltetése.

Tekintsük $\bar{r} = r \setminus W_A(p_0)/d$-t. Legyen $\underline{U}_0(r) = \{u \mid u \in \underline{U}(\bar{r})$, u egyik végpontja E-beli$\}$. Világos, hogy $\underline{U}_0(r) = \{u_1, \dots, u_M\}$ $(M \leqq n_0)$.
$\forall i (1 \leqq i \leqq M)$-re, $\forall p' (\in \mathrm{sub}(p),\ p_0 \perp p')$-re tekintsük azt a $b_i (\in B)$ állapotot, melyre $p' \Longrightarrow_{\underline{A}}^{*} ar'$, $r' \Longrightarrow_{\underline{B}}^{*} b_i q_i'$ és root(r') u_i-ben van.
Legyen root(p') cimkéje $(a;\ b_1, \dots, b_M)$. Legyen a lehetséges cimkék száma K_0.

(b) Legyen $p' \in \mathrm{sub}(p)$, $p' \Longrightarrow_{\underline{A}}^{*} ar'$, $r' \Longrightarrow_{\underline{B}}^{*} b_i q_i'$ $(1 \leqq i \leqq M)$ részlevezetés d-ben. root(p')-t duplikációs pontnak nevezzük, ha ott az $\underline{A}$-beli részlevezetésben olyan nem-lineáris szabályt alkalmazunk mely a jobb oldalán képállapotot tartalmaz, vagy az $\underline{A}$-beli levezetésben alkalmazott szabály jobb oldalának $\underline{B}$-beli levezetésében alkalmazunk ilyen szabályt. Legyen $p = p_0(p_1(\dots(p_n(p_{n+1}))\dots))$, $\forall i (1 \leqq i \leqq n)$-re root($p_i$) duplikációs pont és p-ben ne legyen több duplikációs pont. Legyen $h(p_{n+1})=0$. Világos, hogy $n \leqq n_1 + n_2$.
Legyen $0 \leqq k \leqq n$. Tegyük fel, hogy $p_k(e) = p_k^1(p_k^2(p_k^3(e)))$, p_k^2 és p_k^3 gyökerének cimkéje azonos. Ha $W_{AB}(p_k^2)/d = \emptyset$ vagy $\forall q' (\in W_{AB}(p_k^2)/d)$-re $h(q')=0$ (*), akkor az eredményfa változtatása nélkül elhagyható p_k-ból p_k^2 (p_k-t és levezetéseit $p_k^1(p_k^3)$-mal és d-beli részlevezetéseivel helyettesitve). A cimkézés tulajdonságai alapján igy megkonstruálható egy olyan d' levezetés, amely rendelkezik d tulajdonságaival, de nincs benne a (*) feltételnek megfelelő felbontás.

(c) Tegyük fel, hogy d-ben nincs (*)-nak megfelelő felbontás.

(d) Tetszőleges $i (0 \leqq i \leqq n)$-re vizsgáljuk meg a következő eseteket:
Legyen $p_i(e) = p_i^1(p_i^2(p_i^3(e)))$, p_i^2 és p_i^3 gyökerének cimkéje azonos, $h^*(p_i^2) \leqq K_0$.
Itt $h^*(q)$ a leghosszabb olyan $\underline{U}(q)$-beli ut, amelynek egyik végpontja E-beli (mint 10.5.-ben).

Jelölje $q^j_{i2} \in W(p^2_i)/d$ $(1 \leqq j \leqq M)$, a p^2_i-nek az u_j ut által meghatározott képét (több egyenlő fa lehet).

Legyen $\bar{p}^1_i = p_0(\ldots p_{i-2}(p^1_{i-1}(e)))$, $\bar{p}^3_i = p_{i+1}(p_{i+2}(\ldots(p_{n+1})\ldots))$.

Legyen k_1 és k_2 olyan, hogy $k_1 \neq k_2$ valamint u_{k_1} és u_{k_2} nem esik egybe p^2_i $\underline{A}$ melletti képében.

(i) $h^*(q^{k_1}_{i2}) > 0$, $h^*(q^{k_2}_{i2}) = 0$.

(ii) $h^*(q^{k_1}_{i2}) > h^*(q^{k_2}_{i2}) > 0$.

(iii) $h^*(q^{k_1}_{i2}) = h^*(q^{k_2}_{i2}) > 0$, $p^3_i(\bar{p}^3_i)$ u_{k_1} és u_{k_2} által meghatározott q-beli képe erős-f tulajdonságu.

(iv) Az (i)-(iii) nem eredményezi, hogy $\mathcal{T}_{\underline{A}} \circ \mathcal{T}_{\underline{B}} \notin \mathcal{L}$.

Legyen $p^{n_1} = \bar{p}^1_i(p^1_i(\underbrace{p^2_i(\ldots(p^2_i}_{m\ \text{db}}(p^3_i(\bar{p}^3_i)))\ldots)))$, a d-ből (az $u_1,\ldots,u_M$ utaknak megfelelően) $\bar{p}^1_i$, p^1_i, p^2_i, p^3_i, $\bar{p}^3_i$ részlevezetései alapján összeállitott levezetés pedig d_m.

Legyen $D_n = \{d_m \mid m \in N,\ \ m > n\}$.

(e) Az (i) esetben ellenőrizhető, hogy D_0 véges-f tipus.
Legyen $(a;\ b_1,\ldots,b_N)$ p^2_i gyökerének cimkéje. A 8.3.-ban definiált $Q_m(a;\ b_1,\ldots,b_M)$ erdőről, mint ott elmondtuk, eldönthető, hogy véges-e.
Ha $h^*(q^{k_2}_{i2}) = 0$ és Q_{k_2} $(a;\ b_1,\ldots,b_M)$ végtelen, akkor világos, hogy $p^3_i(\bar{p}^3_i)$-at más részfákra cserélve végtelen sok különböző értékü véges-f tipushoz jutunk (ld. 10.5.1. ábra).

(f) A (ii) esetben $h^*(q^{k_1}_{i2})$, $h^*(q^{k_2}_{i2}) \neq 0$, $h^*(q^{k_1}_{i2}) \neq h^*(q^{k_2}_{i2})$ alapján (mivel $\bar{p}^1_i(p^1_i)$ és $p^3_i(\bar{p}^3_i)$ u_{k_1} és u_{k_2} által kijelölt képei minden $d_m (\in D_0)$-ben közösek) van N_0, hogy D_{N_0} erős-f tipus.
Ekkor $\forall n (n \geqq N_0)$-ra D_n erős-f tipus. A $VAL(D_n)$-nek megfelelő gráfban $(\underbrace{q^{k_1}_{i2}(\ldots(q^{k_1}_{i2}}_{n\ \text{db}}(e))\ldots)$ ill. $\underbrace{q^{k_2}_{i2}(\ldots(q^{k_2}_{i2}}_{n\ \text{db}}(e))\ldots)$-ből származóan) van leg-

alább $n\cdot(h^{*}(q_{i2}^{k_1}) - h^{*}(q_{i2}^{k_2}))$ hosszuságu ut. Ez pedig azt jelenti, hogy $\mathcal{T}_{\underline{A}} \circ \mathcal{T}_{\underline{B}}$-ben végtelen sok különböző értékü erős-f tipus van. (ld. 10.5.2. ábra).

(g) A (iii) esetben vegyük észre, hogy bármilyen is a p_i^1 részfa, annak minden p' részfájára $p'(p_i^2(p_i^3(\bar{p}_i^3)))$ u_{k_1} és u_{k_2} által kijelölt q-beli képei erős-f tulajdonságuak és 6.7. (v) is szükségképp teljesül. Igy D_n egy olyan felbontással, ahol $\bar{p} = \bar{p}_i^1(\underbrace{p_i^1(p_i^2(\ldots(p_i^2}_{n\ db}(e))\ldots)))$, erős-f tipus lesz.

A $VAL(D_n)$ gráfbeli leghosszabb (gyökértől levélhez vezető) ut hossza tart a végtelenbe, ha $n \longrightarrow \infty$. Ez pedig azt jelenti, hogy $\mathcal{T}_{\underline{A}} \circ \mathcal{T}_{\underline{B}}$-ben végtelen sok különböző értékü erős-f tipus van (ld. 10.5.3. ábra).

(h) A (iv) eset az eddigiek alapján azt jelenti, hogy a (ii) és (iii) esetek egyáltalán nem fordulhatnak elő. Vegyük azonban azt is figyelembe, hogy az (i) esetben $VAL(D_0) = q_{i1}^{k_1}(q_{i2}^{k_1}(q_{i3}^{k_1}))$ (ahol $q_{i1}^{k_1}$ a p_i^1, $q_{i3}^{k_1}$ a $p_i^3(\bar{p}_i^3)$ u_{k_1} által kijelölt q-beli képe), s igy p_i^1 olyan felbontásánál amely nem (i)-nek felel meg, szükségképp (iii)-nek kell hogy megfeleljen (ld. 10.5.4. ábra).

Egyébként d bármely felbontásánál (a (iv) esetben) $h^{*}(q_{i2}^{k_1}) = h^{*}(q_{i2}^{k_2}) > 0$ kell hogy legyen (és $q_{i3}^{k_1} \leqq q_{i3}^{k_2}$ vagy $q_{i3}^{k_2} \leqq q_{i3}^{k_1}$) illetve $q_{i3}^{k_1}$, $q_{i3}^{k_2}$ közül legfeljebb egy fordul elő q-ban ($q_{i3}^{k_2}$ a $p_i^3(\bar{p}_i^3)$ u_{k_2} által kijelölt képe). Ez azt is jelenti, hogy $q_{i3}^{k_1} = q_{i3}^{k_2}$ vagy $q_{i3}^{k_1}$ <u>gyenge-f</u> $q_{i3}^{k_2}$.

Ha $\mathcal{T}_{\underline{A}} \circ \mathcal{T}_{\underline{B}}$-ben végtelen sok különböző értékü gyenge-f elem van (az i-edik és (i+1)-edik duplikációs pont között), akkor 7.11. szerint benne végtelen sok különböző értékü erős-f tipus van. A 7.11. bizonyitási módja alapján világos (ld. 10.5.5. ábra), hogy lenni kell olyan d^{*} levezetésnek, amelyben p_i valamely felbontásánál a (iii) eset teljesül.

(j) Mindezek alapján elmondhatjuk, ha $\mathcal{T}_{\underline{A}} \circ \mathcal{T}_{\underline{B}}$-ben nincs olyan levezetés hogy abban az (i)-(iii) esetek valamelyike teljesülne ((i) $Q_{k_2}(a;b_1,\ldots, b_M)$ végtelenségével) valamely $i(0 \leqq i \leqq n)$-re, akkor a 7.12.-ben mondott feltétel teljesül, s igy $\mathcal{T}_{\underline{A}} \circ \mathcal{T}_{\underline{B}} \in \mathcal{L}$. Ha valamely levezetésben az (i)-(iii) esetek valamelyike ((i) $Q_{k_2}(a;\ b_1,\ldots,b_M)$ végtelenségével) valamely $i(0 \leqq i \leqq n)$-re előfordul, akkor a 7.12.-ben mondott feltétel nem teljesül, s igy $\mathcal{T}_{\underline{A}} \circ \mathcal{T}_{\underline{B}} \notin \mathcal{L}$.

(k) Hogyan állapitható meg, hogy $\mathcal{T}_{\underline{A}} \circ \mathcal{T}_{\underline{B}}$-ben az (i)-(iii) esetek előfordulnak-e?

Legyen adva egy d levezetés $\mathcal{T}_{\underline{A}} \circ \mathcal{T}_{\underline{B}}$-ben a (d)-ben mondott formában. Tegyük fel, hogy az (i)-(iii) esetek valamelyikével állunk szemben. Ekkor $l(<i)$-re tekintsük a $p_l(e) = p_l^1(p_l^2(p_l^3(e)))$ felbontást ($h(p_l^1) \geqq 1$, $h(p_l^2) \geqq 1$), p_l^2 és p_l^3 gyökerének cimkéje azonos. Itt,végrehajtva a p_l^2 elhagyását jelentő redukciót, olyan d' levezetéshez jutunk, amiben ugyanugy előfordul a kritikus redukciós lehetőség (az (i)-(iii) eset), de $h(p_l^1(p_l^3)) < h(p_l)$.

Igy elérhető, hogy $h(p_l) \leqq K_0+1$ $(l<i)$ legyen.

(l) Ha az (i) eset előfordulásával állunk szemben, akkor a (k)-ban mondottakkal megegyező módon elérhető hogy $h(p_i^1) \leqq K_0+1$ legyen.

Mivel az eset előfordulása nem függ csak $\mathrm{root}(p_i^3)$ cimkéjétől, igy ugyanezen módszerrel elérhető, hogy $h(p_i^3) \leqq K_0+1$ és $h(p_l) \leqq K_0+1$ $(l>i)$ legyen. Ez azt jelenti, hogy ha az (i) esetnek van előfordulása $\mathcal{T}_{\underline{A}} \circ \mathcal{T}_{\underline{B}}$-ben, akkor a legfeljebb $(n+3)\cdot(K_0+1)$ magasságu fák levezetései közt is van előfordulása.

(m) Ha a (ii) eset előfordulásával állunk szemben, akkor a (k)-ban és (l)-ben mondottakkal megegyező módon elérhető, hogy $h(p_i^1) \leqq K_0+1$, $h(p_i^3) \leqq K_0+1$, $h(p_l) \leqq K_0+1$ $(l>i)$ legyen. Ez azt jelenti, hogy ha a (ii) esetnek van előfordulása $\mathcal{T}_{\underline{A}} \circ \mathcal{T}_{\underline{B}}$-ben, akkor a legfeljebb $(n+3)\cdot(K_0+1)$ magasságu fák levezetései közt is van.

(n) A (iii) eset előfordulásának eldöntéséhez tegyük fel, hogy az (i)-(ii) esetek előfordulásaiból nem következik hogy $\mathcal{T}_{\underline{A}} \circ \mathcal{T}_{\underline{B}} \notin \mathcal{L}$. Ha a (iii) eset előfordulásával állunk szemben, akkor a (k)-ban leirtakkal megegyező módon elérhető, hogy $h(p_i^1) \leqq K_0+1$ legyen.

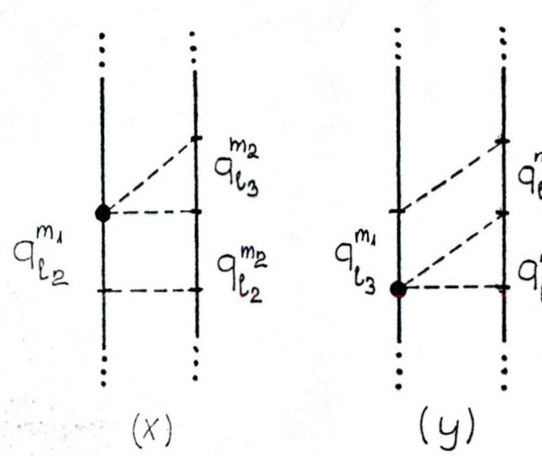
Két egymástól eltérő esetet kell megvizsgálnunk:

p_i^3 és p_l $(l>i)$ redukálhatóságát.

Vegyük észre, hogy ha p_i^3 esetén a kiválasztott utakra (u_{k_1} és u_{k_2}) szoritkozunk (az előfordulás vizsgálatához ez elegendő) akkor pontosan a 10.5.-ben szereplő (iii) eset p_3-ra vonatkozó vizsgálatát kell megismételnünk, azaz elérhető, hogy $h(p_i^3) \leqq 2K_0$ legyen.

(o) Legyen $p_l(e) = p_l^1(p_l^2(p_l^3(p_l^4(e))))$ $(l>i)$, p_l^2, p_l^3 és p_l^4 gyökerének legyen ugyanaz a cimkéje, $h(p_l^1)$, $h(p_l^2)$, $h(p_l^3) \geqq 1$. Feltételezhető, hogy nincs $i_0(>i)$, hogy valamely u_1' és u_2' uton a (iii) eset előfordulna. (**) (Ha van vizsgáljuk azt.) Legyen $q_{l_j}^m$ $(\in W_{AB}(p_l^j),\ 1 \leqq j \leqq 4,\ 1 \leqq m \leqq M)$ p_l^j u_m által kijelölt képe.

Ha van $h^*(q_{l_j}^m) = 0$ $(2 \leqq j \leqq 3)$, akkor $h^*(q_{l,4-j}^m) = 0$ mert különben az (i) eset előfordulásával állnánk szemben (ld. 10.10.2. ábra).



10.10.2. ábra

$q_{l_j}^{m_2}$ iterálása biztositja hogy véges-f tipust kapunk, $q_{l,4-j}^{m_1}$, $q_{l,4-j}^{m_2}$ iterálása pedig, hogy végtelen sok különböző értékü véges-f tipust ((x) j=3; (y) j=2).

Tehát bármely m_1, m_2 ($1 \leqq m_1 \leqq M$, $1 \leqq m_2 \leqq M$)-re, $j(2 \leqq j \leqq 3)$-re vagy $W_{AB}(p_1^j)$ egyetlen u_m-hez tartozó elemet tartalmaz vagy $h^*(q_1^{m_1}) > 0$, $h^*(q_1^{m_2}) = 0$, $h^*(q_{1,4-j}^{m_1}) > 0$, $h^*(q_{1,4-j}^{m_2}) = 0$ vagy $h^*(q_{1j}^{m_1}) = h^*(q_{1j}^{jm_2}) > 0$, $h^*(q_{1,4-j}^{m_1^j}) = h^*(q_{1,4-j}^{m_2}) > 0$.

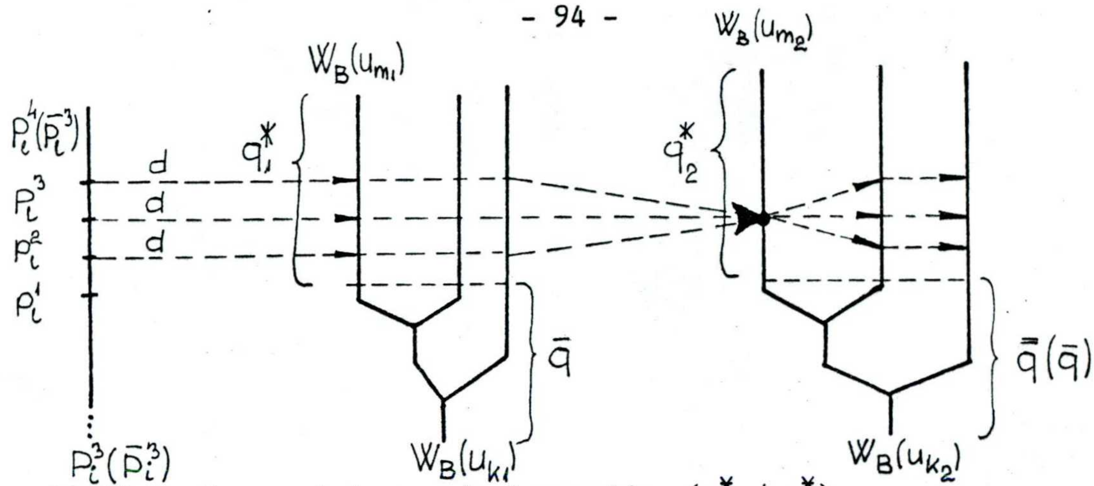
Az első eset kezelhető a másodikkal megegyező módon.

(p) Legyen $q_1^m \in W_{AB}(p_1^4(\bar{p}_1))$ ($1 \leqq m \leqq M$) az u_m ut által meghatározott. Ha $h^*(q_{1j}^{m_2}) = h^*(q_{1j}^{m_2}) > 0$, akkor $q_{13}^{m_1}(\bar{q}_1^{m_1}) = \bar{q}^*(q_{13}^{m_2}(\bar{q}_1^{m_2}))$ és $q_{12}^{m_1}(q_{13}^{m_1}(\bar{q}_1^{m_1})) = \bar{q}^*(q_{13}^{m_2}(q_{13}^{m_2}(\bar{q}_{13}^{m_2})))$ ($h^*(\bar{q}^*) \geqq 0$) feltehető.

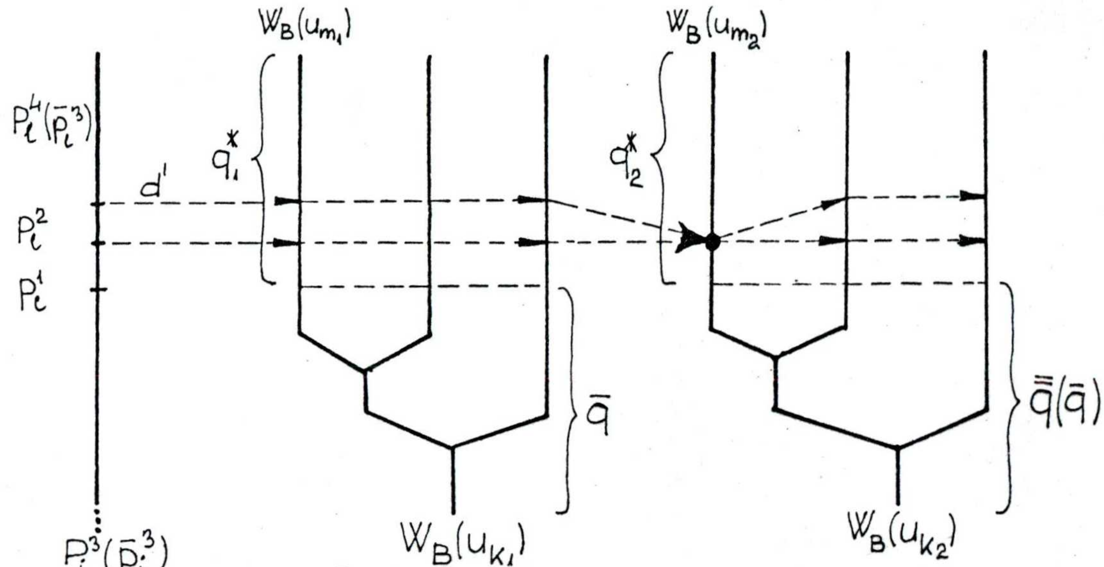
Ha elvégezzük a p_3^1 elhagyásával járó redukciót, akkor azokon az utakon ahol $h^*(q_{13}^m) = 0$, az ut által kijelölt kép q-ban változatlan marad, a többi esetben a képek között ugyanaz a kapcsolat (egyenlőség vagy gyenge-f tulajdonság) fog fennállni mint a redukció előtt.

Ugyanez igaz akkor is, ha a p_2^1 vagy a $p_2^1(p_3^1)$ elhagyásával járó redukciót végezzük el.

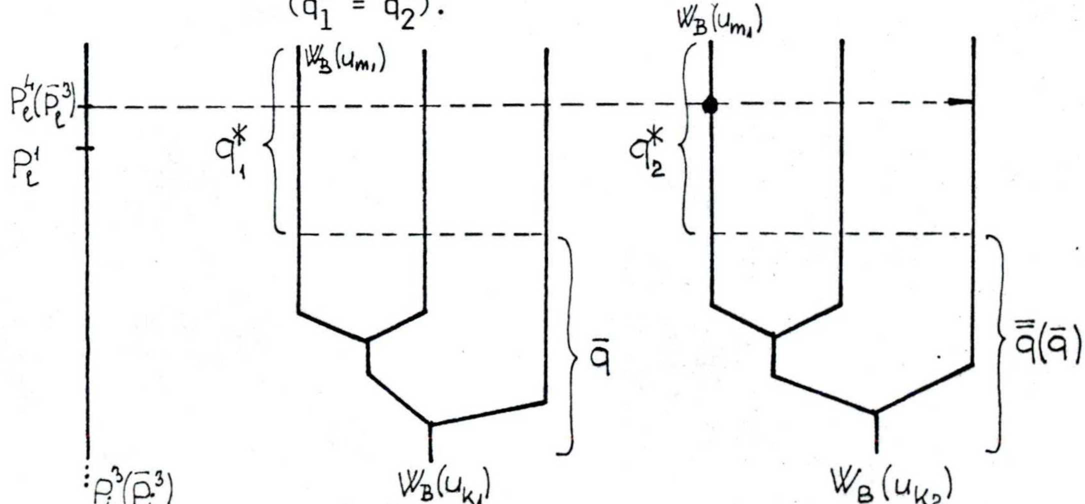
(q) A rendukció előtt $p_i^3(\bar{p}_i^3)$ u_{k_1} és u_{k_2} által kijelölt képei erős-f tulajdonságuak. Ha a p_1^3 elhagyásával járó redukció után ezek nem lennének erős-f tulajdonságuak, akkor az azt jelentené (ld. 10.10.3. ábra), hogy valamely u_{m_1} és u_{m_2} uton $h^*(q_{13}^{m_1}) > 0$ $h^*(q_{13}^{m_2}) = 0$ és $p_1^1(p_1^2(p_1^4(\bar{p}_1^3)))$ u_{m_1} és u_{m_2} által kijelölt képei egyenlők vagy gyenge-f tulajdonságuak. Ez viszont azt jelenti, hogy a $p_1^2(p_1^3)$ elhagyásával járó redukció végrehajtása esetén $p_1^1(p_1^4(\bar{p}_1^3))$ u_{m_1} és u_{m_2} által kijelölt képei erős-f tulajdonságuak lesznek, s ezen keresztül $p_i^3(\bar{p}_i^3)$ u_{k_1} és u_{k_2} által kijelölt képei is erős-f tulajdonságuak lesznek (ld. 10.10. 4.-5. ábra).



10.10.3. <u>ábra</u> A d egy részlevezetése ($q_1^* \neq q_2^*$).



10.10.4. <u>ábra</u> A p_1^3 elhagyását jelentő redukció utáni állapot ($q_1^* = q_2^*$).



10.10.5. <u>ábra</u> A $p_1^2(p_1^3)$ elhagyását jelentő redukció utáni állapot ($q_1^* \neq q_2^*$).

Tehát a két redukció közül választhatunk olyat (p_1^3 vagy $p_1^2(p_1^3)$ elhagyása), amely után $p_i^3(\bar{p}_i^3)$ u_{k_1} és u_{k_2} által kijelölt képe erős-f tulajdonságu. Ez pedig azt jelenti, hogy elérhető hogy

$h(p) \leqq i \cdot (K_0+1)+(K_0+1)+K_0+2k_0+(n-i)\ (2K_0+1)+1.$ $(n \leqq n_1+n_2)$

(r) Az (n)-(q) alatt mondottak szerint, hogy ha más az (i) és (ii) esetek vizsgálatából nem következik $\mathcal{T}_{\underline{A}} \circ \mathcal{T}_{\underline{B}} \notin \mathcal{L}$, akkor a (iii) eset előfordulása is eldönthető a legfeljebb $(n_1+n_2+2)\ (2K_0+1)$ magasságu fák levezetéseinek vizsgálatával.

10.11. Sejtés

Tetszőleges $\underline{A}$ és $\underline{B}$ 1-transzformátorokra eldönthető a 7.12.-ben mondott feltétel.

Irodalomjegyzék

[1.a.] Gécseg Ferenc és Magnus Steinby:
A faautomaták algebrai elmélete I.
(Matematikai Lapok 26. évfolyam 3-4. szám 169-207.)

[1.b.] Gécseg Ferenc és Magnus Steinby:
A faautomaták algebrai elmélete II.
(Matematikai Lapok 27. évfolyam 3-4. szám 283-336.)

[2.] Engelfriet, Joost:
Tree automata and tree grammars
(Lectures Notes, DAIMI FN-10, Inst. Math. Aarhus 1975)

[3.] Engelfriet, Joost:
Bottom-um and top-down tree transformation.
A comparison.
(Mathematical Systems Theory 9 (1975) 198-231.)

[4.] Rounds, W. C.:
Mappings and grammars on trees
(Mathematical Systems Theory 4 (1970) 257-287.)

[5.] Ogden, W. F and Rounds, W. C.:
Compositions of n-tree transducers
(Proceedings of the 4^{th} Annual ACM Symposium on Theory of Computing (1972), 198-206.)

[6.] Ésik Zoltán:
Decidability results concerning tree transducers I.
(Acta Cybernetica 5 (1980) 1-20.)

[7.] Zachar Zoltán:
The solvability of the equivalence problem for the deterministic frontier-to-root transducers
(Acta Cybernetica 4 (1979), 167-177.)

[8.] Salomaa, Arto:
Formal langagues
(Academic Press (1973))

[9.] Gécseg Ferenc and Magnus Steinby:
Minimal ascending tree automata
(Acta Cybernetica 4 (1978), 37-44.)

[10.] Neumüller Imre:
A leszálló fatranszformátorok invertálhatósága
(Diplomamunka, JATE Szeged, 1982.
A XVI. OTDK kiemelkedő pályamunkái III.)

[11.] Steinby M.:
On algebras as tree automata - Contributions to Universal algebra
(Record Coll. Universal Algebra, Szeged (1975). North-Holland,
Amsterdam (1977), 441-455.)

[12.] Kovács Tibor:
Fatranszformációk kompoziciójának indukálhatósága
(Diákköri dolgozat, JATE Szeged, 1982.
A XVI. OTDK kiemelkedő pályamunkái III.)