TAUBER-TÍPUSÚ TÉTELEK KÖZÖNSÉGES ÉS STATISZTIKUS KONVERGENCIÁRA, STATISZTIKUS HATÁRÉRTÉKRE

Tézis

Fekete Árpád

2006

A Tauber-típusú tételek jelentősége Littlewood tételéből eredt (1910), amely a matematikai analízis új ágát nyitotta meg. Ezekkel a tételekkel egy sor bizonyos szummálhatóságából következtetni tudunk a konvergenciára valamely plusz feltétel segítségével. A Tauber-típusú tételeknek számtalan alkalmazási területe van, többek közt a számelméletben vagy a valószínűségelméletben. Az értekezés egyrészt Tauber-típusú tételeket ad integrálok súlyozott közép szerinti szummálhatóságához közönséges konvergenciára, másrészt Tauber-típusú feltételeket ad arra, hogy integrálok és kettős sorozatok statisztikus szummálhatóságából azok statisztikus határértéke és statisztikus konvergenciája következzék.

Mérhető függvények statisztikus határértékének fogalmát Móricz Ferenc témavezetőm vezette be két éve, mint a statisztikus konvergencia nemdiszkrét változatát [8]. Az értekezés negyedik fejezete erre irányul, szükséges és elegendő feltételt nyújt statisztikus határérték létezésére. Az értekezés hat fejezetből áll, ebből ngy fejezet a következő négy cikken alapul: [4], [3], [6] és [5]. A további két fejezet ismertető, összefoglaló jellegű.

1. Karamata egy Tauber-típusú tételének élesítése

Jovan Karamata 1937-ben publikálta [7] egyik híresebb tételét, mely szerint ha P folytonos, szigorúan növekedve tart a végtelenbe,

$$\sigma(t) = \frac{1}{P(t)} \int_0^t s(x) dP(x) \ \to \ c, \ t \to \infty,$$

valamint $s(t)$ lassan csökkenő a P-re vonatkozólag, azaz

$$\lim_{\lambda \to 1+} \liminf_{t \to \infty} \min_{t \le x \le P^{-1}(\lambda P(t))} \{s(x) - s(t)\} \ge 0,$$

akkor

$$s(t) \to c, \ \text{ha } t \to \infty.$$

Ezen fejezet szükséges és elegendő feltételt nyújt arra vonatkozólag, hogy lokálisan integrálható függvények súlyozott közép szerinti szummálhatóságából következzen az integrálok konvergenciája is. Ez az általános tétel speciális esetként tartalmazza Karamata tételét.

Legyen tehát P az $R_+ := [0, \infty)$ intervallumon értelmezett függvény olyan, hogy

$$(1) \qquad P \text{ nemcsökkenő az } R_+\text{-on}, \quad P(0) = 0 \ \text{ és } \lim_{t\to\infty} P(t) = \infty.$$

P-t *súlyfüggvénynek* nevezzük, figyelembe véve, hogy pozitív Borel mértéket indukál R_+-on.

Minden komplex értékű $f : R_+ \to C$ függvényre, mely Lebesgue integrálható minden véges $(0, t)$ intervallumon, $0 < t < \infty$, szimbólummal: $f \in L^1_{\text{loc}}(R)$, tekintsük az

$$(2) \qquad s(x) := \int_0^x f(y)dy \text{ és } \sigma(t) := \frac{1}{P(t)} \int_0^t s(x)dP(x), \ t > 0,$$

integrálokat, feltéve, hogy $P(t) > 0$. A $\sigma(t)$ definíciójában szereplő integrál Riemann-Stieltjes értelemben létezik.

σ-t az s függvény súlyozott közepének nevezzük és az

$$(3) \qquad \int_0^\infty f(x)dx$$

integrált a *súlyozott közép szerint szummálhatónak* nevezzük a P súlyfüggvénnyel, röviden: (W, P) *szummálható*, ha a következő véges határérték létezik:

$$(4) \qquad \lim_{t\to\infty} \sigma(t) = l.$$

Legyen $\rho : R_+ \to R_+$ szigorúan növekvő, folytonos függvény, amelyre $\rho(t) \to \infty$, $t \to \infty$. ρ-t *felső megengedett függvénynek* nevezzük P-re vonatkozóan, ha

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{P(\rho(t))}{P(t)} > 1.$$

Hasonlóan ρ-t *alsó megengedett függvénynek* nevezzük P-re vonatkozóan, ha

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{P(t)}{P(\rho(t))} > 1.$$

Jelölje Λ_u és Λ_ℓ a felső és alsó megengedett függvények osztályát. Valós értékű f függvényre igaz a következő egyoldali Tauber-típusú tétel.

1. Tétel ([4]). *Tegyük fel, hogy P-re teljesül* (1), *továbbá $f : R_+ \to R$ és $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(R_+)$. Annak szükséges és elegendő feltétele, hogy a (W, P) szummálhatóságból, azaz* (4)*-ből következzen a* (3) *integrál konvergenciája ugyanazzal a határértékkel az, hogy teljesüljön az alábbi két feltétel:*

$$\sup_{\rho\in\Lambda_u} \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{P(\rho(t)) - P(t)} \int_t^{\rho(t)} \{s(x) - s(t)\} dP(x) \geq 0 \tag{5}$$

és

$$\sup_{\rho\in\Lambda_\ell} \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{P(t) - P(\rho(t))} \int_{\rho(t)}^{t} \{s(t) - s(x)\} dP(x) \geq 0. \tag{6}$$

E tétel közvetlen következménye Karamata tétele. Komplex értékű f függvényre bebizonyítjuk a következő kétoldali Tauber-típusú tételt.

2. Tétel ([4]). *Tegyük fel, hogy P-re teljesül* (1), *$f : R_+ \to C$ és $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(R_+)$. Annak szükséges és elegendő feltétele, hogy a* (3) *integrál (W, P) szummálhatóságból következzen annak konvergenciája is ugyanazzal a határértékkel az, hogy az alábbi két feltétel egyike teljesüljön:*

$$\inf_{\rho\in\Lambda_u} \limsup_{t\to\infty} \left| \frac{1}{P(\rho(t)) - P(t)} \int_t^{\rho(t)} \{s(x) - s(t)\} dP(x) \right| = 0 \tag{7}$$

vagy

$$\inf_{\rho\in\Lambda_\ell} \limsup_{t\to\infty} \left| \frac{1}{P(t) - P(\rho(t))} \int_{\rho(t)}^{t} \{s(t) - s(x)\} dP(x) \right| = 0. \tag{8}$$

Komplex esetben is kimondhatunk egy a Karamata-tételhez hasonló következményt, de ekkor a lassan csökkenés feltételét a lassan oszcillálás, azaz a

$$\lim_{\lambda\to 1+} \limsup_{t\to\infty} \max_{t\le x\le P^{-1}(\lambda P(t))} |s(x)-s(t)| = 0$$

feltételével kell helyettesítenünk. Az 1. és 2. Tételek jelentősége abban rejlik, hogy alkalmazhatóak az összes súlyozott közép szerinti szummálhatóságra.

2. Schoenberg tételének nemdiszkrét változata

A statisztikus konvergencia fogalmát H. Fast [1] vezette be 1951-ben. Az x_k számsorozatot *statisztikusan konvergensnek* nevezzük ξ-hez, ha bármely $\epsilon > 0$-ra

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \le n : |x_k - \xi| \ge \epsilon\}| = 0,$$

ahol az abszolútérték jel a halmaz elemszámát jelöli. Schoenberg 1959-ben [10] megmutatta, hogy az x_k sorozat ξ-hez való statisztikus konvergenciájának szükséges és elegendő feltétele az, hogy minden $t \in R$-re fennálljon az alábbi határérték:

$$\lim_{\ell\to\infty} \frac{1}{\ell} \sum_{k=1}^{\ell} e^{itx_k} = e^{it\xi}.$$

Móricz Ferenc a statisztikus konvergencia analogonjaként vezette be 2003-ban a mérhető függvények statisztikus határértékét [8]. Legyen az f függvény Lebesgue–mérhető a $(0,\infty)$ intervallumon. Az f függvénynek a ∞-ben *statisztikus határértéke* van, ha létezik olyan ξ szám, hogy bármely $\epsilon > 0$-ra

$$\lim_{a\to\infty} \frac{1}{a} |\{x \in (0,a) : |f(x) - \xi| > \epsilon\}| = 0, \tag{9}$$

ahol az abszolútérték jel most a halmaz Lebesgue–mértékét jelöli. Schoenberg tételét kiterjeszthetjük n-változós függvényekre. Legyen f komplex értékű függvény R_+^n-n, $R_+ := [0, \infty)$, amely az n-dimenziós Lebesgue mérték szerint mérhető, ahol $n \geq 1$ rögzített egész. (9) alapján az $f(\mathbf{u}) := f(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ függvénynek a ∞-ben statisztikus határértéke van, ha létezik olyan ξ szám, hogy bármely $\epsilon > 0$-ra

$$\lim_{\mathbf{b}\to\infty} |\mathbf{b}|^{-1} |\{\mathbf{0} \leq \mathbf{u} \leq \mathbf{b} : |f(\mathbf{u}) - \xi| \geq \epsilon\}| = 0 \tag{10}$$

teljesül, ahol $\mathbf{b} := (b_1, b_2, \ldots, b_n) \to \infty$ azt jelenti, hogy $\min_{1\leq j\leq n} b_j \to \infty$, $|\mathbf{b}| := b_1 b_2 \ldots b_n$ és $\mathbf{0} \leq \mathbf{u} \leq \mathbf{b}$ azt jelenti, hogy $0 \leq u_j \leq b_j$ minden $j = 1, 2, \ldots, n$-re. Ekkor azt írhatjuk, hogy

$$\text{st–} \lim_{\mathbf{u}\to\infty} f(\mathbf{u}) = \xi.$$

3. Tétel ([3]). *Legyen $f : R_+^n \to C$ mérhető függvény, ahol $n \geq 1$ rögzített egész. A*

$$\text{st–} \lim_{\mathbf{u}\to\infty} f(\mathbf{u}) = \xi$$

határérték létezésének szükséges és elegendő feltétele az, hogy minden $t \in R$-re

$$\lim_{\mathbf{b}\to\infty} \frac{1}{|\mathbf{b}|} \int_0^{b_1} \ldots \int_0^{b_n} e^{itf(\mathbf{u})} du_1 \ldots du_n = e^{it\xi}.$$

Schoenberg tétele kiterjeszthető többszösös sorozatokra is. E célból legyen N_+^n a $\mathbf{k} := (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ pozitív egészekből álló szám n-esek halmaza a k_j koordinátákkal, ahol $n \geq 1$ rögzített egész. Tekintsük komplex számok n-szeres sorozatait $(x_\mathbf{k} : \mathbf{k} \in N_+^n)$. $(x_\mathbf{k})$-t statisztikusan konvergensnek nevezzük, ha létezik olyan ξ szám, hogy minden $\epsilon > 0$-ra

$$\lim_{\mathbf{l}\to\infty} |\mathbf{l}|^{-1} |\{\mathbf{1} \leq \mathbf{k} \leq \mathbf{l} : |x_\mathbf{k} - \xi| \geq \epsilon\}| = 0,$$

ahol

$$|\mathbf{l}| = |(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n)| = \ell_1 \ell_2 \ldots \ell_n \quad \text{és} \quad \mathbf{1} := (1, 1, \ldots, 1).$$

Ekkor írhatjuk, hogy

$$\text{st–}\lim_{\mathbf{k}\to\infty} x_{\mathbf{k}} = \xi.$$

4. Tétel ([3]). *Legyen $x_{\mathbf{k}} : N_+^n \to C$, ahol $n \geq 1$ rögzített egész. A*

$$\text{st–}\lim_{\mathbf{k}\to\infty} x_{\mathbf{k}} = \xi$$

határérték létezésének szükséges és elegendő feltétele az, hogy minden $t \in R$-re

$$\lim_{\mathbf{l}\to\infty} \frac{1}{|\mathbf{l}|} \sum_{\mathbf{1}\leq\mathbf{k}\leq\mathbf{l}} e^{itx_{\mathbf{k}}} = e^{it\xi}.$$

Legyen ν tetszőleges pozitív mérték R_+^n Borel mérhető részhalmazain (vagy esetleg csak N_+^n-n) a $\nu(R_+^n) = \infty$ tulajdonsággal. Vezessük be R_+^n-n Borel mérhető függvények statisztikus határértékének, valamint többszörös sorozatok fogalmát N_+^n-n a ν mértékre vonatkozólag a következőképpen. Az $f : R_+^n \to C$ Borel mérhető függvénynek a ν-re vonatkozólag statisztikus határértéke van a ∞-ben, ha létezik olyan ξ szám, hogy bármely $\epsilon > 0$-ra

$$\lim_{\mathbf{b}\to\infty} \frac{\nu(\{\mathbf{0} \leq \mathbf{u} \leq \mathbf{b} : |f(\mathbf{u}) - \xi| \geq \epsilon\})}{\nu(\{\mathbf{0} \leq \mathbf{u} \leq \mathbf{b}\})} = 0. \tag{11}$$

Ekkor a (10) definíció a (11) speciális esete, amikor is ν a hagyományos Lebesgue mérték R_+^n-n. Megmutatható, hogy a 3. és 4. Tétel érvényben marad, ha az általános (11) definíciót használjuk.

5. Tétel ([3]). *Legyen $f : R_+^n \to C$ Borel mérhető függvény és ν pozitív Borel mérték R_+^n-n, amelyre $\nu(R_+^n) = \infty$. Ekkor a (11) határérték reláció akkor és csak akkor teljesül minden $\epsilon > 0$-ra, ha minden $t \in R$-re*

$$\lim_{\mathbf{b}\to\infty} \frac{1}{\nu(\{\mathbf{0} \leq \mathbf{u} \leq \mathbf{b}\})} \int_0^{b_1} \dots \int_0^{b_n} e^{itf(\mathbf{u})} d\nu(u_1, \dots, u_n) = e^{it\xi}.$$

3. Tauber-típusú tételek statisztikus határértékre

A Móricz által bevezetett statisztikus határérték fogalmának ismeretében természetes ötletként merült fel a statisztikus szummálhatóság definiálása, valamint olyan Tauber-típusú feltételek keresése, amelyek segítségével a statisztikus szummálhatóságból következik a statisztikus határérték létezése. Az értekezés ezen fejezete külön kitér a fordított irányú implikáció vizsgálatára is.

Legyen $0 \not\equiv P : R_+ \to R_+$ nemcsökkenő függvény, amelyre $P(0) = 0$ és

$$\text{st}-\liminf_{t\to\infty} \frac{P(\lambda t)}{P(t)} > 1 \qquad \text{minden } \lambda > 1\text{–re.} \tag{12}$$

Használjuk a (2)-ben szereplő jelöléseket. A (12) feltételből következik, hogy $\lim_{t\to\infty} P(t) = \infty$, ezért a $P(t) > 0$ feltétel minden elég nagy t-re már biztosan fennáll. Akkor mondjuk az

$$\int_0^\infty f(x)dx$$

integrált *statisztikusan szummálhatónak* a P súlyfüggvényre vonatkozólag, ha létezik a

$$\text{st}-\lim_{t\to\infty} \sigma(t) = l \quad \text{véges határérték.} \tag{13}$$

Először a valós értékű f függvény esetén bizonyítjuk a következő tételt egyoldali Tauber feltétel mellett.

6. Tétel ([6]). *Legyen az $f \in L^1_{\text{loc}}(R_+)$ függvény valós értékű és teljesüljön a* (12) *feltétel. Ekkor* (13)*-ból akkor és csak akkor következik a* $\text{st}-\lim_{x\to\infty} s(x) = l$*, ha bármely $\epsilon > 0$-ra*

$$\inf_{\lambda>1} \limsup_{a\to\infty} \frac{1}{a}|\{t \in (0,a) :$$

$$\frac{1}{P(\lambda t)-P(t)}\int_t^{\lambda t}[s(x)-s(t)]dP(x)<-\epsilon\}|=0 \tag{14}$$

és

$$\inf_{0<\lambda<1}\ \limsup_{a\to\infty}\frac{1}{a}|\{t\in(0,a):$$

$$\frac{1}{P(t)-P(\lambda t)}\int_{\lambda t}^{t}[s(t)-s(x)]dP(x)<-\epsilon\}|=0. \tag{15}$$

Másodszor az általánosabb komplex értékű f függvényre bizonyítjuk a következő tételt kétoldali Tauber feltétel mellett.

7. Tétel ([6]). *Legyen az $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(R_+)$ függvény komplex értékű és teljesüljön a* (12) *feltétel. Ekkor* (13)*-ből akkor és csak akkor következik a* $\mathrm{st}\text{–}\lim_{x\to\infty}s(x)=l$*, ha bármely $\epsilon>0$-ra*

$$\inf_{\lambda>1}\ \limsup_{a\to\infty}\frac{1}{a}|\{t\in(0,a):$$

$$\left|\frac{1}{P(\lambda t)-P(t)}\int_t^{\lambda t}[s(x)-s(t)]dP(x)\right|>\epsilon\}|=0, \tag{16}$$

vagy

$$\inf_{0<\lambda<1}\ \limsup_{a\to\infty}\frac{1}{a}|\{t\in(0,a):$$

$$\left|\frac{1}{P(t)-P(\lambda t)}\int_{\lambda t}^{t}[s(t)-s(x)]dP(x)\right|>\epsilon\}|=0. \tag{17}$$

4. Tauber-típusú feltételek kettős sorozatok statisztikus szummálhatóságához

[9]-ben Móricz és Orhan Tauber-típusú feltételeket adott arra vonatkozólag, hogy a statisztikus konvergencia következzen a súlyozott közepek szerinti $(\overline{N}, p)$ statisztikus szummálhatóságból. Ezen fejezet célja ennek az eredménynek a kiterjesztése kettős sorozatokra.

Azt mondjuk, hogy a valós vagy komplex $(x_{jk} : j, k = 0, 1, 2, ...)$ kettős számsorozat *statisztikusan konvergál* valamely L-hez, ha bármely $\epsilon > 0$-ra

$$\lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{(m+1)(n+1)} |\{j \leq m \quad \text{és} \quad k \leq n : |x_{jk} - L| \geq \epsilon\}| = 0.$$

Legyen $p := \{p_j\}_{j=0}^{\infty}$, $q := \{q_k\}_{k=0}^{\infty}$ két nemnegatív $(p_0, q_0 > 0)$ számsorozat, amelyre

$$P_m := \sum_{j=0}^{m} p_j \to \infty, \text{ ha } m \to \infty \text{ és } Q_n := \sum_{k=0}^{n} q_k \to \infty, \text{ ha } n \to \infty.$$

Definiáljuk az adott (x_{jk}) kettős számsorozat t_{mn} súlyozott közepét, azaz $(\overline{N}, p, q)$ közepét a következőképpen:

$$t_{mn} = \frac{1}{P_m Q_n} \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} p_j q_k x_{jk} \ , \ m, n = 0, 1, 2... \ . \tag{18}$$

Azt mondjuk, hogy az x_{jk} sorozat az $(\overline{N}, p, q)$ *közép szerint statisztikusan szummálható* L-hez, ha

$$\text{st}-\lim t_{mn} = L. \tag{19}$$

Először valós (x_{jk}) számsorozatokat tekintünk és egyoldali Tauber-típusú feltételeket adunk. A tételben szükségünk lesz a Fridy és Orhan [2] által bevezetett statisztikus alsó és felső határérték fogalmára.

8. Tétel ([5]). *Tegyük fel, hogy a* $p := \{p_j\}_{j=0}^{\infty}$, *és* $q := \{q_k\}_{k=0}^{\infty}$ *számsorozatok olyanok, hogy* $p_0 > 0$, $q_0 > 0$, *valamint*

$$\text{st}-\liminf \frac{P_{\lambda_m}}{P_m} > 1 \text{ és } \text{st}-\liminf \frac{Q_{\lambda_n}}{Q_n} > 1 \text{ minden } \lambda > 1\text{-re}, \tag{20}$$

ahol $\lambda_m := [\lambda m]$, $\lambda_n := [\lambda n]$. *Annak szükséges és elegendő feltétele, hogy az* $(\overline{N}, p, q)$ *közép szerinti statisztikus szummálhatóságból, azaz* (19)*-ből következzen az* (x_{jk}) *statisztikus konvergenciája ugyanazzal a határértékkel az, hogy fennálljon a következő két feltétel: bármely* $\epsilon > 0$*-ra*

$$\inf_{\lambda>1} \limsup_{M,N\to\infty} \frac{1}{(M+1)(N+1)} |\{m \le M \quad \text{és} \quad n \le N : \tag{21}$$

$$\frac{1}{(P_{\lambda_m} - P_m)(Q_{\lambda_n} - Q_n)} \sum_{j=m+1}^{\lambda_m} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_j q_k (x_{jk} - x_{mn}) \le -\epsilon\}| = 0$$

és

$$\inf_{0<\lambda<1} \limsup_{M,N\to\infty} \frac{1}{(M+1)(N+1)} |\{m \le M \quad \text{and} \quad n \le N : \tag{22}$$

$$\frac{1}{(P_m - P_{\lambda_m})(Q_n - Q_{\lambda_n})} \sum_{j=\lambda_m+1}^{m} \sum_{k=\lambda_n+1}^{n} p_j q_k (x_{mn} - x_{jk}) \le -\epsilon\}| = 0.$$

Most az (x_{jk}) komplex számsorozatokat tekintjük és kétoldali Taubertípusú feltételeket adunk.

9. Tétel ([5]). *A* $p := \{p_j\}_{j=0}^{\infty}$, *és* $q := \{q_k\}_{k=0}^{\infty}$ *számsorozatokra legyen* $p_0 > 0$, $q_0 > 0$, *valamint teljesüljön a* (20) *feltétel. Annak szükséges és elegendő feltétele, hogy* (19)*-ból következzen az* (x_{jk}) *statisztikus konvergenciája ugyanazzal a határértékkel az, hogy fennálljon a következő két feltétel valamelyike: bármely* $\epsilon > 0$*-ra*

$$\inf_{\lambda>1} \limsup_{M,N\to\infty} \frac{1}{(M+1)(N+1)} |\{m \le M \quad \text{és} \quad n \le N : \tag{23}$$

$$\left| \frac{1}{(P_{\lambda_m} - P_m)(Q_{\lambda_n} - Q_n)} \sum_{j=m+1}^{\lambda_m} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_j q_k (x_{jk} - x_{mn}) \right| \geq \epsilon\}| = 0$$

vagy

$$\inf_{0<\lambda<1} \limsup_{M,N\to\infty} \frac{1}{(M+1)(N+1)} |\{m \leq M \quad \text{és} \quad n \leq N : \tag{24}$$

$$\left| \frac{1}{(P_m - P_{\lambda_m})(Q_n - Q_{\lambda_n})} \sum_{j=\lambda_m+1}^{m} \sum_{k=\lambda_n+1}^{n} p_j q_k (x_{mn} - x_{jk}) \right| \geq \epsilon\}| = 0.$$

Hivatkozások

[1] H. Fast, Sur la convergence statistique, *Colloq. Math.* **2** (1951), 241-244.

[2] J. A. Fridy and C. Orhan, Statistical limit superior and limit inferior, *Proc. Amer. Math. Soc.* **125** (1997), 3625-3631

[3] Á. Fekete and F. Móricz, A characterization of the existence of statistical limit of measurable functions, *Acta Math. Hungar.* (to appear)

[4] Á. Fekete and F. Móricz, Necessary and sufficient Tauberian conditions in the case of weighted mean summable integrals over R_+, *Publ. Math. Debrecen*, **67** (2005), 65-78.

[5] Á. Fekete, Tauberian conditions for double sequences that are statistically summable by weighted means, *Sarajevo Journal of Mathematics*, Vol.1 (14) (2005), 197-210

[6] Á. Fekete, Tauberian conditions under which the statistical limit of an integrable function follows from its statistical summability, *Studia Sci. Math. Hungarica*, **43** (2006), 131-145.

[7] J. Karamata, *Sur les théorèmes inverses des procédés de sommabilité*, Hermann et Cie, Paris, 1937.

[8] F. Móricz, Statistical limits of measurable functions, *Analysis* **24** (2004), 207-219.

[9] F. Móricz and C. Orhan, Tauberian conditions under which statistical convergence follows from statistical summability by weighted means, *Studia Sci. Math. Hungar.* **41** (2004), 391-403.

[10] I. J. Schoenberg, The integrability of certain functions and related summability methods, *Amer. Math. Monthly* **66** (1959), 361-375.