Tartalomjegyzék

0. Bevezetés

Az értekezésben olyan nemnegatív együtthatójú egyváltozós és kétváltozós trigonometrikus sorokkal foglalkozunk, amelyek abszolút konvergensek. Tehát egyenletesen is konvergensek, így az összegfüggvényük minden pontban létezik és folytonos. Jól ismert, hogy egyenletesen konvergens trigonometrikus sor egyben összegfüggvényének Fourier sora is. E sorok együtthatóinak nagyságrendjét vizsgáljuk abból a szempontból, hogy az összegfüggvény az egyváltozós esetben a $\mathrm{Lip}\,\alpha$, $\mathrm{lip}\,\alpha$ Lipschitz és a Λ_*, λ_* Zygmund függvényosztályok egyikébe, illetve kétváltozós esetben a $\mathrm{Lip}(\alpha,\beta)$, $\mathrm{lip}(\alpha,\beta)$ és a $\Lambda_*(1,1)$, $\lambda_*(1,1)$ függvényosztályok egyikébe tartozzék. Erre adunk szükséges és elegendő feltételeket, amely feltételek az együtthatókból képzett kifejezések viselkedésére vonatkoznak.

Az első fejezetben megadjuk a dolgozatban használt jelöléseket, és röviden ismertetjük a szükséges definíciókat. Megadjuk a kétváltozós multiplikatív $\mathrm{Lip}(\alpha,\beta)$, $\mathrm{lip}(\alpha,\beta)$ $(0<\alpha,\beta\le 1)$ Lipschitz és a $\Lambda_*(1,1)$, $\lambda_*(1,1)$ Zygmund függvényosztályok definícióját, amelyek Móricz Ferenctől [10] származnak.

A második és a harmadik fejezetben az egyváltozós koszinusz és szinusz sorokat tekintjük. R.P. Boas [2] és Németh József [13] hasonló témájú cikkeire építve bemutatjuk és rendszerezzük az eddigi eredményeket a fenti szempontból. A $\mathrm{Lip}\,\alpha$ $(0<\alpha\le 1)$, Λ_* osztályokkal párhuzamosan jellemezzük a $\mathrm{lip}\,\alpha$ $(0<\alpha<1)$ és a λ_* osztályokat is. Az említett közleményekben több esetben csak az eredmény szerepel, esetleg csupán utalás található a bizonyítás lényegére. Ezért itt célunk a bizonyítások teljes részletességgel történő bemutatása, az egyes lépések egyszerűsítése, mivel ezen bizonyítások lépései fogják az alapot szolgáltatni a megfelelő kétváltozós tételek bizonyításaihoz. Megjegyezzük, hogy különböző bizonyítási módokra volt szükségünk a $\mathrm{Lip}\,\alpha$ $(0<\alpha<1)$ osztályra és a határeseteknek számító Λ_* és a $\mathrm{Lip}\,1$ osztályokra vonatkozó tételek esetében. Az is kiderült, hogy a $\mathrm{Lip}\,1$ függvényosztálynál a koszinusz és szinusz sorok eltérő módon viselkednek. Ugyanakkor ez a viselkedésbeli különbség a Λ_* Zygmund osztály esetében nem áll fenn.

A dolgozat fő eredményei a negyedik és a hatodik fejezetben szerepelnek, amelyek kétváltozós trigonometrikus sorokra vonatkoznak. Az egyváltozós esetben bemutatott tételek jelentős részét terjesztettük ki kettős trigonometrikus sorokra, nevezetesen kettős koszinusz, kettős szinusz, és vegyes koszinusz-szinusz sorokra. A negyedik fejezetben a $\mathrm{Lip}(\alpha, \beta)$ és $\mathrm{lip}(\alpha, \beta)$ $(0 < \alpha, \beta \leq 1)$ osztályok, míg a hatodik fejezetben a $\Lambda_*(1, 1)$ és $\lambda_*(1, 1)$ osztályok jellemzése szerepel.

Az ezeket követő ötödik és hetedik fejezetben ezen új eredmények bizonyításai állnak. Minden esetben pontosan követtük az egyváltozós rész felépítését. Hangsúlyozzuk, hogy – az egyváltozós esethez hasonlóan – lényegesen más bizonyítási módot igényeltek a $\mathrm{Lip}(\alpha, \beta)$ $(0 < \alpha, \beta < 1)$ esetekre és a $\Lambda_*(1, 1)$, $\mathrm{Lip}(1, 1)$ határesetekre vonatkozó tételek, ezen belül is a kettős szinusz, kettős koszinusz, és a koszinusz-szinusz sorokra vonatkozó tételek. Ez a viselkedésbeli eltérés különösen a $\mathrm{Lip}(\alpha, 1)$ $(0 < \alpha < 1)$ osztály, valamint a vegyes koszinusz-szinusz sor esetén igényelt több aprólékos meggondolást, amelynek során ötvözni kellett az egyváltozós esetben előforduló, a megfelelő osztályokra és sorokra vonatkozó módszereket.

Végül, a nyolcadik és kilencedik fejezetben az egy- és kétváltozós bizonyításokban egyaránt használt lemmák és ezek igazolásai szerepelnek. Az egyváltozós esetben közismert segédtételek és kétváltozós kiterjesztéseik bár önmagukban is érdekesek, de a dolgozat témájához szorosan nem kapcsolódnak, ezért szerepelnek a dolgozat végén. Kiemeljük, hogy már az egyváltozós esetben is sikerült a bizonyításokat annyira egyszerűsítenünk, hogy például a Boas által közölt két lemma közül már az egyik használata is elegendő a bizonyításokhoz.

Az értekezésben szereplő függvényosztályok és trigonometrikus sorok további összefüggései iránt érdeklődő olvasó figyelmébe ajánljuk N.K. Bary [1], R. DeVore és G.G. Lorentz [3] és A. Zygmund [15] angol nyelvű, továbbá I.P. Natanszon [12] magyar nyelvű könyveit.

1. Definíciók, jelölések

Röviden felsoroljuk az értekezésben használt jelöléseket, és ismertetjük a szükséges definíciókat.

Egyváltozós trigonometrikus sorok.

Legyen $\{a_i : i = 1, 2, \ldots\}$ nemnegatív számok tetszőleges sorozata, amelyre

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i < \infty \tag{1.1}$$

teljesül. Ekkor a koszinusz sor összegfüggvénye

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos ix =: f_c(x) \tag{1.2}$$

és a szinusz sor összegfüggvénye

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \sin ix =: f_s(x) \tag{1.3}$$

létezik és folytonos függvény, mivel egy egyenletesen konvergens sor összegfüggvénye.

Ismert, hogy egyenletesen konvergens sor összegfüggvényének Fourier sora, tehát az (1.2) és (1.3) sorok egyben Fourier sorok is.

Az alábbi függvényosztályok definíciója közismert.

1.1. Definíció. Egy 2π szerint periodikus ϕ függvény akkor tartozik a $\mathrm{Lip}\,\alpha$ ($\alpha > 0$) *Lipschitz osztályba* (azt is mondhatjuk: *α-rendű Lipschitz feltételnek tesz eleget*), ha van olyan $C = C(\phi)$ állandó, hogy

$$|\phi(x+h) - \phi(x)| \le C|h|^{\alpha} \quad \text{minden } x\text{-re, } h\text{-ra.}$$

1.2. Definíció. Egy 2π szerint periodikus ϕ függvény akkor tartozik a $\mathrm{lip}\,\alpha$ ($\alpha > 0$) *Lipschitz osztályba*, ha

$$\lim_{h\to 0} |h|^{-\alpha}[\phi(x+h) - \phi(x)] = 0 \quad \text{egyenletesen } x\text{-ben.}$$

Világos, hogy $\mathrm{lip}\,\alpha \subset \mathrm{Lip}\,\alpha$ minden $\alpha > 0$-ra.

Megjegyezzük, hogy $\alpha = 0$ esetén is beszélhetünk Lipschitz osztályokról: a korlátos függvények a $\mathrm{Lip}\,0$ osztályt, az egyenletesen folytonos függvények pedig a $\mathrm{lip}\,0$ osztályt alkotják.

1.3. Definíció. Egy folytonos, 2π szerint periodikus ϕ függvény akkor tartozik a $\Lambda_*(\alpha)$ $(\alpha > 0)$ *Zygmund osztályba*, ha megadható olyan $K = K(\phi)$ állandó, hogy

$$|\phi(x+h) + \phi(x-h) - 2\phi(x)| \leq K\, h^\alpha \quad \text{minden } x\text{-re, } h\text{-ra.}$$

1.4. Definíció. Egy folytonos, 2π szerint periodikus ϕ függvény akkor tartozik a $\lambda_*(\alpha)$ $(\alpha > 0)$ *Zygmund osztályba*, ha

$$\lim_{h \to 0} h^{-\alpha}[\phi(x+h) + \phi(x-h) - 2\phi(x)] = 0 \quad \text{egyenletesen } x\text{-ben.}$$

Világos, hogy $\lambda_*(\alpha) \subset \Lambda_*(\alpha)$ minden $\alpha > 0$-ra.
Néhány észrevétel:

Ha $\phi \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ valamely $\alpha > 1$-re vagy ha $\phi \in \mathrm{lip}\,\alpha$ valamely $\alpha \geq 1$-re, akkor ϕ =állandó. Ha $\alpha > 2$, akkor $\phi \in \Lambda_*(\alpha)$ esetén ϕ lineáris függvény; ha ϕ még periodikus is, akkor ϕ állandó.
Ismert továbbá, hogy

$$\Lambda_*(\alpha) = \mathrm{Lip}\,\alpha \quad \text{és} \quad \lambda_*(\alpha) = \mathrm{lip}\,\alpha, \quad \text{ha} \quad 0 < \alpha < 1.$$

Viszont

$$\Lambda_* := \Lambda_*(1) \supset \mathrm{Lip}\,1 \quad \text{és} \quad \lambda_* := \lambda_*(1) \supset \mathrm{lip}\,1.$$

A következőkben a $\mathrm{Lip}\,\alpha$ $(0 < \alpha \leq 1)$ és $\mathrm{lip}\,\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$, valamint a Λ_* és λ_* osztályokkal foglalkozunk.

Kétváltozós trigonometrikus sorok.

Legyen $\{a_{ij} : i, j = 1, 2, \ldots\}$ nemnegatív számok tetszőleges kettős sorozata, amelyre

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} < \infty \tag{1.4}$$

teljesül. Ekkor a

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \cos ix \cos jy =: f_{cc}(x,y), \tag{1.5}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \sin ix \sin jy =: f_{ss}(x,y) \tag{1.6}$$

és

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \cos ix \sin jy =: f_{cs}(x,y) \tag{1.7}$$

kettős sorok egyenletesen konvergensek, így az összegfüggvények léteznek és folytonosak. Ha (1.7)-ben a cos és sin sorrendjét felcseréljük, akkor az $f_{sc}(x,y)$ összegfüggvényre vonatkozó eredményeket az $f_{cs}(x,y)$-ra vonatkozó tételben a feltételek felcserélésével nyerhetjük, ezért a továbbiakban ezzel a negyedik esettel külön nem foglalkozunk.

Az alábbiakban megadjuk a kétváltozós (multiplikatív) Lipschitz és Zygmund osztályok definícióját, amelyek Móricz Ferenctől [10] származnak.

1.5. Definíció. A *kétváltozós* $\mathrm{Lip}(\alpha,\beta)$ $(\alpha,\beta>0)$ *osztály* mindazon mindkét változójában 2π szerint periodikus $\phi(x,y)$ függvényekből áll, amelyekhez létezik olyan $C=C(\phi)$ állandó, hogy bármely x,y,h,k esetén

$$|\phi(x+h,y+k)-\phi(x+h,y)-\phi(x,y+k)+\phi(x,y)| \le C|h|^{\alpha}|k|^{\beta} \tag{1.8}$$

teljesül.

1.6. Definíció. A *kétváltozós* $\mathrm{lip}(\alpha,\beta)$ $(\alpha,\beta>0)$ *osztály* mindazon $\phi(x,y)\in \mathrm{Lip}(\alpha,\beta)$ függvényekből áll, amelyekre

$$\lim_{h,k\to 0} |h|^{-\alpha}|k|^{-\beta}[\phi(x+h,y+k)-\phi(x+h,y)-\phi(x,y+k)+\phi(x,y)] = 0$$

egyenletesen x-ben és y-ban, és ahol h és k egymástól függetlenül tartanak 0-hoz.

Az egyváltozós esetnek megfelelően most is csak a $0 < \alpha \leq 1$ és $0 < \beta \leq 1$ esetekkel foglalkozunk.

1.7. Definíció. A *kétváltozós* $\Lambda_*(1,1)$ *Zygmund osztály* mindazon folytonos, mindkét változójában 2π szerint periodikus $\phi(x,y)$ függvényekből áll, amelyekhez létezik olyan $K = K(\phi)$ állandó, hogy bármely x, y, h, k esetén

$$|\Delta(\phi; x, y; h, k)| \leq K\, h\, k,$$

ahol

$$\begin{aligned} &\Delta(\phi; x, y; h, k) := \phi(x+h, y+k) + \phi(x-h, y+k) \\ &\quad + \phi(x+h, y-k) + \phi(x-h, y-k) \\ &\quad - 2\phi(x, y+k) - 2\phi(x, y-k) - 2\phi(x+h, y) - 2\phi(x-h, y) + 4\phi(x,y). \end{aligned} \tag{1.9}$$

1.8. Definíció. A *kétváltozós* $\lambda_*(1,1)$ *Zygmund osztály* mindazon $\phi(x,y) \in \Lambda_*(1,1)$ függvényekből áll, amelyekre

$$\lim_{h,k \to 0} h^{-1} k^{-1} \Delta(\phi; x, y; h, k) = 0$$

x-ben és y-ban egyenletesen, és ahol h és k egymástól függetlenül tartanak 0-hoz.

Megjegyezzük, hogy az egyváltozós esethez hasonlóan lehetne definiálni a kétváltozós $\Lambda_*(\alpha,\beta)$ és $\lambda_*(\alpha,\beta)$ $(\alpha, \beta > 0)$ Zygmund osztályokat is. De mivel viszonyuk a $\mathrm{Lip}(\alpha,\beta)$ és $\mathrm{lip}(\alpha,\beta)$ Lipschitz osztályokhoz nem ismert az irodalomból, így ezekkel nem foglalkozunk.

2. Egyváltozós trigonometrikus sorok

Az értekezésben olyan nemnegatív együtthatójú trigonometrikus sorokkal foglalkozunk, amelyek egyenletesen konvergensek, az összegfüggvény tehát létezik és folytonos. Ebben a fejezetben felsoroljuk azokat az ismert eredményeket, amelyek szükséges és elegendő feltételt adnak az összegfüggvény különböző függvényosztályba való tartozására, nevezetesen a Lipschitz és Zygmund osztályokba való tartozására. Ezek a feltételek az együtthatókból képezett kifejezések nagyságrendjére vonatkoznak.

Tekintsük tehát az (1.1) feltétellel az (1.2)-ben és (1.3)-ban definiált f_c és f_s függvényeket.

Irodalmi előzmények.

A fenti kérdéskörrel R.P. Boas 1967-ben megjelent közleményében foglalkozott. Először nemnegatív együtthatójú trigonometrikus sor összegfüggvényének Lipschitz osztályba való tartozására adott jellemzést abban az esetben, ha $0 < \alpha < 1$:

2.1. Tétel (Boas [2]). *Legyen* $\{a_i : i = 1, 2, \ldots\}$ *nemnegatív számok tetszőleges sorozata, amelyre* (1.1) *fennáll, és jelölje* f *az* f_c *és* f_s *függvények egyikét, ahol* f_c *és* f_s *az* (1.2)*-ben ill. az* (1.3)*-ban definiált függvény. Ekkor* $f \in \operatorname{Lip}\alpha$ *valamely* $0 < \alpha < 1$ *esetén akkor és csak akkor, ha*

$$\sum_{i=m}^{\infty} a_i = O(m^{-\alpha}), \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{2.1}$$

vagy ami ezzel ekvivalens,

$$\sum_{i=1}^{m} i\, a_i = O(m^{1-\alpha}), \quad m = 1, 2, \ldots \tag{2.2}$$

teljesül.

A (2.1) és a (2.2) feltételek ekvivalenciája következik a 8.1. Lemmából (ha $\gamma = 1,\ \mu = 1-\alpha$).

A fenti 2.1. Tétel egyszerű következményeként nyerhető Lorentz 1948-ban megjelent tétele, amely nemnegatív együtthatósorozat helyett csökkenő együtthatósorozatra vonatkozik:

2.2. Tétel (Lorentz [9]). *Legyen* $\{a_i : i = 1, 2, \ldots\}$ *nemnegatív számok tetszőleges csökkenő sorozata, amelyre* (1.1) *fennáll, és jelölje* f *az* f_c *és* f_s *függvények egyikét, ahol* f_c *és* f_s *az* (1.2)*-ben ill. az* (1.3)*-ban definiált függvény. Ekkor* $f \in \operatorname{Lip}\alpha$ *valamely* $0 < \alpha < 1$ *esetén akkor és csak akkor, ha*

$$a_m = O(m^{-1-\alpha}), \quad m = 1, 2, \ldots \tag{2.3}$$

teljesül.

Valóban, ha $\{a_i\}$ monoton csökkenő, akkor a (2.3) feltétel ekvivalens a 2.1. Tétel mindkét feltételével.

Az $\alpha = 1$ eset vizsgálata bonyolultabb, mivel ekkor a szinusz és koszinusz sorok különböző módon viselkednek. A 2.1. és a 2.2. Tétel az $\alpha = 1$ esetben már nem érvényes. Továbbá, az $\alpha = 1$ esetben nem igaz a (2.1) és a (2.2) feltételek ekvivalenciája sem, vagyis a

$$\sum_{i=m}^{\infty} a_i = O(m^{-1}), \quad m = 1, 2, \ldots \tag{2.4}$$

és

$$\sum_{i=1}^{m} i\, a_i = O(1), \quad m = 1, 2, \ldots \tag{2.5}$$

nagyságrendi becslések már nem ekvivalensek egymással. Igazolható (lásd 8.1. Lemma, ha $\mu = 0,\ \gamma = 1$), hogy a (2.5) feltétel erősebb, tehát ebből mindig következik (2.4), fordítva viszont nem. Boas bizonyította, hogy ha $\alpha = 1$, akkor a gyengébb (2.4) feltétel a koszinusz sor esetében a Λ_* osztályba való tartozást biztosítja. Azt, hogy az állítás ugyanezzel a feltétellel érvényben marad a szinusz sor esetében is, Németh József mutatta meg a Λ_* osztálynál egy még általánosabb függvényosztály során ([13, Theorem 3], abban a speciális esetben, amikor $\omega_1(h) := h$). Összefoglalva tehát a 2.1. Tétel (2.1) feltétele az $\alpha = 1$ határesetre vonatkozóan – azaz a gyengébb feltétel – csak a Lip 1 osztálynál bővebb, de az összes Lip α ($0 < \alpha < 1$) osztálynál szűkebb Λ_* osztályba való tartozáshoz lesz szükséges és elegendő mind az f_c, mind az f_s függvény esetében.

2.3. Tétel (Boas [2], Németh [13]). *Ha $\{a_i : i = 1, 2, \ldots\}$ nemnegatív számok tetszőleges sorozata, amelyre* (1.1) *fennáll, és f jelöli az f_c és f_s,* (1.2)*-ben ill* (1.3)*-ban definiált függvények egyikét, akkor $f \in \Lambda_*$ akkor és csak akkor, ha*

$$\sum_{i=m}^{\infty} a_i = O(m^{-1}), \quad m = 1, 2, \ldots \tag{2.6}$$

teljesül.

Szintén Boas adott választ a Lip 1 osztályba tartozásra. Az $\alpha = 1$ esetben erősebb (2.5) feltétel a szinusz sor esetében lesz a megfelelő szükséges és elegendő feltétel.

2.4. Tétel (Boas [2]). *Ha $\{a_i : i = 1, 2, \ldots\}$ nemnegatív számok tetszőleges sorozata, amelyre* (1.1) *fennáll, és f_s az* (1.3)*-ban definiált függvény, akkor $f_s \in$* Lip 1 *akkor és csak akkor, ha*

$$\sum_{i=1}^{m} i\, a_i = O(1), \quad m = 1, 2, \ldots \tag{2.7}$$

fennáll.

A koszinusz sor esetében példákon keresztül meg lehet mutatni, hogy az erősebb (2.5) feltétel nem szükséges, (2.4) viszont nem elegendő a Lip 1 osztályba való tartozásra. Ebben az esetben a gyengébb (2.4) feltétel és egy plusz feltétel lesz a megfelelő.

2.5. Tétel (Boas [2]). *Ha $\{a_i : i = 1, 2, \ldots\}$ nemnegatív számok tetszőleges sorozata, amelyre* (1.1) *fennáll, és f_c az* (1.2)*-ben definiált függvény, akkor $f_c \in$* Lip 1 *akkor és csak akkor, ha*

$$\sum_{i=m}^{\infty} a_i = O(m^{-1}), \quad m = 1, 2, \ldots \tag{2.8}$$

teljesül, és

$$\sum_{i=1}^{m} i\,a_i \sin ix = O(1), \quad m = 1, 2, \dots \tag{2.9}$$

x-ben egyenletesen.

Láthatjuk, hogy az $\alpha = 1$ határesetben már szétválnak az f_c ill. az f_s függvények együtthatóira vonatkozó feltételek.

A (2.1)–(2.5) és a hasonló típusú feltételeket valójában elegendő megkövetelni elég nagy m-re, pl. $m > m_0$ esetére, ahol m_0 pozitív egész. Ugyanis, pl. ha van olyan $K = K(m_0)$ m-től független állandó, hogy

$$\sum_{i=m}^{\infty} a_i \le \frac{K}{m^\alpha}, \quad \text{ha} \quad m > m_0,\ 0 < \alpha \le 1,$$

akkor $1 \le m \le m_0$ és $0 < \alpha \le 1$ esetén

$$\sum_{i=m}^{\infty} a_i = \sum_{i=m}^{m_0} a_i + \sum_{i=m_0+1}^{\infty} a_i \le A + \frac{K}{(m_0+1)^\alpha} \le \frac{K_1}{m^\alpha},$$

ahol A az (1.1) alatti sor összege és

$$K_1 := m_0^\alpha \left(A + \frac{K}{(m_0+1)^\alpha} \right).$$

Összefoglalva, (2.1)–(2.5) feltételek minden m-re teljesülnek, ha K helyett egy nagyobb K_1 konstanst használunk.

Kiegészítés a $\mathrm{lip}\,\alpha$ és λ_* függvényosztályok esetében.

A $\mathrm{Lip}\,\alpha$ és Λ_* osztályokkal együtt érdemes párhuzamosan a $\mathrm{lip}\,\alpha$ és a λ_* osztályokat is jellemezni. Könnyen ellenőrizhető Boas két állítása, mely szerint a 2.1. és a 2.3. Tétel érvényben marad, ha a tételben a $\mathrm{Lip}\,\alpha$ osztály helyett $\mathrm{lip}\,\alpha$ osztályt (Λ_* helyett λ_*-t), és ennek megfelelően "O" helyett "o"-t írunk:

2.6. Tétel (Boas [2]). *A* 2.1. *Tétel feltételei mellett* $f \in \operatorname{lip} \alpha$ *valamely* $0 < \alpha < 1$ *esetén akkor és csak akkor, ha a következő feltétel teljesül:*

$$\sum_{i=m}^{\infty} a_i = o(m^{-\alpha}), \quad m \to \infty,$$

vagy ami ezzel ekvivalens,

$$\sum_{i=1}^{m} i\, a_i = o(m^{1-\alpha}), \quad m \to \infty.$$

A két feltétel ekvivalenciája következik a 8.2. Lemmából.

2.7. Tétel (Boas [2]). *A* 2.3. *Tétel feltételei mellett* $f \in \lambda_*$ *akkor és csak akkor, ha*

$$\sum_{i=m}^{\infty} a_i = o(m^{-1}), \quad m \to \infty \tag{2.10}$$

fennáll.

Boas ez utóbbi tételt szintén csak a koszinusz sorra mondta ki. A szinusz sorra vonatkozó eredmény a 2.3. Tétel szinusz sorra vonatkozó (Németh-féle) bizonyításának elemzése után adódik.

3. A 2. rész egyes tételeinek bizonyítása

Célunk a Boas ill. Németh József által ismertetett bizonyítások lépéseinek kirészletezése majd egyszerűsítése volt a későbbi helyzetünk megkönnyítése érdekében. Kétváltozóban ugyanis az egyes lépéseket először az egyik, majd a másik változó esetében végezzük el. Megjegyezzük, hogy Boas közleményeiben több esetben csak a tételt közli, vagy esetleg még utal a bizonyítás lényegére.

Először a 2.1. Tételt bizonyítjuk a koszinusz sor esetén. Ennek ismeretében hasonló módon láthatjuk be a 2.3. Tétel koszinusz sorra vonatkozó részét. Majd igazoljuk a 2.4. Tételt, mely szerint a 2.1. Tétel és a 2.3. Tétel szinusz sorra vonatkozó részei láthatók be. Ezzel szemben a 2.5. Tétel bizonyítása egészen más módszert igényel, amelyet szintén bemutatunk.

A $\mathrm{lip}\,\alpha$ és λ_* osztályokat jellemző tételek közül a 2.7. Tételt a szinusz sor esetében bizonyítjuk, amelynek során a 2.3. Tétel Németh-féle bizonyításának ötletét használjuk ki.

Megjegyezzük, hogy Boas a 2.4. Tétel elegendőségi részére egy egészen más bizonyítást adott, amelyben az alábbi három tételt használta fel:

(i) a pozitív Fourier együtthatójú függvény Fourier sorának egyenletes konvergenciájára vonatkozó Paley tételét [14];

(ii) a differenciálható függvények végtelen sorának tagonkénti differenciálhatóságáról szóló tételt azon feltétel esetén, amikor a differenciált sor egyenletesen konvergens;

(iii) ha egy függvény differenciálható és a differenciálhányadosa korlátos, akkor a függvény $\mathrm{Lip}\,1$-bei.

Mi az értekezésben erre az elegendőségi részre új bizonyítást adunk, amely a többi tételre általunk adott bizonyítások felépítését követi.

A 2.1. Tétel bizonyítása.

Koszinusz sor esete.

(i) *Szükségesség.* Legyen $f_c \in \operatorname{Lip}\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$, azaz

$$|f_c(x+h) - f_c(x)| \le C|h|^\alpha \quad \text{minden} \quad x\text{-re}, \ h\text{-ra}.$$

Ha $x = 0$ és $0 < h \le 1$, akkor a következő adódik:

$$|f_c(h) - f_c(0)| = \sum_{i=1}^{\infty} a_i (1 - \cos ih) = 2 \sum_{i=1}^{\infty} a_i \sin^2 \frac{ih}{2} \le C\, h^\alpha. \tag{3.1}$$

Ismert az alábbi egyenlőtlenség:

$$\sin t \ge \frac{2}{\pi} t, \quad \text{ha} \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}, \tag{3.2}$$

ahonnan

$$\sin^2 \frac{ih}{2} \ge \left(\frac{2}{\pi} \frac{ih}{2} \right)^2 = \frac{i^2 h^2}{\pi^2}, \quad i = 1, 2, \ldots, [1/h] =: m,$$

ahol [.] az egész részt jelöli. Ez alapján írhatjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \sin^2 \frac{ih}{2} \ge \sum_{i=1}^{m} a_i \frac{i^2 h^2}{\pi^2} = \frac{h^2}{\pi^2} \sum_{i=1}^{m} i^2 a_i.$$

Ezt összevetve a (3.1)-gyel és figyelembe véve, hogy nemnegatív tagú sorról van szó, nyerjük, hogy

$$2 \frac{h^2}{\pi^2} \sum_{i=1}^{m} i^2\, a_i \le C\, h^\alpha,$$

ahonnan

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} i^2\, a_i &\le \frac{C\,\pi^2}{2} h^{\alpha-2} \le \frac{C\,\pi^2}{2} (m+1)^{2-\alpha} \\ &\le \frac{C\,\pi^2}{2} (2m)^{2-\alpha} = C\,\pi^2\, 2^{1-\alpha} m^{2-\alpha}, \quad m = [1/h]. \end{aligned}$$

A 8.1. Lemmát alkalmazva a $\gamma = 2$, $\mu = 2 - \alpha$ választással adódik, hogy

$$\sum_{i=m}^{\infty} a_i = O(m^{-\alpha}), \quad m = 1, 2, \ldots \,.$$

Ez éppen (2.1), amit bizonyítani akartunk.

(ii) *Elegendőség.* Tegyük fel, hogy (2.1) és az ezzel ekvivalens (2.2) fennáll, azaz vannak olyan K_1 és K_2 m-től független állandók, amelyekre

$$\sum_{i=m}^{\infty} a_i \leq \frac{K_1}{m^\alpha}, \quad m = 1, 2, \dots \tag{3.3}$$

és

$$\sum_{i=1}^{m} i\, a_i \leq K_2\, m^{1-\alpha}, \quad m = 1, 2, \dots . \tag{3.4}$$

Belátjuk, hogy $f_c \in \mathrm{Lip}\, \alpha$. A

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2 \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \sin\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{3.5}$$

trigonometrikus összefüggés alapján írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} |f_c(x+2h) - f_c(x)| &= \left| \sum_{i=1}^{\infty} a_i [\cos i(x+2h) - \cos ix] \right| \\ &= 2 \left| \sum_{i=1}^{\infty} a_i \, \sin i(x+h) \sin ih \right| \\ &\leq 2 \sum_{i=1}^{\infty} a_i |\sin i(x+h) \sin ih|. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Becsüljük ezt a sort a $|\sin i(x+h)| \leq 1$ triviális egyenlőtlenséggel, majd bontsuk két részre az alábbi módon:

$$\begin{aligned} |f_c(x+2h) - f_c(x)| &\leq 2 \sum_{i=1}^{\infty} a_i |\sin ih| \\ &= 2 \left\{ \sum_{i=1}^{m} + \sum_{i=m+1}^{\infty} \right\} a_i |\sin ih| =: S_1 + S_2, \end{aligned} \tag{3.7}$$

ahol $m := [1/|h|]$. A $|\sin ih| \leq |ih|$ egyenlőtlenség és (3.4) szerint világos, hogy

$$\begin{aligned} S_1 &= 2 \sum_{i=1}^{m} a_i |\sin ih| \leq 2|h| \sum_{i=1}^{m} i\, a_i \leq 2|h| K_2\, m^{1-\alpha} \\ &\leq 2|h| K_2 |h|^{\alpha-1} = 2K_2 |h|^\alpha. \end{aligned} \tag{3.8}$$

A $|\sin ih| \leq 1$ egyenlőtlenség és (3.3) szerint pedig azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} S_2 &= 2 \sum_{i=m+1}^{\infty} a_i |\sin ih| \leq 2 \sum_{i=m+1}^{\infty} a_i \leq 2 \frac{K_1}{(m+1)^\alpha} \\ &\leq 2K_1 |h|^\alpha. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Összefoglalva, (3.7)–(3.9) alapján adódik, hogy $f_c \in \mathrm{Lip}\, \alpha$.

A 2.4. Tétel bizonyítása.

(i) *Szükségesség.* Legyen $f_s \in \operatorname{Lip} 1$, ekkor minden x és h esetén

$$|f_s(x+h) - f_s(x)| \le C|h|,$$

speciálisan

$$|f_s(x)| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} a_i \sin ix \right| \le C|x|,$$

vagyis

$$-Cx \le \sum_{i=1}^{\infty} a_i \sin ix \le Cx.$$

Legyen $0 < h \le 1$. Integráljuk az egyenlőtlenséget a $(0, h)$ intervallumon, figyelembe véve, hogy az $\{a_i\}$ együtthatókra vonatkozó (1.1) feltétel miatt a középen lévő sor egyenletesen konvergens, így tagonként integrálható:

$$-C \int_0^h x\,dx \le \sum_{i=1}^{\infty} a_i \int_0^h \sin ix\,dx \le C \int_0^h x\,dx.$$

Innen adódik, hogy

$$\left| \sum_{i=1}^{\infty} a_i \int_0^h \sin ix\,dx \right| \le C \int_0^h x\,dx,$$

azaz

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \frac{1-\cos ih}{i} = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} a_i \sin^2 \frac{ih}{2} \le C \frac{h^2}{2}. \tag{3.10}$$

A (3.2) egyenlőtlenség szerint

$$\sin^2 \frac{ih}{2} \ge \frac{i^2 h^2}{\pi^2}, \quad i = 1, 2, \ldots, [1/h] =: m.$$

A 2.1. Tétel bizonyítása (i) szükségesség részében látottak és ez utóbbi egyenlőtlenség alapján (3.10) becslését így folytatjuk:

$$2 \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{i} a_i \frac{i^2 h^2}{\pi^2} = \frac{2h^2}{\pi^2} \sum_{i=1}^{m} i\, a_i \le C \frac{h^2}{2},$$

ahonnan nyerjük, hogy

$$\sum_{i=1}^{m} i\, a_i \le \frac{C\,\pi^2}{4},$$

amit bizonyítani kellett.

(ii) *Elegendőség.* Tegyük fel, hogy (2.7) fennáll, azaz van olyan K_1 m-től független állandó, amelyre

$$\sum_{i=1}^{m} i\, a_i \le K_1, \quad m = 1, 2, \dots\ . \tag{3.11}$$

Ekkor a 8.1. Lemma szerint, ha $\gamma = 1$, $\mu = 0$, megadható olyan K_2 m-től független állandó, hogy

$$\sum_{i=m}^{\infty} a_i \le \frac{K_2}{m}, \quad m = 1, 2, \dots\ . \tag{3.12}$$

A 2.1. Tétel bizonyítása (ii) elegendőségi részének menetét követjük lépésről lépésre. A

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

trigonometrikus összefüggést használva egyszerű számolással adódik, hogy

$$\begin{aligned} |f_s(x+2h) - f_s(x)| &= \left|\sum_{i=1}^{\infty} a_i[\sin i(x+2h) - \sin ix]\right| \\ &= 2\left|\sum_{i=1}^{\infty} a_i\, \cos i(x+h)\sin ih\right| \le 2\sum_{i=1}^{\infty} a_i|\sin ih| \\ &= 2\left\{\sum_{i=1}^{m} + \sum_{i=m+1}^{\infty}\right\} a_i|\sin ih| =: S_1 + S_2, \end{aligned} \tag{3.13}$$

ahol $m := [1/|h|]$. S_1 becslése a fent említett módon (3.11) felhasználásával történik:

$$S_1 \le 2|h|\sum_{i=1}^{m} i\, a_i \le 2K_1|h|. \tag{3.14}$$

S_2-t pedig (3.12) szerint becsülve nyerjük, hogy

$$S_2 \le 2\sum_{i=m+1}^{\infty} a_i \le 2\frac{K_2}{m+1} \le 2K_2|h|. \tag{3.15}$$

Tehát (3.11)–(3.15) alapján kapjuk, hogy $f_s \in \mathrm{Lip}\,1$.

A 2.4. Tételt ezzel teljesen bebizonyítottuk.

A 2.5. Tétel bizonyítása.

(i) *Elegendőség.* Tegyük fel, hogy a (2.8) és a (2.9) feltételek fennállnak, azaz

$$\sum_{i=m}^{\infty} a_i = O(1/m), \quad m = 1, 2, \ldots \tag{3.16}$$

és

$$\left|\sum_{i=1}^{m} i\, a_i\, \sin ix\right| = O(1), \quad m = 1, 2, \ldots \tag{3.17}$$

egyenletesen x-ben. A 8.1. Lemma szerint ha $\gamma = 3,\ \mu = 2$, akkor a

$$\sum_{i=1}^{m} i^3 a_i = O(m^2), \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{3.18}$$

ha pedig $\gamma = 2,\ \mu = 1$, akkor a

$$\sum_{i=1}^{m} i^2 a_i = O(m), \quad m = 1, 2, \ldots \tag{3.19}$$

becslések is teljesülnek. Célunk belátni, hogy $f_c \in \mathrm{Lip}\,1$, azaz

$$|f_c(x+h) - f_c(x)| = O(h) \quad \text{minden } x\text{-re, } h\text{-ra.}$$

Egy korábbi tétel bizonyításában már elvégzett számolás, nevezetesen (3.6) alapján írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned}
|f_c(x+2h) - f_c(x)| &= 2\left|\sum_{i=1}^{\infty} a_i\, \sin i(x+h) \sin ih\right| \\
&\le 2\left|\sum_{i=1}^{m} a_i\, \sin i(x+h) \sin ih\right| \\
&+ 2\left|\sum_{i=m+1}^{\infty} a_i\, \sin i(x+h) \sin ih\right| \\
&=: S_1 + S_2,
\end{aligned} \tag{3.20}$$

ahol $m := [1/|h|]$. Tekintsük először S_2-t. A (3.16) feltétel szerint világos, hogy

$$
\begin{aligned}
S_2 &\leq 2 \sum_{i=m+1}^{\infty} a_i |\sin i(x+h) \sin ih| \leq 2 \sum_{i=m+1}^{\infty} a_i \\
&= O\left(\frac{1}{m+1}\right) = O(h).
\end{aligned} \tag{3.21}
$$

Térjünk rá S_1-re. A $\sin x$ függvény Taylor sorából következő

$$\sin ih = ih + O(i^3h^3)$$

összefüggés alapján láthatjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
S_1 &= 2 \left| \sum_{i=1}^{m} a_i \, \sin i(x+h) [ih + O(i^3h^3)] \right| \\
&\leq 2|h| \left| \sum_{i=1}^{m} i \, a_i \, \sin i(x+h) \right| + O(1)|h|^3 \left| \sum_{i=1}^{m} i^3 a_i \, \sin i(x+h) \right|.
\end{aligned} \tag{3.22}
$$

A jobb oldal második tagját tekintve (3.18) alapján adódik, hogy

$$\left| \sum_{i=1}^{m} i^3 a_i \, \sin i(x+h) \right| \leq \sum_{i=1}^{m} i^3 a_i = O(m^2) = O\left(\frac{1}{h^2}\right),$$

ezért (3.22)-ből a következőt nyerjük:

$$S_1 \leq 2|h| \left| \sum_{i=1}^{m} i \, a_i \, \sin i(x+h) \right| + O(h). \tag{3.23}$$

A $\sin i(x+h)$ kifejezés az alábbi formába írható:

$$
\begin{aligned}
\sin i(x+h) &= \sin ix \cos ih + \cos ix \sin ih \\
&= \sin ix - (1 - \cos ih) \sin ix + \cos ix \, \sin ih.
\end{aligned}
$$

Ismert, hogy

$$1 - \cos ih = O(i^2h^2), \quad \sin ih = O(ih),$$

ezért

$$|\sin i(x+h) - \sin ix| \leq |(1 - \cos ih) \sin ix| + |\cos ix \sin ih| = O(i^2h^2) + O(ih).$$

Ebből (3.18) és (3.19) szerint következik, hogy

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{i=1}^{m} i\,a_i \sin i(x+h) - \sum_{i=1}^{m} i\,a_i \sin ix\right| \\
&\le \sum_{i=1}^{m} i\,a_i |\sin i(x+h) - \sin ix| \\
&\le \sum_{i=1}^{m} i\,a_i [O(i^2h^2) + O(ih)] = O(1)\left\{h^2 \sum_{i=1}^{m} i^3 a_i + h \sum_{i=1}^{m} i^2 a_i\right\} \\
&= O(1)\{h^2 m^2 + hm\} = O(1).
\end{aligned}$$

Tehát

$$2|h| \sum_{i=1}^{m} i\,a_i \sin i(x+h) = 2|h| \sum_{i=1}^{m} i\,a_i \sin ix + O(h).$$

Így, ha (3.17) fennáll, akkor (3.23)-ból kapjuk, hogy

$$S_1 = 2|h|O(1) + O(h) + O(h) = O(h),$$

azaz (3.20), (3.21) és ez utóbbi alapján

$$|f_c(x+2h) - f_c(x)| = O(h) \quad \text{minden } x\text{-re},\ h\text{-ra},$$

vagyis $f_c \in \mathrm{Lip}\,1$. Ezzel beláttuk a (2.8) és (2.9) feltételek elegendőségét.

(ii) *Szükségesség.*

A szükségesség egyrészt abból következik, hogy ha $f_c \in \mathrm{Lip}\,1$, akkor $f_c \in \Lambda_*$, azaz a 2.3. Tétel szerint (2.8) teljesül. Másrészt a (2.9) feltétel szükségességének bizonyítása ugyanúgy megy szinte szóról szóra, mint az elegendőség fentiekben levezetett bizonyítása, amelynek részletezésétől itt eltekintünk.

A 2.7. Tétel bizonyítása.

Szinusz sor esete.

(i) *Szükségesség.* Legyen $f_s \in \lambda_*$, ekkor tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz megadható olyan $h_0 = h_0(\varepsilon) > 0$, hogy minden x-re

(3.24) $$|f_s(x+h) + f_x(x-h) - 2f_s(x)| \le \varepsilon\, h, \text{ ha } 0 < |h| < h_0(\varepsilon).$$

Célunk belátni, hogy ekkor (2.10) is teljesül, azaz megadható olyan $m_0 = m_0(\varepsilon)$ pozitív egész, amelyre

$$\sum_{i=m}^{\infty} a_i \le \frac{\varepsilon}{m}, \quad \text{ha } m \ge m_0. \tag{3.25}$$

Feltehetjük, hogy $0 < h < h_0 \le 1$. Egyszerű számolással (3.24)-ből adódik, hogy

$$\begin{aligned} &|f_s(x+h) + f_s(x-h) - 2f_s(x)| \\ &= 2\left|\sum_{i=1}^{\infty} a_i \sin ix(1-\cos ih)\right| \le \varepsilon\, h, \quad 0 < h < h_0 \le 1. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Integráljuk az egyenlőtlenséget a $(0, h)$ intervallumon, megjegyezve, hogy az a_i együtthatókra vonatkozó (1.1) feltétel miatt a baloldali sort szabad tagonként integrálni. Ekkor

$$2\sum_{i=1}^{\infty} a_i(1-\cos ih)\int_0^h \sin ix\, dx \le \varepsilon\, h \int_0^h 1 dx,$$

vagyis

$$2\sum_{i=1}^{\infty} a_i(1-\cos ih)\frac{1-\cos ih}{i} = 8\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} a_i \sin^4 \frac{ih}{2} \le \varepsilon\, h^2. \tag{3.27}$$

A (3.2) egyenlőtlenség szerint

$$\sin^4 \frac{ih}{2} \ge \frac{i^4 h^4}{\pi^4}, \quad i = 1, 2, \ldots, [1/h] := m,$$

ami alapján (3.27) becslését így folytathatjuk:

$$8\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{i} a_i \frac{i^4 h^4}{\pi^4} = \frac{8h^4}{\pi^4}\sum_{i=1}^{m} i^3 a_i \le \varepsilon\, h^2, \qquad 0 < h < h_0 \le 1,$$

ahonnan

$$\sum_{i=1}^{m} i^3 a_i \le \frac{\varepsilon\, \pi^4}{8h^2} \le \frac{\varepsilon\, \pi^4}{8}(m+1)^2 \le \frac{\varepsilon\, \pi^4}{2} m^2, \qquad \text{ha } m \ge 1/h_0.$$

Ebből a 8.2. Lemmát alkalmazva a $\gamma = 3$, $\mu = 2$ esetben következik a (3.25) feltétel, amit bizonyítani kellett.

(ii) *Elegendőség.* Tegyük fel, hogy (2.10) fennáll. Ekkor tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $m_0 = m_0(\varepsilon)$ pozitív egész, amelyre

$$\sum_{i=m}^{\infty} a_i \le \frac{\varepsilon}{m}, \quad \text{ha } m > m_0. \tag{3.28}$$

Ebben az esetben a 8.2. Lemma szerint ha $\gamma = 2,\ \mu = 1$, akkor megadható olyan $m_1 = m_1(\varepsilon)$ pozitív egész, hogy

$$\sum_{i=1}^{m} i^2 a_i \le \varepsilon\, m, \quad \text{ha } m > m_1. \tag{3.29}$$

Megmutatjuk, hogy $f_s \in \lambda_*$, azaz

$$|f_s(x+h) + f_s(x-h) - 2f_s(x)| \le \varepsilon\, h, \qquad \text{ha } 0 < |h| < h_0(\varepsilon).$$

A szimmetria miatt feltehetjük, hogy $h > 0$. (3.26)-ból kiindulva elemi számolás során adódik, hogy

$$\begin{aligned} |f_s(x+h) + f_s(x-h) - 2f_s(x)| &= 2\left|\sum_{i=1}^{\infty} a_i\, \sin ix(1-\cos ih)\right| \\ &\le 2\sum_{i=1}^{\infty} a_i(1-\cos ih) = 4\sum_{i=1}^{\infty} a_i\, \sin^2 \frac{ih}{2} \\ &= 4\left\{\sum_{i=1}^{m} + \sum_{i=m+1}^{\infty}\right\} a_i\, \sin^2 \frac{ih}{2} =: S_1 + S_2, \end{aligned} \tag{3.30}$$

ahol $m := [1/h]$. S_1-et a (3.29) feltétel segítségével becsüljük. Világos, hogy ekkor

$$S_1 \le 4\sum_{i=1}^{m} a_i \left(\frac{ih}{2}\right)^2 = h^2 \sum_{i=1}^{m} i^2\, a_i \le h^2 \varepsilon\, m \le \varepsilon\, h, \tag{3.31}$$

ha $m > m_1$, azaz ha $h < 1/m_1$. A (3.28) feltétel szerint S_2-re a következő becslést adhatjuk:

$$S_2 \le 4 \sum_{i=m+1}^{\infty} a_i \le 4\frac{\varepsilon}{m+1} \le 4\varepsilon\, h, \tag{3.32}$$

ha $m \ge m_0$, vagyis, ha $h < 1/m_0$.

Összefoglalva a kapott eredményeket, ha

$$h < h_0 := \min\{1/m_0, 1/m_1\},$$

akkor a (3.30)–(3.32) becslések szerint valóban $f_s \in \lambda_*$.

Ezzel a 2.7. Tételt bebizonyítottuk.

4. Kétváltozós trigonometrikus sorok és Lipschitz osztályok

Az egyváltozós esetnek megfelelően olyan kétváltozós trigonometrikus sorokat tekintünk, amelyek abszolút konvergensek, tehát egyenletesen is konvergensek, összegfüggvényük így létezik és folytonos. Vizsgáljuk tehát az (1.4) feltétellel az (1.5)–(1.7)-ben definiált kettős koszinusz, kettős szinusz és koszinusz-szinusz sorokat.

Az egyváltozós esethez hasonlóan jellemezzük azon kettős sorokat, amelyeknek az összegfüggvénye valamely kétváltozós (multiplikatív) Lipschitz ill. Zygmund osztályba tartozik. A 2. fejezetben bemutatott tételek jelentős részét kiterjesztjük kettős sorokra. Az alábbi tételeket tehát az egyváltozós esetekre vonatkozó megfelelő eredmények motiválták.

Az első eredmény pontosan a 2.1. Tétel kétváltozós megfelelője. Mivel a 2.1. Tétel mind a koszinusz, mind a szinusz sor esetén érvényes, azt várjuk, hogy a kétváltozós kiterjesztése nemcsak a kettős koszinusz és kettős szinusz, hanem a vegyes koszinusz-szinusz sor esetén egyaránt érvényes. Valóban, igaz a következő

4.1. Tétel (Fülöp [6], [7]). *Legyen* $\{a_{ij} : i, j = 1, 2, \ldots\}$ *nemnegatív számok tetszőleges kettős sorozata, amelyre az* (1.4) *feltétel teljesül, és jelölje* f *az* f_{cc}, f_{ss} *és* f_{cs} (1.5)–(1.7)*-ben definiált összegfüggvények egyikét. Ekkor* $f \in \mathrm{Lip}(\alpha, \beta)$ *valamely* $0 < \alpha, \beta < 1$ *esetén akkor és csak akkor, ha*

$$\sum_{i=m}^{\infty}\sum_{j=n}^{\infty} a_{ij} = O(m^{-\alpha}n^{-\beta}), \quad m, n = 1, 2, \ldots, \tag{4.1}$$

vagy ami ezzel ekvivalens,

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} ij\, a_{ij} = O(m^{1-\alpha}n^{1-\beta}), \quad m, n = 1, 2, \ldots\ . \tag{4.2}$$

Érvényes a tétel a $\mathrm{lip}(\alpha, \beta)$ osztályra kiterjesztett változata is:

4.2. Tétel (Fülöp). *Az előző tétel feltételei mellett* $f \in \mathrm{lip}(\alpha, \beta)$ *valamely* $0 < \alpha, \beta < 1$ *esetén akkor és csak akkor, ha* (4.1)–(4.2) *egyike, és ha*

$$\sum_{i=m}^{\infty}\sum_{j=n}^{\infty} a_{ij} = o(m^{-\alpha}n^{-\beta}), \quad m, n \to \infty, \tag{4.3}$$

vagy az ezzel ekvivalens

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} ij\, a_{ij} = o(m^{1-\alpha}n^{1-\beta}), \quad m, n \to \infty \tag{4.4}$$

feltétel teljesül, ahol m *és* n *egymástól függetlenül tartanak* ∞*-be.*

A (4.1) és a (4.2), ill. a (4.3) és a (4.4) feltételek ekvivalenciája következik a 8.3., ill. a 8.4. Lemmából (ha $\gamma = \delta = 1,\ \mu = 1 - \alpha,\ \nu = 1 - \beta$).

A $\max(\alpha, \beta) = 1$ határesetekben, az egyváltozós esethez hasonlóan, a szinusz és koszinusz sorok különbözőképpen viselkednek. Ekkor a (4.1) és a (4.2) (hasonlóan a (4.3) és a (4.4)) feltételek ekvivalenciája sem érvényes. Ugyanis, a (4.2) erősebb feltétel, mint (4.1) (hasonlóan a (4.4) erősebb feltétel, mint (4.3)), ha $\max(\alpha, \beta) = 1$.

A következő lépésben a 2.4. Tétel kettős szinusz sorra vonatkozó kiterjesztését gondoljuk kézenfekvőnek az egyszeres szinusz sorra vonatkozó feltétel egyszerűsége miatt. Az egyváltozós esetnek megfelelően érvényes, hogy ha $\alpha = \beta = 1$, akkor az erősebb (4.2) feltétel lesz alkalmas a $\mathrm{Lip}(1, 1)$ osztály jellemzésére a kettős szinusz sor esetében.

4.3. Tétel (Fülöp [6]). *Legyen* $\{a_{ij} : i, j = 1, 2, \ldots\}$ *nemnegatív számok tetszőleges kettős sorozata, amelyre* (1.4) *fennáll, és legyen* f_{ss} *az* (1.6)*-ban definiált függvény. Ekkor* $f_{ss} \in \mathrm{Lip}(1, 1)$ *akkor és csak akkor, ha*

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} ij\, a_{ij} = O(1), \quad m, n = 1, 2, \ldots \tag{4.5}$$

teljesül.

A kettős szinusz sor esetén a (4.5) feltétel éppen a (4.2) feltétel, ha $\alpha = \beta = 1$. Ugyanezzel a (4.2) feltétellel jellemezhetjük a $\mathrm{Lip}(\alpha, 1)$ osztályt, ha $0 < \alpha < 1,\ \beta = 1$.

4.4. Tétel (Fülöp [6]). *A 4.3. Tétel feltételei mellett* $f_{ss} \in \mathrm{Lip}(\alpha, 1)$ *valamely* $0 < \alpha < 1$ *esetén akkor és csak akkor, ha*

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} ij\, a_{ij} = O(m^{1-\alpha}), \quad m, n = 1, 2, \ldots \tag{4.6}$$

fennáll.

A $\mathrm{Lip}(1, \beta)$ $(\alpha = 1,\ 0 < \beta < 1)$ osztállyal a kettős szinusz sor változóinak szimmetriája miatt külön nem foglalkozunk.

A következő nyitott problémák további kutatás tárgyát képezik:

(i) A 4.1. Tétel a (4.2) feltétellel a kettős koszinusz és a koszinusz-szinusz sorok esetében is érvényes, ha $0 < \alpha, \beta < 1$. A kettős szinusz sorokra vonatkozó 4.5. Tétel (4.7) feltétele a 4.1. Tétel (4.2) feltételének a kiterjesztése a $0 < \alpha < 1$ és $\beta = 1$ esetre. Ennek alapján azt sejtettük, hogy a

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} ij\, a_{ij} = O(m^{1-\alpha}), \quad m, n = 1, 2, \ldots$$

feltétel a koszinusz-szinusz sor f_{cs} összegfüggvénye esetén is a $\mathrm{Lip}(\alpha, 1)$ $(0 < \alpha < 1, \beta = 1)$ osztályba való tartozás szükséges és elegendő feltétele lesz. A feltétel elegendőségét bizonyítottuk, viszont a feltétel szükségességét eddig még nem sikerült belátnunk.

(ii) Nyitott kérdés továbbá a vegyes koszinusz-szinusz sor esete, ha $\max(\alpha, \beta) = 1$, tehát, ha $f_{cs} \in \mathrm{Lip}(1, 1)$ és $f_{cs} \in \mathrm{Lip}(1, \beta)$ $(0 < \beta < 1)$, illetve az (i) részben említett $f_{cs} \in \mathrm{Lip}(\alpha, 1)$ $(0 < \alpha < 1)$, amely kérdésre részlegesen válaszoltunk.

(iii) Nem megoldott a kettős koszinusz sor $\mathrm{Lip}(\alpha, \beta)$ osztályba való tartozásának jellemzése, ha $\max(\alpha, \beta) = 1$, azaz ha $f_{cc} \in \mathrm{Lip}(1, 1)$, ill. $f_{cc} \in \mathrm{Lip}(\alpha, 1)$ $(0 < \alpha < 1)$. Ezekre a tételekre már az egyváltozós feltétel bonyolultsága miatt nem is kisérelünk meg sejtést adni.

Ezek a problémák mind arra vezethetők vissza, hogy a koszinusz és szinusz sorok már az egyváltozós esetben is eltérő módon viselkednek.

5. A 4. rész tételeinek bizonyítása

Az alábbi bizonyítások alapját a megfelelő egyváltozós esetekben igen részletesen tárgyalt bizonyítások képezik. Az ott alkalmazott módszereket alaposan átgondolva alkalmazzuk mindkét változóra az egyváltozós bizonyítások lépéseit. Különösen a koszinusz-szinusz sor esetében van szükség igen finom meggondolásokra. Ekkor ugyanis a koszinusz és a szinusz sornál már az egyváltozós bizonyításokban is meglévő különbségeket kell kombinálnunk.

A 4.1. Tétel bizonyítása.

Kettős koszinusz sor esete.

(i) *Szükségesség.* Legyen $f_{cc} \in \mathrm{Lip}(\alpha, \beta)$ $(0 < \alpha, \beta < 1)$, ekkor

$$|f_{cc}(x+h, y+k) - f_{cc}(x+h, y) - f_{cc}(x, y+k) + f_{cc}(x, y)| \le C|h|^\alpha |k|^\beta$$

teljesül minden x, y, h, k esetén. Legyen $0 < h, k \le 1$. Az $x = y = 0$ helyettesítéssel az alábbi adódik:

$$\begin{aligned}
&|f_{cc}(h,k) - f_{cc}(h,0) - f_{cc}(0,k) + f_{cc}(0,0)| \\
&= \left| \sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty a_{ij} (\cos ih \cos jk - \cos ih - \cos jk + 1) \right| \\
&= \sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty a_{ij} (1 - \cos ih)(1 - \cos jk) = \\
&= 4 \sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty a_{ij} \sin^2 \frac{ih}{2} \sin^2 \frac{jk}{2} \le C h^\alpha k^\beta.
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Felhasználva a

$$\sin t \ge \frac{2}{\pi} t, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \tag{5.2}$$

egyenlőtlenséget, írhatjuk, hogy

$$\sin^2 \frac{ih}{2} \ge \left(\frac{2}{\pi} \frac{ih}{2} \right)^2 = \frac{i^2 h^2}{\pi^2}, \quad i = 1, 2, \ldots, [1/h] =: m$$

és

$$\sin^2 \frac{jk}{2} \geq \frac{j^2k^2}{\pi^2}, \quad j = 1, 2, \ldots, [1/k] =: n,$$

ahol [.] az egész részt jelöli. Ezek alapján következik, hogy

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \sin^2 \frac{ih}{2} \sin^2 \frac{jk}{2} &\geq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{i^2h^2}{\pi^2}\frac{j^2k^2}{\pi^2} \\ &= \frac{h^2k^2}{\pi^4}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} i^2j^2\, a_{ij}.\end{aligned}$$

Ezt összehasonlítva (5.1)-gyel és megjegyezve, hogy nemnegatív tagú kettős sorról van szó, nyerjük, hogy

$$4\frac{h^2k^2}{\pi^4}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} i^2j^2\, a_{ij} \leq Ch^\alpha k^\beta, \tag{5.3}$$

amelyből adódik, hogy

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} i^2j^2\, a_{ij} &\leq \frac{C\pi^4}{4}h^{\alpha-2}k^{\beta-2} \leq \frac{C\pi^4}{4}(m+1)^{2-\alpha}(n+1)^{2-\beta} \\ &\leq \frac{C\pi^4}{4}(2m)^{2-\alpha}(2n)^{2-\beta} = C\pi^4 2^{2-\alpha-\beta}m^{2-\alpha}n^{2-\beta},\end{aligned} \tag{5.4}$$

ahol $m := [1/h]$, $n := [1/k]$. Ekkor a 8.3. Lemma szerint, ha $\gamma = \delta = 2$, $\mu = 2-\alpha$, $\nu = 2-\beta$ kapjuk, hogy

$$\sum_{i=m}^{\infty}\sum_{j=n}^{\infty} a_{ij} = O(m^{-\alpha}n^{-\beta}), \quad m, n = 1, 2, \ldots,$$

ami éppen (4.1), amit bizonyítanunk kellett.

(ii) *Elegendőség.* Tegyük fel, hogy (4.1) és az ezzel ekvivalens (4.2) fennáll. Ekkor vannak olyan K_1 és K_2 m-től és n-től független állandók, hogy

$$\sum_{i=m}^{\infty}\sum_{j=n}^{\infty} a_{ij} \leq \frac{K_1}{m^\alpha n^\beta}, \quad m, n = 1, 2, \ldots \tag{5.5}$$

és

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} ij\, a_{ij} \leq K_2 m^{1-\alpha}n^{1-\beta}, \quad m, n = 1, 2, \ldots\ . \tag{5.6}$$

Megmutatjuk, hogy $f_{cc} \in \mathrm{Lip}(\alpha, \beta)$. Az 1.5. Definícióban szereplő (1.8) különbség becsléséhez a megfelelő egyváltozós bizonyításban használt (3.5) trigonometrikus összefüggések szorzatát használjuk:

$$(\cos\alpha - \cos\beta)(\cos\gamma - \cos\delta) = 4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\gamma+\delta}{2}\sin\frac{\gamma-\delta}{2}.$$

Tehát egyszerű számolással adódik, hogy

$$\begin{aligned} &|f_{cc}(x+2h, y+2k) - f_{cc}(x+2h, y) - f_{cc}(x, y+2k) + f_{cc}(x,y)| \\ &= 4\left|\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\sin i(x+h)\sin ih\sin j(y+k)\sin jk\right| \\ &\leq 4\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}\sin i(x+h)\sin ih\sin j(y+k)\sin jk|. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Becsüljük ezt a kettős sort a

$$|\sin i(x+h)| \leq 1 \quad \text{és} \quad |\sin j(y+k)| \leq 1$$

egyenlőtlenségekkel, majd bontsuk négy részre az alábbi módon:

$$\begin{aligned} &|f_{cc}(x+2h, y+2k) - f_{cc}(x+2h, y) - f_{cc}(x, y+2k) + f_{cc}(x,y)| \\ &\leq 4\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}|\sin ih\sin jk| \\ &= 4\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} + \sum_{i=m+1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=n+1}^{\infty} + \sum_{i=m+1}^{\infty}\sum_{j=n+1}^{\infty}\right\} a_{ij}|\sin ih\sin jk| \\ &=: S_1 + S_2 + S_3 + S_4, \end{aligned} \tag{5.8}$$

ahol $m := [1/|h|]$ és $n := [1/|k|]$. A

$$|\sin ih| \leq |ih| \quad \text{és} \quad |\sin jk| \leq |jk|$$

egyenlőtlenségek és (5.6) szerint írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} S_1 &= 4\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}|\sin ih\sin jk| \leq 4|h||k|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} ij\, a_{ij} \\ &\leq 4|h||k|K_2 m^{1-\alpha}n^{1-\beta} \leq 4|h||k|K_2|h|^{\alpha-1}|k|^{\beta-1} \\ &= 4K_2|h|^{\alpha}|k|^{\beta}. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Tekintsük most S_2-t. A

$$|\sin ih| \le 1 \quad \text{és a} \quad |\sin jk| \le |jk|$$

egyenlőtlenségek miatt világos, hogy

$$S_2 = 4 \sum_{i=m+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} |\sin ih \sin jk| \le 4|k| \sum_{i=m+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} j\, a_{ij}. \tag{5.10}$$

Legyen N pozitív egész, amelyre $1 \le n < N$. Végezzünk Abel átrendezést az előbbi egyenlőtlenség jobb oldalán a j index szerint:

$$\begin{aligned} \sum_{i=m+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} j a_{ij} &= \sum_{i=m+1}^{\infty} \left\{ \sum_{j_1=1}^{n} \sum_{j=j_1}^{N} a_{ij} - n \sum_{j=n+1}^{N} a_{ij} \right\} \\ &\le \sum_{i=m+1}^{\infty} \sum_{j_1=1}^{n} \sum_{j=j_1}^{N} a_{ij}. \end{aligned}$$

Ezért, ha $N \to \infty$, akkor (5.5) alapján az (5.10) becslést így folytatjuk:

$$\begin{aligned} S_2 &\le 4|k| \sum_{j_1=1}^{n} \sum_{i=m+1}^{\infty} \sum_{j=j_1}^{\infty} a_{ij} \le 4|k| \sum_{j_1=1}^{n} \frac{K_1}{(m+1)^{\alpha} j_1^{\beta}} \\ &\le 4K_1 |h|^{\alpha} |k| \sum_{j_1=1}^{n} \frac{1}{j_1^{\beta}}. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Ha $0 < \beta < 1$, akkor

$$\sum_{j_1=1}^{n} \frac{1}{j_1^{\beta}} \le \int_0^n \frac{1}{x^{\beta}} dx = \frac{n^{1-\beta}}{1-\beta}. \tag{5.12}$$

E szerint (5.11)-ből nyerjük, hogy

$$S_2 \le 4K_1 |h|^{\alpha} |k| \frac{n^{1-\beta}}{1-\beta} \le \frac{4K_1}{1-\beta} |h|^{\alpha} |k|^{\beta}. \tag{5.13}$$

A szimmetria miatt hasonlóan adódik, hogy

$$S_3 \le \frac{4K_1}{1-\alpha} |h|^{\alpha} |k|^{\beta}. \tag{5.14}$$

Végül, S_4 becslése igen egyszerű: a $|\sin ih \sin jk| \le 1$ és (5.5) szerint

$$\begin{aligned} S_4 &= 4\sum_{i=m+1}^{\infty}\sum_{j=n+1}^{\infty} a_{ij}|\sin ih \sin jk| \le 4\sum_{i=m+1}^{\infty}\sum_{j=n+1}^{\infty} a_{ij} \\ &\le 4\frac{K_1}{(m+1)^\alpha(n+1)^\beta} \le 4K_1|h|^\alpha|k|^\beta. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Összefoglalva a kapott eredményeket, (5.8), (5.9) és (5.13)–(5.15) adja, hogy $f_{cc} \in \mathrm{Lip}(\alpha,\beta)$.

Kettős szinusz sor esete.

(iii) *Szükségesség.* Legyen $f_{ss} \in \mathrm{Lip}(\alpha,\beta)$, azaz, ha $x = y = 0$ és $0 < h, k \le 1$, akkor

$$|f_{ss}(h,k) - f_{ss}(h,0) - f_{ss}(0,k) + f_{ss}(0,0)| = |f_{ss}(h,k)| \le Ch^\alpha k^\beta.$$

Speciálisan, ha h, k helyébe x-et és y-t írunk, kapjuk, hogy

$$|f_{ss}(x,y)| = \left|\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\sin ix \sin jy\right| \le Cx^\alpha y^\beta, \quad x > 0,\ y > 0, \tag{5.16}$$

azaz

$$-Cx^\alpha y^\beta \le \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\sin ix \sin jy \le Cx^\alpha y^\beta, \quad x > 0,\ y > 0.$$

Integráljuk az egyenlőtlenséget a $(0,h)$ intervallumon, először az x változó szerint. Az együtthatókra vonatkozó (1.4) feltétel miatt a fenti kettős sort szabad tagonként integrálni:

$$-Cy^\beta\int_0^h x^\alpha dx \le \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\sin jy\int_0^h \sin ixdx \le Cy^\beta\int_0^h x^\alpha dx, \tag{5.17}$$

ahonnan

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\sin jy\frac{1-\cos ih}{i}\right| \le \frac{C}{\alpha+1}h^{\alpha+1}y^\beta.$$

Ezután a $(0,k)$ intervallumon az y változó szerint integrálva nyerjük, hogy

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\frac{1-\cos ih}{i}\frac{1-\cos jk}{j} &= 4\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{ij}a_{ij}\sin^2\frac{ih}{2}\sin^2\frac{jk}{2} \\ &\le \frac{C}{(\alpha+1)(\beta+1)}h^{\alpha+1}k^{\beta+1}, \end{aligned} \tag{5.18}$$

figyelembe véve, hogy az egyenletes konvergencia megmaradt. Megismételjük erre a sorra az (i) részben látottakat. Az (5.2) egyenlőtlenség szerint ha $m := [1/h]$ és $n := [1/k]$, akkor

$$\sin^2 \frac{ih}{2} \geq \frac{i^2h^2}{\pi^2}, \quad i = 1, 2, \ldots, m \quad \text{és} \quad \sin^2 \frac{jk}{2} \geq \frac{j^2k^2}{\pi^2}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{5.19}$$

Ebből és (5.18)-ból következik, hogy

$$\begin{aligned} &4 \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{ij} a_{ij} \frac{i^2h^2}{\pi^2} \frac{j^2k^2}{\pi^2} \\ &= \frac{4h^2k^2}{\pi^4} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} ij\, a_{ij} \leq \frac{C}{(\alpha+1)(\beta+1)} h^{\alpha+1} k^{\beta+1}, \end{aligned} \tag{5.20}$$

amelyből adódik, hogy

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} ij\, a_{ij} &\leq \frac{C\pi^4}{4(\alpha+1)(\beta+1)} h^{\alpha-1} k^{\beta-1} \\ &\leq \frac{C\pi^4}{4(\alpha+1)(\beta+1)} (m+1)^{1-\alpha} (n+1)^{1-\beta} \\ &\leq \frac{C\pi^4}{4(\alpha+1)(\beta+1)} (2m)^{1-\alpha} (2n)^{1-\beta} \\ &= \frac{C\pi^4 2^{-\alpha-\beta}}{(\alpha+1)(\beta+1)} m^{1-\alpha} n^{1-\beta}. \end{aligned} \tag{5.21}$$

Ez éppen (4.2), amit bizonyítani kellett.

(iv) *Elegendőség.* Tegyük fel, hogy (4.1) és az ezzel ekvivalens (4.2) fennáll. Belátjuk, hogy $f_{ss} \in \mathrm{Lip}(\alpha, \beta)$. Az 1.5. Definícióban szereplő (1.8) különbség becsléséhez az alábbi trigonometrikus összefüggést használjuk:

$$(\sin \alpha - \sin \beta)(\sin \gamma - \sin \delta) = 4 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \cos \frac{\gamma+\delta}{2} \sin \frac{\gamma-\delta}{2}.$$

Ez alapján tehát írhatjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
&|f_{ss}(x+2h,y+2k)-f_{ss}(x+2h,y)-f_{ss}(x,y+2k)+f_{ss}(x,y)| \\
&= 4\left|\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\cos i(x+h)\sin ih\cos j(y+k)\sin jk\right| \\
&\le 4\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}\cos i(x+h)\sin ih\cos j(y+k)\sin jk| \\
&\le 4\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}|\sin ih\sin jk|.
\end{aligned}
\tag{5.22}
$$

Ez a kifejezés megegyezik az (ii) rész (5.8) formulájával f_{cc} helyén az f_{ss} függvénnyel. Mivel a kiindulási feltételek ugyanazok, így az ott leírt bizonyítást megismételve adódik, hogy $f_{ss} \in \mathrm{Lip}(\alpha,\beta)$.

Koszinusz-szinusz sor esete.

(v) *Szükségesség.* Ha $f_{cs} \in \mathrm{Lip}(\alpha,\beta)$, akkor

$$|f_{cs}(x+h,y+k)-f_{cs}(x+h,y)-f_{cs}(x,y+k)+f_{cs}(x,y)| \le C|h|^{\alpha}|k|^{\beta}$$

minden x,y,h,k esetén. Speciálisan $x=y=0$ és $0<h,k\le 1$ esetén

$$
\begin{aligned}
&|f_{cs}(h,k)-f_{cs}(h,0)-f_{cs}(0,k)+f_{cs}(0,0)| = |f_{cs}(h,k)-f_{cs}(0,k)| \\
&= \left|\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}(1-\cos ih)\sin jk\right| \le Ch^{\alpha}k^{\beta}.
\end{aligned}
$$

Ha k helyébe y-t helyettesítünk, nyerjük, hogy

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}(1-\cos ih)\sin jy\right| \le Ch^{\alpha}y^{\beta}, \quad y>0.$$

A következőkben a (iii) rész lépéseit követjük. A $(0,k)$ intervallumon az y változó szerint integrálva adódik, hogy

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}(1-\cos ih)\frac{1-\cos jk}{j} \le \frac{C}{\beta+1}h^{\alpha}k^{\beta+1},$$

vagyis

$$4\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}a_{ij}\sin^2\frac{ih}{2}\sin^2\frac{jk}{2}\le\frac{C}{\beta+1}h^{\alpha}k^{\beta+1}.$$

Ebből az (5.19) egyenlőtlenségek szerint, ha $m := [1/h]$, $n := [1/k]$, a szokásos módon következik, hogy

$$4\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}a_{ij}\frac{i^2h^2}{\pi^2}\frac{j^2k^2}{\pi^2}=\frac{4h^2k^2}{\pi^4}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}i^2j\,a_{ij}\le\frac{C}{\beta+1}h^{\alpha}k^{\beta+1},$$

ahonnan kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}i^2j\,a_{ij}&\le\frac{C\pi^4}{4(\beta+1)}h^{\alpha-2}k^{\beta-1}\le\frac{C\pi^4}{4(\beta+1)}(m+1)^{2-\alpha}(n+1)^{1-\beta}\\&\le\frac{C\pi^4 2^{1-\alpha-\beta}}{(\beta+1)}m^{2-\alpha}n^{1-\alpha}.\end{aligned}$$

Ekkor a 8.3. Lemma szerint, ha $\gamma=2,\ \delta=1,\ \mu=2-\alpha$ és $\nu=1-\beta$ írhatjuk, hogy

$$\sum_{i=m}^{\infty}\sum_{j=n}^{\infty}a_{ij}=O(m^{-\alpha}n^{-\beta}),\quad m,n=1,2,\ldots,$$

ami éppen (4.1).

(vi) *Elegendőség.* Tegyük fel, hogy (4.1) és az ezzel ekvivalens (4.2) fennáll. Most, mivel vegyes sorról van szó, a

$$(\cos\alpha-\cos\beta)(\sin\gamma-\sin\delta)=-4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\gamma+\delta}{2}\sin\frac{\gamma-\delta}{2}$$

trigonometrikus összefüggés alapján nyerjük, hogy

$$\begin{aligned}&|f_{cs}(x+2h),y+2k)-f_{cs}(x+2h,y)-f_{cs}(x,y+2k)+f_{cs}(x,y)|\\&=4\left|\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\sin i(x+h)\sin ih\cos j(y+k)\sin jk\right|\\&\le 4\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}|\sin ih\sin jk|.\end{aligned}$$

Ez a kifejezés ismét megegyezik az (ii) rész (5.8) formulájával f_{cc} helyén az f_{cs} függvénnyel. Mivel a feltételek ugyanazok, az $f_{cs}\in\mathrm{Lip}(\alpha,\beta)$ igazolása pontosan ugyanúgy megy, mint az (ii) részben.

Ezzel a 4.1. Tételt bebizonyítottuk.

A 4.2. Tétel bizonyítása.

Ebben a bizonyításban az előző bizonyítás lépéseit fogjuk megismételni alkalmas módosításokkal.

Kettős koszinusz sor esete.

(vii) *Szükségesség.* Ha $f_{cc} \in \mathrm{lip}(\alpha, \beta)$, akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $h_0 = h_0(\varepsilon) > 0$, hogy

$$|f_{cc}(x+h, y+k) - f_{cc}(x+h, y) - f_{cc}(x, y+k) + f_{cc}(x, y)| \leq \varepsilon |h|^\alpha |k|^\beta$$

minden x, y esetén, ha $0 < |h|, |k| < h_0$. Feltehetjük, hogy $0 < h, k < h_0 \leq 1$. Az $x = y = 0$ helyettesítéssel kapjuk az előző bizonyítás (i) részében az (5.1)-nek megfelelő kifejezést:

$$\begin{aligned} &|f_{cc}(h,k) - f_{cc}(h,0) - f_{cc}(0,k) + f_{cc}(0,0)| \\ &= 4 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \sin^2 \frac{ih}{2} \sin^2 \frac{jk}{2} \leq \varepsilon\, h^\alpha k^\beta. \end{aligned} \tag{5.23}$$

Mivel definíció szerint $\mathrm{lip}(\alpha, \beta) \subset \mathrm{Lip}(\alpha, \beta)$, ezért a 4.1. Tétel szerint a (4.1) vagy az ezzel ekvivalens (4.2) feltétel biztosan teljesül. Megmutatjuk, hogy (4.3) is teljesül, azaz megadható olyan $m_0 = m_0(\varepsilon)$ pozitív egész, hogy

$$\sum_{i=m}^{\infty} \sum_{j=n}^{\infty} a_{ij} \leq \frac{\varepsilon}{m^\alpha n^\beta}, \quad \text{ha} \quad m, n \geq m_0. \tag{5.24}$$

Legyen $m := [1/h]$, és $n := [1/k]$. Megismételjük a 4.1. Tétel bizonyításának az (5.1)–(5.4) lépéseit. Ekkor (5.23) alapján világos, hogy

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} i^2 j^2\, a_{ij} \leq \varepsilon\, \pi^4 2^{2-\alpha-\beta} m^{2-\alpha} n^{2-\beta},$$

ha $0 < h, k < h_0 \leq 1$, azaz, ha $m, n \geq 1/h_0$. Innen pedig a 8.4. Lemma szerint adódik (5.24), ha $\gamma = \delta = 2,\ \mu = 2 - \alpha,\ \nu = 2 - \beta$.

(viii) *Elegendőség.* Tegyük fel, hogy (4.1), (4.3) és az ezzel ekvivalens (4.4) fennáll, azaz van olyan m-től és n-től független K_1 állandó, hogy

$$\sum_{i=m}^{\infty}\sum_{j=n}^{\infty} a_{ij} \le \frac{K_1}{m^\alpha n^\beta}, \quad m,n=1,2,\dots, \tag{5.25}$$

továbbá ha $\varepsilon > 0$ tetszőleges, akkor vannak olyan $m_0 = m_0(\varepsilon)$ és $m_1 = m_1(\varepsilon)$ pozitív egészek, hogy

$$\sum_{i=m}^{\infty}\sum_{j=n}^{\infty} a_{ij} \le \frac{\varepsilon}{m^\alpha n^\beta}, \quad \text{ha} \quad m,n > m_0 \tag{5.26}$$

és

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} ij\, a_{ij} \le \varepsilon m^{1-\alpha} n^{1-\beta}, \quad \text{ha} \quad m,n > m_1. \tag{5.27}$$

Célunk annak belátása, hogy $f_{cc} \in \mathrm{lip}(\alpha,\beta)$, azaz olyan $h_0 = h_0(\varepsilon)$ megadása, amelyre

$$|f_{cc}(x+h,y+k) - f_{cc}(x+h,y) - f_{cc}(x,y+k) + f_{cc}(x,y)| \le \varepsilon |h|^\alpha |k|^\beta$$

minden x,y-ra, ha $0 < |h|,|k| < h_0$. Legyen $m := [1/|h|]$, $n := [1/|k|]$. Végezzük el most az ennek megfelelő (ii) rész (5.7)–(5.8) becsléseit:

$$\begin{aligned} &|f_{cc}(x+2h,y+2k) - f_{cc}(x+2h,y) - f_{cc}(x,y+2k) + f_{cc}(x,y)| \\ &\le 4\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} + \sum_{i=m+1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=n+1}^{\infty} + \sum_{i=m+1}^{\infty}\sum_{j=n+1}^{\infty}\right\} a_{ij} |\sin ih \ \sin jk| \\ &=: S_1 + S_2 + S_3 + S_4. \end{aligned} \tag{5.28}$$

Az (ii) rész (5.9) lépése és (5.27) alapján írhatjuk, hogy

$$S_1 \le 4|h||k| \varepsilon\, m^{1-\alpha} n^{1-\beta} \le 4\varepsilon |h|^\alpha |k|^\beta, \tag{5.29}$$

ha $m,n > m_1$, azaz, ha $0 < |h|,|k| < 1/m_1$. Legyen most $m,n > m_0$. S_2- re rátérve (5.11) első fele szerint adódik, hogy

$$\begin{aligned} S_2 &\le 4|k| \sum_{j_1=1}^{n} \sum_{i=m+1}^{\infty} \sum_{j=j_1}^{\infty} a_{ij} \\ &= 4|k| \left\{ \sum_{j_1=1}^{m_0} + \sum_{j_1=m_0+1}^{n} \right\} \sum_{j=m+1}^{\infty} \sum_{j=j_1}^{\infty} a_{ij}. \end{aligned}$$

Ebből (5.25) és (5.26) felhasználásával kapjuk, hogy

$$S_2 \le 4|k| \sum_{j_1=1}^{m_0} \frac{K_1}{(m+1)^\alpha j_1^\beta} + 4|k| \sum_{j_1=m_0+1}^{n} \frac{\varepsilon}{(m+1)^\alpha j_1^\beta}$$
$$\le \frac{4|k|K_1}{(m+1)^\alpha} \sum_{j_1=1}^{m_0} \frac{1}{j_1^\beta} + \frac{4|k|\varepsilon}{(m+1)^\alpha} \sum_{j_1=1}^{n} \frac{1}{j_1^\beta},$$

ahonnan (5.12) szerint következik, hogy

$$S_2 \le \frac{4|k|K_1}{(m+1)^\alpha} \frac{m_0^{1-\beta}}{1-\beta} + \frac{4|k|\varepsilon}{(m+1)^\alpha} \frac{n^{1-\beta}}{1-\beta}$$
$$\le \frac{4K_1}{1-\beta}|h|^\alpha |k| m_0^{1-\beta} + \frac{4\varepsilon}{1-\beta}|h|^\alpha |k|^\beta \tag{5.30}$$
$$\le \frac{8\varepsilon}{1-\beta}|h|^\alpha |k|^\beta, \text{ ha } |k| \le \left(\frac{\varepsilon}{K_1}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} \frac{1}{m_0} \text{ és } 0 < |h|, |k| < 1/m_0.$$

A szimmetria miatt hasonlóan nyerjük, hogy

$$S_3 \le \frac{8\varepsilon}{1-\alpha}|h|^\alpha |k|^\beta, \text{ ha } |h| \le \left(\frac{\varepsilon}{K_1}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{1}{m_0} \text{ és } 0 < |h|, |k| < 1/m_0. \tag{5.31}$$

Végül S_4-et (5.15) és (5.26) alapján becsüljük:

$$S_4 \le 4\frac{\varepsilon}{(m+1)^\alpha (n+1)^\beta} \le 4\varepsilon |h|^\alpha |k|^\beta, \tag{5.32}$$

ha $m, n > m_0$, azaz, ha $0 < |h|, |k| < 1/m_0$.

Összegezve a kapott eredményeket, ha

$$0 < |h|, |k| < \min\left\{\frac{1}{m_0}, \frac{1}{m_1}, \left(\frac{\varepsilon}{K_1}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} \frac{1}{m_0}, \left(\frac{\varepsilon}{K_1}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} \frac{1}{m_0}\right\},$$

akkor (5.28)–(5.32) alapján adódik, hogy $f_{cc} \in \mathrm{lip}(\alpha, \beta)$.

Kettős szinusz sor esete.

(ix) *Szükségesség.* Tegyük fel, hogy $f_{ss} \in \mathrm{lip}(\alpha, \beta)$, azaz ha $\varepsilon > 0$ tetszőleges és speciálisan $x = y = 0$, és $0 < h, k < h_0 = h_0(\varepsilon) \le 1$, akkor

$$|f_{ss}(h,k) - f_{ss}(h,0) - f_{ss}(0,k) + f_{ss}(0,0)| = |f_{ss}(h,k)| \le \varepsilon h^\alpha k^\beta. \tag{5.33}$$

Továbbá, mivel $\mathrm{lip}(\alpha,\beta) \subset \mathrm{Lip}(\alpha,\beta)$, a 4.1. Tétel szerint teljesül a (4.1) és az ezzel ekvivalens (4.2) feltétel. Legyen $0 < h, k < h_0 \leq 1$. Most az ennek a résznek megfelelő (iii) rész menetét követjük. Elvégezve a (iii) rész (5.16)–(5.18) lépéseit, (5.33)-ból világos, hogy

$$4\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{ij}a_{ij}\sin^2\frac{ih}{2}\sin^2\frac{jk}{2} \leq \frac{\varepsilon}{(\alpha+1)(\beta+1)}h^{\alpha+1}k^{\beta+1}.$$

Innen az (5.19)–(5.21) becslések szerint írhatjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} ij\, a_{ij} \leq \frac{\varepsilon\,\pi^4 2^{-\alpha-\beta}}{(\alpha+1)(\beta+1)}m^{1-\alpha}n^{1-\beta},$$

ahol $m := [1/h]$, $n := [1/k]$ és $0 < h, k < h_0 \leq 1$, azaz $m, n \geq 1/h_0$. Ez pedig éppen (4.4), amit bizonyítani akartunk.

(x) *Elegendőség.* Már a 4.1. Tétel bizonyításának elegendőség része is megegyezett mindhárom kettős sor esetében. Így a kettős koszinusz sor esetében a (viii) részben részletezett bizonyítás szerint következik a (4.1)–(4.2) és a (4.3)–(4.4) feltételek elegendősége.

Koszinusz-szinusz sor esete.

(xi) *Szükségesség.* Az előző tétel bizonyítása (v) részét elemezve, ez a bizonyítás is nagyon hasonlóan megy a kettős koszinusz és a kettős szinusz sornál a (vii) és az (ix) részben leírt bizonyításokhoz. Ezért ennek újbóli részletezésétől most már eltekintünk.

(xii) *Elegendőség.* A kettős koszinusz sor esetében a (viii) részben leírt bizonyítást megismételve adódik a feltételek elegendősége.

A 4.2. Tételt ezzel teljesen bebizonyítottuk.

A 4.3. Tétel bizonyítása.

A 3. fejezet elején megjegyeztük, hogy a 4.3. Tétel egyváltozós megfelelőjének – a 2.4. Tételnek – elegendőség részére Boas az itt bemutatottól eltérő bizonyítást adott. Akkor felsoroltuk a Boas által használt segédtételeket. Ezek a tételek mind kiterjeszthetők kétváltozóra, így Boas bizonyítása alkalmazható a kettős szinusz sor esetében is. A segédtételek kétváltozóra való kiterjesztése és Boas bizonyításának kiterjesztése részletesen a [7] pályamunkában tárgyaltuk. Az értekezésünkben az eddigi felépítést követő bizonyítást olvashatjuk.

(i) *Szükségesség.* A 4.1. Tétel bizonyításának kettős szinusz sorra vonatkozó (iii) részét fogjuk követni. Legyen tehát $f_{ss} \in \mathrm{Lip}(1,1)$, azaz, ha $x = y = 0$ és $0 < h, k \leq 1$, akkor

$$|f_{ss}(h,k) - f_{ss}(h,0) - f_{ss}(0,k) + f_{ss}(0,0)| = |f_{ss}(h,k)| \leq Chk,$$

speciálisan

$$|f_{ss}(x,y)| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \sin ix \sin jy \right| \leq Cxy, \quad x, y > 0,$$

vagyis érvényes az (iii) rész (5.16)-os formulája, ha $\alpha = \beta = 1$. Végezzük el az (iii) rész (5.17)–(5.18) lépéseit, azaz integráljuk ezt az egyenlőtlenséget először az x változó szerint a $(0,h)$ intervallumon, majd az y változó szerint a $(0,k)$ intervallumon. Ekkor az (5.18)-nak megfelelő kifejezést kapjuk, ahol $\alpha = \beta = 1:$

$$4 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{ij} a_{ij} \sin^2 \frac{ih}{2} \sin^2 \frac{jk}{2} \leq \frac{C}{4} h^2 k^2.$$

Legyen $m := [1/h]$, $n := [1/k]$, $0 < h, k \leq 1$. Az (5.19)–(5.20) becslésekkel folytatva írhatjuk, hogy

$$\frac{4h^2k^2}{\pi^4} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} ij\, a_{ij} \leq \frac{C}{4} h^2 k^2,$$

amelyből egyszerűen adódik a (4.5) feltétel:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} ij\, a_{ij} \leq \frac{C\pi^4}{16},$$

amit bizonyítani akartunk. Láthatjuk, hogy ez éppen az (iii) rész (5.21) formulája, ha $\alpha = \beta = 1$.

Tehát megállapíthatjuk, hogy a 4.1. Tétel bizonyítása (iii) részében a $0 < \alpha, \beta < 1$ esetben leírt bizonyítás érvényben marad az $\alpha = \beta = 1$ esetben is.

(ii) *Elegendőség.* Tegyük fel, hogy (4.5) fennáll, azaz van olyan m-től és n-től független K_1 állandó, amelyre

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} ij\, a_{ij} \le K_1, \quad m,n = 1,2,\dots . \tag{5.34}$$

Ekkor a 8.3. Lemmából a $\gamma = \delta = 1$, $\mu = \nu = 0$ esetben következik, hogy van olyan m-től és n-től független K_2 állandó, amelyre

$$\sum_{i=m}^{\infty}\sum_{j=n}^{\infty} a_{ij} \le \frac{K_2}{mn}, \quad m,n = 1,2,\dots . \tag{5.35}$$

Megmutatjuk, hogy $f_{ss} \in \mathrm{Lip}(1,1)$. A 4.1. Tétel (iii) részében már elvégzett számolás, (5.22) szerint látjuk, hogy

$$\begin{aligned} &|f_{ss}(x+2h, y+2k) - f_{ss}(x+2h, y) - f_{ss}(x, y+2k) + f_{ss}(x,y)| \\ &\le 4\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}|\sin ih\, \sin jk|, \end{aligned} \tag{5.36}$$

Tekintsük ezt a kettős sort az alábbi felbontásban:

$$\begin{aligned} &4\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} + \sum_{i=m+1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=n+1}^{\infty} + \sum_{i=m+1}^{\infty}\sum_{j=n+1}^{\infty}\right\} a_{ij}|\sin ih\, \sin jk| \\ &=: S_1 + S_2 + S_3 + S_4, \end{aligned} \tag{5.37}$$

ahol $m := [1/|h|]$, $n := [1/|k|]$. S_1-et és S_4-et a szokásos módon becsüljük, úgy, ahogy a 4.1. Tétel bizonyításának (ii) részében a kettős koszinusz sor esetében láttuk. (5.34) és (5.35) alapján nyerjük, hogy

$$S_1 \le 4|h||k| \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} ij\, a_{ij} \le 4K_1|h||k|, \tag{5.38}$$

$$S_4 \le 4 \sum_{i=m+1}^{\infty}\sum_{j=n+1}^{\infty} a_{ij} \le 4\frac{K_2}{(m+1)(n+1)} \le 4K_2|h||k|. \tag{5.39}$$

S_2-t és S_3-at eltérő módon becsüljük. Vizsgáljuk először S_2-t. Világos, hogy

$$S_2 \le 4|k| \sum_{i=m+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} j\, a_{ij} = 4|k| \sum_{j=1}^{n} j \sum_{i=m+1}^{\infty} a_{ij}. \tag{5.40}$$

A jobb oldal becsléséhez tekintsük a következő kettős sort:

$$\sum_{j=1}^{n} j \sum_{i=m}^{M} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} j \sum_{i=m}^{M} i^{-1}(i\, a_{ij}),$$

ahol M tetszőleges pozitív egész, amelyre $2 \le m < M$. Végezzünk ezen a soron Abel átrendezést az i index szerint:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} j \sum_{i=m}^{M} i^{-1}(i\, a_{ij}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} j \left\{ -\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m-1} i\, a_{ij} + \sum_{i_1=m}^{M-1} \left(\frac{1}{i_1} - \frac{1}{i_1+1} \right) \sum_{i=1}^{i_1} i\, a_{ij} + \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} i\, a_{ij} \right\} \\
&\le \sum_{j=1}^{n} j \left\{ \sum_{i_1=m}^{M-1} \frac{1}{i_1^2} \sum_{i=1}^{i_1} i\, a_{ij} + \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} i\, a_{ij} \right\} \\
&= \sum_{i_1=m}^{M-1} \frac{1}{i_1^2} \sum_{i=1}^{i_1} \sum_{j=1}^{n} ij\, a_{ij} + \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{n} ij\, a_{ij}.
\end{aligned} \tag{5.41}$$

Az (5.34) feltétel miatt ebből következik, hogy

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} j \sum_{i=m}^{M} i^{-1}(i\, a_{ij}) &\le \sum_{i_1=m}^{M-1} \frac{1}{i_1^2} K_1 + \frac{1}{M} K_1 \\
&\le K_1 \frac{1}{m-1} + K_1 \frac{1}{M} \le K_1 \frac{3}{m+1} + K_1 \frac{1}{M},
\end{aligned}$$

ahonnan ha $M \to \infty$ kapjuk, hogy

$$\sum_{j=1}^{n} j \sum_{i=m}^{\infty} a_{ij} \le 3K_1 \frac{1}{m+1},$$

amely alapján (5.40) becslését így folytatjuk:

$$S_2 \le 4|k| 3K_1 \frac{1}{m+1} \le 12K_1|h||k|. \tag{5.42}$$

A szimmetria miatt hasonlóan adódik, hogy

$$S_3 \le 12K_1|h||k|. \tag{5.43}$$

Összefoglalva, (5.36)–(5.39), (5.42)–(5.43) adja, hogy $f_{ss} \in \mathrm{Lip}(1,1)$.

A 4.4. Tétel bizonyítása.

(i) *Szükségesség.* Korábban megjegyeztük, hogy a $\mathrm{Lip}(\alpha,\beta)$ osztályra vonatkozó 4.1. Tétel bizonyításának kettős szinusz sorra vonatkozó (iii) szükségességi része érvényes az $\alpha = \beta = 1$ esetben is. Tehát az ott leírt bizonyítást szó szerint megismételjük a $0 < \alpha < 1, \beta = 1$ esetben, adódik a (4.6) feltétel szükségessége.

(ii) *Elegendőség.* Tegyük fel, hogy a (4.6) feltétel fennáll, azaz van olyan m-től és n-től független K_1 állandó, amelyre

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} ij\, a_{ij} \le K_1\, m^{1-\alpha}, \quad m,n = 1,2,\dots\ . \tag{5.52}$$

A 8.3. Lemma szerint a $\gamma = \delta = 1,\ \mu = 1-\alpha,\ \nu = 0$ választással adódik, hogy van olyan m-től és n-től független K_2 állandó, amelyre

$$\sum_{i=m}^{\infty}\sum_{j=n}^{\infty} a_{ij} \le \frac{K_2}{m^\alpha n}, \quad m,n = 1,2,\dots\ . \tag{5.53}$$

Belátjuk, hogy $f_{ss} \in \mathrm{Lip}(\alpha,1)$. A korábbi, $\mathrm{Lip}(1,1)$ osztályra vonatkozó 4.3. Tétel bizonyítása (ii) elegendőségi része (5.36)–(5.37) becslései alapján írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} &|f_{ss}(x+2h,y+2k) - f_{ss}(x+2h,y) - f_{ss}(x,y+2k) + f_{ss}(x,y)| \\ &\le 4\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} + \sum_{i=m+1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=n+1}^{\infty} + \sum_{i=m+1}^{\infty}\sum_{j=n+1}^{\infty}\right\} a_{ij}|\sin ih \sin jk| \\ &=: S_1 + S_2 + S_3 + S_4, \end{aligned} \tag{5.54}$$

ahol $m := [1/|h|]$, $n := [1/|k|]$. S_1 és S_4 becslése a megszokott módon, (5.52) és (5.53) alapján történik:

$$S_1 \le 4|h||k| \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij\, a_{ij} \le 4|h||k|K_1 m^{1-\alpha} \le 4K_1|h|^\alpha|k|, \tag{5.55}$$

valamint

$$S_4 \le 4\sum_{i=m+1}^{\infty}\sum_{j=n+1}^{\infty} a_{ij} \le 4\frac{K_2}{(m+1)^\alpha(n+1)} \le 4K_2|h|^\alpha|k|. \tag{5.56}$$

Ugyancsak a 4.3. Tétel bizonyításának (ii) részében látottak szerint becsüljük S_2-t. (5.40) alapján

$$S_2 \le 4|k|\sum_{j=1}^{n} j\sum_{i=m+1}^{\infty} a_{ij}. \tag{5.57}$$

Majd (5.41) alapján nyerjük, hogy

$$\sum_{j=1}^{n} j\sum_{i=m}^{M} a_{ij} \le \sum_{i_1=m}^{M-1}\frac{1}{i_1^2}\sum_{i=1}^{i_1}\sum_{j=1}^{n} ij\,a_{ij} + \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{n} ij\,a_{ij},$$

ahol M tetszőleges pozitív egész, amelyre $2 \le m < M$. Ebből az (5.52) feltétel szerint következik, hogy

$$\sum_{j=1}^{n} j\sum_{i=m}^{M} a_{ij} \le \sum_{i_1=m}^{M-1}\frac{1}{i_1^2}K_1\, i_1^{1-\alpha} + \frac{1}{M}K_1\, M^{1-\alpha} = K_1\sum_{i_1=m}^{M-1} i_1^{-\alpha-1} + K\frac{1}{M^\alpha}. \tag{5.58}$$

Ha $0 < \alpha < 1$, akkor

$$\sum_{i_1=m}^{M-1} i_1^{-\alpha-1} \le \int_{m=1}^{\infty} x^{-\alpha-1}dx = \frac{1}{\alpha(m-1)^\alpha} \le \frac{3^\alpha}{\alpha}\frac{1}{(m+1)^\alpha},$$

ezért (5.58) becslését a következőképpen folytatjuk:

$$\sum_{j=1}^{n} j\sum_{i=m}^{M} a_{ij} \le K_1\frac{3^\alpha}{\alpha}\frac{1}{(m+1)^\alpha} + K\frac{1}{M^\alpha}.$$

Ha $M \to \infty$, akkor ebből nyerjük, hogy

$$\sum_{j=1}^{n} j\sum_{i=m}^{\infty} a_{ij} \le K_1\frac{3^\alpha}{\alpha}\frac{1}{(m+1)^\alpha}.$$

Ezt összevetve (5.57)-tel kapjuk, hogy

$$S_2 \le 4|k|K_1\frac{3^\alpha}{\alpha}\frac{1}{(m+1)^\alpha} \le 4\frac{3^\alpha}{\alpha}K_1|h|^\alpha|k|. \tag{5.59}$$

Mivel most szimmetriára nem hivatkozhatunk, folytassuk S_3-mal. Világos, hogy

$$S_3 \le 4|h| \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=n+1}^{\infty} i\, a_{ij} = 4|h| \sum_{j=n+1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m} i\, a_{ij}. \tag{5.60}$$

Legyen M pozitív egész, amelyre $1 \le m < M$. Az i index szerinti Abel átrendezéssel a jobb oldali sort az alábbi alakba írhatjuk:

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m} i\, a_{ij} = \sum_{j=n+1}^{\infty} \left\{ \sum_{i_1=1}^{m} \sum_{i=i_1}^{M} a_{ij} - m \sum_{i=m+1}^{M} a_{ij} \right\} \le \sum_{j=n+1}^{\infty} \sum_{i_1=1}^{m} \sum_{i=i_1}^{M} a_{ij}.$$

Így ha $M \to \infty$, akkor (5.60)-ól az (5.53) feltételt használva következik, hogy

$$S_3 \le 4|h| \sum_{i_1=1}^{m} \sum_{i=i_1}^{\infty} \sum_{j=n+1}^{\infty} a_{ij} \le 4|h| \sum_{i_1=1}^{m} \frac{K_2}{i_1^{\alpha}(n+1)} \le 4K_2|h||k| \sum_{i_1=1}^{m} \frac{1}{i_1^{\alpha}}. \tag{5.61}$$

Ha $0 < \alpha < 1$, akkor

$$\sum_{i_1=1}^{m} \frac{1}{i_1^{\alpha}} \le \int_0^m \frac{1}{x^{\alpha}} dx = \frac{m^{1-\alpha}}{1-\alpha},$$

mely szerint (5.61)-ből adódik, hogy

$$S_3 \le 4K_2|h||k| \frac{m^{1-\alpha}}{1-\alpha} \le \frac{4K_2}{1-\alpha} |h|^{\alpha} |k|. \tag{5.62}$$

Összefoglalva, az (5.54)–(5.56), (5.59) és (5.62) becslések alapján valóban azt kapjuk, hogy $f_{ss} \in \mathrm{Lip}(\alpha, 1)$.

Ezzel a 4.4. Tételt beláttuk.

6. Kétváltozós trigonometrikus sorok és Zygmund osztályok

A 4. fejezet folytatásaként most a Zygmund osztályokra vonatkozó tételeket terjesztjük ki kétváltozóra.

A 2.1. Tétel mellett a 2.3. Tétel kétváltozós megfelelőjének megadása tűnt a legbiztosabbnak. Az egyváltozós Zygmund osztály esetében a koszinusz és a szinusz sor egyformán viselkedik, ezért azt vártuk, hogy a kétváltozós kiterjesztésben is ugyanaz az együtthatófeltétel jellemezze a kettős koszinusz, kettős szinusz és a koszinusz-szinusz sort is. Valóban, érvényes a következő

6.1. Tétel (Fülöp [4], [5]). *Ha* $\{a_{ij} : ij = 1, 2, \ldots\}$ *nemnegatív számok tetszőleges kettős sorozata, amelyre az* (1.4) *feltétel teljesül, és* f *jelöli az* f_{cc}, f_{ss} *és* f_{cs} (1.5)–(1.7)*-ben definiált összegfüggvények egyikét, akkor* $f \in \Lambda_*(1, 1)$ *akkor és csak akkor, ha*

$$\sum_{i=m}^{\infty}\sum_{j=n}^{\infty} a_{ij} = O(m^{-1}n^{-1}), \quad m, n = 1, 2, \ldots \tag{6.1}$$

teljesül.

Ezt összevetve a 4. fejezetben tárgyalt $\mathrm{Lip}(\alpha, \beta)$ $(0 < \alpha, \beta < 1)$ osztályra vonatkozó 4.1. Tétellel, láthatjuk, hogy a (6.1) feltétel éppen a (4.1) feltétel azon esete, amikor $\alpha = \beta = 1$. Megjegyezzük, hogy a $\mathrm{Lip}(\alpha, \beta)$ $(0 < \alpha, \beta < 1)$ osztályt jellemző két egymással ekvivalens feltétel közül az $\alpha = \beta = 1$ kiterjesztett esetben (6.1) a gyengébb feltétel.

Igaz a tétel $\lambda_*(1, 1)$ osztályra vonatkozó megfelelője is:

6.2. Tétel (Fülöp [4], [5]). *Az előző tétel feltételei mellett* $f \in \lambda_*(1, 1)$ *akkor és csak akkor, ha* (6.1) *és*

$$\sum_{i=m}^{\infty}\sum_{j=n}^{\infty} a_{ij} = o(m^{-1}n^{-1}), \quad m, n \to \infty \tag{6.2}$$

teljesül, ahol m *és* n *egymástól függetlenül tartanak* ∞*-be.*

Megjegyezzük, hogy az egyváltozós esethez hasonló indoklással valójában most is elegendő megkövetelni a (6.1) típusú feltételeket elég nagy m-re és n-re, pl. $m > m_0$ és $n > m_0$ esetére, ahol m_0 pozitív egész.

7. A 6. rész tételeinek bizonyítása

A következő tétel bizonyításában a 4.1. Tétel bizonyításának menetére fogunk jelentősen támaszkodni. Az egyes lépéseket akkor az (i) és (ii) részben igen részletesen tárgyaltuk, ezért azok újbóli részletezésétől most eltekintünk.

A 6.1. tétel bizonyítása.

Kettős koszinusz sor esete.

(i) *Szükségesség.* Legyen $f_{cc} \in \Lambda_*(1,1)$, azaz

$$|\Delta(f_{cc}; x, y; h, k)| \le Khk \qquad \forall\, x, y, h, k,$$

ahol $\Delta(f_{cc}; x, y; h, k)$ (1.9)-ben van definiálva. Ha $x = y = 0$ és $0 < h, k \le 1$, akkor egyszerű számolással adódik, hogy

$$\begin{aligned} |\Delta(f_{cc}; 0, 0, h, k)| &= 4 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} (1 - \cos ih)(1 - \cos jk) \\ &= 16 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \sin^2 \frac{ih}{2} \sin^2 \frac{jk}{2} \le Khk. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Az (5.2) egyenlőtlenség szerint ha $m := [1/h],\ n := [1/k]$, akkor

$$\sin^2 \frac{ih}{2} \ge \frac{i^2 h^2}{\pi^2}, \quad i = 1, 2, \ldots, m \quad \text{és} \quad \sin^2 \frac{jk}{2} \ge \frac{j^2 k^2}{\pi^2}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{7.2}$$

Ennek alapján (7.1)-ből az alábbi következik:

$$16 \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{i^2 h^2}{\pi^2} \frac{j^2 k^2}{\pi^2} = \frac{16 h^2 k^2}{\pi^4} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} i^2 j^2 a_{ij} \le Khk, \tag{7.3}$$

ahonnan

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} i^2 j^2 a_{ij} \le \frac{K\pi^4}{16hk} \le \frac{K\pi^4}{16}(m+1)(n+1) \le \frac{K\pi^4}{4} mn. \tag{7.4}$$

A 8.3. Lemma szerint a $\gamma = \delta = 2,\ \mu = \nu = 1$ választással kapjuk, hogy

$$\sum_{i=m}^{\infty}\sum_{j=n}^{\infty} a_{ij} = O(m^{-1}n^{-1}), \quad m,n = 1,2,\ldots,$$

amit bizonyítani akartunk.

(ii) *Elegendőség.* Tegyük fel, hogy (6.1) fennáll, azaz van olyan K_1 m-től és n-től független állandó, amelyre

$$\sum_{i=m}^{\infty}\sum_{j=n}^{\infty} a_{ij} \le \frac{K_1}{mn}, \quad m,n = 1,2,\ldots\ . \tag{7.5}$$

Ekkor a 8.3. Lemma szerint, ha $\gamma = \delta = 2,\ \mu = \nu = 1$, van olyan K_2 m-től és n-től független állandó, amelyre

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} i^2 j^2 a_{ij} \le K_2 mn, \quad m,n = 1,2,\ldots\ . \tag{7.6}$$

Belátjuk, hogy $f_{cc} \in \Lambda_*(1,1)$. Becsüljük a $\Delta(f_{cc};x,y;h,k)$ kifejezést. A szimmetria miatt feltehető, hogy $h,k > 0$. Elemi számolással adódik, hogy

$$\begin{aligned}|\Delta(f_{cc};x,y;h,k)| &= 4\left|\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\cos ix\cos jy(1-\cos ih)(1-\cos jk)\right| \\ &\le 4\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}(1-\cos ih)(1-\cos jk) = 16\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\sin^2\frac{ih}{2}\sin^2\frac{jk}{2}.\end{aligned} \tag{7.7}$$

Legyen $m := [1/h]$ és $n := [1/k]$. Tekintsük a (7.7) jobb oldalán lévő kettős sort a következő előállításban:

$$\begin{aligned}&16\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} + \sum_{i=m+1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=n+1}^{\infty} + \sum_{i=m+1}^{\infty}\sum_{j=n+1}^{\infty}\right\} a_{ij}\sin^2\frac{ih}{2}\sin^2\frac{jk}{2} \\ &=: S_1 + S_2 + S_3 + S_4.\end{aligned} \tag{7.8}$$

A $\sin t \le t$ $(t \ge 0)$ egyenlőtlenség és (7.6) miatt írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned}S_1 &\le 16\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\frac{ih}{2}\right)^2\left(\frac{jk}{2}\right)^2 = h^2k^2\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} i^2j^2a_{ij} \\ &\le h^2k^2K_2mn \le K_2hk.\end{aligned} \tag{7.9}$$

Térjünk rá S_2 becslésére. A $\sin t \le 1$ és $\sin t \le t$ $(t \ge 0)$ miatt világos, hogy

$$(7.10) \qquad S_2 \le 16 \sum_{i=m+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(\frac{jk}{2}\right)^2 = 4k^2 \sum_{i=m+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} j^2 a_{ij}.$$

Legyen N pozitív egész szám, amelyre $1 \le n < N$. A j indexre vonatkozó Abel átrendezés szerint

$$\begin{aligned}\sum_{i=m+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} j^2 a_{ij} &= \sum_{i=m+1}^{\infty} \left\{ \sum_{j_1=1}^{n} (j_1^2 - (j_1-1)^2) \sum_{j=j_1}^{N} a_{ij} - n^2 \sum_{j=n+1}^{N} a_{ij} \right\} \\ &\le \sum_{i=m+1}^{\infty} \sum_{j_1=1}^{n} (2j_1 - 1) \sum_{j=j_1}^{N} a_{ij} \le 2 \sum_{i=m+1}^{\infty} \sum_{j_1=1}^{n} j_1 \sum_{j=j_1}^{N} a_{ij}.\end{aligned}$$

Ha $N \to \infty$, akkor (7.5) alapján a (7.10) becslést így folytatjuk:

$$(7.11) \qquad \begin{aligned} S_2 &\le 8k^2 \sum_{j_1=1}^{n} j_1 \sum_{i=m+1}^{\infty} \sum_{j=j_1}^{\infty} a_{ij} \le 8k^2 \sum_{j_1=1}^{n} j_1 \frac{K_1}{(m+1)j_1} \\ &= 8k^2 \frac{K_1 n}{m+1} \le 8K_1 hk. \end{aligned}$$

A szimmetria miatt hasonlóan nyerjük, hogy

$$(7.12) \qquad S_3 \le 8K_1 hk.$$

S_4-et a következő egyszerű módon becsüljük: a $\sin t \le$ $(t \ge 0)$ és (7.5) szerint

$$(7.13) \qquad S_4 \le 16 \sum_{i=m+1}^{\infty} \sum_{j=n+1}^{\infty} a_{ij} \le 16 \frac{K_1}{(m+1)(n+1)} \le 16 K_1 hk.$$

Összefoglalva, (7.7)–(7.9) és (7.11)–(7.13) alapján tehát $f_{cc} \in \Lambda_*(1,1)$.

Kettős szinusz sor esete.

(iii) *Szükségesség.* Ha $f_{ss} \in \Lambda_*(1,1)$, akkor

$$\begin{aligned} |\Delta(f_{ss}; x, y; h, k)| &= 4 \left| \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \sin ix \sin jy (1 - \cos ih)(1 - \cos jk) \right| \\ &\le Khk, \quad 0 < h, k \le 1. \end{aligned}$$

Integráljuk ezt az egyenlőtlenséget a $(0, h)$ intervallumon, először az x változó szerint figyelembe véve, hogy az együtthatókra vonatkozó (1.4) feltétel miatt a fenti kettős sor tagonként integrálható. Tehát

$$4\left|\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\sin jy(1-\cos ih)(1-\cos jk)\int_0^h \sin ixdx\right| \le Khk\int_0^h 1dx,$$

azaz

$$4\left|\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\sin jy(1-\cos ih)(1-\cos jk)\frac{1-\cos ih}{i}\right| \le Kh^2k. \tag{7.14}$$

Ezután az y változó szerint $(0, k)$ intervallumon tagonként integrálva adódik, hogy

$$4\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}(1-\cos ih)(1-\cos jk)\frac{1-\cos ih}{i}\frac{1-\cos jk}{j} \le Kh^2k^2, \tag{7.15}$$

amely adja, hogy

$$\begin{aligned} &4\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{ij}a_{ij}(1-\cos ih)^2(1-\cos jk)^2 \\ &= 64\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{ij}a_{ij}\sin^4\frac{ih}{2}\sin^4\frac{jk}{2} \le Kh^2k^2. \end{aligned} \tag{7.16}$$

Legyen $m := [1/h]$, $n := [1/k]$. Az (5.2) egyenlőtlenség szerint

$$\sin^4\frac{ih}{2} \ge \frac{i^4h^4}{\pi^4}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad \text{és} \quad \sin^4\frac{jk}{2} \ge \frac{j^4k^4}{\pi^4}, \quad j = 1, 2, \dots, n\ . \tag{7.17}$$

A már megszokott módon ebből a két egyenlőtlenségből és (7.16)-ból következik, hogy

$$64\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{ij}a_{ij}\frac{i^4h^4}{\pi^4}\frac{j^4k^4}{\pi^4} = \frac{64h^4k^4}{\pi^8}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} i^3j^3a_{ij} \le Kh^2k^2,$$

ahonnan

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} i^3j^3a_{ij} \le \frac{K\pi^8}{64h^2k^2} \le \frac{K\pi^8}{64}(m+1)^2(n+1)^2 \le \frac{K\pi^8}{4}m^2n^2. \tag{7.18}$$

Így a 8.3. Lemmát használva a $\gamma = \delta = 3$, $\mu = \nu = 2$ esetben kapjuk, hogy

$$\sum_{i=m}^{\infty}\sum_{j=n}^{\infty} a_{ij} = O(m^{-1}n^{-1}), \quad m, n = 1, 2, \dots,$$

amit bizonyítanunk kellett.

(iv) *Elegendőség.* Tegyük fel, hogy (6.1) fennáll. Megmutatjuk, hogy $f_{ss} \in \Lambda_*(1,1)$. Nézzük $\Delta(f_{ss}; x, y; h, k)$ kifejezést, ahol a szimmetria miatt feltehetjük, hogy $h, k > 0$. Egyszerű számolással adódik, hogy

$$\begin{aligned}|\Delta(f_{ss}; x, y; h, k)| &= 4\left|\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \sin ix \sin jy (1-\cos ih)(1-\cos jk)\right| \\ &\le 4\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}(1-\cos ih)(1-\cos jk).\end{aligned}$$

Ez a kifejezés megegyezik a kettős koszinusz sor esetén az ennek a résznek megfelelő (ii) részben kapott (7.7) kifejezéssel. Mivel a feltétel ugyanaz mindkét sor esetén, így az (ii) részben leírt bizonyítást szó szerint megismételve nyerjük, hogy $f_{ss} \in \Lambda_*(1,1)$.

Koszinusz-szinusz sor esete.

(v) *Szükségesség.* Legyen $f_{cs} \in \Lambda_*(1,1)$, belátjuk, hogy ekkor (6.1) teljesül. Kombináljuk a kettős koszinusz, ill. kettős szinusz sornál látottakat. Helyettesítsünk $x = 0$-t az (1.9) formulába, ekkor

$$\begin{aligned}|\Delta(f_{cs}; 0, y; h, k)| &= 4\left|\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \sin jy (1-\cos ih)(1-\cos jk)\right| \\ &\le Khk, \quad 0 < h, k \le 1.\end{aligned}$$

Integráljuk az egyenlőtlenséget az y változó szerint a $(0, k)$ intervallumon:

$$4\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}(1-\cos ih)(1-\cos jk)\frac{1-\cos jk}{j} \le Khk^2,$$

azaz

$$32\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} a_{ij} \sin^2 \frac{ih}{2} \sin^4 \frac{jk}{2} \le Khk^2.$$

Ebből a (7.2) első és a (7.17) második egyenlőtlensége szerint a szokásos módon következik, hogy

$$32\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} a_{ij} \frac{i^2h^2}{\pi^2}\frac{j^4k^4}{\pi^4} = \frac{32h^2k^4}{\pi^6}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} i^2 j^3 a_{ij} \le Khk^2,$$

ahol, emlékeztetőül, $m := [1/h]$, $n := [1/k]$. Az előbbi egyenlőtlenségből láthatjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} i^2 j^3 a_{ij} \le \frac{K\pi^6}{32hk^2} \le \frac{K\pi^6}{4} mn^2,$$

amelyből a 8.3. Lemma szerint, ha $\gamma = 2,\ \delta = 3,\ \mu = 1,\ \nu = 2$, adódik (6.1).

(vi) *Elegendőség.* Tegyük fel, hogy (6.1) fennáll. Becsüljük a $\Delta(f_{cs}; x, y; h, k)$ kifejezést a szokásos módon:

$$\begin{aligned}|\Delta(f_{cs}; x, y; h, k)| &= 4\left|\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\cos ix \sin jy(1-\cos ih)(1-\cos jk)\right| \\ &\le 4\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}(1-\cos ih)(1-\cos jk), \quad h, k > 0.\end{aligned}$$

Ez a kifejezés most is megegyezik a korábbi (ii) részben a kettős koszinusz sor esetében kapott kifejezéssel. Ezért az $f_{cs} \in \Lambda_*(1,1)$ igazolása az ott bemutatott módon történik.

A 6.1. Tételt ezzel teljesen bebizonyítottuk.

A következő bizonyítás az előző bizonyítás megfelelő részeinek alapos átgondolását igényli.

A 6.2. Tétel bizonyítása.

Kettős koszinusz sor esete.

(vii) *Szükségesség.* Legyen $f_{cc} \in \lambda_*(1,1)$ és legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor van olyan $h_0 = h_0(\varepsilon) > 0$, hogy minden x, y esetén

$$|\Delta(f_{cc}; x, y; h, k)| \le \varepsilon hk, \quad \text{ha} \quad 0 < h, k < h_0.$$

Feltehetjük, hogy $h_0 \le 1$. Speciálisan, ha $x = y = 0$, akkor az előző bizonyítás (i) részében a (7.1)-nek megfelelő formulát kapjuk:

$$|\Delta(f_{cc}; 0, 0; h, k)| \le \varepsilon hk, \quad \text{ha} \quad 0 < h, k < h_0 \le 1. \tag{7.19}$$

Ha $f_{cc} \in \lambda_*(1,1)$, akkor definíció szerint $f_{cc} \in \Lambda_*(1,1)$, ezért a 6.1. Tétel szerint a (6.1) feltétel teljesül. Így célunk olyan $m_0 = m_0(\varepsilon)$ pozitív egész megadása, amelyre

$$\sum_{i=m}^{\infty}\sum_{j=n}^{\infty} a_{ij} \le \frac{\varepsilon}{mn}, \quad \text{ha} \quad m,n \ge m_0. \tag{7.20}$$

Legyen $m := [1/h],\ n := [1/k]$ és $0 < h,k < h_0 \le 1$. Ismételjük meg az ennek a résznek megfelelő (i) rész (7.1)–(7.4) lépéseit. Ekkor (7.19) alapján írhatjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} i^2 j^2 a_{ij} \le \frac{\varepsilon\,\pi^4}{4} mn,$$

ha $0 < h,k < h_0 \le 1$, vagyis, ha $m,n \ge 1/h_0$. Végül a 8.4. Lemmát használva a $\gamma = \delta = 2,\ \mu = \nu = 1$ esetben, adódik (7.20), amit bizonyítani akartunk.

(viii) *Elegendőség.* Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, és tegyük fel, hogy (6.1) és (6.2) fennáll. Ekkor van olyan K_1 m-től és n-től független állandó, amelyre

$$\sum_{i=m}^{\infty}\sum_{j=n}^{\infty} a_{ij} \le \frac{K_1}{mn}, \quad m,n = 1,2,\dots \tag{7.21}$$

és van olyan $m_0 = m_0(\varepsilon)$ pozitív egész, amelyre

$$\sum_{i=m}^{\infty}\sum_{j=n}^{\infty} a_{ij} \le \frac{\varepsilon}{mn}, \quad \text{ha} \quad m,n > m_0. \tag{7.22}$$

Ekkor a 8.4. Lemmából, ha $\gamma = \delta = 2,\ \mu = \nu = 1$, következik, hogy létezik olyan $m_1 = m_1(\varepsilon)$ pozitív egész, hogy

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} i^2 j^2 a_{ij} = \varepsilon mn, \quad \text{ha} \quad m,n > m_1. \tag{7.23}$$

Megmutatjuk, hogy $f_{cc} \in \lambda_*(1,1)$, azaz hogy van olyan $h_0 = h_0(\varepsilon)$, hogy minden x,y esetén

$$|\Delta(f_{cc};x,y;h,k)| \le \varepsilon hk, \quad \text{ha} \quad 0 < h,k < h_0.$$

Legyen $m := [1/h],\ n := [1/k]$. Most ennek a résznek megfelelő (ii) rész lépéseit ismételjük meg. Elvégezve a (7.7), (7.8) becsléseket nyerjük, hogy

$$|\Delta(f_{cc};x,y;h,k)| \le S_1 + S_2 + S_3 + S_4. \tag{7.24}$$

A (7.9) becslés szerint (7.23) felhasználásával adódik, hogy

$$S_1 \le h^2 k^2 \varepsilon m n \le \varepsilon h k, \tag{7.25}$$

ha $m, n > m_1$, vagyis, ha $h, k < 1/m_1$. Ha $m, n > m_0$, azaz ha $h, k < 1/m_0$, akkor (7.11) első fele szerint írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} S_2 &\le 8k^2 \sum_{j_1=1}^{n} j_1 \sum_{i=m+1}^{\infty} \sum_{j=j_1}^{\infty} a_{ij} \\ &= 8k^2 \left\{ \sum_{j_1=1}^{m_0} + \sum_{j_1=m_0+1}^{n} \right\} j_1 \sum_{i=m+1}^{\infty} \sum_{j=j_1}^{\infty} a_{ij}. \end{aligned}$$

Ebből (7.21) és (7.22) alapján következik, hogy

$$\begin{aligned} S_2 &\le 8k^2 \sum_{j_1=1}^{m_0} j_1 \frac{K_1}{(m+1)j_1} + 8k^2 \sum_{j_1=m_0+1}^{n} j_1 \frac{\varepsilon}{(m+1)j_1} \\ &\le 8k^2 \frac{K_1 m_0}{m+1} + 8k^2 \frac{\varepsilon\, n}{m+1} \le 8K_1 h k^2 m_0 + 8\varepsilon h k \\ &\le 16\varepsilon h k, \quad \text{ha} \quad k \le \frac{\varepsilon}{K_1 m_0} \quad \text{és} \quad h, k < 1/m_0. \end{aligned} \tag{7.26}$$

A szimmetria miatt hasonlóan kapjuk, hogy

$$S_3 \le 16\varepsilon h k, \quad \text{ha} \quad h \le \frac{\varepsilon}{K_1 m_0} \quad \text{és} \quad h, k < 1/m_0. \tag{7.27}$$

Végül, S_4-et (7.13) és (7.22) szerint becsüljük:

$$S_4 \le 16\varepsilon h k, \quad \text{ha} \quad h, k < 1/m_0. \tag{7.28}$$

Összefoglalva, ha

$$h, k < \min\{1/m_0, 1/m_1, \varepsilon/K_1 m_0\},$$

akkor (7.24)–(7.28) alapján adódik, hogy $f_{cc} \in \lambda_*(1,1)$.

Kettős szinusz sor esete.

(ix) *Szükségesség.* A korábbi (iii) rész alapos elemzése szerint a bizonyítás hasonló módon történik. Ugyanis, ha $f_{ss} \in \lambda_*(1,1)$, akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén

$$|\Delta(f_{ss}; x, y; h, k)| \le \varepsilon h k \tag{7.29}$$

minden x-re és y-ra, ha $0 < h, k < h_0 = h_0(\varepsilon) \le 1$. A kettős koszinusz sor esetén a (vii) részben láttuk, hogy ha $f_{ss} \in \lambda_*(1,1)$, akkor a (6.1) feltétel automatikusan teljesül. Az (iii) rész (7.14)–(7.18) lépéseit felhasználva (7.29) alapján nyerjük, hogy

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} i^3 j^3 a_{ij} \le \frac{\varepsilon \pi^8}{64 h^2 k^2} \le \frac{\varepsilon \pi^8}{4} m^2 n^2, \quad \text{ha} \quad m, n \ge 1/h_0.$$

Innen pedig a 8.4. Lemma szerint következik a (6.2) feltétel.

(x) *Elegendőség.* A 6.1. Tétel bizonyításának elegendőség része mindhárom kettős sor esetén megegyezik, e szerint a kettős koszinusz sornál a (viii) részben leírtak szerint (6.1)-ből és (6.2)-ből valóban következik, hogy $f_{ss} \in \lambda_*(1,1)$.

Koszinusz-szinusz sor esete.

(xi) *Szükségesség.* A (v) részt elemezve ez a bizonyítás is szinte szóról szóra ugyanúgy megy, mint a kettős koszinusz sor esetében a (vii) részben bemutatott bizonyítás, ezért ennek részletezésétől itt már eltekintünk.

(xii) *Elegendőség.* A (viii) rész bizonyítását megismételve adódik a (6.1) és a (6.2) feltételek elegendősége.

8. Sorelméleti segédtételek

Mind az egyváltozós, mind a kétváltozós tételek bizonyítása során alapvető jelentőségűek az alábbi lemmák:

8.1. Lemma (Boas [2], Móricz [11]). *Legyen* $\{a_i : i = 1, 2, \ldots\}$ *nemnegatív számok tetszőleges sorozata, amelyre* (1.1) *teljesül.*

(i) *Ha* $\gamma > \mu \geq 0$ *és*

$$\sum_{i=1}^{m} i^{\gamma} a_i = O(m^{\mu}), \quad m = 1, 2, \ldots \tag{8.1}$$

fennáll, akkor

$$\sum_{i=m}^{\infty} a_i = O(m^{\mu-\gamma}), \quad m = 1, 2, \ldots \tag{8.2}$$

is fennáll.

(ii) *Ha* $\gamma \geq \mu > 0$*, akkor a fordított irányú következtetés is érvényes.*

Tehát láthatjuk, hogy a két feltétel akkor ekvivalens egymással, ha $\gamma > \mu > 0$.

Valójában ezt az ekvivalenciát mondta ki Boas lemmája. A $\gamma = \mu$ és a $\mu = 0$ határesetek pontosítása Móricz Ferenctől származik.

Azt, hogy az ekvivalencia nem érvényes a $\gamma = \mu$ és a $\mu = 0$ esetekben, a következő két egyszerű példa mutatja: legyen pl. $\gamma = \mu = 1$, $a_i = \frac{1}{i}$; valamint legyen pl. $\gamma = 1$, $\mu = 0$, $a_i = \frac{1}{i^2}$.

Megjegyezzük, hogy Boas egyváltozós tételeinek a bizonyításában még egy további lemmát is használt (lásd [2, Lemma 2.]), amely bizonyításokat sikerült annyira egyszerűsíteni, hogy az általunk közölt bizonyításokban már az első lemma elegendő.

Érvényes a 8.1. Lemma alábbi változata is:

8.2. Lemma. *Az előző lemma feltételei mellett a* $\gamma > \mu > 0$ *esetben a* (8.1) *és* (8.2) *feltételek ekvivalensek egymással, ha "O" helyébe "o"-t írunk, azaz a*

$$\sum_{i=1}^{m} i^{\gamma} a_i = o(m^{\mu}), \quad m \to \infty \tag{8.3}$$

és

$$\sum_{i=m}^{\infty} a_i = o(m^{\mu-\gamma}), \quad m \to \infty \tag{8.4}$$

feltételek ekvivalensek.

Megadjuk a lemmák kétváltozós megfelelőit is:

8.3. Lemma (Fülöp [6]). *Legyen* $\{a_{ij} : i, j = 1, 2, \ldots\}$ *nemnegatív számok tetszőleges kettős sorozata, amelyre az* (1.4) *feltétel teljesül.*

(i) *Ha* $\gamma > \mu \geq 0,\ \delta > \nu \geq 0$ *és*

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} i^{\gamma} j^{\delta} a_{ij} = O(m^{\mu} n^{\nu}), \quad m, n = 1, 2, \ldots \tag{8.5}$$

teljesül, akkor

$$\sum_{i=m}^{\infty} \sum_{j=n}^{\infty} a_{ij} = O(m^{\mu-\gamma} n^{\nu-\delta}), \quad m, n = 1, 2, \ldots \tag{8.6}$$

is teljesül.

(ii) *Ha* $\gamma \geq \mu > 0$ *és* $\delta \geq \nu > 0$, *akkor a fordított irányú következtetés is érvényes.*

Tehát ha $\gamma > \mu > 0$ és $\delta > \nu > 0$, akkor a két feltétel egymással ekvivalens.

8.4. Lemma (Fülöp [7]). *Az előző lemma feltételei mellett ha* (8.6) *fennáll a* $\gamma > \mu > 0,\ \delta > \nu > 0$ *esetben, akkor a*

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} i^{\gamma} j^{\delta} a_{ij} = o(m^{\mu} n^{\nu}), \quad m, n \to \infty \tag{8.7}$$

és

$$\sum_{i=m}^{\infty} \sum_{j=n}^{\infty} a_{ij} = o(m^{\mu-\gamma} n^{\nu-\delta}), \quad m, n \to \infty \tag{8.8}$$

feltételek ekvivalensek, ahol m *és* n *egymástól függetlenül tartanak* ∞*-be.*

9. A 8. rész tételeinek bizonyítása

A 8.1. Lemma bizonyítása.

(i) Tegyük fel, hogy (8.1) fennáll, azaz van olyan m-től független K_1 állandó, hogy

$$\sum_{i=1}^{m} i^{\gamma}\, a_i \le K_1\, m^{\mu}, \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{9.1}$$

ahol $\gamma > \mu \ge 0$. Célunk annak belátása, hogy ekkor (8.2) is fennáll, azaz van olyan m-től független K_2 állandó, hogy

$$\sum_{i=m}^{\infty} a_i \le K_2\, m^{\mu-\gamma}, \quad m, n = 1, 2, \ldots\ .$$

Legyen M pozitív egész, amelyre $2 \le m < M$. Abel átrendezéssel a következőt írhatjuk:

$$\begin{aligned} \sum_{i=m}^{M} a_i &= \sum_{i=m}^{M} i^{-\gamma}(i^{\gamma}\, a_i) \\ &= -\frac{1}{m^{\gamma}} \sum_{i=1}^{m-1} i^{\gamma}\, a_i + \sum_{i_1=m}^{M-1} \left(\frac{1}{i_1^{\gamma}} - \frac{1}{(i_1+1)^{\gamma}} \right) \sum_{i=1}^{i_1} i^{\gamma}\, a_i + \frac{1}{M^{\gamma}} \sum_{i=1}^{M} i^{\gamma}\, a_i \\ &\le \sum_{i_1=m}^{M-1} \left(\frac{1}{i_1^{\gamma}} - \frac{1}{(i_1+1)^{\gamma}} \right) \sum_{i=1}^{i_1} i^{\gamma}\, a_i + \frac{1}{M^{\gamma}} \sum_{i=1}^{M} i^{\gamma}\, a_i. \end{aligned} \tag{9.2}$$

A Lagrange középértéktétel szerint

$$\frac{1}{i_1^{\gamma}} - \frac{1}{(i_1+1)^{\gamma}} = \frac{\gamma}{\xi^{\gamma+1}} \le \frac{\gamma}{i_1^{\gamma+1}}, \text{ ahol } i_1 < \xi < i_1 + 1,\ \gamma > 0, \tag{9.3}$$

ezért (9.2) becslését így folytatjuk:

$$\sum_{i=m}^{M} a_i \le \sum_{i_1=m}^{M-1} \frac{\gamma}{i_1^{\gamma+1}} \sum_{i=1}^{i_1} i^{\gamma}\, a_i + \frac{1}{M^{\gamma}} \sum_{i=1}^{M} i^{\gamma}\, a_i, \tag{9.4}$$

amelyből (9.1)-et felhasználva az alábbi adódik:

$$\begin{aligned} \sum_{i=m}^{M} a_i &\le \sum_{i_1=m}^{M-1} \frac{\gamma}{i_1^{\gamma+1}} K_1\, i_1^{\mu} + \frac{1}{M^{\gamma}} K_1\, M^{\mu} \\ &\le K_1\, \gamma \sum_{i_1=m}^{M-1} i_1^{\mu-\gamma-1} + K_1\, M^{\mu-\gamma}. \end{aligned} \tag{9.5}$$

Figyelembe véve, hogy $\mu - \gamma - 1 < -1$, világos, hogy

$$(9.6) \qquad \sum_{i_1=m}^{M-1} i_1^{\mu-\gamma-1} \le \int_{m-1}^{\infty} x^{\mu-\gamma-1} = \frac{(m-1)^{\mu-\gamma}}{\gamma-\mu} \le \frac{m^{\mu-\gamma}}{(\gamma-\mu)2^{\mu-\gamma}},$$

ezért (9.5)-ből következik, hogy

$$\sum_{i=m}^{M} a_i \le K_1\,\gamma \frac{m^{\mu-\gamma}}{(\gamma-\mu)2^{\mu-\gamma}} + K_1\,M^{\mu-\gamma}.$$

Így, ha $M \to \infty$, akkor

$$\sum_{i=m}^{\infty} a_i \le \frac{K_1\,\gamma}{(\gamma-\mu)2^{\mu-\gamma}} m^{\mu-\gamma} =: K_2\,m^{\mu-\gamma},$$

amit bizonyítani akartunk.

(ii) Megfordítva, most azt tegyük fel, hogy (8.2) fennáll, azaz van olyan m-től független K_1 állandó, hogy

$$(9.6) \qquad \sum_{i=m}^{\infty} a_i \le K_1\,m^{\mu-\gamma}, \quad m = 1, 2, \ldots, \quad \gamma \ge \mu > 0.$$

Legyen M pozitív egész, amelyre $1 \le m < M$. A (8.1) bal oldalán álló soron végezzünk Abel átrendezést:

$$(9.7) \qquad \begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} i^{\gamma}\,a_i &= \sum_{i_1=1}^{m} (i_1^{\gamma} - (i_1-1)^{\gamma}) \sum_{i=i_1}^{M} a_i - m^{\gamma} \sum_{i=m+1}^{M} a_i \\ &\le \sum_{i_1=1}^{m} (i_1^{\gamma} - (i_1-1)^{\gamma}) \sum_{i=i_1}^{M} a_i \le \sum_{i_1=1}^{m} \gamma\, i_1^{\gamma-1} \sum_{i=i_1}^{M} a_i, \end{aligned}$$

ahol az utolsó lépésben a Lagrange középértéktételt használtuk, amely szerint

$$i_1^{\gamma} - (i_1-1)^{r} = \gamma\,\xi^{\gamma-1} \le \gamma\, i_1^{\gamma-1}, \text{ ahol } i_1 - 1 < \xi < i_1,\ \gamma > 0.$$

Ha $M \to \infty$, akkor a (9.6) feltételt használva (9.7)-ből nyerjük, hogy

$$(9.8) \qquad \sum_{i=1}^{m} i^{\gamma}\,a_i \le \sum_{i_1=1}^{m} \gamma\, i_1^{\gamma-1} \sum_{i=i_1}^{\infty} a_i \le \sum_{i_1=1}^{m} \gamma\, i_1^{\gamma-1}\, K_1\, i_1^{\mu-\gamma} = K_1\,\gamma \sum_{i_1=1}^{m} i_1^{\mu-1}.$$

Mivel $\mu - 1 > -1$, érvényes a következő becslés:

$$\sum_{i_1=1}^{m} i_1^{\mu-1} \le \int_0^{m+1} x^{\mu-1} dx = \frac{(m+1)^\mu}{\mu} \le \frac{2^\mu}{\mu} m^\mu. \tag{9.9}$$

E szerint (9.8)-ból kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{m} i^\gamma a_i \le K_1 \gamma \frac{2^\mu}{\mu} m^\mu,$$

amit bizonyítanunk kellett.

Az alábbi bizonyítás az előző bizonyítás lépéseinek átgondolásával, illetve megfelelő módosításával történik.

A 8.2. Lemma bizonyítása.

(iii) Tegyük fel, hogy (8.3) fennáll. Ekkor tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $m_0 = m_0(\varepsilon)$ pozitív egész, hogy

$$\sum_{i=1}^{m} i^\gamma a_i \le \varepsilon m^\mu, \quad \text{ha} \quad m > m_0, \quad \gamma > \mu > 0. \tag{9.10}$$

Megmutatjuk, hogy ekkor (8.4) is teljesül. Legyen $m > m_0$ és legyen M pozitív egész olyan, hogy $m_0 < m < M$. Az előző bizonyítás (i) részének (9.2)–(9.4) lépéseit megismételve írhatjuk, hogy

$$\sum_{i=m}^{M} a_i \le \sum_{i_1=m}^{M-1} \frac{\gamma}{i_1^{\gamma+1}} \sum_{i=1}^{i_1} i^\gamma a_i + \frac{1}{M^\gamma} \sum_{i=1}^{M} i^\gamma a_i.$$

A (9.10) feltételt használva ebből adódik, hogy

$$\sum_{i=m}^{M} a_i \le \sum_{i_1=m}^{M-1} \frac{\gamma}{i_1^{\gamma+1}} \varepsilon i_1^\mu + \frac{1}{M^\gamma} \varepsilon M^\mu = \varepsilon \gamma \sum_{i_1=m}^{M-1} i_1^{\mu-\gamma-1} + \varepsilon M^{\mu-\gamma}.$$

A (9.6) becslést használva ezt a következőképpen folytathatjuk:

$$\sum_{i=m}^{M} a_i \le \varepsilon \gamma \frac{m^{\mu-\gamma}}{(\gamma-\mu) 2^{\mu-\gamma}} + \varepsilon M^{\mu-\gamma}.$$

Ha $M \to \infty$, akkor

$$\sum_{i=m}^{\infty} a_i \le \frac{\varepsilon\,\gamma}{(\gamma-\mu)2^{\mu-\gamma}} m^{\mu-\gamma}, \quad \text{ha} \quad m > m_0,$$

tehát (8.4) valóban teljesül.

(iv) Megfordítva, ha (8.4) fennáll, akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $m_0 = m_0(\varepsilon)$ pozitív egész, hogy

$$\sum_{i=m}^{\infty} a_i \le \varepsilon\, m^{\mu-\gamma}, \quad \text{ha} \quad m > m_0, \quad \gamma > \mu > 0. \tag{9.11}$$

Ebben az esetben megadható olyan m-től független K_1 állandó, amelyre

$$\sum_{i=m}^{\infty} a_i \le K_1\, m^{\mu-\gamma}, \quad m = 1, 2, \ldots, \quad \gamma > \mu > 0. \tag{9.12}$$

Belátjuk, hogy (8.3) is fennáll, Tekintsük a (8.3) bal oldalán álló sort. Az előző bizonyítás (ii) részének (9.7) formulája szerint

$$\sum_{i=1}^{m} i^\gamma\, a_i \le \sum_{i_1=1}^{m} \gamma\, i_1^{\gamma-1} \sum_{i=i_1}^{M} a_i \le \gamma \sum_{i_1=1}^{m} i_1^{\gamma-1} \sum_{i=i_1}^{\infty} a_i. \tag{9.13}$$

Legyen $m > m_0$ és tekintsük az egyenlőtlenség jobb oldalát a következő felbontásban:

$$\gamma \left\{ \sum_{i_1=1}^{m_0} + \sum_{i_1=m_0+1}^{m} \right\} i_1^{\gamma-1} \sum_{i=i_1}^{\infty} a_i.$$

A (9.11)–(9.13)-ból következik, hogy

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} i^\gamma\, a_i &\le \gamma \sum_{i_1=1}^{m_0} i_1^{\gamma-1}\, K_1\, i_1^{\mu-\gamma} + \gamma \sum_{i_1=m_0+1}^{m} i_1^{\gamma-1}\, \varepsilon\, i_1^{\mu-\gamma} \\ &\le K_1\, \gamma \sum_{i_1=1}^{m_0} i_1^{\mu-1} + \varepsilon\, \gamma \sum_{i_1=1}^{m} i_1^{\mu-1},\end{aligned}$$

ahonnan (9.9) szerint nyerjük, hogy

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{m} i^\gamma\, a_i \le K_1\, \gamma \frac{2^\mu}{\mu} m_0^\mu + \varepsilon\, \gamma \frac{2^\mu}{\mu} m^\mu \\ &\le 2\varepsilon\, \gamma \frac{2^\mu}{\mu} m^\mu, \qquad \text{ha} \qquad m > m_0 \left(\frac{K_1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\mu}} \qquad \text{és} \qquad m > m_0,\end{aligned}$$

tehát (8.3) valóban fennáll.

A 8.3. Lemma bizonyítása.

Ennek során a 8.1. Lemma bizonyítási módszereit fogjuk alkalmazni először a j, majd az i index szerint.

(i) Tegyük fel, hogy (8.5) fennáll, azaz van olyan m-től és n-től független K_1 állandó, amelyre

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} i^\gamma\, j^\delta\, a_{ij} \le K_1\, m^\mu\, n^\nu, \quad m, n = 1, 2, \ldots, \tag{9.14}$$

ahol $\gamma > \mu \ge 0,\ \delta > \nu \ge 0$. Igazoljuk, hogy ekkor (8.6) is teljesül. Legyen M, N pozitív egész, amelyre $2 \le m < M,\ 2 \le n < N$. Induljunk ki a (8.6) bal oldalán álló kettős sorból. Mint ahogyan a 8.1. Tétel bizonyítása (i) részében tettük, a j index szerinti Abel átrendezéssel és a Lagrange középértéktétel felhasználásával a következő adódik:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=m}^{M}\sum_{j=n}^{N} a_{ij} &= \sum_{i=m}^{M}\sum_{j=n}^{N} j^{-\delta}(j^\delta\, a_{ij}) \\
&\le \sum_{i=m}^{M}\left\{\sum_{j_1=n}^{N-1}\left(\frac{1}{j_1^\delta} - \frac{1}{(j_1+1)^\delta}\right)\sum_{j=1}^{j_1} j^\delta\, a_{ij} + \frac{1}{N^\delta}\sum_{j=1}^{N} j^\delta\, a_{ij}\right\} \\
&\le \sum_{i=m}^{M}\sum_{j_1=n}^{N-1}\frac{\delta}{j_1^{\delta+1}}\sum_{j=1}^{j_1} j^\delta\, a_{ij} + \frac{1}{N^\delta}\sum_{i=m}^{M}\sum_{j=1}^{N} j^\delta\, a_{ij} =: T_1 + T_2.
\end{aligned} \tag{9.15}$$

Tekintsük először T_1-et. Ismételjük meg a fenti eljárást most az i index szerint:

$$\begin{aligned}
T_1 &= \sum_{j_1=n}^{N-1}\frac{\delta}{j_1^{\delta+1}}\sum_{j=1}^{j_1} j^\delta \sum_{i=m}^{M} i^{-\gamma}(i^\gamma\, a_{ij}) \\
&\le \sum_{j_1=n}^{N-1}\frac{\delta}{j_1^{\delta+1}}\sum_{j=1}^{j_1} j^\delta \left\{\sum_{i_1=m}^{M-1}\frac{\gamma}{i_1^{\gamma+1}}\sum_{i=1}^{i_1} i^\gamma\, a_{ij} + \frac{1}{M^\gamma}\sum_{i=1}^{M} i^\gamma\, a_{ij}\right\} \\
&= \sum_{i_1=m}^{M-1}\frac{\gamma}{i_1^{\gamma+1}}\sum_{j_1=n}^{N-1}\frac{\delta}{j_1^{\delta+1}}\sum_{i=1}^{i_1}\sum_{j=1}^{j_1} i^\gamma\, j^\delta\, a_{ij} \\
&\quad + \frac{1}{M^\gamma}\sum_{j_1=n}^{N-1}\frac{\delta}{j_1^{\delta+1}}\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{j_1} i^\gamma\, j^\delta\, a_{ij}.
\end{aligned} \tag{9.16}$$

A (9.14) feltétel miatt ebből következik, hogy

$$
(9.17)\quad \begin{aligned}
T_1 &\le \sum_{i_1=m}^{M-1} \frac{\gamma}{i_1^{\gamma+1}} \sum_{j_1=n}^{N-1} \frac{\delta}{j_1^{\delta+1}} K_1\, i_1^{\mu}\, j_1^{\nu} + \frac{1}{M^{\gamma}} \sum_{j_1=n}^{N-1} \frac{\delta}{j_1^{\delta+1}} K_1\, M^{\mu}\, j_1^{\nu} \\
&= K_1\,\gamma\delta \sum_{i_1=m}^{N-1} \sum_{j_1=n}^{N-1} i_1^{\mu-\gamma-1}\, j_1^{\nu-\delta-1} + K_1\,\delta\, M^{\mu-\gamma} \sum_{j_1=n}^{N-1} j_1^{\nu-\delta-1}.
\end{aligned}
$$

A 8.1. Lemma bizonyításának (9.6) becslése szerint

$$
(9.18)\quad \sum_{i_1=m}^{M-1} i_1^{\mu-\gamma-1} \le \int_{m-1}^{\infty} x^{\mu-\gamma-1} dx \le \frac{m^{\mu-\gamma}}{(\gamma-\mu)2^{\mu-\gamma}}, \quad \gamma > \mu \ge 0,
$$

és ennek a szimmetrikus változata:

$$
(9.19)\quad \sum_{j_1=n}^{N-1} j_1^{\nu-\delta-1} \le \frac{n^{\nu-\delta}}{(\delta-\nu)2^{\nu-\delta}}, \quad \delta > \nu \ge 0.
$$

Ezért (9.17)-ből nyerjük, hogy

$$
(9.20)\quad T_1 \le K_1\,\gamma\delta \frac{m^{\mu-\gamma}}{(\gamma-\mu)2^{\mu-\gamma}} \cdot \frac{n^{\nu-\delta}}{(\delta-\nu)2^{\nu-\delta}} + K_1\,\delta\, M^{\mu-\gamma} \frac{n^{\nu-\delta}}{(\delta-\nu)2^{\nu-\delta}}.
$$

T_2-t hasonló módon becsüljük:

$$
(9.21)\quad \begin{aligned}
T_2 &= \frac{1}{N^{\delta}} \sum_{j=1}^{N} j^{\delta} \sum_{i=m}^{M} i^{-\gamma} (i^{\gamma}\, a_{ij}) \\
&\le \frac{1}{N^{\delta}} \sum_{j=1}^{N} j^{\delta} \left\{ \sum_{i_1=m}^{M-1} \frac{\gamma}{i_1^{\gamma+1}} \sum_{i=1}^{i_1} i^{\gamma}\, a_{ij} + \frac{1}{M^{\gamma}} \sum_{i=1}^{M} i^{\gamma}\, a_{ij} \right\} \\
&= \frac{1}{N^{\delta}} \sum_{i_1=m}^{M-1} \frac{\gamma}{i_1^{\gamma+1}} \sum_{i=1}^{i_1} \sum_{j=1}^{N} i^{\gamma}\, j^{\delta}\, a_{ij} + \frac{1}{M^{\gamma}} \frac{1}{N^{\delta}} \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} i^{\gamma}\, j^{\delta}\, a_{ij},
\end{aligned}
$$

ahonnan a (9.14) feltétel és a (9.18) becslés szerint

$$
(9.22)\quad \begin{aligned}
T_2 &\le \frac{1}{N^{\delta}} \sum_{i_1=m}^{M-1} \frac{\gamma}{i_1^{\gamma+1}} K_1\, i_1^{\mu}\, N^{\nu} + \frac{1}{M^{\gamma}\, N^{\delta}} K_1\, M^{\mu}\, N^{\nu} \\
&= K_1\,\gamma\, N^{\nu-\delta} \sum_{i_1=m}^{M} i_1^{\mu-\gamma-1} + K_1\, M^{\mu-\gamma}\, N^{\nu-\delta} \\
&\le K_1\,\gamma\, N^{\nu-\delta} \frac{m^{\mu-\gamma}}{(\gamma-\mu)2^{\mu-\gamma}} + K_1\, M^{\mu-\gamma}\, N^{\nu-\delta}.
\end{aligned}
$$

Összefoglalva, (9.15), (9.20) és (9.22) szerint ha $M, N \to \infty$, akkor

$$\sum_{i=m}^{\infty}\sum_{j=n}^{\infty} a_{ij} \le \frac{K_1\,\gamma\,\delta}{(\gamma-\mu)(\delta-\nu)2^{\mu-\gamma}2^{\nu-\delta}} m^{\mu-\gamma}\,n^{\nu-\delta} =: K_2\,m^{\mu-\gamma}\,n^{\nu-\delta},$$

ami éppen (8.6).

(ii) Megfordítva, ha (8.6) teljesül, akkor létezik olyan m-től és n-től független K_1 állandó, amelyre

$$\sum_{i=m}^{\infty}\sum_{j=n}^{\infty} a_{ij} \le K_1\,m^{\mu-\gamma}\,n^{\nu-\delta}, \quad m,n = 1,2,\ldots, \tag{9.23}$$

ahol $\gamma \ge \mu > 0$ és $\delta \ge \nu > 0$. Tekintsük a (8.5) bal oldalán álló kettős sort. Legyenek M, N pozitív egészek, amelyekre $1 \le m < M$ és $1 \le n < N$. A 8.1. Lemma bizonyítása (ii) részében látottak szerint, először a j index szerinti Abel átrendezéssel és a Lagrange középértéktétel alkalmazásával írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} i^\gamma\,j^\delta\,a_{ij} &= \sum_{i=1}^{m} i^\gamma \sum_{j=1}^{n} j^\delta\,a_{ij} \le \\
&\le \sum_{i=1}^{m} i^\gamma \sum_{j_1=1}^{n} (j_1^\delta - (j_1-1)^\delta) \sum_{j=j_1}^{N} a_{ij} \le \sum_{i=1}^{m} i^\gamma \sum_{j_1=1}^{n} \delta\,j_1^{\delta-1} \sum_{j=j_1}^{N} a_{ij} \\
&= \sum_{j_1=1}^{n} \delta\,j_1^{\delta-1} \sum_{j=j_1}^{N}\sum_{i=1}^{n} i^\gamma\,a_{ij},
\end{aligned}$$

majd ismételjük meg az Abel átrendezést az i index szerint is:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} i^\gamma\,j^\delta\,a_{ij} &\le \sum_{j_1=1}^{n} \delta\,j_1^{\delta-1} \sum_{j=j_1}^{N}\sum_{i_1=1}^{m} \gamma\,i_1^{\gamma-1} \sum_{i=i_1}^{M} a_{ij} \\
&= \gamma\,\delta \sum_{i_1=1}^{m}\sum_{j_1=1}^{n} i_1^{\gamma-1}\,j_1^{\delta-1} \sum_{i=i_1}^{M}\sum_{j=j_1}^{N} a_{ij}.
\end{aligned}$$

Ha $M, N \to \infty$, akkor ebből (9.23) alapján következik, hogy

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} i^\gamma\,j^\delta\,a_{ij} &\le \gamma\,\delta \sum_{i_1=1}^{m}\sum_{j_1=1}^{n} i_1^{\gamma-1}\,j_1^{\delta-1} \sum_{i=i_1}^{\infty}\sum_{j=j_1}^{\infty} a_{ij} \\
&\le \gamma\,\delta \sum_{i_1=1}^{m}\sum_{j_1=1}^{n} i_1^{\gamma-1}\,j_1^{\delta-1}\,K_1\,i_1^{\mu-\gamma}\,j_1^{\nu-\delta} \qquad (9.24)\\
&= K_1\,\gamma\delta \sum_{i_1=1}^{m}\sum_{j_1=1}^{n} i_1^{\mu-1}\,j_1^{\nu-1}.
\end{aligned}$$

A 8.1. Lemma bizonyításának (9.9) becslése szerint

$$\sum_{i_1=1}^{m} i_1^{\mu-1} \le \int_0^{m+1} x^{\mu-1}\,dx \le \frac{2^\mu}{\mu} m^\mu, \quad \mu > 0, \tag{9.25}$$

és ennek a szimmetrikus változata:

$$\sum_{j_1=1}^{n} j_1^{\nu-1} \le \frac{2^\nu}{\nu} n^\nu, \quad \nu > 0. \tag{9.26}$$

Ezek alapján (9.24)-ből nyerjük, hogy

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} i^\gamma\, j^\delta\, a_{ij} \le K_1\,\gamma\delta \frac{2^\mu}{\mu}\cdot\frac{2^\nu}{\nu} m^\mu\, n^\nu.$$

Ez éppen (8.5), amit bizonyítani akartunk.

A 8.4. Lemma bizonyítása.

Ez a bizonyítás – hasonlóan a 8.2. Lemma bizonyításához – az előző 8.3. Lemma bizonyítása lépéseinek alapos átgondolásával történik.

(iii) Tegyük fel, hogy (8.7) fennáll. Ekkor tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $m_0 = m_0(\varepsilon)$ pozitív egész, amelyre

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} i^\gamma\, j^\delta\, a_{ij} \le \varepsilon\, m^\mu\, n^\nu, \quad \text{ha} \quad m, n > m_0, \tag{9.27}$$

ahol $\gamma > \mu > 0$ és $\delta > \nu > 0$. Megmutatjuk, hogy ekkor (8.8) is fennáll. Legyen $m, n > m_0$, és legyenek M, N olyan pozitív egészek, amelyekre $m_0 < m < M$, $m_0 < n < N$. A 8.3. Lemma bizonyításának lépéseit követjük. A (9.15) összefüggés alapján kapjuk, hogy

$$\sum_{i=m}^{M}\sum_{j=n}^{N} a_{ij} \le \sum_{i=m}^{M}\sum_{j_1=n}^{N-1} \frac{\delta}{j_1^{\delta+1}} \sum_{j=1}^{j_1} j^\delta\, a_{ij} + \frac{1}{N^\delta}\sum_{i=m}^{M}\sum_{j=1}^{N} j^\delta\, a_{ij} =: T_1 + T_2. \tag{9.28}$$

Tekintsük először T_1-et. Az előző bizonyítás (9.16) becslését elvégezve írhatjuk, hogy

$$T_1 \le \sum_{i_1=m}^{M-1} \frac{\gamma}{i_1^{\gamma+1}} \sum_{j_1=n}^{N-1} \frac{\delta}{j_1^{\delta+1}} \sum_{i=1}^{i_1}\sum_{j=1}^{j_1} i^\gamma\, j^\delta\, a_{ij} + \frac{1}{M^\gamma}\sum_{j_1=n}^{N-1}\frac{\delta}{j_1^{\delta+1}}\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{j_1} i^\gamma\, j^\delta\, a_{ij},$$

ahonnan (9.27) szerint nyerjük, hogy

$$\begin{aligned}
T_1 &\le \sum_{i_1=m}^{M-1} \frac{\gamma}{i_1^{\gamma+1}} \sum_{j_1=n}^{N-1} \frac{\delta}{j_1^{\delta+1}} \varepsilon\, i_1^{\mu}\, j_1^{\nu} + \frac{1}{M^{\gamma}} \sum_{j_1=n}^{N-1} \frac{\delta}{j_1^{\delta+1}} \varepsilon\, M^{\mu}\, j_1^{\nu} \\
&= \varepsilon\,\gamma\,\delta \sum_{i_1=m}^{M-1} \sum_{j_1=n}^{N-1} i_1^{\mu-\gamma-1}\, j_1^{\nu-\delta-1} + \varepsilon\,\delta\, M^{\mu-\gamma} \sum_{j_1=n}^{N-1} j_1^{\nu-\delta-1}.
\end{aligned}$$

A korábbi (9.18) és (9.19) alapján következik, hogy

$$T_1 \le \varepsilon\,\gamma\,\delta \frac{m^{\mu-\gamma}}{(\gamma-\mu)2^{\mu-\gamma}} \frac{n^{\nu-\delta}}{(\delta-\nu)2^{\nu-\delta}} + \varepsilon\,\delta\, M^{\mu-\gamma} \frac{n^{\nu-\delta}}{(\delta-\nu)2^{\nu-\delta}}. \tag{9.29}$$

Térjünk rá T_2-re. Az előző bizonyítás (9.21) becslése szerint

$$T_2 \le \frac{1}{N^{\delta}} \sum_{i_1=m}^{M-1} \frac{\gamma}{i_1^{\gamma+1}} \sum_{i=1}^{i_1} \sum_{j=1}^{N} i^{\gamma}\, j^{\delta}\, a_{ij} + \frac{1}{M^{\gamma}\, N^{\delta}} \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} i^{\gamma}\, j^{\delta}\, a_{ij}.$$

Innen először a (9.27) feltétel, majd (9.18) alapján adódik, hogy

$$\begin{aligned}
T_2 &\le \frac{1}{N^{\delta}} \sum_{i_1=m}^{M-1} \frac{\gamma}{i_1^{\gamma+1}} \varepsilon\, i_1^{\mu}\, N^{\nu} + \frac{1}{M^{\gamma}\, N^{\delta}} \varepsilon\, M^{\mu}\, N^{\nu} \\
&= \varepsilon\,\gamma\, N^{\nu-\delta} \sum_{i_1=m}^{M-1} i_1^{\mu-\gamma-1} + \varepsilon\, M^{\mu-\gamma}\, N^{\nu-\delta} \\
&\le \varepsilon\,\gamma\, N^{\nu-\delta} \frac{m^{\mu-\gamma}}{(\gamma-\mu)2^{\mu-\gamma}} + \varepsilon\, M^{\mu-\gamma}\, N^{\nu-\delta}.
\end{aligned} \tag{9.30}$$

Összefoglalva a kapott eredményeket, ha $M, N \to \infty$, akkor (9.28)– (9.30) szerint

$$\sum_{i=m}^{\infty} \sum_{j=n}^{\infty} a_{ij} \le \frac{\varepsilon\,\gamma\,\delta}{(\gamma-\mu)(\delta-\nu)2^{\mu-\gamma}\, 2^{\nu-\delta}} m^{\mu-\gamma}\, n^{\nu-\delta}, \quad \text{ha} \quad m, n > m_0,$$

azaz, mivel $\varepsilon > 0$ tetszőleges volt, (8.8) valóban teljesül.

(iv) Megfordítva, tegyük fel, hogy (8.6) és (8.8) fennáll. Ekkor van olyan m-től és n-től független K_1 állandó, amelyre

$$\sum_{i=m}^{\infty} \sum_{j=n}^{\infty} a_{ij} \le K_1\, m^{\mu-\gamma}\, n^{\nu-\delta}, \quad m, n = 1, 2, \ldots, \tag{9.31}$$

és tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz megadható olyan $m_0 = m_0(\varepsilon)$ pozitív egész, amelyre

$$\sum_{i=m}^{\infty}\sum_{j=n}^{\infty} a_{ij} \le \varepsilon\, m^{\mu-\gamma}\, n^{\nu-\delta}, \quad \text{ha} \quad m,n > m_0, \tag{9.32}$$

$\gamma > \mu > 0,\ \delta < \nu > 0$. Belátjuk, hogy (8.7) is fennáll. A 8.3. Tétel bizonyításában az ennek megfelelő (ii) rész (9.24) első egyenlőtlensége szerint

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} i^{\gamma}\, j^{\delta}\, a_{ij} \le \gamma\,\delta \sum_{i_1=1}^{m}\sum_{j_1=1}^{n} i_1^{\gamma-1}\, j_1^{\delta-1} \sum_{i=i_1}^{\infty}\sum_{j=j_1}^{\infty} a_{ij}. \tag{9.33}$$

Legyen $m,n > m_0$, és tekintsük a jobb oldalt az alábbi felbontásban:

$$\gamma\,\delta\left\{\sum_{i_1=1}^{m_0}\sum_{j_1=1}^{m_0} + \sum_{i_1=m_0+1}^{m}\sum_{j_1=1}^{m_0} + \sum_{i_1=1}^{m_0}\sum_{j_1=m_0+1}^{n} + \sum_{i_1=m_0+1}^{m}\sum_{j_1=m_0+1}^{n}\right\}$$
$$i_1^{\gamma-1}\, j_1^{\delta-1} \sum_{i=i_1}^{\infty}\sum_{j=j_1}^{\infty} a_{ij},$$

ahonnan a (9.31) és (9.32) feltételek alapján (9.33)-ból következik, hogy

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} i^{\gamma}\, j^{\delta}\, a_{ij} &\le \gamma\,\delta\left\{\sum_{i_1=1}^{m_0}\sum_{j_1=1}^{m_0} + \sum_{i_1=m_0+1}^{m}\sum_{j_1=1}^{m_0} + \sum_{i_1=1}^{m_0}\sum_{j_1=m_0+1}^{n}\right\} \\
&\quad i_1^{\gamma-1}\, j_1^{\delta-1}\, K_1\, i_1^{\mu-\gamma}\, j_1^{\nu-\delta} + \gamma\,\delta \sum_{i_1=m_0+1}^{m}\sum_{j_1=m_0+1}^{n} i_1^{\gamma-1}\, j_1^{\delta-1}\, \varepsilon\, i_1^{\mu-\gamma}\, j_1^{\nu-\delta} \\
&= K_1\,\gamma\,\delta\left\{\sum_{i_1=1}^{m_0}\sum_{j_1=1}^{m_0} + \sum_{i_1=m_0+1}^{m}\sum_{j_1=1}^{m_0} + \sum_{i_1=1}^{m_0}\sum_{j_1=m_0+1}^{n}\right\} i_1^{\mu-1}\, j_1^{\nu-1} \\
&\quad + \varepsilon\,\gamma\,\delta \sum_{i_1=m_0+1}^{m}\sum_{j_1=m_0+1}^{n} i_1^{\mu-1}\, j_1^{\nu-1}.
\end{aligned}$$

Ebből a (9.25) és a (9.26) becslések szerint látjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} i^{\gamma}\, j^{\delta}\, a_{ij} \le K_1\,\gamma\,\delta\left\{\frac{2^{\mu}}{\mu} m_0^{\mu} \frac{2^{\nu}}{\nu} m_0^{\nu} + \frac{2^{\mu}}{\mu} m^{\mu} \frac{2^{\nu}}{\nu} m_0^{\nu} + \frac{2^{\mu}}{\mu} m_0^{\mu} \frac{2^{\nu}}{\nu} n^{\nu}\right\}$$
$$+ \varepsilon\,\gamma\,\delta \frac{2^{\mu}}{\mu} m^{\mu} \frac{2^{\nu}}{\nu} n^{\nu} = K_1\,\gamma\,\delta \frac{2^{\mu+\nu}}{\mu\,\nu}\{m_0^{\mu}\, m_0^{\nu} + m^{\mu}\, m_0^{\nu} + m_0^{\mu}\, n^{\nu}\}$$
$$\varepsilon\,\gamma\,\delta \frac{2^{\mu+\nu}}{\mu\,\nu} m^{\mu}\, n^{\nu} \le 4\varepsilon\,\gamma\,\delta \frac{2^{\mu+\nu}}{\mu\,\nu} m^{\mu}\, n^{\nu},$$

$$\text{ha} \quad m > m_0\left(\frac{K_1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\mu}} \quad \text{és} \quad n > m_0\left(\frac{K_1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\nu}}.$$

Tehát (8.7) valóban teljesül.

Ezzel a 8.4. Lemmát bebizonyítottuk.

10. Irodalomjegyzék

[1] N.K. Bary, *A Treatise on Trigonometric Series*, Pergamon Press, Oxford, 1964.

[2] R.P. Boas, Jr., Fourier series with positive coefficients, *J. Math. Anal. Appl.* **17** (1967), 463-483.

[3] R. DeVore and G.G. Lorentz, *Constructive Approximation*, Springer Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1993.

[4] V. Fülöp, Double cosine series with nonnegative coefficients, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **70** (2004), 91-100.

[5] V. Fülöp, Double sine and cosine-sine series with nonnegative coefficients, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **70** (2004), 101-116.

[6] V. Fülöp, Double sine series with nonnegative coefficients and Lipschitz classes, *Colloq. Math.* **105** (2006), 25-34.

[7] Fülöp V., Nemnegatív együtthatójú trigonometrikus sorok összegfüggvényének Lipschitz osztályba való tartozásának jellemzése, pályamunka az MTA Szegedi Területi Bizottsága 2003. évi pályázati kiírására

[8] Fülöp V., Nemnegatív együtthatójú kettős szinusz sorok és Lipschitz osztályok kapcsolata, pályamunka az MTA Szegedi Területi Bizottsága 2004. évi pályázati kiírására

[9] G.G. Lorentz, Fourier-Koeffizienten und Funktionen Klassen, *Math. Z.* **51** (1948), 135-149.

[10] Móricz F., szóbeli közlés.

[11] F. Móricz, Absolutely convergent Fourier series and function classes, *J. Math. Anal. Appl.* (közlésre elfogadva).

[12] I.P. Natanszon, *Konstruktív függvénytan*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1952.

[13] J. Németh, Fourier series with positive coefficients and generalized Lipschitz classes, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **54** (1990), 291-304.

[14] R.E.A.C. Paley, On Fourier series with positive coefficients, *J. London Math. Soc.* **7** (1932), 205-208.

[15] A. Zygmund, *Trigonometric Series,* Vol. 1, Cambridge University Press, 1959.

11. Összefoglaló

Az értekezésben olyan nemnegatív együtthatójú egyváltozós és kétváltozós trigonometrikus sorokkal foglalkozunk, amelyek abszolút konvergensek. Tehát egyenletesen is konvergensek, így az összegfüggvényük minden pontban létezik és folytonos. Jól ismert, hogy egyenletesen konvergens trigonometrikus sor egyben összegfüggvényének Fourier sora is. E sorok együtthatóinak nagyságrendjét vizsgáljuk abból a szempontból, hogy az összegfüggvény az egyváltozós esetben a $\mathrm{Lip}\,\alpha$, $\mathrm{lip}\,\alpha$ Lipschitz függvényosztályok és a Λ_*, λ_* Zygmund függvényosztályok egyikébe, illetve kétváltozós esetben a $\mathrm{Lip}(\alpha,\beta)$, $\mathrm{lip}(\alpha,\beta)$ és a $\Lambda_*(1,1)$, $\lambda_*(1,1)$ függvényosztályok egyikébe tartozzék. Erre adunk szükséges és elegendő feltételeket, amely feltételek az együtthatókból képzett kifejezések viselkedésére vonatkoznak.

Az értekezés első felében összefoglaljuk az irodalomból ismert idevonatkozó eredményeket, amelyek az egyváltozós trigonometrikus sorokra vonatkoznak.

Legyen $\{a_i : i = 1, 2, \ldots\}$ nemnegatív számok tetszőleges sorozata, amelyre

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i < \infty \tag{1}$$

teljesül. Ekkor a

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos ix =: f_c(x), \qquad \sum_{i=1}^{\infty} a_i \sin ix =: f_s(x) \tag{2}$$

sorok egyenletesen konvergensek és összegfüggvényük folytonos. Tehát a (2) sorok összegfüggvényük Fourier sorai is.

R.P. Boas és Németh József hasonló témájú cikkeire építve röviden felsoroljuk és rendszerezzük a szükséges definíciókat és az eddigi eredményeket a fenti szempontból.

Először a $\mathrm{Lip}\,\alpha$ $(0 < \alpha \le 1)$ és ezzel párhuzamosan a $\mathrm{lip}\,\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$ függvényosztályokat jellemezzük. Ezen függvényosztályok definíciója közismert. R.P. Boas 1967-ben megjelent közleményében bizonyította az alábbi tételeket.

1. Tétel. *Legyen* $\{a_i : i = 1, 2, \ldots\}$ *nemnegatív számok tetszőleges sorozata, amelyre* (1) *fennáll, és jelölje* f *az* f_c *és* f_s, (2)*-ben definiált függvények egyikét. Ekkor* $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ *valamely* $0 < \alpha < 1$*-re akkor és csak akkor, ha*

$$\sum_{i=m}^{\infty} a_i = O(m^{-\alpha}), \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

vagy ami ezzel ekvivalens, ha

$$\sum_{i=1}^{m} i\, a_i = O(m^{1-\alpha}), \quad m = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

teljesül.

Érvényes a tétel $\mathrm{lip}\,\alpha$ osztályra vonatkozó változata is, ha a tételben "O" helyébe "o"-t írunk.

Az $\alpha = 1$ határeset vizsgálata bonyolultabb, mivel ekkor a koszinusz és szinusz sorok eltérő módon viselkednek. Az 1. Tétel az $\alpha = 1$ esetben már nem érvényes, és nem igaz a (3) és a (4) feltételek ekvivalenciája sem. Boas bizonyította, hogy az $\alpha = 1$ esetben az erősebb (4) feltétel szükséges és elegendő ahhoz, hogy a szinusz sor a $\mathrm{Lip}\,1$ osztályba tartozzék. A koszinusz sor esetében az $\alpha = 1$ esetben az erősebb (4) feltétel nem szükséges, a gyengébb (3) feltétel viszont nem elegendő a $\mathrm{Lip}\,1$ osztályba való tartozásra. Ebben az esetben a (3) feltétel és az a plusz feltétel jellemzi a $\mathrm{Lip}\,1$ osztályt, hogy

$$\sum_{i=1}^{m} i\, a_i \sin ix = O(1), \qquad m = 1, 2, \ldots .$$

Másodszor a Λ_* és λ_* Zygmund függvényosztályokat jellemezzük. Szintén Boas bizonyította, hogy ha $\alpha = 1$, akkor a gyengébb (3) feltétel csak a $\mathrm{Lip}\,1$ osztálynál bővebb Λ_* osztályba való tartozást biztosítja a koszinusz sor esetében. Azt, hogy az állítás érvényben marad a szinusz sor esetében is, Németh József mutatta meg egy még általánosabb függvényosztály esetében. Továbbá érvényes a tétel λ_* osztályra vonatkozó változata is, mikor a feltételben "O" helyett "o"-t írunk.

Az értekezés főbb eredményei kétváltozós trigonometrikus sorokra vonatkoznak.

Legyen $\{a_{ij} : i, j = 1, 2, \ldots\}$ nemnegatív számok tetszőleges kettős sorozata, amelyre

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} < \infty \tag{5}$$

teljesül. Ekkor a

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \cos ix \cos jy &=: f_{cc}(x, y), \\
\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \sin ix \sin jy &=: f_{ss}(x, y), \\
\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \cos ix \sin jy &=: f_{cs}(x, y)
\end{aligned} \tag{6}$$

kettős sorok egyenletesen konvergensek, így összegfüggvényeik léteznek és folytonosak.

Az egyváltozós esetnek megfelelően jellemezzük azon kettős sorokat, amelyeknek az összegfüggvénye valamely kétváltozós multiplikatív Lipschitz illetve Zygmund osztályba tartozik. Az első részben bemutatott tételek jelentős részét kiterjesztettük kettős sorokra.

Először megadjuk a kétváltozós Lipschitz osztályok definícióját, amelyek Móricz Ferenctől származnak:

2. Definíció. A *kétváltozós (multiplikatív)* Lip(α, β) $(\alpha, \beta > 0)$ *osztály* mindazon folytonos, mindkét változójában 2π szerint periodikus $\phi(x, y)$ függvényekből áll, amelyekhez létezik olyan $C = C(\varphi)$ állandó, hogy bármely x, y, h, k esetén

$$|\phi(x + h, y + k) - \phi(x + h, y) - \phi(x, y + k) + \phi(x, y)| \leq C|h|^{\alpha}|k|^{\beta}.$$

Ennek megfelelően definiálható a lip(α, β) $(\alpha, \beta > 0)$ *osztály* is.

Az értekezés második felében ismertetett tételeket a megfelelő egyváltozós eredmények motiválták. Az alábbi 3. Tétel az 1. Tétel kétváltozóra való kiterjesztése. Mivel az 1. Tétel mind a koszinusz, mind a szinusz sor esetén érvényes, azt vártuk, hogy a kétváltozós kiterjesztés nemcsak a kettős koszinusz és kettős szinusz, hanem a vegyes koszinusz-szinusz sor esetén egyaránt érvényes. Ez valóban így van.

3. Tétel. *Legyen* $\{a_{ij} : i, j = 1, 2, \ldots\}$ *nemnegatív számok tetszőleges kettős sorozata, amelyre az* (5) *feltétel teljesül, és jelölje* f *a* (6)*-ban definiált* f_{cc}, f_{ss} *és* f_{cs} *összegfüggvények egyikét. Ekkor* $f \in \mathrm{Lip}(\alpha, \beta)$ *valamely* $0 < \alpha, \beta < 1$ *esetén akkor és csak akkor, ha*

$$\sum_{i=m}^{\infty} \sum_{j=n}^{\infty} a_{ij} = O(m^{-\alpha} n^{-\beta}), \quad m, n = 1, 2, \ldots, \tag{7}$$

vagy ami ezzel ekvivalens, ha

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} i\, j\, a_{ij} = O(m^{1-\alpha} n^{1-\beta}), \quad m, n = 1, 2, \ldots . \tag{8}$$

Érvényes a tétel $\mathrm{lip}(\alpha, \beta)$ osztályra vonatkozó változata is, ha (7)-ben és (8)-ban "O" helyett "o"-t írunk.

A $\max(\alpha, \beta) = 1$ határesetekben a koszinusz és szinusz sorok különbözőképpen viselkednek. Ekkor a 3. Tétel már nem igaz, és a (7) és a (8) feltételek ekvivalenciája sem érvényes. Kiderült, hogy az egyváltozós esethez hasonlóan az $\alpha = \beta = 1$ esetben erősebb (8) feltétel lesz alkalmas a $\mathrm{Lip}(1, 1)$ osztály jellemzésére a kettős szinusz sor esetében. Azt is bizonyítottuk, hogy a kettős szinusz sor esetében ugyanezzel a (8) feltétellel jellemezhetjük a $\mathrm{Lip}(\alpha, 1)$ osztályokat is minden $0 < \alpha < 1$ esetén.

A teljesség igénye nélkül soroljuk fel a következő problémákat, amelyek a további kutatás tárgyát képezhetik. Többek között, nem megoldott a kettős koszinusz sor $\mathrm{Lip}(\alpha, \beta)$ osztályba való tartozásának jellemzése, ha $\max(\alpha, \beta) = 1$, azaz a $\mathrm{Lip}(1, 1)$ ill. a $\mathrm{Lip}(\alpha, 1)$ $(0 < \alpha < 1)$ osztályok esete.

Áttérve a kétváltozós multiplikatív Zygmund osztályok jellemzésére, megadjuk a kétváltozós $\Lambda_*(1, 1)$ és $\lambda_*(1, 1)$ Zygmund osztályok definícióját, amelyek szintén Móricz Ferenc nevéhez fűződnek.

Az egyváltozós Zygmund osztály esetében a koszinusz és a szinusz sor egyformán viselkedik, ezért azt vártuk, hogy a kétváltozós kiterjesztésben is ugyanaz az együttható-feltétel jellemezze a kettős koszinusz, kettős szinusz és a koszinusz-szinusz sort is. Ez valóban így van, az egyváltozós tételnek megfelelően, a $\mathrm{Lip}(\alpha, \beta)$ $(0 < \alpha, \beta < 1)$ osztályt jellemző két ekvivalens feltétel közül az $\alpha = \beta = 1$

kiterjesztett esetben a (7) gyengébb feltétel jellemzi a $\Lambda_*(1, 1)$ osztályt. A tétel $\lambda_*(1, 1)$ osztályra érvényes megfelelője is igaz.

A dolgozat végén mind az egyváltozós, mind a kétváltozós tételek bizonyításaiban alapvető jelentőségű, számsorokra vonatkozó lemmák szerepelnek. A lemmák egyváltozós esetei Boastól és Móricz Ferenctől származnak. Megjegyezzük, hogy Boas az egyváltozós tételeinek bizonyításában még egy további lemmát is felhasznált. Mi a bizonyításokat egyszerűsítettük, és az általunk közölt bizonyításokban már az első lemma használata is elegendő volt.

12. Summary

In our dissertation we deal with single and double trigonometric series with nonnegative coefficients which are absolutely convergent. Since absolute convergence implies uniform convergence, the sums of these trigonometric series exist at each point and they are continuous functions. It is well known that if a trigonometric series is uniformly convergent, then it is the Fourier series of its sum. We investigate the order of magnitude of the coefficients in order that the sum of the trigonometric series in question belong to one of the Lipschitz classes $\mathrm{Lip}\,\alpha$, $\mathrm{lip}\,\alpha$ and Zygmund classes Λ_*, λ_* in the case of single series; and to one of the classes $\mathrm{Lip}(\alpha,\beta)$, $\mathrm{lip}(\alpha,\beta)$, $\Lambda_*(1,1)$, $\lambda_*(1,1)$ in the case of double series. We give necessary and sufficient conditions in terms of the coefficients.

In the first part of our dissertation we briefly summarize the basic results on the single trigonometric series, which are known in the literature.

Given a sequence $\{a_i : i = 1, 2, \ldots\}$ of nonnegative numbers such that

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i < \infty, \tag{1}$$

then the sum of the cosine series and the sum of the sine series

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos ix =: f_c(x), \qquad \sum_{i=1}^{\infty} a_i \sin ix =: f_s(x) \tag{2}$$

are continuous functions, due to uniform convergence. Thus, the series in (2) are the Fourier series of their sums $f_c(x)$ and $f_s(x)$, respectively.

We will present the theorems by R.P. Boas and J. Németh.

First we consider the Lipschitz classes $\mathrm{Lip}\,\alpha$ and $\mathrm{lip}\,\alpha$. The definitions of these function classes are well known. R.P. Boas proved in 1967 the theorems below.

Theorem 1. *Let $\{a_i : i = 1, 2, \ldots\}$ be a sequence of nonnegative numbers such that condition* (1.1) *is satisfied and denote by f either f_c or f_s, defined in* (2)*. Then $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ for some $0 < \alpha < 1$ if and only if*

$$\sum_{i=m}^{\infty} a_i = O(m^{-\alpha}), \qquad m = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

or equivalently

$$(4)\qquad \sum_{i=1}^{m} i\, a_i = O(m^{1-\alpha}), \qquad m = 1, 2, \dots .$$

Theorem 1 remains valid if we replace $\mathrm{Lip}\,\alpha$ by $\mathrm{lip}\,\alpha$ and "O" by "o".

If $\alpha = 1$, then the situation is more complicated, since in this case the cosine and sine series behave differently. In particular, in case $\alpha = 1$ Theorem 1 and the equivalence of conditions (3) and (4) are no longer true. Boas proved that in case $\alpha = 1$ the stronger condition (4) is necessary and sufficient for a sine series to belong to the class Lip 1. For a cosine series in case $\alpha = 1$ the stronger condition is not necessary, while the weaker condition (3) is not sufficient to belong to the class Lip 1. However, condition (3) in case $\alpha = 1$ together with the condition

$$\sum_{i=1}^{m} i\, a_i \sin ix = O(1), \qquad m = 1, 2, \dots$$

are necessary and sufficient for $f_c(x)$ to belong to Lip 1.

Second, we characterize the Zygmund classes Λ_* and λ_*. Boas proved that for cosine series the weaker condition (3) in the case $\alpha = 1$ is necessary and sufficient to belong to the class Λ_*, which is narrower than all the classes $\mathrm{Lip}\,\alpha$ with $0 < \alpha < 1$ and broader than the class Lip 1. In the case of sine series J. Németh proved the same condition (3) to be necessary and sufficient to belong to the class Λ_*.

Furthermore, the theorem remains valid if we replace Λ_* by λ_*, and "O" by "o".

The main results of our dissertation relate to double (two-dimensional) trigonometric series.

Let $\{a_{ij} : i, j = 1, 2, \dots\}$ be a double sequence of nonnegative numbers such that

$$(5)\qquad \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} < \infty,$$

then the double cosine series, the double sine series and the double cosine-sine series

$$(6)\qquad \begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\cos ix\cos jy &=: f_{cc}(x,y),\\ \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\sin ix\sin jy &=: f_{ss}(x,y),\\ \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\cos ix\sin jy &=: f_{cs}(x,y) \end{aligned}$$

converge uniformly, and in particular, their sums f_{cc}, f_{ss} and f_{cs} are continuous functions.

As in the case of single trigonometric series, we characterize those double trigonometric series whose sum belong to some double (multiplicative) Lipschitz or Zygmund class. We extend a few theorems of the previous part from single to double trigonometric series.

We begin with the definitions of the two-dimensional multiplicative Lipschitz classes $\mathrm{Lip}(\alpha,\beta)$ and $\mathrm{lip}(\alpha,\beta)$, where $\alpha,\beta>0$. The definitions are due to F. Móricz.

A continuous function $\phi(x,y)$, 2π-periodic in each variable, is said to belong to the two-dimensional Lipschitz class $\mathrm{Lip}(\alpha,\beta)$ for some $\alpha,\beta>0$ if there exists a constant $C=C(\varphi)$ such that for all x,y,h and k, we have

$$|\phi(x+h,y+k)-\phi(x+h,y)-\phi(x,y+k)+\phi(x,y)|\le C|h|^{\alpha}|k|^{\beta}.$$

The definition of the little Lipschitz class $\mathrm{lip}(\alpha,\beta)$ for some $\alpha,\beta>0$ is similar.

The following theorems are motivated by the corresponding one-variable theorems. The first result below is the extension of Theorem 1 from single to double series. Since Theorem 1 is valid for both cosine and sine series, we expected that its extension would be valid not only for double cosine and sine series, but for the mixed cosine-sine series as well. Indeed, this is the case as the following theorem shows.

Theorem 2. *Let* $\{a_{ij}: i,j=1,2,\ldots\}$ *be a double sequence of nonnegative numbers such that condition* (5) *is satisfied, and* f *be either* f_{cc}, f_{ss} *or* f_{cs}, *where*

f_{cc}, f_{ss} and f_{cs} are defined in (6). *Then $f \in \mathrm{Lip}(\alpha,\beta)$ for some $0 < \alpha, \beta < 1$ if and only if*

$$\sum_{i=m}^{\infty}\sum_{j=n}^{\infty} a_{ij} = O(m^{-\alpha}n^{-\beta}), \qquad m,n = 1,2,\dots, \tag{7}$$

or equivalently

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} ij\, a_{ij} = O(m^{1-\alpha}n^{1-\beta}), \qquad m,n = 1,2,\dots\ . \tag{8}$$

Theorem 2 remains valid if we replace $\mathrm{Lip}(\alpha,\beta)$ by $\mathrm{lip}(\alpha,\beta)$ and "O" by "o".

In the case when $\max(\alpha,\beta) = 1$ the cosine and sine series behave differently. Furthermore, Theorem 2 and the equivalence of conditions (7) and (8) are no longer true. It turns out that similarly to the one-dimensional case, when $\alpha = \beta = 1$ the stronger condition (8) is the necessary and sufficient one for the sum $f_{ss}(x,y)$ to belong to $\mathrm{Lip}(1,1)$. We proved that the class $\mathrm{Lip}(\alpha,1)$ for $0 < \alpha < 1$ can also be characterized by condition (8).

Without claiming completeness, we raise the following problems which may be the targets of further research. Among others, it is an open problem of how to characterize those double cosine series whose sum belong to one of the classes $\mathrm{Lip}(\alpha,\beta)$ when $\max(\alpha,\beta) = 1$, that is, to $\mathrm{Lip}(1,1)$ or $\mathrm{Lip}(\alpha,1)$ for some $0 < \alpha < 1$.

Next, we characterize the two-dimensional multiplicative Zygmund classes $\Lambda_*(1,1)$ and $\lambda_*(1,1)$, whose definitions are due to F. Móricz.

In the case of the one-dimensional Zygmund classes, the cosine and sine series behave in the same way. Therefore we expected that this will be the situation in the case of the double cosine, double sine and mixed cosine-sine series, too. In fact, this is the case. Similarly to the one-dimensional theorems, from the two equivalent conditions which characterize the class $\mathrm{Lip}(\alpha,\beta)$ for some $0 < \alpha, \beta < 1$, the weaker condition (7) in the case $\alpha = \beta = 1$ characterizes the class $\Lambda_*(1,1)$. Furthermore, the counterpart of this theorem is valid for the class $\lambda_*(1,1)$ when "O" is replaced by "o".

At the end of the dissertation we collected the auxiliary results which play key roles in the proofs of one- and two-variable theorems. The lemmas in the one-variable case are due to Boas and F. Móricz. We note that in the proofs of the one-dimensional theorems Boas used one more lemma, that is, altogether two lemmas. We have managed to simplify the proofs of these theorems so that the first lemma was enough to carry out the proofs.