Diadikus Cesàro és Copson operátorok

doktori (PhD) értekezés tézisei

Készítette: Eisner Tímea
Témavezetők: Dr. Móricz Ferenc
tanszékvezető egyetemi tanár,
SZTE
Dr. Schipp Ferenc
tanszékvezető egyetemi tanár,
ELTE, PTE

SZTE Bolyai Intézet
Szeged, 2001

Bevezetés

A Fourier-sorok konvergencia kérdéseinek szisztematikus vizsgálata a múlt század közepén kezdődött. A ma már klasszikusnak számító *Dirichlet*-től és *Dini*-től származó konvergencia tételek mellett megjelentek divergenciával kapcsolatos eredmények is. *Du Bois Raymond* már 1876-ban észrevette, hogy — a sorok szokásos konvergenciáját véve alapul— a folytonos függvények általában nem rekonstruálhatók Fourier-sorukból. Nevezetesen megmutatta, hogy van olyan folytonos függvény, amelynek a Fourier-sora valamely pontban divergens. Ez a felismerés arra késztette a témával foglalkozó kutatókat, hogy a sorok hagyományos kiértékelése, azaz a részletösszegek konvergenciája helyett más eljárást használjanak. Fejér Lipót 1900-ban megmutatta, hogy folytonos függvények esetén a trigonometrikus Fourier-sor részletösszegeinek számtani közepei egyenletesen konvergálnak a függvényhez. Hasonló állítás érvényes az Abel-Poisson közepekre is.

A Fejér-féle szummációs eljárás kapcsán felmerül a kérdés, hogy mi történik a Fourier-sorral, ha nem a részletösszegeit, hanem a Fourier-együtthatókat átlagoljuk. Teljes ortogonális rendszer esetén a függvények és Fourier-együtthatóik között egy-egyértelmű megfeleltetés létesíthető. Kiindulva a 2π szerint periodikus integrálható függvények $L^1_{2\pi}$ osztályának f eleméből képezzük a Fourier-együtthatók számtani közepeinek sorozatát és azt vizsgáljuk, hogy van-e olyan $g \in L^1_{2\pi}$ függvény, amelynek Fourier-együtthatói éppen ezen számtani közepek.

Ezt a kérdést először *Hardy* vizsgálta 1928-ban a trigonometrikus rendszerrel kapcsolatban, amikor is bebizonyította, hogy az $L^p_{2\pi}$ $(1 \leq p < \infty)$ terek invariánsak a Fourier-együtthatókra vonatkozó, a fentebb említett átlagolási eljárással szemben (lásd [24]). Más szóval, ha $f \in L^p_{2\pi}$, akkor a Fourier-együtthatók átlagolásával származtatott g függvény is az $L^p_{2\pi}$-hez tartozik. Az $f \in L^p_{2\pi}$ függvényhez a $g \in L^p_{2\pi}$ függvényt rendelve egy operátort értelmezhetünk. Ezt az operátort *Cesàro operátornak*, míg adjungáltját *Copson operátornak* nevezzük. Megjegyezzük, hogy az ezzel kapcsolatos szóhasználat nem egységes a szakirodalomban. Vannak, akik a Cesàro operátor helyett a Hardy operátor elnevezést használják.

Az utóbbi években a szóban forgó operátorok vizsgálata ismét előtérbe került. Többek között *Bellman R.*, *D. V. Giang*, *Golubov B. I.*, *Móricz Ferenc*, *Rodin V.*, *Sisakis A. G.* és *Stempak K.* további eredményeket értek el ezekkel az operátorokkal kapcsolatban.

A disszertációban ezeknek az operátoroknak a viselkedését vizsgáljuk a Walsh-Fourier-sorok esetén. Az itt használt módszerek lényegesen különböznek a trigonometrikus sorokra alkalmazott módszerektől. A klasszikus esetben kulcsfontosságú szerepe volt a parciális integrálásnak és a közönséges értelemben vett deriválásnak. Vizsgálatainkban a klasszikus derivált szerepét sok vonatkozásban átveszi a diadikus derivált, az integrálét pedig a diadikus integrál (antiderivált). Több olyan azonosság is van, mint pl. a parciális integrálás szabálya, amelynek megfelelője a diadikus integrálra nem érvényes. A diadikus integrált egy nehezen kezelhető függvénnyel való diadikus konvolúcióként értelmezik, ami miatt jóval bonyolultabb a közönséges integrál-operátornál. Ezzel magyarázható, hogy a Walsh-sorokkal kapcsolatos vizsgálatok több ponton is nehezebbek a trigonometrikus sorokra vonatkozó vizsgálatokhoz képest.

A Cesàro és Copson operátorokat a Walsh-sorok lehető legbővebb részhalmazán értelmezzük, amely a diadikus martingálok terével azonosítható, majd ezeknek az operátoroknak különböző, fontos terekre vonatkozó leszűkítéseit vizsgáljuk. A vizsgálatok során alapvető szerepet játszik a Walsh-Dirichlet-féle magfüggvény egy új előállítása, amelyben felhasználjuk a diadikus deriváltat.

A diadikus Cesàro és Copson operátorok négy változatával foglalkozunk, nevezetesen azzal, amely a martingálok terén van értelmezve, az egy- és a kétváltozós integrálható függvények terén értelmezett operátorokkal, valamint ezeknek a félegyenesre való folytonos kiterjesztéseivel. Az első három esetben a Cesàro operátort függvények, illetve martingálok Walsh-Fourier-együtthatóinak átlagolásával értelmezzük. A negyedik esetben a Walsh-Fourier-sort Walsh-Fourier-transzformálttal helyettesítjük. Az alapul szolgáló függvények az $\mathbb{I} := \mathbb{I}^1 := [0,1)$ intervallumon, az $\mathbb{I}^2 := \mathbb{I} \times \mathbb{I}$ egységnégyzeten, ill. az $\mathbb{R}_+ := [0,+\infty)$ félegyenesen vannak értelmezve. Ezek az operátorok az L^1 tereken integrál-operátorként adhatók meg, amelyek a 3. fejezetben bevezetésre kerülő úgynevezett lokális konvolúciós operátorok speciális esetét alkotják. A továbbiakban a Cesàro operátorok mellett ezeket a lokális konvolúciós operátorokat is vizsgáljuk az $L^1(\mathbb{I}^j)$ $(j = 1,2)$ és az $L^1(\mathbb{R}_+)$ terek mellett a megfelelő L^p tereken, Lipschitz-tereken, valamint a diadikus Hardy- és BMO-tereken. A lokális konvolúciós operátorok bevezetése révén megfogalmazhatók azok a tulajdonságok, amelyekből az említett operátorok korlátossága következik a vizsgált tereken.

Diadikus Cesàro és Copson operátorok az L^p-tereken

Először bevezetjük a *diadikus Cesàro* és a *Copson operátorokat*. Az egy és kétváltozós esetet, ahol csak lehet, együtt tárgyaljuk. Ebben a fejezetben szereplő tételek bizonyítását illetően lásd [11], [12], [13]. A nevezett operátorokat a szóbajöhető lehető legtágabb téren, a diadikus martingálok $\mathcal{M}_0(\mathbb{I}^j)$ terén értelmezzük. A $j = 1$ esetben

$$\mathcal{M}_0(\mathbb{I}) := \{F \in \mathcal{M}(\mathbb{I}) : \hat{F}(0) = 0\}, \tag{3.1}$$

a $j = 2$-nek megfelelő kétváltozós esetben pedig legyen

$$\mathcal{M}_0(\mathbb{I}^2) := \{F \in \mathcal{M}(\mathbb{I}^2) : \hat{F}(k,\ell) = 0 \quad k,\ell \in \mathbb{N}, \min(k,\ell) = 0\}. \tag{3.2}$$

Az $F = (f_n, n \in \mathbb{N}^j)$ $(j = 1,2)$ diadikus martingál Walsh-Fourier-együtthatóit az

$$\hat{F}(k) = \lim_{\min(n_1,n_2)\to\infty} \int_0^1 f_n w_k \, dx$$

$(k \in \mathbb{N}^j)$ határértékkel értelmezzük. Egyszerűen igazolható, hogy $k < 2^{n_0}$ és $n \geq n_0$ esetén

$$\int_0^1 f_n(x) w_k(x)\,dx = \int_0^1 f_{n_0}(x) w_k(x)\,dx,$$

következésképpen ez a határérték létezik és

$$\hat{F}(k) = \int_0^1 f_{n_0}(x) w_k(x) dx \quad (k < 2^{n_0}).$$

A kétváltozós esetben a határérték létezése hasonlóan igazolható. Az F diadikus martingál Walsh-sorát az

(3.3)
$$f \sim S(F) := \sum_{k \in \mathbb{N}^j} \hat{F}(k) w_k \quad (j = 1, 2)$$

szimbólummal jelöljük. Mivel a Walsh-sorok, az együttható-sorozatok, ill. a diadikus martingálok kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők egymásnak, ezért minden $F \in \mathcal{M}_0(\mathbb{I}^j)$ diadikus martingál esetén pontosan egy olyan $G \in \mathcal{M}_0(\mathbb{I}^j)$ diadikus martingál létezik, amelynek Walsh-Fourier-együtthatója az F diadikus martingál Walsh-Fourier-együtthatóinak átlagával egyenlő, azaz amelyre

(3.4)
$$\hat{G}(n) := 0 \ (n \in \mathbb{N}^j, \wedge n = 0), \ \hat{G}(n) := \frac{1}{n^*} \sum_{k=0}^{n-1} \hat{F}(k) \quad (n \in \mathbb{P}^j),$$

ahol $n^* = n_1 \cdot n_2$, $\wedge n = \min(n_1, n_2)$, ha $n \in \mathbb{P}^2$ és $\wedge n = n$, ha $n \in \mathbb{P}$ ($\mathbb{P} = 1, 2, \ldots$). A

(3.5)
$$\tilde{C} F := G \quad (F \in \mathcal{M}_0(\mathbb{I}^j))$$

utasítással értelmezett $\tilde{C} : \mathcal{M}_0(\mathbb{I}^j) \to \mathcal{M}_0(\mathbb{I}^j)$ leképezést *diadikus Cesàro operátornak nevezzük*. Nyilvánvaló, hogy ezzel egy lineáris operátort értelmeztünk az $\mathcal{M}_0(\mathbb{I}^j)$ téren.

A $\tilde{C}$ operátor $\tilde{C}^*$ adjungáltját első lépésben az $\mathcal{M}_S(\mathbb{I}^j)$ stacionárius martingálok alterén értelmezzük, azaz olyan martingálokat tekintünk, amelyek egy bizonyos indextől kezdve állandó tagokkal rendelkeznek (megadható olyan $n_0 \in \mathbb{N}$ index, hogy $f_n = f_{n_0}$, ha $n > n_0$). A $G := \tilde{C}^* F$ ($F \in \mathcal{M}_S(\mathbb{I}^j)$) martingált úgy definiáljuk, hogy a Walsh-együtthatói legyenek

(3.6)
$$\hat{G}(n) := \sum_{k : n < k} \frac{\hat{F}(k)}{k^*} \quad (n \in \mathbb{N}^j).$$

Minthogy véges sok $k \in \mathbb{N}^j$ indextől eltekintve valamennyi $k \in \mathbb{N}^j$ indexre $\hat{F}(k) = 0$, ezért a fenti végtelen összegnek van értelme. A $\tilde{C}^*$ leképezést *Copson operátornak* nevezzük. Az $\mathcal{M}(\mathbb{I}^j) \times \mathcal{M}_0(\mathbb{I}^j)$ halmazon bevezetjük az

(2.1.7)
$$\langle F, G \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{F}(k) \hat{G}(k) = \lim_{n \to \infty} \int_0^1 f_n g_n \quad (F = (f_n, n \in \mathbb{N}) \in \mathcal{M}_0, G = (g_n, n \in \mathbb{N}) \in \mathcal{M})$$

bilineáris funkcionált. Az adjungált operátor elnevezést támasztja alá az alábbi állítás:

3.1. Lemma. *A $\tilde{C}$ Cesàro operátornak a (2.1.7) bilineáris funkcionálra vonatkozó adjungáltja a (3.6) alatt értelmezett $\tilde{C}^*$ Copson operátor, azaz*

$$\langle \tilde{C}F, G\rangle = \langle F, \tilde{C}^*G\rangle \quad (F \in \mathcal{M}_0(\mathbb{I}^j), G \in \mathcal{M}_S(\mathbb{I}^j)). \tag{3.7}$$

Értekezésünkben a $\tilde{C}$ és $\tilde{C}^*$ operátorokat vizsgáljuk a diadikus martingálok különböző alterein. Elsőként a Cesàro operátort egy integrál-operátor alakjában állítjuk elő. Megmutatjuk, hogy a $\tilde{C}F = G = (g_n, n \in \mathbb{N}^j)$ martingál előállítható a

$$g_n(x) = \int_{\mathbb{I}^j} f_n(t) K_n^{(j)}(x,t)\,dt \quad (x \in \mathbb{I}^j, F = (f_n, n \in \mathbb{N}^j) \in \mathcal{M}_0(\mathbb{I}^j)) \tag{3.8}$$

alakban, ahol a $K_n^{(j)}$ magfüggvény kifejezhető a módosított diadikus differencia operátor segítségével. Nevezetesen, jelöljük χ_s-sel a $J_s := [2^{-s}, 2^{-s+1})$ $(s \in \mathbb{P}^j)$ intervallum karakterisztikus függvényét, továbbá legyen

$$W_n^{(j)} := S_{2^n}(W^{(j)}) \quad (n \in \mathbb{N}^j) \tag{3.9}$$

a

$$W^{(j)} := \sum_{k \in \mathbb{P}^j} \frac{w_k}{k^*} \quad (j = 1, 2)$$

sornak a 2^n indexű részletösszege. Megmutatjuk, hogy a $K_n^{(j)} \in L^1(\mathbb{I}^j \times \mathbb{I}^j)$ magfüggvény előállítható a következő formában:

$$K_n^{(j)}(x,t) := \sum_{s \in \mathbb{P}^j} \chi_s(t)(\Delta_{s-1}^- W_n^{(j)})(x \dotplus t) \quad (x, t \in \mathbb{I}^j), \tag{3.10}$$

ahol $j = 1$ esetén

$$(\Delta_n^- f)(x) := \sum_{k=0}^{n-1} 2^{k-1}(f(x) - f(x \dotplus 2^{-k-1})) - 2^{n-1}(f(x) - f(x \dotplus 2^{-n-1}))$$

a módosított egyváltozós diadikus differencia operátor. (A kétváltozós operátor definícióját illetően lásd [3], [12].) A $\dotplus$ szimbólummal a diadikus összeadást jelöljük. Mivel a χ_s függvények tartói páronként diszjunktak, ezért a (3.10) sor minden $(x,t) \in \mathbb{I}^j \times \mathbb{I}^j$ pontban abszolút konvergens. Belátható, hogy a (3.10) sor az $L^1(\mathbb{I}^j \times \mathbb{I}^j)$-normában konvergens és $K_n^{(j)} \in L^1(\mathbb{I}^j \times \mathbb{I}^j)$.

A most bevezetett magfüggvények mellett használni fogjuk a

$$K^{(j)}(x,t) := \sum_{s \in \mathbb{P}^j} \chi_s(t)(\Delta_{s-1}^- W^{(j)})(x \dotplus t) \quad (x, t \in \mathbb{I}^j) \tag{3.10'}$$

függvényt is. Az előzőhöz hasonlóan látható be, hogy $K^{(j)} \in L^1(\mathbb{I}^j)$. Ezek segítségével értelmezzük az alábbi integrál-operátorokat:

$$(\mathcal{K}_n^{(j)} h)(x) := \int_{\mathbb{I}^j} h(t)(K_n^{(j)}(x,t)\,dt, \quad (\mathcal{K}^{(j)} h)(x) := \int_{\mathbb{I}^j} h(t) K^{(j)}(x,t)\,dt \tag{3.11}$$

$(x \in \mathbb{I}^j, h \in L_0^1(\mathbb{I}^j), j = 1, 2)$, ahol $L_0^1(\mathbb{I}^j)$ azon $L^1(\mathbb{I}^j)$-beli függvényekből áll, amelyeknek az $\mathbb{I}^j$-re vett integrálja zérus.

3.2. Lemma. *Az $F = (f_n, n \in \mathbb{N}^j) \in \mathcal{M}_0(\mathbb{I}^j)$ diadikus martingál $\tilde{C}F := G = (g_n, n \in \mathbb{N})$ Cesàro-transzformáltja előállítható a*

$$g_n = \mathcal{K}_n^{(j)} f_n \quad (n \in \mathbb{N}^j) \tag{3.12}$$

alakban. A $\mathcal{K}_n^{(j)} : L^1(\mathbb{I}^j) \to L^1(\mathbb{I}^j)$ $(n \in \mathbb{N}^j)$ operátorok egyenletesen korlátosak, valamint a $\mathcal{K}^{(j)} : L^1(\mathbb{I}^j) \to L^1(\mathbb{I}^j)$ operátor is korlátos, azaz létezik olyan $C > 0$ abszolút konstans, hogy

$$\|\mathcal{K}_n^{(j)} h\|_1 \leq C\|h\|_1 \quad \text{és} \quad \|\mathcal{K}^{(j)} h\|_1 \leq C\|h\|_1 \quad (h \in L^1(\mathbb{I}^j), n \in \mathbb{N}^j). \tag{3.13}$$

A következőkben a Cesàro operátort az L^1-korlátos diadikus martingálok

$$\mathcal{M}^1(\mathbb{I}^j) := \{F = (f_n, n \in \mathbb{N}^j) : \sup_{n \in \mathbb{N}^j} \|f_n\|_1 < \infty\}$$

alterén vizsgáljuk . Ez az altér azonosítható az $\mathbb{I}^j$ intervallumon értelmezett korlátos változású diadikus intervallum-függvények terével, a megfelelő Walsh-sorok pedig azonosíthatók a korlátos változású függvények szerint vett Walsh-Fourier-Stieltjes-sorokkal.

3.1. Tétel. *A $\tilde{C}$ Cesàro operátort az L^1-korlátos martingálok terére leszűkítve, az $\mathcal{M}^1(\mathbb{I}^j)$ teret önmagába képező korlátos lineáris operátort kapunk.*

Az $\mathcal{M}^1(\mathbb{I}^j)$ és $\mathcal{BV}(\mathbb{I}^j)$ terek említett kapcsolatát figyelembe véve adódik a

3.1. Következmény. *Legyen $\Phi \in \mathcal{BV}(\mathbb{I}^j)$ korlátos változású függvény és jelölje*

$$a_k := \int_{\mathbb{I}^j} w_k \, d\Phi \quad (k \in \mathbb{N}^j)$$

Φ-nek a Walsh-Fourier-Stieltjes-együtthatóit. Ekkor létezik olyan $\Psi \in \mathcal{BV}(\mathbb{I}^j)$ korlátos változású függvény, amelynek Walsh-Fourier-Stieltjes-együtthatóira fennáll, hogy

$$\int_{\mathbb{I}^j} w_k \, d\Psi = \frac{1}{k^*} \sum_{0 \leq \ell < k} a_\ell \quad (k \in \mathbb{P}^j).$$

A következőkben tovább szűkítjük a Cesàro operátor értelmezési tartományát. A 3.1 Lemmában bebizonyítottuk, hogy a (3.10') alatt bevezetett $K^{(j)}$ magfügvénnyel értelmezett $\mathcal{K}^{(j)} : L^1(\mathbb{I}^j) \to L^1(\mathbb{I}^j)$ operátor korlátos. Megmutatjuk, hogy ez éppen a Cesàro operátor az $L_0^1(\mathbb{I}^j)$ téren.

3.2. Tétel. *A $\mathcal{K}^{(j)} : L_0^1(\mathbb{I}^j) \to L^1(\mathbb{I}^j)$ operátor azonos a $\tilde{C}$ operátornak az $L_0^1(\mathbb{I}^j)$ térre vonatkozó leszűkítésével, azaz*

$$(\widehat{\mathcal{K}^{(j)} f})(k) = \frac{1}{k^*} \sum_{\ell < k} \hat{f}(\ell) \quad (k \in \mathbb{P}^j, f \in L_0^1(\mathbb{I}^j), j = 1, 2). \tag{3.2.1}$$

Az egyváltozós $\widetilde{C}$ martingálokon értelmezett Cesàro operátor, és az egyváltozós integrálható függvényeken értelmezett C Cesàro operátor között szoros kapcsolat van, ugyanis minden $F = (f_n, n \in \mathbb{N})$ magál esetében

$$(3.2.3) \qquad (\widetilde{C}F)_n = E_n(Cf_n) \quad (n \in \mathbb{N}),$$

ahol

$$(E_n f)(x) := \frac{1}{|I_n(x)|} \int\limits_{I_n(x)} f(t)dt \quad (x \in \mathbb{I}, n \in \mathbb{N})$$

a feltételes várható érték operátora. Itt $I_n(x)$ azt a 2^{-n} hosszúságú diadikus intervallumot jelöli, amely x-et tartalmazza. Az alábbi jelölés bevezetését (3.2.3) motiválja. Legyen $\Phi : L^1(\mathbb{I}) \to L^1(\mathbb{I})$ korlátos lineáris operátor. Ekkor a martingálokon értelmezett $\widetilde{\Phi}$ operátort, amelyre

$$(3.2.4) \qquad (\widetilde{\Phi}F)_m := E_m(\Phi f_m) \quad (m \in \mathbb{N}, F = (f_n, n \in \mathbb{N}) \in \mathcal{M}),$$

a Φ *diagonális kiterjesztésének* nevezzük $\mathcal{M}$-re.

Megvizsgáljuk, hogy a $\widetilde{\Phi}$ diagonális kiterjesztés milyen feltétel mellett rendel a diagonális martingálokhoz diadikus martingálokat. Ezzel összefüggésben bevezetjük az alábbi fogalmat. Akkor mondjuk, hogy a $\Phi : L^1(\mathbb{I}) \to L^1(\mathbb{I})$ operátor *spektrum-tartó*, ha az $f \in L^1$, $m \in \mathbb{N}$ és $\hat{f}(k) = 0$ $(k = 0, \ldots, 2^m - 1)$ feltételekből az is következik, hogy $(\Phi f)\hat{}(k) = 0$ $(k = 0, \ldots, 2^m - 1)$.

Megmutatható, hogy egy spektrum-tartó Φ operátorból kiindulva, a $\widetilde{\Phi}$ operátor martingálokat martingálokba visz át, továbbá $\widetilde{\Phi}$ valóban kiterjesztése a Φ operátornak $L_0^1(\mathbb{I})$-ről $\mathcal{M}_0(\mathbb{I})$-re, azaz ha $f \in L^1$ integrálható függvény, akkor $\widetilde{\Phi}F = (E_m(\Phi f), m \in \mathbb{N})$.

A Cesàro operátor tulajdonságaiból kiindulva egy új operátor-osztályt vezetünk be, a *lokális konvolúciós operátorok* osztályát, amelyet az $\mathcal{N}^{(j)}$ $(j = 1, 2)$ szimbólummal fogunk jelölni. A $\mathcal{N}^{(j)}$ elemeit diadikus konvolúciós operátorok $\Phi_n^{(j)} f := f * \phi_n^{(j)}$ $(n \in \mathbb{N}^j)$ sorozatával értelmezzük. Feltesszük, hogy $\phi_k^{(j)}$ $(k \in \mathbb{N})$ integrálható függvények, és a kétváltozós esetben a szóban forgó függvények egyváltozós függvények Kronecker-szorzatai, azaz

$$(3.3.1) \qquad \phi_n^{(2)} = \phi_{n_1}^{(1)} \times \phi_{n_2}^{(1)} \quad (n = (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2).$$

A $\Phi^{(j)} \in \mathcal{N}^{(j)}$ operátorok a következő alakban állíthatók elő:

$$(3.3.2) \qquad \Phi^{(j)} f := \sum_{n \in \mathbb{P}^j} \Phi_n^{(j)}(\chi_n f) \quad (f \in L_0^1(\mathbb{I}^j), j = 1, 2),$$

ahol χ_n $(n \in \mathbb{P}^j)$ a J_n diadikus intervallum karakterisztikus függvénye.

A $\Phi_n^{(j)}$ konvolúciós operátorok a Walsh-polinomok osztályát önmagára képezik le, és

$$(3.3.3) \qquad \langle \Phi_n^{(j)} f, g \rangle = \langle f, \Phi_n^{(j)} g \rangle \quad (f \in L^1(\mathbb{I}^j), g \in \mathcal{P}^{(j)}, n \in \mathbb{N}^j),$$

ahol

$$(f,g) = \int_{\mathbf{I}^j} f(t)g(t)dt$$

az f és g szokásos belső szorzatát jelöli. Az $\mathcal{N}^{(j)}$ operátor-osztály tartalmazza a konvolúciós operátorokat. Nevezetesen, $\phi_1^{(j)} = \ldots = \phi_n^{(j)} = \ldots = \phi^{(j)}$ esetén $\Phi^{(j)} f = f * \phi^{(j)}$.

A $(\Phi_n^{(j)}, n \in \mathbb{N}^j)$ operátor-sorozat $\Phi_*^{(j)}$ maximál operátorát a

$$\Phi_*^{(j)} f := \sup_{n \in \mathbb{N}^j} |f| * |\phi_n^{(j)}| \tag{3.3.4}$$

utasítással értelmezzük.

Igazolható, hogy egy lokális konvolúciós operátor spektrum-tartó, ha a $\hat{\phi}_j(k)$ $(k < 2^{j-1})$ Walsh-Fourier-együtthatók függetlenek j-től.

A $\Phi^{(j)}$ operátorra vonatkozik az alábbi

3.3. Tétel. *i) Ha a $\Phi^{(j)} \in \mathcal{N}^{(j)}$ operátort generáló $\phi_n^{(j)}$ $(n \in \mathbb{N}^j)$ függvénysorozatra*

$$M := \sup_{n \in \mathbf{P}^j} \|\phi_n^{(j)}\|_1 < \infty \tag{3.3.5}$$

teljesül, akkor $\Phi^{(j)}$ korlátos lineáris operátor $L^1(\mathbf{I}^j)$-ről $L^1(\mathbf{I}^j)$-be, és

$$\|\Phi^{(j)} f\|_1 \le M \|f\|_1 \quad (f \in L_0^1(\mathbf{I}^j)). \tag{3.3.6}$$

ii) Legyen $1 < p < \infty$ és $1/p + 1/p' = 1$. Ha $\Phi_*^{(j)}$ korlátos oprátor $L^{p'}(\mathbf{I}^j)$-ről $L^{p'}(\mathbf{I}^j)$-be, azaz ha valamely $M_p^* > 0$ számmal

$$\|\Phi_*^{(j)} g\|_{p'} \le M_p^* \|g\|_{p'} \quad (g \in L^{p'}(\mathbf{I}^j)), \tag{3.3.7}$$

akkor $\Phi^{(j)}$ korlátos lineáris operátor $L^p(\mathbf{I}^j)$-ről $L^p(\mathbf{I}^j)$-be, és

$$\|\Phi^{(j)} f\|_p \le M_p^* \|f\|_p \quad (f \in L^p(\mathbf{I}^j)). \tag{3.3.8}$$

Ezt a tételt a Cesàro operátorra alkalmazva adódik a

3.4. Tétel.

i) *A Cesàro operátor korlátos lineáris operátor $L^p(\mathbf{I}^j)$-ről $L^p(\mathbf{I}^j)$-be, ha $1 \le p < \infty$.*
ii) *A Cesàro operátor nem korlátos $L^\infty(\mathbf{I}^j)$-ből $L^\infty(\mathbf{I}^j)$-be.*

A diadikus Cesàro operátor C^* adjungáltját a Walsh-polinomok $\mathcal{P}(\mathbf{I}^j)$ halmazán értelmeztük. Mivel

$$Cf \in L_0^1(\mathbf{I}^j), \quad \text{ha } f \in L_0^1(\mathbf{I}^j), \quad \text{és} \quad C^* g \in \mathcal{P}(\mathbf{I}^j), \quad \text{ha} \quad g \in \mathcal{P}(\mathbf{I}^j),$$

ezért a 3.1. Lemma (3.7) azonosságát és (2.1.7)-et figyelembe véve azt kapjuk, hogy

$$(f, C^* g) = (Cf, g) \quad (f \in L_0^1(\mathbf{I}^j), g \in \mathcal{P}(\mathbf{I}^j)). \tag{3.4.1}$$

Ebből kiindulva és a jól ismert dualitási elvet alkalmazva megmutatjuk, hogy a C^* operátor a $\mathcal{P}(\mathbf{I}^j)$ altérről kiterjeszthető $C^* : L^p(\mathbf{I}^j) \to L^p(\mathbf{I}^j)$ korlátos operátorrá, ha $1 < p < \infty$. A $p = \infty$ esetben az $L^\infty(\mathbf{I}^j)$ tér helyett tekintsük a $\mathcal{P}(\mathbf{I}^j)$ altérnek az L^∞-normában vett lezárását és jelöljük ezt $X^\infty(\mathbf{I}^j)$-vel, míg $0 < p < \infty$ esetben legyen $X^p(\mathbf{I}^j) := L^p(\mathbf{I}^j)$.

3.5. Tétel. *Minden $1 < p \leq \infty$ esetén létezik olyan, csak p-től függő $C_p > 0$ szám, hogy*

$$\|C^* g\|_p \leq C_p \|g\|_p \quad (g \in \mathcal{P}(\mathbb{I}^j)). \tag{3.4.2}$$

A Copson operátor $\mathcal{P}(\mathbb{I}^j)$-ről kiterjeszthető $C^* : X^p(\mathbb{I}^j) \to X^p(\mathbb{I}^j)$ korlátos lineáris operátorrá, amelyre

$$(\widehat{C^* g})(k) = \sum_{k<\ell} \frac{\hat{g}(\ell)}{\ell^*} \quad (g \in X^p(\mathbb{I}^j), k \in \mathbb{I}^j). \tag{3.4.3}$$

A $w_1 \in L^1(\mathbb{I})$ függvény esetén

$$(C^* w_1)\hat{}(k) = \sum_{k<\ell} \frac{1}{\ell} = \infty \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Ez azt mutatja, hogy 3.5. Tételben a $p > 1$ feltétel nem helyettesíthető a $p \geq 1$ feltétellel.

A diadikus Cesàro és Copson operátorok a diadikus Hardy- és BMO-tereken

Ebben a fejezetben a diadikus Cesàro operátort a $H(\mathbb{I})$ diadikus Hardy-téren, adjungáltját, a diadikus Copson operátort pedig a lépcsősfüggvények BMO-normában vett lezárásán, a $VMO(\mathbb{I})$ téren vizsgáljuk. Megmutatjuk, hogy ezek az operátorok is korlátosak. Ezek az állítások a lokális konvolúcios operátorokra vonatkozó megfelelő tételekből következnek, amelyek az ún. generáló magfüggvényeknek a tulajdonságain múlnak. A fejezetben szereplő tételek bizonyítása a [11]-es és [15]-ös számú cikkekben találhatók meg.

Először a korábban bevezetett (3.3.2) alakú $\mathcal{N}^{(1)}$-beli operátorokat vizsgáljuk az egydimenziós esetben. Továbbra is feltesszük, hogy a $\Phi := \Phi^{(1)}$ operátort generáló $\phi_n := \phi_n^{(1)}$ $(n \in \mathbb{N})$ függvénysorozat kielégíti a (3.3.5) feltételt. Ilyenkor

$$\Phi f = \sum_{n \in \mathbb{P}} (\chi_n f) * \phi_n, \tag{4.1.1}$$

és ez a sor L^1-normában konvergens. A 3.3. Tétel szerint $\Phi : L^1(\mathbb{I}) \to L^1(\mathbb{I})$ korlátos operátor, továbbá fennáll a (3.3.6) egyenlőtlenség. Ennek az operátornak a $H(\mathbb{I}) \subset L^1(\mathbb{I})$ Hardy-térre vonatkozó leszűkítésével kapcsolatos a

4.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy a $\Phi \in \mathcal{N}^{(1)}$ operátort generáló ϕ_n $(n \in \mathbb{N})$ függvénysorozatra teljesül a (3.3.5) feltétel. Ha az alábbi három feltétel közül egyik teljesül:*

i) $\hat{\phi}_n(k) = 0$ $(0 \leq k < 2^n, n \in \mathbb{P})$,
ii) $\phi_n = D_{2^n}$ $(n \in \mathbb{P})$,
iii) $\phi_n = 2^n(S_{2^n} W - S_{2^{n-1}} W)$;

akkor Φ korlátos lineáris operátor $H^1(\mathbb{I})$-ből $H^1(\mathbb{I})$-be, és

$$\|\Phi f\|_{H^1} \leq M_1 \|f\|_{H^1} \quad (f \in H^1(\mathbb{I})), \tag{4.1.2}$$

ahol M_1 csak a (3.3.6) feltételben szereplő M konstanstól függ.

Ezt a tételt felhasználva, az alábbi állítás már egyszerűen adódik.

4.2. Tétel. *A diadikus Cesàro operátor korlátos $H^1(\mathbb{I})$-ből $H^1(\mathbb{I})$-be, azaz létezik olyan $C > 0$ abszolút konstans, amellyel*

$$\|Cf\|_{H^1} \leq C\|f\|_{H^1} \quad (f \in H^1(\mathbb{I})).$$

A BMO-tér az L^p $(p < \infty)$ és az L^∞ tér közé esik:

$$L^\infty(\mathbb{I}) \subset BMO(\mathbb{I}) \subset L^p(\mathbb{I}) \ (p < \infty).$$

Láttuk, hogy a $C : L^p(\mathbb{I}) \to L^p(\mathbb{I})$ korlátos, ha $p < \infty$, és nem korlátos, ha $p = \infty$. Természetes módon adódik a kérdés: Mit mondhatunk a C-nek a BMO-ra vonatkozó leszűkítéséről? Erre vonatkozik az alábbi

4.3. Tétel. *A Cesàro operátor nem korlátos a $VMO(\mathbb{I})$ térről a $BMO(\mathbb{I})$ térbe.*

Induljunk ki az

$$\begin{aligned} f(x) &= a_1\frac{w_1(x)}{2} + a_2\frac{w_2(x)+w_3(x)}{2^2} + \cdots + a_n\frac{w_{2^{n-1}}(x) + \cdots + w_{2^n-1}(x)}{2^n} + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n 2^{-n} \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} w_k(x) \end{aligned}$$

Walsh-sorból, ahol $a_n = 1/\sqrt{n}$ $(n \in \mathbb{P})$. Igazolható, hogy $f \in VMO$, és $Cf \notin BMO$.

A 3.5. Tételhez hasonlóan dualitási meggondolásokból adódik, hogy a diadikus Copson operátor korlátos a diadikus $BMO(\mathbb{I})$ térből $BMO(\mathbb{I})$-be, és nem korlátos $H(\mathbb{I})$-ből $H(\mathbb{I})$-be.

A követezőkben elegendő feltételeket adunk az egyváltozós lokális konvolúciós operátorok diagonális kiterjesztésének korlátosságára a diadikus H^p Hardy tereken $(1/2 < p \leq 1)$. Egyúttal új bizonyítást is nyerünk a $p = 1$ esetben a 4.1. Tételre.

Legyen $\phi = (\phi_n, n \in \mathbb{N})$ integrálható függvényeknek egy sorozata. A $0 < p \leq 1$ esetén bevezetjük a következő kvázi-normát:

$$\|\phi\|_{(p)} := \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{I\in\mathcal{I}_n} \left(\int_I |\phi_n(t)|\, dt \right)^p \right)^{1/p}. \tag{4.2.1}$$

Tehát, ha $p = 1$ és ϕ egy martingál, akkor $\|\phi\|_{(1)}$ megegyezik ϕ-nek a szokásos $L^1(\mathbb{I})$-normájával.

4.4. Tétel. *Legyen $1/2 < p \leq 1$. Tegyük fel, hogy $\tilde{\Phi}$ egy Φ lokális konvolúciós operátornak a diagonális kiterjesztése (lásd (3.2.4)), és a $\phi = (\phi_n, n \in \mathbb{N})$ generátor függvénysorozatra teljesül az alábbi feltételek egyike:*

(i) $\hat{\phi}_n(k) = 0 \quad (0 \leq k < 2^n, n \in \mathbb{N}), \quad \|\phi\|_{(p)} < \infty$;
(ii) $\phi_n = D_{2^n}$ $(n \in \mathbb{P})$;
(iii) $\phi_n = 2^n(S_{2^n}W - S_{2^{n-1}}W)$.

Ekkor $\tilde{\Phi}$ korlátos a $H^p(\mathbb{I})$ téren, azaz létezik csak a p-től függő C_p konstans, amelyre

$$\|\tilde{\Phi}F\|_{H^p} \le C_p\|F\|_{H^p}$$

teljesül minden $F \in H^p(\mathbb{I})$ esetén.

Megjegyezzük, hogy a 3.4. Tétel előtt mondottak alapján a 4.4. Tételben szereplő lokális konvolúciós operátorok spektrum-tartóak, tehát a diagonális kiterjesztésük valóban $\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ operátor.

Bebizonyítható, hogy a Cesàro operátort előállítható három olyan operátor összegeként, amelyek teljesítik a 4.4. Tétel valamelyik feltételét, ha $1/2 < p \le 1$.

4.5. Tétel. *A diadikus Cesàro operátor korlátos a $H^p(\mathbb{I})$ diadikus Hardy-téren, ha $1/2 < p \le 1$.*

A diadikus Cesàro operátor Hölder-tereken

Ebben a fejezetben a diadikus Cesàro operátort vizsgáljuk Lipschitz-tereken. Bebizonyítjuk, hogy a szóbanforgó operátor korlátos a $\mathrm{Lip}(\alpha, p)$ téren, ha $0 < \alpha \le 1$, $1 \le p < \infty$, $\alpha < 1/p$, továbbá megmutatjuk, hogy ez a feltétel nem javítható, ha $p > 1$. A fejezet tételeinek bizonyítása a [14]-es számú cikkben található meg.

Egy $f \in L^p[0,1)$ függvény $\omega^p(f,\cdot)$ L^p-beli *folytonossági modulusát* ($1 \le p \le \infty$) – a τ diadikus transzlációt felhasználva az alábbiak szerint szokás értelmezni:

$$\omega^p(f,\delta) := \sup_{y \le \delta} \|f - \tau_y f\|_p \quad (\delta > 0).$$

Tetszőleges $\alpha > 0$ esetén a

$$\mathrm{Lip}(\alpha, p) := \{f \in L^p : \omega^p(f,\delta) = O(\delta^\alpha) \text{ ha } \delta \to 0\} \quad (1 \le p \le \infty)$$

teret *Lipschitz-térnek* (vagy Hölder-térnek) nevezzük. Ismeretes (lásd Sch-W-S-P [30] 189. old. Th. 3), hogy egy f függvény akkor és csak akkor eleme a $Lip(\alpha, p)$ $(1 \le p \le \infty)$ osztálynak, ha

$$\|f - E_n f\|_p = O(2^{-n\alpha}), \quad n \to \infty \quad (\alpha > 0). \tag{5.1.1}$$

Vezessük be az

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}(\alpha,p)} := \sup_{n \in \mathbb{N}} 2^{n\alpha}\|f - E_n f\|_p \tag{5.1.2}$$

normát. Eszerint az f függvény akkor és csak akkor eleme a $\mathrm{Lip}(\alpha, p)$ osztálynak, ha $\|f\|_{\mathrm{Lip}(\alpha,p)} < \infty$.

A következőkben becslést adunk L^p-beli illetve Lipschitz-térbeli függvények Walsh-Fourier-sorának 2^n indexű részletösszegeinek a nulla helyen felvett értékeire.

5.1. Lemma. *Ha $f \in L^p[0,1)$, akkor*

$$|(E_n f)(0)| \leq \sum_{k=0}^{n-1} 2^{(k+1)/p} \|f - E_k f\|_p + |\hat{f}(0)| \quad (1 \leq p \leq \infty, \frac{1}{\infty} := 0).$$

5.1. Következmény. *Ha $\alpha < 1/p$, $1 \leq p < \infty$, $f \in Lip(\alpha, p)$ és $\hat{f}(0) = 0$, akkor*

$$|(E_n f)(0)| \leq M_{p,\alpha} \cdot 2^{n(1/p-\alpha)} \|f\|_{Lip(\alpha,p)},$$

ahol az $M_{p,\alpha}$ konstans csak p-től és α-tól függ.

A diadikus integrál W magfüggvénye Walsh-Fourier-sorának

$$W_n = \sum_{k=1}^{2^n - 1} \frac{w_k}{k} \quad (n \in \mathbb{N})$$

részletösszegeinek L^p-normájára fennállnak az alábbi becslések:

5.2 Lemma. *Ha $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$, akkor*

$$\|W_{n+1} - W_n\|_p \geq \frac{1}{8} 2^{-n/p}.$$

5.3 Lemma. *Ha $1 < p < \infty$, akkor léteznek $0 < c_p \leq C_p < \infty$ konstansok, amelyekre*

$$c_p 2^{-n/p} \leq \|W - W_n\|_p \leq C_p 2^{-n/p},$$

és ha $p = 1$, akkor létezik olyan C_1 konstans, amelyre

$$\|W - W_n\|_1 \leq C_1 2^{-n}.$$

A Cesàro operátor és a feltételes várható érték operátor kapcsolatára vonatkozik az

5.4. Lemma. *Ha $f \in L_0^1(\mathbb{I})$, akkor*

$$Cf - E_n(Cf) = C(f - E_n f) + (E_n f)(0) \cdot (W - W_n) \quad (n \in \mathbb{P}).$$

A fenti segédtételek segítségével bebizonyítjuk az alábbi két tételt.

5.1. Tétel. *Ha $0 < \alpha \leq 1$, $1 \leq p < \infty$ és $\alpha < 1/p$, akkor a Cesàro operátor korlátos a $Lip(\alpha, p)$ téren.*

A következő tételben bebizonyítjuk, hogy az $\alpha < 1/p$ feltétel a $p > 1$ esetben nem gyengíthető.

5.2. Tétel. *Bármely $1 < p < \infty$ esetén létezik olyan $f \in Lip(1/p, p)$ függvény, amelyre Cf nem eleme a $Lip(1/p, p)$ térnek.*

Megmutatjuk, hogy az

$$f := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_n D_{2^n}}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} w_k$$

függvényre $f \in \mathrm{Lip}(1/p, p)$, ha $p > 1$, és $Cf \notin \mathrm{Lip}(1/p, p)$.

A diadikus Cesàro operátor folytonos változata

Ebben a pontban a Cesàro operátor folytonos megfelelőjét vizsgáljuk a Walsh-Fourier-együtthatókat Walsh-Fourier-transzformálttal helyettesítve. Megadjuk a Cesàro operátor integrál-előállítását, és ezzel egyúttal a Cesàro operátort lokális konvolúciós operátorok összegeként állítjuk elő. Az előző fejezethez hasonlóan vizsgálatainkban nem a diadikus testből, hanem az azt reprezentáló $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$ intervallumból indulunk ki. A fejezetben szereplő tételek és állítások bizonyítása a [16]-os hivatkozási szám alatt szereplő cikkben találhatóak meg.

A Walsh-Fourier-transzformáltat a diadikus test karaktereinek megfelelő ψ_y ($y \in \mathbb{R}_+$) *általánosított Walsh-függvények* segítségével értelmezzük. Nevezetesen, legyen

$$\psi_y(x) = (-1)^{\sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j y_{-j-1}},$$

ahol $x_j, y_j \in \{0, 1\}$ ($j \in \mathbb{Z}$) az $x, y \in \mathbb{R}_+$ számoknak az

$$x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{x_k}{2^{k+1}}, \quad y = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{y_k}{2^{k+1}},$$

diadikus előállításában szereplő ún. *bináris együtthatók*. Speciálisan, ha

$$x = \frac{x_0}{2} + \frac{x_1}{2^2} + \cdots + \frac{x_j}{2^{j+1}} + \cdots \in \mathbb{I}, \quad \text{és} \quad y = y_1 + y_2 2 + \cdots + y_{-j-1} 2^j + \cdots \in \mathbb{N},$$

akkor a Walsh-függvények (2.2.5) értelmezése alapján

$$w_y(x) = \psi_y(x) \quad (x \in \mathbb{I}, y \in \mathbb{N}),$$

s így valóban a ψ_y fügvények a w_n Walsh-függvények kitejesztéseinek tekinthetők. A definícióból az is egyből látható, hogy $k \in \mathbb{N}$ esetén a ψ_k függvény 1-szerint periodikus.

Az $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ függvény *Walsh-Fourier-transzformáltján* az

$$\hat{f}(x) := \int_0^{\infty} f(t) \psi_x(t) dt \quad (x \in \mathbb{R}_+) \qquad (6.1.2)$$

függvényt értjük. Ha f tartója $\mathbb{I}$-nek része és $y \in \mathbb{N}$, akkor visszakapjuk az f függvény Walsh-Fourier-együtthatóját. Ismeretes, hogy a Walsh-Fourier-transzformált kiterjeszthető az $L^1(\mathbb{R}_+) \cap L^2(\mathbb{R}_+)$ térről egy $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}_+) \to L^2(\mathbb{R}_+)$ unitér leképezéssé, amelyre

$$(\mathcal{F}f)(x) = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2^n} f(t)\psi_x(t)\,dt \quad \text{m.m. } x \in \mathbb{R}_+ \text{-ra.}$$

A következőkben a $[0,t]$ intervallum azon felbontását fogjuk használni, amelyet az alábbi lemmában adunk meg.

6.1. Lemma. *Ha $t_k, k \in \mathbb{Z}$ a $t \in \mathbb{R}_+$ szám bináris együtthatói és*

$$A_k := [2^{-k-1}, 2^{-k}) \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

akkor egy megszámlálható halmaz kivételével

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}, t_k=1} (t \dotplus A_k) = [0,t)$$

teljesül minden $t \in \mathbb{R}_+$-re, ahol $t \dotplus A_k = \{t \dotplus x : x \in A_k\}$.

Az *általánosított Walsh-Dirichlet-féle magfüggvény* definíció szerint

$$D_t^\circ(y) = \int_0^t \psi_x(y)dx \quad (t, y \in \mathbb{R}_+).$$

Ha $t = n \in \mathbb{N}$ egész szám, akkor D_t az $\mathbb{I}$ intervallumon kívül eltűnik, az $\mathbb{I}$-n pedig a korábban bevezetett n-edik Walsh-Dirichlet-féle magfüggvénnyel esik egybe:

$$D_t^\circ(y) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{n-1} w_k(y) = D_n(y) & (y \in \mathbb{I}), \\ 0 & (y \in [1,\infty)) \end{cases}$$

minden $t = n \in \mathbb{N}$-re , és

$$D_{2^k}^\circ = 2^k \chi_{[0,2^{-k})} \tag{6.1.5}$$

minden $k \in \mathbb{Z}$-re, ahol D_n a korábban bevezetett közönséges Walsh-Dirichlet-féle magfüggvényt jelöli (lásd Sch-W-S-P [30] 428. old. Ch. 9.4).

Bebizonyítjuk, hogy minden $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ függvény esetén egyetlen olyan $g \in L^1(\mathbb{R}_+)$ függvény létezik, amelyre

$$\hat{g}(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \hat{f}(u)\,du \quad (x > 0). \tag{6.2.1}$$

Azt az $L^1(\mathbb{R}_+)$ térről $L^1(\mathbb{R}_+)$ térre képező C operátort, amelyet a $Cf := g$ hozzárendeléssel definiálunk, ***diadikus Cesàro operátornak*** nevezzük az $L^1(\mathbb{R}_+)$ téren. Megmutatjuk, hogy C operátort előállíthatjuk lokális diadikus wavelet-operátorok összegeként.

A wavelet operátorok magfüggvényének leírásához az $a(t) := (t - [t])/t$ $(t \in \mathbb{R}_+)$ függvény Walsh-Fourier-transzformáltjából indulunk ki:

$$(6.2.2) \qquad A(x) := (\mathcal{F}a)(x) = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2^n} \frac{t-[t]}{t} w_x(t)\,dt \quad (x \in \mathbb{R}_+).$$

Az 6.2. Lemmában belátjuk, hogy $A \in L^1(\mathbb{R}_+)$. Az A függvény becsléséhez három új függvényt vezetünk be:

$$f_n(x) := \sum_{j=-\infty}^{n} 2^{j-n} \sum_{i=j}^{n} D_{2^i}^{\circ}(x \dotplus 2^{-j}),$$

$$g_n(x) := \sum_{j=-\infty}^{n} 2^{j} \sum_{i=n}^{\infty} 2^{-i} D_{2^i}^{\circ}(x \dotplus 2^{-j}),$$

$$h_n(x) := \sum_{i=n}^{\infty} 2^{n-i+2} D_{2^i}^{\circ}(x),$$

ahol $n \in \mathbb{Z}$, és $x \in \mathbb{R}_+$.

6.2. Lemma. *Minden $x \in \mathbb{R}_+$ és $n \in \mathbb{Z}$ esetén*

$$(6.2.3) \qquad |2^n A(2^n x)| \le f_n(x) + g_n(x) + h_n(x),$$

következésképpen $A \in L^1(\mathbb{R}_+)$.

A fejezet legfontosabb állításának igazolásánál felhasználjuk az alábbi segédtételt.

6.3. Lemma. *Az*

$$F^* h := \sup_{n\in\mathbb{Z}} |h| * |f_n|, \quad \text{és} \quad G^* h := \sup_{n\in\mathbb{Z}} |h| * |g_n|$$

maximál operátorok gyenge $(1,1)$ és erős (∞,∞) típusúak.

Legyen $a(x) := (x - [x])/x$,

$$(6.2.10) \qquad v(x) := 2a(x) - a(2^{-1}x), \; V(x) := (\mathcal{F}v)(x) \quad (x \in \mathbb{R}_+)$$

és χ_n $(n \in \mathbb{Z})$ jelölje a $[2^{-n-1}, 2^{-n})$ intervallum karakterisztikus függvényét. Ekkor (6.2.2) és a Walsh-Fourier-transzformált ismert tulajdonsága alapján

$$V(x) = 2(A(x) - A(2x)) \quad (x > 0).$$

Vezessük be a

$$(6.2.11) \qquad (W_n f)(x) := 2^n \int_0^{\infty} f(t) V(2^n(x \dotplus t))\,dt \quad (f \in L^1, n \in \mathbb{Z})$$

wavelet-operátorokat, majd ezekkel képezzük a

$$(6.2.12) \qquad Wf := \sum_{n\in\mathbb{Z}} W_n(f\chi_n) \quad (f \in L^1)$$

lokális konvolúciós operátort. Könnyen igazolható, hogy (6.2.12)-ben szereplő sor majdnem mindenütt pontonként és L^1-normában is konvergál. A 6.2. Tételben belátjuk, hogy W és C megegyeznek az $L^1(\mathbb{R}_+)$ téren. A W operátornak az $L^p := L^p(\mathbb{R}_+)$ téren való korlátosságának igazolásához használni fogjuk az alábbi maximál operátort:

$$(6.2.13) \qquad (Vf)(x) := \sup_{n\in\mathbb{Z}} 2^n \int_0^\infty |f(x \dotplus t)V(2^n t)|\,dt \quad (x \in \mathbb{R}_+).$$

Jelöljük $\|f\|_p$-vel az $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$ függvény L^p-normáját.

6.1. Tétel. *A V maximál operátor gyenge (1,1) típusú, és erős (q,q) típusú, ha $1 < q \le \infty$:*

$$(6.2.14) \qquad \|Vf\|_q \le C_q'\|f\|_q \quad (f \in L^q, 1 < q \le \infty).$$

ahol C_q' csak a q-tól függő konstans .

6.2. Tétel. *A W operátor korlátos az L^1 téren, és megegyezik a C diadikus Cesàro operátorral:*

$$(6.2.16) \qquad \left(\widehat{Wf}\right)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \hat{f}(t)\,dt \quad (x > 0, f \in L^1).$$

Továbbá, a W operátor korlátos L^p téren, ha $1 \le p < \infty$:

$$(6.2.17) \qquad \|Wf\|_p \le C_p\|f\|_p \quad (f \in L^p),$$

ahol $C_p = C_q'$, $1/p + 1/q = 1$ és C_q' megegyezik a (6.2.14)-ben szereplő konstanssal. A W operátor nem korlátos az L^∞ téren.

Irodalomjegyzék

[3]. Butzer, P.L., Wagner H.J., *Walsh series and the concept of a derivative*, Appl. Anal. 3 (1973), 29–46.

[11]. Eisner, T., *The dyadic Cesàro operators*, Acta Sci. Math.(Szeged) 64 (1998), 99–111.

[12]. Eisner, T., *The two-parameter Cesàro operators*, Math. Pannon. 9/2 (1998), 243–258.

[13]. Eisner, T., *Diadikus Cesàro operátorok*, Matematikus PhD hallgatók konferenciája (Szeged, 1998).

[14]. Eisner, T., *Dyadic Cesàro operators on Hölder spaces*, Functons, Series, Operators, Proc. Alexits Memorial Conf. (1999), Budapest (elfogadva).

[15]. Eisner, T., *Dyadic Cesàro operators on Hardy spaces*, Acta Sci. Math.(Szeged) (2001).

[16]. Eisner, T. Schipp, F., *The dyadic Cesàro operator on* $\mathbb{R}_+$, Anal. Math. 26 (2000), 263–274.

[24]. G.H. Hardy, *Notes on some points in the integral calculus LXVI*, Messenger of Math. 58 (1929), 50–52

[30]. Schipp, F., Wade, W.R., Simon, P., Pál, J., *Walsh Series, An Introduction to Dyadic Harmonic Analysis*, Akadémiai Kiadó (Budapest), Adam Hilger (Bristol-New-York), 1990.

Nyilatkozat

Alulírott Dr. Schipp Ferenc egyetemi tanár nyilatkozom arról, hogy a "*The dyadi Cesàro operator on* $\mathbb{R}_+$" című cikk Eisner Tímeával közös munkánk, melyben a jelölt saját munkája hozzávetőlegesen 50%.

Pécs, 2001. április 6.

Dr. Schipp Ferenc
egyetemi tanár

Nyilatkozat

Alulírott Dr. Schipp Ferenc egyetemi tanár nyilatkozom arról, hogy a "*The dyadi Cesàro operator on* $\mathbb{R}_+$" című cikket sem eddig, sem ezután nem használom fel doktori fokozat megszerzésére.

Pécs, 2001. április 6.

Dr. Schipp Ferenc
egyetemi tanár