

Reláció-mintaalgebrák függvényteljessége

DOKTORI (PHD) ÉRTEKEZÉS

Készítette:

Vármonostory Endre

József Attila Tudományegyetem
Algebra és Számelmélet Tanszék

Szeged

1997.

Tartalom

1. Bevezetés.....	2
2. Definíciók, fogalmak.....	4
3. Függvénytjeljességi tételek.....	11
4. A ρ -mintaalgebrák függvénytjeljessége.....	17
5. Permutáció-mintaalgebrák függvénytjeljessége.....	22
6. A ρ -mintaalgebrák függvénytjeljessége, ha ρ legalább háromváltozós reláció.....	39
7. A ρ -mintaalgebrák függvénytjeljessége, ha ρ centrális reláció.....	41
8. A $\leq$ -minta függvények függvénytjeljessége, ha $\leq$ részbenrendezés.....	49
9. A ρ -mintaalgebrák függvénytjeljessége, ha ρ affin reláció.....	58
10. A λ_T -mintaalgebrák függvénytjeljessége.....	61
Irodalom.....	65
Abstract.....	68

1. Bevezetés

Ebben az értekezésben olyan véges algebrákkal foglalkozunk, amelyek véges sok alpművelettel rendelkeznek. Műveleten mindig véges változós műveletet értünk. Algebráink függvényteliességét vizsgáljuk, részletesebben arra a kérdésre fogunk válaszolni, hogy bizonyos algebrák alpműveleteiből, alaphalmazuk elemeiből és a projekciókból szuperpozícióval előáll-e az alaphalmazukon értelmezett összes művelet. Művelet helyett gyakran függvényt mondunk. Közelebbről olyan algebrákat vizsgálunk, amelyeknek alpműveletei ρ -minta függvények. A ρ -minta függvény fogalmát Csákány Béla javasolta. Ő vetette fel az olyan véges algebrák függvényteliességének a vizsgálatát, amelyek véges sok alpművelettel rendelkeznek és az alpműveleteik ρ -minta függvények. Az ilyen algebrákat **reláció-mintaalgebráknak** vagy **ρ -mintaalgebráknak** nevezzük.

Értekezésem célja a véges ρ -mintaalgebrák függvényteliességének vizsgálata, ha ρ ekvivalencia-reláció, permutáció, centrális reláció, részbenrendezés, affin reláció és h-reguláris reláció. I. G. Rosenberg [14] bizonyította, ilyen típusúak az olyan ρ relációk, amelyekre a $\text{Pol } \rho$ alakú klónok maximális klónok. Ezeket a klónokat **Rosenberg-klónoknak** nevezzük.

A továbbiakban röviden ismertetjük a disszertáció egyes fejezeteit.

A második fejezetben a később felhasznált fogalmakat, definíciókat, jelöléseket írjuk le, valamint néhány, a későbbiekben gyakran alkalmazott kisebb megállapítást teszünk. Itt fogalmazzuk meg I. G. Rosenberg [13] minimális klónokra bizonyított tételének két következményét is ρ -mintaalgebrákra.

A harmadik fejezetben a dolgozatban felhasznált tételeket közöljük. Csákány Béla [3] homogén algebrára vonatkozó tételét mintaalgebrákra is leírjuk. Szendrei Ágnes [21] függvényteliességi tételét konzervatív algebrákra a 10. Lemmában fogalmazzuk meg, majd Szabó László [17] tételével a 10. Lemmát élesítjük. Szabó László [16] tranzitív algebrákra, Pálffy Péter Pál, Szabó László, Szendrei Ágnes [8] primitív automorfizmuscsoporttal rendelkező algebrákra bizo-

nyitott függvényteliességi eredményeit ρ -mintaalgebrákra illetve konzervatív algebrákra is kimondjuk.

A további fejezetekben a ρ -mintaalgebrák függvényteliességével foglalkozunk.

A negyedik fejezetben leírt 21. Tételnek és a 23. Tételnek annyiban van elvi jelentősége, hogy rámutatnak: bizonyos ρ relációk biztosítják, más ρ relációk pedig kizárják a ρ -mintaalgebrák függvényteliességét.

Az ötödik fejezetben permutáció-mintaalgebrák függvényteliességére vonatkozó tételeket bizonyítunk. Az $(A; f)$ véges permutáció-mintaalgebrák függvényteliességének teljes leírása a 28. Tétel és a 29. Tétel, ha f tetszőleges kétváltozós vagy tetszőleges többségi függvény. Az eddigi eredmények és próbálkozások alapján megfogalmazható a sejtés, hogy a 32. Tétel tetszőleges π permutációra is érvényben marad. A 34. Tételt [27]-ben publikáltuk, a bizonyítás egyes részeit egyszerűsítettük.

A hatodik fejezetben bizonyított 36. Tételt később felhasználjuk a 39. Tétel és a 64. Tétel bizonyítására.

A hetedik fejezetben a ρ -mintaalgebrák függvényteliességére vonatkozó tételeket bizonyítunk, ha ρ centrális reláció. Külön foglalkozunk az olyan ρ -mintaalgebrák függvényteliességével, ahol ρ minimális centrális reláció. A 46. Tételt [26]-ban publikáltuk, bizonyítását a 39. Tétel alkalmazásával egyszerűsítettük.

A nyolcadik fejezetben a $\leq$ -mintaalgebrák függvényteliességével foglalkozunk, ha $\leq$ lineáris rendezés vagy korlátos részbenrendezés. Az 52. Tétel a [28]-ban publikált 1. Tételnek és 2. Tételnek az általánosítása.

A kilencedik fejezetben olyan ρ -mintaalgebrák függvényteliességét vizsgáljuk, ahol ρ affín reláció.

A tizedik fejezetben leírt eredményeket még nem publikáltuk. A λ_T -mintaalgebrák függvényteliességét a 64. Tétel teljesen leírja.

2. Definíciók, fogalmak

Projekciónak, részletesebben **n -változós i -edik projekciónak** nevezzük az olyan, bármely halmazon értelmezhető műveletet, amely minden elem n -eshez annak i -edik komponensét rendeli hozzá. Akkor mondjuk, hogy az A halmazon értelmezett f n -változós művelet **lényegesen** függ az i -edik változójától, ha vannak olyan $a_1, \dots, a_n, b \in A$ elemek, amelyekre

$$f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \neq f(a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

Az f műveletet **lényegesnek** nevezzük, ha legalább két változójától lényegesen függ és szürjektív. Az A halmazon értelmezett f művelet **idempotens**, ha minden $a \in A$ -ra $f(a, \dots, a) = a$. Az A halmazon értelmezett f háromváltozós műveletet **többségi függvénynek** nevezzük, ha minden $x, y \in A$ -ra

$$f(x, x, y) = f(x, y, x) = f(y, x, x) = x.$$

Az A halmazon értelmezett f n -változós műveletet $n \geq 3$ és $1 \leq i \leq n$ esetén n -változós i -edik **szemiprojekciónak** nevezzük, ha nem csupa különböző $x_1, \dots, x_n \in A$ elemekre $f(x_1, \dots, x_n) = x_i$.

Az $f: A^k \rightarrow A$ függvényt **konzervatív függvénynek** nevezzük, ha $f(x_1, \dots, x_k) \in \{x_1, \dots, x_k\}$ minden $x_1, \dots, x_k \in A$ -ra.

R. W. Quackenbushtól ([10], 74. oldal) származik a következő definíció.

Az $(x_1, \dots, x_k), (y_1, \dots, y_k) \in A^k$ elem k -asokról akkor mondjuk, hogy **azonos mintájúak**, ha bármely $i, j \in \{1, \dots, k\}$ esetén $x_i = x_j$ akkor és csak akkor, ha $y_i = y_j$. Az $f: A^k \rightarrow A$ konzervatív függvényt **mintafüggvénynek** nevezzük, ha $f(x_1, \dots, x_k) = x_i$ ($1 \leq i \leq k$), ahol i úgy függ az $x_1, \dots, x_k$ -től, hogy $f(y_1, \dots, y_k) = y_i$ ugyanazzal az i -vel, ha $(y_1, \dots, y_k)$ és $(x_1, \dots, x_k)$ azonos mintájúak.

Legyen ρ n -változós reláció az A halmazon. Az $(x_1, \dots, x_k), (y_1, \dots, y_k) \in A^k$ elem k -asokról akkor mondjuk, hogy **azonos mintájúak ρ -ra nézve**, ha bármely $i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, k\}$ esetén $(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) \in \rho$ akkor és csak akkor, ha

$(y_1, \dots, y_k) \in \rho$. Az $f: A^k \rightarrow A$ konzervatív függvényt ρ -**mintafüggvénynek** nevezzük, ha $f(x_1, \dots, x_k) = x_i$, $(1 \leq i \leq k)$, ahol i úgy függ az $x_1, \dots, x_k$ -től, hogy $f(y_1, \dots, y_k) = y_i$ ugyanazzal az i -vel, ha $(y_1, \dots, y_k)$ és $(x_1, \dots, x_k)$ azonos mintájúak ρ -ra nézve.

Példa. (1) Legyen L egy háló és ρ a hálót definiáló részbenrendezés. Ha L lánc, akkor a hálóműveletek ρ -mintafüggvények, máskülönben nem ρ -mintafüggvények.

(2) A konzervatív függvények mind ρ -mintafüggvények valamely ρ szerint (I. Korec, szóbeli közlés). Ugyanis legyen $f: A^k \rightarrow A$ konzervatív függvény és $\rho = \{(a_1, \dots, a_k, a) \in A^{k+1} : a = a_i \Leftrightarrow f(a_1, \dots, a_k) = a_i\}$. Ekkor f ρ -mintafüggvény.

Konzervatív algebrának nevezünk egy algebrát, ha műveletei konzervatív függvények. Hasonlóan, az $(A; F)$ algebrát ρ -**mintaalgebrának** nevezzük, ha minden $f \in F$ ρ -mintafüggvény.

A ρ -mintafüggvények definíciójából könnyen adódnak a következő megállapítások:

(1) A mintafüggvények A -n ρ -mintafüggvények, ha ρ egyenlőség reláció A -n.

(2) Legyen ρ n -változós reláció A -n és $\bar{\rho} = A^n \setminus \rho$. Akkor ρ -mintafüggvények A -n $\bar{\rho}$ -mintafüggvények is.

(3) A $\rho \subseteq A^2$ reláció inverze legyen ρ^{-1} . Ekkor a ρ^{-1} -mintafüggvények valamint a $\rho \cup \rho^{-1}$ -mintafüggvények is ρ -mintafüggvények.

A $\rho \subseteq A^n$ relációnak a $\tau: A \rightarrow A$ bijektív leképezés **automorfizmusa**, ha bármely $(a_1, \dots, a_n) \in \rho$ esetén $(\tau(a_1), \dots, \tau(a_n)) \in \rho$.

(4) Ha a $\rho \subseteq A^n$ relációnak a τ automorfizmusa, akkor τ automorfizmusa bármely $(A; F)$ ρ -mintaalgebrának is.

(5) Bármely $\rho \subseteq A^n$ -re az A halmazon értelmezett projekciók ρ -mintafüggvények.

Legyen $O_A^{(n)}$ ($n \geq 1$) az A nemüres halmazon értelmezett n -változós műveletek halmaza és $O_A = \bigcup_{n \geq 1} O_A^{(n)}$. Ha $f \in O_A^{(n)}$, $g_1, \dots, g_n \in O_A^{(k)}$, akkor az $f, g_1, \dots, g_n$ műveletek **szuperpozícióját** jelölje $f(g_1, \dots, g_n)$, és legyen

$$f(g_1, \dots, g_n)(a_1, \dots, a_k) = f(g_1(a_1, \dots, a_k), \dots, g_n(a_1, \dots, a_k))$$

minden $a_1, \dots, a_k \in A$ -ra.

Ha az $F \subseteq O_A$ művelethalmaz tartalmazza a projekciókat és zárt a szuperpozícióra, akkor F -et **klónnak** nevezzük.

Az összes projekciók halmazát jelölje I_A . Az O_A, I_A halmazok klónok. Az I_A klónt **triviális klónnak** nevezzük. Klónok bármely halmazának a közös része szintén klón. Az A halmazon az összes klónok algebrai hálót alkotnak, amelyeknek a legkisebb eleme I_A , a legnagyobb eleme O_A . Ennek a hálónak az atomjait **minimális klónoknak**, duális atomjait **maximális klónoknak** nevezzük. Az A halmazon definiált műveletek bármely F halmazához létezik egy legkisebb klón, amely az F halmazt tartalmazza. Ezt a klónt nevezzük F által **generált klónnak**.

Az $A = (A; F)$ algebra esetén $T(A)$ -val jelöljük azt a klónt, amelyet F generál, $P(A)$ -val jelöljük azt a klónt, amelyet F és az összes konstansok (mint egyváltozós műveletek) generálnak és $\text{Aut}(A)$ -val az A automorfizmusainak a csoportját. A $T(A)$ klónt az A algebra **termfüggvényei klónjának**, míg a $P(A)$ klónt az A algebra **polinomfüggvényei klónjának** nevezzük. Ha $T(A)$ triviális klón, akkor az A algebrát **triviális algebrának** nevezzük. A triviális algebrák alapműveletei projekciók, amelyeket **triviális műveleteknek** is nevezünk.

Az A véges algebra **primál**, ha $T(A) = O_A$. Az A véges algebra **függvényteljes**, vagy **funkcionálisan teljes**, ha $P(A) = O_A$.

Ha az A algebra végtelen, akkor számossági megfontolások miatt $|P(A)| = |A| < |O_A|$, azaz a végtelen algebrák nem függvényteljesek.

Ha az A_1 és az A_2 algebrák alaphalmazai egyenlők, akkor $T(A_1) = T(A_2)$ esetén **termekvivalensek**, $P(A_1) = P(A_2)$ esetén **polinomekvivalensek**.

Az A_1 és A_2 algebrák **ekvivalensek**, ha az A_1 algebra izomorf egy olyan algebrával, amely termekvivalens az A_2 algebrával.

1. Lemma. Ha $\rho \subseteq A^n$ tetszőleges reláció, akkor az A halmazon értelmezett ρ -mintafüggvények klónt alkotnak.

Bizonyítás. Említettük a projekciók bármely ρ reláció esetén ρ -mintafüggvények. Belátjuk, hogy a ρ -mintafüggvények szuperpozíciója is ρ -mintafüggvény. Legyenek f k -változós és $g_1, \dots, g_k$ n -változós ρ -mintafüggvények az A halmazon. Legyen $h(x_1, \dots, x_n) = f(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_k(x_1, \dots, x_n))$. Megmutatjuk, hogy $h(x_1, \dots, x_n)$ is ρ -mintafüggvény A -n. Ha $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$, $(b_1, \dots, b_n) \in A^n$ azonos minták ρ -ra, akkor

$$g_1(a_1, \dots, a_n) = a_{i_1}, \dots, g_k(a_1, \dots, a_n) = a_{i_k} \quad (1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n)$$

esetén $g_1(b_1, \dots, b_n) = b_{i_1}, \dots, g_k(b_1, \dots, b_n) = b_{i_k}$ és fordítva. Ezért

$h(a_1, \dots, a_n) = a_{i_l}$ akkor és csak akkor, ha $h(b_1, \dots, b_n) = b_{i_l}$, ahol $1 \leq l \leq k$. Ezzel beláttuk, hogy $h(x_1, \dots, x_n)$ is ρ -mintafüggvény, azaz a ρ -mintafüggvények valóban klónt alkotnak.

Rosenberg [13] bebizonyította, hogy minden minimális klón generálható a következő típusú műveletek valamelyikével: nemtriviális egyváltozós; nemtriviális kétváltozós idempotens; háromváltozós többségi függvény; nemtriviális szemiprojekció; $x + y + z$, ahol $(A; +)$ Boole-csoport.

A nemtriviális egyváltozós műveletek és az $x + y + z$ művelet, ahol $(A; +)$ Boole-csoport, nem ρ -mintafüggvények. Másrészt bármely nemtriviális véges ρ -mintaalgebra termfüggvényei klónjának van minimális részklónja. Így megfogalmazhatjuk a következő két lemmát.

2. Lemma. Minden nemtriviális véges ρ -mintaalgebra termfüggvényei klónja tartalmaz vagy nemtriviális kétváltozós ρ -mintafüggvényt vagy olyan háromváltozós ρ -mintafüggvényt, amely többségi függvény vagy olyan nemtriviális ρ -mintafüggvényt, amely szemiprojekció.

3. Lemma. Adott ρ relációra minden $(A; F)$ nemtriviális véges ρ -mintaalgebra függvényteljes akkor és csak akkor, ha bármely olyan $(A; f)$ nemtriviális ρ -mintaalgebra függvényteljes, amelyre f az A -n értelmezett nemtriviális kétváltozós, vagy háromváltozós többségi függvény, vagy nemtriviális szemiprojekció.

Az $f \in O_A^{(k)}$ művelet **megőrzi** a $\rho \subseteq A^n$ relációt, ha valahányszor

$$(a_{i1}, \dots, a_{in}) \in \rho, (1 \leq i \leq k),$$

mindannyiszor $(f(a_{11}, \dots, a_{k1}), \dots, f(a_{1n}, \dots, a_{kn})) \in \rho$. Ekkor ρ részalgebrája az $(A; f)^n$ algebrának.

Ha $\rho \subseteq A^n$ esetén $\text{Pol}\rho$ -val jelöljük az O_A mindazon műveleteinek a halmazát, amelyek megőrzik a ρ -t, akkor $\text{Pol}\rho$ szintén klón.

4. Megjegyzés. Az A halmazon definiált nemtriviális szemiprojekciók nem őrzik meg az A halmazon értelmezett korlátos részberendezéseket [8].

A $\rho \subseteq A^n$ relációt az $(A; F)$ algebra **kompatibilis relációjának** nevezzük, ha $F \subseteq \text{Pol}\rho$.

Az $(A; F)$ algebra kétváltozós, kompatibilis, reflexív, szimmetrikus relációit az algebra **toleranciáinak** nevezzük. Az $(A; F)$ algebra ρ toleranciája triviális, ha ρ egyenlőség reláció vagy $\rho = A^2$. Ha az algebrának nincs triviális toleranciától különböző toleranciája, akkor az algebra **toleranciamentes**.

Legyen ε ekvivalencia-reláció az A halmazon és $\rho \subseteq A^n$. Ha valahányszor $(a_1, \dots, a_n) \in \rho$, $b_1, \dots, b_n \in A$, $(a_1, b_1) \in \varepsilon, \dots, (a_n, b_n) \in \varepsilon$, mindannyiszor $(b_1, \dots, b_n) \in \rho$, akkor azt mondjuk, hogy ε **kompatibilis** ρ -val.

Az A halmazon értelmezett ρ reláció **egyszerű**, ha nincs olyan nemtriviális ekvivalencia-reláció A -n, amely kompatibilis a ρ -val.

A $\rho \subseteq A^n$ reláció **teljesen reflexív**, ha

$$\rho = \{(a_1, \dots, a_n) : \exists i, j \ i \neq j, 1 \leq i, j \leq n, a_i = a_j\}.$$

A $\rho \subseteq A^n$ reláció **teljesen szimmetrikus**, ha $(a_1, \dots, a_n) \in \rho$ esetén $(a_{1\pi}, \dots, a_{n\pi}) \in \rho$, ahol π tetszőleges permutáció az $\{1, \dots, n\}$ halmazon.

Az A halmaz szimmetrikus csoportját S_A -val jelöljük. A $B \subseteq A$ a $G \leq S_A$ permutációcsoport blokkja, ha $B\pi = B$ vagy $B\pi \cap B = \emptyset$ minden $\pi \in G$ -ra. Az A halmazt és annak egyelemű részhalmazait **triviális blokkoknak** nevezzük.

Legyen $G \leq S_A$ permutációcsoport. Ha bármely $a, b \in A$ esetén van olyan $\pi \in G$ permutáció, amelyre $a\pi = b$, akkor a G permutációcsoportot **tranzitívnek** nevezzük. A G tranzitív permutációcsoport **primitív**, ha csak triviális blokkjai vannak.

Az A^n teljesen reflexív és teljesen szimmetrikus ρ részhalmazát **centrális reláció**nak nevezzük, ha $\rho \neq A^n$ és van olyan $c \in A$, amelyre $\{c\} \times A^{n-1} \subseteq \rho$. Az ilyen tulajdonságú c elemek halmazát a ρ centrális reláció **centrumának** nevezzük.

Legyen $3 \leq h \leq |A|$. A $T = \{\theta_1, \dots, \theta_m\}$ ($m \geq 1$) ekvivalencia-relációk halmazát A -n h -regulárisnak nevezzük, ha:

(1) minden θ_j -nek h osztálya van ($1 \leq j \leq m$),

(2) a θ_j relációk tetszőleges ε_j ekvivalencia-osztályaira $\bigcap_{i=1}^m \varepsilon_i \neq \emptyset$.

A T által meghatározott λ_T **reláció** az összes olyan $(a_1, \dots, a_h) \in A^h$ rendezett h -asokból áll, amelyekre minden j ($1 \leq j \leq m$) esetén az $a_1, \dots, a_h$ elemek közül legalább kettő θ_j -nek ugyanabban az ekvivalencia-osztályban van. A λ_T -relációt **h -reguláris reláció**nak nevezzük.

Ha a C algebra alapl műveletei egyváltozósak, akkor a C algebrát **unér algebrának** nevezzük.

Legyen $C = (C; F)$ unér algebra $m, n \geq 1$, $M = \{1, \dots, m\}$ és $N = \{1, \dots, n\}$. A $\sigma: M \rightarrow M$, $\mu: M \rightarrow N$ adott leképezésekre és $g_1, \dots, g_m \in I(C) \cap O_C^{(1)}$ -re a C^m halmazon definiáljunk egy $h_\mu^\sigma[g_1, \dots, g_m]$ n -változós műveletet a következőképpen:

$$h_\mu^\sigma[g_1, \dots, g_m](x_1, \dots, x_n) = (g_1(x_{1\mu}^{1\sigma}), \dots, g_m(x_{m\mu}^{m\sigma})), \text{ ahol } x_i = (x_i^1, \dots, x_i^m) \in C^m, \\ i = 1, \dots, n.$$

Azt az algebrát, amelynek alaphalmaza C^m és alapl műveletei az összes

$h_\mu^\sigma[g_1, \dots, g_m]$ alakú műveletek, a C algebra m -edik **mátrixhatványának** nevezük és $C^{[m]}$ -mel jelöljük.

A $\bar{G} \leq S_A$ és a $\bar{H} \leq S_n$ permutációcsoportok **koszorúszorzata** az összes $(a_1, \dots, a_n) \rightarrow (a_{1\pi_0}\pi_1, \dots, a_{n\pi_0}\pi_n)$ alakú A^n értelmezett permutációk csoportja, ahol $\pi_0 \in H, \pi_1, \dots, \pi_n \in G$.

Ha $(A; +)$ elemi Abel-csoport, akkor a $\rho = \{(x, y, z, t) \in A^4 : x - y + z = t\}$ relációt **affin reláció**nak nevezzük.

Az $(A; F)$ algebra **szemiaffin** az $(A; +)$ elemi Abel-csoportra nézve, ha a $\rho = \{(x, y, z, t) \in A^4 : x - y + z = t\}$ reláció kompatibilis relációja az $(A; F)$ algebrának.

Ha az $(A; \bar{F})$ szemiaffin algebrának $x - y + z$ termfüggvénye, akkor az $(A; F)$ algebra **affin** az $(A; F)$ Abel-csoportra.

Egy $(A; \bar{F})$ algebrát a $\bar{K}$ test feletti **affin tér**nek nevezzük, ha az $\bar{F}$ művelethalmaz egy $\bar{K}$ test feletti A tartóhalmazú vektortér összes idempotens termfüggvényeiből áll.

3. Függvényteljességi tételek

Kételemű halmazon értelmezett klónok hálójának duális atomjai Post teljességi tétele [9] szerint a következők: az egyőrző, a nullaőrző, a lineáris, az önduális és a monoton függvények osztálya. Egyik konstans sem őrzik meg a másikat, a konstansok nem önduálisak, ezért érvényes a következő:

5. Lemma. Egy kételemű algebra akkor és csak akkor függvényteljes, ha az algebra alpműveletei között van nem lineáris és nem monoton művelet.

Számos szerző vizsgálta a véges algebrak függvényteljességét. Az első nevezetes eredmény Rédei és Szele [11] tétele, amely szerint a véges testek függvényteljesek, ha alpműveleteknek az összeadást és a szorzást tekintjük. Az utóbbi tétel általánosításaként Kuznyecov [6] bebizonyította, hogy a véges gyűrűk közül pontosan a nemtriviális szorzású (olyan gyűrű, amelyben van két olyan elem, amelyek szorzata nemzérus), egyszerű gyűrűk a függvényteljesek. Maurer és Rhodes [1] belátták, hogy egy véges csoport akkor és csak akkor függvényteljes, ha nemkommutatív, egyszerű vagy triviális csoport.

Ślupecki [15] tétele szerint az A legalább háromelemű, véges algebra akkor és csak akkor függvényteljes, ha $P(A)$ tartalmazza az összes egyváltozós függvényt és legalább egy lényeges függvényt.

Véges halmazon értelmezett klónok hálójának duális atomjait Rosenberg [14] írta le. Az ő nevéhez fűződik a következő nevezetes tétel:

6. Tétel. A C függvényklón az A véges halmazon akkor és csak akkor maximális, ha $C = \text{Pol } \rho$, ahol ρ -ra a következő hat eset valamelyike teljesül:

- (1) ρ korlátos részbenrendezés A -n,
- (2) ρ négyváltozós reláció A -n, amelyhez van olyan $(A; +)$ elemi Abel-csoport, hogy bármely $a_1, a_2, a_3, a_4 \in A$ -ra $(a_1, a_2, a_3, a_4) \in A^4$ akkor és csak akkor, ha $a_1 + a_2 = a_3 + a_4$.



(3) ρ kétváltozós reláció A -n, amelyhez van az A halmaznak olyan p prím rendű, fixpont nélküli π permutációja, hogy bármely $a_1, a_2 \in A$ -ra $(a_1, a_2) \in \rho$ akkor és csak akkor, ha $a_2 = a_1 \pi$,

(4) ρ az A -nak nemtriviális ekvivalencia-relációja,

(5) ρ az A -nak centrális relációja,

(6) ρ az A -nak h -reguláris relációja valamely h -ra ($h \geq 3$).

7. Következmény. Az $(A; F)$ véges algebra akkor és csak akkor függvényteljes, ha F művelethalmazt nem tartalmazzák a 6. Tételben felsorolt Rosenberg-klónok közül az (1), (2), (4) és (6) típusúak és a legalább kétváltozós centrális relációhoz tartozó (5) típusú. Valóban a konstansokat, mint egyváltozós műveleteket a felsorolt Rosenberg-klónok tartalmazzák, míg a kimaradtak egyike sem tartalmazza mindegyik konstanst.

Szendrei Ágnes ([20], 436. oldal), ([21], 58. oldal) tételeit a következő tételben fogalmazzuk meg.

8. Tétel. Egy véges, egyszerű, szürjektív A algebrára a következők valamelyike mindig teljesül:

(1) A függvényteljes,

(2) A affin egy elemi Abel-csoportra,

(3) A izomorf egy olyan algebrával, amely termekvivalens az $(N; G)^{[m]}$ ($m \geq 1$) mátrix hatvánnyal, ahol N véges, de nem egyelemű, $G \leq S_N$ és $|N| > 2$ esetén a G permutációcsoport primitív,

(4) az A algebrának van kompatibilis, kétváltozós centrális relációja,

(5) az A algebrának van kompatibilis, korlátos részbenrendezése.

A konzervatív algebra szürjektív és nem izomorfak olyan algebrával, amely termekvivalens a (3) alatt leírt mátrix hatvánnyal. Ugyanis $m = 1$ esetén G nem identikus permutáció, $m \geq 2$ esetén G nem konzervatív.

9. Lemma. Ha az A legalább háromelemű, véges, konzervatív algebra és a termműveletei között van legalább egy lényeges művelet, akkor az A algebra egyetlen $(A; +)$ elemi Abel-csoportra sem szemiaffin.

Bizonyítás. Ha $(A; +)$ elemi Abel-csoport, akkor $|A| = p^m$, ahol m pozitív egész szám és p prim. Legyen az f n -változós konzervatív művelet termművelete az A algebrának. Tegyük fel, hogy a $\theta = \{(x, y, z, t) \in A^4 : x - y + z = t\}$ reláció kompatibilis relációja az A algebrának. Ekkor az f művelet megőrzi a θ relációt, ha az A -t azonosítjuk a $GF(p)$ feletti vektortérrel, akkor f a következő alakban írható: $f(x_1, \dots, x_n) = B_1 x_1 + \dots + B_n x_n + C$, ahol $B_1, \dots, B_n$ $m \times m$ -es és $x_1, \dots, x_n$ $m \times 1$ -es mátrixok $GF(p)$ felett [12]. Az $f(0, \dots, 0) = 0$ -ból következik $C = 0$. Ezért $B_i x_i = f(0, \dots, x_i, \dots, 0) \in \{0, x_i\}$ tetszőleges $x_i \in A$ -ra. Ha $B_i a = 0$ és $B_i b = b$ valamely $a, b \in A \setminus \{0\}$ -ra, akkor $B_i(a + b) \notin \{0, a + b\}$. Így $B_i x_i = 0$ minden $x_i \in A$ -ra vagy $B_i x_i = x_i$ minden $x_i \in A$ esetén. Ezért B_i zérómátrix vagy egységmátrix. Az f művelet függ minden változójától, ezért $f(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n$. Legyen $c, d \in A \setminus \{0\}$, $c \neq d$ ekkor $f(c, -d, 0, \dots, 0) = c - d \notin \{c, -d, 0\}$, ami ellentmondás.

Egy legalább háromelemű, véges, egyszerű konzervatív algebra termműveletei között mindig van legalább egy lényeges művelet. Ezt a tényt valamint a 8. Tételt és a 9. Lemmát felhasználva kapjuk:

10. Lemma. Legyen A legalább háromelemű, véges, egyszerű, konzervatív algebra. Az A algebra akkor és csak akkor függvénytjeljes, ha:

- (1) A -nak nincs kompatibilis, kétváltozós centrális relációja A -n és
- (2) A -nak nincs kompatibilis, korlátos részbenrendezése A -n.

Szabó László [17] megmutatta, hogy a 8. Tételben (4) illetve (5) helyett a következő (4'), ill. (5') írható:

(4') az A algebrának van olyan kompatibilis kétváltozós centrális relációja, amelyet az A algebra minden automorfizmusa megőriz,

(5') az A algebrának van olyan ρ kompatibilis, korlátos részbenrendezése, hogy az A algebra minden π automorfizmusára a $\rho^\pi = \{(x\pi, y\pi) : (x, y) \in \rho\}$ reláció vagy ρ vagy ρ^{-1} .

Mindezek figyelembevételével a 10. Lemmából a következő lemmát kapjuk:

11. Lemma. Az A legalább háromelemű, véges, egyszerű, konzervatív algebra akkor és csak akkor függvényteljes, ha

(1) A -nak nincs olyan kompatibilis, kétváltozós centrális relációja, amelyet az A minden automorfizmus megőriz, és

(2) A -nak nincs olyan ρ kompatibilis, korlátos részbenrendezése, hogy A minden π automorfizmusára a $\rho^\pi = \{(x\pi, y\pi) : (x, y) \in \rho\}$ reláció ρ vagy ρ^{-1} .

12. Megjegyzés. (a) Ha az A algebrának π automorfizmus, akkor az előző lemma (1) feltételéből következik, hogy nincs olyan ρ kompatibilis, kétváltozós centrális relációja az A algebrának, amelyre teljesül a következő:

ha π valamely ciklusában van centrumelem, akkor abban a ciklusában csak centrumelem van.

(b) Ha az A algebrának π automorfizmus, akkor az előző lemma (2) feltételéből következik, hogy nincs olyan ρ kompatibilis, korlátos részbenrendezése az A algebrának, amelyre teljesül a következő:

ha $0, 1 \in A$ a ρ korlátelemei, akkor azok π fixpontjai vagy π egy kettő hosszúságú ciklusát alkotják.

A. F. Pixley nevéhez fűződik a

$$t(x, y, z) = \begin{cases} z, & \text{ha } x = y, \\ x, & \text{ha } x \neq y \end{cases}$$

függvény, az ún. **ternáris diszkriminátor** vizsgálata. H. Werner [30] belátta, hogy az $(A; t)$ véges algebra függvényteljes.

Fried és A. F. Pixley [5] vizsgálta a

$$d(x, y, z) = \begin{cases} x, & \text{ha } x = y, \\ z, & \text{ha } x \neq y \end{cases}$$

ún. **duális diszkriminátort**. Belátták, hogy az $(A; d)$ legalább háromelemű, véges algebra függvényteljes.

A

$$g_n(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} x_1, & \text{ha } x_1, \dots, x_n \text{ páronként különbözők,} \\ x_n & \text{különben} \end{cases}$$

függvényt **közelprojekciónak** nevezzük. Csákány Béla [4] bebizonyította, hogy az $(A; g_n)$ legalább háromelemű, véges algebra függvényteljes.

Az $(A; F)$ algebrát **homogén algebrának** nevezzük, ha az S_A szimmetrikus csoport automorfizmuscsoportja az $(A; F)$ algebrának. Az $(A; t)$, $(A; d)$ és $(A; l_n)$ algebrák homogén algebrák. Csákány Béla [4] bebizonyította, hogy bármely nemtriviális, véges, homogén algebra függvényteljes hat kivételes esettől eltekintve. A mintaalgebrák homogén algebrák, ezért mintaalgebrákra érvényes a következő lemma.

13. Lemma. Bármely legalább háromelemű, véges, nemtriviális mintaalgebra függvényteljes.

Szabó László [16] bebizonyította, hogy azok a legalább háromelemű véges, egyszerű algebrák, amelyeknek az automorfizmuscsoportja tranzitív függvényteljesek, ha termfüggvényeik között van legalább egy nemtriviális konzervatív függvény.

E tétel következménye ρ -mintaalgebrákra a következő:

14. Lemma. Ha $\rho \subseteq A^n$ tetszőleges reláció és a ρ automorfizmuscsoportja tranzitív, akkor bármely legalább háromelemű, véges, egyszerű ρ -mintaalgebra függvényteljes.

Pálffy Péter Pál, Szabó László és Szendrei Ágnes [8] bizonyította a következő tételt:

15. Tétel. Bármely olyan nemtriviális, véges algebra, amelynek az automorfizmuscsoportja primitív, függvényteljes, ha nem ekvivalens a következő algebraikkal egyikével sem:

(1) A^s , ahol $s \geq 2$, A függvényteljes algebra és A automorfizmuscsoportja összetett rendű, primitív permutációcsoport. Ekkor $\text{Aut}(A^s)$ koszorúszorzata az $\text{Aut}(A)$ -nak és az S_s szimmetrikus csoportnak,

(2) affin tér egy véges test felett,

(3) $(A; x+1)$, ahol $(A; +)$ az 1 által generált prímszempot ciklikus csoport,

(4) $(A; x - y + z + 1)$, ahol $(A; +)$ az 1 által generált prímszempot ciklikus csoport.

(5) $(A; xy + xz + yz + 1)$, ahol $(A; +, \cdot)$ kételemű test.

A 15. Tételből konzervatív algebraikkra a következő lemmát kapjuk:

16. Lemma. Ha az A legalább háromelemű, véges, konzervatív algebra automorfizmuscsoportja primitív, akkor A vagy függvényteljes vagy ekvivalens egy C^s , ($s \geq 2$) algebraikkal, ahol a C algebra függvényteljes és automorfizmuscsoportja összetett rendű, primitív permutáció csoport (ebben az esetben C^s koszorúszorzata az $\text{Aut}(A)$ -nak és az S_s szimmetrikus csoportnak).

4. A ρ -mintaalgebrák függvényteljessége

17. Lemma. Ha az A véges halmazon értelmezett tetszőleges ρ reláció nem egyszerű, akkor bármely A ρ -mintaalgebra nem függvényteljes.

Bizonyítás. Ha a ρ reláció nem egyszerű, akkor van olyan ε nemtriviális ekvivalencia-reláció az A halmazon, amely kompatibilis ρ -val. Az A ρ -mintaalgebrának az ε nemtriviális kongruenciája. A 7. Következmény szerint az A ρ -mintaalgebra nem függvényteljes.

18. Lemma. Ha az A legalább kételemű, véges halmazon értelmezett tetszőleges ρ ekvivalencia-reláció nem egyenlőség reláció, akkor bármely A ρ -mintaalgebra nem függvényteljes.

Bizonyítás. Ha $\rho = A^2$, akkor bármely A ρ -mintaalgebra triviális algebra. Ha $\rho \neq A^2$ és nem egyenlőség reláció A -n, akkor könnyen belátható, hogy a ρ reláció kompatibilis ρ -val, azaz ρ nem egyszerű. A 17. Lemma szerint az A ρ -mintaalgebra nem függvényteljes.

19. Lemma. Az A legalább háromelemű, véges halmazon értelmezett tetszőleges egyváltozós ρ reláció esetén bármely A ρ -mintaalgebra nem függvényteljes.

Bizonyítás. Ha $\rho = A$, akkor a ρ -mintaalgebrák triviális algebrák. Ha $\rho \neq A$, akkor az az ε ekvivalencia-reláció, amelynek blokkjai ρ és $A \setminus \rho$ kompatibilis ρ -val. A ρ nem egyszerű, így a 17. Lemma szerint valóban igaz az állítás.

20. Megjegyzés. Ha $A = \{0, 1\}$, akkor a 19. Lemma nem igaz. Ugyanis legyen $\rho = \{0\}$ és a következő függvény:

$$f(x, y, z) = \begin{cases} z, & \text{ha } x \in \rho \text{ és } y \in \rho, \\ y & \text{különben} \end{cases}$$

az A halmazon. Az f függvény nem monoton és nem lineáris A -n. Az 5. Lemma szerint az $(A; f)$ algebra függvénytjeljes.

21. Tétel. Ha $3 \leq |A| < \infty$, $1 < n \leq |A|$, akkor az A halmazon megadható olyan n -változós ρ reláció, amelyre létezik nemtriviális ρ -mintaalgebra és bármely nemtriviális ρ -mintaalgebra függvénytjeljes.

Bizonyítás. Ha $1 < n \leq |A|$, akkor definiáljuk az

$$f(x_1, \dots, x_{n+1}) = \begin{cases} x_1, & \text{ha } (x_2, \dots, x_{n+1}) \in \rho, \\ x_{n+1} & \text{különben} \end{cases}$$

ρ -mintafüggvényt az A halmazon, ahol

$$\rho = \{(a_1, \dots, a_n) \in A^n : \exists i, j (i \neq j), a_i = a_j\}.$$

Ekkor az $(A; f)$ nemtriviális ρ -mintaalgebra. Ekkor a nemtriviális ρ -mintaalgebrák nemtriviális mintaalgebrák is. Ezért a 13. Lemmából következik, hogy bármely nemtriviális ρ -mintaalgebra függvénytjeljes.

22. Megjegyzés. Ha $A = \{0, 1\}$, akkor belátjuk, hogy a 21. Tétel nem igaz.

(a) Legyen $\rho = \{0\}$ és

$$f(x, y) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \in \rho, \\ y & \text{különben.} \end{cases}$$

Ekkor az $f(x, y)$ nemtriviális ρ -mintafüggvény és monoton az A halmazon, ezért a 5. Lemma szerint az $(A; f)$ algebra nem függvénytjeljes.

(b) Ha $\rho = \{1\}$, akkor az előző (a) pont alatti $(A; f)$ algebra nemtriviális $\bar{\rho}$ -szerinti mintaalgebra is, tehát nem függvénytjeljes.

(c) Legyen $A = \{0, 1\}$, $n = 2$. Ebben az esetben az A halmazon az üres és a teljes reláción kívül pontosan 14 kétváltozós reláció definiálható. Írjuk fel a következő függvényeket:

$$f_1(x, y) = \begin{cases} x, & \text{ha } (x, x) \in \rho, \\ y & \text{különben;} \end{cases} \quad f_2(x, y) = \begin{cases} x, & \text{ha } (x, y) \in \rho, \\ y & \text{különben;} \end{cases}$$

$$f_3(x, y, z) = \begin{cases} x, & \text{ha } x = y, \\ z & \text{különben.} \end{cases}$$

Töltsük ki a következő táblázatot:

	$\rho \subseteq A \times A$	ρ -mintaalgebra	alpművelet	állítás
1	$\{(0, 0)\}$	$(A; f_1)$ nemtriviális	monoton	nem függvényteljes
2	$\{(1, 1)\}$	$(A; f_1)$ nemtriviális	monoton	nem függvényteljes
3	$\{(0, 1)\}$	$(A; f_2)$ nemtriviális	monoton	nem függvényteljes
4	$\{(0, 0), (1, 1)\}$	$(A; f_3)$ nemtriviális	monoton	nem függvényteljes
5	$\{(0, 0), (0, 1)\}$	$(A; f_2)$ nemtriviális	monoton	nem függvényteljes
6	$\{(0, 1), (1, 1)\}$	$(A; f_2)$ nemtriviális	monoton	nem függvényteljes

A táblázatban felsorolt 6 kétváltozós relációból komplementer és inverz képzéssel mind a 14 kétváltozós relációt megkaphatjuk. Már említettük, a ρ -mintaalgebrák a ρ^{-1} és a $\bar{\rho} = A^2 \setminus \rho$ reláció szerint is mintaalgebrák. A táblázat szerint ebben az esetben sem igaz a 21. Tétel.

23. Tétel. Ha $3 \leq |A| < \infty$, $1 \leq n < |A|$, akkor az A halmazon megadható olyan n -változós ρ -reláció, amelyre létezik nemtriviális ρ -mintaalgebra és bármely ρ -mintaalgebra nem függvényteljes.

Bizonyítás. (a) Legyen $1 < n < |A|$, ε olyan ekvivalencia-reláció az A halmazon, amelynek egyetlen nem egyelemű blokkja van és az kételemű. Ha $\rho = \{(a_1, \dots, a_n) \in A^n : \exists i, j (i \neq j), (a_i, a_j) \in \varepsilon\}$, akkor definiáljuk az

$$f(x_1, \dots, x_{n+1}) = \begin{cases} x_1, & \text{ha } (x_2, \dots, x_{n+1}) \in \rho, \\ x_{n+1} & \text{különben} \end{cases}$$

ρ -mintafüggvényt az A halmazon. Az $(A; f)$ ρ -mintaalgebra nemtriviális. Az ε nemtriviális ekvivalencia-reláció kompatibilis ρ -val, azaz ρ nem egyszerű. Ekkor a 17. Lemma szerint bármely ρ -mintaalgebra nem függvénytjeljes.

(b) Ha $n = 1$, akkor legyen $\rho \subset A$, $\rho \neq \emptyset$, A és

$$g(x, y) = \begin{cases} x, & \text{ha } y \in \rho, \\ y & \text{különben.} \end{cases}$$

Az $(A; g)$ ρ -mintaalgebra nemtriviális. Ekkor a 19. Lemma szerint bármely ρ -mintaalgebra nem függvénytjeljes.

24. Megjegyzés. Ha $A = \{0, 1\}$, akkor bármely nemüres vagy nem teljes legfeljebb kétváltozós A -n értelmezett ρ relációhoz mindig megadható olyan ρ -mintaalgebra, amely függvénytjeljes.

Bizonyítás. (1) Ha $\rho = \{0\}$, akkor a 20. Megjegyzésben definiált algebra függvénytjeljes, amely $\rho = \{1\}$ szerint mintaalgebra is.

(2) Ha a ρ tetszőleges kétváltozós reláció nemüres reláció és nem teljes reláció az A halmazon, akkor van olyan ρ -mintaalgebra, amely függvénytjeljes.

$$\text{Legyen } f_1(x, y, z) = \begin{cases} z, & \text{ha } (x, y) \in \rho, \\ y & \text{különben;} \end{cases} \quad f_2(x, y, z) = \begin{cases} y, & \text{ha } (x, y) \in \rho, \\ z & \text{különben;} \end{cases},$$

$$f_3(x, y, z) = \begin{cases} y, & \text{ha } (x, x) \in \rho \text{ és } (x, y) \in \rho, \\ z & \text{különben;} \end{cases}$$

$$f_4(x, y, z) = \begin{cases} x, & \text{ha } (x, y) \in \rho, \\ z & \text{különben.} \end{cases}$$

Tekintsük a következő táblázatot:

	$\rho \subseteq A \times A$	ρ -mintaalgebra	állítás
1	$\{(0, 0)\}$	$(A; f_1)$ nemtriviális	függvénytjeljes
2	$\{(1, 1)\}$	$(A; f_1)$ nemtriviális	függvénytjeljes
3	$\{(0, 1)\}$	$(A; f_2)$ nemtriviális	függvénytjeljes
4	$\{(0, 0), (1, 1)\}$	$(A; f_1)$ nemtriviális	függvénytjeljes
5	$\{(0, 0), (0, 1)\}$	$(A; f_3)$ nemtriviális	függvénytjeljes
6	$\{(0, 1), (1, 1)\}$	$(A; f_4)$ nemtriviális	függvénytjeljes

A táblázatban felsorolt relációkból az üres és a teljes reláció kivételével az összes kétváltozós reláció komplementer és inverz képzéssel megkapható. Az f_1, f_2, f_3, f_4 függvények A -n nem lineárisak és nem monotonok. Így a táblázatban felsorolt algebrák valóban függvénytjeljesek, azaz igaz az állítás.

5. Permutáció-mintaalgebrák függvényteljessége

A π permutációt **ciklikus permutációnak** nevezzük az A halmazon, ha π egyetlen nem egy hosszúságú ciklusból áll. Az A π -mintaalgebrát **permutáció-mintaalgebrának** nevezzük, ha π az A halmazon egy permutáció.

25. Lemma. Ha az A véges halmazon értelmezett π permutáció páronként idegen ciklusokra való felbontásában legalább egy 4 hosszúságú ciklus van, akkor egyetlen A $\pi \circ \pi^{-1}$ -mintaalgebra sem függvényteljes.

Bizonyítás. A π permutáció páronként idegen ciklusaira való felbontásában legyen (a_1, a_2, a_3, a_4) egy 4 hosszúságú ciklus. Legyen az A halmazon ε az a nemtriviális ekvivalencia-reláció, amelynek egyetlen nem egyelemű blokkja $\{a_1, a_3\}$. Könnyen ellenőrizhetjük, hogy ε kompatibilis $\rho = \pi \circ \pi^{-1}$ -gyel. A ρ reláció nem egyszerű, ezért a 17. Lemma szerint igaz az állítás.

26. Lemma. Ha $3 \leq |A| < \infty$, $|A| = p$ (p prim) és π ciklikus permutáció az A halmazon, akkor bármely $(A; f)$ nemtriviális π -mintaalgebra függvényteljes.

Bizonyítás. Könnyű belátni, ha π ciklikus permutáció A -n és $|A| = p$ (p prim), akkor π automorfizmuscsoportja primitív. Ekkor bármely $(A; f)$ nemtriviális π -mintaalgebrának az automorfizmuscsoportja is primitív és nem ekvivalens függvényteljes algebrák nemtriviális direkt hatványával. A 16. Lemmát felhasználva az állítást kapjuk.

27. Lemma. Legyen $3 \leq |A| < \infty$ és π olyan permutáció az A halmazon, amelynek páronként idegen ciklusokra való felbontásában minden ciklus ugyanolyan hosszúságú, akkor bármely A egyszerű π -mintaalgebra függvényteljes.

Megjegyzés. Ha $|A| = 2$, akkor a 22. Megjegyzéshez tartozó táblázat 4. sorában olyan algebrát találunk, amely $\pi = (0, 1)$ esetén π -mintaalgebra is. Ez az algebra egyszerű, de nem függvényteljes.

Bizonyítás. Könnyen belátható, hogy a π automorfizmuscsoportja tranzitív. A 14. Lemmát alkalmazva a 27. Lemmát kapjuk.

Definiáljuk a következő π -mintafüggvényeket, ha π tetszőleges ciklus permutáció az A halmazon:

$$f_1(x, y) = \begin{cases} x, & \text{ha } (x, y) \in \pi, \\ y & \text{különben;} \end{cases} \quad f_2(x, y) = \begin{cases} x, & \text{ha } (y, x) \in \pi, \\ y & \text{különben;} \end{cases}$$

$$f_3(x, y) = \begin{cases} x, & \text{ha } (x, y) \in \pi \text{ vagy } (y, x) \in \pi, \\ y & \text{különben.} \end{cases}$$

Ha $f_4(x, y) = f_3(x, y)$, akkor érvényes a következő tétel.

28. Tétel. Legyen $3 \leq |A| < \infty$, π tetszőleges permutáció és f tetszőleges, nemtriviális, kétváltozós π -mintafüggvény az A halmazon. Az $(A; f)$ π -mintaalgebra akkor és csak akkor függvénytjeljes, ha π ciklus permutáció és $|A| = 4$ esetén $f \neq f_3, f_4$.

Megjegyzés. Ha $|A| = 2$ és π permutáció A -n, akkor a kétváltozós π -mintafüggvények projekciók.

Bizonyítás. Legyen $3 \leq |A| < \infty$ és π ciklikus permutáció az A halmazon. Ha $|A| = 3$, akkor az f_3 és f_4 π -mintafüggvények projekciók. Ha $|A| = 4$, akkor az $(A; f_3)$, $(A; f_4)$ algebra $\pi \cup \pi^{-1}$ -mintaalgebrák, amelyek a 25. Lemma szerint nem függvénytjeljesek.

(1) Belátjuk, ha π ciklikus permutáció az A halmazon és $|A| = 4$ esetén $f \neq f_3, f_4$, akkor az $(A; f)$ π -mintaalgebra függvénytjeljes. Először az $(A; f_i)$ ($i = 1, 2, 3$) nemtriviális π -mintaalgebrák függvénytjeljességét vizsgáljuk, ha $3 \leq |A| < \infty$. Legyen τ tetszőleges nemtriviális ekvivalencia-reláció az A halmazon. Ekkor vannak olyan $a, b, c \in A$, $a \neq b$ elemek, amelyekre $(a, b) \in \tau$, $(a, c) \notin \tau$ és $(a, c) \in \pi$. Írjuk fel a következő mátrixokat:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{cc} a & b \\ c & c \\ \hline a & c \end{array} & \begin{array}{cc} c & c \\ a & b \\ \hline c & b \end{array} & \begin{array}{cc} a_3 & a \\ a_4 & a_4 \\ \hline a_3 & a_4 \end{array} \end{array}$$

Az első mátrixból kapjuk, hogy az f_1 nem őrzi meg a τ relációt. A második mátrixból kapjuk, hogy f_2 sem őrzi meg a τ relációt. Ekkor a 27. Lemma szerint az $(A; f_1)$ és $(A; f_2)$ algebrak függvényteljesek.

Legyen $5 \leq |A| < \infty$ és $\pi = (a, c, a_3, a_4, \dots, a_n)$ ciklikus permutáció az A halmazon. Vizsgáljuk meg ebben az esetben az $(A; f_3)$ algebra függvényteljességét. Ha $a_4 = b$ vagy $a_5 = b$ vagy ... vagy $a_n = b$, akkor az első mátrixot, ha $a_3 = b$, $(a_3, a) \in \tau$, $(a_3, a_4) \notin \tau$, akkor a harmadik mátrixot alkalmazzuk. Tehát az $(A; f_3)$ algebra egyszerű. Szintén a 27. Lemma szerint az $(A; f_3)$ algebra függvényteljes.

Az f_1, f_2, f_3 π -mintafüggvényekből a változók felcserélésével az összes kétváltozós nemtriviális π -mintafüggvény megkapható, ha π ciklikus permutáció az A halmazon. Ezzel beláttuk, hogy az $(A; f)$ π -mintaalgebra függvényteljes, ha π ciklikus permutáció és $|A| = 4$ esetén $f \neq f_3, f_4$.

(2) Végül belátjuk, hogy az $(A; f)$ π -mintaalgebra nem függvényteljes, ha π nem ciklikus permutáció az A halmazon. Ha π identikus permutáció, akkor a kétváltozós π -mintafüggvények projekciók. Ha π nem identikus és nem ciklikus permutáció A -n, akkor legyen σ olyan nemtriviális ekvivalencia-reláció az A halmazon, amelynek egyik blokkja a π valamely legalább kettő hosszúságú ciklusának az elemei, a másik blokkja az A többi elemei.

Belátjuk, hogy bármely kétváltozós f π -mintafüggvény megőrzi a σ relációt A halmazon. Ha $a, b, c, d \in A$, $a \neq b$, $(a, b), (c, d) \in \sigma$ és $(a, c) \notin \sigma$, akkor $(b, d) \notin \sigma$ és az $(a, c), (b, d)$ minták π -re nézve azonos minták. Ha $a, b, c, d \in A$, $a \neq b$, $(a, b), (c, d) \in \sigma$ és $(a, c) \in \sigma$, akkor $(b, d) \in \sigma$. Mindkét esetben $(f(a, c), f(b, d)) \in \sigma$. Tehát f megőrzi a σ nemtriviális ekvivalencia-relációt az A halmazon, azaz az $(A; f)$ algebra nem függvényteljes.

29. Tétel. Ha $3 \leq |A| < \infty$, π tetszőleges permutáció az A halmazon és f olyan π -mintafüggvény, amely többségi függvény, akkor az $(A; f)$ algebra függvénytjeljes.

Megjegyzés. Az $A = \{0, 1\}$ halmazon egyetlen többségi függvény van, amely monoton. Tehát ebben az esetben a tétel nem igaz.

Bizonyítás. (1) Ha π identikus permutáció A -n, akkor a 13. Lemma szerint igaz a tétel.

(2) Ha $|A| = 3$ és π ciklikus permutáció A -n, akkor a 26. Lemma szerint bármely nemtriviális π -mintaalgebra függvénytjeljes, azaz igaz a tétel.

(3) Ha π nem identikus permutáció és nem három hosszúságú ciklikus permutáció A -n, akkor vannak olyan $a, b \in A$, $a \neq b$ elemek, amelyekre $(a, b), (b, a), (a, a) \notin \pi$. Az $(a, a, b), (a, b, a)$ és (b, a, a) minták π -re nézve azonos minták. Ebből következik, hogy ebben az esetben egyetlen π -mintafüggvény sem többségi függvény.

Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

30. Tétel. Ha $3 \leq |A| < \infty$ és π tetszőleges permutáció az A halmazon, akkor van olyan f nemtriviális π -mintafüggvény, amely szemiprojekció és amelyre az $(A; f)$ algebra függvénytjeljes.

Megjegyzés. Ha $|A| = 2$, akkor a szemiprojekciók A -n projekciók.

Bizonyítás. (a) Ha π identikus permutáció A -n, akkor a 13. Lemmát alkalmazva, ha $|A| = p$ (p prim) és π ciklikus permutáció A -n, akkor a 26. Lemmát felhasználva könnyen megadhatunk olyan f függvényt, amely a tételben leírt tulajdonságokkal rendelkezik.

(b) Ha $|A| = n$ (n összetett szám) és π ciklikus permutáció az A halmazon, akkor az $f_n(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} x_1, & \text{ha } (x_1, x_2), (x_2, x_3), \dots, (x_{n-1}, x_n) \in \pi, \\ x_n & \text{különben} \end{cases}$

függvény nemtriviális π -mintafüggvény, amely szemiprojekció az A -n. A π automorfizmuscsoporthja tranzitív, ezért az $(A; f_n)$ algebrának az automorfizmus-

csoportja is tranzitív. Az $(A; f_n)$ algebra függvényteljességének az igazolásához a 14. Lemma szerint elegendő belátni, hogy $(A; f_n)$ egyszerű. Legyen ρ tetszőleges nemtriviális ekvivalencia-reláció az A halmazon. Ekkor könnyen ellenőrizhető, hogy van olyan $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$ minta, amelyre $f(a_1, \dots, a_n) = a_1$, $(a_1, a_n) \notin \rho$. A ρ nemtriviális ekvivalencia-reláció, ezért van olyan i, j , amelyekre $1 \leq i < j \leq n$ és $(a_i, a_j) \in \rho$. A következő mátrix felhasználásával kapjuk, hogy f_n nem tiszteli a ρ relációt:

$$\begin{array}{cc} a_1 & a_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_i & a_i \\ \vdots & \vdots \\ a_j & a_i \\ \vdots & \vdots \\ a_n & a_n \\ \hline a_1 & a_n \end{array}$$

Az $(A; f_n)$ algebra valóban egyszerű, azaz függvényteljes.

(c) Legyen π fixpont nélküli nem ciklikus permutáció az A halmazon. Ha k számú páronként idegen ciklus szorzata a π , akkor legyen

$$f(x_1, \dots, x_{2k}) = \begin{cases} x_1, & \text{ha } B \text{ igaz,} \\ x_{2k} & \text{különben,} \end{cases}$$

ahol

$$B = \left(\bigwedge_{i=1}^k ((x_{2i-1}, x_{2i}) \in \pi) \right) \wedge \left(\bigwedge_{\substack{i=1 \\ i \neq 1,2}}^{2k} ((x_1, x_i) \notin \pi) \right) \wedge \left(\bigwedge_{\substack{i=1 \\ i \neq 1,2}}^{2k} ((x_2, x_i) \notin \pi) \right) \wedge \left(\bigwedge_{\substack{i=1 \\ i \neq 3,4}}^{2k} ((x_3, x_i) \notin \pi) \right) \wedge \\ \wedge \left(\bigwedge_{\substack{i=1 \\ i \neq 3,4}}^{2k} ((x_4, x_i) \notin \pi) \right) \wedge \dots \wedge \left(\bigwedge_{\substack{i=1 \\ i \neq 2k-1,2k}}^{2k} ((x_{2k-1}, x_i) \notin \pi) \right) \wedge \left(\bigwedge_{\substack{i=1 \\ i \neq 2k-1,2k}}^{2k} ((x_{2k}, x_i) \notin \pi) \right).$$

Könnyen belátható, hogy az így definiált f függvény nemtriviális π -mintafüggvény, amely szemiprojekció A -n.

(1) Legyen ρ tetszőleges nemtriviális ekvivalencia-reláció az A halmazon. Ekkor vannak olyan $a_1, \dots, a_n, b \in A$ elemek, amelyekre $a_1 \neq b$, $(a_1, b) \in \rho$,

$f(a_1, \dots, a_{2k}) = a_1, (a_1, a_{2k}) \notin \rho$, A következő mátrix felhasználásával közvetlenül kapjuk, hogy az f függvény nem örzi meg a ρ relációt:

$$\begin{array}{cc} a_1 & b \\ a_2 & a_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{2k} & a_{2k} \\ \hline a_1 & a_{2k} \end{array}$$

(2) Legyen τ tetszőleges kétváltozós centrális reláció az A halmazon. Vannak olyan $a_1, \dots, a_{2k-1}, b, c \in A$ elemek, amelyekre $(a_1, b) \notin \tau, c$ a τ centrumeleme és $f(a_1, \dots, a_{2k-1}, c) = a_1$. Írjuk fel a következő mátrixot:

$$\begin{array}{cc} a_1 & c \\ \vdots & \vdots \\ a_{2k-1} & c \\ \hline c & b \\ a_1 & b \end{array}$$

A mátrixból kapjuk, hogy az f függvény nem örzi meg a τ relációt. A 10. Lemma és a 4. Megjegyzés szerint az $(A; f)$ algebra függvényteljes.

(d) Legyen olyan π permutáció az A halmazon, amely nem identikus és van fixpontja. Először tegyük fel, hogy a π permutációnak pontosan egy fixpontja van.

$$\text{Az } f(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} x_1, & \text{ha } (((x_1, x_1) \in \pi) \wedge ((x_2, x_2) \notin \pi) \wedge ((x_2, x_3) \in \pi)) \vee \\ & \vee (((x_1, x_1) \notin \pi) \wedge ((x_1, x_2) \in \pi) \wedge ((x_3, x_3) \in \pi)), \\ x_3 & \text{különben} \end{cases}$$

függvény nemtriviális π -mintafüggvény, amely szemiprojekció az A halmazon.

Legyen ρ tetszőleges nemtriviális ekvivalencia-reláció az A halmazon. Könnyen ellenőrizhetjük, hogy vannak olyan $a_1, a_2, a_3, b \in A$ elemek, amelyekre $a_1 \neq b, (a_1, b) \in \rho, (a_1, a_3) \notin \rho, f(a_1, a_2, a_3) = a_1$. A következő mátrixból kapjuk, hogy az f függvény nem örzi meg a ρ relációt:

$$\begin{array}{cc} a_1 & b \\ a_2 & a_2 \\ a_3 & a_3 \\ \hline a_1 & a_3. \end{array}$$

Tehát az $(A; f)$ algebra egyszerű. A 4. Megjegyzés szerint nincs kompatibilis korlátos részbenrendezése A -n, ezért az $(A; f)$ algebra függvényteljességének az igazolásához a 11. Lemma szerint elegendő belátni, hogy az f függvény nem őrzi meg a 12. Megjegyzés (a) pontja alatt leírt kétváltozós centrális relációkat. Legyen τ egy ilyen kétváltozós centrális reláció az A halmazon. Ekkor vannak olyan $a_1, a_2, a_3, b \in A$ elemek, amelyekre $f(a_1, a_2, a_3) = a_1, a_3$ τ centrumeleme és $(a_1, b) \notin \tau$. A következő mátrixból közvetlenül kapjuk, hogy az f függvény nem őrzi meg a τ relációt:

$$\begin{array}{cc} a_1 & c \\ a_2 & c \\ a_3 & b \\ \hline a_1 & b. \end{array}$$

Ezzel beláttuk, hogy az $(A; f)$ algebra valóban függvényteljes.

(c) Legyen π olyan permutáció az A halmazon, amelyek legalább két fix-pontja van, de nem identikus permutáció. Legyen

$$\begin{aligned} B &= ((x_1, x_1) \in \pi) \wedge ((x_2, x_2) \in \pi) \wedge ((x_3, x_4) \in \pi) \wedge ((x_1, x_2) \notin \pi) \wedge ((x_3, x_3) \notin \pi), \\ C &= ((x_1, x_1) \in \pi) \wedge ((x_2, x_3) \in \pi) \wedge ((x_4, x_4) \in \pi) \wedge ((x_1, x_4) \notin \pi) \wedge ((x_2, x_2) \notin \pi), \\ D &= ((x_1, x_2) \in \pi) \wedge ((x_3, x_3) \in \pi) \wedge ((x_4, x_4) \in \pi) \wedge ((x_1, x_1) \notin \pi) \wedge ((x_3, x_4) \notin \pi), \end{aligned}$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{cases} x_1, & \text{ha } B \vee C \vee D, \\ x_4 & \text{különben.} \end{cases}$$

Az f függvény nemtriviális π -mintafüggvény, amely szemiprojekció az A halmazon.

Legyen ρ tetszőleges nemtriviális ekvivalencia-reláció az A halmazon. Ekkor könnyen belátható, hogy vannak olyan $a_1, a_2, a_3, b \in A$ elemek, amelyekre



$a_1 \neq b$, $(a_1, b) \in \rho$, $(a_1, a_4) \notin \rho$ és $f(a_1, a_2, a_3, a_4) = a_1$. A következő mátrixból közvetlenül kapjuk, hogy az f nem őrzi meg a ρ relációt:

$$\begin{array}{cc} a_1 & b \\ a_2 & a_2 \\ a_3 & a_3 \\ \hline a_4 & a_4 \\ a_1 & a_4 \end{array}$$

Belátjuk, hogy az f függvény nem őrzi meg a kétváltozós centrális relációkat sem. Elegendő a 11. Lemma szerint és a 12. Megjegyzés (a) pontja alatt leírt kétváltozós centrális relációkat vizsgálni. Legyen τ egy ilyen kétváltozós centrális reláció az A halmazon. Belátjuk, hogy f nem őrzi meg a τ -t. Könnyen ellenőrizhetjük, hogy vannak olyan $a_1, a_2, a_3, a_4, b \in A$ elemek, amelyekre a_4 centrumeleme a τ -nek, $(a_1, b) \notin \tau$ és $f(a_1, a_2, a_3, a_4) = a_1$. A következő mátrixból kapjuk, hogy f nem őrzi meg a τ relációt:

$$\begin{array}{cc} a_1 & c \\ a_2 & c \\ a_3 & c \\ \hline a_4 & b \\ a_1 & b. \end{array}$$

A 4. Megjegyzés felhasználva kapjuk, hogy az $(A; f)$ algebra függvényteljes.

31. Tétel. Ha $3 \leq |A| < \infty$ és π olyan tetszőleges permutáció az A halmazon, amely nem identikus vagy $|A| = p$ (p prím) esetén nem ciklikus, akkor van olyan f nemtriviális π -mintafüggvény, amely szemiprojekció és amelyre az $(A; f)$ algebra nem függvényteljes.

Bizonyítás. (a) Legyen $|A| = pk$, ahol p prím és $k > 1$. Az

$$f_{p+1}(x_1, x_2, \dots, x_{p+1}) = \begin{cases} x_1, & \text{ha } (x_1, x_2), (x_2, x_3), \dots, (x_p, x_{p+1}) \in \pi, \\ x_{p+1} & \text{különben} \end{cases}$$

függvény nemtriviális π -mintafüggvény, amely szemiprojekció. Legyen

$$A = \{a_1, \dots, a_p, \dots, a_{2p}, \dots, a_{kp}\}, (a_{kp}, a_1), (a_i, a_{i+1}) \in \pi \quad (i=1, \dots, kp-1) \text{ és}$$

ρ olyan nemtriviális ekvivalencia-reláció az A halmazon, amelynek blokkjai $\{a_1, a_{p+1}, \dots, a_{(k-1)p+1}\}, \{a_2, a_{p+2}, \dots, a_{(k-1)p+2}\}, \dots, \{a_p, a_{2p}, \dots, a_{kp}\}$. Könnyen ellenőrizhetjük, hogy az f_{p+1} függvény megőrzi a ρ relációt az A halmazon. Az $(A; f_{p+1})$ algebra nem egyszerű. A 7. Következmény szerint nem függvényteljes.

(b) Legyen π fixpont nélküli nem ciklikus permutáció az A halmazon és tegyük fel π felbomlik k számú páronként idegen ciklus szorzatára. A 30. Tétel bizonyításának a (c) pontjában definiált $f(x_1, \dots, x_{2k})$ függvény definíciójába az x_{2k} függvényérték helyett x_2 -t írjunk. Ekkor olyan $g(x_1, \dots, x_{2k})$ nemtriviális π -mintafüggvényt kapunk, amely szemiprojekció. Legyen ρ az a nemtriviális ekvivalencia-reláció az A halmazon, amelynek egyes blokkjait pontosan a π permutáció páronként idegen ciklusaiban szereplő elemek alkotják. Könnyen ellenőrizhetjük, hogy a $g(x_1, \dots, x_{2k})$ függvény tiszteli a ρ relációt, azaz az $(A; g)$ algebra nem függvényteljes.

(c) Legyen a π olyan permutáció az A halmazon, amelynek pontosan egy fixpontja van. Legyen

$$g(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} x_1, & \text{ha } ((x_2, x_2) \in \pi) \wedge ((x_1, x_1) \notin \pi) \wedge ((x_1, x_3) \in \pi), \\ x_3 & \text{különben.} \end{cases}$$

Könnyen igazolható, hogy a g függvény megőrzi azt a nemtriviális ekvivalencia-relációt A halmazon, amelynek egyes blokkjait pontosan a π permutáció páronként idegen ciklusaiban szereplő elemek alkotják. Az $(A; g)$ algebra sem függvényteljes.

Legyen a π olyan nem identikus permutáció az A halmazon, amelynek legalább két fixpontja van. Legyen

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{cases} x_1, & \text{ha } B \text{ igaz,} \\ x_4 & \text{különben,} \end{cases}$$

ahol

$$B = ((x_1, x_4) \in \pi) \wedge ((x_2, x_2) \in \pi) \wedge ((x_3, x_3) \in \pi) \wedge ((x_1, x_1) \notin \pi) \wedge ((x_2, x_3) \notin \pi).$$

Könnyen ellenőrizhetjük, hogy a $g(x_1, x_2, x_3, x_4)$ nemtriviális π -mintafüggvény, amely szemiprojekció. A $g(x_1, x_2, x_3, x_4)$ függvény megőrzi azt a nemtriviális ekvivalencia-relációt az A halmazon, amelynek egyes blokkjait pontosan a π permutáció páronként idegen ciklusaiban szereplő elemek alkotják. Az $(A; g)$ algebra sem függvénytjeljes.

32. Tétel. Legyen $3 \leq |A| < \infty$ és π fixpont nélküli permutáció az A halmazon. Az A egyszerű π -mintaalgebra függvénytjeljes akkor és csak akkor, ha az A algebrának nincs olyan kompatibilis, kétváltozós centrális relációja, amelyet A minden automorfizmusa megőriz.

Bizonyítás. (1) Ha az A egyszerű π -mintaalgebra függvénytjeljes, akkor a 10. Lemma szerint nincs kompatibilis kétváltozós centrális relációja.

(2) Belátjuk, ha az A egyszerű π -mintaalgebrának nincs olyan kompatibilis, kétváltozós centrális relációja, amelyet az A minden automorfizmusa megőriz, akkor az A algebra függvénytjeljes. Az A algebrának a π fixpont nélküli automorfizmusa, ezért a 11. Lemmát és a 12. Megjegyzés (b) pontját felhasználva elegendő megmutatni, hogy az A egyszerű π -mintaalgebrának nincs olyan kompatibilis korlátos részbenrendezése, amelynek a korlátelemei a π egy kettő hosszúságú ciklusában vannak. A 29. Tételből illetve a 4. Megjegyzésből következik, hogy mindazon π -mintafüggvények, amelyek többségi függvények vagy olyan nemtriviális π -mintafüggvények, amelyek szemiprojekciók, a korlátos parciális rendezéseket nem őrzik meg. Megmutatjuk, hogy a nemtriviális kétváltozós π -mintafüggvények nem őrzik meg azokat a korlátos részbenrendezéseket, amelyeknek a korlátelemei a π egy kettő hosszúságú ciklusában vannak. Az összes nemtriviális kétváltozós π -mintafüggvények a következők:

$$f_1(x, y) = \begin{cases} x, & \text{ha } (x, y) \in \pi, \\ y & \text{különben;} \end{cases}$$

$$f_2(x, y) = \begin{cases} y, & \text{ha } (y, x) \in \pi, \\ x & \text{különben;} \end{cases}$$

$$f_3(x, y) = \begin{cases} x, & \text{ha } (x, y) \notin \pi, \\ y & \text{különben;} \end{cases}$$

$$f_4(x, y) = \begin{cases} y, & \text{ha } (y, x) \notin \pi, \\ x & \text{különben;} \end{cases}$$

$$f_5(x, y) = \begin{cases} x, & \text{ha } (x, y) \in \pi \text{ és } (y, x) \in \pi, \\ y & \text{különben;} \end{cases} \quad f_6(x, y) = \begin{cases} y, & \text{ha } (x, y) \in \pi \text{ és } (y, x) \in \pi, \\ x & \text{különben;} \end{cases}$$

$$f_7(x, y) = \begin{cases} x, & \text{ha } (x, y) \in \pi \text{ és } (y, x) \notin \pi, \\ y & \text{különben;} \end{cases} \quad f_8(x, y) = \begin{cases} y, & \text{ha } (y, x) \in \pi \text{ és } (x, y) \notin \pi, \\ x & \text{különben;} \end{cases}$$

$$f_{10}(x, y) = \begin{cases} x, & \text{ha } (y, x) \in \pi \text{ és } (x, y) \notin \pi, \\ y & \text{különben;} \end{cases} \quad f_9(x, y) = \begin{cases} y, & \text{ha } (x, y) \in \pi \text{ és } (y, x) \notin \pi, \\ x & \text{különben;} \end{cases}$$

$$f_{11}(x, y) = \begin{cases} x, & \text{ha } (x, y) \notin \pi \text{ és } (y, x) \notin \pi, \\ y & \text{különben;} \end{cases} \quad f_{12}(x, y) = \begin{cases} y, & \text{ha } (x, y) \notin \pi \text{ és } (y, x) \notin \pi, \\ x & \text{különben;} \end{cases}$$

$$f_{13}(x, y) = \begin{cases} x, & \text{ha } ((x, y) \in \pi \text{ és } (y, x) \notin \pi) \text{ vagy } ((x, y) \notin \pi \text{ és } (y, x) \in \pi), \\ y & \text{különben;} \end{cases}$$

$$f_{14}(x, y) = \begin{cases} y, & \text{ha } ((x, y) \in \pi \text{ és } (y, x) \notin \pi) \text{ vagy } ((x, y) \notin \pi \text{ és } (y, x) \in \pi), \\ x & \text{különben.} \end{cases}$$

Könnyen ellenőrizhetjük, hogy az összes kétváltozós nemtriviális π -mintafüggvényt felsoroltuk, másrészt az $f_1, f_3, f_5, f_7, f_9, f_{11}, f_{13}$ -ból az $f_2, f_4, f_6, f_8, f_{10}, f_{12}, f_{14}$ függvényeket megkaphatjuk az x és y felcserélésével. Legyen $\leq$ korlátos részbenrendezés az A halmazon a 0 legkisebb, az 1 legnagyobb elemmel és tegyük fel, hogy a 0, 1 elemek a π fixpont nélküli permutáció egy kettő hosszúságú ciklusában vannak. Elegendő igazolni, hogy a $\leq$ relációt az $f_1, f_3, f_5, f_7, f_9, f_{11}, f_{13}$ függvények nem őrzik meg. Ehhez a következő mátrixot használjuk fel:

$$\begin{array}{cc|cc|cc|cc} 1 & 1 & 0 & a & a & 1 & a & a \\ 0 & a & 1 & 1 & b & b & b & 1 \\ \hline 1 & a & 1 & a & a & b & b & a \end{array}$$

ahol $0, a, b, 1 \in A$ páronként különböző elemek. Az első mátrixra f_1 és f_3 függvényeket, a másodikra f_3 és f_{11} függvényeket alkalmazzuk. Ha π -ben csak kettő hosszúságú ciklusok vannak, akkor f_7, f_9, f_{13} projekció. Tegyük fel, hogy π -ben van legalább egy három hosszúságú ciklus. Ekkor f_7, f_{13} függvényeket a harmadik

mátrixra alkalmazzuk, ahol $(a, b) \in \pi$, $(b, a) \notin \pi$, $(a, b) \notin \leq$. Az f_9 függvényt a negyedik mátrixra alkalmazzuk, ahol $(a, b) \in \pi$, $(b, a) \notin \pi$, $(b, a) \notin \leq$. Azt kapjuk, hogy a nemtriviális kétváltozós π -mintafüggvények nem őrzik meg azokat a korlátos részbenrendezéseket az A halmazon, amelyeknek a korlátelemei a π egy kettő hosszúságú ciklusában vannak. A 2. Lemmát felhasználva kapjuk, hogy az A egyszerű π -mintaalgebrának sem lehet ilyen kompatibilis korlátos részbenrendezése. Ezzel a tételt beláttuk.

33. Tétel. Legyen $3 \leq |A| < \infty$ és π fixpont nélküli permutáció az A halmazon. Az A π -mintaalgebra függvényteljes akkor és csak akkor, ha toleranciamentes.

Bizonyítás. Közvetlenül belátható, hogy bármely függvényteljes algebra toleranciamentes.

Fordítva, ha egy algebra toleranciamentes, akkor egyszerű és nincs kompatibilis kétváltozós centrális relációja. A 32. Tétel szerint az algebra függvényteljes.

Legyen A véges halmaz. Tetszőleges kétváltozós $\rho \subseteq A^2$ reláció esetén definiáljuk a következő k -változós ρ -mintafüggvényeket:

$$f_k^\rho(x_1, x_2, \dots, x_k) = \begin{cases} x_k, & \text{ha } (x_1, x_2) \in \rho, (x_2, x_3) \in \rho, \dots, (x_{k-2}, x_{k-1}) \in \rho, \\ x_1 & \text{különben,} \end{cases}$$

$$g_k^\rho(x_1, x_2, \dots, x_k) = \begin{cases} x_1, & \text{ha } (x_1, x_2) \in \rho, (x_2, x_3) \in \rho, \dots, (x_{k-2}, x_{k-1}) \in \rho, \\ x_k & \text{különben,} \end{cases}$$

$$h_k^\rho(x_1, x_2, \dots, x_k) = \begin{cases} x_k, & \text{ha } (x_i, x_j) \in \rho, \text{ valamely } (i, j) \text{ párra } (1 \leq i < j \leq k), \\ x_1 & \text{különben.} \end{cases}$$

Megjegyzés. Ha ρ egyenlőségreláció A -n, akkor f_3^ρ a ternáris diszkriminátor, g_3^ρ a duális diszkriminátor és h_k^ρ $k \geq 3$ -ra egy k -változós közelprojekció.

34. Tétel. Legyen $3 \leq |A| < \infty$ és π tetszőleges permutáció az A halmazon. Ha $\rho = \pi$ vagy $\rho = \pi \circ \pi^{-1}$, akkor az $(A; f)$ algebra $f = f_k^\rho$, g_k^ρ vagy h_k^ρ esetén függvényteljes kivéve, ha

- (I) π -nek van négy hosszúságú ciklusa és $\rho = \pi \circ \pi^{-1}$ vagy
- (II) $f = h_k^\rho$, $|A| = 3$, π ciklikus permutáció és $\rho = \pi \circ \pi^{-1}$ vagy
- (III) $f = h_k^\rho$, π identikus permutáció és $k > |A|$.

Megjegyzés. Az $A = \{0, 1\}$ halmazon $\rho = \pi$. Ekkor h_k^π projekció és $\pi = (0, 1)$ esetén f_3^π (amely ugyanaz, mint g_3^π , ha π identikus permutáció) monoton. Ezért az $(A; f)$ algebra nem függvényteljes, ha $f = h_k^\rho, f_3^{(0,1)}, g_3^i$. A még nem vizsgált esetekben f_k^π, g_k^π nem monoton és nem lineáris, ezért a 5. Lemma szerint az $(A; f)$ algebra függvényteljes, ha $f = f_k^\pi$ vagy $f = g_k^\pi$. A tétel bizonyításához felhasználjuk, a következő lemmát:

35. Lemma. Legyen π tetszőleges permutáció A -n és $\rho = \pi$ vagy $\rho = \pi \circ \pi^{-1}$. Tegyük fel π nem identikus permutáció vagy $k \leq |A|$. Akkor a következő állítások teljesülnek:

- (1) minden olyan a_0, a_1, a_{k-1} sorozatot, amelyre $a_0, a_1, a_{k-1} \in A$ és $(a_0, a_1), (a_0, a_{k-1}), (a_1, a_{k-1}) \notin \rho$ ki lehet egészíteni olyan $a_2, a_3, \dots, a_{k-2} \in A$ elemekkel, amelyekre $(a_i, a_j) \notin \rho$ teljesül tetszőleges $0 \leq i < j \leq k-1$ esetén,
- (2) minden olyan a_0, a_{k-1} sorozatot, amelyre $a_0, a_{k-1} \in A$ és $(a_0, a_{k-1}) \notin \rho$ ki lehet egészíteni olyan $a_1, a_2, \dots, a_{k-2} \in A$ elemekkel, amelyekre $(a_i, a_j) \notin \rho$ teljesül tetszőleges $0 \leq i < j \leq k-1$ esetén.

Bizonyítás. (1) Ha π identikus permutáció és $k \leq |A|$, akkor az állítást közvetlenül kapjuk.

(2) Ha π nem identikus permutáció, akkor $a_3, \dots, a_{k-2} \in A$ elemek megválasztása a következőképpen történik:

- (a) ha $a_1 \pi \neq a_1$, akkor $a_1 = a_2 = \dots = a_{k-2}$,
- (b) ha $a_{k-1} \pi \neq a_{k-1}$, akkor $a_2 = \dots = a_{k-2} = a_{k-1}$,

(c) ha $a_0\pi \neq a_0$, $a_1\pi = a_1$, $a_{k-1}\pi = a_{k-1}$, akkor $a_0 = a_2 = \dots = a_{k-2}$,

(d) ha $a_0\pi = a_0$, $a_1\pi = a_1$, $a_{k-1}\pi = a_{k-1}$, akkor tetszőleges a_2 elemre $a_2\pi \neq a_2$ és $a_2 = \dots = a_{k-2}$.

A 34. Tétel bizonyítása.

A 25. Lemma szerint, ha (I) teljesül, akkor az algebrák nem függvényteljesek. A (II), (III) esetekben közvetlenül adódik, hogy h_k^ρ projekció, ezért $(A; h_k^\rho)$ valóban nem függvényteljes. Megmutatjuk, hogy az összes többi esetben az algebrák függvényteljesek. A bizonyítást a 11. Lemma alkalmazásával és a 12. Megjegyzés felhasználása végezzük el.

(a) Legyen τ tetszőleges nemtriviális ekvivalencia-reláció A -n. Belátjuk, hogy a tételben felsorolt (I), (II), (III) kivételektől eltekintve $f = h_k^\rho, f_k^\rho, g_k^\rho$ nem őrzi meg a τ -t. A bizonyításhoz az

$$\begin{array}{cc} a & b \\ a\pi & a\pi \\ t_3 & t_3 \\ \vdots & \vdots \\ t_{k-1} & t_{k-1} \\ \hline c & c \\ \text{vagy} & \\ c & b \\ a & c \end{array}$$

mátrixot és a következő állítást használjuk fel.

Állítás. Ha a π permutációnak nincs 4 hosszúságú ciklusa, akkor $a, b \in A$ tetszőleges, különböző elemekre $b = a\pi^2$ és $a = b\pi^2$ nem teljesülhet egyidejűleg. Most vegyük észre, hogy

(1) vannak olyan $a, b, c \in A$ elemek, amelyekre $(a, b) \in \tau$, $a \neq b$, $(a, c) \notin \tau$, $(b, a\pi) \notin \rho$ teljesül.

Valóban, legyen B egy nemtriviális blokkja a τ -nak és $c \in A \setminus B$, $a, b \in B$, $a \neq b$. Ha $\rho = \pi$, akkor (1) teljesül. Ha $\rho = \pi \cup \pi^{-1}$ és π -nek nincs 4 hosszúságú ciklusa, akkor felhasználva az előző állítást feltehetjük, hogy $b \neq a\pi^2$, amely

biztosítja (1) teljesülését. Ha az előző mátrixban $t_3 = a\pi^2$, ..., $t_{k-1} = a\pi^{k-2}$, akkor közvetlenül kapjuk, hogy f_k^ρ, g_k^ρ nem őrzi meg a τ relációt.

Ha a következő erősebb feltétel, azaz:

(2) vannak olyan $a, b, c \in A$ elemek, amelyekre

$$(a, b) \in \tau, a \neq b, (a, c) \notin \tau, (b, a\pi) \notin \rho, (a\pi, c) \notin \rho, (b, c) \notin \rho$$

szintén teljesül, akkor a 35. Lemma felhasználásával megválaszthatjuk a $t_3, \dots, t_{k-1}$ elemeket az előző mátrixban (a III. eset kivételével), hogy h_k^ρ nem őrzi meg τ -t. Be kell még látni, hogy (2) fennáll, ha (I), (II) és (III) nem teljesül. Ha $\rho = \pi$, akkor a ρ -ra vonatkozó (2)-beli követelmények ekvivalensek a következővel: $a \neq c\pi^2$, $b \neq c\pi^{-1}$.

Legyen a τ -nak B nemtriviális blokkja és $c \in A \setminus B$. Mivel $c\pi^{-2} = c\pi^{-1}$ -ből következik $c\pi^{-2} = c\pi^{-1} = c \notin B$, akkor azokat az a, b elemeket, amelyek teljesítik ezeket a feltételeket a B -ből választhatjuk. Most tegyük fel $\rho = \pi \cup \pi^{-1}$, akkor a ρ -ra vonatkozó (2) követelmények ekvivalensek a következőkkel:

$$(3) a \neq c\pi^2, a \neq b\pi^{-2}, b \neq c\pi^{-1}, b \neq c\pi$$

Először tegyük fel, hogy τ -nak van olyan B blokkja, amelyre $|B| \geq 3$ és legyen $c \in A \setminus B$. Ha $c\pi^{-1} \in B$, akkor $c\pi^{-2} \neq c\pi^{-1}$, így az $a = c\pi^{-1}$ és $a \neq b \in B \setminus \{c\pi^{-1}, c\pi\}$ megfelelő választás lesz. Tegyük fel $c\pi^{-1} \notin B$. Ha a $B \setminus \{c\pi^{-2}, c\pi\}$ halmazoknak van legalább két eleme, akkor az előző állítást felhasználva belőle kiválaszthatunk olyan a, b elemeket, amelyekre (3) teljesül. Egyébként $c\pi^{-2}, c\pi$ a B különböző elemei és a $b = c\pi^{-2}, a \in B \setminus \{c\pi^{-2}, b\pi^{-2}\}$ választások megfelelők.

Végül tegyük fel, hogy τ minden blokkja legfeljebb 2 elemű és $B = \{a, b\}$ a τ -nak egy kételemű blokkja. Ha $a\pi = a, b\pi = b$, akkor (3) teljesül tetszőleges $c \in A \setminus B$ -re. Ha a, b a π különböző ciklusaiban vannak és $a\pi \neq a$, akkor a $c = a\pi$ választás megfelelő. Tegyük fel, hogy az a, b elemek a π ugyanazon ciklusában vannak. Az előző állítást felhasználva feltehetjük, hogy $a \neq b\pi^2$. Ha $a\pi \notin B$, akkor $c = a\pi$ esetén (3) teljesül. Ha $a\pi \in B$, akkor $a\pi = b$. Így c -t megválaszthatjuk úgy, hogy $c \in A \setminus B$, $c \neq b\pi$ és (3) teljesül, kivéve ha $A = \{a, b, b\pi\}$. Ha $A = \{a, b, b\pi\}$, akkor $|A| = 3$ és π 3 hosszúságú ciklus (lásd (II)).

Ezzel beláttuk, hogy az $(A; f)$ algebra az (I), (II) és (III) kivételes esetektől eltekintve $f = f_k^p, g_k^p, h_k^p$ esetén egyszerű.

(b) A 12. Megjegyzés (a) pontja alapján azokat a kétváltozós centrális relációkat vizsgáljuk, amelyekre tetszőleges c centrumelem esetén $c\pi$ is centrumelem. Legyen σ egy ilyen kétváltozós centrális reláció az A halmazon, $(x, y) \notin \sigma$ és c a σ centrumeleme. Írjuk fel a következő mátrixokat:

$$\begin{array}{cc|cc} c & y & x & c \\ c\pi & s_2 & x\pi & x\pi \\ c\pi^2 & s_3 & x\pi^2 & x\pi^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c\pi^{k-1} & s_{k-1} & x\pi^{k-1} & x\pi^{k-1} \\ \hline x & c & c & y \\ x & y & x & y \end{array}$$

A 35. Lemma felhasználásával az első mátrixban úgy választottuk meg az $s_2, \dots, s_{k-1} \in A$ elemeket, hogy $h_k^p(y, s_2, \dots, s_{k-1}, c) = y$. Ekkor az első mátrixból kapjuk, hogy a h_k^p és az f_k^p függvények nem őrzik meg a σ relációt. A második mátrixból közvetlenül adódik, hogy a g_k^p függvény sem őrzi meg a σ relációt.

(c) A 11. Megjegyzés (b) pontja alapján elegendő azokat a korlátos részbenrendezéseket vizsgálunk az A halmazon, amelyeknek korlátelemei a π permutációnak egy kettő hosszúságú ciklusában vannak vagy a π permutáció fixpontjai. A bizonyításhoz a következő mátrixokat használjuk fel:

$$\begin{array}{cc|cc|cc|cc} 0 & x & x & x & 1 & 1 & x & x \\ 0\pi & 1 & x\pi & 1 & t_2 & 1 & x\pi & 1 \\ 0\pi^2 & 1 & x\pi^2 & 1 & t_3 & 1 & x\pi^2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0\pi^{k-2} & 1 & x\pi^{k-2} & 1 & t_{k-1} & 1 & x\pi^{k-2} & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & x & 0 & 1 & 0 & x & 0 \end{array}$$

Legyen az A halmazon értelmezett $\leq$ korlátos részbenrendezés legkisebb eleme a 0, legnagyobb elme az 1.

Ha a 0 és 1 elemek a π permutáció egy kettő hosszúságú ciklusában vannak és $x \in A$, $x \neq 0, 1$, akkor az első mátrixból kapjuk, hogy az f_k^ρ, h_k^ρ nem őrzi meg a $\leq$ relációt illetve a második mátrixból adódik, hogy a g_k^ρ sem őrzi meg a $\leq$ relációt.

Ha 0 és 1 a π permutáció fixpontjai, akkor a 35. Lemma felhasználásával választjuk meg a harmadik mátrixba a $t_2, t_3, \dots, t_{k-1} \in A$, $t_2 \neq 1$ elemeket. A harmadik mátrixból azt kapjuk, hogy az f_k^ρ és a h_k^ρ sem őrzi meg a $\leq$ relációt. A negyedik mátrix felhasználásával adódik, hogy a g_k^ρ sem őrzi meg a $\leq$ relációt. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

6. A ρ -mintaalgebrák függvényteljessége, ha ρ legalább háromváltozós reláció

A ρ n -változós reláció az A halmazon **teljesen reflexív minimális reláció**, ha az A halmazon értelmezett bármely ε n -változós teljesen reflexív relációra $\rho \subseteq \varepsilon$.

Ha $3 \leq |A| < \infty$, $1 < n \leq |A|$ és a ρ n -változós reláció teljesen reflexív minimális reláció az A halmazon, akkor bármely nemtriviális ρ -mintaalgebra függvényteljes (lásd a 21. Tétel bizonyítását).

36. Tétel. Legyen $3 \leq |A| < \infty$ és ρ legalább háromváltozós teljesen reflexív reláció az A halmazon. Az A ρ -mintaalgebra függvényteljes akkor és csak akkor, ha A toleranciamentes.

Bizonyítás. (1) A függvényteljes algebrák toleranciamentesek.

(2) Legyen A toleranciamentes ρ -mintaalgebra. Belátjuk, hogy A függvényteljes. A kétváltozós ρ -mintafüggvények projekciók. Tetszőleges $a, b \in A$ esetén az (a, a, b) , (a, b, a) , (b, a, a) minták ρ -ra nézve azonosak, ezért nem létezik olyan ρ -mintafüggvény az A halmazon, amely többségi függvény. A 2. Lemmát alkalmazva és a 4. Megjegyzést felhasználva azt kapjuk, hogy az A algebrának nincs kompatibilis korlátos részbenrendezése. Az A toleranciamentes algebra, ezért egyszerű és nincs kompatibilis kétváltozós centrális relációja. A 10. Lemma szerint az A algebra függvényteljes.

37. Megjegyzés. Ha $5 < |A| < \infty$, akkor van olyan ρ nem teljesen reflexív reláció az A halmazon, hogy bármely A nemtriviális ρ -mintaalgebra függvényteljes.

Bizonyítás. Legyen $A = \{0, 1, \dots, n-1\}$, $5 < |A| < \infty$ és $\rho \subseteq A^n$ mindazon elem n -esek halmaza, amelyek az A halmaz összes páros permutációi. Ekkor bármely A nemtriviális ρ -mintaalgebrára $\text{Aut} \rho \subseteq \text{Aut}(A)$, ahol $\text{Aut} \rho$ n -edfokú alter-

náló csoport. Az n -edfokú alternáló csoport $n > 5$ esetén legalább négyszeresen tranzitív. Ezért az $\text{Aut}(\mathcal{A})$ is legalább négyszeresen tranzitív. Egy legalább négyelemű, nemtriviális, véges algebra négyszeresen tranzitív automorfizmuscsoporttal függvénytjeljes vagy ekvivalens a $\mathbf{GF}(2)$ test feletti négyelemű affín térrel [18]. Az $\mathcal{A}$ nemtriviális véges ρ -mintaalgebra nem ekvivalens a $\mathbf{GF}(2)$ test feletti vektortérrel, ezért az $\mathcal{A}$ algebra függvénytjeljes.

7. A ρ -mintaalgebrák függvényteljessége, ha ρ centrális reláció

Az $A = \{0, 1\}$ halmazon pontosan két centrális reláció van: $\rho = \{0\}$ és a $\rho = \{1\}$ egyváltozós relációk. A 22. és a 24. Megjegyzéshez tartozó táblázatok első és második soraiban olyan nemtriviális ρ -mintaalgebrákat találunk, amelyek között $\rho = \{0\}$ vagy $\rho = \{1\}$ esetén vannak függvényteljes és nem függvényteljes algebrák is.

38. Megjegyzés. (1) Ha $3 \leq |A| < \infty$ és ρ egyváltozós centrális reláció az A halmazon, akkor a 19. Lemma szerint bármely A ρ -mintaalgebra nem függvényteljes.

(2) Ha $3 \leq |A| < \infty$ és az A halmazon értelmezett ρ centrális relációnak legalább két centrumeleme van, akkor ρ kompatibilis azzal az ε nemtriviális ekvivalencia-relációval A -n, amelynek egyetlen nem kételemű blokkja éppen a ρ összes centrumelemeiből áll. Ekkor a ρ nem egyszerű. A 17. Lemma szerint bármely A ρ -mintaalgebra nem függvényteljes.

39. Tétel. Legyen ρ legalább kétváltozós centrális reláció az A véges halmazon. Az A véges ρ -mintaalgebra akkor és csak akkor függvényteljes, ha A toleranciamentes.

Bizonyítás. (1) Ha ρ legalább háromváltozós, akkor a 36. Tétel szerint igaz a tétel.

(2) Legyen ρ centrális reláció az A halmazon. Mivel bármely függvényteljes ρ -mintaalgebra toleranciamentes, ezért elegendő bebizonyítani, hogy az A véges toleranciamentes ρ -mintaalgebra függvényteljes. Pontosán kettő kétváltozós nemtriviális ρ -mintafüggvény van az A halmazon. Ezek közül

$$f(x, y) = \begin{cases} x, & \text{ha } (x, y) \in \rho, \\ y & \text{különben} \end{cases}$$

az egyik, a másik az x és y változók felcserélésével adódik. Belátjuk, hogy az f függvény nem őrzi meg a korlátos részbenrendezéseket az A halmazon. Ebből adódik, hogy a másik függvény sem őrzi meg azokat. Legyen a $\leq$ tetszőleges korlátos részbenrendezés az A halmazon a 0 legkisebb és az 1 legnagyobb elemmel. A c a ρ centrumeleme és $a, b \in A$, $(a, b) \notin \leq$, $(a, b) \notin \rho$. Írjuk fel a következő mátrixokat:

$$\begin{array}{c|c} a & a \\ \hline 0 & b \\ \hline a & b \end{array} \quad \begin{array}{c|c} b & b \\ \hline a & 1 \\ \hline a & b \end{array} \quad \begin{array}{c|c} 0 & c \\ \hline 1 & 1 \\ \hline 1 & c \end{array} \quad \begin{array}{c|c} 0 & c \\ \hline k & k \\ \hline k & c \end{array} \quad \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline k & c \\ \hline k & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} c & k \\ \hline 0 & 0 \\ \hline c & 0 \end{array}$$

Ha $c = 0$, akkor az első mátrixra, ha $c = 1$, akkor a második mátrixra alkalmazzuk az f függvényt. Ha $0, 1$ nem centrumelemek, akkor van olyan $k \in A$, amelyre $(0, k) \notin \tau$. Ebben az esetben, ha $k = 1$ a harmadik mátrixra alkalmazzuk az f függvényt. Ha $k \neq 0, 1$, akkor a következő eseteket különböztetjük meg:

- (1) k és c nem hasonlíthatók össze,
- (2) $k \leq c$,
- (3) $c < k$.

Az (1) esetben a negyedik mátrixra, (2) esetben az ötödik mátrixra és a (3) esetben a hatodik mátrixra alkalmazzuk az f függvényt. Az f függvény nem őrzi meg a korlátos részbenrendezéseket az A halmazon. Ezzel beláttuk, hogy a nemtriviális kétváltozós ρ -mintafüggvények nem őrzik a korlátos részbenrendezéseket az A halmazon.

Ha c a ρ centrumeleme és $a \in A$ tetszőleges, akkor a (c, c, a) , (c, a, c) , (a, c, c) minták ρ -ra nézve azonosak. Ezért nincs az A halmazon olyan ρ -mintafüggvény, amely többségi függvény. A 2. Lemmát alkalmazva és a 4. Megjegyzést, valamint az előzőeket felhasználva azt kapjuk, hogy az A algebra nem kompatibilis, korlátos részbenrendezése. A 10. Lemma szerint az A algebra függvényteljes.



40. Tétel. Legyen $3 \leq |A| < \infty$ és ρ tetszőleges centrális reláció az A halmazon. Az $(A; f)$ ρ -mintaalgebra nem függvénytjeljes, ha f tetszőleges kétváltozós ρ -mintafüggvény.

Bizonyítás. (1) Ha ρ egyváltozós centrális reláció, akkor a 38. Megjegyzés (1) pontja alapján igaz a tétel.

(2) Ha ρ kétváltozós centrális reláció, akkor legyen a ρ centruma C . Ekkor a kétváltozós ρ -mintafüggvények megőrzik azt a nemtriviális ekvivalencia-relációt az A halmazon, amelynek blokkjai: $C, A \setminus C$. Ekkor az $(A; f)$ algebra nem egyszerű, a 7. Következmény miatt nemfüggvénytjeljes.

(3) Ha ρ háromváltozós, akkor a kétváltozós ρ -mintafüggvények projekciók.

41. Tétel. Legyen $3 \leq |A| < \infty$ és ρ tetszőleges legalább kétváltozós centrális reláció az A halmazon. Ekkor megadható olyan $(A; f)$ nem függvénytjeljes ρ -mintaalgebra, ahol f olyan nemtriviális ρ -mintafüggvény, amely szemiprojekció.

Bizonyítás. Ha ρ kétváltozós centrális reláció az A halmazon, akkor az

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} x_3 & \text{ha } (x_1, x_2), (x_2, x_3) \in \rho \text{ és } (x_1, x_3) \notin \rho, \\ x_1 & \text{különben} \end{cases}$$

függvény nemtriviális ρ -mintafüggvény és szemiprojekció.

Ha ρ n -változós ($n \geq 3$) centrális reláció az A halmazon, akkor az

$$f_n(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} x_n & \text{ha } (x_1, \dots, x_n) \in \rho, \\ x_1 & \text{különben} \end{cases}$$

függvény nemtriviális ρ -mintafüggvény és szemiprojekció.

Az f_3 és f_n függvények megőrzik azokat a nemtriviális ekvivalencia-relációkat az A halmazon, amelyeknek blokkjai: $C, A \setminus C$, ahol C a ρ centruma. A 7. Következmény szerint igaz a tétel.

A ρ n -változós centrális reláció **minimális centrális reláció** az A halmazon, ha bármely $a_1, \dots, a_n \in A$ páronként különböző nem centrumelemekre $(a_1, \dots, a_n) \notin \rho$.

42. Megjegyzés. (1) Közvetlenül belátható, hogy a legalább kétváltozós minimális centrális relációk egyszerűek, ha a centrumuk egyelemű.

(2) Ha a ρ centrális reláció nem egyszerű, akkor egyetlen ρ -mintafüggvény sem függvényteljes a 17. Lemma szerint.

43. Tétel. Legyen ρ legalább kétváltozós minimális centrális reláció az A véges halmazon, amelynek centruma egyelemű. Ekkor bármely A véges nemtriviális ρ -mintaalgebra függvényteljes, ha van olyan $\pi \in \text{Aut}(A)$, amelyre $\pi \notin \text{Aut}\rho$.

Bizonvítás. Ha van ilyen π , akkor belátható, hogy az $\text{Aut}\rho \cup \{\pi\}$ által generált csoport éppen az S_A szimmetrikus csoport. Így az A algebra homogén algebra, amelynek alpműveletei nemtriviális mintafüggvények. A 13. Lemma szerint az A algebra függvényteljes.

44. Tétel. Legyen ρ legalább kétváltozós, minimális centrális reláció az A véges halmazon, amelynek a C centruma egyelemű. Ha az A egyszerű, véges ρ -mintaalgebrának az a pontosan kétváltozós minimális centrális reláció nem kompatibilis relációja, amelynek a centruma C , akkor az A algebra függvényteljes.

Bizonvítás. Az A ρ -mintaalgebra nemtriviális algebra. A 39. Tétel bizonyítását felhasználva kapjuk, hogy az A algebrának nincs kompatibilis, korlátos részenrendezése. Legyen $C = \{c\}$. Ekkor a ρ automorfizmusai az A algebrának is automorfizmusai, amelyeknek fixpontja a c . Könnyen belátható, hogy ezek az automorfizmusok csak azt a kétváltozós centrális relációt őrzik meg az A halmazon, amely minimális és a centruma $\{c\}$. A 11. Lemmát alkalmazva a tétel bizonyítását kapjuk.

45. Tétel. Ha $3 \leq |A| < \infty$, akkor megadható olyan ρ legalább kétváltozós minimális centrális reláció egyetlen centrumelemmel az A halmazon, amelyre van olyan f nemtriviális ρ -mintafüggvény, amely szemiprojekció és az $(A; f)$ algebra függvényteljes.

Bizonyítás. Legyen $|A| = n$ és legyen ρ n -1-változós centrális reláció a tételben megkövetelt tulajdonságokkal. Az

$$f(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} x_1, & \text{ha } x_1, \dots, x_n \text{ páronként különbözők és } x_1 \text{ vagy } x_2 \text{ centrumelem,} \\ x_n & \text{különben} \end{cases}$$

függvény az A halmazon nemtriviális ρ -mintafüggvény, amely szemiprojekció.

Legyenek $a_1, \dots, a_n, c \in A$ páronként különböző elemek és c a ρ minimális centrális reláció centrumeleme. Legyen ε tetszőleges, nemtriviális ekvivalencia-reláció az A halmazon. Írjuk fel a következő mátrixokat:

$$\begin{array}{cc|cc} c & a_1 & c & c \\ c & c & a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & a_i & a_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & a_n & \vdots & \vdots \\ \hline a_n & a_1 & a_i & a_j \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & a_n & a_n \\ \hline a_n & a_1 & a_n & c \end{array}$$

Ha $(c, a_1) \in \varepsilon$ és $(a_1, a_n) \notin \varepsilon$, akkor az első mátrixra; ha $\{c\}$ az ε egyelemű blokkja és $(c, a_n) \notin \varepsilon$, akkor a második mátrixra alkalmazzuk az f függvényt. Azt kapjuk, hogy az f nem örzi meg az ε nemtriviális ekvivalencia-relációt az A halmazon, azaz az $(A; f)$ algebra egyszerű.

Legyen τ az a kétváltozós minimális centrális reláció az A halmazon, amelynek egyetlen centrumeleme a ρ c centrumeleme. Legyen $a_1, a_n \in A$ $(c, a_1) \in \tau$ és $(a_1, a_n) \notin \tau$. Ha az első mátrixra alkalmazzuk az f függvényt, akkor azt kapjuk, hogy a τ nem kompatibilis centrális relációja az $(A; f)$ algebrának. A 44. Tétel szerint az $(A; f)$ véges, egyszerű algebra függvényteljes.

Legyen A véges halmaz, $k \geq 2$ és ρ tetszőleges k -1-változós ρ reláció az A halmazon. Definiáljuk a következő függvényeket:

$$f_k^\rho(x_1, \dots, x_k) = \begin{cases} x_k, & \text{ha } (x_1, \dots, x_{k-1}) \in \rho, \\ x_1 & \text{különben;} \end{cases}$$

$$g_k^\rho(x_1, \dots, x_k) = \begin{cases} x_1, & \text{ha } (x_1, \dots, x_{k-1}) \in \rho, \\ x_k & \text{különben.} \end{cases}$$

Megjegyzés. Ha ρ egyenlőség reláció az A halmazon, akkor f_3^ρ a ternáris diszkriminátor, g_3^ρ a duális diszkriminátor.

46. Tétel. Legyen ρ tetszőleges centrális reláció az A legalább háromelemű, véges halmazon. Akkor az $(A; f)$ ρ -mintaalgebra $f = f_k^\rho$ vagy $f = g_k^\rho$ esetén akkor és csak akkor függvénytjeljes, ha ρ egyszerű.

47. Megjegyzés. Ha $|A| = 2$ és ρ centrális reláció az A halmazon, akkor az f_k^ρ és g_k^ρ függvények monotonok, azaz az $(A; f_k^\rho)$ és az $(A; g_k^\rho)$ algebrák nem függvénytjeljesek.

Bizonyítás. Ha a ρ centrális reláció nem egyszerű, akkor a 17. Lemma szerint a ρ -mintaalgebrák nem függvénytjeljesek.

Legyen a ρ - centrális reláció egyszerű. Belátjuk, hogy az $(A; f)$ ρ -mintaalgebra $f = f_k^\rho$ vagy $f = g_k^\rho$ esetén függvénytjeljes.

Legyen ε tetszőleges nemtriviális ekvivalencia-reláció az A halmazon. Mivel ρ egyszerű, ezért vannak olyan $a_1, \dots, a_{k-1}, b_1, \dots, b_{k-1} \in A$ elemek, amelyekre $(a_1, \dots, a_{k-1}) \in \rho$, $(a_1, b_1) \in \varepsilon$, ..., $(a_{k-1}, b_{k-1}) \in \varepsilon$, $(b_1, \dots, b_{k-1}) \notin \rho$. Legyen $(t, b_1) \notin \varepsilon$, akkor $(a_1, t) \notin \varepsilon$. Ha a következő mátrixok közül az első mátrixra az f_k^ρ függvényt, a második mátrixra a g_k^ρ függvényt alkalmazzuk, akkor azt kapjuk, hogy az $(A; f_k^\rho)$ és az $(A; g_k^\rho)$ algebrák egyszerűek.

$$\begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_{k-1} & b_{k-1} \\ t & t \\ \hline \text{vagy} & t \quad b_1 \\ a_1 & t. \end{array}$$

Legyen τ tetszőleges kétváltozós centrális reláció az A halmazon és τ centruma C_τ . A ρ centrális reláció egyszerű, ezért a ρ centrális relációnak pontosan egy c centrumeleme van. Belátjuk, hogy az f_k^ρ és a g_k^ρ függvények nem őrzik meg a τ relációt. Írjuk fel a következő mátrixokat:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{cc} b & b \\ t_1 & c \\ \vdots & \vdots \\ t_{k-2} & c \\ \hline a & a \\ \text{vagy} & b \quad a \\ & a \quad b \end{array} & \begin{array}{cc} d & d \\ t_1 & l \\ \vdots & \vdots \\ t_{k-2} & l \\ \hline c & c \\ \text{vagy} & d \quad c \\ & c \quad d \end{array} & \begin{array}{cc} d & d \\ t_1 & l \\ \vdots & \vdots \\ t_{k-2} & l \\ \hline c & c \\ \text{vagy} & d \quad c \\ & c \quad d \end{array} \end{array}$$

(a) Ha $c \in C_\tau$, akkor legyen $(a, b) \notin \tau$. A $t_1, \dots, t_{k-2}$ elemeket az első mátrixban válasszuk meg úgy, hogy $(b, t_1, \dots, t_{k-2}) \notin \rho$. Ekkor az első mátrixból kapjuk, hogy az f_k^ρ és a g_k^ρ függvények nem őrzik meg a τ relációt.

(b) Ha $c \notin C_\tau$, akkor a d és l elemeket válasszuk meg úgy, hogy $(c, d) \notin \tau$ és $l \in C_\tau$. Legyen $k=3$. Ha $(d, l) \in \rho$, akkor legyen t_1 olyan elem, amelyre $(d, t_1) \notin \tau$. Ha $(d, l) \notin \rho$, akkor legyen $t_1 = d$. Ekkor a második mátrixból kapjuk, hogy az f_k^ρ és a g_k^ρ függvények nem őrzik meg a τ relációt. Ha $k \geq 4$, akkor vannak olyan $t_1, \dots, t_{k-2}$ elemek, amelyekre $(d, t_1, \dots, t_{k-2}) \notin \rho$. Ekkor a harmadik mátrixból kapjuk, hogy az f_k^ρ és a g_k^ρ függvények nem őrzik meg a τ relációt.

Az $(A; f_k^\rho)$ és az $(A; g_k^\rho)$ algebrák nemtriviális algebrák. A 2. Lemmát és a 39. Tétel bizonyítását felhasználva kapjuk, hogy az $(A; f_k^\rho)$ és az $(A; g_k^\rho)$ algebráknak nincs kompatibilis, korlátos részbenrendezése. 10. Lemma szerint ezek az algebrák függvényteljesek.

Megjegyzés. Legyen ρ kétváltozós minimális centrális reláció az A halmazon legfeljebb két centrumelemmel. Ekkor a ρ relációhoz megadható az A halmazon olyan $\leq$ részbenrendezés, amelyre a ρ -mintafüggvények $\leq$ -mintafüggvények is. A $\leq$ relációt a következőképpen adjuk meg:

(1) Az $(a, b) \in \rho \Leftrightarrow a \leq b$ vagy $b \leq a$,

(2) ha ρ -nak a c egyetlen centrumelme, akkor a c legyen az A legkisebb eleme,

(3) ha ρ -nak a c_1 és c_2 különböző centrumelemei, akkor c_1 legyen a legkisebb, c_2 a legnagyobb eleme az A -nak.

8. $\leq$ -mintafüggvények függvényteljessége, ha $\leq$ részbenrendezés

48. Tétel. Ha $2 \leq |A| < \infty$, $\leq$ az A halmazon értelmezett tetszőleges korlátos részbenrendezés és f tetszőleges kétváltozós $\leq$ -mintafüggvény, akkor az $(A; f)$ algebra nem függvényteljes.

Bizonyítás. Ha $|A| = 2$, akkor a kétváltozós $\leq$ -mintafüggvények monotonok. Ha $3 \leq |A| < \infty$, akkor legyen a $\leq$ részbenrendezés legkisebb eleme 0 és ρ olyan nemtriviális ekvivalencia-reláció az A halmazon, amelynek blokkjai: $\{0\}$, $A \setminus \{0\}$. Könnyen belátható, hogy a ρ ekvivalencia-relációt a kétváltozós $\leq$ -mintafüggvények megőrzik. Ezzel beláttuk, hogy $2 \leq |A| < \infty$ esetén a tétel valóban teljesül.

Legyen $\preceq$ az $\underline{n} = \{0, 1, \dots, n-1\}$ halmazon olyan korlátos részbenrendezés, amelyre $i \in \underline{n}$ esetén $0 \preceq i \preceq n-1$ és 1 az $(\underline{n}; \preceq)$ -nek atomja. Az $a_1, \dots, a_k$ sorozatot $(a_i \in \underline{n}, i = 1, \dots, k)$ **leszálló sorozatnak** nevezzük, ha $1 \leq i < j \leq k$ esetén $a_i \not\preceq a_j$. Az $(\underline{n}; \preceq)$ részbenrendezett halmaz $i \in \underline{n}$ által generált **duális főideálját** jelöljük $P(i)$ -vel. Leszálló sorozatokra érvényesek a következő állítások:

(I) Legyen $i \in \underline{n}$, $i \neq 0$. Akkor és csak akkor létezik egy $a_1 = i, \dots, a_k$ alakú leszálló sorozat, ha $k \leq n - |P(i)| + 1$. Ekkor mindig feltehetjük, hogy $a_k = 0$.

(II) Legyen $k \in \mathbb{N}$. Az $\underline{n}$ minden nemzérus eleme egy k hosszúságú leszálló sorozat első tagja akkor és csak akkor, ha

$$k \leq k_0 = n - \max\{|P(i)| : i \text{ az } (\underline{n}; \preceq) \text{ atomja}\} + 1.$$

(III) Ha $i \not\preceq p, q$, akkor létezik egy $a_1 = i, \dots, a_k$ alakú leszálló sorozat, amelynek eleme a p és a q .

A felsorolt állítások könnyen igazolhatók. A (II) állításban a k_0 szám függ a $\preceq$ rendezéstől, ezért a k_0 helyett $D(\preceq)$ -t írunk.

Definíció. Legyen az $\underline{n}$ halmazon az

$$l_k(x_1, \dots, x_k) = \begin{cases} x_k, & \text{ha } x_i \leq x_j \text{ valamely } i < j \text{-re } (i, j \in \{1, \dots, n\}), \\ x_1 & \text{különben} \end{cases}$$

legalább kétváltozós függvény.

Megjegyzés. Ha $k \geq 3$, akkor az l_k szemiprojekció az $\underline{n}$ halmazon.

49. Tétel. Az $(\underline{n}; l_k)$ legalább háromelemű, véges algebra akkor és csak akkor függvénytjeljes, ha $3 \leq k \leq D(\leq)$.

Megjegyzés. $k = 2$, $2 \leq n \leq 3$ esetén az l_2 maximum művelet, amely monoton. Ha $k = 2$, $n > 3$, akkor $\{0\}$, $\{1, \dots, n-2\}$, $\{n-1\}$ az $(\underline{n}; l_k)$ algebra egy nemtriviális kongruenciájának a blokkjai, ezért $(\underline{n}; l_k)$ nem egyszerű. Ha $k \geq 3$, $n = 2$ akkor l_k projekció.

Bizonyítás. (1) Először belátjuk, ha $3 \leq k \leq D(\leq)$, akkor az $(\underline{n}; l_k)$ legalább háromelemű, véges algebra függvénytjeljes.

(a) Legyen ρ nemtriviális ekvivalencia-reláció az $\underline{n}$ halmazon. Ha $(0, n-1) \in \rho$, akkor van olyan $c \in \underline{n}$, amelyre $(c, n-1) \notin \rho$. Ha $(0, n-1) \notin \rho$, akkor vannak olyan $a, b \in \underline{n}$ elemek, amelyekre $a \leq b$, $(a, b) \in \rho$ és a következő esetek lehetnek (1) $a = n-1$, (2) $b = 0$, (3) $a \neq n-1, b \neq 0$.

Írjuk fel a következő mátrixot, amelynek az első oszlopában a (II) és (III) állításoknak megfelelő k elemű leszálló sorozatokat írtuk:

						$n-1$	$n-1$
						c_2	c_2
		$n-1$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$\vdots$	$\vdots$
		c_2	c_2	c_2	c_2	a	a
c	c	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
c_2	c_2	b	$n-1$	a	0	b	a
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
c_{k-1}	c_{k-1}	c_{k-1}	c_{k-1}	c_{k-1}	c_{k-1}	c_{k-1}	c_{k-1}
0	$n-1$	0	0	0	0	0	0
c	$n-1$	$n-1$	0	$n-1$	0	$n-1$	0

Ha $(0, n-1) \in \rho$, akkor az első mátrixot, ha $(0, n-1) \notin \rho$, akkor az (1), (2), (3) eseteknek megfelelően rendre a második, harmadik és negyedik mátrixot alkalmazzuk. Ezzel beláttuk, hogy $3 \leq k \leq D(\preceq)$ esetén az l_k függvény nem őrzi meg a nemtriviális ekvivalencia-relációkat az $\underline{n}$ halmazon.

(b) Legyen τ tetszőleges kétváltozós centrális reláció az $\underline{n}$ halmazon. Ekkor a következő eseteket különböztetjük meg:

ha 0 a τ centrumelem, akkor legyenek $i, j \in \underline{n}$ olyan elemek, amelyekre $(i, j) \notin \tau$,

ha 0 nem centrumeleme a τ -nak, akkor van olyan $i \in \underline{n}$, amelyre $(0, i) \notin \tau$ és legyen c a τ centrumeleme. Írjuk fel a következő mátrixokat:

$$\begin{array}{cc} i & 0 \\ c_2 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ c_{k-1} & 0 \\ 0 & j \\ \hline i & j \end{array} \quad \begin{array}{cc} i & c \\ c_2 & c \\ \vdots & \vdots \\ c_{k-1} & c \\ 0 & 0 \\ \hline i & 0. \end{array}$$

Első esetben az első, második esetben a második mátrixot alkalmazzuk. A mátrixok első oszlopában az $i, c_2, \dots, c_{k-1}, 0$ egy k elemű leszálló sorozat. A mátrixokból kapjuk, hogy az l_k művelet nem őrzi meg a τ kétváltozós centrális relációt. A 4. Megjegyzés felhasználásával a 10. Lemma szerint a tétel első része igaz.

(2) Legyen $k > D(\preceq)$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\max\{|P(i)| : i \text{ az } (\underline{n}, \preceq) \text{ atomja}\} = |P(1)|$. Legyen τ az $\underline{n}$ halmazon olyan kétváltozós centrális reláció, amelynek $2, \dots, n-1$ a centrumelemei és $(0, 1), (1, 0) \notin \tau$. Megmutatjuk, hogy l_k megőrzi a τ relációt. Tegyük fel, hogy l_k nem őrzi meg a τ -t és

$$\begin{array}{cc} c_1 & d_1 \\ \vdots & \vdots \\ c_k & d_k \\ \hline c_{k+1} & d_{k+1} \end{array}$$

a megfelelő mátrix. A τ szimmetrikus, ezért feltehetjük $c_{k+1} = 0$, $d_{k+1} = 1$. Az (I) állításból és $k > D(\preceq)$ -ből következik: $d_1 \neq 1$, így $d_k = 1$. Ebből kapjuk $c_k \neq 0$ és $c_1 = 0$, amiből $c_{k+1} = c_k \neq 0$ ellentmondás.

A 7. Következmény szerint az (n, l_k) legalább háromelemű, véges algebra, ha $k > D(\preceq)$ nem függvényteljes. Ezzel a tételt beláttuk.

50. Tétel. Legyen $3 \leq |A| < \infty$ és $\leq$ tetszőleges lineáris rendezés A -n. Ekkor:

(1) van olyan $f \leq$ -mintafüggvény, amely szemiprojekció és az $(A; f)$ algebra függvényteljes,

(2) van olyan g nemtriviális $\leq$ -mintafüggvény, amely szemiprojekció és az $(A; g)$ algebra nem függvényteljes.

Bizonyítás. (1) Az

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} x_1, & \text{ha } x_2 < x_3 \text{ és } x_1 \neq x_2 \text{ és } x_1 \neq x_3, \\ x_3 & \text{különben} \end{cases}$$

függvény $\leq$ -mintafüggvény és nemtriviális szemiprojekció. Belátjuk, hogy az $(A; f)$ algebra függvényteljes.

(a) Legyen ρ tetszőleges nemtriviális ekvivalencia-reláció az A halmazon és $a, b, c \in A$, $a < b$, $(a, b) \in \rho$, $(a, c) \notin \rho$. A következő mátrixból közvetlenül kapjuk, hogy az f nem örzi meg a ρ relációt:

$$\begin{array}{cc} c & c \\ a & a \\ b & a \\ \hline c & a \end{array}$$

(b) Legyen τ tetszőleges kétváltozós centrális reláció az A halmazon és c a τ centrumelem, $(a, b) \notin \tau$. Írjuk fel a következő mátrixokat:

$$\begin{array}{cc} a & c \\ c & c \\ b & b \\ \hline a & b \end{array} \quad \begin{array}{cc} a & a \\ b & b \\ c & b \\ \hline a & b \end{array}$$

Ha $c < b$, akkor az első, ha $c \not< b$, akkor a második mátrixot alkalmazzuk. A mátrixokból kapjuk, hogy az f nem örzi meg a τ kétváltozós centrális relációt. A 4. Megjegyzést felhasználva, majd a 10. Lemmát alkalmazva az (1)-et kapjuk.

(2) Legyen $\leq$ lineáris rendezés az $\underline{n}$ halmazon és $3 \leq k \leq n$. Ebben az esetben $D(\leq) < 3$ és az $(n; l_k)$ nemtriviális ρ -mintaalgebra a 49. Tétel szerint nem függvénytjeljes. A $g = l_k$ és az $A = \underline{n}$ választással a keresett algebrahoz jutunk.

51. Tétel. Legyen $3 \leq |A| < \infty$ és $\leq$ tetszőleges lineáris rendezés az A halmazon. Ekkor érvényesek a következő állítások:

(1) van olyan $f \leq$ -mintafüggvény, amely többségi függvény és az $(A; f)$ algebra függvénytjeljes,

(2) van olyan $g \leq$ -mintafüggvény, amely többségi függvény és az $(A; g)$ algebra nem függvénytjeljes.

Bizonyítás. (1) Legyen

$$f(x, y, z) = \begin{cases} x, & \text{ha } x = y, \\ y, & \text{ha } x < y < z, \\ z & \text{különben.} \end{cases}$$

Könnyen ellenőrizhetjük, hogy az így definiált függvény $\leq$ -mintafüggvény és többségi függvény. Belátjuk, hogy az $(A; f)$ algebra egyszerű, nincs kompatibilis, korlátos részbenrendezése és nincs kompatibilis, kétváltozós centrális relációja.

(a) Legyen ρ tetszőleges nemtriviális ekvivalencia-reláció az A halmazon és $a, b \in A, a < b, (a, c) \notin \rho$. Tekintsük a következő mátrixokat:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{cc} b & a \\ a & a \\ c & c \\ \hline c & a \end{array} & \begin{array}{cc} a & a \\ c & c \\ b & a \\ \hline c & a \end{array} & \begin{array}{cc} a & a \\ b & a \\ c & c \\ \hline c & a, \end{array} \end{array}$$

ahol $a < b < c$ esetén az első, $a < c < b$ esetén a második és $c < a < b$ esetén a harmadik mátrixot alkalmazzuk. Közvetlenül kapjuk, hogy a ρ relációt az f függvény nem őrzi meg, azaz az $(A; f)$ algebra egyszerű.

(b) Legyen $\trianglelefteq$ tetszőleges korlátos részbenrendezés az A halmazon az m legkisebb és az M legnagyobb elemmel. Belátjuk, hogy az $(A; f)$ algebrának a $\trianglelefteq$ nem kompatibilis, korlátos rendezése. A következő mátrixokat alkalmazzuk:

$$\begin{array}{cc} a & a \\ m & m \\ \hline a & M \\ a & m \end{array} \quad \begin{array}{cc} a & a \\ m & a \\ \hline M & M \\ M & a, \end{array}$$

ahol az $a, m, M \in A$ különböző elemek. Ha $a < m < M$, akkor az első mátrixot, ha $a < m < M$ nem teljesül, akkor a második mátrixot használjuk. A mátrixokból közvetlenül kapjuk, hogy az $(A; f)$ algebrának a $\trianglelefteq$ reláció nem kompatibilis, korlátos részbenrendezése.

(c) Legyen τ tetszőleges kétváltozós centrális reláció az A halmazon, $a, b \in A$, $(a, b) \notin \tau$ és c a τ centrumeleme. A következő mátrixokat írjuk fel:

$$\begin{array}{cc} c & b \\ a & c \\ \hline b & b \\ a & b \end{array} \quad \begin{array}{cc} c & a \\ a & a \\ \hline b & c \\ b & a \end{array}$$

A $c < a < b$ esetén az első mátrixot alkalmazzuk. Ha $c < a < b$ nem teljesül, akkor a második mátrixot használjuk fel. Ezzel beláttuk, hogy az $(A; f)$ algebrának a τ nem kompatibilis, kétváltozós centrális relációja.

A 10. Lemma szerint (1) valóban teljesül.

(2) Legyen

$$g(x, y, z) = \begin{cases} x, & \text{ha } x = y \text{ vagy } x = z \text{ vagy } y < x < z \text{ vagy } z < x < y, \\ y, & \text{ha } y = z \text{ vagy } x < y < z \text{ vagy } z < y < x, \\ z & \text{különben.} \end{cases}$$

Közvetlenül ellenőrizhetjük, hogy a g függvény $\leq$ mintafüggvény és többségi függvény.

Belátjuk, hogy az $(A; g)$ algebrának van kétváltozós kompatibilis centrális relációja. Legyen a $\leq$ lineáris rendezés legkisebb eleme 0, legnagyobb eleme 1 és τ olyan tetszőleges kétváltozós centrális reláció az A halmazon, amelyre $(0, 1) \notin \tau$ és az $A \setminus \{0, 1\}$ minden eleme a τ centrumeleme. Ekkor bármely $a_1, a_2, a_3 \in A$ páronként különböző elemekre $g(a_1, a_2, a_3)$ centrumelem. Könnyen belátható, hogy g megőrzi a τ kétváltozós centrális relációt. Ezzel beláttuk a tételt.

Legyen A véges halmaz, $\leq$ tetszőleges részbenrendezés A -n és legyen

$$l(x, y, z) = \begin{cases} z, & \text{ha } x \leq y, \\ x, & \text{ha } x \not\leq y; \end{cases}$$

$$d(x, y, z) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \leq y, \\ z, & \text{ha } x \not\leq y. \end{cases}$$

Megjegyzés. Ha a l illetve a d függvény definíciójában a $\leq$ helyett egyenlőséget írunk, akkor a ternális diszkriminátort illetve a duális diszkriminátort kapjuk.

52. Tétel. Legyen $3 \leq |A| < \infty$ és $\leq$ tetszőleges részbenrendezés az A halmazon. Ha $f = l$ vagy $f = d$, akkor az $(A; f)$ algebra függvénytjeljes.

Megjegyzés. Legyen $|A| = 2$. A l függvény nem monoton és nem lineáris, a d függvény monoton az A halmazon. Az 5. Lemma szerint az $(A; l)$ algebra függvénytjeljes, az $(A; d)$ algebra nem függvénytjeljes.

Bizonvítás. (a) Legyen $\trianglelefteq$ tetszőleges, korlátos részbenrendezés az A halmazon a $m \in A$ legkisebb és az $M \in A$ legnagyobb elemmel. Megmutatjuk, hogy a l, d függvények nem őrzik meg az A -n értelmezett $\trianglelefteq$ korlátos, részbenrendezést. Legyen $k \in A$ és $k \neq m, M$. Írjuk fel a következő mátrixokat:

m	m	k	M	k	M	k	k
m	k	m	M	k	k	k	M
M	M	m	m	m	m	m	m
M	m	k	m	k	m	k	m

Ha $k < m$, akkor az első mátrixból, ha $k \not< m$, akkor a második mátrixból adódik, hogy a t függvény nem örzi meg a $\trianglelefteq$ relációt A -n. Ha $k < M$, akkor a harmadik mátrixból, ha $k \not< M$, akkor a negyedik mátrixból kapjuk, hogy a d függvény nem örzi meg a $\trianglelefteq$ relációt.

(b) Legyen ρ tetszőleges nemtriviális ekvivalencia-reláció az A halmazon és $a, b \in A$, $a \neq b$, $(a, b) \in \rho$, $(a, c) \notin \rho$. Írjuk fel a következő mátrixokat:

a	b	a	a	a	b	a	a
a	a	a	b	a	a	a	b
c	c	c	c	c	c	c	c
c	b	c	a	a	c	a	c

Ha $a < b$, akkor az első mátrixból, ha $a \not< b$, akkor a második mátrixból kapjuk, hogy a t függvény nem örzi meg a ρ relációt az A halmazon. Ha $a < b$, akkor a második mátrixból, ha $a \not< b$, akkor a harmadik mátrixból közvetlenül kapjuk, hogy a d függvény sem örzi meg a ρ relációt az A halmazon.

(c) Legyen τ tetszőleges kétváltozós centrális reláció az A halmazon, $a, b \in A$, $a \neq b$, $(a, b) \notin \tau$ és c a τ centrumeleme. A τ szimmetrikus reláció, ezért feltehető, hogy $a \leq b$. Írjuk fel a következő mátrixokat:

a	c	a	a
b	c	a	c
c	b	c	b
a	b	a	b

Az első mátrixból kapjuk, hogy a t függvény nem örzi meg a τ relációt. Ha $a \not\leq c$, akkor a második mátrixra alkalmazzuk a d függvényt. Ha $a \leq c$, akkor a



második mátrix első és második sorát cseréljük fel, majd az így adódó mátrixra alkalmazzuk a d függvényt. A d függvény sem őrzi meg a τ -t. A 10. Lemma szerint igaz a tétel.

9. A ρ -mintaalgebrák függvényteljessége, ha ρ affin reláció

Legyen az $\underline{n} = \{0, 1, \dots, n-1\}$ halmazon egy $+$ Abel-csoport-művelet (a mod n összeadás) értelmezve. Defináljuk az $\underline{n}$ halmazon a ρ relációt a következőképpen:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \rho \Leftrightarrow x_1 + x_2 = x_3 + x_4.$$

Az így definiált reláció affin reláció.

53. Megjegyzés. A $\pi = (0, 1, \dots, n-1)$ ciklikus permutáció az $\underline{n}$ halmazon értelmezett affin relációnak automorfizmusa. Ezért bármely affin reláció automorfizmuscsoportja tranzitív. Ekkor a 14. Lemmából kapjuk, hogy bármely legalább háromelemű, véges, egyszerű ρ -mintaalgebra függvényteljes, ha ρ affin reláció.

Definiáljuk az $\underline{n}$ halmazon a következő függvényeket:

$$p^{i,k}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{cases} x_i, & \text{ha } (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \rho, \\ x_k & \text{különben;} \end{cases}$$

$$f_5(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \begin{cases} x_1, & \text{ha } (x_2, x_3, x_4, x_5) \in \rho, \\ x_2 & \text{különben;} \end{cases}$$

$$g_5(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \begin{cases} x_2, & \text{ha } (x_2, x_3, x_4, x_5) \in \rho, \\ x_1 & \text{különben.} \end{cases}$$

Megjegyzés. Az f_5 és g_5 függvények a diszkriminátor függvények affin relációra vonatkozó megfelelői.

54. Tétel. Az $(\underline{n}, p^{i,k})$ véges algebrák $i \neq k$, $1 \leq i, k \leq 4$ esetén függvényteljesek.

Bizonyítás. (1) Ha $n = 2$, akkor könnyen belátható, hogy a $p^{i,k}$ függvények $i \neq k$, $1 \leq i, k \leq 4$ esetén nem monotonok és nem lineárisak, azaz az algebrák függvényteljesek.

(2) Ha $3 \leq n < \infty$, akkor belátjuk, hogy $i = 1$, $k = 2$ illetve $i = 1$, $k = 3$ esetén a megfelelő algebrák egyszerűek. A többi esetek ezekből a változók megfelelő permutálásával megkaphatók.

Legyen σ tetszőleges nemtriviális ekvivalencia-reláció az $\underline{n}$ halmazon és $a, b, c \in \underline{n}$, $a \neq b$, $(a, b) \in \sigma$, $(a, c) \notin \sigma$. Az algebrák egyszerűségének igazolásához a következő mátrixokat használjuk fel:

$$\begin{array}{cc|cc} a & a & a & a \\ c & c & a & b \\ k & k & c & c \\ \hline a & b & l & l \\ a & c & a & c \end{array}$$

Feltehetjük, hogy az első mátrixban $k \in \underline{n}$ -re $(a, c, k, a) \in \rho$, a második mátrixban $l \in \underline{n}$ -re $(a, a, c, l) \in \rho$. Ha az első mátrixra a $p^{1,2}$ függvényt, a másodikra a $p^{1,3}$ függvényt alkalmazzuk, akkor azt kapjuk, hogy az $(\underline{n}; p^{1,2})$ illetve az $(\underline{n}; p^{1,3})$ algebrák egyszerűek. Az 53. Megjegyzést felhasználva a tétel bizonyítását kapjuk.

55. Következmény. Az $A = (\underline{n}; f_5)$ és a $B = (\underline{n}; g_5)$ véges algebra függvényteljes. Ugyanis $x_1 = x_3$ esetén legyen $h(x_2, x_3, x_4, x_5) = f_5(x_3, x_2, x_3, x_4, x_5)$, $l(x_2, x_3, x_4, x_5) = g_5(x_3, x_2, x_3, x_4, x_5)$. Ha a h és l x_2, x_3, x_4, x_5 változói helyett ebben a sorrendben rendre az x_1, x_2, x_3, x_4 változókat írjuk, akkor a $p^{2,1}$ illetve a $p^{1,2}$ függvényt kapjuk. Ezzel beláttuk, hogy $p^{2,1} \in T(A)$ illetve, $p^{1,2} \in T(B)$, azaz az A illetve a B algebra függvényteljes.

56. Megjegyzés. Ha n = prím, akkor az $\underline{n}$ halmazon definiált bármely affin reláció automorfizmuscsoportja primitív. Ebben az esetben a 16. Lemma szerint bármely legalább háromelemű nemtriviális ρ -mintaalgebra függvényteljes, ha ρ affin reláció az $\underline{n}$ halmazon.

57. Tétel. Legyen $3 \leq n < \infty$, $n = 2l$, $l \in \mathbb{N}$ és a $\sigma = \{x, x, y, y\}: x + x = y + y\}$ affin reláció az $\underline{n}$ halmazon. Ekkor bármely $(\underline{n}; F)$ σ -mintaalgebra nem függvénytjeljes.

Bizonyítás. Elég belátni, hogy bármely $(\underline{n}; F)$ σ -mintaalgebra nem egyszerű. Az $\underline{n}$ halmazon definiált ε nemtriviális ekvivalencia-relációnak a blokkjai legyenek: $\{0, l\}$, $\underline{n} \setminus \{0, l\}$. Ha $a, b \in \underline{n}$, $(a, a, b, b) \in \sigma$, akkor igaz a következő: $a = 0$ vagy $a = l$ akkor és csak akkor, ha $b = 0$ vagy $b = l$. Ebből közvetlenül kapjuk, hogy ε kompatibilis a σ affin relációval. Ezért bármely $(\underline{n}; F)$ σ -mintaalgebrának ε nemtriviális kongruenciája. Ezzel beláttuk, hogy bármely $(\underline{n}; F)$ σ -mintaalgebra nem egyszerű, azaz nem függvénytjeljes.

58. Következmény. Ha $3 \leq n < \infty$, akkor bármely $(\underline{n}; f)$ ρ -mintaalgebra nem függvénytjeljes, ha ρ affin reláció és f kétváltozós függvény. Ha n páratlan, akkor a kétváltozós függvények projekciók; ha n páros, alkalmazzuk az előző tételt.

59. Megjegyzés. A mintafüggvényeket egyenlőség relációval definiáljuk. Ha a mintafüggvények definíciójában minden $x = y$ egyenlőség reláció helyett a $\rho = \{(x, x, x, y): x = y\}$ affin relációt írjuk, akkor azt kapjuk, hogy minden mintafüggvény ρ -mintafüggvény is.

10. A λ_T -mintaalgebrák függvényteliessége

60. Lemma. Ha $3 \leq h < A$ és a $T = \{\theta_1, \dots, \theta_m\}$ ($m \geq 1$) h -reguláris ekvivalencia-reálciók olyan családjá az A halmazon, amelyre $\bigcap_{j=1}^m \theta_j = \iota_A$ akkor a T h -reguláris ekvivalencia-reálciók családjá által meghatározott λ_T reláció automorfizmuscsoportja primitív.

Bizonvítás. (1) Legyen $\varphi: A \rightarrow A/\theta_1 \times \dots \times A/\theta_m$ ($a \mapsto (a/\theta_1, \dots, a/\theta_m)$).

A $\bigcap_{j=1}^m \theta_j = \iota_A$ miatt φ bijektív leképezés. Definiáljuk az $A/\theta_1 \times \dots \times A/\theta_m$ halmazon a

θ_j^* ($j=1, \dots, m$) ekvivalencia-relációkat a következőképpen:

$$(a_1/\theta_1, \dots, a_m/\theta_m) \equiv (a'_1/\theta_1, \dots, a'_m/\theta_m) \theta_j^* \Leftrightarrow a_j/\theta_j = a'_j/\theta_j \quad (j=1, \dots, m).$$

Könnyen belátható, hogy az $e_j: A \rightarrow A/\theta_j$ ($j=1, \dots, m$) projekció θ_j magjának a φ bijektív leképezés a θ_j^* ($j=1, \dots, m$) ekvivalencia-relációt felelteti meg.

(2) Legyen B olyan halmaz, amelyre $|B| = |A/\theta_j| = h$. Legyenek $\varphi_i: A/\theta_i \rightarrow B$ ($i=1, \dots, m$) tetszőleges bijektív leképezések és

$$\psi: A/\theta_1 \times \dots \times A/\theta_m \rightarrow B \times \dots \times B \quad ((a_1/\theta_1, \dots, a_m/\theta_m) \mapsto (\varphi_1(a_1/\theta_1), \dots, \varphi_m(a_m/\theta_m))).$$

Az így definiált ψ leképezés is bijektív. Definiáljuk a $B \times \dots \times B$ halmazon a

θ_j^{**} ($j=1, \dots, m$) ekvivalencia-relációt a következőképpen:

$$(b_1, \dots, b_m) \equiv (b'_1, \dots, b'_m) \theta_j^{**} \Leftrightarrow b_j = b'_j \quad (j=1, \dots, m)$$

Könnyen belátható, hogy a ψ bijektív leképezés a θ_j^* ($j=1, \dots, m$) ekvivalencia-relációt a θ_j^{**} ($j=1, \dots, m$) ekvivalencia-relációkba viszi át.

A $\psi\varphi: A \rightarrow B^m$ bijektív leképezés a θ_j ($j=1, \dots, m$) ekvivalencia-relációt a

θ_j^{**} ($j=1, \dots, m$) ekvivalencia-relációba viszi és a $T^{**} = \{\theta_1^{**}, \dots, \theta_m^{**}\}$ h -reguláris

ekvivalencia-relációk olyan családjá az A halmazon, amelyre $\bigcap_{j=1}^m \theta_j^{**}$ egyenlőség

reláció a B^n halmazon.

Legyen λ_T^{**} a T^{**} h -reguláris ekvivalencia-relációk családja által meghatározott reláció és $((b_{11}, \dots, b_{1m}), \dots, (b_{h1}, \dots, b_{hm})) \in \lambda_T^{**}$. Ha $\pi_0 \in S_m$, akkor $((b_{11\pi_0}, \dots, b_{1m\pi_0}), \dots, (b_{h1\pi_0}, \dots, b_{hm\pi_0})) \in \lambda_T^{**}$. Ha $\pi_1, \dots, \pi_m \in S_B$, akkor $((b_{11\pi_0}\pi_1, \dots, b_{1m\pi_0}\pi_m), \dots, (b_{h1\pi_0}\pi_1, \dots, b_{hm\pi_0}\pi_m)) \in \lambda_T^{**}$. Ebből következik, hogy az $S_B \times_W S_m$ koszorúszorzat részcsoportja a λ_T^{**} automorfizmuscsoportjának. Az $S_B \times_W S_m$ koszorúszorzatban $|B| > 3$, ezért az $S_B \times_W S_m$ primitív permutációcsoport [2]. Így a λ_T^{**} automorfizmuscsoportja primitív, ezért a λ_T automorfizmuscsoportja is primitív. Ezzel a lemmát beláttuk.

61. Lemma. Ha $\rho = \bigcap_{j=1}^m \theta_j$ nem egyenlőség az A halmazon, akkor bármely

A λ_T -mintaalgebra nem függvényteljes.

Bizonyítás. Könnyen belátható, hogy a ρ nemtriviális ekvivalencia-reláció az A halmazon kompatibilis a λ_T relációval. Ekkor bármely A λ_T -mintaalgebrának a ρ nemtriviális ekvivalencia-reláció kongruenciája. Így bármely A λ_T -mintaalgebra nem egyszerű, azaz nem függvényteljes.

62. Megjegyzés. Bármely primitív permutációcsoport tranzitív is. Ezért a 14. Lemma szerint bármely nemtriviális, véges λ_T -mintaalgebra akkor és csak akkor függvényteljes, ha egyszerű.

$$\text{Ha } f_h(x_1, \dots, x_h) = \begin{cases} x_h, & \text{ha } (x_1, \dots, x_h) \in \lambda_T, \\ x_1 & \text{különben,} \end{cases}$$

akkor érvényes a következő tétel:

63. Tétel. Az $(A; f_h)$ nemtriviális, véges λ_T -mintaalgebra akkor és csak akkor függvényteljes, ha $\bigcap_{j=1}^m \theta_j = \iota_A$

Bizonyítás. Ha $\bigcap_{j=1}^m \theta_j \neq \iota_A$, akkor a 61. Lemma szerint az $(A; f_h)$ algebra nem függvénytjeljes.

Ha $\bigcap_{j=1}^m \theta_j = \iota_A$, akkor a 62. Megjegyzés alapján elég belátni, hogy az $(A; f_h)$ algebra egyszerű.

Legyen σ tetszőleges nemtriviális ekvivalencia-reláció A -n. Jelöljük a θ_i blokkjait ε_i^j -vel, ahol $1 \leq j \leq h$. Ekkor vannak olyan $a_1, a_2, \dots, a_h \in A$ elemek és i ($1 \leq i \leq m$), amelyekre $j=1, \dots, h$, $a_j \in \varepsilon_i^j$, $(a_1, a_2) \in \sigma$, $(a_1, a_h) \notin \sigma$. A következő mátrixból kapjuk, hogy az f_h függvény nem örzi meg a σ nemtriviális ekvivalencia-relációt A -n:

$$\begin{array}{cc} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_h & a_h \\ \hline a_1 & a_h \end{array}$$

Ezzel a tételt beláttuk.

64. Tétel. Legyen λ_T a $T = \{\theta_1, \dots, \theta_m\}$ ($m \geq 1$) h -reguláris ekvivalencia-relációk családjá által meghatározott reláció az A halmazon. Az $(A; F)$ tetszőleges, véges, nemtriviális λ_T -mintaalgebra akkor és csak akkor függvénytjeljes, ha

$$\bigcap_{j=1}^m \theta_j = \iota_A.$$

Bizonyítás. (a) Ha $\bigcap_{j=1}^m \theta_j \neq \iota_A$, akkor a 61. Lemmma szerint az $(A; F)$ nem triviális λ_T -mintaalgebra nem függvénytjeljes.

(b) Ha $\bigcap_{j=1}^m \theta_j = \iota_A$, akkor belátjuk, hogy az $(A; F)$ nemtriviális λ_T -mintaalgebra függvénytjeljes. Ekkor a következő eseteket különböztetjük meg.

(1) Ha az előző tételben szereplő f_h függvény termfüggvénye az $(A; F)$ algebrának, akkor az $(A; F)$ algebra valóban függvényteljes.

(2) Ha az f_h nem termfüggvénye az $(A; F)$ algebrának, akkor a 2. Lemmát valamint a 36. Tétel bizonyításában mondottakat felhasználva kapjuk, hogy az $(A; F)$ algebra termfüggvényei klónja tartalmaz legalább egy az f_h -től különböző nemtriviális λ_T -mintafüggvényt, amely az A halmazon szemiprojekció. Bármely $n < h$ aritású λ_T -mintafüggvény, amely szemiprojekció, projekció az A halmazon, míg az $n = h$ aritásúakból az f_h a változók felcserélésével megkapható. Így elegendő az $n \geq h+1$ aritású olyan nemtriviális λ_T -mintafüggvényekkel foglalkoznunk, amelyek az A halmazon szemiprojekciók. Legyen $t \ n \geq h + 1$ változós, nemtriviális λ_T -mintafüggvény, ami szemiprojekció. Az $A = (A; t)$ algebrára $\text{Aut } \lambda_T \leq \text{Aut}(A)$ és a 60. Lemma miatt az $\text{Aut}(A)$ primitív permutációcsoport. Tegyük fel, hogy az A algebra nem függvényteljes. Ekkor a 16. Lemma szerint $A \cong C^S$, ahol C függvényteljes algebra és $s \geq 2$ és $\text{Aut}(A) = \text{Aut}(C) \times_W S_s$. Az előzőek szerint $S_B \times_W S_m \leq \text{Aut } \lambda_T \leq \text{Aut}(A) = \text{Aut}(C) \times_W S_s \leq S_C \times_W S_s$.

Ha $|B| = h$, $|C| = k$, akkor $S_h \times_W S_m \leq S_k \times_W S_s$.

Pálffy Péter Pál megmutatta [7], hogy ez csak akkor teljesülhet, ha $h = k$; $m = s$. Mivel az A algebra t alapl művelete legalább $h + 1$ változós szemiprojekció, ezért a C algebra művelete is legalább $h + 1$ változós szemiprojekció, amely $|C| = k = h$ miatt projekció. Ez ellentmondás.

Irodalom

- [1] S. BURRIS - H. P. SANKAPPANAVAR, Bevezetés az univerzális algebrába
Tankönyvkiadó, Budapest, 1988.
- [2] P. J. CAMERON, Finite permutation groups and finite simple groups
Bull. London Math. Soc., 13, (1981), 1-22.
- [3] B. CSÁKÁNY, Functional completeness of algebras
TEMPUS JEP-06015-93 Lecture Series held in Rome, (February 1994).
- [4] B. CSÁKÁNY, Homogeneous algebras are functionally complete
Algebra Universalis, 11 (1980), 149-158.
- [5] E. FRIED and A. F. PIXLEY, The dual discriminator function in universal
algebra, Acta Sci. Math., 41 (1979), 83 -100.
- [6] A. B. КУЗНЕЦОВ: Алгебра логики и её обобщения - а "Математика в
СССР за 40 лет" с. kötetben (1959), 102-115.
- [7] PÁLFY P. P. (publikálatlan) közlése.
- [8] P. P. PÁLFY, L. SZABÓ and Á. SZENDREI, Automorphism groups and
functional completeness, Algebra Universalis, 15 (1982), 385-400.
- [9] E. L. POST, The two-valued iterative systems of mathematical logic
Ann. of Math. Studies 5, Princeton University Press, 1941.
- [10] R. W. QUACKENBUSH, Some classes of idempotent functions and their
compositions, Collq. Math. 29 (1970), 71-81.
- [11] L. RÉDEI - T. SZELE, Algebraisch - zahlentheoretische Betrachtungen
über Ringe, I. Acta Math., 79, (1947), 291-320.
- [12] I. G. ROSENBERG, Functional completeness of single generated or
surjective algebras, Finite Algebra and Multiple-valued Logic (Proc. Conf.
Szeged, 1979). Coll. Math. Soc. J. Bolyai, Vol. 28. North-Holland,
Amsterdam (1981), 635-652.
- [13] I. G. ROSENBERG, Minimal clones I : the five types, Coll. Math. Soc. J.
Bolyai vol. 43, North-Holland, Amsterdam (1986), 405-427.
- [14] I. G. ROSENBERG, Über die funktionale Vollständigkeit in den
mehrwertigen Logiken (Struktur der Functionen von mehreren

- Veränderlichen auf endlichen Mengen), Rozprawy Československé Akad. Věd. Rada Math. Přírod. Věd., 80 (1970), 3-93.
- [15] J. ŚLUPHECKI, Kriterium pełności wielowartościowych systemów logiki zdan, C. R. Seanc. Soc. Sci. Varsovie 32 (1939), 102-109.
- [16] L. SZABÓ, Algebras with transitive automorphism groups, Algebra Universalis 31 (1994), 589-598.
- [17] L. SZABÓ, On simple surjective algebras, Acta Sci. Math., 59 (1994), 17-23.
- [18] L. SZABÓ and Á. SZENDREI, Almost all algebras with triply transitive automorphism groups are functionally complete, Acta Sci. Math., 41 (1979), 391-402.
- [19] Á. SZENDREI, Clones in universal algebra. Séminaire de Mathématiques Supérieures, vol. 99, Les Presses de l'Université de Montréal, Montréal, 1986.
- [20] Á. SZENDREI, Simple surjective algebras having no proper subalgebras, J. Austral. Math. Soc., 48 (1990), 434-454.
- [21] Á. SZENDREI, The primal algebra characterization theorem revisited, Algebra Universalis, 29 (1992), 41-60.
- [22] VÁRMONOSTORY ENDRE, A mintafüggvények funkcionális teljessége, egyetemi doktori értékelés, JATE Bolyai Intézet, 1980.
- [23] VÁRMONOSTORY ENDRE, A p -mintafüggvények funkcionális teljessége, a Juhász Gyula Tanárképző Főiskola Tudományos Közleményei (1980), 171-175.
- [24] VÁRMONOSTORY ENDRE, A p -mintafüggvények funkcionális teljessége, ha p -rendezés, a Juhász Gyula Tanárképző Főiskola Tudományos Közleményei (1985), 37-39.
- [25] VÁRMONOSTORY ENDRE, Az általánosított diszkriminátor és a duális diszkriminátor-függvény függvényteljességéről, Acta Academiae Paedagogicae Szegediensis (1987-1988), 51-56.
- [26] E. VÁRMONOSTORY, Central pattern functions, Acta Sci. Math., 56 (1992), 223-227.
- [27] E. VÁRMONOSTORY, Generalized pattern functions, Algebra Universalis, 29 (1999), 346-353.
- [28] E. VÁRMONOSTORY, Order-Discriminating Operations Order 9. (1992), 239-244,

- [28] E. VÁRMONOSTORY, Order-Discriminating Operations,
Order 9. (1992), 239-244,
- [29] E. VÁRMONOSTORY, Relational pattern functions, Finite Algebra and
Multiple-valued Logic (Proc. Conf. Szeged, 1979), Coll. Math. Soc. J. Bolyai,
Vol. 28. North-Holland, Amsterdam, (1981), 753-758.
- [30] H. WERNER, Eine Charakterisierung funktional vollständiger Algebren
Archiv der Math., 21 (1970), 381-385.

Abstract

In this work we study finite algebras with finitely many finitary basic operations. Our aim is to establish or to refute functional completeness of algebras of a special kind, called relational-pattern algebras, or, in short, ρ -pattern algebras. The prototype of functional complete algebras are finite fields; it is well-known fact that all possible finitary operations defined on a finite field F can be represented by polynomial functions of F . In general, an algebra A is said to be functionally complete if all possible finitary operations on the universe of A can be constructed from the basic operations of A , the elements of A (considered as constant operations), and the projections, using the customary superposition of functions only.

The notion of a ρ -pattern operation (it is often called a ρ -pattern function) at first emerged for ρ the equality relation in a paper of R. W. Quackenbush [3] in the seventies.

Two k -tuples $(x_1, \dots, x_k), (y_1, \dots, y_k) \in A^k$ are of the same pattern, if for $i, j \in \{1, \dots, k\}$, $x_i = x_j$ and $y_i = y_j$ mutually imply each other. A function $f: A^k \rightarrow A$ is a **pattern function** if it is conservative, i. e., $f(x_1, \dots, x_k)$ always equals some x_i , $i \in \{1, \dots, k\}$, and, in addition, this i depends merely upon the pattern of $(x_1, \dots, x_k)$.

B. Csákány suggested the following generalization of pattern functions.

Consider an n -ary relation on A . Two k -tuples $(x_1, \dots, x_k), (y_1, \dots, y_k) \in A^k$ are of the same ρ -pattern, if for $i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, k\}$, $(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) \in \rho$ and $(y_{i_1}, \dots, y_{i_n}) \in \rho$ mutually imply each other. A function $f: A^k \rightarrow A$ is a **ρ -pattern function**, if $f(x_1, \dots, x_k)$ always equals some x_i , $i \in \{1, \dots, k\}$ where i depends on the ρ -pattern of $(x_1, \dots, x_k)$ only.

An algebra A is called **relational-pattern algebra** or **ρ -pattern algebra**, if every operation of A is a ρ -pattern function.

There are some classical examples of functional completeness. For instance, finite algebras $(A; f)$ with f the ternary discriminator or (in the case $|A| > 2$) the dual discriminator are functionally complete (Werner [10] and Fried-

Pixley [2], respectively). Csákány [1] proved that every finite algebra $(A; f)$ with $|A| \geq 3$ is functionally complete if f is an arbitrary non-trivial pattern function. He also raised the question on the functional completeness of ρ -pattern algebras for relations ρ other than equality.

Here we consider, and, answer this question for relations occurring in Rosenberg's primality criterion [4], namely, for partial orderings, affine relations, permutations (considered as binary relations), equivalences, central relations, and h -regular relations. In some cases our answers are general statements, in the others we provide examples or counter-examples.

Our main tool is a strong result on functional completeness by Á. Szendrei, published in [5]. From her result we derive, among others, the following frequently-used fact:

Lemma. At least three element finite simple conservative algebra is functionally complete iff

A has no compatible central relation on A , and

A has no compatible bounded partial order on A .

Now we list several characteristic samples of our results for ρ -pattern algebras.

Let π be a permutation and f a non-trivial binary π -pattern function on an at least three element finite set A . The π -pattern algebra $(A; f)$ is functionally complete iff π is cyclic permutation on A , except for the case $|A| = 4$ and $f = f_3$ or $f = f_4$, where

$$f_3(x, y) = \begin{cases} x, & \text{if } (x, y) \in \pi \text{ or } (y, x) \in \pi, \\ y & \text{otherwise} \end{cases}$$

and $f_4(x, y) = f_3(y, x)$.

If π be a permutation and the π -pattern function f is a majority function on an at least three element finite set A , then the algebra $(A; f)$ is functionally complete.

Let π be a permutation without fixpoint on an at least three element finite set A . The simple π -patter algebra A is functionally complete iff the algebra has no compatible binary central relation preserved by all automorphisms of A .

Let ρ be an at least binary central relation on A . A finite ρ -pattern algebra A is functionally complete iff A is tolerance-free.

Consider the following generalizations of the ternary discriminator and the dual discriminator:

$$t(x, y, z) = \begin{cases} z, & \text{if } (x, y) \in \rho, \\ x & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$d(x, y, z) = \begin{cases} x, & \text{if } (x, y) \in \rho, \\ z & \text{otherwise.} \end{cases}$$

If ρ is a permutation or a partial order on an at least three element finite set A . Then $(A; t)$ and $(A; d)$ are functionally complete.

Let λ_T be h -regular relation defined by the h -regular family of equivalence relations $T = \{\theta_1, \dots, \theta_m\}$ ($m \geq 1$). All non-trivial λ_T -pattern algebras are functionally complete iff $\bigcap_{j=1}^m \theta_j = \iota_A$.

References

- [1] B. CSÁKÁNY, Homogeneous algebras are functionally complete, Algebra Universalis, 11 (1980), 149-158.
- [2] E. FRIED AND A. F. PIXLEY, The dual discriminator function in universal algebra, Acta Sci. Math., 41, (1979), 83-100.
- [3] R. W. QUACKENBUSH, Some classes of idempotent functions and their compositions, Colloq. Math., 79 (1970), 71-81.

- [4] I. G. ROSENBERG, Über die functionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken (Structur der Functionen von mehreren Veränderlichen auf endlichen Mengen), Rozprawy Československé Akad. Věd. Rada Math. Přírod. Věd., 80 (1970), 3-93.
- [5] Á. SZENDREI, The primal algebra characterization theorem revisited, Algebra Universalis, 29 (1992), 41-60.
- [6] E. VÁRMONOSTORY, Central pattern functions, Acta Sci. Math., 56 (1992), 223-227.
- [7] E. VÁRMONOSTORY, Generalized pattern functions, Algebra Universalis, 29 (1999), 346-353.
- [8] E. VÁRMONOSTORY, Order-Discriminating Operations, Order 9. (1992), 239-244,
- [9] E. VÁRMONOSTORY, Relational pattern functions, Finite Algebra and Multiple-valued Logic (Proc. Conf. Szeged, 1979), Coll. Math. Soc. J. Bolyai, Vol. 28. North-Holland, Amsterdam, (1981), 753-758.
- [10] H. WERNER, Eine Characterisierung funktional vollständiger Algebren Archiv der Math., 21 (1970), 381-385.

Köszönetet mondok Csákány Béla egyetemi tanárnak, aki a szakmai munkámat irányította. Nagyon sokat tanultam tőle emberségben, pontosságban, intenzív munkavégzésben. Ő felvételiztetett az egyetemre, az ő előadásait hallgattam. Középiskolai tanárként szakmai tanácsokkal látott el, javaslatára kezdtem el foglalkozni a ρ -mintaalgebrák függvényteljességével, amelyből egyetemi doktori disszertációt nyújtottam be. A JATE rektoraként is jutott ideje arra, hogy a legfontosabb szakmai problémákat megbeszéljük.

Sok szakmai tanácsot, segítséget kaptam Szendrei Ágnes egyetemi tanártól és Szabó László egyetemi docenstől.

Külön köszönetet mondok a JATE Algebra és Számelmélet Tanszék oktatóinak, hogy az ott folyó tudományos szemináriumokon rendszeresen részt vehetek, annak munkájába bekapcsolódhatok.