

EXTRÉMÁLIS ÉS INTERMEDIÁLIS STATISZTIKÁK LINEÁRIS
KOMBINÁCIÓINAK HATÁRELOSZLÁSAI

Doktori értekezés

Készítette: Viharos László tanársegéd

Témavezető: Dr. Csörgő Sándor egyetemi tanár

SZEGED, JATE

Analízis Alkalmazásai Tanszék

1991

Köszönetemet fejezem ki Dr. Csörgő Sándor professzor úrnak a problémafelvetésért
és a dolgozat megírásában nyújtott segítségéért.

TARTALOMJEGYZÉK

Bevezetés	2
1.§ Extrémális értékek lineáris kombinációinak határeloszlásai	5
2.§ Intermediális statisztikák lineáris kombinációinak határeloszlásai	29
3.§ Extrémális és intermediális statisztikák lineáris kombinációinak határeloszlásai, amikor az alapeloszlás valamely extrémális eloszlás vonzástartományában van	34
4.§ Eloszlások farokindexének becslése	45
Hivatkozások	55

Legyenek $X_{1,n} \leq \dots \leq X_{n,n}$ rendezett mintaelemek, melyek egy n elemű $X_1, \dots, X_n$ mintához tartoznak. Tegyük fel, hogy k_n pozitív egész számokból álló sorozat, melyre $1 \leq k_n \leq n$, $k_n \rightarrow \infty$, $k_n/n \rightarrow \alpha$, amint $n \rightarrow \infty$ valamely $0 \leq \alpha < 1$ számra. Legyen továbbá $k \geq 0$ rögzített egész szám, f egy valós függvény és legyenek $d_{i,n}$, $1 \leq i \leq n$, konstansok. Szükséges és elegendő feltételeket adunk arra, hogy a

$$T_n(k, k_n) := \frac{1}{n} \sum_{i=k+1}^{k_n} d_{n+1-i,n} f(X_{n+1-i,n})$$

sorozatnak megfelelő centralizáció és normalizáció megválasztása mellett létezzen nemelfajult határeloszlása, ezenfelül leírjuk a lehetséges határérték valószínűségi változókat. Ezzel a feladattal foglalkozik a jelen disszertáció első fejezete. A problémát Csörgő S., Haeusler és Mason [5]-ben teljesen megoldották a

$$\hat{T}_n(k, k_n) := \frac{1}{n} \sum_{i=k+1}^{k_n} X_{n+1-i,n}$$

súlyok nélküli összegekre. (A továbbiakban Csörgő S. helyett mindig a rövidebb Csörgő megnevezést használjuk, mely sohasem fogja rövidíteni e tudomány másik aktív művelője, Csörgő Miklós nevét.)

A fentihez hasonló vizsgálatok eredete a klasszikus centrális határeloszlás problémáig nyúlik vissza, melyek a $\hat{T}_n(0, n)$ statisztikák aszimptotikus viselkedésének leírására irányultak. Az ilyen kutatásokat motiváló gyakorlati indíttatások széles köre közismert. Az első idevonatkozó átfogó tanulmányt Gnyegyenko és Kolmogorov [10] könyve képezi. Ők a karakterisztikus függvények klasszikus módszerét alkalmazva, P. Levy, Hincsin, Feller, Dooblin és saját maguk valamint tanítványaik és követőik korábbi munkáira alapozva, utat nyitottak az ilyenfajta kutatások művelői számára. Azóta sok évtized eltelté után egy új módszer alkalmazása bontakozott ki, melyet Csörgő, Haeusler és Mason [4]-ben dolgozott ki, és amelyet később Csörgő részletesebben kimunkált [2]-ben. Ugyancsak ezt a módszert használják a [3] és [5] dolgozatokban határeloszlástételek bizonyítására. Csörgő, Haeusler és Mason észrevették, hogy az empirikus folyamatra vonatkozó aszimptotikus eredmények

is hatékonyan alkalmazhatók ilyen problémák megválaszolásában, sőt ez a módszer jelleménél fogva megvilágítja a határeloszlástételek valószínűségi természetét is, míg mindez a karakterisztikus függvényekkel történő Fourier-analitikus megközelítésről nem mondható el. [4]-ben Csörgő, Haeusler és Mason megmutatta, hogy a határeloszlás elmélet klasszikus eredményei új módszerük segítségével is megteremthetők, sőt azok több vonatkozásban felül is múlhatók. Ezzel a módszerrel, melyet a továbbiakban kvantilismódszernek nevezzünk, [4]-ben leírták a $\hat{T}_n(k, n-m)$ összegek ($k, m \geq 0$ egészek) aszimptotikus viselkedését. Később [3]-ban a $\hat{T}_n(k_n, n-m_n)$ statisztikákat kezdték vizsgálni, melyekben az m_n sorozat ugyanolyan feltételeknek tesz eleget, mint k_n . Ezt a problémát [6] motiválta, amelyben Csörgő, Horváth és Mason azt vizsgálták, hogy a $\hat{T}_n(0, n)$ összegek mely részei eredményezik az egész összeg normális vagy 2-nél kisebb kitevőjű stabilis határeloszlását.

Természetesen a $\hat{T}_n(k, k_n)$ összegek vizsgálata ([5]) sem pusztán teoretikusan motivált. Bizonyos statisztikai vizsgálatokhoz (pl. egy eloszlás farokindexének becsléséhez; ld. 4. fejezetünket) a rendezett minta felső része elégséges információt szolgáltat, míg a minta többi része ehhez képest jelentéktelen információ többlettel bír és néha nem is áll a statisztikus rendelkezésére.

Szintén nem új keletű probléma a valószínűségelméletben és a statisztikában rendezett mintaelemek lineáris kombinációinak vizsgálata. Gyakran az ilyen súlyozott statisztikák optimálisabb tulajdonságokkal rendelkeznek, mint az eredeti összegek (pl. szórás, aszimptotikus szórás, ... stb. szempontjából). Az első lineáris kombinációkra megfogalmazott általános tételek Chernoff, Gastwirth és Johns ([1]) nevéhez fűződnek.

Mi a lineáris kombinációkra azt a technikát fogjuk alkalmazni, melyet Mason és Shorack [14] és [16]-ban kidolgozott a $T_n(k, n-m)$ és a $T_n(k_n, n-m_n)$ statisztikákra. Ők a $d_{i,n}$ súlyokat egy kellőképpen sima reguláris változású függvény integrálásával állították elő. Ez a módszer egyfajta technikai kiterjesztése a [4]-ben alkalmazott kvantilismódszernek. A hiányzó láncszem, a $T_n(k, k_n)$ típusú lineáris kombinációk vizsgálata erre a disszertációra vár, mely tehát szintén a kvantilismódszeren alapul és ötvözi az [5] ill. a [14] és [16]-ban kidolgozott technikai elemeket.

Egy másik fajta rendezett statisztikákon alapuló extrémális összeg a $\hat{T}_n([ak_n], [bk_n])$ alakban írható fel, ahol $0 < a < b$ rögzített számok, k_n most pozitív számokból álló sorozat,

melyre $k_n \rightarrow \infty$, $k_n/n \rightarrow 0$ teljesül amint $n \rightarrow \infty$, $[.]$ a felső egészrész függvény: $[x] = \min\{n : n \text{ egész, } x \leq n\}$ minden valós x -re. Ezeket a statisztikákat Csörgő és Mason [8]-ban vezette be, melyeket a továbbiakban intermediális összegeknek fogunk nevezni. Csörgő és Mason leírta az intermediális összegek aszimptotikus viselkedését, mi a 2. fejezetben hasonló tételket fogalmazunk meg a $T_n([ak_n], [bk_n])$ intermediális lineáris kombinációkra.

A 3. fejezetben külön megfogalmazzuk tételünket arra az esetre, amikor az alapeloszlás valamely extrémális eloszlás vonzástartományában van. Erre azért fordítunk kitüntetett figyelmet, mert az ilyen eloszlások vizsgálata manapság népszerű téma az elméleti statisztikában. A népszerűség oka természetesen az ilyen eloszlások statisztikai fontossága. (Nem véletlen, hogy az extrémumelmélet egyik hagyományos bástyája Hollandia, ahol a védőgátak tervezésekor jelentős szerepet játszik a tengerszint tetőzésének statisztikai analízise.) A fontosság matematikai oldala az a tény, hogy ilyen eloszlások mellett nemcsak részsorozatok mentén, hanem a természetes számok teljes sorozatán nyerhetők határeloszlások. Csörgő, Haeusler és Mason által [5]-ben az eredeti $\hat{T}_n(k, k_n)$ összegekre ebben az esetben nyert tételeknek az az alapvető elméleti jelentősége, hogy hidat képeznek két klasszikus és klasszikusan szeparált elmélet között, nevezetesen az extrémumelmélet és az összeg-elmélet között, méghozzá egy olyan új, egyöntetű módszerrel, amely mindkét klasszikus elméletet egyaránt kiadja. A statisztikai alkalmazhatóság vagy motiváltság mellett tehát elméleti szempontból sem közömbös, hogy ezeket az eredményeket ki tudjuk terjeszteni lineáris kombinációkra. Ezzel együtt előkészítjük a 4. fejezetben tárgyalt farokindex becslésekre vonatkozó statisztikai tételünket is.

Legyenek $X, X_1, X_2, \dots$ független és azonos eloszlású valószínűségi változók közös jobbról folytonos F eloszlásfüggvénnyel. Feltesszük, hogy X nemelfajult valószínűségi változó. Jelölje $X_{1,n} \leq \dots \leq X_{n,n}$ az $X_1, \dots, X_n$ mintához tartozó rendezett statisztikák sorozatát. Arra a kérdésre adunk választ, hogy milyen feltételek mellett létezik nemelfajult határeloszlása alkalmas centralizáció és normalizáció mellett a

$$(1.0) \quad T_n = T_n(k) := \frac{1}{n} \sum_{i=k+1}^{k_n} d_{n+1-i,n} f(X_{n+1-i,n})$$

sorozatnak, ahol $k \geq 0$ egész, k_n pozitív egészek egy olyan sorozata, melyre

$$(1.1)$$

$1 \leq k_n \leq n, k_n \rightarrow \infty$, és $k_n/n \rightarrow 0$, ha $n \rightarrow \infty$; vagy $k_n = [n\alpha]$ valamely $0 < \alpha < 1$ számra

([.] egészrészt jelöl), f egy ismert Borel-mérhető függvény, $d_{i,n}$ adott konstansok. Ha (1.1)-ben k_n -re az első feltétel teljesül, akkor arra az $\alpha = 0$ relációval fogunk hivatkozni. Ha U a $(0,1)$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó, akkor a $Q(U)$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye F , ahol

$$(1.1') \quad Q(s) = \inf\{x : F(x) \geq s\}, \quad 0 < s \leq 1, \quad Q(0) = Q(0+).$$

az F eloszlásfüggvény inverze, az úgynevezett kvantilisfüggvény. Így feltehetjük, hogy

$$(1.2) \quad T_n(k) = \frac{1}{n} \sum_{i=k+1}^{k_n} d_{n+1-i,n} h(U_{n+1-i,n})$$

ahol $h(\cdot) = f(Q(\cdot))$ és $U_{1,n} \leq \dots \leq U_{n,n}$ rendezett minta, mely egy a $(0,1)$ -en egyenletes eloszlású n elemű mintához tartozik.

Az (1.2)-beli $h(\cdot)$ függvény és $d_{i,n}$ súlyok tetszőleges megválasztása mellett a probléma megoldása reménytelennek tűnik, azonban lineáris kombinációk egy speciálisabb (de még mindig elég tág) osztályára szükséges és elegendő feltételeket lehet adni nemelfajult határeloszlás létezésére, és mint azt látni fogjuk lehetséges a határérték valószínűségi

változók alkalmas reprezentáció segítségével történő egyszerű leírása is. Így mi lineáris kombinációknak csak azzal az osztályával foglalkozunk, melyet az alábbi H, D és $\bar{L}$ feltételek határoznak meg, és amelyhez hasonlóan Mason és Shorack [16]-ban (és előttük sokan mások) már alkalmazott a teljes összegek határeloszlásának vizsgálatakor.

H feltétel:

h nemcsökkenő és balról folytonos függvény a $(0,1)$ intervallumon.

D feltétel:

$d_{i,n} = n \int_{(i-1)/n}^{i/n} \bar{L}(t) dt$, $1 \leq i \leq n$, valamely $\bar{L} \geq 0$, a $(0,1)$ intervallumon folytonos függvényre, mely elegendő tesz a következő feltételnek.

$\bar{L}$ feltétel:

a) Valamely $\mu > 0$ esetén $\bar{L}$ Lipschitz tulajdonságú az $[1 - \alpha - \mu, 1 - \delta]$ intervallumon minden olyan δ -ra, melyre $0 < \delta < \alpha + \mu$, azaz létezik egy olyan $M = M_{\alpha, \mu, \delta}$ állandó, hogy $|\bar{L}(x_1) - \bar{L}(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|$ tetszőleges $x_1, x_2 \in [1 - \alpha - \mu, 1 - \delta]$ számokra..

b) Létezik olyan $-\infty < \rho < \infty$ konstans, hogy $\bar{L}(1 - t) = t^\rho \bar{l}(t)$ a $(0,1)$ intervallumon valamely $\bar{l}(\cdot)$ a 0-nál lassú változású függvényre, továbbá az $\bar{l}$ függvény deriválható valamely $(0, \delta)$ intervallumon és $\bar{l}'(t) = t^{-1} \bar{l}(t) \epsilon(t)$, ahol $\epsilon(\cdot)$ egy folytonos függvény és $\epsilon(t) \rightarrow 0$, ha $t \rightarrow 0$.

c) $\bar{L} > 0$ μ_h majdnem mindenütt az $[1 - \alpha - \mu, 1)$ intervallumon, ahol μ_h jelöli a h által generált Lebesgue-Stieltjes mértéket.

d) Ha $k = 0$ (1.0)-ban, akkor tegyük fel, hogy $\rho > -1$ és minden $M \geq 1$ esetén

$$\sup_{1/M < y < M} \left| \int_0^y \frac{(\bar{l}(u/n) - \bar{l}(y/n))u^\rho}{\bar{l}(y/n)y^\rho} du \right| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Mint az látható, $\bar{L}$ feltételünk és Mason és Shorack feltételei közötti különbség lényegében annyi, hogy a mi feltételeink nem a teljes $(0,1)$ intervallumra vonatkoznak, hanem annak csak egy részére, továbbá mi a $k = 0$ esetre is kiterjesztjük a lineáris kombinációk vizsgálatát. Megjegyezzük azt is, hogy az a) és b) feltételeknek szinte kivétel nélkül

eleget tesz minden olyan lassú változású függvény, mely elemi függvényekkel kifejezhető, azaz amelyek az alkalmazásokban a leggyakrabban előfordulnak, ilyenek pl. a $t^a(1-t)^b$, a $(\log_i t^{-1})^a(\log_j(1-t)^{-1})^b$ függvények, ahol $\log_i$ jelöli az i -szer iterált természetes alapú logaritmus függvényt, $i = 1, 2, \dots$, és minden ilyen függvény szorzataként előálló függvény, valamint a normális eloszlásfüggvények inverze is ilyen tulajdonságú. A d) feltételnek $\rho > -1$ esetén eleget tesz minden olyan $\bar{l}$ függvény melynek véges pozitív határértéke létezik a 0-nál.

Mielőtt megfogalmazzuk tételeinket, bevezetünk még néhány jelölést. A továbbiakban ha egy balról folytonos függvény szerint integrálunk, akkor $\int_a^b$ alatt mindig $\int_{[a,b)}$ -t értünk. Legyen $J(s) = \bar{L}(1-s)$, $0 < s < 1$, $g(t) = -h(1-t)$, $0 < t < 1$,

$$(1.2') \quad \begin{aligned} c_{i,n} &= d_{n+1-i,n} = \int_{(i-1)/n}^{i/n} J(t) dt, \quad K(t) = \int_{\frac{1}{2}}^t J(s) dg(s), \quad 0 < t < 1, \\ \sigma^2(s, t) &= \sigma_K^2(s, t) = \int_s^t \int_s^t (u \wedge v - uv) dK(u) dK(v), \quad 0 \leq s \leq t \leq 1, \end{aligned}$$

ahol $u \wedge v = \min(u, v)$. Megjegyezzük, hogy a $g(\cdot)$ és a $K(\cdot)$ függvények megfelelnek a H feltétel előírásainak. Szükségünk lesz még a

$$\mu_n(k) = \mu_n(k, g) := -n \int_{(k+1)/n}^{k_n/n} J(u) g(u) du - c_{k+1,n} g\left(\frac{1}{n}\right)$$

természetes centralizáló és az

$$a_n = a_{n,K} = \begin{cases} \sigma(1/n, k_n/n) & , \text{ ha } \sigma(1/n, k_n/n) > 0, \\ 1 & , \text{ különben,} \end{cases}$$

természetes normalizáló sorozatokra. Legyen a továbbiakban $b_n = \sigma(1/n, k_n/n)$, továbbá legyen δ_n egy olyan pozitív számokból álló sorozat, melyre $n\delta_n < n$ és $n\delta_n \rightarrow 0$, ha $n \rightarrow \infty$. A következő két függvényt sorozat fontos szerephez jut majd a határeloszlás létezésére kimondott szükséges és elegendő feltételek megfogalmazásakor:

$$\psi_n(x) = \psi_{n,K}(x) = \begin{cases} \frac{k_n^{1/2} \left\{ K\left(\frac{k_n}{n} + x \frac{k_n^{1/2}}{n} \right) - K\left(\frac{k_n}{n}\right) \right\}}{n^{1/2} a_n} & , \text{ ha } -\frac{k_n^{1/2}}{2} \leq x \leq \frac{k_n^{1/2}}{2}, \\ \psi_n\left(-\frac{k_n^{1/2}}{2}\right) & , \text{ ha } -\infty < x < -\frac{k_n^{1/2}}{2}, \\ \psi_n\left(\frac{k_n^{1/2}}{2}\right) & , \text{ ha } \frac{k_n^{1/2}}{2} < x < \infty, \end{cases}$$

és

$$\varphi_n(y) = \varphi_{n,K}(y) = \begin{cases} \frac{K(y/n) - K(1/n)}{n^{1/2}a_n} & , \text{ ha } 0 < y \leq n - n\delta_n, \\ \frac{K(1 - \delta_n) - K(1/n)}{n^{1/2}a_n} & , \text{ ha } n - n\delta_n < y < \infty. \end{cases}$$

A továbbiakban $\{n\}$ jelöli a természetes számok sorozatát, $\{n_1\}$ illetve $\{n_2\}$ annak egy részsorozatát, n_1 ill. n_2 pedig azokból egy-egy indexet fog jelölni. A szükséges és elegendő feltételek, melyeket a ψ_n és a φ_n sorozatoknak ki kell majd elégíteni a következők lesznek:

Tegyük fel, hogy létezik egy $\{n_1\} \subset \{n\}$ részsorozat, úgy, hogy valamely A_{n_1} pozitív sorozatra és az (1.1)-ben megadott $\{k_{n_1}\}$ sorozatra az alábbiak teljesülnek:

(F1) létezik egy nemcsökkenő, balról folytonos, az egész számegeyenesen definiált ψ függvény, mely szükségképpen eleget tesz a $\psi(0) \leq 0$ és a $\psi(0+) \geq 0$ feltételeknek, továbbá

$$\psi_{n_1}^*(x) = \frac{n_1^{1/2}a_{n_1}}{A_{n_1}}\psi_{n_1}(x) \rightarrow \psi(x), \text{ amint } n_1 \rightarrow \infty,$$

minden olyan x -re, amely folytonossági helye ψ -nek.

(F2) létezik egy nemcsökkenő, balról folytonos, a $(0, \infty)$ -n definiált φ függvény, mely szükségképpen eleget tesz a $\varphi(1) \leq 0$ és a $\varphi(1+) \geq 0$ feltételeknek, továbbá

$$\varphi_{n_1}^*(y) = \frac{n_1^{1/2}a_{n_1}}{A_{n_1}}\varphi_{n_1}(y) \rightarrow \varphi(y), \text{ amint } n_1 \rightarrow \infty,$$

minden olyan y -ra, amely folytonossági helye φ -nek.

(F3) létezik egy olyan $0 \leq a < \infty$ konstans, hogy

$$n_1^{1/2}b_{n_1}/A_{n_1} \rightarrow a, \text{ amint } n_1 \rightarrow \infty.$$

Ennyi előkészület után megfogalmazhatjuk fő tételeinket.

1.1 TÉTEL. Ha teljesülnek az (F1),(F2) és (F3) feltételek valamely $\{n_1\} \subset \{n\}$ részsorozat mentén, akkor létezik olyan $\{n_2\} \subset \{n_1\}$ részsorozat és pozitív egészeknek olyan l_{n_2} sorozata mely kielégíti a az $l_{n_2} \rightarrow \infty$, $l_{n_2}/k_{n_2} \rightarrow 0$ feltételeket, amint $n_2 \rightarrow \infty$, továbbá vagy teljesül a $\sigma(l_{n_2}/n_2, k_{n_2}/n_2) > 0$ egyenlőtlenség minden n_2 -re, mely esetben valamely $0 \leq b \leq a$ és $0 \leq r \leq (1 - \alpha)^{1/2}$ számokra

$$(1.3) \quad n_2^{1/2}\sigma(l_{n_2}/n_2, k_{n_2}/n_2)/A_{n_2} \rightarrow b,$$

$$r_{n_2} = \left(\frac{n_2}{k_{n_2}}\right)^{1/2} \frac{1 - k_{n_2}/n_2}{\sigma(l_{n_2}/n_2, k_{n_2}/n_2)} \int_{l_{n_2}/n_2}^{k_{n_2}/n_2} s dK(s) \rightarrow r, \quad \text{amint } n_2 \rightarrow \infty,$$

vagy $\sigma(l_{n_2}/n_2, k_{n_2}/n_2) = 0$ minden n_2 -re, amikor is előírjuk, hogy $b = r = 0$ legyen. Mindkét esetben

$$(1.4) \quad \frac{1}{A_{n_2}} \left\{ \sum_{i=k+1}^{k_{n_2}} d_{n_2+1-i, n_2} f(X_{n_2+1-i, n_2}) - \mu_{n_2}(k) \right\} \rightarrow_{\mathcal{D}} V_k(\varphi, \psi, b, r, \alpha),$$

amint $n_2 \rightarrow \infty$, ahol $\rightarrow_{\mathcal{D}}$ eloszlásban való konvergenciát jelöl,

$$\begin{aligned} V_k(\varphi, \psi, b, r, \alpha) &:= bZ_1 + \int_{-Z(r, \alpha)}^0 \psi(x) dx - \int_{S_{k+1}}^{\infty} h_{\rho}(N(t), t) d\varphi(t) \\ &\quad - \int_{k+1}^{S_{k+1}} h_{\rho}(k, t) d\varphi(t) - \int_1^{k+1} (h_{\rho}(k, t) - h_{\rho}(k+1, t)) d\varphi(t) \\ &\quad - \varphi(1)(h_{\rho}(k, 1) - h_{\rho}(k+1, 1)), \\ h_{\rho}(x, y) &= \int_x^y u^{\rho} du / y^{\rho} = \begin{cases} (y^{\rho+1} - x^{\rho+1}) / ((\rho+1)y^{\rho}) & , \text{ha } \rho \neq -1, \\ y \log(y/x) & , \text{ha } \rho = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

A $V_k(\varphi, \psi, b, r, \alpha)$ valószínűségi változóban szereplő második integrál egy Riemann improprius integrál, mely az alábbi (1.6) összefüggés miatt egy valószínűséggel létezik, $Z(r, \alpha) = -rZ_1 + (1 - \alpha - r^2)^{1/2} Z_2$, a Z_1 és Z_2 valószínűségi változók függetlenek és standard normális eloszlásúak, $N(t), 0 \leq t < \infty$, egy standard Poisson-folyamat, mely független (Z_1, Z_2) -től. A φ és ψ határértékfüggvények szükségképpen kielégítik a

$$(1.5) \quad \psi(x) \geq -ar/(1 - \alpha), \quad -\infty < x < \infty,$$

és a

$$(1.6) \quad \varphi(y) \leq a, \quad 0 < y < \infty, \quad \int_{\varepsilon}^{\infty} (\varphi(y) - \varphi(\infty))^2 dy < \infty$$

feltételeket minden $\varepsilon > 0$ számra. Ezen felül, ha $a > 0$ és $\varphi \equiv 0$, akkor $b = a$ (1.4)-ben, ha pedig $a = 0$, akkor $\varphi(y) = 0$ minden $y > 1$ értékre.

A következő tétel szerint az 1.1 Tétel feltételei optimálisak.

1.2 TÉTEL. Tegyük fel, hogy $k \geq 0$ (1.2)-ben. Ha létezik egy $\{n_1\} \subset \{n\}$ részsorozat úgy, hogy valamely $A_{n_1} > 0$ és C_{n_1} számsorozatokra

$$(1.7) \quad \frac{1}{A_{n_1}} \left\{ \sum_{i=k+1}^{k_n} d_{n_1+1-i, n_1} f(X_{n_1+1-i, n_1}) - C_{n_1} \right\} \rightarrow_{\mathcal{D}} V,$$

ahol V egy nemelfajult valószínűségi változó, akkor létezik olyan $\{n_2\} \subset \{n_1\}$ sorozat, hogy az (F1), (F2) és (F3) feltételek teljesülnek $\{n_2\}$ mentén az (1.7)-beli A_{n_2} sorozatra valamely ψ és φ függvényekkel és $0 \leq a < \infty$ konstanssal. A φ és ψ függvények kielégítik az (1.5) és (1.6) feltételeket. A V valószínűségi változóra érvényes a $V =_{\mathcal{D}} V_k(\varphi, \psi, b, r, \alpha) + c$ eloszlásban való egyenlőség valamely $0 \leq b \leq a, 0 \leq r \leq (1 - \alpha)^{1/2}$ és $-\infty < c < \infty$ konstansokra. Ezen felül $\varphi \not\equiv 0$, $\psi \not\equiv 0$ és $b > 0$ közül valamelyik teljesül.

A tételek bizonyításait azon a speciális valószínűségi mezőn végezzük el, melyet a [3], [4], [5] és [16] dolgozatok használnak és amelyet Csörgő Miklós, Csörgő Sándor, Horváth és Mason [9]-ben konstruáltak eredetileg. Ha $G_n(t)$ jelöli az $U_{1,n} \leq \dots \leq U_{n,n}$ statisztikákhoz tartozó empirikus eloszlásfüggvényt, akkor ezen a valószínűségi mezőn létezik olyan $\{\mathcal{B}_n(t), 0 \leq t \leq 1; n \geq 1\}$ Brown-híd sorozat, melyre

$$(1.8) \quad \Delta_n(\nu) := \sup_{n^{-1} \leq s \leq 1-n^{-1}} |n^{1/2}(G_n(s) - s) - \mathcal{B}_n(s)| / (s(1-s))^{1/2-\nu} = O_p(n^{-\nu})$$

minden $0 \leq \nu < 1/4$ számra, továbbá $U_{i,n}$ felírható az

$$U_{i,n} = \frac{Y_1 + \dots + Y_i}{Y_1 + \dots + Y_{n+1}} =: \frac{S_i}{S_{n+1}}$$

alakban, ahol $Y_1, Y_2, \dots$ független 1 várható értékű exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Az általánosság megszorítása nélkül hozott (1.2) megállapodás a továbbiakban tehát ezekkel az $U_{i,n}$ változókkal értendő.

Vizsgáljuk először az

$$S_n(k) = \frac{n(T_n(k) - \frac{1}{n}\mu_n(k))}{A_n}$$

sorozatot. A fentiek, speciálisan az (1.2')-beli jelölések alapján

$$\begin{aligned}
 (1.8.1) \quad S_n(k) &=_{\mathcal{D}} -\frac{1}{A_n} \left\{ \sum_{i=k+2}^{k_n} c_{i,n} g(U_{i,n}) - n \int_{(k+1)/n}^{k_n/n} J(s) g(s) ds \right\} \\
 &\quad - \frac{c_{n,k+1}}{A_n} (g(U_{k+1,n}) - g(1/n)) \\
 &=: -Q_n(k+1, k_n) - R_n.
 \end{aligned}$$

Ha $0 < m < r$ egész számok, akkor igaz, hogy

$$\begin{aligned}
 (1.8.2) \quad Q_n(m, r) &= \frac{1}{A_n} \left\{ \sum_{i=m+1}^r c_{i,n} g(U_{i,n}) - n \int_{m/n}^{r/n} J(s) g(s) ds \right\} = \\
 &\quad - \frac{n}{A_n} \int_{m/n}^{r/n} \int_t^{G_n^*(t)} J(s) ds dg(t) - \frac{n}{A_n} \int_{U_{m,n}}^{m/n} \int_{m/n}^{G_n^*(t)} J(s) ds dg(t) \\
 &\quad + \frac{n}{A_n} \int_{U_{r,n}}^{r/n} \int_{r/n}^{G_n^*(t)} J(s) ds dg(t) =: \theta_n(m, r) + \alpha_n(m) - \alpha_n(r),
 \end{aligned}$$

ahol

$$G_n^*(t) = \begin{cases} (k+1)/n & , \text{ha } 0 \leq t \leq U_{k+1,n}, \\ G_n(t) & , \text{ha } U_{k+1,n} < t < U_{n,n}, \\ 1 - 1/n & , \text{ha } U_{n,n} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

(vö. Mason és Shorack [16], (3.23)). Így ha $k+1 \leq m_n \leq l_n \leq k_n$ tetszőleges egész számok, akkor

$$\begin{aligned}
 Q_n(k+1, k_n) + R_n &= \\
 &= \{\alpha_n(k+1) + \theta_n(k+1, m_n) + R_n\} + \theta_n(m_n, l_n) + \{\theta_n(l_n, k_n) - \alpha_n(k_n)\} \\
 &=: \Delta_n^{(1)}(m_n) + \Delta_n^{(2)}(m_n, l_n) + \Delta_n^{(3)}(l_n, k_n).
 \end{aligned}$$

1.1 LEMMA. Tegyük fel, hogy teljesülnek az (F2) és (F3) feltételek valamely $\{n_1\} \subset \{n\}$ részsorozat mentén. Ekkor léteznek olyan pozitív számokból álló m_{n_1} és l_{n_1} sorozatok úgy, hogy $1 \leq m_{n_1} \leq l_{n_1} \leq k_{n_1}$ és $m_{n_1} \rightarrow \infty, l_{n_1}/m_{n_1} \rightarrow \infty, k_{n_1}/l_{n_1} \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned}
 \Delta_{n_1}^{(1)}(m_{n_1}) &\rightarrow_{\mathcal{D}} V_1(\varphi) := \int_{S_{k+1}}^{\infty} h_{\rho}(N(t), t) d\varphi(t) + \int_{k+1}^{S_{k+1}} h_{\rho}(k, t) d\varphi(t) \\
 &\quad + \int_1^{k+1} (h_{\rho}(k, t) - h_{\rho}(k+1, t)) d\varphi(t) \\
 &\quad + \varphi(1)(h_{\rho}(k, 1) - h_{\rho}(k+1, 1)),
 \end{aligned}$$

és $\Delta_{n_1}^{(2)}(m_{n_1}, l_{n_1}) \rightarrow_{\mathcal{P}} 0$ amint $n_1 \rightarrow \infty$, ahol $\rightarrow_{\mathcal{P}}$ sztochasztikus konvergenciát jelöl. Ezenfelül ha $\varphi \equiv 0$, akkor $\{l_{n_1}\}$ megválasztható úgy, hogy

$$n_1^{1/2} \sigma(1/n_1, l_{n_1}/n_1)/A_{n_1} \rightarrow 0.$$

Bizonyítás. Vizsgáljuk először az $\alpha_n(k+1) + \theta_n(k+1, m_n)$ és a $\Delta_n^{(2)}(m, l)$ mennyiségek aszimptotikus viselkedését. Tegyük fel, hogy m és l folytonossági helyei φ -nek és $k+1 \leq m \leq l$. Megjegyezzük, hogy Mason-Shorack [16] (3.61) ill. (3.62) összefüggéseinek bizonyítása nem igényel mást, mint az ottani $\Phi_{0n}^*(\cdot)$ sorozat gyenge konvergenciáját és a lineáris kombinációkra szabott korlátozó feltevéseket. Így ha Φ_{0n}^* helyébe φ_n -et írunk, akkor az ottani gondolatmenet szó szerinti megismétlésével kapjuk, hogy

$$\alpha_{n_1}(k+1) + \theta_{n_1}(k+1, m) \rightarrow_{\mathcal{P}} \int_{k+1}^{S_{k+1}} h_{\rho}(k+1, t) d\varphi(t) + \int_{S_{k+1}}^m h_{\rho}(N(t) \vee (k+1), t) d\varphi(t)$$

és

$$\Delta_{n_1}^{(2)}(m, l) \rightarrow_{\mathcal{P}} \int_m^l h_{\rho}(N(t) \vee (k+1), t) d\varphi(t),$$

amint $n_1 \rightarrow \infty$. Mason és Shorack [16]-ban belátta, hogy ha (1.6) teljesül, akkor az

$$\int_{S_{k+1}}^{\infty} h_{\rho}(N(t), t) d\varphi(t)$$

valószínűségi változó jóldefiniált. Így ha alkalmazzuk Csörgő, Haeusler és Mason [4] 1. Tételének igazolásakor felhasznált diagonális eljárást, kapjuk, hogy valamely $1 \leq m_{n_1} \leq l_{n_1} \leq k_{n_1}, m_{n_1} \rightarrow \infty, l_{n_1}/m_{n_1} \rightarrow \infty, k_{n_1}/l_{n_1} \rightarrow \infty$, sorozatokra

$$\alpha_{n_1}(k+1) + \theta_{n_1}(k+1, m_{n_1}) \rightarrow_{\mathcal{P}} \int_{k+1}^{S_{k+1}} h_{\rho}(k+1, t) d\varphi(t) + \int_{S_{k+1}}^{\infty} h_{\rho}(N(t), t) d\varphi(t)$$

és

$$\Delta_{n_1}^{(2)}(m_{n_1}, l_{n_1}) \rightarrow_{\mathcal{P}} 0$$

amint $n_1 \rightarrow \infty$.

Ezek után vizsgáljuk az R_n mennyiség aszimptotikus viselkedését. Egyszerű számolás mutatja, hogy

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{n}{A_n} \int_{k/n}^{(k+1)/n} J(s) ds \int_{1/n}^{U_{k+1,n}} dg(t) \\ &= \frac{1}{A_n} \int_1^{n \frac{S_{k+1}}{S_{n+1}}} \int_k^{k+1} \frac{J(s/n)}{J(t/n)} ds dK(t/n) \\ &= \int_1^{n \frac{S_{k+1}}{S_{n+1}}} \left(\int_k^t \frac{J(s/n)}{J(t/n)} ds - \int_{k+1}^t \frac{J(s/n)}{J(t/n)} ds \right) d\varphi_n^*(t). \end{aligned}$$

Mason és Shorack ([16], (3.6) összefüggés) szerint tetszőleges kicsi $\epsilon > 0$ számhoz létezik egy $M > 0$ elegendően nagy szám úgy, hogy

$$(1.9) \quad P(1/(Mn) \leq U_{1,n} \leq \dots \leq U_{k+1,n} \leq M/n) > 1 - \epsilon$$

teljesüljön minden n -re. Legyen $A_{n\epsilon}''$ az (1.9)-ben szereplő esemény, $1_{n\epsilon}''$ jelölje a hozzá tartozó indikátorváltozót. Ekkor felhasználva Mason és Shorack [16] 3.1 Lemmáját illetve $k = 0$ esetén az $\bar{L}$ feltétel d) részét majd Csörgő, Haeusler és Mason [4] 2.1 Lemmáját (ez utóbbit a φ_n és az $U_{k+1,n}$ sorozatokra), kapjuk, hogy $n = n_1$ mentén

$$\begin{aligned} 1_{n\epsilon}'' R_n &= 1_{n\epsilon}'' \int_1^{n \frac{S_{k+1}}{S_{n+1}}} (h_\rho(k, t) - h_\rho(k+1, t)) d\varphi_n^*(t) + o_p(1) \\ &= 1_{n\epsilon}'' \int_1^{S_{k+1}} (h_\rho(k, t) - h_\rho(k+1, t)) d\varphi_n^*(t) + o_p(1) \\ &= 1_{n\epsilon}'' \left\{ \int_1^{S_{k+1}} ((h_\rho(k, t) - h_\rho(k+1, t)) - (h_\rho(k, 1) - h_\rho(k+1, 1))) d\varphi_n^*(t) \right. \\ &\quad \left. + \varphi_n^*(S_{k+1})(h_\rho(k, 1) - h_\rho(k+1, 1)) \right\} + o_p(1) \\ &= 1_{n\epsilon}'' \left\{ \int_1^{S_{k+1}} ((h_\rho(k, t) - h_\rho(k+1, t)) - (h_\rho(k, 1) - h_\rho(k+1, 1))) d\varphi(t) \right. \\ &\quad \left. + \varphi(S_{k+1})(h_\rho(k, 1) - h_\rho(k+1, 1)) \right\} + o_p(1) \\ &= 1_{n\epsilon}'' \left\{ \int_1^{S_{k+1}} (h_\rho(k, t) - h_\rho(k+1, t)) d\varphi(t) \right. \\ &\quad \left. + \varphi(1)(h_\rho(k, 1) - h_\rho(k+1, 1)) \right\} + o_p(1). \end{aligned}$$

Mivel (1.9)-ben $\epsilon > 0$ tetszőlegesen kicsire választható, ezért a fentiekből következik, hogy

$$R_{n_1} \rightarrow \mathcal{P} \int_1^{S_{k+1}} (h_\rho(k, t) - h_\rho(k+1, t)) d\varphi(t) \\ + \varphi(1)(h_\rho(k, 1) - h_\rho(k+1, 1))$$

amint $n_1 \rightarrow \infty$. Így a lemma első állítását igazoltuk. A második állítás Csörgő, Haeusler és Mason [5] 2.6 Lemmájából következik. $\square$

1.2 LEMMA. Legyen k_n valamely (1.1)-nek eleget tevő sorozat és tegyük fel, hogy az (F1) és (F3) feltételek teljesülnek valamely $\{n_1\} \subset \{n\}$ részsorozat mentén. Ha l_{n_1} egy olyan sorozat, melyre $0 \leq l_{n_1} \leq n_1$, $l_{n_1} \rightarrow \infty$ és $k_{n_1}/l_{n_1} \rightarrow \infty$ amint $n_1 \rightarrow \infty$, akkor létezik olyan $\{n_3\} \subset \{n_1\}$ részsorozat, hogy (1.3) teljesül valamely $0 \leq b \leq a$, $0 \leq r \leq (1 - \alpha)^{1/2}$ számokkal és

$$(1.10) \quad \Delta_{n_3}^{(3)}(l_{n_3}, k_{n_3}) \rightarrow_{\mathcal{D}} V_3(\psi, b, r, \alpha) := - \left\{ bZ_1 + \int_{-Z(r, \alpha)}^0 \psi(x) dx \right\}$$

amint $n_3 \rightarrow \infty$, ahol $Z(r, \alpha) = -rZ_1 + (1 - \alpha - r^2)^{1/2} Z_2$.

Bizonyítás. Vizsgáljuk először az $\alpha_n(k_n)$ sorozatot. Legyen

$$\delta_n(k_n) = \int_{k_n/n}^{U_{k_n, n}} n(G_n(u) - \frac{k_n}{n}) d\frac{K(u)}{A_n}.$$

Az $\alpha = 0$ esetre Mason és Shorack [14]-ben az 1.3 Tétel igazolásakor belátta, hogy

$$(1.11) \quad \alpha_n(k_n) = \delta_n(k_n)(1 + o_p(1)) + o_p(1),$$

amint $n \rightarrow \infty$. Mivel ennek igazolása triviális módon kiterjeszthető a $0 < \alpha < 1$ esetre is, így könnyen belátható, hogy (1.11) igaz minden $0 \leq \alpha < 1$ számra.

1.1 Megjegyzés. Az (1.11) egyenlőség akármilyen A_n pozitív sorozatra fennáll, továbbá annak igazolásához nem kellett feltennünk, hogy a $\varphi_{n_1}^*$ illetve a $\psi_{n_1}^*$ sorozat gyengén konvergál, ahhoz elég csupán (1.1) teljesülése.

Ezután vizsgáljuk a $Q_n(l_n, k_n)$ sorozatot. Két esetet különböztetünk meg.

1. Eset: Létezik egy $\{n_2\} \subset \{n_1\}$ részsorozat, hogy $\sigma(l_{n_2}/n_2, k_{n_2}/n_2) > 0$ minden n_2 $\{n_2\}$ -beli számra. Legyen $b_n^{(1)} = \sigma(l_n/n, k_n/n)$. Ekkor

$$\theta_{n_2}(l_{n_2}, k_{n_2}) = \frac{n_2^{1/2} b_{n_2}}{A_{n_2}} \frac{b_{n_2}^{(1)}}{b_{n_2}} \left\{ - \int_{l_{n_2}/n_2}^{k_{n_2}/n_2} n_2^{1/2} \int_t^{G_{n_2}^*(t)} J(s) ds \frac{dg(t)}{b_{n_2}^{(1)}} \right\} =: q_{n_2} \theta_{n_2}^{(1)}(l_{n_2}, k_{n_2}),$$

ahol

$$q_{n_2} = \frac{n_2^{1/2} b_{n_2}}{A_{n_2}} \frac{b_{n_2}^{(1)}}{b_{n_2}}.$$

Az l_{n_2} sorozat tulajdonságai miatt létezik olyan $\{n_3\} \subset \{n_2\}$ részsorozat, hogy valamely $0 \leq b \leq a$ számra

$$(1.12) \quad q_{n_3} \rightarrow b,$$

amint $n_3 \rightarrow \infty$. A $\theta_n^{(1)}(l_n, k_n)$ sorozat vizsgálatát Mason és Shorack [14] 1.3 Tételének bizonyításában leírtakhoz hasonlóan végezzük el. Így ha $\mathcal{U}_n^*(t) = n^{1/2}(G_n^*(t) - t)$ és $\mathcal{U}_n(t) = n^{1/2}(G_n(t) - t)$, akkor

$$(1.12') \quad \begin{aligned} \theta_n^{(1)}(l_n, k_n) &= - \int_{l_n/n}^{k_n/n} \mathcal{B}_n \frac{dK}{b_n^{(1)}} - \int_{l_n/n}^{k_n/n} (\mathcal{U}_n - \mathcal{B}_n) \frac{dK}{b_n^{(1)}} - \int_{l_n/n}^{k_n/n} (\mathcal{U}_n^* - \mathcal{U}_n) \frac{dK}{b_n^{(1)}} \\ &\quad - \frac{1}{2} n^{-1/2} \int_{l_n/n}^{k_n/n} (\mathcal{U}_n^*(t))^2 J'(t_n^*) \frac{dg(t)}{b_n^{(1)}} \\ &=: Z_n + \gamma_{n1} + \gamma_{n2} + \gamma_{n3} \end{aligned}$$

valamely $\min(t, G_n^*(t)) \leq t_n^* \leq \max(t, G_n^*(t))$ számra $n = n_2$ mentén. Nyilvánvalóan Z_{n_2} standard normális eloszlású valószínűségi változó minden n_2 -re, továbbá (1.8) miatt igaz, hogy

$$|\gamma_{n1}| \leq \|(\mathcal{U}_n - \mathcal{B}_n)/(I(1 - I))^{1/2-\nu}\|_{1/n}^{1-1/n} \int_{l_n/n}^{k_n/n} (t(1-t))^{1/2-\nu} \frac{dK(t)}{b_n^{(1)}} \leq$$

($\|\cdot\|$ a szuprérum normát jelöli, I az identikus leképezés)

$$\leq O_p(n^{-\nu}) \int_{l_n/n}^{k_n/n} t^{1/2-\nu} \frac{dK(t)}{b_n^{(1)}} \leq O_p(n^{-\nu}) O((l_n/n)^{-\nu}) = o_p(1),$$

(ez utóbbi egyenlőtlenséghez felhasználtuk Csörgő, Haeusler és Mason [5] 2.2 Lemmáját) ha $0 < \nu < 1/4$, amint $n = n_2 \rightarrow \infty$. Mivel $\|G_n^* - G_n\|_0^1 \leq (k+1)/n$, ezért most [5] 2.1 Lemmája segítségével kapjuk, hogy

$$|\gamma_{n2}| \leq \int_{l_n/n}^{k_n/n} (k+1)n^{-1/2} \frac{dK}{b_n^{(1)}} = \frac{k+1}{l_n^{1/2}} \frac{(l_n/n)^{1/2}(K(k_n/n) - K(l_n/n))}{b_n^{(1)}} = O(l_n^{-1/2}) = o(1)$$

amint $n = n_2 \rightarrow \infty$. A γ_{n3} mennyiség vizsgálatához vezessük be az alábbi eseményeket:

$$E_n = \{U_{k+1,n} \leq l_n/n\}, \quad E_n'' = \{U_{n,n} \geq k_n/n\}, \quad E_n^\mu = \{G_n(k_n/n) < \alpha + \mu/2\},$$

$$E_{n\epsilon} = \left\{ \begin{array}{ll} G_n(t) \leq t/\lambda & , \text{ ha } 0 \leq t \leq 1 \text{ és} \\ G_n(t) \geq t\lambda & , \text{ ha } U_{1,n} \leq t \leq 1 \text{ és} \\ G_n(t) \geq 1 - (1-t)/\lambda & , \text{ ha } 0 \leq t \leq 1 \text{ és} \\ G_n(t) \geq 1 - (1-t)\lambda & , \text{ ha } 0 \leq t \leq U_{n,n} \end{array} \right\},$$

ahol $\epsilon > 0$ és $0 < \lambda < 1$ később specifikált kicsi számok, μ pedig az $\bar{L}$ feltétel a) részében szereplő konstans. Legyenek $1_n, 1_n'', 1_n^\mu$ és $1_{n\epsilon}$ rendre a fenti eseményekhez tartozó indikátorváltozók. Ekkor Mason és Shorack [14] (4.35) összefüggéséhez hasonlóan kapjuk, hogy

$$(1.13) \quad \gamma_{n\epsilon} := 1_n 1_n'' 1_n^\mu 1_{n\epsilon} |\gamma_{n3}| \leq n^{-1/2} \int_{l_n/n}^{k_n/n} (\mathcal{U}_n(t))^2 M_{\lambda\epsilon} J(t) (t(1-t))^{-1} \frac{dg(t)}{b_n^{(1)}}$$

valamely $M_{\lambda\epsilon}$ konstansra. Megjegyezzük, hogy az (1.13) egyenlőtlenséghez kell leginkább felhasználni az $\bar{L}$ feltétel a) és b) pontjait. Így

$$e_{n\epsilon} := E(\gamma_{n\epsilon}) \leq M_{\lambda\epsilon} \int_{l_n/n}^{k_n/n} n^{-1/2} \frac{dK}{b_n^{(1)}} = O(l_n^{-1/2}) = o(1)$$

amint $n = n_2 \rightarrow \infty$. A Markov-egyenlőtlenség felhasználásával adódik, hogy minden $\epsilon' > 0$ esetén

$$P(|\gamma_{n3}| > \epsilon') \leq P(\overline{E_n}) + P(\overline{E_n''}) + P(\overline{E_n^\mu}) + P(\overline{E_{n\epsilon}}) + e_{n\epsilon}/\epsilon'$$

minden $n = n_2$ -re. Mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} (P(\overline{E_n}) + P(\overline{E_n''}) + P(\overline{E_n^\mu})) = 0$, továbbá Mason és Shorack ([16], (3.4) összefüggés) szerint az $E_{n\epsilon}$ eseményben szereplő $0 < \lambda < 1$ konstans minden

$\epsilon > 0$ számhoz megválasztható olyan kicsire, hogy $P(E_{n\epsilon}) > 1 - \epsilon$ teljesüljön minden $n \geq 1$ egész számra, így a fentiekből következik, hogy $|\gamma_{n3}| = o_p(1)$, ha $n = n_2 \rightarrow \infty$. Az eddigieket összefoglalva kapjuk, hogy

$$(1.14) \quad \theta_{n_2}^{(1)}(l_{n_2}, k_{n_2}) = Z_{n_2} + o_p(1), \quad n_2 \rightarrow \infty.$$

1.2 Megjegyzés. (1.14) igazolásához szintén nem kellett feltenni, hogy a φ_n^* és a ψ_n^* sorozatok gyengén konvergálnak, elég volt csupán az, hogy az l_n és k_n sorozatok a megfelelő tulajdonságokkal bírjanak és hogy $b_{n_2}^{(1)} > 0$ teljesüljön.

Innentől (1.10) igazolása ugyanúgy fejezhető be, mint Csörgő, Haeusler és Mason [5] 2.4 Lemmájának a bizonyítása, hiszen (1.11) és (1.14) ugyanazt a reprezentációt biztosítja számunkra, mint amelyet ők használtak.

2. Eset: Létezik egy olyan $N > 0$ szám, hogy minden $n_1 \geq N$ esetén $\sigma(l_{n_1}/n_1, k_{n_1}/n_1) = 0$. Ekkor $K(l_{n_1}/n_1) - K(k_{n_1}/n_1) = 0$, ha $n_1 \geq N$. Ezért most

$$\theta_n^{(1)}(l_n, k_n) = -\frac{1}{2}n^{-1/2} \int_{l_n/n}^{k_n/n} (\mathcal{U}_n^*(t))^2 J'(t_n^*) \frac{dg(t)}{b_n^{(1)}}$$

$n = n_1$ mentén, ha n_1 elég nagy. Így (1.13)-hoz hasonlóan kapjuk, hogy

$$\bar{\gamma}_{n\epsilon} := 1_n 1_n'' 1_n^\mu 1_{n\epsilon} |\theta_n^{(1)}(l_n, k_n)| \leq n^{-1/2} \int_{l_n/n}^{k_n/n} (\mathcal{U}_n(t))^2 M_{\lambda\epsilon} J(t) (t(1-t))^{-1} \frac{dg(t)}{b_n^{(1)}} \equiv 0$$

$n = n_1$ mentén. Így $E(\bar{\gamma}_{n_1\epsilon}) = 0$ minden elég nagy n_1 -re, amiből az előző esethez hasonlóan kapjuk, hogy $\theta_{n_1}^{(1)}(l_{n_1}, k_{n_1}) = o_p(1)$, amint $n_1 \rightarrow \infty$. Mivel (1.11) megint érvényes, ezért (1.10) most a $b = 0$ választással lesz igaz. Ezzel a lemmát teljesen bebizonyítottuk. $\square$

Az 1.1 Tétel bizonyítása.

Válasszuk meg az $\{m_{n_1}\}$ és $\{l_{n_1}\}$ sorozatokat az 1.1 Lemmának megfelelően. Így az 1.1 és 1.2 Lemmák miatt létezik olyan $\{n_2\} \subset \{n_1\}$ részsorozat, hogy teljesül (1.3) és

$$\Delta_{n_2}^{(1)}(m_{n_2}) \rightarrow_{\mathcal{D}} V_1(\varphi), \quad \Delta_{n_2}^{(2)}(m_{n_2}, l_{n_2}) \rightarrow_{\mathcal{P}} 0, \quad \text{és} \quad \Delta_{n_2}^{(3)}(l_{n_2}, k_{n_2}) \rightarrow_{\mathcal{D}} V_3(\psi, b, r, \alpha)$$

amint $n_2 \rightarrow \infty$. Mivel $l_{n_1}/m_{n_1} \rightarrow \infty$, ezért Rossberg [17] 4. Lemmájából következik, hogy a $\Delta_{n_2}^{(1)}(m_{n_2})$ és a $\Delta_{n_2}^{(3)}(l_{n_2}, k_{n_2})$ sorozatok aszimptotikusan függetlenek. Így a fenti konvergencia állításokból (1.4) egyszerűen adódik, hiszen

$$V_k(\varphi, \psi, b, r, \alpha) = -V_1(\varphi) - V_3(\psi, b, r, \alpha).$$

A tétel többi állítása Csörgő, Haeusler és Mason [5] 1. Tételéből következik. $\square$

1.3 LEMMA. Legyen $k \geq 0$ egész szám. Az 1.1 Tételbeli $V_k(\varphi, \psi, b, r, \alpha)$ valószínűségi változó akkor és csak akkor elfajult, ha $\psi \equiv 0$, $\varphi \equiv 0$ és $b = 0$.

Bizonyítás. Először belátjuk, hogy a $V_1(\varphi)$ valószínűségi változó akkor és csak akkor elfajult, ha $\varphi \equiv 0$. Az elegendőségi rész nyilvánvaló. A fordított irányú állítás igazolása a következőképpen lehetséges. Tegyük fel, hogy $\varphi \not\equiv 0$ valamely $[A, B]$ ($0 < A < 1 < B < \infty$) intervallumon és mégis $V_1(\varphi)$ elfajult valószínűségi változó. Ekkor a

$$(1.14') \quad W_k := \int_{S_{k+1}}^{\infty} h_{\rho}(N(t), t) d\varphi(t) + \int_{k+1}^{S_{k+1}} h_{\rho}(k, t) d\varphi(t)$$

valószínűségi változó is elfajult. A Poisson-folyamat tulajdonságai miatt majdnem minden $x > 0$ számra

$$P(W_k(x) < z) = P(W_k < z | S_{k+1} = x), \quad -\infty < z < \infty,$$

ahol

$$W_k(x) = \int_x^{\infty} h_{\rho}(N(s-x) + k + 1, s) d\varphi(s) + \int_{k+1}^x h_{\rho}(k, t) d\varphi(t),$$

amiből következik, hogy $W_k(x)$ szintén elfajult valószínűségi változó. Legyen x egy olyan szám, melyre $0 < x < A/2$ teljesül. Vegyünk az $N(t)$ Poisson-folyamatnak egy olyan $\tilde{n}_1(t)$ mintafüggvényét, melyre az

$$I_1(x) := \int_x^{\infty} h_{\rho}(\tilde{n}_1(s-x) + k + 1, s) d\varphi(s) + \int_{k+1}^x h_{\rho}(k, t) d\varphi(t)$$

kifejezésben szereplő improprius integrál létezik (az 1.1 Tétel alapján egy valószínűséggel ilyen mintafüggvényekhez jutunk). Legyenek s_B és s'_B az $\tilde{n}_1$ mintafüggvénynek olyan

ugráshelyei, melyekre $s'_B > s_B > B$ teljesül. Tekintsünk $N(t)$ -nek egy másik $\tilde{n}_2(t)$ mintafüggvényét is, melyre teljesülnek az alábbiak:

- 1) $\tilde{n}_2(t) \geq \tilde{n}_1(t)$, ha $0 \leq t < \infty$,
- 2) $\tilde{n}_2(t) > \tilde{n}_1(t)$, ha $A/2 \leq t \leq B$,
- 3) $\tilde{n}_2(t) = \tilde{n}_1(t)$, ha $s'_B \leq t < \infty$.

Mivel $\varphi \not\equiv 0$ az $[A, B]$ intervallumon és a $h_\rho(u, v)$ függvény u -nak szigorú monoton csökkenő függvénye, ezért

$$I_1(x) > I_2(x) := \int_x^\infty h_\rho(\tilde{n}_2(s-x) + k + 1, s) d\varphi(s) + \int_{k+1}^x h_\rho(k, t) d\varphi(t).$$

Mivel teljesülnek még a

$$\begin{aligned} 0 < P(N(t) \geq \tilde{n}_2(t)); 0 \leq t < s'_B | N(u) = \tilde{n}_2(u); u \geq s'_B \\ \leq P(W_k(x) \leq I_2(x) | N(u) = \tilde{n}_2(u); u \geq s'_B) \end{aligned}$$

és a

$$\begin{aligned} 0 < P(N(t) \leq \tilde{n}_1(t)); 0 \leq t < s'_B | N(u) = \tilde{n}_1(u); u \geq s'_B \\ \leq P(W_k(x) \geq I_1(x) | N(u) = \tilde{n}_2(u); u \geq s'_B) \end{aligned}$$

egyenlőtlenségek is, ezért $W_k(x)$ nem lehet elfajult valószínűségi változó, ami ellentmondás. Tehát beláttuk, hogy ha $\varphi \not\equiv 0$, akkor W_k nemelfajult valószínűségi változó.

Csörgő, Haeusler és Mason [5]-ben bebizonyította, hogy $V_3(\psi, b, r, \alpha)$ akkor és csak akkor elfajult, ha $\psi \equiv 0$ és $b = 0$. Mivel V_1 és V_3 függetlenek és $V_k(\varphi, \psi, b, r, \alpha) = -V_1(\varphi) - V_3(\psi, b, r, \alpha)$, ezért $V_k(\varphi, \psi, b, r, \alpha)$ akkor és csak akkor elfajult, ha $V_1(\varphi)$ és $V_3(\psi, b, r, \alpha)$ elfajult, ami igazolja a lemma állítását. $\square$

Az 1.2 Tétel bizonyítása. Három esetet különböztetünk meg.

1. *Eset:* Minden elég nagy n_1 -re $b_{n_1} > 0$, továbbá

$$\begin{aligned} \limsup_{n_1 \rightarrow \infty} |\psi_{n_1}(x)| < \infty, \quad \text{ha } -\infty < x < \infty \quad \text{és} \\ \limsup_{n_1 \rightarrow \infty} |\varphi_{n_1}(y)| < \infty, \quad \text{ha } y > 0. \end{aligned}$$

Ekkor a Helly-Bray -féle kiválasztási tétel miatt létezik olyan $\{n_2\} \subset \{n_1\}$ részsorozat, hogy a ψ_{n_2} és φ_{n_2} sorozatok gyengén konvergálnak valamely $\bar{\psi}$ és $\bar{\varphi}$ függvényekhez, amint $n_2 \rightarrow \infty$, ahol a $\bar{\psi}$ és $\bar{\varphi}$ függvények rendelkeznek az (F1) ill. (F3) feltételekben a ψ -re ill. φ -re megfogalmazott örökletes tulajdonságokkal. Így az 1.1 Tétel miatt létezik egy olyan $\{n_3\} \subset \{n_2\}$, részsorozat, hogy

$$\frac{1}{n_3^{1/2} a_{n_3}} \left\{ \sum_{i=k+1}^{k_{n_3}} d_{n_3+1-i, n_3} h(U_{n_3+1-i, n_3}) - \mu_{n_3}(k) \right\} \rightarrow_{\mathcal{D}} \bar{V} := V_k(\bar{\varphi}, \bar{\psi}, b, r, \alpha),$$

amint $n_3 \rightarrow \infty$, valamely $0 \leq b \leq 1$, $0 \leq r \leq (1 - \alpha)^{1/2}$ konstansokra. Ugyancsak az 1.1 Tételből kapjuk, hogy ha $\bar{\varphi} \equiv 0$, akkor $b = 1$, így az 1.3 Lemma miatt $\bar{V}$ nemelfajult. Ebből a típusok konvergencia tétele (Gnyegyenko-Kolmogorov [10], 42. oldal) alapján következik, hogy teljesül az (F3) feltétel valamely $a > 0$ számra. Tehát (F1) és (F2) is teljesül a $\psi = a\bar{\psi}$ és a $\varphi = a\bar{\varphi}$ határértékfüggvényekkel, továbbá $V =_{\mathcal{D}} V_k(\varphi, \psi, ab, r, \alpha) + c$, ahol $c = \lim_{n_3 \rightarrow \infty} (\mu_{n_3}(k) - C_{n_3})/A_{n_3}$. Az 1.3 Lemma ismételt alkalmazásával kapjuk, hogy $\varphi \not\equiv 0$, $\psi \not\equiv 0$ és $b > 0$ közül valamelyik teljesül.

2. Eset: Létezik olyan $\{n_2\} \subset \{n_1\}$ részsorozat, hogy $b_{n_2} > 0$ minden n_2 -re és az alábbi (1.15) és (1.16) feltételek közül valamelyik teljesül:

$$(1.15) \quad \lim_{n_2 \rightarrow \infty} |\psi_{n_2}(x)| = \infty \quad \text{valamely} \quad -\infty < x < \infty \text{ számra} \quad \text{illetve}$$

$$(1.16) \quad \lim_{n_2 \rightarrow \infty} |\varphi_{n_2}(y)| = \infty \quad \text{valamely} \quad 0 < y < \infty \text{ számra.}$$

Csörgő, Haeusler és Mason [5]-ben a 2. Tételük igazolásakor belátták, hogy

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |\psi_n(x)| \leq (1 - \alpha)^{-1/2}, \quad \text{ha} \quad x \leq 0,$$

és

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(y) \leq 1, \quad \text{ha} \quad 1 \leq y < \infty,$$

így feltehető, hogy $x > 0$ és $0 < y < 1$ (1.15) ill. (1.16)-ban. Felhasználva a $Q_n(m, r)$

menyiségre (1.8.2)-ben már alkalmazott dekompozíciót kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{n^{1/2} G_n} \left\{ \sum_{i=k+1}^{k_n} d_{n+1-i,n} h(U_{n+1-i,n}) - \mu_n(k) \right\} = \mathcal{D} \\
& n \int_{(k+1)/n}^{k_n/n} \int_t^{G_n^*(t)} J(s) ds \frac{dg(t)}{n^{1/2} a_n} - n \int_{U_{k_n,n}}^{k_n/n} \int_{k_n/n}^{G_n^*(t)} J(s) ds \frac{dg(t)}{n^{1/2} a_n} \\
& + \left\{ n \int_{U_{k+1,n}}^{(k+1)/n} \int_{(k+1)/n}^{G_n^*(t)} J(s) ds \frac{dg(t)}{n^{1/2} a_n} - \frac{c_{k+1,n}}{n^{1/2} a_n} \left(g(U_{k+1,n}) - g\left(\frac{1}{n}\right) \right) \right\} \\
& =: -\bar{\theta}_n(k+1, k_n) + R_n^{(1)} - R_n^{(2)}.
\end{aligned}$$

Ezekről a mennyiségekről be fogjuk látni az alábbiakat.

(i) $\bar{\theta}_{n_2}(k+1, k_{n_2}) = O_p(1), \quad n_2 \rightarrow \infty,$

(ii) $R_{n_2}^{(1)}$ és $R_{n_2}^{(2)}$ kielégítik a

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \liminf_{n_2 \rightarrow \infty} P\{|R_{n_2}^{(i)}| < M\} > 0, \quad i = 1, 2,$$

feltételeket,

(iii) $R_{n_2}^{(1)}$ és $R_{n_2}^{(2)}$ aszimptotikusan függetlenek.

Először (i)-t fogjuk igazolni. Hasonló átalakításokat alkalmazva mint (1.12')-ben, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\bar{\theta}_n(k+1, k_n) &= - \int_{(k+1)/n}^{k_n/n} \mathcal{B}_n \frac{dK}{a_n} - \int_{(k+1)/n}^{k_n/n} (\mathcal{U}_n - \mathcal{B}_n) \frac{dK}{a_n} - \int_{(k+1)/n}^{k_n/n} (\mathcal{U}_n^* - \mathcal{U}_n) \frac{dK}{a_n} \\
&\quad - \frac{1}{2} n^{-1/2} \int_{(k+1)/n}^{k_n/n} (\mathcal{U}_n^*(t))^2 J'(t_n^*) \frac{dg(t)}{a_n} \\
&=: \tau_n \bar{Z}_n + \bar{\gamma}_{n1} + \bar{\gamma}_{n2} + \bar{\gamma}_{n3}
\end{aligned}$$

$n = n_2$ mentén, ahol $0 \leq \tau_{n_2} := \sigma((k+1)/n_2, k_{n_2}/n_2)/a_{n_2} \leq 1$ és $\bar{Z}_{n_2}$ standard normális valószínűségi változó minden n_2 -re. Hasonló egyenlőtlenségeket felhasználva a $\bar{\gamma}_{n1}, \bar{\gamma}_{n2}$ és $\bar{\gamma}_{n3}$ valószínűségi változókra, mint amilyeneket az 1.2 Lemma igazolásakor γ_{n1}, γ_{n2} és

γ_{n3} -ra már alkalmaztunk, kapjuk, hogy $\bar{\gamma}_{n1} = O_p(1)$, $\bar{\gamma}_{n2} = O_p(1)$ és $\bar{\gamma}_{n3} = O_p(1)$, amint $n = n_2 \rightarrow \infty$. Ezzel (i)-t bebizonyítottuk.

Most igazoljuk (ii)-t. Jelöljenek a továbbiakban $M, M', M'' \dots$ stb. alkalmas pozitív konstansokat. Mivel $|R_{n_2}^{(2)}| \leq |\alpha_{n_2}(k+1)| + |R_{n_2}|$ (most az (1.8.1) és (1.8.2)-beli R_{n_2} és $\alpha_{n_2}(k+1)$ mennyiségek definíciójában természetesen A_{n_2} helyén $n_2^{1/2} a_{n_2}$ szerepel), ezért lehet $\alpha_{n_2}(k+1)$ -et és R_{n_2} -t külön vizsgálni. Definiáljuk a $C_n = \{(k+1)/n < U_{k+1,n} < (k+2)/n\}$ eseményt, melyre $\lim_{n \rightarrow \infty} P(C_n) = P(k+1 < S_{k+1} < k+2) > 0$ teljesül. Nyilván a C_n eseményen

$$|\alpha_n(k+1)| = n \int_{(k+1)/n}^{U_{k+1,n}} \int_{(k+1)/n}^{(k+1)/n} J(s) ds \frac{dg(t)}{n^{1/2} a_n} = 0$$

és

$$\begin{aligned} |R_n| &\leq n \int_{1/n}^{(k+2)/n} \int_{k/n}^{(k+1)/n} J(s) ds \frac{dg(t)}{n^{1/2} a_n} = \int_1^{k+2} \int_k^{k+1} \frac{J(s/n)}{J(t/n)} ds \frac{dK(t/n)}{n^{1/2} a_n} \\ &\leq \int_1^{k+2} (\|h_\rho(k+1, \cdot) - h_\rho(k, \cdot)\|_1^{k+2} + 1) \frac{dK(t/n)}{n^{1/2} a_n} \leq \end{aligned}$$

(itt felhasználtuk Mason és Shorack [16] 3.1 Lemmáját)

$$\leq M \frac{K(k_n/n) - K(1/n)}{n^{1/2} a_n} \leq M',$$

ha $n = n_2$ elég nagy. A fentiekből következik (ii) $R_n^{(2)}$ -re. Ezután vizsgáljuk $R_n^{(1)}$ -t. Az 1.1 Megjegyzés miatt

(1.16')

$$R_n^{(1)} = \bar{\delta}_n(k_n)(1 + o_p(1)) + o_p(1) := \int_{k_n/n}^{U_{k_n,n}} n(G_n(u) - \frac{k_n}{n}) d \frac{K(u)}{n^{1/2} a_n} (1 + o_p(1)) + o_p(1).$$

Csörgő, Haeusler és Mason [5]-ben belátta, hogy

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \liminf_{n_2 \rightarrow \infty} P\{|\bar{\delta}_{n_2}(k_{n_2})| < M\} > 0,$$

amiből (1.16') miatt következik (ii) $R_{n_2}^{(1)}$ -re is. Végül (iii) ismét könnyen következik Rossberg [17] 4. Lemmájából.

Csörgő, Haeusler és Mason [3] 2.11. Lemmájának bizonyításakor felhasznált gondolatmenet alkalmazásával (i),(ii) és (iii)-ből kapjuk, hogy

$$(1.17) \quad n_2^{1/2} a_{n_2} R_{n_2}^{(i)} / (n_2^{1/2} a_{n_2} \vee A_{n_2}) = O_p(1), \quad \text{amint } n_2 \rightarrow \infty, \quad i = 1, 2,$$

ahol $x \vee y = \max(x, y)$. Ebből, figyelembe véve (1.16')-t, az $i = 1$ eset azt eredményezi, hogy

$$(1.18) \quad n_2^{1/2} a_{n_2} \bar{\delta}_{n_2}(k_{n_2}) / (n_2^{1/2} a_{n_2} \vee A_{n_2}) = O_p(1), \quad \text{amint } n_2 \rightarrow \infty.$$

Be fogjuk látni az alábbiakat:

$$(1.19) \quad \lim_{n_2 \rightarrow \infty} n_2^{1/2} a_{n_2} / A_{n_2} = 0,$$

$$(1.20) \quad \limsup_{n_2 \rightarrow \infty} |\psi_{n_2}^*(x)| < \infty, \quad \text{ha } -\infty < x < \infty \text{ és}$$

$$(1.21) \quad \limsup_{n_2 \rightarrow \infty} |\varphi_{n_2}^*(y)| < \infty, \quad \text{ha } 0 < y < \infty.$$

Csörgő, Haeusler és Mason [5]-ben bebizonyította, hogy (1.15)-ből és (1.18)-ból következik (1.19) és (1.20). Mi belátjuk, hogy (1.16) és (1.17)-ből következik (1.19) és (1.21). Legyen $0 < c < 1$ tetszőleges szám. A $D_{cn} = \{U_{k+1,n} \leq c/n\}$ eseményen

$$(1.22) \quad \begin{aligned} & \frac{n^{1/2} a_n |R_n^{(2)}|}{n^{1/2} a_n \vee A_n} = \\ & \frac{n^{1/2} a_n}{n^{1/2} a_n \vee A_n} \left\{ n \int_{U_{k+1,n}}^{(k+1)/n} \int_{(k+1)/n}^{G_n^*(t)} J(s) ds \frac{dg(t)}{n^{1/2} a_n} \right. \\ & \quad \left. + n \int_{U_{k+1,n}}^{1/n} \int_{k/n}^{(k+1)/n} J(s) ds \frac{dg(t)}{n^{1/2} a_n} \right\} \\ & \geq \frac{n^{1/2} a_n}{n^{1/2} a_n \vee A_n} n \int_{c/n}^{1/n} \int_{k/n}^{(k+1)/n} J(s) ds \frac{dg(t)}{n^{1/2} a_n} \\ & \quad + \frac{n^{1/2} a_n}{n^{1/2} a_n \vee A_n} \int_c^1 \int_k^{k+1} \frac{J(u/n)}{J((k+1)/n)} du \frac{J((k+1)/n)}{J(t/n)} \frac{dK(t/n)}{n^{1/2} a_n}. \end{aligned}$$

Alkalmazva Mason és Shorack [16] 3.1 Lemmáját, majd a lassú változású függvények elméletéből jól ismert eredményt (De Haan [11]), miszerint tetszőleges l , a 0-nál lassú változású függvényre és tetszőleges $0 < a < b$ számokra

$$(1.22') \quad \lim_{t \downarrow 0} \sup_{a \leq r \leq b} \left| \frac{l(rt)}{l(t)} - 1 \right| = 0,$$

kapjuk, hogy az (1.22)-beli legutolsó kifejezés

$$\begin{aligned} &\geq \frac{n^{1/2}a_n}{n^{1/2}a_n \vee A_n} \frac{1}{4} h_\rho(k, k+1) \int_c^1 \frac{J((k+1)/n)}{J(t/n)} \frac{dK(t/n)}{n^{1/2}a_n} \\ &\geq \frac{n^{1/2}a_n}{n^{1/2}a_n \vee A_n} M \int_c^1 \left(\frac{(k+1)}{t} \right)^\rho \frac{dK(t/n)}{n^{1/2}a_n} \\ &\geq \frac{n^{1/2}a_n}{n^{1/2}a_n \vee A_n} M' \frac{K(1/n) - K(c/n)}{n^{1/2}a_n} = \frac{n^{1/2}a_n}{n^{1/2}a_n \vee A_n} M' |\varphi_n(c)|. \end{aligned}$$

Ebből azon tény, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} P(D_{cn}) = P(S_{k+1} < c) > 0$, valamint (1.16) és (1.17) felhasználásával egyszerűen következik (1.19) és (1.21). Így valamely $\{n_3\} \subset \{n_2\}$ részsorozat mentén teljesülnek az (F1),(F2) és (F3) feltételek valamely ψ és φ határértékfüggvényekkel és az $a = 0$ limesszel, amiből az 1.1 Tétel felhasználásával kapjuk, hogy

$$\frac{1}{A_{n_3}} \left\{ \sum_{i=k+1}^{k_{n_3}} d_{n_3+1-i, n_3} h(U_{n_3+1-i, n_3}) - \mu_{n_3}(k) \right\} \rightarrow_{\mathcal{D}} V_k(\varphi, \psi, 0, r, \alpha),$$

amint $n_3 \rightarrow \infty$. A típusok konvergenciatételéből következik, hogy a $c = \lim_{n_3 \rightarrow \infty} (\mu_{n_3}(k) - C_{n_3})/A_{n_3}$ határérték létezik. Innentől a tétel bizonyítása az előző esethez hasonlóan fejezhető be.

3. *Eset:* Létezik olyan $\{n_2\} \subset \{n_1\}$ részsorozat, hogy $b_{n_2} = \sigma(1/n_2, k_{n_2}/n_2) = 0$ minden n_2 -re. Felhasználva az $\bar{L}$ feltétel $\mathfrak{C}$) részét, kapjuk, hogy $\sigma(s, t) = 0$ akkor és csak

akkor teljesül, ha $g(s) = g(t)$. Így (1.8.2)-t felhasználva

$$\begin{aligned} & \frac{1}{A_n} \left\{ \sum_{i=k+1}^{k_n} d_{n+1-i,n} h(U_{n+1-i,n}) - \mu_n(k) \right\} = \mathcal{D} \\ & - n \int_{U_{k_n,n}}^{k_n/n} \int_{k_n/n}^{G_n^*(t)} J(s) ds \frac{dg(t)}{A_n} \\ & + \left\{ n \int_{U_{k+1,n}}^{(k+1)/n} \int_{(k+1)/n}^{G_n^*(t)} J(s) ds \frac{dg(t)}{A_n} - \frac{c_{k+1,n}}{A_n} \left(g(U_{k+1,n}) - g\left(\frac{1}{n}\right) \right) \right\} \\ & =: E_n^{(1)} + E_n^{(2)} \end{aligned}$$

$n = n_2$ mentén. Legyen $D_n = \{1/n < U_{k_n,n} < k_n/n\}$. A D_{n_2} eseményen $E_{n_2}^{(1)} = 0$, ezért

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \liminf_{n_2 \rightarrow \infty} P\{|E_{n_2}^{(1)}| < M\} > 0,$$

hiszen, mint azt Csörgő, Haeusler és Mason [5]-ben belátta, $\lim_{n \rightarrow \infty} P(D_n) = 1/2$. Most vizsgáljuk $E_n^{(2)}$ -t. Legyen $\hat{D}_n = \{(k+1)/n < U_{k+1,n} < (k+2)/n\}$. A $\hat{D}_{n_2}$ eseményen $E_{n_2}^{(2)} = 0$, ha n_2 elég nagy, amiből $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\hat{D}_n) = P(k+1 < S_{k+1} < k+2) > 0$ miatt következik, hogy

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \liminf_{n_2 \rightarrow \infty} P\{|E_{n_2}^{(2)}| < M\} > 0.$$

A fentiekből az előző esethez hasonlóan kapjuk, hogy $E_{n_2}^{(1)} = O_p(1)$ és $E_{n_2}^{(2)} = O_p(1)$, $n_2 \rightarrow \infty$. Az 1.1 megjegyzésből megint következik, hogy

$$E_n^{(1)} = \delta_n(k_n)(1 + o_p(1)) + o_p(1),$$

így $\delta_{n_2}(k_{n_2}) = O_p(1)$, $n_2 \rightarrow \infty$, is teljesül. Csörgő, Haeusler és Mason [5]-ben igazolta, hogy az

$$\Omega_{n_2}(x, t) := \left\{ \frac{k_{n_2}}{n_2} + t \frac{k_{n_2}^{1/2}}{n_2} \leq U_{k_{n_2} - [x k_{n_2}^{1/2}], n_2} \right\}$$

eseményen

$$\frac{[x k_{n_2}^{1/2}]}{k_{n_2}^{1/2}} \psi_{n_2}^*(t) \leq \delta_{n_2}(k_{n_2}),$$

továbbá $\lim_{n_2 \rightarrow \infty} P(\Omega_{n_2}(x, t)) > 0$, ha $0 < x \leq t$. Ebből kapjuk, hogy minden $t > 0$ esetén $\limsup_{n_2 \rightarrow \infty} |\psi_{n_2}^*(t)| < \infty$. Ha $t \leq 0$, akkor

$$|\psi_{n_2}^*(t)| = \frac{k_n^{1/2} \left\{ K\left(\frac{k_n}{n}\right) - K\left(\frac{k_n}{n} + t \frac{k_n^{1/2}}{n}\right) \right\}}{A_n} \leq \frac{k_n^{1/2} \left\{ K\left(\frac{k_n}{n}\right) - K\left(\frac{1}{n}\right) \right\}}{A_n} = 0,$$

ha n_2 elég nagy. Tehát beláttuk, hogy (1.20) teljesül. Hasonló érvényes $\varphi_{n_2}^*$ -re is, hiszen az előző esetben alkalmazott átalakításokat megismételve kapjuk, hogy a $D_{cn_2} = \{U_{k,n_2} \leq c/n_2\}$ eseményen $O_p(1) = |E_{n_2}^{(2)}| \geq M|\varphi_{n_2}^*(c)|$ minden $0 < c < 1$ számra. Ha $c \geq 1$, akkor

$$|\varphi_{n_2}^*(c)| = \frac{K(c/n_2) - K(1/n_2)}{A_{n_2}} \leq \frac{K(k_{n_2}/n_2) - K(1/n_2)}{A_{n_2}} = 0,$$

ha n_2 elég nagy. A fentiekből látszik, hogy (1.21) is igaz. Így létezik olyan $\{n_3\} \subset \{n_2\}$ részsorozat, hogy az (F1),(F2) és (F3) feltételek teljesülnek valamely ψ és φ határérték-függvényekkel és az $a = 0$ limesszel. Innentől a tétel igazolása a szokásos módon fejezhető be és mivel az összes esetet megvizsgáltuk, ezzel az 1.2 Tételt teljesen bebizonyítottuk. $\square$

Ezután rátérünk az 1.1 és 1.2 Tételek egy fontos következményének tárgyalására, mely megmondja, hogy mikor lesz az (1.2)-beli statisztikáknak normális határeloszlása. Ehhez szükségünk lesz egy további segédtétele.

1.4 LEMMA. Vegyünk tetszőleges $0 \leq b < \infty$, $0 \leq \alpha < 1$ és $0 \leq r \leq (1-\alpha)^{1/2}$ számokat. Tegyük fel, hogy a φ és ψ függvények eleget tesznek az (F1) és (F2)-beli monotonitási és folytonossági feltételeknek és teljesülnek rájuk az (1.5) és (1.6) összefüggések. Legyen $k \geq 0$ egész szám. Ekkor a $V_k(\varphi, \psi, b, r, \alpha)$ valószínűségi változó akkor és csak akkor nemelfajult normális, ha $\varphi \equiv 0$, $\psi \equiv 0$ és $b > 0$. Ebben az esetben $V_k(\varphi, \psi, b, r, \alpha) =_{\mathcal{D}} N(0, b^2)$.

Bizonyítás. Az elegendőségi rész nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy $V_k(\varphi, \psi, b, r, \alpha)$ nemelfajult normális valószínűségi változó. Mason és Shorack [1]-ben belátta, hogy az

$$\int_{S_{k+1}}^{\infty} h_{\rho}(N(t), t) d\varphi(t) + \int_{k+1}^{S_{k+1}} h_{\rho}(k+1, t) d\varphi(t)$$

valószínűségi változó sohasem lehet valódi normális, ha $k \geq 0$. Ezt a bizonyítást kis változtatásokkal megismételve belátható, hogy az (1.14') összefüggésben szereplő W_k valószínűségi változó sem lehet semmilyen $k \geq 0$ egész számra valódi normális. (Ennek igazolása elég hosszadalmas és aprólékos, ezért a részletektől itt eltekintünk.) Így mivel $V_k(\varphi, \psi, b, r, \alpha) = -V_1(\varphi) - V_3(\psi, b, r, \alpha)$ és $V_1(\varphi)$ és $V_3(\psi, b, r, \alpha)$ függetlenek, ezért Cramér tétele miatt $V_1(\varphi)$ elfajult normális, $V_3(\psi, b, r, \alpha)$ pedig nemelfajult normális valószínűségi változó. Ebből az 1.3 Lemma, valamint Csörgő, Haeusler és Mason [3] 1. Propozíciójának felhasználásával következik, hogy $\varphi \equiv 0$, $\psi \equiv 0$ és $b > 0$. A második állítás nyilvánvaló. $\square$

1.1 KÖVETKEZMÉNY. Legyen $\{n_1\}$ pozitív egészek egy tetszőleges sorozata és $k \geq 0$ egész szám. Akkor és csak akkor léteznek olyan $A_{n_1}^* > 0$ és C_{n_1} sorozatok, hogy

$$(1.23) \quad \frac{1}{A_{n_1}^*} \left\{ \sum_{i=k+1}^{k_{n_1}} d_{n_1+1-i, n_1} f(X_{n_1+1-i, n_1}) - C_{n_1} \right\} \rightarrow_{\mathcal{D}} Z,$$

$n_1 \rightarrow \infty$, valamely Z valódi normális valószínűségi változóra, ha az (F1) és (F2) feltételek teljesülnek az $A_{n_1} \equiv n_1^{1/2} a_{n_1}$ sorozattal és a $\psi \equiv 0$, $\varphi \equiv 0$ határértékfüggvényekkel, mely esetben (1.23) baloldala az $A_{n_1}^* \equiv n_1^{1/2} a_{n_1}$ és a $C_{n_1} \equiv \mu_{n_1}$ sorozatokkal eloszlásban konvergál egy Z standard normális valószínűségi változóhoz.

Bizonyítás. Először az elegendőséget igazoljuk. Legyen $\{n_2\} \subset \{n_1\}$ egy tetszőleges részsorozat. Ekkor az (F1), (F2) és (F3) feltételek teljesülnek $\{n_2\}$ mentén az $A_{n_2} \equiv n_2^{1/2} a_{n_2}$, $\varphi \equiv 0$, $\psi \equiv 0$ és az $a = 1$ relációk mellett. Így az 1.1 Tételből kapjuk, hogy

$$\left\{ \sum_{i=1}^{k_{n_3}} d_{n_1+1-i, n_1} h(U_{n_1+1-i, n_1}) - \mu_{n_3}(k) \right\} / n_3^{1/2} a_{n_3} \rightarrow_{\mathcal{D}} N(0, 1).$$

valamely $\{n_3\} \subset \{n_2\}$ részsorozat mentén. Így (1.23) teljesül $\{n_1\}$ mentén.

A fordított állítás igazolásához válasszunk ki tetszőleges $\{n_2\} \subset \{n_1\}$ részsorozatot. Az 1.2 Tétel miatt létezik olyan $\{n_3\} \subset \{n_2\}$ részsorozat, hogy az (F1), (F2) és (F3) feltételek teljesülnek $\{n_3\}$ mentén az $A_{n_3} \equiv A_{n_3}^*$ választással és valamely φ és ψ függvényekkel, melyek kielégítik az (1.5) és (1.6) feltételeket egy $0 \leq a < \infty$ konstanssal.

Ezenfelül léteznek olyan $0 \leq b \leq a$, $0 \leq r \leq (1 - \alpha)^{1/2}$ és $-\infty < c < \infty$ számok, melyekre $Z =_{\mathcal{D}} V(\varphi, \psi, b, r, \alpha) + c$. Így az 1.4 Lemma miatt $\varphi \equiv 0$, $\psi \equiv 0$ és $b > 0$. Tehát $a > 0$, ami miatt az (F1) és (F2) feltételek teljesülnek $\{n_3\}$ mentén az $A_{n_3} \equiv n_3^{1/2} a_{n_3}$, $\varphi \equiv 0$ és $\psi \equiv 0$ választások mellett. Ugyanez teljesül az $\{n_1\}$ részsorozat mentén is, hiszen $\{n_2\}$ tetszőleges részsorozat volt. $\square$

2.§ Intermediális statisztikák lineáris kombinációinak határeloszlásai

Legyenek $X_{1,n} \leq \dots \leq X_{n,n}$ az (1.0)-beli rendezett mintaelemek. Csörgő és Mason [8]-ban bevezette az alábbi intermediális összegeket:

$$(2.1) \quad \tilde{I}_n(a, b) = \sum_{i=[ak_n]+1}^{[bk_n]} X_{n+1-i,n},$$

ahol $[.]$ a felső egészrész függvény, k_n pozitív számok egy sorozata, melyre $1 \leq k_n \leq n$, $k_n \rightarrow \infty$, $k_n/n \rightarrow 0$, amint $n \rightarrow \infty$, $0 < a < b$ rögzített számok. Ugyancsak [8]-ból ismert, hogy melyek az alkalmas centralizációval és normalizációval ellátott (2.1)-beli összegek lehetséges határeloszlásai és milyen szükséges és elegendő feltételek adhatók nemelfajult határeloszlás létezésére. Mi az 1. fejezetben tárgyalt módszer segítségével az intermediális statisztikák H, D és $\bar{L}$ feltételeknek eleget tevő lineáris kombinációit vizsgáljuk, azaz [8]-hoz hasonlóan szükséges és elegendő feltételeket keresünk az

$$(2.2) \quad I_n(a, b) := \sum_{i=[ak_n]+1}^{[bk_n]} d_{n+1-i,n} f(X_{n+1-i,n})$$

statisztikák határeloszlásának létezésére, ahol $f(\cdot)$ és $d_{i,n}$ az előző fejezetben tárgyalt (1.0)-beli összetevők. Az 1. fejezetbeli jelöléseinket megtartva néhány újat is bevezetünk. Legyen

$$\begin{aligned} \Delta_n(a, b) &= \Delta_n(a, b, K) = K \left(\frac{[bk_n]}{n} \right) - K \left(\frac{[ak_n]}{n} \right), \\ \Delta_n^*(a, b) &= \begin{cases} \Delta_n(a, b) & , \text{ha } \Delta_n(a, b) > 0, \\ 1 & , \text{ha } \Delta_n(a, b) = 0, \end{cases} \\ \mu_n(a, b) &= \mu_n(a, b, g) = -n \int_{[ak_n]/n}^{[bk_n]/n} J(s)g(s)ds. \end{aligned}$$

$k_n^{1/2} \Delta_n^*(a, b)$ és $\mu_n(a, b)$ a természetes centralizáló és normalizáló sorozatok lesznek. A továbbiakban $W(t)$, $0 \leq t$, a standard Wiener-folyamatot jelöli. A

$$\psi_n(c; x) = \psi_{n,K}(c; x) = \begin{cases} \frac{K \left(\frac{[ck_n]}{n} + x \frac{k_n^{1/2}}{n} \right) - K \left(\frac{[ck_n]}{n} \right)}{\Delta_n^*(a, b)} & , \text{ ha } -\frac{ck_n^{1/2}}{2} \leq x \leq \frac{ck_n^{1/2}}{2}, \\ \psi_n \left(c; -\frac{ck_n^{1/2}}{2} \right) & , \text{ ha } -\infty < x < -\frac{ck_n^{1/2}}{2}, \\ \psi_n \left(c; \frac{ck_n^{1/2}}{2} \right) & , \text{ ha } \frac{ck_n^{1/2}}{2} < x < \infty, \end{cases}$$

függvények $c = a$ és $c = b$ esetén az intermediális statisztikák aszimptotikus viselkedését szabályozzák. Megjegyezzük, hogy $\psi_n(c; \cdot)$ nemcsökkenő és balról folytonos függvény minden n -re. Szükségünk lesz még a

$$\tilde{\varphi}_n(x) = \tilde{\varphi}_{n,K}(x) = \begin{cases} \frac{K\left(\frac{xk_n}{n}\right) - K\left(\frac{[ak_n]}{n}\right)}{\Delta_n^*(a,b)} & , \text{ ha } \frac{[ak_n]}{k_n} \leq x \leq \frac{[bk_n]}{k_n}, \\ 0 & , \text{ ha } -\infty < x < \frac{[ak_n]}{k_n}, \\ \tilde{\varphi}_n\left(\frac{[bk_n]}{k_n}\right) & , \text{ ha } \frac{[bk_n]}{k_n} < x < \infty, \end{cases}$$

függvényre is, mely azonosan 0, ha $\Delta_n(a, b) = 0$, ellenkező esetben $\tilde{\varphi}_n$ egy balról folytonos eloszlásfüggvény, melyre $\tilde{\varphi}_n(x) = 1$, ha $x \geq [bk_n]/k_n$. Ennyi előkészület után megfogalmazhatjuk a (2.2) statisztikákra vonatkozó fő tételeinket. (1.2)-höz hasonlóan ismét feltehető a bizonyításokban, hogy

$$(2.3) \quad I_n(a, b) = \sum_{i=[ak_n]+1}^{[bk_n]} d_{n+1-i,n} h(U_{n+1-i,n}).$$

2.1 TÉTEL. (i) Tegyük fel, hogy létezik egy $\{n_1\} \subset \{n\}$ részsorozat és léteznek az egész számegyenesen értelmezett ψ_a és ψ_b nemcsökkenő és balról folytonos függvények, melyekre $\psi_c(0+) \geq 0$, $\psi_c(0) \leq 0$ és

$$\psi_{n_1}(c; x) \rightarrow \psi_c(x), \text{ amint } n_1 \rightarrow \infty, \quad c = a, b,$$

minden olyan x -re, mely folytonossági helye ψ_c -nek. Ekkor létezik olyan $\{n_2\} \subset \{n_1\}$ részsorozat és az egész számegyenesen értelmezett nemcsökkenő, balról folytonos φ függvény, melyre $\varphi(a) = 0$, $\varphi(\infty) = 0$ vagy $\varphi(b+) = 1$, továbbá $\tilde{\varphi}_{n_2}(y) \rightarrow \varphi(y)$, $n_2 \rightarrow \infty$, minden olyan y -ra mely folytonossági helye φ -nek, és

$$\frac{1}{k_{n_2}^{1/2} \Delta_{n_2}^*(a, b)} \left\{ \sum_{i=[ak_{n_2}]+1}^{[bk_{n_2}]} d_{n_2+1-i,n_2} f(X_{n_2+1-i,n_2}) - \mu_{n_2}(a, b) \right\} \rightarrow_{\mathcal{D}} V(\psi_a, \varphi, \psi_b),$$

amint $n_2 \rightarrow \infty$, ahol

$$V(\psi_a, \varphi, \psi_b) = \int_0^{-W(a)} \psi_a(x) dx + \int_{[a,b]} W(x) d\varphi(x) - \int_0^{-W(b)} \psi_b(x) dx.$$

Szükségképpen teljesülnek még a $\psi_a(x) \leq \varphi(a+)$ és a $\psi_b(x) \geq \varphi(b) - 1$ relációk minden x valós számra, továbbá a $V(\psi_a, \varphi, \psi_b)$ valószínűségi változó akkor és csak akkor elfajult, ha $\psi_a \equiv \psi_b \equiv 0$ és $\varphi = 0$ az $[a, b]$ intervallumon.

(ii) Tegyük fel, hogy létezik egy $\{n_1\} \subset \{n\}$ részsorozat és léteznek $B_{n_1} > 0$ konstansok úgy, hogy valamely nemcsökkenő, balról folytonos a $\psi_c(0) \leq 0$ és $\psi_c(0+) \geq 0$, $c = a, b$, feltételeknek eleget tevő ψ_a és ψ_b függvényekre

$$\frac{\Delta_{n_1}^*(a, b)}{B_{n_1}} \psi_{n_1}(c; x) \rightarrow \psi_c(x), \text{ amint } n_1 \rightarrow \infty, \quad c = a, b,$$

minden olyan x -re, mely folytonossági helye ψ_c -nek és $\Delta_{n_1}(a, b)/B_{n_1} \rightarrow 0$, amint $n_1 \rightarrow \infty$. Ekkor

$$\frac{1}{k_{n_1}^{1/2} B_{n_1}} \left\{ \sum_{i=\lceil a k_{n_1} \rceil + 1}^{\lceil b k_{n_1} \rceil} d_{n_1+1-i, n_1} f(X_{n_1+1-i, n_1}) - \mu_{n_1}(a, b) \right\} \rightarrow_{\mathcal{D}} V(\psi_a, 0, \psi_b)$$

amint $n_1 \rightarrow \infty$. Szükségképpen teljesülnek még a $\psi_a(x) = 0$, $x \geq 0$ és a $\psi_b(x) = 0$, $x < 0$ relációk, ezenfelül a $V(\psi_a, 0, \psi_b)$ határérték valószínűségi változó akkor és csak akkor elfajult, ha $\psi_a \equiv \psi_b \equiv 0$.

A következő tétel azt fejezi ki, hogy a 2.1 Tételbeli feltételek nemcsak elegendők, hanem szükségesek is az eloszlásban való konvergenciához.

2.2 TÉTEL. Tegyük fel, hogy létezik egy $\{n_1\} \subset \{n\}$ részsorozat és léteznek $A_{n_1} > 0$ és C_{n_1} sorozatok úgy, hogy

$$\frac{1}{A_{n_1}} \left\{ \sum_{i=\lceil a k_{n_1} \rceil + 1}^{\lceil b k_{n_1} \rceil} d_{n_1+1-i, n_1} f(X_{n_1+1-i, n_1}) - C_{n_1} \right\} \rightarrow_{\mathcal{D}} V^*, \text{ amint } n_1 \rightarrow \infty,$$

valamely V^* nemelfajult valószínűségi változóra. Ekkor létezik egy $\{n_2\} \subset \{n_1\}$ részsorozat és léteznek az egész számegegyenesen értelmezett ψ_a és ψ_b nemcsökkenő, balról folytonos függvények, melyekre $\psi_c(0) \leq 0$, $\psi_c(0+) \geq 0$, és

$$\frac{k_{n_2}^{1/2} \Delta_{n_2}^*(a, b)}{A_{n_2}} \psi_{n_2}(c; x) \rightarrow \psi_c(x), \text{ amint } n_2 \rightarrow \infty, \quad c = a, b,$$

minden olyan x -re, mely folytonossági helye ψ_c -nek és valamely $0 \leq \delta < \infty$ számra

$$k_{n_2}^{1/2} \Delta_{n_2}(a, b)/A_{n_2} \rightarrow \delta,$$

amint $n_2 \rightarrow \infty$. A V^* valószínűségi változóra érvényes a $V^* =_{\mathcal{D}} V(\psi_a, \delta\varphi, \psi_b) + \gamma$ összefüggés valamely γ valós számra.

A 2.1 és 2.2 Tételek bizonyítása. Felhasználva az (1.8.2)-beli dekompozíciót, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} I_n(a, b) - \mu_n(a, b) &=_{\mathcal{D}} \\ & n \int_{[ak_n]/n}^{[bk_n]/n} \int_t^{\tilde{G}_n^*(t)} J(s) ds dg(t) + n \int_{U_{[ak_n],n}}^{[ak_n]/n} \int_{[ak_n]/n}^{\tilde{G}_n^*(t)} J(s) ds dg(t) \\ & - n \int_{U_{[bk_n],n}}^{[bk_n]/n} \int_{[bk_n]/n}^{\tilde{G}_n^*(t)} J(s) ds dg(t) \\ & =: M_n + R_n(a) - R_n(b), \end{aligned}$$

ahol

$$\tilde{G}_n^*(t) = \begin{cases} 1/n & , \text{ha } 0 \leq t \leq U_{1,n}, \\ G_n(t) & , \text{ha } U_{1,n} < t < U_{n,n}, \\ 1 - 1/n & , \text{ha } U_{n,n} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Az 1.1 Megjegyzés miatt

$$\begin{aligned} \frac{R_n(c)}{k_n^{1/2} \Delta_n^*(a, b)} &= \frac{\tilde{\delta}_n([ck_n])}{k_n^{1/2} \Delta_n^*(a, b)} (1 + o_p(1)) + o_p(1) \\ &= \frac{- \int_{[ck_n]/n}^{U_{[ck_n],n}} n(G_n(u) - \frac{[ck_n]}{n}) dK(u)}{k_n^{1/2} \Delta_n^*(a, b)} (1 + o_p(1)) + o_p(1), \end{aligned}$$

amint $n \rightarrow \infty$, $c = a, b$. (1.12')-höz hasonlóan M_n -re pedig azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} M_n &= n^{1/2} \int_{[ak_n]/n}^{[bk_n]/n} \mathcal{U}_n dK + n^{1/2} \int_{[ak_n]/n}^{[bk_n]/n} (\tilde{\mathcal{U}}_n^* - \mathcal{U}_n) dK \\ &+ \frac{1}{2} \int_{[ak_n]/n}^{[bk_n]/n} (\tilde{\mathcal{U}}_n^*(t))^2 J'(t_n^*) dg(t) \\ &=: \tilde{M}_n + \tilde{\gamma}_{n1} + \tilde{\gamma}_{n2} \end{aligned}$$

valamely $\min(t, \tilde{G}_n^*(t)) \leq t_n^* \leq \max(t, \tilde{G}_n^*(t))$ számra, ahol $\tilde{\mathcal{U}}_n^*(t) = n^{1/2}(\tilde{G}_n^*(t) - t)$. Egyszerű számolással adódik, hogy

$$\tilde{\gamma}_{n1} \leq \int_{[ak_n]/n}^{[bk_n]/n} dK = \Delta_n(a, b).$$

Definiáljuk az

$$E_n^{(1)} = \{U_{1,n} \leq [ak_n]/n\}, \quad E_n^{(2)} = \{[bk_n]/n \leq U_{n,n}\}$$

eseményeket. Legyen $\tilde{1}_n$ az $E_n^{(1)} \cap E_n^{(2)}$ eseményhez tartozó indikátorváltozó. Így (1.13)-hoz hasonlóan kapjuk, hogy

$$\tilde{\gamma}_{n\epsilon} := 1_n^\mu 1_{n\epsilon} \tilde{1}_n |\tilde{\gamma}_{n2}| \leq \int_{[ak_n]/n}^{[bk_n]/n} (\mathcal{U}_n(t))^2 M_{\lambda\epsilon} J(t)(t(1-t))^{-1} dg(t).$$

Ebből következik, hogy

$$\tilde{\epsilon}_{n\epsilon} := E(\tilde{\gamma}_{n\epsilon}) \leq M_{\lambda\epsilon} \int_{[ak_n]/n}^{[bk_n]/n} dK = M_{\lambda\epsilon} \Delta_n(a, b).$$

Így tetszőleges $\epsilon' > 0$ számra

$$P(|\tilde{\gamma}_{n2}|/(k_n^{1/2} \Delta_n^*(a, b)) > \epsilon') \leq P(\overline{E_n^{(1)}}) + P(\overline{E_n^{(2)}}) + P(\overline{E_n^\mu}) + P(\overline{E_{n\epsilon}}) + M_{\lambda\epsilon}/(\epsilon' k_n^{1/2}),$$

amiből következik, hogy $\tilde{\gamma}_{n2}/(k_n^{1/2} \Delta_n^*(a, b)) = o_p(1)$, amint $n \rightarrow \infty$. A fentieket összegezve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{I_n(a, b) - \mu_n(a, b)}{k_n^{1/2} \Delta_n^*(a, b)} &=_{\mathcal{D}} \frac{\tilde{M}_n}{k_n^{1/2} \Delta_n^*(a, b)} \\ &+ \frac{\tilde{\delta}_n([ak_n])}{k_n^{1/2} \Delta_n^*(a, b)}(1 + o_p(1)) - \frac{\tilde{\delta}_n([bk_n])}{k_n^{1/2} \Delta_n^*(a, b)}(1 + o_p(1)) + o_p(1), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Tehát az intermediális statisztikák lineáris kombinációira az $o_p(1)$ tagoktól eltekintve ugyanazt a reprezentációt kaptuk, mint amelyet Csörgő és Mason [8]-ban használt a súlyok nélkül képezett összegekre. Így a 2.1 és a 2.2 tételek bizonyítása triviális kiegészítésekkel (az $o_p(1)$ tagok kiküszöbölésével) visszavezethető az egyszerű összegekre [8]-ban alkalmazott bizonyításokra. Ezért a 2.1 és 2.2 Tételeket igazoltnak tekinthetjük. $\square$

3.§ Extrémális és intermediális statisztikák lineáris kombinációinak határeloszlásai,
amikor az alapeloszlás valamely extrémális eloszlás vonzástartományában van

Azt mondjuk, hogy egy F eloszlásfüggvény valamely extrémális eloszlás vonzástartományában van, ha véve egy $X_1, X_2, \dots$ független, közös F eloszlásfüggvénnyel rendelkező valószínűségi változókból álló sorozatot, megadhatók olyan $d_n > 0$ és c_n sorozatok, melyekre

$$d_n^{-1}(\max(X_1, X_2, \dots, X_n) - c_n) \rightarrow_D Y,$$

amint $n \rightarrow \infty$, valamely Y nemelfajult valószínűségi változóval. Csörgő, Haeusler és Mason [5] dolgozatából ismeretes, hogy ez pontosan akkor következik be, ha

$$(3.1) \quad \lim_{s \downarrow 0} \frac{H(xs) - H(ys)}{H(vs) - H(ws)} = \frac{x^{-c} - y^{-c}}{v^{-c} - w^{-c}} \quad \text{valamely } -\infty < c < \infty \text{ számra}$$

tetszőleges $0 < x, y, v, w < \infty$ különböző értékekre, ahol $H(s) = -Q(1 - s-)$, $0 < s < 1$, $Q = F^{-1}$ pedig az (1.1')-ben definiált kvantilisfüggvény ($c = 0$ esetén a (3.1)-beli határérték $(\log x - \log y)/(\log v - \log w)$ -nek értendő). Ha (3.1) teljesül valamely $-\infty < c < \infty$ számra, akkor erre röviden a $H \in \Delta(c)$ írásmóddal fogunk utalni. Csörgő, Haeusler és Mason [5] dolgozatából tudjuk azt is, hogy

$$(3.2) \quad H \in \Delta(c) \text{ valamely } 0 < c < \infty \text{ számra akkor és csak akkor, ha létezik egy } L \text{ a } 0 - \text{nál} \\ \text{lassú változású függvény, melyre } -H(s) = s^{-c}L(s), 0 < s < 1, \text{ és}$$

$$(3.3) \quad H \in \Delta(c) \text{ valamely } -\infty < c < 0 \text{ számra akkor és csak akkor, ha létezik egy } L \text{ a} \\ 0 - \text{nál lassú változású függvény, melyre } -H(s) = A - s^{-c}L(s), 0 < s < 1, \text{ valamely} \\ \text{véges } A \text{ konstansra.}$$

Seneta [18], Lemma 1.8, és (3.2)-ből az is következik, hogy $H \in \Delta(c)$ valamely $0 < c < \infty$ számra pontosan akkor teljesül, ha az eloszlásfüggvényre érvényes az

$$(3.4) \quad 1 - F(x) = x^{-1/c} \tilde{l}(x), \quad -\infty < x < \infty,$$

összefüggés, ahol $\tilde{l}(\cdot)$ egy lassú változású függvény a ∞ -nél. Ilyenkor azt mondjuk, hogy az eloszlás felső farka reguláris változású $-1/c$ index szerint, továbbá a $-1/c$ kitevőt az eloszlás farokindexének nevezzük. A farokindex becslése régi probléma a statisztikában. A jelen fejezetben bizonyított elméleti tételek egy része azt a célt szolgálja, hogy segítségükkel új becsléseket konstruáljunk egy eloszlás ismeretlen farokindexére. Ehhez szükségünk lesz még néhány új jelölésre. Ha $a > 1/2$, akkor legyen

$$\begin{aligned} D_k(a) = & - \int_{S_{k+1}}^{\infty} h_{\rho}(N(t), t) d\varphi_a(t) - \int_{k+1}^{S_{k+1}} h_{\rho}(k, t) d\varphi_a(t) \\ & - \int_1^{k+1} (h_{\rho}(k, t) - h_{\rho}(k+1, t)) d\varphi_a(t) \\ & - \varphi_a(1)(h_{\rho}(k, 1) - h_{\rho}(k+1, 1)), \end{aligned}$$

ahol

$$\varphi_a(y) = K_a^{-1}(1 - y^{-a}), \quad y > 0,$$

$$K_a = (2a/(2a-1))^{1/2}.$$

Mivel minden $\epsilon > 0$ számra $\int_{\epsilon}^{\infty} (\varphi_a(y) - \varphi_a(\infty))^2 dy < \infty$, ezért az 1.1 Tétel miatt a $D_k(a)$ valószínűségi változó jóldefiniált tetszőleges $k \geq 0$ (egész) és $-\infty < \rho < \infty$ értékekre.

Definiáljuk a

$$\psi_{\alpha, K}(x) := \begin{cases} 0 & , \text{ ha } x \leq 0, \\ \alpha^{1/2}(K(\alpha+) - K(\alpha))/\sigma(0, \alpha) & , \text{ ha } x > 0, \end{cases}$$

függvényt, ahol $K(t)$ később specifikált (1.2')-beli függvény lesz. Szükségünk lesz még az

$$M(\alpha, K) := \begin{cases} 0 & , \text{ ha } \alpha = 0, \\ \int_{-Z(\alpha, K)}^0 \psi_{\alpha, K}(x) dx & , \text{ ha } \alpha > 0, \end{cases}$$

valószínűségi változóra, ahol $Z(\alpha, K) = -r_{\alpha, K}Z_1 + (1 - \alpha - r_{\alpha, K}^2)^{1/2}Z_2$, aholis

$$r_{\alpha, K} = \frac{1 - \alpha}{\alpha^{1/2}\sigma_K(0, \alpha)} \int_0^{\alpha} s dK(s)$$

és Z_1 és Z_2 független standard normális eloszlású valószínűségi változók.

Ebben a fejezetben is feltesszük, hogy lineáris kombinációknak csak olyan osztályával foglalkozunk, melyeket meghatározó súlyok a D feltétel előírásainak megfelelnek. Ilyen lineáris kombinációkra érvényesek a következő tételek, melyekben ρ a D feltételből való.

3.1 TÉTEL. Legyen k_n egy olyan sorozat, melyre teljesülnek az (1.1)-beli feltevések valamely $0 \leq \alpha < 1$ számra. Legyen $\hat{K}(t) = \int_{1/2}^t J(s) dH(s)$, $0 < s < 1$. Ha $H \in \Delta(c)$ valamely $-\infty < c < \infty$ számra, akkor

$$\left\{ \sum_{i=k+1}^{k_n} d_{n+1-i,n} X_{n+1-i,n} - \mu_n(k, H) \right\} / (n^{1/2} a_{n,\hat{K}}) \rightarrow \mathcal{D}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} D_k(c - \rho) & , \text{ ha } c - \rho > 1/2 \text{ és } c \neq 0, \\ Z_1 & , \text{ ha } c - \rho = 1/2, c \neq 0 \text{ és } \sigma(0, \alpha) = \infty, \\ Z_1 + M(\alpha, \hat{K}) & , \text{ ha } c - \rho = 1/2, c \neq 0 \text{ és } \sigma(0, \alpha) < \infty \\ & \text{vagy } c - \rho < 1/2, c \neq 0 \text{ és } c \neq \rho \\ & \text{vagy } c = \rho = 0 \text{ és létezik} \\ & \text{a } \lim_{s \downarrow 0} J(s) = d_0 > 0 \text{ véges határérték.} \end{array} \right.$$

3.2 TÉTEL. Legyen k_n egy a (2.1) típusú statisztikákhoz tartozó sorozat. A $\hat{K}$ függvény legyen ugyanaz, mint a 3.1 Tételben. Ha $H \in \Delta(c)$ valamely $-\infty < c < \infty$ számra, akkor tetszőleges $0 < a < b$ értékekre

$$(3.5) \quad \frac{1}{k_n^{1/2} \Delta_n^*(a, b, \hat{K})} \left\{ \sum_{i=[ak_n]+1}^{[bk_n]} d_{n+1-i,n} X_{n+1-i,n} - \mu_n(a, b, H) \right\} \rightarrow \mathcal{D} \int_a^b W(x) d\bar{\varphi}_{c-\rho}(x),$$

amint $n \rightarrow \infty$, ahol $W(x)$ a standard Wiener-folyamat,

$$\bar{\varphi}_y(x) = \bar{\varphi}_{y,a,b}(x) = \begin{cases} \frac{x^{-y} - a^{-y}}{b^{-y} - a^{-y}} & , \text{ ha } y \neq 0, \\ \frac{\log x - \log a}{\log b - \log a} & , \text{ ha } y = 0, \end{cases}$$

feltéve, hogy c és ρ kielégítik az alábbi feltételek valamelyikét:

- (i) $c \neq 0$ és $\rho \neq c$ vagy
- (ii) $c = \rho = 0$ és létezik a $\lim_{s \downarrow 0} J(s) = d_0 > 0$ véges határérték.

3.1 Megjegyzés. A 3.1 és 3.2 Tételekben ha $\rho = 0$, vagyis abban a kritikus esetben, amikor a súlyokat szolgáltató $\bar{L}(1 - \cdot)$ függvény lassú változása, és létezik a $\lim_{s \downarrow 0} J(s) = d_0 > 0$ véges határérték, akkor a c indexparaméter minden értéke mellett kapunk nemelfajult határeloszlásokat.

3.2 Megjegyzés. A Wiener-folyamat mérhetősége miatt a Fubini-tétel felhasználásával egyszerű számolással nyerhető, hogy a 3.2 Tételbeli határérték valószínűségi változó normális eloszlású 0 várható értékkel és $\sigma^2(c - \rho, a, b)$ szórásnégyzettel, ahol

$$\begin{aligned} \sigma^2(c - \rho, a, b) &= \int_a^b \int_a^b x \wedge y \, d\bar{\varphi}_{c-\rho}(x) d\bar{\varphi}_{c-\rho}(y) = \\ &= \begin{cases} \frac{(\rho-c)(\rho-c+1)^{-1}}{(b^{\rho-c}-a^{\rho-c})^2} \begin{pmatrix} b^{2(\rho-c)+1} + a^{2(\rho-c)+1} - 2b^{\rho-c}a^{\rho-c+1} - \\ - (b^{2(\rho-c)+1} - a^{2(\rho-c)+1})/(2(\rho-c)+1) \end{pmatrix} & \begin{aligned} &\text{,ha } \rho - c \neq 0 \\ &\text{és } \rho - c \neq -1 \\ &\text{és } \rho - c \neq -1/2, \end{aligned} \\ (2(b-a) + (a+b)\log(a/b))/(\log(b/a))^2 &\text{,ha } \rho - c = 0, \\ 2(a^{-1} - b^{-1} + b^{-1}\log(a/b))/(b^{-1} - a^{-1})^2 &\text{,ha } \rho - c = -1, \\ (\log(b/a) + 2((a/b)^{1/2} - 1))/(b^{-1/2} - a^{-1/2})^2 &\text{,ha } \rho - c = -1/2. \end{cases} \end{aligned}$$

A következő két tétel farokindex becslések konstruálásához lesz hasznos számunkra, melyekben feltesszük, hogy az alapeloszlás egy pozitív X valószínűségi változó eloszlása, azaz $F(0) = 0$.

3.3 TÉTEL. Tegyük fel, hogy k_n egy olyan tulajdonságú sorozat, mint a 3.1 Tételbeli. Ha az $\bar{L}$ feltételben szereplő ρ paraméter 0, akkor tegyük fel, hogy létezik a $\lim_{s \downarrow 0} J(s) = \lim_{s \downarrow 0} \bar{L}(1-s) = d_0 > 0$ véges határérték. Legyen $\bar{H}(s) = -\log Q(1-s-)$, $0 < s < 1$, $\bar{K}(t) = \int_{1/2}^t J(s) d\bar{H}(s)$, $0 < t < 1$. Ha $H \in \Delta(c)$ valamely $0 < c < \infty$ számra, akkor

$$\left\{ \sum_{i=k+1}^{k_n} d_{n+1-i,n} \log X_{n+1-i,n} - \mu_n(k, \bar{H}) \right\} / (n^{1/2} a_{n,\bar{K}}) \rightarrow \mathcal{D} \begin{cases} D_k(-\rho) & \text{, ha } -\rho > 1/2, \\ Z_1 & \text{, ha } -\rho = 1/2 \text{ és } \sigma(0, \alpha) = \infty, \\ Z_1 + M(\alpha, \bar{K}) & \text{, ha } -\rho = 1/2 \text{ és } \sigma(0, \alpha) < \infty \\ & \text{vagy } -\rho < 1/2, \end{cases}$$

amint $n \rightarrow \infty$.

3.4 TÉTEL. Tegyük fel, hogy k_n egy olyan sorozat, mint amelyet a 3.2 Tételben használtunk. Legyenek $\bar{K}$ és $\bar{H}$ a 3.3 Tételben definiált függvények. Ha $\rho = 0$, akkor tegyük fel, hogy létezik a $\lim_{s \downarrow 0} J(s) = \lim_{s \downarrow 0} \bar{L}(1-s) = d_0 > 0$ véges határérték. Ekkor ha $H \in \Delta(c)$ valamely $0 < c < \infty$ számra, akkor tetszőleges $0 < a < b$ értékekre

$$\frac{1}{k_n^{1/2} \Delta_n^*(a, b, \bar{K})} \left\{ \sum_{i=[ak_n]+1}^{[bk_n]} d_{n+1-i,n} \log X_{n+1-i,n} - \mu_n(a, b, \bar{H}) \right\} \rightarrow_{\mathcal{D}} \int_a^b W(x) d\bar{\varphi}_{-\rho}(x),$$

amint $n \rightarrow \infty$.

A fenti tételek bizonyítása a következő két lemmán alapul.

3.1 LEMMA. Tegyük fel, hogy $H \in \Delta(c)$ valamely $-\infty < c < \infty$ számra. Legyen $\hat{K}(t) = \int_{1/2}^t J(s) dH(s)$, $0 < t < 1$, ahol az $\bar{L}(s) = J(1-s)$ függvény eleget tesz az $\bar{L}$ feltételnek. Ekkor

a) ha $c \neq 0$ és $\rho < c$, akkor $-\hat{K}(t) = t^{\rho-c} \hat{l}(t)$, $0 < t < 1$, valamely $\hat{l}$ a 0-nál lassú változású függvényre;

b) ha $c \neq 0$ és $\rho > c$, akkor $-\hat{K}(t) = A - t^{\rho-c} \hat{l}(t)$, $0 < t < 1$, valamely $\hat{l}$ a 0-nál lassú változású függvényre és valamely véges A konstansra;

c) ha $\rho = c = 0$ és létezik a $\lim_{s \downarrow 0} J(s) = d_0 > 0$ véges határérték, akkor

$$\lim_{s \downarrow 0} \frac{\hat{K}(xs) - \hat{K}(ys)}{\hat{K}(vs) - \hat{K}(ws)} = \frac{\log x - \log y}{\log v - \log w}$$

tetszőleges $0 < x, y, v, w < \infty$ különböző értékekre.

3.3 Megjegyzés. Az (1.2')-beli K függvény definíciójából könnyen látszik, hogy az mindig valamely eloszlás kvantilisfüggvénye. Így (3.2) és (3.3) alapján az a), b) ill. c)-beli $\hat{K}$ függvényekre érvényes az $\hat{K} \in \Delta(c - \rho)$ összefüggés.

3.2 LEMMA. Tegyük fel, hogy $H \in \Delta(c)$ valamely $0 < c < \infty$ számra. Legyen $\bar{K}(t) = \int_{1/2}^t J(s) d\bar{H}(s)$, $0 < t < 1$, mint a 3.3 Tételben. Az $\bar{L}(s) = J(1-s)$ függvény tegyen eleget az $\bar{L}$ feltételben leírtaknak. Ekkor

a) ha $\rho < 0$, akkor $-\bar{K}(t) = t^\rho \hat{l}(t)$, $0 < t < 1$, valamely $\hat{l}$ a 0-nál lassú változású függvényre;

b) ha $\rho > 0$, akkor $-\bar{K}(t) = A - t^\rho \hat{l}(t)$, $0 < t < 1$, valamely $\hat{l}$ a 0-nál lassú változású függvényre és valamely véges A konstansra;

c) ha $\rho = 0$ és létezik a $\lim_{s \downarrow 0} J(s) = d_0 > 0$ véges határérték, akkor

$$\lim_{s \downarrow 0} \frac{\bar{K}(xs) - \bar{K}(ys)}{\bar{K}(vs) - \bar{K}(ws)} = \frac{\log x - \log y}{\log v - \log w}$$

tetszőleges $0 < x, y, v, w < \infty$ különböző értékekre.

A fenti lemmák igazolásához hasznos lesz két további segédétel.

3.3 LEMMA. /Karamata tétele, De Haan [11], 15. oldal/

Legyen $L(\cdot)$ egy a 0-nál lassú változású függvény. Ekkor

(i) minden $q \leq -1$ számra

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{x^{q+1} L(x)}{\int_x^{1/2} u^q L(u) du} = -q - 1,$$

(ii) minden $q > -1$ számra

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{x^{q+1} L(x)}{\int_0^x u^q L(u) du} = q + 1.$$

3.4 LEMMA. /De Haan [11], Cor. 1.2.1 2, 21. oldal/

Legyen $R(\cdot)$ egy reguláris változású függvény a 0-nál valamely véges ρ index szerint.

Tegyük fel, hogy a_n és b_n olyan pozitív számokból álló sorozatok, melyekre

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \quad \text{és} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= c \quad (0 < c < \infty) \end{aligned}$$

teljesül. Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R(a_n)}{R(b_n)} = c^\rho.$$

A 3.1 Lemma bizonyítása. Először igazoljuk a)-t. Jelölje a továbbiakban sign az előjelfüggvényt. Az $\bar{L}$ feltétel miatt $J'(s) = J(s)(\rho + \epsilon(s))/s$ valamely $\epsilon(s)$ függvényre, melyre

$\epsilon(s) \downarrow 0, s \downarrow 0$. Így $H \in \Delta(c)$ miatt

$$\begin{aligned}
-\hat{K}(t) &= \int_{1/2}^t J(s) d(\operatorname{sign} c s^{-c} L(s)) = \\
&= \operatorname{sign} c J(t) t^{-c} L(t) - \operatorname{sign} c J(1/2) (1/2)^{-c} L(1/2) \\
&\quad - \int_{1/2}^t \operatorname{sign} c s^{-c-1} L(s) J(s) (\rho + \epsilon(s)) ds \\
&= t^{\rho-c} l(t) L(t) \left\{ \operatorname{sign} c + \frac{\int_t^{1/2} \operatorname{sign} c s^{\rho-c-1} l(s) L(s) (\rho + \epsilon(s)) ds}{t^{\rho-c} l(t) L(t)} \right\} \\
&\quad - \operatorname{sign} c J(1/2) (1/2)^{-c} L(1/2) \\
&=: t^{\rho-c} l(t) L(t) (\operatorname{sign} c + Z(t)) - \operatorname{sign} c J(1/2) (1/2)^{-c} L(1/2).
\end{aligned}$$

Külön vizsgáljuk a $\rho \neq 0$ és a $\rho = 0$ eseteket. Ha $\rho \neq 0$, akkor a

$$Z(t) = (\rho + \epsilon(t)) \frac{\int_t^{1/2} \operatorname{sign} c s^{\rho-c-1} l(s) L(s) (\rho + \epsilon(s)) ds}{t^{\rho-c} l(t) L(t) (\rho + \epsilon(t))}$$

függvényre a 3.3 Lemma (i) részének felhasználásával kapjuk, hogy

$$\lim_{t \downarrow 0} (\operatorname{sign} c + Z(t)) = \operatorname{sign} c + \operatorname{sign} c \frac{\rho}{c - \rho} = \frac{|c|}{c - \rho} > 0,$$

amiből a később kimondásra kerülő 4.3 Lemma felhasználásával következik a jelen lemma a) állítása. Ha $\rho = 0$, akkor a következő módon járhatunk el. Legyen $\epsilon > 0$ tetszőleges szám. Válasszunk meg ϵ -hoz egy $\delta > 0$ számot úgy, hogy $|\epsilon(s)| < \epsilon$ teljesüljön minden $0 < s \leq \delta$ számra. Így

$$\begin{aligned}
\limsup_{t \downarrow 0} |Z(t)| &\leq \limsup_{t \downarrow 0} \frac{\int_t^{1/2} s^{-c-1} l(s) L(s) |\epsilon(s)| ds}{t^{-c} l(t) L(t)} = \limsup_{t \downarrow 0} \frac{\int_t^{\delta} s^{-c-1} l(s) L(s) |\epsilon(s)| ds}{t^{-c} l(t) L(t)} \\
&\leq \limsup_{t \downarrow 0} \frac{\epsilon \int_t^{\delta} s^{-c-1} l(s) L(s) ds}{t^{-c} l(t) L(t)} = \epsilon/c.
\end{aligned}$$

Ebből következik, hogy $\lim_{t \downarrow 0} Z(t) = 0$, így a lemma a) állítása igaz a $\rho = 0$ esetre is. A lemma b) része az a)-hoz hasonlóan igazolható a 3.3 Lemma (ii) részének felhasználásával, így ennek bizonyításától eltekintünk. A c) rész bizonyítása a következőképpen lehetséges.

Vegyünk különböző $0 < x, y, v, w < \infty$ számokat. Ekkor

$$\begin{aligned}
\frac{\hat{K}(xs) - \hat{K}(ys)}{\hat{K}(vs) - \hat{K}(ws)} &= \frac{\int_{ys}^{xs} J(s) dH(s)}{\int_{ws}^{vs} J(s) dH(s)} \\
&= \frac{d_0 \int_{ys}^{xs} dH(s) + \int_{ys}^{xs} (J(s) - d_0) dH(s)}{d_0 \int_{ws}^{vs} dH(s) + \int_{ws}^{vs} (J(s) - d_0) dH(s)} \\
&= \frac{1 + \int_{ys}^{xs} (J(s) - d_0) dH(s) / (d_0 \int_{ys}^{xs} dH(s))}{\int_{ws}^{vs} dH(s) / \int_{ys}^{xs} dH(s) + \int_{ws}^{vs} (J(s) - d_0) dH(s) / (d_0 \int_{ys}^{xs} dH(s))} \\
&= \frac{1 + E_1(s)}{(H(vs) - H(ws)) / (H(xs) - H(ys)) + E_2(s)} .
\end{aligned}$$

Jelölje a továbbiakban ' $u \in (a, b)$ ' a ' $\min(a, b) < u < \max(a, b)$ ' relációt. Így igaz, hogy

$$|E_1(s)| \leq \sup_{u \in (xs, ys)} |J(s) - d_0| / d_0, \text{ ami miatt } \lim_{s \downarrow 0} E_1(s) = 0. \text{ Hasonlóképpen}$$

$$|E_2(s)| \leq d_0^{-1} \sup_{u \in (ws, vs)} |J(u) - d_0| \left| \frac{H(vs) - H(ws)}{H(xs) - H(ys)} \right|,$$

amiből $H \in \Delta(0)$ -t figyelembe véve $\lim_{s \downarrow 0} E_2(s) = 0$ következik. A fentiek miatt a lemma c) része is igaz. $\square$

A 3.2 Lemma bizonyítása. Észrevesszük, hogy

$$\begin{aligned}
(3.6) \quad -\bar{K}(t) &= \int_{1/2}^t J(s) d \log Q(1-s-) = \int_{1/2}^t J(s) (Q(1-s-))^{-1} dQ(1-s-) \\
&= \int_{Q((1/2)-)}^{Q(1-t-)} u^{-1} J(1-F(u)) du.
\end{aligned}$$

De Haan [11] Cor. 1.2.1 3-ból és (3.4)-ből következik, hogy az $u^{-1} J(1-F(u))$ függvény reguláris változású $-1 - \rho/c$ index szerint a ∞ -nél.

Először a)-t igazoljuk. Mivel $-1 - \rho/c > -1$ ezért az előző észrevételünkből és De Haan [11] 1.2.2 Lemmájából következik, hogy az

$$\int_{Q((1/2)-)}^t u^{-1} J(1-F(u)) du$$

függvény reguláris változású $-\rho/c$ index szerint a ∞ -nél. Figyelembe véve (3.6)-t, De Haan [11] Cor. 1.2.1 3. ismételt alkalmazásával kapjuk, hogy $-\bar{K}(t)$ reguláris változású ρ index szerint a 0-nál.

Ezután igazoljuk b)-t. Most $-1 - \rho/c < -1$, így De Haan [11] 1.2.1 Lemmája miatt az

$$A(t) := \int_t^\infty u^{-1} J(1 - F(u)) du$$

függvény $-\rho/c$ index szerint reguláris változása a ∞ -nél. Így De Haan [11] Cor. 1.2.1 megint csak azt eredményezi, hogy az $A(Q(1 - t-))$ függvény reguláris változása ρ index szerint a 0-nál. Ebből következik a lemma b) állítása, hiszen $-\bar{K}(t) = A(Q((1/2)-)) - A(Q(1 - t-))$. Legutoljára igazoljuk c)-t. Vegyünk különböző $0 < x, y, v, w < \infty$ számokat. Ekkor

$$\begin{aligned} \frac{\bar{K}(xs) - \bar{K}(ys)}{\bar{K}(vs) - \bar{K}(ws)} &= \frac{\int_{ys}^{xs} J(s) d\bar{H}(s)}{\int_{ws}^{vs} J(s) d\bar{H}(s)} \\ &= \frac{d_0 \int_{ys}^{xs} d\bar{H}(s) + \int_{ys}^{xs} (J(s) - d_0) d\bar{H}(s)}{d_0 \int_{ws}^{vs} d\bar{H}(s) + \int_{ws}^{vs} (J(s) - d_0) d\bar{H}(s)} \\ &= \frac{1 + \int_{ys}^{xs} (J(s) - d_0) d\bar{H}(s) / (d_0 \int_{ys}^{xs} d\bar{H}(s))}{\int_{ws}^{vs} d\bar{H}(s) / \int_{ys}^{xs} d\bar{H}(s) + \int_{ws}^{vs} (J(s) - d_0) d\bar{H}(s) / (d_0 \int_{ys}^{xs} d\bar{H}(s))} . \end{aligned}$$

A 3.4 Lemma felhasználásával kapjuk, hogy

$$\lim_{s \downarrow 0} \int_{xs}^{ys} d\bar{H}(s) = \lim_{s \downarrow 0} \log \frac{Q(1 - (xs)-)}{Q(1 - (ys)-)} = \log(x/y)^{-c}.$$

Az is igaz, hogy

$$\left| \int_{ys}^{xs} (J(s) - d_0) d\bar{H}(s) \right| \leq \sup_{u \in (xs, ys)} |J(u) - d_0| \left| \int_{ys}^{xs} d\bar{H}(s) \right|,$$

így

$$\lim_{s \downarrow 0} \int_{ys}^{xs} (J(s) - d_0) d\bar{H}(s) = 0.$$

A fentiekből egyszerűen következik, hogy a lemma c) állítása is igaz. □

A 3.1 Tétel bizonyítása. Az

$$\frac{1}{n^{1/2} a_{n, \hat{K}}} \left\{ \sum_{i=k+1}^{k_n} d_{n+1-i, n} X_{n+1-i, n} - \mu_n(k, H) \right\} = \mathcal{D}$$

$$\frac{1}{n^{1/2}a_{n,\hat{K}}} \left\{ \sum_{i=k+1}^{k_n} d_{n+1-i,n} Q(U_{n+1-i,n}) - \mu_n(k, H) \right\}$$

összegekre alkalmazni fogjuk az 1.1 Tételt. Így most $h(s) = Q(s)$ és a lineáris kombinációk aszimptotikus viselkedését a $\varphi_n = \varphi_{n,\hat{K}}$, és a $\psi_n = \psi_{n,\hat{K}}$ függvények határozzák meg. A 3.3 Megjegyzés miatt a 3.1 Lemmából következik, hogy a tételben megengedett ρ és c értékekre $\hat{K} \in \Delta(c - \rho)$ teljesül. Így Csörgő, Haeusler és Mason [5] 2.11 és 2.12 Lemmája alapján állíthatjuk, hogy minden x valós számra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_{n,\hat{K}}(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ ha } c - \rho > 1/2 \text{ és } c \neq 0 \\ & \text{vagy } c - \rho = 1/2, c \neq 0 \text{ és } \sigma(0, \alpha) = \infty, \\ \psi_{\alpha,\hat{K}}(x) & , \text{ ha } c - \rho = 1/2, c \neq 0 \text{ és } \sigma(0, \alpha) < \infty \\ & \text{vagy } c - \rho < 1/2, c \neq 0 \text{ és } c \neq \rho \\ & \text{vagy } c = \rho = 0 \text{ és létezik} \\ & \text{a } \lim_{s \downarrow 0} J(s) = d_0 > 0 \text{ véges határérték,} \end{cases}$$

és minden $y > 0$ valós számra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{n,\hat{K}}(y) = \begin{cases} K_{c-\rho}^{-1}(1 - y^{-(c-\rho)}) & , \text{ ha } c - \rho > 1/2 \text{ és } c \neq 0, \\ 0 & , \text{ ha } c - \rho \leq 1/2, c \neq 0 \text{ és } c \neq \rho \\ & \text{vagy } c = \rho = 0 \text{ és létezik} \\ & \text{a } \lim_{s \downarrow 0} J(s) = d_0 > 0 \text{ véges határérték.} \end{cases}$$

A fentiek alapján a tétel állítása az 1.1 Tétel felhasználásával ugyanazokkal a technikai lépésekkel igazolható, mint amelyeket Csörgő, Haeusler és Mason [5]-ben használt a 2. Kollárium igazolásakor, így ennek részletezésétől itt eltekintünk. $\square$

A 3.3 Tétel bizonyítása. A tétel igazolása ugyanúgy kivitelezhető a 3.2 Lemma felhasználásával, mint a 3.1 Tétel bizonyítása a 3.1 Lemma segítségével. $\square$

A 3.2 Tétel bizonyítása. Az

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k_n^{1/2} \Delta_n^*(a, b, \hat{K})} \left\{ \sum_{i=\lceil ak_n \rceil+1}^{\lceil bk_n \rceil} d_{n+1-i,n} X_{n+1-i,n} - \mu_n(a, b, H) \right\} \\ & =_{\mathcal{D}} \frac{1}{k_n^{1/2} \Delta_n^*(a, b, \hat{K})} \left\{ \sum_{i=\lceil ak_n \rceil+1}^{\lceil bk_n \rceil} d_{n+1-i,n} Q(U_{n+1-i,n}) - \mu_n(a, b, H) \right\} \end{aligned}$$

összegekre alkalmazni fogjuk az 2.1 Tételt. Így most $h(s) = Q(s)$ és a lineáris kombinációk aszimptotikus viselkedését a $\psi_{n,\hat{K}}(\hat{c}; \cdot)$, $\hat{c} = a, b$ függvények határozzák meg. A 3.1 Lemmából következik, hogy a tételben megengedett ρ és c értékekre $\hat{K} \in \Delta(c - \rho)$. Csörgő és Mason [8]-ban említett példájuk tárgyalásakor belátták, hogy ha $\hat{K} \in \Delta(\hat{a})$ valamely $-\infty < \hat{a} < \infty$ számra, akkor $\psi_{n,\hat{K}}(\hat{c}; x) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, minden $\hat{c} > 0$ számra az egész számegyenesen és $\tilde{\varphi}_{n,\hat{K}}(y) = \tilde{\varphi}_{n,\hat{K},a,b}(y) \rightarrow \varphi_{\hat{a}}(y)$, $n \rightarrow \infty$ minden $a \leq y \leq b$ számra. Legyen $\{n_1\} \subset \{n\}$ tetszőleges részsorozat. A 2.1 Tétel miatt létezik olyan $\{n_2\} \subset \{n_1\}$ részsorozat, melyre (3.5) teljesül az $n = n_2$ részsorozat mentén. Mivel $\{n_1\}$ tetszőleges volt, ezért (3.5) teljesül $\{n\}$ mentén. $\square$

A 3.4 Tétel bizonyítása. A tétel igazolása ugyanúgy történik, mint a 3.2 Tétel bizonyítása, csak itt most a 3.2 Lemmát kell felhasználni. $\square$

Ebben a fejezetben tegyük fel, hogy az alapeloszlásra érvényes a (3.4) összefüggés valamely $\tilde{l}$ a ∞ -nél lassú változású függvényre és $c > 0$ számra. Mint azt láttuk ez ekvivalens azzal, hogy a megfelelő Q kvantilisfüggvény előáll a

$$(4.1) \quad Q(1-s) = s^{-c}L(s), \quad 0 < s < 1,$$

alakban, ahol $L(\cdot)$ egy lassú változású függvény a 0-nál. Feltesszük még azt is, hogy Q egy pozitív valószínűségi változó kvantilisfüggvénye. Adott $c > 0$ paraméter mellett eloszlásoknak ezt az osztályát $\mathcal{R}_c$ -vel fogjuk jelöljni, a $Q \in \mathcal{R}_c$ relációval pedig arra fogunk utalni, hogy Q valamely $\mathcal{R}_c$ -beli eloszlás kvantilisfüggvénye.

Bizonyos esetekben az alapeloszlásról valamivel többet fogunk feltenni, mint (4.1)-ben. Ez a szűkebb eloszlásoosztály a következőképpen származtatható. A lassú változású függvényekre vonatkozó reprezentációtétel miatt (ld. pl. Seneta [18]) $Q \in \mathcal{R}_c$ ekvivalens azzal, hogy

$$(4.2) \quad Q(1-s) = s^{-c}a(s) \exp \left\{ \int_s^1 \frac{b(u)}{u} du \right\}, \quad 0 < s < 1,$$

valamely $a(s)$ és $b(s)$ függvényekre, melyekre $\lim_{s \downarrow 0} a(s) = a_0$ valamely $0 < a_0 < \infty$ számra és $\lim_{s \downarrow 0} b(s) = 0$ (vö. még Csörgő, Mason [7]). $\mathcal{R}_c^*$ jelölje $\mathcal{R}_c$ -nek azt a részosztályát, melybe azok az eloszlások tartoznak, melyek (4.2)-beli előállításában szereplő $a(s)$ függvény konstans a 0-nak valamely jobboldali környezetében.

A 3. fejezet 3.3 és 3.4 Tételeinek felhasználásával aszimptotikusan normális becsléseket adunk az $\mathcal{R}_c$ osztály c paraméterére. A már létező becslések közül az egyik legnevezetesebb a Hill-féle becsés (Hill [12], 1975):

$$(4.3) \quad \frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} \log X_{n+1-i,n} - \log X_{n-k_n,n},$$

ahol $X_{1,n} \leq \dots \leq X_{n,n}$ szokásosan egy F eloszlásfüggvénnyel bíró n elemű mintához tartozó rendezett statisztikák sorozatát jelöli. Többek között Davis és Resnick (1984), Csörgő és Mason (1984) foglalkoztak a Hill-féle becsés aszimptotikus normalitásával. Mi belátjuk,

hogy a (4.3)-beli becslés általánosítható lineáris kombinációkra is. Ezek az általánosított becslések a következők lesznek:

$$(4.4) \quad c_n^{(1)} = \frac{1}{k_n} \sum_{i=k+1}^{k_n} d_{n+1-i,n} \log X_{n+1-i,n} - \log X_{n-k_n,n} \quad \text{illetve}$$

$$(4.5) \quad c_n^{(2)} = \frac{1}{k_n} \sum_{i=k+1}^{k_n} d_{n+1-i,n} \log X_{n+1-i,n} - \frac{\sum_{i=k+1}^{k_n} d_{n+1-i,n}}{k_n} \log X_{n-k_n,n}.$$

Egy másik, általunk bevezetett becslés intermediális statisztikákon alapul:

$$(4.6) \quad c_n^{(3)} = \frac{1}{K(a, b, m)k_n} \left\{ \sum_{[ak_n]+1}^{[(a+m)k_n]} d_{n+1-i,n} \log X_{n+1-i,n} - \sum_{[bk_n]+1}^{[(b+m)k_n]} e_{n+1-i,n} \log X_{n+1-i,n} \right\},$$

ahol $0 < m$, $0 < a < b$ rögzített konstansok, $0 < K(a, b, m) = a \log a - b \log b + (b + m) \log(b + m) - (a + m) \log(a + m)$. A fenti statisztikákat az alábbi súlyokra képezzük:

$$d_{i,n} = n \int_{(i-1)/n}^{i/n} \bar{L}_1(s) ds, \quad e_{i,n} = n \int_{(i-1)/n}^{i/n} \bar{L}_2(s) ds,$$

ahol az $\bar{L}_1$ és $\bar{L}_2$ függvények kielégítik az $\bar{L}$ feltételben leírtakat és $\lim_{s \downarrow 0} \bar{L}_1(1-s) = \lim_{s \downarrow 0} \bar{L}_2(1-s) = 1$. Szükségünk lesz még az

$$\begin{aligned} a_n^2 &= a_{n,K_1}^2 = \int_{1/n}^{k_n/n} \int_{1/n}^{k_n/n} (u \wedge v - uv) dK_1(u) dK_1(v), \\ \mu_n(k) &= \mu_n(k, \bar{H}) = -n \int_{(k+1)/n}^{k_n/n} J_1(u) \bar{H}(u) du - d_{n-k,n} \bar{H} \left(\frac{1}{n} \right), \\ \mu_n^{(1)}(a, a+m) &= -n \int_{[ak_n]/n}^{[(a+m)k_n]/n} J_1(s) \bar{H}(s) ds \quad \text{és a} \\ \mu_n^{(2)}(b, b+m) &= -n \int_{[bk_n]/n}^{[(b+m)k_n]/n} J_2(s) \bar{H}(s) ds \end{aligned}$$

sorozatokra, ahol $J_i(s) = \bar{L}_i(1-s)$, $0 < s < 1$, $i = 1, 2$, $\bar{H}(s) = -\log Q(1-s-)$, $0 < s < 1$, és $K_1(t) = \int_{1/2}^t J_1(s) d\bar{H}(s)$, $0 < t < 1$. A becslésekre kimondott tételekhez most is szükségünk lesz néhány technikai lemmára.

4.1 LEMMA. Legyen k_n egy (1.1)-beli sorozat és tegyük fel, hogy $\alpha = 0$. Ekkor

$$(4.7) \quad a_n = a_{n,K_1} \sim (k_n/n)^{1/2} l(k_n/n), \quad n \rightarrow \infty,$$

valamely $l(\cdot)$ a 0-nál lassú változású függvényre.

Bizonyítás. A 3.2 Lemmából következik, hogy $K_1 \in \Delta(0)$. Csörgő, Haeusler és Mason [5]-ben a 2.11 Lemma igazolásakor belátta, hogy $a_n \sim \sigma_{K_1}(0, k_n/n)$. Így ugyancsak az [5]-beli 2.10 Lemmából következik (4.7). $\square$

4.2 LEMMA. (De Haan [11], Cor 1.2.1 1) Ha $R(\cdot)$ egy reguláris változású függvény a 0-nál valamely véges ρ index szerint, akkor

$$\lim_{s \downarrow 0} \frac{\log R(s)}{\log s} = \rho.$$

4.3 LEMMA. (Seneta [18], 18. oldal) Ha $l(\cdot)$ lassú változású függvény a 0-nál, akkor minden $\rho > 0$ számra $\lim_{s \downarrow 0} s^\rho l(s) = 0$ és $\lim_{s \downarrow 0} s^{-\rho} l(s) = \infty$.

Az alábbi segédteétel a [7]-beli Fact 1.1 és az ugyancsak [7]-beli Lemma 3.1 következménye.

4.4 LEMMA. $Q \in \mathcal{R}_c$ pontosan akkor teljesül valamely $c > 0$ számra, ha

$$\lim_{s \downarrow 0} \frac{1}{s} \int_0^s u d(-\log Q(1-u)) = c.$$

4.5 LEMMA. Legyen

$$c_{K_1}(s) = \frac{1}{s} \int_{1-s}^1 (1-u) d(-K_1(1-u)).$$

Ha $Q \in \mathcal{R}_c^*$, akkor $\lim_{s \downarrow 0} c_{K_1}(s) = c$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy (4.2)-ben $a(s) = a_0$ valamely $(0, \delta)$ intervallumon. Így ha $0 < t \leq \delta$, akkor

$$\begin{aligned} K_1(t) &= K_1(\delta) + \int_\delta^t J_1(s) d(-\log(s^{-c} a_0 \exp \left\{ \int_s^1 \frac{b(u)}{u} du \right\})) \\ &= K_1(\delta) + \int_\delta^t J_1(s) d(c \log s + \int_1^s \frac{b(u)}{u} du) = K_1(\delta) + \int_\delta^t \frac{J_1(s)}{s} (c + b(s)) ds. \end{aligned}$$

Tehát

$$\lim_{s \downarrow 0} c_{K_1}(s) = \lim_{s \downarrow 0} \frac{1}{s} \int_0^s u dK_1(u) = \lim_{s \downarrow 0} \frac{1}{s} \int_0^s J_1(u)(c + b(u)) du = c.$$

□

4.6 LEMMA. (Lo [13], Lemma 6) Ha $K_1 \in \Delta(0)$, akkor

$$\lim_{s \downarrow 0} \frac{\sigma_{K_1}^2(0, s)}{2sc_{K_1}^2(s)} = 1.$$

4.1 TÉTEL. Legyen $k \geq 0$ egy egész szám és k_n pozitív egészek egy sorozata, melyre $k_n \rightarrow \infty$, $k_n/n \rightarrow 0$ és $\log n/k_n \rightarrow 0$, amint $n \rightarrow \infty$.

Tegyük fel, hogy

$$(4.8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{k_n} \int_0^{k_n/n} |J_1(s) - 1| \log s ds = 0.$$

(i) Ha $Q \in \mathcal{R}_c$, akkor

$$\frac{k_n}{n^{1/2}a_n}(c_n^{(1)} - c + M_n) \rightarrow_{\mathcal{D}} N(0, 1), \quad n \rightarrow \infty,$$

és

$$\frac{k_n}{n^{1/2}a_n}(c_n^{(2)} - c + R_n) \rightarrow_{\mathcal{D}} N(0, 1), \quad n \rightarrow \infty,$$

ahol $M_n = c + \log X_{n-k_n, n} - \mu_n(k)/k_n = o_p(1)$, $n \rightarrow \infty$, és

$$R_n = c + \frac{\sum_{i=k+1}^{k_n} d_{n+1-i, n}}{k_n} \log X_{n-k_n, n} - \frac{1}{k_n} \mu_n(k) = o_p(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

(ii) Ha $Q \in \mathcal{R}_c^*$, akkor

$$k_n^{1/2}(c_n^{(1)} - c + M_n) \rightarrow_{\mathcal{D}} N(0, 2c^2), \quad n \rightarrow \infty,$$

és

$$k_n^{1/2}(c_n^{(2)} - c + R_n) \rightarrow_{\mathcal{D}} N(0, 2c^2), \quad n \rightarrow \infty.$$

4.1 Megjegyzés. (4.8)-ból következik, hogy

$$(4.9) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{k_n} \int_0^{k_n/n} |J_1(s) - 1| ds \log(k_n/n) = 0.$$

4.2 TÉTEL. Legyen k_n pozitív számoknak egy sorozata, melyre $k_n \rightarrow \infty$, $k_n/n \rightarrow 0$, $\log n/k_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Tegyük fel, hogy

$$(4.10) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{k_n} \int_{[ak_n]/n}^{[(a+m)k_n]/n} |J_1(s) - 1| \log s ds = 0$$

és

$$(4.11) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{k_n} \int_{[bk_n]/n}^{[(b+m)k_n]/n} |J_2(s) - 1| \log s ds = 0.$$

Ha $Q \in \mathcal{R}_c$, akkor

$$k_n^{1/2} K(a, b, m)(c_n^{(3)} - c + Q_n) \rightarrow_{\mathcal{D}} c \left(\int_a^{a+m} \frac{W(x)}{x} dx - \int_b^{b+m} \frac{W(x)}{x} dx \right), \quad n \rightarrow \infty,$$

ahol

$$Q_n = c - \frac{1}{k_n K(a, b, m)} (\mu_n^{(1)}(a, a+m) - \mu_n^{(2)}(b, b+m)) = o(1), \quad n \rightarrow \infty,$$

$W(x)$ szokásosan a standard Wiener-folyamatot jelöli.

4.2 Megjegyzés. A (4.8), (4.10) és (4.11) feltételeknek eleget tesznek pl. a $J_i(s) = s^\alpha + 1$, $\alpha > 0$; $J_i(s) = \cos s$ és a $J_i(s) = (e^s - 1)/s$ függvények.

4.3 Megjegyzés. A 4.2 Tételbeli határérték valószínűségi változó normális eloszlású 0 várható értékkel és $c^2 \sigma^2(a, b, m)$ szórásnénnyel, ahol

$$\begin{aligned} \sigma^2(a, b, m) = & 2(\min(b, a+m) - a) + (a + \min(b, a+m)) \log(a / \min(b, a+m)) \\ & + 2(b+m - \max(b, a+m)) \\ & + (\max(b, a+m) + b+m) \log(\max(b, a+m) / (b+m)) \\ & + 2(a - \min(b, a+m)) \log((b+m) / \max(b, a+m)). \end{aligned}$$

A 4.1 Tétel bizonyítása. Először a tétel (i) részét igazoljuk. A $c_n^{(1)}$ és a $c_n^{(2)}$ statisztikákra vonatkozó állításokat párhuzamosan igazoljuk. Legyen $C_n = 1$ illetve

$C_n = \sum_{i=k+1}^{k_n} d_{n+1-i,n}/k_n$ annak megfelelően, hogy a $c_n^{(1)}$ illetve a $c_n^{(2)}$ becsléssel foglalkozunk. Legyen továbbá

$$E_n = c + C_n \log X_{n-k_n,n} - \frac{1}{k_n} \mu_n(k) \quad \text{és}$$

$$\gamma_n = \frac{1}{k_n} \sum_{i=k+1}^{k_n} d_{n+1-i,n} \log X_{n+1-i,n} - C_n \log X_{n-k_n,n},$$

azaz γ_n lehet $c_n^{(1)}$ és $c_n^{(2)}$ is a C_n sorozat megválasztásától függően. A 3.3 Tételből következik, hogy

$$\frac{1}{n^{1/2} a_n} \left(\sum_{i=k+1}^{k_n} d_{n+1-i,n} \log X_{n+1-i,n} - \mu_n(k) \right) = \frac{k_n}{n^{1/2} a_n} (\gamma_n - c + E_n) \rightarrow_{\mathcal{D}} N(0, 1),$$

amint $n \rightarrow \infty$. Belátjuk, hogy $E_n = o_p(1)$, $n \rightarrow \infty$.

$$E_n = c + C_n \log X_{n-k_n,n} - \frac{n}{k_n} \int_0^{k_n/n} J_1(s) \log Q(1-s-) ds$$

$$+ \frac{n}{k_n} \int_0^{(k+1)/n} J_1(s) \log Q(1-s-) ds - \frac{d_{n-k,n}}{k_n} \log Q(1-(1/n)-).$$

A 4.2 Lemma felhasználásával kapjuk, hogy minden elég nagy n -re

$$(4.12) \quad \left| \frac{n}{k_n} \int_0^{(k+1)/n} J_1(s) \log Q(1-s-) ds \right| \leq \frac{n}{k_n} 2c \int_0^{(k+1)/n} |\log s| ds$$

$$= 2c \frac{n}{k_n} \left(\frac{k+1}{n} - \frac{k+1}{n} \log \frac{k+1}{n} \right) = o(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

Hasonló számolással ($\lim_{n \rightarrow \infty} d_{n-k,n} = 1$ felhasználásával) könnyen belátható, hogy

$$(4.13) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_{n-k,n}}{k_n} \log Q(1-(1/n)-) = 0.$$

Parciális integrálással egyszerűen adódik, hogy

$$(4.14) \quad \frac{n}{k_n} \int_0^{k_n/n} \log Q(1-s-) ds = \log Q(1-(k_n/n)-) - \frac{n}{k_n} \int_0^{k_n/n} s d \log Q(1-s-),$$

továbbá a 4.2 Lemma és (4.9) alkalmazásával könnyen látszik, hogy

$$(4.15) \quad \log Q(1-(k_n/n)-) = C_n \log Q(1-(k_n/n)-) + o(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

Így (4.8),(4.12),(4.13),(4.14) és (4.15) alapján írhatjuk, hogy

$$E_n = c + \frac{n}{k_n} \int_0^{k_n/n} s d \log Q(1-s-) + C_n \log \frac{X_{n-k_n,n}}{Q(1-(k_n/n)-)} + o(1), \quad n \rightarrow \infty,$$

ami a 4.4 Lemma felhasználásával

$$= C_n \log \frac{X_{n-k_n,n}}{Q(1-(k_n/n)-)} + o(1) =_{\mathcal{D}} C_n \log \frac{Q(1-U_{k_n+1,n})}{Q(1-(k_n/n)-)} + o(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

Figyelembe véve, hogy $U_{k_n+1,n}/(k_n/n) \rightarrow_{\mathcal{P}} 1$, $n \rightarrow \infty$, a 3.4 Lemma alkalmazásával az $E_n = o_{\mathcal{P}}(1)$, $n \rightarrow \infty$, összefüggéshez jutunk. Ezzel a tétel (i) részét bebizonyítottuk.

A tétel (ii) állításának igazolásához mindössze azt kell belátnunk, hogy

$$(4.16) \quad k_n^{1/2}/(n^{1/2}a_n) \rightarrow 1/(2^{1/2}c), \quad n \rightarrow \infty.$$

Mint azt a 4.1 Lemma bizonyításakor láttuk, $a_n \sim \sigma(0, k_n/n)$, $n \rightarrow \infty$. Ezért a 3.2, 4.5 és 4.6 Lemmákból következik (4.16). $\square$

A 4.2 Tétel bizonyítása. A 3.4 Tételből következik, hogy

$$(4.17) \quad \frac{1}{k_n^{1/2} \Delta_n^*(a, a+m, K_1)} \left\{ \sum_{i=\lceil ak_n \rceil+1}^{\lceil (a+m)k_n \rceil} d_{n+1-i,n} \log X_{n+1-i,n} - \mu_n^{(1)}(a, a+m) \right\} \\ \rightarrow_{\mathcal{D}} \int_a^{a+m} W(x) d\bar{\varphi}_{0,a,a+m}(x),$$

amint $n \rightarrow \infty$. Vizsgáljuk a $\Delta_n(a, a+m, K_1)$ sorozatot.

$$\Delta_n(a, a+m, K_1) = \int_{\lceil ak_n \rceil/n}^{\lceil (a+m)k_n \rceil/n} d\bar{H}(s) + \int_{\lceil ak_n \rceil/n}^{\lceil (a+m)k_n \rceil/n} (J_1(s) - 1) d\bar{H}(s) =: T_n^{(1)} + T_n^{(2)}.$$

A 3.4 Lemma felhasználásával kapjuk, hogy

$$T_n^{(1)} = \log \frac{Q(1-(\lceil ak_n \rceil/n)-)}{Q(1-(\lceil (a+m)k_n \rceil/n)-)} \rightarrow \\ \rightarrow \log \left(\frac{a}{a+m} \right)^{-c} = c(\log(a+m) - \log a), \quad n \rightarrow \infty, \quad \text{és} \\ |T_n^{(2)}| \leq \sup_{s \in (\lceil ak_n \rceil/n, \lceil (a+m)k_n \rceil/n)} |J_1(s) - 1| T_n^{(1)} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Tehát $\Delta_n(a, a+m, K_1) \rightarrow c(\log(a+m) - \log a)$, $n \rightarrow \infty$. Így (4.17)-ből következik, hogy

$$S_n^{(1)}(a, a+m) := \frac{1}{k_n^{1/2}} \left\{ \sum_{i=\lceil ak_n \rceil+1}^{\lceil (a+m)k_n \rceil} d_{n+1-i,n} \log X_{n+1-i,n} - \mu_n^{(1)}(a, a+m) \right\} \\ \rightarrow_{\mathcal{D}} c \int_a^{a+m} \frac{W(x)}{x} dx, \quad n \rightarrow \infty.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$S_n^{(2)}(b, b+m) := \frac{1}{k_n^{1/2}} \left\{ \sum_{i=\lceil bk_n \rceil+1}^{\lceil (b+m)k_n \rceil} e_{n+1-i,n} \log X_{n+1-i,n} - \mu_n^{(2)}(b, b+m) \right\} \\ \rightarrow_{\mathcal{D}} c \int_b^{b+m} \frac{W(x)}{x} dx, \quad n \rightarrow \infty.$$

A 3.4 Tétel bizonyításából észrevehető, hogy az $(S_n^{(1)}(a, a+m), S_n^{(2)}(b, b+m))$ vektorváltozók sorozatára teljesül az

$$(S_n^{(1)}(a, a+m), S_n^{(2)}(b, b+m)) \rightarrow_{\mathcal{D}} \left(c \int_a^{a+m} \frac{W(x)}{x} dx, c \int_b^{b+m} \frac{W(x)}{x} dx \right), \quad n \rightarrow \infty,$$

együttes konvergencia is. Így

$$S_n^{(1)}(a, a+m) - S_n^{(2)}(b, b+m) \rightarrow_{\mathcal{D}} c \left(\int_a^{a+m} \frac{W(x)}{x} dx - \int_b^{b+m} \frac{W(x)}{x} dx \right), \quad n \rightarrow \infty,$$

azaz

$$k_n^{1/2} K(a, b, m)(c_n^{(3)} - c + Q_n) \rightarrow_{\mathcal{D}} c \left(\int_a^{a+m} \frac{W(x)}{x} dx - \int_b^{b+m} \frac{W(x)}{x} dx \right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Tehát azt kell még belátni, hogy $Q_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. A (4.10) feltételből és a 4.2 Lemmából egyszerűen következik, hogy

$$\frac{1}{k_n} \mu_n^{(1)}(a, a+m) = \\ \frac{1}{k_n} n \int_{\lceil ak_n \rceil/n}^{\lceil (a+m)k_n \rceil/n} \log Q(1-s-) ds + o(1) =: \frac{1}{k_n} \bar{\mu}_n^{(1)}(a, a+m) + o(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

Hasonlóan

$$\frac{1}{k_n} \mu_n^{(2)}(b, b+m) = \\ \frac{1}{k_n} n \int_{\lceil bk_n \rceil/n}^{\lceil (b+m)k_n \rceil/n} \log Q(1-s-) ds + o(1) =: \frac{1}{k_n} \bar{\mu}_n^{(2)}(b, b+m) + o(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

Elég tehát belátni, hogy

$$D_n := \frac{1}{k_n} (\bar{\mu}_n^{(1)}(a, a+m) - \bar{\mu}_n^{(2)}(b, b+m)) \rightarrow_{\mathcal{D}} cK(a, b, m), \quad n \rightarrow \infty.$$

D_n -t írjuk fel a következő alakba:

$$\begin{aligned} D_n &= \left\{ \frac{n}{k_n} \int_{[ak_n]/n}^{[(a+m)k_n]/n} \log s^{-c} ds - \frac{n}{k_n} \int_{[bk_n]/n}^{[(b+m)k_n]/n} \log s^{-c} ds \right\} \\ &\quad + \left\{ \frac{n}{k_n} \int_{[ak_n]/n}^{[(a+m)k_n]/n} \log L(s) ds - \frac{n}{k_n} \int_{[bk_n]/n}^{[(b+m)k_n]/n} \log L(s) ds \right\} \\ &:= A_n + e_n, \end{aligned}$$

ahol $L(\cdot)$ a (4.1) előállításban szereplő lassú változású függvény. Egyszerű számolással kapható, hogy

$$\begin{aligned} A_n &= -c \left(\frac{[(a+m)k_n]}{k_n} \log \frac{[(a+m)k_n]}{n} - \frac{[(a+m)k_n]}{k_n} \right. \\ &\quad - \frac{[ak_n]}{k_n} \log \frac{[ak_n]}{n} + \frac{[ak_n]}{k_n} \\ &\quad - \frac{[(b+m)k_n]}{k_n} \log \frac{[(b+m)k_n]}{n} + \frac{[(b+m)k_n]}{k_n} \\ &\quad \left. + \frac{[bk_n]}{k_n} \log \frac{[bk_n]}{n} - \frac{[bk_n]}{k_n} \right). \end{aligned}$$

A $\log n/k_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ feltevés miatt minden $z > 0$ számra

$$(4.18) \quad \frac{[zk_n]}{k_n} \log \frac{[zk_n]}{n} = z \log \frac{[zk_n]}{n} + \frac{[zk_n] - zk_n}{k_n} \log \frac{[zk_n]}{n} = z \log \frac{[zk_n]}{n} + o(1), \quad n \rightarrow \infty,$$

így

$$\begin{aligned} A_n &= -c \left(a \log \frac{[(a+m)k_n]}{[ak_n]} + b \log \frac{[bk_n]}{[(b+m)k_n]} + m \log \frac{[(a+m)k_n]}{[(b+m)k_n]} + o(1) \right) \\ &= -c \left(a \log \frac{a+m}{a} + b \log \frac{b}{b+m} + m \log \frac{a+m}{b+m} \right) + o(1), \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

tehát $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = cK(a, b, m)$. Ezután vizsgáljuk e_n -t. (4.18)-hoz hasonló egyszerű számolással belátható, hogy az integrálási határookban levő $[\cdot]$ jelek aszimptotikusan elhagyhatók, azaz

$$e_n = \left\{ \frac{n}{k_n} \int_{ak_n/n}^{(a+m)k_n/n} \log L(s) ds - \frac{n}{k_n} \int_{bk_n/n}^{(b+m)k_n/n} \log L(s) ds \right\} + o(1) =: \bar{e}_n + o(1),$$

amint $n \rightarrow \infty$. Így elég belátni, hogy $\bar{e}_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Mivel

$$\bar{e}_n = \frac{n}{k_n} \int_{ak_n/n}^{(a+m)k_n/n} \log \frac{L(s)}{L\left(s \left(1 + \frac{(b-a)k_n}{sn}\right)\right)} ds,$$

ezért a lassú változású függvényekre érvényes (1.22') összefüggés miatt minden $\epsilon > 0$ számra

$$\bar{e}_n \leq \frac{n}{k_n} \int_{ak_n/n}^{(a+m)k_n/n} \log(1 + \epsilon) ds = m \log(1 + \epsilon)$$

minden elég nagy n -re. Hasonlóan belátható, hogy $-\bar{e}_n \leq m \log(1 + \epsilon)$, ha n elég nagy. Tehát $|\bar{e}_n| \leq m \log(1 + \epsilon)$, amiből $\bar{e}_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, következik. $\square$

4.1 KÖVETKEZMÉNY. Tegyük fel, hogy $k_n = [n^\beta]$ valamely $0 < \beta < 1$ számra. Ha $Q \in \mathcal{R}_c$ és (4.8) teljesül, akkor $c_n^{(1)} \rightarrow_p c$ és $c_n^{(2)} \rightarrow_p c$, $n \rightarrow \infty$.

Bizonyítás. A 4.1 Tétel (i) része alapján mindössze azt kell belátni, hogy

$$(4.19). \quad k_n/(n^{1/2}a_n) \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty.$$

A 4.1 Lemma miatt $k_n/(n^{1/2}a_n) \sim k_n^{1/2}l(k_n/n)$ valamely $l(\cdot)$ a 0-nál lassú változású függvényre, amiből a 3.4 Lemma felhasználásával kapjuk, hogy $k_n/(n^{1/2}a_n) \sim n^{\beta/2}l(n^{\beta-1}) = (n^{\beta-1})^{\beta/(2(\beta-1))}l(n^{\beta-1})$. Ebből a 4.3 Lemma alkalmazásával következik (4.19). $\square$

4.2 KÖVETKEZMÉNY. Legyen k_n pozitív egészből álló sorozat, melyre $k_n \rightarrow \infty$, $k_n/n \rightarrow 0$ és $\log n/k_n \rightarrow 0$, amint $n \rightarrow \infty$. Ha $Q \in \mathcal{R}_c^*$ és (4.8) teljesül, akkor $c_n^{(1)} \rightarrow_p c$ és $c_n^{(2)} \rightarrow_p c$, $n \rightarrow \infty$.

Bizonyítás. Az állítás a 4.1 Tétel (ii) része alapján nyilvánvaló. $\square$

4.3 KÖVETKEZMÉNY. Tegyük fel, hogy k_n pozitív számoknak egy olyan sorozata, melyre $k_n \rightarrow \infty$, $k_n/n \rightarrow 0$ és $\log n/k_n \rightarrow 0$, amint $n \rightarrow \infty$. Ha $Q \in \mathcal{R}_c$ és (4.10) és (4.11) teljesülnek, akkor $c_n^{(3)} \rightarrow_p c$, $n \rightarrow \infty$.

Bizonyítás. A 4.2 Tétel alapján az állítás nyilvánvaló. $\square$

- [1] CHERNOFF,H.,GASTWIRTH,J. and JOHNS,M. (1967). Asymptotic distributions of linear combinations of functions of order statistics with applications to estimation. *Ann. Math. Statist.* **38** 52-72.
- [2] CSÖRGÖ,S. (1990). A probabilistic approach to domains of partial attraction. *Adv. in Appl. Math.* **11** 282-327.
- [3] CSÖRGÖ,S.,HAEUSLER,E. and MASON,D.M. (1988). The asymptotic distribution of trimmed sums. *Ann. Probab.* **16** 672-699.
- [4] CSÖRGÖ,S.,HAEUSLER,E. and MASON,D.M. (1988). A probabilistic approach to the asymptotic distribution of sums of independent, identically distributed random variables. *Adv. in Appl. Math.* **9** 259-333.
- [5] CSÖRGÖ,S.,HAEUSLER,E. and MASON,D.M. (1991). The asymptotic distribution of extreme sums, *Ann. Probab.* **19** 783-811.
- [6] CSÖRGÖ,S.,HORVÁTH,L. and MASON,D.M. (1986). What portion of the sample makes a partial sum asymptotically stable or normal? *Probab. Th. Rel. Fields* **72** 1-16.
- [7] CSÖRGÖ,S. and MASON,D.M. (1985). Central limit theorems for sums of extreme values. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **98** 547-558.
- [8] CSÖRGÖ,S. and MASON,D.M. Intermediate sums and stochastic compactness of maxima. To appear.
- [9] DAVIS,R. and RESNICK,S. (1984). Tail estimates motivated by extreme value theory. *Ann. Statist.* **12** 1467-1487.
- [10] GNEDENKO,B.V. and KOLMOGOROV,A.N. (1954). Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables, Addison-Wesley, Reading, MA.

- [11] HAAN, L. DE (1970). On Regular Variation and its Application to the Weak Convergence of Sample Extremes. Tract No. 32, Mathematical Centre, Amsterdam.
- [12] HILL, B. M. (1975). A simple approach to inference about a tail of a distribution. *Ann. Statist.* **3** 1163-1174.
- [13] LO, G. S. (1989). A note on the asymptotic normality of sums of extreme values. *J. Statist. Plann. Inference* **22** 127-136.
- [14] MASON, D. M. and SHORACK, G. R. (1990). Necessary and sufficient conditions for the asymptotic normality of trimmed L -statistics. *J. Statist. Plann. Inference* **25** 111-139.
- [15] MASON, D. M. and SHORACK, G. R. Non-normality of a class of random variables. In: *Sums, Trimmed Sums and Extremes*. (M. Hahn, D. Mason and D. Weiner, Ed.) 393-426. Birkhäuser, Boston.
- [16] MASON, D. M. and SHORACK, G. R. Necessary and sufficient conditions for asymptotic normality of L -statistics. *Ann. Probab.* **20** (1992) 1779-1804.
- [17] ROSSBERG, H.-J. (1967). Über das asymptotische Verhalten der Rand- und Zentralglieder einer Variationsreihe (II). *Publ. Math. Debrecen* **14** 83-90.
- [18] SENETA, E. (1976). Regularly Varying Functions, Lecture Notes in Math, Vol. 508, Springer-Verlag, Berlin.
- [19] M. Görgö, S. Görgö, L. Horváth and D. M. Mason (1986). Weighted empirical and quantile processes. *Ann. Probab.* **14** 31-85.