Doktori értekezés tézisei

Teljes polinomiális vektormezők és torzított szorzat sokaságok

Nuri Muhammed Ben Yousif

Szeged

2004

1. Bevezetés

Az értekezés három publikált cikken alapszik, amelyek a matematika következő két területével kapcsolatosak: teljes polinomiális vektormezők és geodetikusok torzított szorzat sokaságokon. Az egyes cikkeknek megfelelően az értekezés három fő fejezetből áll.

A 2. fejezetben az $S := (x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1)$ véges dimenziós szimplexeken értelmezett polinomiális vektormezőket és fixpontjaikat írjuk le. Az eredményeket alkalmazzuk genetikai evolúciós modellek differenciálegyenletére. Az irodalomban több jól ismert modell található egy $\mathbb{N}$ különböző fajból álló zárt populáció evolúciójával kapcsolatban ([4], [5], [2]). A teljes populáció a $t \geq 0$ időpillanatban a $\frac{d}{dt}v_k(t) = F_k(v_1(t), v_2(t), \ldots, r_N(t))$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$ differenciálegyenletrendszer megoldása, ahol az F_k függvények legfeljebb harmadfokú polinomok. Egy ilyen modellekkel kapcsolatos szemináriumon hangzott el a következő kérdés: milyen következményei vannak annak a feltevésnek, hogy az evolúciónak nincs kezdőpontja az időben, és mi állítható az időben állandó eloszlásról ebben az esetben? Ebben a fejezetben teljes algebrai leírását adjuk az összes olyan (tetszőleges fokú) $V(x) = (F_1(x), F_2(x), \ldots, F_N(x))$, az $\mathbb{R}^N$ téren értelmezett polinomiális vektormezőnek, amely esetén az evolúciós egyenletnek tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ paraméterre értelmezett megoldásai léteznek, amelyek teljesítik a következő természetes növekedési feltételeket: $r_1(t)$, $r_2(t)$, $r_3(t)$, ..., $r_N(t) \geq 0$; $\sum_{k=1}^{N} r_k(t) = 1$ amennyiben $r_1(0)$, $r_2(0)$, ..., $r_N(0) \geq 0$ és $\sum\limits_{k=1}^{N} r_k(0) = 1$. A kapott explicit formulák alapján leírjuk azon vektormezők zérushalmazának struktúráját, amelyek időben nem változó eloszláshoz tartoznak.

A 3. fejezet a $B := (x_1^2 + \cdots + x_n^2 < 1)$ Euklideszi egységgömbön értelmezett teljes polinomiális vektormezőkkel foglalkozik. Ez a munka Stachó László egy szép parametrikus formulájából ered, amely a komplex számok $\mathbb{C}$ halmazának $\mathbb{K}$ egységkörén definiált teljes valós polinomiális vektormezőket írja le. Megmutatta, hogy egy $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ valós polinomiális vektormező akkor és csak akkor teljes $\mathbb{K}$-n, ha p véges valós lineáris kombinációja az iz, $\gamma\overline{z}^m - \overline{z}z^{m+2}$, $(z \in \mathbb{C},\ m = 0, 1, \ldots)$ és $(1 - |z|^2)Q$ függvényeknek, ahol Q tetszőleges valós polinom $\mathbb{C}$-ből $\mathbb{C}$-be. Ebben a fejezetben bebizonyítjuk, hogy $p : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ akkor és csak akkor teljes polinomiális vektormező a B egységgömbön, ha $p(x) = R(x) - \langle R(x), x\rangle x + (1 - \langle x, x\rangle)Q(x)$ valamely $Q, R : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

polinomokra. Ez a tétel nemcsak általánosítja a [3]-ban található, $\mathbb{K}$-re vonatkozó eredményt, hanem egyszerűsíti is, mivel megmutatja, hogy a $\mathbb{C}$ egységkörén adott teljes polinomiális vektormezők a következő alakúak: $[ip(z)z + q(z)(1 - |z|^2)]$ ahol $p, q : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ tetszőleges valós polinomok.

A 4. fejezetben az $\mathbb{R}_0^N \times \mathbb{R}$ téren definiált centrálisan szimmetrikus torzított szorzat struktúrák geometriáját vizsgáljuk, ahol $\mathbb{R}_0^N = \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$, amelyek az $a\|x\|$, $a \geq 0$ potenciál-függvényekhez tartoznak, és amelyeken adott egy $\langle \cdot, \cdot \rangle$ Riemann skalárszorzat a következő tulajdonságokkal:

i) a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ Riemann skalárszorzat projekciója $\mathbb{R}^N$-re $\mathbb{R}^1$ irányában kanonikus euklideszi,

ii) $\mathbb{R}^1$ merőleges $\mathbb{R}^N$-re a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ skalárszorzatra nézve,

iii) a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ skalárszorzat projekciója $\mathbb{R}^1$-re $\mathbb{R}^N$ irányában az $(a, \alpha) \in \mathbb{R}_0^N \times \mathbb{R}^1$ pontban a kanonikus projekció szorozva $U(|a|^2)$-nel, ahol $U : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ sima.

Figyeljük meg, hogy ezek a tulajdonságok egyértelműen meghatározzák az (X, ξ), $Y(\eta) \in T_{(a,\alpha)}(\mathbb{R}_0^N \times \mathbb{R}^1)$ vektorok skaláris szorzatát, amely a következő alakba írható:

$$\langle (X, \xi) \cdot (Y, \eta) \rangle = \langle X, Y \rangle + U(|a|^2) \cdot \xi \cdot \eta.$$

2. Teljes polinomiális vektormezők szimplexeken

Jelölje $\mathbb{R}^N := \{(\xi_1, \ldots, \xi_N) : \xi_1, \ldots, \xi_N \in \mathbb{R}\}$ az összes valós szám-N-esek vektorterét; jelölje továbbá $x_1, \ldots, x_N$ a standard koordináta-függvényeket $\mathbb{R}^N$-en: $x_k : (\xi_1, \ldots, \xi_N) \to \xi_k$. Legyen S az egységszimplex

$$S := \big(x_1 + \cdots + x_N = 1, \quad x_1, \ldots, x_N \geq 0\big) =$$
$$= \{p \in \mathbb{R}^N : \; x_1(p) + \cdots + x_N(p) = 1, \quad x_1(p), \ldots, x_N(p) \geq 0\} \; .$$

Követve [6] terminológiáját, egy S-en értelmezett vektormezőn egyszerűen egy $S \to \mathbb{R}^N$ függvényt értünk. Egy $\varphi : S \to \mathbb{R}$ függvényt polinomnak nevezünk, ha a megszorítása az $x_1, \ldots, x_N$ lineáris koordináta-függvények valamely polinomjának, azaz együtthatók valamely véges $\alpha_{k_1 \ldots k_N} \in \mathbb{R}$ (ahol $k_1, \ldots, k_N \in \{0, 1, \ldots\}$) rendszerére $\varphi(p) = \sum_{k_1, \ldots, k_N} \alpha_{k_1 \ldots k_N} x_1^{k_1} \cdots x_N^{k_N}$ $(p \in S)$. Összhangban ezzel a terminológiával, egy V vektormezőt S-en polinomiális vektormezőnek nevezünk, ha a komponensei, azaz a $V_k := x_k \circ V$ (tehát $V(p) = (V_1(p), \ldots, V_N(p))$ for $p \in S$) függvények polinomok. Egyszerűen belátható, hogy bármely két $P_m = P_m(x_1, \ldots, x_N) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ $(m = 1, 2)$ polinomra, S-re vett megszorításuk akkor és csak akkor esik egybe, ha a $P_1 - P_2$ különbség eltűnik az S által generált $A_S := \big(x_1 + \cdots + x_N = 1\big)$ afin altéren. Később látni fogjuk, hogy egy $P = P(x_1, \ldots, x_N)$ polinom akkor és csak akkor tűnik el az $M := \big(\gamma_1 x_1 + \cdots + \gamma_N x_N = \delta\big)$ affin altéren, ha $P = (\gamma_1 x_1 + \cdots + \gamma_N x_N - \delta) Q(x_1, \ldots, x_N)$ valamely Q polinomra. Tehát S-en definiált polinomiális vektormezőknek több kiterjesztése lehet $\mathbb{R}^N$-re, de bármely két ilyen kiterjesztés csak egy $(x_1 + \cdots + x_N - 1)W$ alakú vektormezőben térhet el.

Definíció. Egy lokálisan Lipschitz (például polinom) $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ vektormezőt *teljesnek* nevezünk egy (nemüres) $K \subset \mathbb{R}^N$ részhalmazban, ha bármely $p \in K$ pontra létezik egy (szükségképpen egyértelműen meghatározott) $C_p : \mathbb{R} \to K$ görbe, amelyre $C_p(0) = p$ és $\frac{d}{dt} C_p(t) = V(C_p(t))$ $(t \in \mathbb{R})$.

Az a célunk, hogy leírjuk a teljes polinomiális vektormezőket S-en, majd alkalmazzuk az eredményeket genetikai evolúciós modellek differenciálegyenleteire.

Fő eredményeink a következők.

2.2. Tétel. *Egy $V : S \to \mathbb{R}^N$ polinomiális vektormező akkor és csak akkor teljes S-ben, ha a*

$$Z_k := x_k \sum_{j=1}^{N} x_j (e_j - e_k) \qquad (k = 1, \ldots, N)$$

vektormezőkre, ahol $e_j := (0, \dots, 0, \overbrace{1}^{j}, 0, \dots, 0)$ *a standard egységvektor,*

$$V = \sum_{k=1}^{N} P_k(x_1, \dots, x_N) Z_k$$

teljesül valamely $P_1, \dots, P_N : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *polinom-függvényekre.*

2.3. Tétel. *Ha adott egy* V *teljes polinomiális vektormező* S*-en, akkor léteznek* $\delta_1, \dots, \delta_N : \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}$ V*-nél kisebb fokú polinomok úgy, hogy a*

$$\widetilde{V} := \sum_{k=1}^{N-1} x_k \Big[\delta_k(x_1, \dots, x_{N-1}) - \sum_{\ell=1}^{N-1} x_\ell \delta_\ell(x_1, \dots, x_{N-1}) \Big] e_k +$$
$$+ (x_1 + \dots + x_{N-1} - 1) \sum_{\ell=1}^{N-1} x_\ell \delta_\ell(x_1, \dots, x_{N-1}) e_N$$

vektormező egybeesik V*-vel* S*-en.* V *zérushelyei a szimplex alacsonyabb dimenziós oldalain* $S_K := S \cap (x_1, \dots, x_K > 0 = x_{K+1} = \dots = x_N)$ $(K = 1, \dots, N)$ *az alábbi módon írhatók le:*

$$(*) \qquad \begin{aligned} S_N \cap (V = 0) &= S \cap \bigcup_{k=1}^{N-1} \big(\delta_k(x_1, \dots, x_{N-1}) = 0 \big), \\ S_K \cap (V = 0) &= S_K \cap \big(\delta_1(x_1, \dots, x_{N-1}) = \dots = \\ &\qquad = \delta_K(x_1, \dots, x_{N-1}) \big) \qquad (K < N). \end{aligned}$$

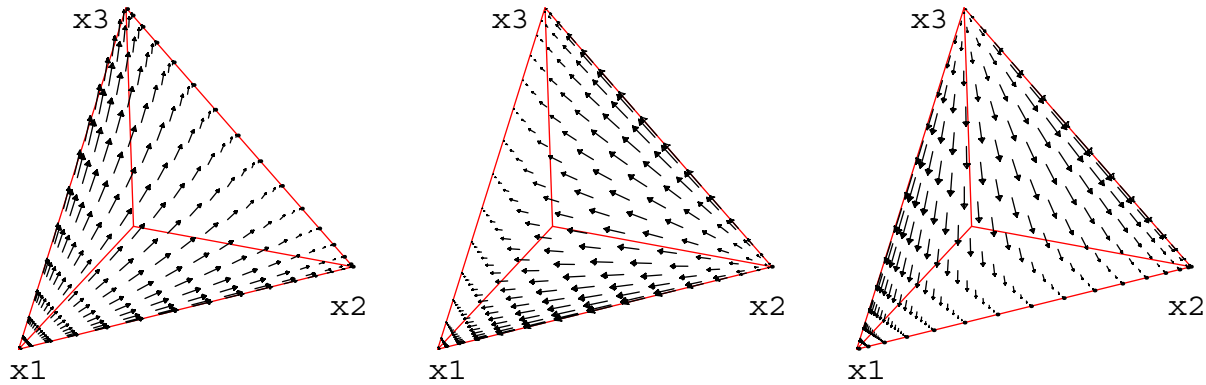


Fig1. The fundamental vector fields Z_1, Z_2, Z_3 in the case $N = 3$.

Concerning the genetical time evolution equation for the distribution of species within a closed population, in [7] we have the system

$$(**)\qquad \begin{aligned} \frac{d}{dt}x_k =& \Big(\sum_{i=1}^{N} g(i)x_i - g(k)\Big)x_k + \\ &+ \sum_{i,j=1}^{N} w(i,j)x_i x_j \Big[\sum_{\ell=1}^{N} M(i,j,\ell)\varepsilon(i,j,\ell,k) - x_k\Big] \end{aligned}$$

for describing the behaviour of the rates $x_1(t), \dots, x_N(t)$ at time t of the N species of the population. Itt $g(k), M(i,j,\ell)$ és $\varepsilon(i,j,\ell,k)$ nemnegatív konstansok, amelyekre $\sum_{\ell=1}^{N} M(i,j,\ell) = \sum_{k=1}^{N} \varepsilon(i,j,\ell,k) = 1$. Figyeljük meg, hogy ez az egyenlet a

$$\frac{d}{dt}x = \sum_{k=1}^{N} g(k)Z_k + W$$

alakban is írható, ahol

$$Z_k := x_k \sum_{j=1}^{N} x_j(e_j - e_k),$$

$$W := \sum_{i,j,k=1}^{N} w(i,j)x_i x_j \Big[\sum_{\ell=1}^{N} M(i,j,\ell)\varepsilon(i,j,\ell,k) - x_k\Big] e_k.$$

A 2.1 és 2.2 Tételek következményeként a következőt kapjuk.

2.4. Tétel. *Legyen $N \geq 3$. Then the time evolution of the population can be retrospected up to any time $t \leq 0$ starting with any distribution*

$(x(0),\dots,x_N(0)) \in S$ akkor és csak akkor, ha W eltűnik S-en, azaz ha $d/dt\ x = \sum_{k=1}^N g(k)Z_k(x_1,\dots,x_N)$. Ebben az esetben az időben állandó eloszlások a következőképpen adhatók meg:

$$\bigcup_{\gamma\in\{g(1),\dots,g(N)\}} S \cap (x_m = 0 \text{ for } m \notin J_\gamma) \qquad \text{where } J_\gamma := \{m:\ g(m)=\gamma\}\ .$$

2.5. Következmény. *Ha $g(1),\dots,g(N) \geq 0$ és a (**) vektormező teljes S-ben, akkor*

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^N g(k)x_k(t) \geq 0$$

teljesül a $dx/dt = V(x)$ evolúciós egyenlet tetszőleges $t \mapsto x(t) \in S$ megoldására.

3. Teljes polinomiális vektormezők az euklideszi gömbön

Ebben a fejezetben leírjuk azokat a polinomiális vektormezőket, amelyek teljesek egy véges dimenziós belső szorzat tér egységgömbjében. Ezt a belső szorzat teret $\mathbb{R}^N$-nel azonosítjuk.

3.1. Definíció. Ha adott egy K részhalmaza $\mathbb{R}^N$-nek, a valós szám N-esek halmazának, és egy $v : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ leképezés, akkor azt mondjuk, hogy v *teljes vektormező* K-ban, ha tetszőleges $k_0 \in K$ ponthoz létezik egy $x : \mathbb{R} \to K$ görbe úgy, hogy $x(0) = k_0$ és $\frac{dx(t)}{dt} = v(x(t))$ bármely $t \in \mathbb{R}$ esetén.

A 2. fejezetben láttuk, hogy a teljes polinomiális vektormezők egy szimplexen úgy állíthatók elő, mint egy harmadfokú teljes vektormezőkből álló véges család polinom kombinációi. Ez a gondolat a kiindulópontja a fő eredménynek ebben a fejezetben.

Először fogalmazzuk át Stachó tételét [4] lineáris kombinációk helyett polinom kombinációkra (komplex jelöléssel, azonosítva $\mathbb{R}^2$-et $\mathbb{C}$-vel a szokásos módon): egy $v : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ polinomiális vektormező akkor és csak akkor teljes a $\mathbb{K}$ egységkörlapon, ha véges $\mathbb{R}$-lineáris kombinációja az alábbi családhoz tartozó vektormezőknek:

$$\mathcal{F} := \big\{ iz,\ \mu\overline{z}^n - \overline{\mu} z^{n+2},\ (1-|z|^2)Q : \\ n = 0, 1, \ldots;\ \mu = 1, i;\ Q \in \mathrm{Pol}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \big\} .$$

Valójában $\mathcal{F}$ valós lineáris burka (az összes véges lineáris kombináció családja) egyszerűbben is megadható:

$$\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\mathcal{F} = \big\{ P \cdot iz + Q(1-|z|^2) : \\ P \in \mathrm{Pol}(\mathbb{C}, \mathbb{R}),\ Q \in \mathrm{Pol}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \big\} .$$

3.2. Megjegyzés. Idézzük fel, hogy egy $v : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ leképezést akkor nevezünk polinomiális vektormezőnek, ha $v(x) = (p_1(x), \ldots, p_N(x))$; $x \in \mathbb{R}^N$ valamely $p_1, \ldots, p_n : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ N-változós polinomokra (azaz mindegyik p_i véges lineáris kombinációja $x_1^{m_1} \ldots x_N^{m_N}$ alakú függvényeknek, ahol m_j nemnegatív egész és $x_j : (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N) \mapsto \xi_j$ jelöli a j-edik kanonikus koordináta-függvényt $\mathbb{R}^N$-en).

3.3. Definíció. Legyen $\langle (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N), (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_N) \rangle := \sum_{i=1}^N \xi_i \eta_i$ a belső szorzat $\mathbb{R}^N$-en. Könnyű látni, hogy egy polinom (sőt sima) vektormező akkor és csak akkor teljes a $B := (\langle x, x \rangle < 1)$ egységgömbben,

ha teljes az $S := (\langle x, x\rangle = 1)$ gömbfelületen. Továbbá v akkor és csak akkor teljes S-ben, ha merőleges a sugár vektorra, azaz ha $\langle v(x), x\rangle = 0$ bármely $x \in S$ pontra.

Tudjuk a 2. fejezetből, hogy ha $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ egy polinom, és $p : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ tetszőleges olyan polinom, amelyre $p(M) = 0$ és $M \subset R^N$, akkor létezik olyan $q : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ polinom, amelyre $P = q \cdot F$, ha $F(x) = \phi_1(x)\phi_2(x)\cdots\phi_N(x)$, és ϕ_i lineárisan független affin függvények. Az az eset, amikor $f(x) = 1 - \langle x, x\rangle$ fontos szerepet játszik a fő eredményünkben.

3.4. Lemma. *Legyen $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ olyan polinom, amelyre $f(x) = 0$ ha $x \in S$, ahol $S := (\langle x, x\rangle = 1)$. Ekkor létezik olyan $Q : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ polinom, amelyre $f(x) = (1 - \langle x, x\rangle)Q(x)$.*

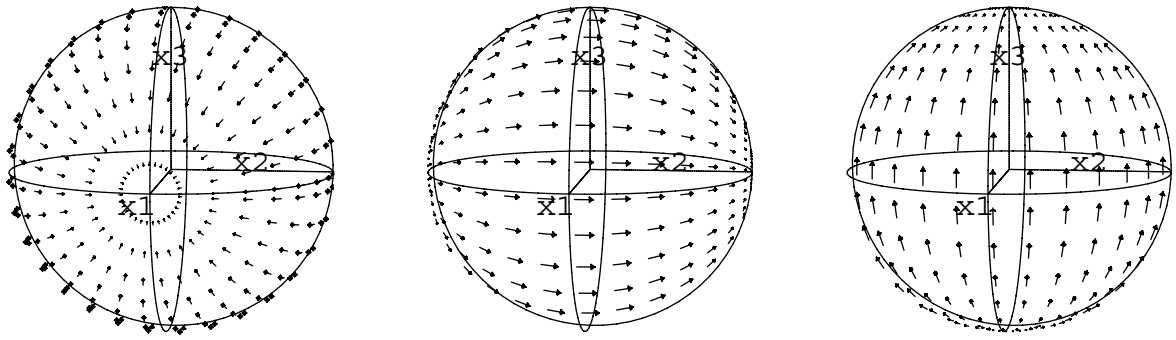
Az ilyen jellegű lemmák nagyon fontosnak tűnnek a polinomegyenlőtlenségek által meghatározott tartományok teljes polinomiális vektormezőinek az elméletében. A komplex esetben hasonló eredmények vannak, de a bizonyításokat nem lehet lemásolni még a gömb esetében sem.

3.5. Tétel. *Legyen $P : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ egy polinom leképezés. Ekkor P akkor és csak akkor teljes polinomiális vektormező az $S := (\langle x, x\rangle = 1)$ gömbfelületen, ha*

$$P(x) = R(x) - \langle R(x), x\rangle x + (1 - \langle x, x\rangle)Q(x)$$

teljesül valamely $R, Q : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ polinom leképezésekre.

3.6. Következmény. *Legyen $V_k : x \to e_k - \langle e_k, x\rangle x$, ahol $k = 1, 2, 3, \ldots, N$. Ekkor bármely, az $S := \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2 = 1\right)$ gömbfelületen teljes polinomiális vektormező megegyezik egy $V(x) = \sum_{k=1}^{N} p_k(x)V_k(x)$ alakú vektormezővel (megszorítva S-re) ahol $p_1, \ldots, p_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ megfelelő polinomok.*



2. ábra The vector fields $V_k : x \mapsto e_k - \langle e_k, x\rangle x$, $(k{=}1, 2, 3)$ on $S \subset \mathbb{R}^3$.

3.7. Következmény. *Az S-en teljes polinom-vektormezők pontosan a*

$$\widetilde{V} : x \mapsto xA(x)$$

alakú vektormezők megszorításai, ahol $A : \mathbb{R}^N \to \mathrm{Mat}^{(-)}(N, \mathbb{R})$ tetszőleges polinom leképezés az $N \times N$-es antiszimmetrikus mátrixok terébe.

3.8. Megjegyzés. Érdekes kapcsolat van a $P := (x_1 + \cdots + x_N,\ x_1, \ldots, x_N \geq 0)$ egységszimplexen illetve az $S := (x_1^2 + \cdots + x_N^2 = 1)$ gömbön megadott teljes polinomiális vektormezők közt. A

$$T : (x_1, \ldots, x_N) \mapsto (x_1^2, \ldots, x_N^2)$$

leképezés a gömb $S_+ := S \cap (x_1, \ldots, x_N \geq 0)$ pozitív részét egy-egy értelmű módon felelteti meg P pontjaival. Ha adott egy $W : P \to \mathbb{R}^N$ $(W(x) = (w_1(x), \ldots, w_N(x)))$ sima teljes vektormező a P szimplexen, ennek a visszahúzottja S_+-ra

$$T^{\#}V : S_+ \ni (x_1, \ldots, x_N) \mapsto \left.\frac{d}{d\tau}\right|_{\tau=0} T^{-1}\big(T(x) + \tau W(T(x))\big) =$$

$$= \left.\frac{d}{d\tau}\right|_{\tau=0} \big([x_1^2 + \tau w_1(x_1^2, \ldots, x_N^2)]^{1/2}, \ldots, [x_N^2 + \tau w_N(x_1^2, \ldots, x_N^2)]^{1/2}\big) =$$

$$= \frac{1}{2}\big(x_1^{-1} w_1(x_1^2, \ldots, x_N^2), \ldots, x_N^{-1} w_N(x_1^2, \ldots, x_N^2)\big)\ .$$

Speciálisan a $T^{\#}$ operáció a következő kapcsolatot létesíti a P-n adott $Z_k(x) := x_k \sum_{i=1}^N x_i(e_i - e_k)$ of P és az S-en adott $V_k(x) := e_k - \langle e_k, x\rangle x$ fundamentális teljes polinomiális vektormezők között:

$$T^{\#} Z_k(x) = \tfrac{1}{2} x_k V_k(x) \qquad (k = 1, \ldots, N)\ .$$

Vagyis minden P-ben teljes polinomiális vektormező egy S_+-beli teljes polinomiális vektormező visszahúzottja. Nevezetesen

$$T^{\#}\left(\sum_{k=1}^N p_k(x) Z_k(x)\right) = \sum_{k=1}^N \tfrac{1}{2} x_k p_k(x_1^2, \ldots, x_N^2) V_k(x).$$

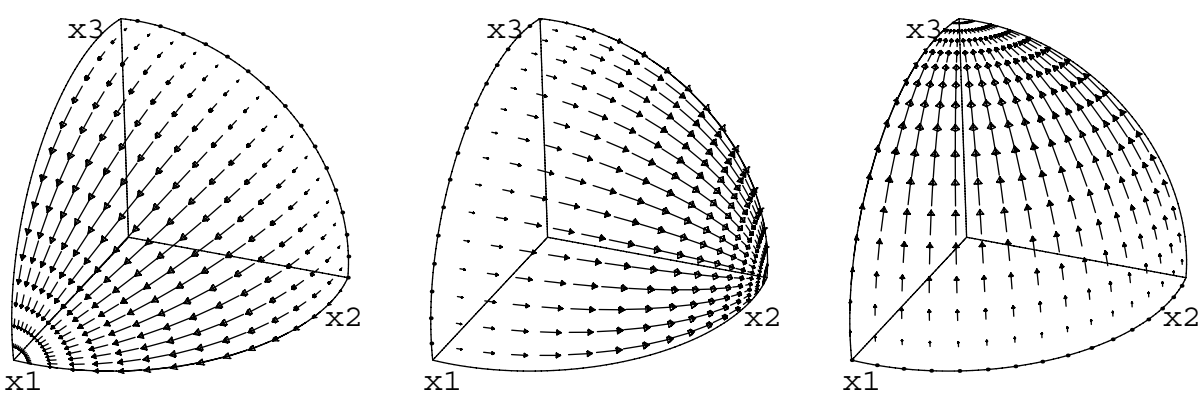


Figure 3. The vector fields $x_k V_k(x)$, $(k = 1, 2, 3)$ on $S_+ \subset \mathbb{R}^3$.

4. Geodetikusok középpontosan szimmetrikus torzított szorzat sokaságokon

Legyen adott egy $U : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ sima függvény. Tekintsük az $\mathbb{R}_0^n \times \mathbb{R}^1$ sokaságot, ahol az $\mathbb{R}_0^n = \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ téren adott egy $\langle \cdot, \cdot \rangle$ Riemann skalárszorzat a következő tulajdonságokkal:

i) a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ Riemann skalárszorzat projekciója $\mathbb{R}^N$-re $\mathbb{R}^1$ irányában kanonikus euklideszi,
ii) $\mathbb{R}^1$ merőleges $\mathbb{R}^N$-re a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ skalárszorzatra nézve,
iii) a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ skalárszorzat projekciója $\mathbb{R}^1$-re $\mathbb{R}^N$ irányában az $(a, \alpha) \in \mathbb{R}_0^N \times \mathbb{R}^1$ pontban a kanonikus projekció szorozva $U(|a|^2)$-nel, ahol $U : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ sima.

Ezek a tulajdonságok egyértelműen meghatározzák az (X, ξ), $(Y, \eta) \in T_{(a,\beta)}(\mathbb{R}_0^n \times \mathbb{R}^1)$ tangesvektorok skalárszorzatát, amely a következő:

$$g_{(a,\beta)}((X, \xi), (Y, \eta)) = \langle X, Y \rangle + \xi \cdot \eta \cdot \cup(|a|^2). \tag{1}$$

ahol $\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n X_i \cdot Y_i$. Az egyszerűség kedvéért a következő jelölést alkalmazzuk:

$$\langle (X, \xi), (Y, \eta) \rangle_* = g_{(a,\beta)}((X, \xi)(Y, \eta)).$$

Ez az egyszerűsítés nem vezet félreértéshez, mivel mindig tudjuk, hogy az érintővektor melyik ponthoz tartozik. (a, β)-ban β-t úgy tekintjük, mint az $(n + 1)$-edik koordináta.

Egyik fő eredményünk az alábbi tétel.

4.1. Tétel. *The Levi-Civita connection of the Riemannian metric* (1) *introduced above has the following Christoffel symbols*

$$\Gamma_{i,j}^k(a, \beta) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad i, j, k \leq n \\ 0 & \text{if} \quad i, j \leq n, \ k = n + 1 \\ 0 & \text{if} \quad i, k \leq n, \ j = n + 1 \\ 0 & \text{if} \quad j, k \leq n, \ i = n + 1 \\ -\partial_k(U(z))/2 & \text{if} \quad k \leq n, \ i, j = n + 1 \\ \partial_i(U(z))/2U(z) & \text{if} \quad j, k = n + 1 \\ \partial_j(U(z))/2U(z) & \text{if} \quad i, k = n + 1 \\ 0 & \text{if} \quad i, j, k = n + 1 \end{cases},$$

ahol $1 \leq i, j, k \leq n+1$, $z = \langle a, \beta \rangle$ *és* ∂_s *az* s*-edik koordinátára vonatkozó deriválás.*

4.2. Következmény. *A geodetikusok differenciálegyenletrendszere*

$$\dot{\beta} = h/U(Z)$$

$$\ddot{a}_j = a_j h^2 U'(Z)/U^2(Z) \quad 1 \le j \le n$$

ahol h egy alkalmas konstans, $Z = \langle a, \beta \rangle$, és $(a(s), \beta(s))$ az a geodetikus, amelynek koordinátái $\{a_j\}_{j=1}^n$ és β.

Ebből a geodetikusok következő leírását kapjuk.

4.3. Tétel *Legyen $(\mathbf{x}(s), \xi(s))$ egy geodetikus $\mathbb{R}_0^n \times \mathbb{R}^1$-ben az (1) Riemann metrikára nézve. Legyenek a kezdeti értékek $s = 0$ esetén $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, $\xi(0) = \xi_0$, $\dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{t}_0$, $\dot{\xi}(0) = \tau_0$. Ekkor a következő lehetőségek vannak:*

a) *Ha $\tau_0 = 0$, akkor a $(\mathbf{x}(s), \xi(s))$ geodetikust tartalmazza az $\mathbf{x}(s) = \mathbf{t}_0 s + \mathbf{x}_0$, $\xi(s) = \xi_0$ egyenes; ez a geodetikus teljes, kivéve abban az esetben, ha $\xi_0 = 0$ és a $\mathbf{t}_0$ és $\mathbf{x}_0$ vektorok kollineárisak.*

b) *Ha $\tau_0 > 0$, akkor a geodetikus projekciója $\mathbb{R}_0^n$-re egy $\mathbf{0}$ középpontú ellipszis. Egyenlete a következő:*

$$\mathbf{x}(s) = \cos(\sqrt{\tau_0}\|\mathbf{x}_0\|^{-1}s)\mathbf{x}_0 + \sin(\sqrt{\tau_0}\|\mathbf{x}_0\|^{-1}s)\sqrt{\tau_0}\|\mathbf{x}_0\|\mathbf{t}_0.$$

A megfelelő geodetikus teljes kivéve abban az esetben, ha a $\mathbf{t}_0$ és $\mathbf{x}_0$ vektorok kollineárisak és az előbbi ellipszis egy $\mathbf{0}$ középpontú szakasszá fajul.

c) *Ha $\tau_0 < 0$, akkor a geodetikus projekciója $\mathbb{R}_0^n$-re egy $\mathbf{0}$ középpontú hiperbola. Egyenlete a következő:*

$$\mathbf{x}(s) = \cos h(\sqrt{\tau_0}\|\mathbf{x}_0\|^{-1}s)\mathbf{x}_0 + \sin h(\sqrt{\tau_0}\|\mathbf{x}_0\|^{-1}s)\sqrt{\tau_0}\|\mathbf{x}_0\|\mathbf{t}_0.$$

Ha a $\mathbf{t}_0$ és $\mathbf{x}_0$ vektorok kollineárisak, akkor ez a hiperbola egy félegyenessé fajul. A megfelelő geodetikus teljes.

Most a második esettel foglalkozunk (aKepler-mozgások geometriájának meghatározásához).

Ebben az esetben a metrikát meghatározó függvény $U(z) = c\sqrt{z}$. A geodetikusoknak a következő leírása adható.

4.4. Tétel. *Legyen $(a(s), \alpha(s))$ egy geodetikus $\mathbb{R}_0^n \times \mathbb{R}^1$-ben az (1) Riemannian metrikára nézve. Legyenek a kezdeti értékek $s = 0$ esetén $a_0 = a(0)$, $\alpha_0 = \alpha(0)$, $T = \dot{a}(0)$, $\tau = \dot{\alpha}(0)$. Legyenek E_1, $E_2 \in \mathbb{R}_0^n$ az a_0 és T által kifeszített ortogonális egységvektorok W-ben. Válasszuk az E_1 és E_2 vektorokat oly módon, hogy teljesüljön*

$$a_0 = a_1 \cdot E_1, \quad T = T_1 \cdot E_1 + T_2 \cdot E_2.$$

Ha $T_2 \neq 0$, akkor a geodetikusoknak a következő leírása adható:

A geodetikusok nem lépnek ki a W és $\mathbb{R}^1$ által kifeszített térből. Továbbá, ha T projekcióját $\mathbb{R}^1$-re $\mathbb{R}^n_0$ irányában T_3 jelöli, akkor három lehetőség van.

i) ha $|(T,\tau)|^2_* = T_1^2 + T_2^2 + c \cdot |a_1^0| \cdot T_3^2 < 0$, akkor a geodetikus projekciója W-re egy ellipszis,
ii) ha $|T,\tau)|^2_* = T_1^2 + T_2^2 + c \cdot |a_1^0| \cdot T_3^2 = 0$, akkor a geodetikus projekciója W-re egy parabola,
iii) ha $|T,\tau)|^2_* = T_1^2 + T_2^2 + c \cdot |a_1^0| \cdot T_3^2 > 0$, a geodetikus projekciója W-re egy hiperbola.

A geodetikus vetületének egyenlete polár-koordinátákban

$$P(\gamma) = \frac{2 \cdot |a_1^0|^3 \cdot T_2^2}{-c \cdot T_3^2 \cdot |a_1^0|^3 + v \cdot \cos(\varphi - \omega)},$$

ahol

$$v = \operatorname{sgn}(c) = \cdot\sqrt{4 \cdot T_1^2 \cdot T_2^2 \cdot |a_1^0|^4 + (2 \cdot T_2^2 \cdot |a_1^0|^2 + c \cdot T_3^2 \cdot |a_1^0|^3)^2},$$

$$\omega = \arcsin\Big(\frac{2 \cdot T_1 \cdot a_1^0 \cdot \operatorname{sgn}(c)}{U}\Big)$$

és $p = |a|$, $\cos\varphi = \langle a, E_1\rangle / |a|$.

4.5. Következmény. *Ha $c > 0$, akkor a geodetikusok minden vetülete hiperbola, amelynek aszimptotikus egyenesei áthaladnak az origón és amelyek iránya $\omega - \arccos(1/\varepsilon)$ és $\omega + \arccos(1/\varepsilon)$. Az aszimptotikus egyenesek origóhoz legközelebb eső pontja $(\omega, |a_0| \cdot T_2^2/(u - v))$. Ezért az origó nincs a hiperbola belsejében.*

4.6. Következmény. *Egy geodetikus vetülete akkor és csak akkor kör, ha $c < 0$, T merőleges a_0-ra és $|T|^2 + |(T,\tau)|^2_* = 0$. A kör sugara $2 \cdot |T|^2/(-c \cdot \tau^2)$. Középpontja az origó.*

4.7. Következmény. *Ha egy geodetikus projekciója ellipszis (and for its eccentricity) $\varepsilon \neq 0$, akkor a nagytengelyének iránya ω és hosszúsága $\frac{2 \cdot |a_0| \cdot T_2^2 \cdot u}{u^2 - v^2}$. Két fókuszpontja az origó és $\big(\omega, \frac{2 \cdot |a_0| \cdot T_2^2 \cdot u}{u^2 - v^2}\big)$. kistengelyének hossza $2 \cdot |a_0| \cdot T_2^2$.*

4.8. Következmény. *Ha a geodetikus vetülete egy parabola, akkor ez nyitott ω irányban. Legközelebbi pontja $(\omega + \pi, -T_2^2/(c \cdot \tau^2))$ és fókuszpontja az origó.*

4.9. Következmény. *Ha a geodetikus vetülete egy hiperbola és* $c < 0$*, akkor fókuszpontja az origó. Két aszimptotikus egyenesének iránya*

$$\omega + \arccos(1/\varepsilon)(1/\varepsilon) \quad \text{és} \quad \omega - \arccos(1/\varepsilon).$$

4.10. Tétel. *Ha* $\tau > (<) 0$*, akkor* α *szigorúan növekvő (csökkenő) és a következő differenciálegyenlet által meghatározott módon függ a* $p = |a|$ *értéktől:*

$$\frac{d\alpha}{dp} = \frac{\operatorname{sgn}\sin(\varphi - \omega) \cdot |a_0| \cdot T_2}{\sqrt{p^2(v^2 - u^2) + 2|a_0|T_2^2 \cdot u \cdot p - |a_0|^2 \cdot T_2^4}}, \tag{12}$$

ahol az első tételünk jelölését használtuk.

4.11. Következmény. *Ha a geodetikus vetülete egy ellipszis, akkor*

$$p(\alpha) = \frac{c \cdot a_0^2 \cdot \tau^2}{|T, \tau}|_*^2 - \frac{|a_0| \cdot v}{|(T, \tau)|_*^2} \cdot \sin\Big(\frac{\sqrt{|T|^2 + \tau^2}}{\tau \cdot |a_0| \cdot \operatorname{sgn}(\sin(\varphi - \omega))} - \text{const}\Big),$$

ahol const olyan szám, amelyre $p(\alpha) = |a_0|$*.*

4.12. Következmény. *Ha a geodetikus vetülete egy parabola, akkor*

$$p(\alpha) = \frac{c \cdot \tau^2}{4} \cdot (\alpha_0 - \alpha) + |a_0|.$$

Irodalom

[1] V.I. ARNOL'D, *Mathematical methods of classical mechanics,* Graduate Texts in Mathematics, 60, Springer-Verlag, New York, 1989.

[2] P.T. NAGY, *Bundle-like conform deformation of a Riemannian submersion,* Acta Math. Hung. **39** (1982) 155-161.

[3] P.T. NAGY, *Non-horizontal geodesics of a Riemannian submersion,* Acta Sci. Math. Szeged, **45** (1983) 347-355.

[4] B. O'NEILL, Semi-Riemannian Geometry, with applications to relativity, Pure and Applied Mathematics, 103. Academic Press, Inc., 1983.

[5] A. ZEGHIB, Geometry of warped products, preprint, 2001, http://umpa.ens-lyon.fr/zeghib/.

[6] F. Brickell - R.S. Clark, Differentiable Manifolds, Van Nostrand Reinhold Co., London, 1970.

[7] L. Hatvani, *A modification of Tusnády's modell for genenetical evolution,* preprint, 2001.

[8] J. Hofbauer – K. Sigmund, Evolutionary Games and Replicator Dynamics, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.

[9] L.L. Stachó, *On nonlinear projections of vector fields,* NLA98: Convex analysis and chaos (Sakado, 1998), 47–54, Josai Math. Monogr., 1, Josai Univ., Sakado, 1999.

[10] L.L. Stachó, *A counterexample concerning the problem of contractive projections of real JB*-triples,* Publ. Math. Debrecen, **58** (2001) 223-230.

[11] G. Tusnády, *Mutation and selection* (Hungarian), Magyar Tudomány, **7** (1997), 792-805.

Nuri Muhammed Ben Yousif publikációi

[1] M.ben Y. Nuri, *Complete polynomial vector fields in simplexes with application to evolutionary dinamics,* Electronic Journal od Qualitative Theory of Differential Equations Szeged, to appear 2004.

[2] M.ben Y. Nuri, *Complete polynomial vector fields in Euclidean ball,* Publ. Math. Nyíregyháza, to appear 2004.

[3] M.ben Y. Nuri, *Geodesics on a central symmetric warped product manifold,* Publ. Math. Nyíregyháza, to appear 2004.