ELDÖNTHETŐSÉGI PROBLÉMÁK AZ ALGEBRÁBAN

doktori értekezés tézisei

Maróti Miklós

Szeged, 2006.

Doktori értekezésemet a [18, 19] és [20] dolgozatok eredményeiből állítottam össze. Az első dolgozat témája nem kapcsolódik szervesen az értekezésem címét adó eldönthetőségi problémák köréhez, hanem egy speciális algebraosztály egyszerű algebráit írja le. A második dolgozatomban egy tíz éve megoldatlan eldönthetőségi problémát, az úgynevezett többségi függvény létezésének problémáját vizsgálom, és annak egy parciális változatának eldönthetetlenségét bizonyítom. A harmadik, még nem publikált dolgozatomban megmutatom, hogy az eredeti probléma a várakozásokkal ellentétben eldönthető. Ennek egyik következménye, hogy fontos algebraosztályokról, a végesen generált kongruenciadisztributív kvázivarietásokról eldönthető, hogy a klasszikus Pontrjagin-, Stone-, illetve Priestley-féle dualitásokhoz hasonlóan, topológiai módszerekkel leírhatók-e.

Doktori értekezésem megértéséhez csak az univerzális algebra alapfogalmainak ismeretére van szükség, melyek mindegyike az egyetemi tanulmányok alatt előfordul, illetve a [2] vagy [23] könyvekben fellelhető. Annak ellenére, hogy a többségi függvény létezésének problémáját a természetes dualitások elmélete motiválta (lásd [4, 5, 6]), ezen elmélet ismeretére nem lesz szükségünk. A hivatkozások megkönnyítése érdekében megtartottam az értekezésben kimondott definíciók és tételek számozását.

F-félhálók

Az univerzális algebrai vizsgálatok egyik fő célja általános algebraosztályok minél teljesebb leírása. G. Birkhoff tétele szerint az azonosságokkal definiálható algebraosztályok, mint például a klasszikus csoportok, gyűrűk, és hálók alkotta varietások minden algebrája az osztály építőköveinek tekinthető szubdirekt irreducibilis algebrák szubdirekt szorzatára bontható. Mivel nagyon sok algebrai tulajdonság vizsgálata visszavezethető szubdirekt irreducibilis algebrák vizsgálatára, fontos kutatási terület ezen algebrák leírása.

A félhálók varietásában például ez a leírás triviális, mivel csak a kételemű félháló szubdirekt irreducibilis. Máshol a helyzet nem ilyen egyszerű, mint például a turnamentek által generált varietásban [21], ahol nem minden algebra turnament, de a szubdirekt irreducibilis algebrák azok. Léteznek olyan (reziduálisan nagy) varietások is, mint például a kvaterniócsoport által generált varietás, ahol a szubdirekt irreducibilis algebrák valódi osztályt alkotnak, és valamilyen értelemben leírásuk reménytelen. Ezért sokszor az egyszerű algebrák vizsgálatára szorítkozunk, azaz olyan szubdirekt irreducibilis algebrákra, melyeknek csak triviális kongruenciái vannak. A véges egyszerű csoportok klasszifikációja mutatja legjobban, hogy még ez a probléma is milyen nehéz általában.

Több probléma vizsgálatában természetes módon kerülnek elő felcserélhető félhálóművelettel rendelkező algebrák, azaz olyan algebrák, melyekben minden

$f(x_1, \ldots, x_n)$ műveletre teljesül az

$$f(x_1 \wedge y_1, \ldots, x_n \wedge y_1) \approx f(x_1, \ldots, x_n) \wedge f(y_1, \ldots, y_n)$$

azonosság. Sok tekintetben ezen algebrák nagyon hasonlóan viselkednek a modulusokhoz. Például K. Kearnes és Szendrei Ágnes [15] cikke alapján ha valamely lokálisan véges varietás a szelíd kongruenciák elmélete szerint (lásd [9]) csak **5**-ös típust tartalmaz, és teljesül benne egy speciális term-feltétel, akkor létezik olyan félháló-kifejezésfüggvénye, amely minden művelettel felcserélhető. Az olyan idempotens algebrák vizsgálatában, amelyekben az alapműveletek egymással mind felcserélhetőek, a félhálóművelettel rendelkező algebrák fontos szerepet játszanak, melyeket félhálómódoknak nevezünk. Lokálisan véges félhálómódok varietásaiban a szubdirekt irreducibilis algebrákat K. Kearnes írta le a [14] cikkben.

Érdekes, felcserélhető félhálóművelettel rendelkező algebrát kapunk, ha félhálóhoz automorfizmusokat, mint új egyváltozós műveleteket adunk hozzá. Ezt általában is elvégezhetjük [3]: minden $\mathcal{V}$ varietás természetes módon kibővíthető egy rögzített $\mathbf{F}$ automorfizmus-monoiddal úgy, hogy az $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$ algebrákhoz olyan új egyváltozós műveleteket veszünk hozzá, amelyek endomorfizmusként hatnak $\mathbf{A}$-n. Ennek a konstrukciónak mi csak a következő speciális esetével foglalkozunk.

1.1. Definíció. A kétváltozós $\wedge$ műveletet és az F halmaz elemeivel jelölt egyváltozós műveleteket tartalmazó $\mathbf{S} = \langle S; \wedge, F\rangle$ algebrát $\mathbf{F}$-*félhálónak* nevezzük, ha $\mathbf{F} = \langle F; \cdot, ^{-1}, \mathrm{id}\rangle$ csoport, és $\mathbf{S}$-ben teljesülnek az alábbi azonosságok:

(1) a félháló-azonosságok a $\wedge$ műveletre,

(2) $\mathrm{id}(x) \approx x$,

(3) $f(g(x)) \approx (f \cdot g)(x)$ minden $f, g \in F$ műveletre, és

(4) $f(x \wedge y) \approx f(x) \wedge f(y)$ minden $f \in F$ műveletre.

Minden félháló triviális módon $\mathbf{F}$-félhálóként is tekinthető, ha az F-beli egyváltozós műveletek mindegyikét identikus leképezésnek definiáljuk. Ennél egy sokkal érdekesebb példa a következő.

1.2. Definíció. Legyen $\mathbf{F} = \langle F; \cdot, ^{-1}, \mathrm{id}\rangle$ rögzített csoport. Az F halmaz hatványhalmazán definiáljuk a $\mathbf{P}(F) = \langle P(F); \wedge, F\rangle$ $\mathbf{F}$-félhálót a következőképpen:

(1) $A \wedge B = A \cap B$ minden $A, B \subseteq F$ elemre, és

(2) $f(A) = A \cdot f^{-1}$ minden $f \in F$ műveletre és $A \subseteq F$ elemre.

Az első fontos állításunk visszavezeti a szubdirekt irreducibilis $\mathbf{F}$-félhálók vizsgálatát a fent definiált $\mathbf{P}(F)$ algebra részalgebráinak vizsgálatára.

1.6. Segédtétel. *Minden szubdirekt irreducibilis $\mathbf{F}$-félháló izomorf $\mathbf{P}(F)$ valamely $\mathbf{U}$ részalgebrájával, amelynek létezik egy egyértelműen meghatározott $M \subseteq F$ eleme, melyre a következők teljesülnek:*

(1) *M monoid, azaz $\mathrm{id} \in M$ és $M \cdot M = M$,*

(2) *$A = M \cdot A$ minden $A \in U$ elemre, és*

(3) *$M = \bigcap \{ A \in U \mid \mathrm{id} \in A \}$.*

Ezen segédtétel felhasználásával könnyen adódik a véges szubdirekt irreducibilis $\mathbf{F}$-félhálók, illetve a lokálisan véges $\mathbf{F}$ csoportok esetében az összes szubdirekt irreducibilis $\mathbf{F}$-félháló jellemzése (az 1.4. Állítás és 1.7. Következmény). Ezekben a speciális esetekben az $\mathbf{U}$ algebra tartalmazza az üres halmazt, és M részcsoport $\mathbf{F}$-ben. Nem meglepő, hogy ezek az elemek fontos szerepet játszanak az egyszerű $\mathbf{F}$-félhálók következő fontos osztályában is.

1.8. Definíció. Az $\mathbf{F}$ csoport minden M részcsoportjára legyen $\mathbf{S}(M)$ a $\mathbf{P}(F)$ $\mathbf{F}$-félháló azon részalgebrája, amelynek elemei az üres halmaz és M jobb oldali mellékosztályai.

$\mathbf{S}(M)$ olyan „lapos” félháló, amelyben az üres halmaz a zéruselem, M jobb oldali mellékosztályai az atomok, és az $\mathbf{F}$ csoport tranzitív permutációcsoportként hat az atomok halmazán. Az $\mathbf{S}(M)$ algebrák pontosan azokat az egyszerű $\mathbf{F}$-félhálókat írják le, amelyeknek a félhálórendezésre nézve van legkisebb eleme és legalább egy atomja.

J. Ježek a [11] cikkében leírta az egyszerű, két egymással is felcserélhető automorfizmussal bővített félhálókat, azaz a $\langle \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}; + \rangle$-félhálók varietásában az egyszerű algebrákat. Ennek tetszőleges kommutatív $\mathbf{F}$ csoportra való kiterjesztése a [18] dolgozat legfontosabb eredménye. Az előző $\mathbf{S}(M)$ egyszerű $\mathbf{F}$-félhálókon kívül a lineáris félhálórendezéssel rendelkező következő $\mathbf{F}$-félhálók is fontos szerepet játszanak:

1.13. Definíció. A kommutatív $\mathbf{F}$ csoportnak a valós számok $\langle \mathbb{R}; + \rangle$ additív csoportjába történő minden nemtriviális β homomorfizmusára definiáljuk az $\mathbf{R}_\beta = \langle \mathbb{R}; \min, F \rangle$ $\mathbf{F}$-félhálót a következőképpen:

(1) $\min(a, b)$ a valós számok természetes rendezése szerinti kisebbik szám, és

(2) $f(a) = a - \beta(f)$ minden $f \in F$ műveletre és $a, b \in \mathbb{R}$ számokra.

1.16. Definíció. A $\beta \colon \mathbf{F} \to \langle \mathbb{R}; + \rangle$ homomorfizmust *sűrűnek* nevezzük, ha minden valós $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $f \in F$ elem, hogy $0 < \beta(f) \leq \varepsilon$.

Ha β az 1.13. definícióban nem sűrű, akkor β képe az $\langle\mathbb{R};+\rangle$ csoportban $\langle\mathbb{Z};+\rangle$-szal izomorf részcsoportot alkot. Ezt külön esetnek fogjuk tekinteni:

1.18. Definíció. A kommutatív $\mathbf{F}$ csoportnak az egész számok $\langle\mathbb{Z};+\rangle$ additív csoportjára történő minden szürjektív α homomorfizmusához definiáljuk a $\mathbf{Z}_\alpha = \langle\mathbb{Z};\min,F\rangle$ $\mathbf{F}$-félhálót a következőképpen:

(1) $\min(a,b)$ az egész számok természetes rendezése szerinti kisebbik szám, és

(2) $f(a) = a - \alpha(f)$ minden $f \in F$ műveletre és $a,b \in \mathbb{Z}$ számokra.

1.21. Tétel. *Ha* $\mathbf{F}$ *kommutatív csoport, akkor minden egyszerű* $\mathbf{F}$*-félháló a következő egyszerű algebrák valamelyikével izomorf:*

(1) $\mathbf{S}_M$*, ahol* M *az* $\mathbf{F}$ *csoport valamely részcsoportja,*

(2) $\mathbf{Z}_\alpha$*, ahol* $\alpha\colon \mathbf{F} \to \langle\mathbb{Z};+\rangle$ *szürjektív csoport-homomorfizmus, és*

(3) *az* $\mathbf{R}_\beta$ *algebra bármely részalgebrája, ahol* $\beta\colon \mathbf{F} \to \langle\mathbb{R};+\rangle$ *sűrű csoport-homomorfizmus.*

A felsorolt algebrák páronként nem izomorfak, kivéve azt az esetet, amikor β_1 *és* β_2 *sűrű csoport-homomorfizmusok,* $\mathbf{S}_1$ *és* $\mathbf{S}_2$ *rendre az* $\mathbf{R}_{\beta_1}$ *és* $\mathbf{R}_{\beta_2}$ *algebrák részalgebrái, és léteznek olyan valós* $t > 0$ *és* d *számok, hogy* $\beta_2 = t\beta_1$ *és* $S_2 = tS_1 + d$*.*

Végezetül megemlítjük, hogy a nemkommutatív eset ennél bonyolultabb. A [18] cikkben példát adunk olyan egyszerű $\mathbf{F}$-félhálóra, amelynek van legkisebb eleme, de nincs atomja, és félhálórendezése nem lineáris.

Dualitáselmélet és a többségi függvény probléma

A dualitáselmélet a klasszikus Pontrjagin-, Stone-, illetve Priestley-féle dualitás közös általánosításaként fejlődött ki (lásd [6]). Az elmélet szerint algebrák valamely $\mathcal{A}$ osztálya és a köztük létező homomorfizmusok alkotta kategória duálisan ekvivalens egy megfelelően választott topológiai struktúrák $\mathcal{X}$ osztályának és folytonos, struktúramegőrző függvényeinek kategóriájával. Az $\mathcal{A}$ osztály minden esetben valamely $\mathbf{P} \in \mathcal{A}$ algebra által generált kvázivarietás. Az $\mathcal{X}$ osztály valamely $\underset{\sim}{\mathbf{P}} \in \mathcal{X}$ topológiai struktúra hatványainak zárt részstruktúráival izomorf struktúrák osztálya. Továbbá a $\mathbf{P}$ algebra és a $\underset{\sim}{\mathbf{P}}$ topológiai struktúra alaphalmaza mindig megegyezik. A részleteket kerülve megjegyezzük, hogy az $\mathbf{A} \in \mathcal{A}$ algebra $\underset{\sim}{\mathbf{A}} \in \mathcal{X}$ duálisának pontjai a $\varphi\colon \mathbf{A} \to \mathbf{P}$ homomorfizmusok; illetve az $\underset{\sim}{\mathbf{X}} \in \mathcal{X}$ topológiai struktúra $\mathbf{X} \in \mathcal{A}$ duálisának elemei az $f\colon \underset{\sim}{\mathbf{X}} \to \underset{\sim}{\mathbf{P}}$ folytonos, struktúramegőrző függvényei.

Példa. *A Pontrjagin-féle dualitás esetében $\mathcal{A}$ az Abel-féle csoportok varietása, $\mathbf{P}$ a komplex számok multiplikatív csoportjának $P = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ részhalmazán értelmezett $\langle P; \cdot, ^{-1}, 1\rangle$ egységkörcsoport, $\mathcal{X}$ a kompakt topologikus Abel-féle csoportok kategóriája, és végezetül $\underset{\sim}{\mathbf{P}} = \langle P; \cdot, ^{-1}, 1, \tau\rangle$, ahol τ a komplex számsík topológiájának az egységkörre való megszorítása.*

Példa. *A Stone-féle dualitás esetében $\mathcal{A}$ a Boole-algebrák varietása, $\mathbf{P} = \langle\{0,1\}; \wedge, \vee, ', 0, 1\rangle$ a kételemű Boole-algebra, $\mathcal{X}$ a teljesen széteső Hausdorff-terek kategóriája, és $\underset{\sim}{\mathbf{P}} = \langle\{0,1\}; \tau\rangle$, ahol τ a diszkrét topológia. Könnyen látható, hogy az $\mathbf{A} \in \mathcal{A}$ Boole-algebra ultrafilterei éppen az $\mathbf{A}$ algebra $\mathbf{P}$-be menő homomorfizmusainak felelnek meg.*

Példa. *A Priestly-féle dualitás esetében $\mathcal{A}$ a korlátos disztributív hálók varietása, $\mathbf{P} = \langle\{0,1\}; \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ a kételemű korlátos disztributív háló, $\mathcal{X}$ a teljesen rendezésszéteső terek kategóriája, és $\underset{\sim}{\mathbf{P}} = \langle\{0,1,\}; \leq, \tau\rangle$, ahol τ a diszkrét topológia. Könnyen látható, hogy az $\mathbf{A} \in \mathcal{A}$ korlátos disztributív háló prímfilterei éppen az $\mathbf{A}$ algebra $\mathbf{P}$-be menő homomorfizmusainak felelnek meg.*

Azt mondjuk, hogy a $\mathbf{P}$ algebra *rendelkezik természetes dualitással*, ha létezik olyan $\underset{\sim}{\mathbf{P}}$ topológiai struktúra, amelyre a dualitáselmélet által meghatározott módon, a $\mathbf{P}$ által generált $\mathcal{A}$ kvázivarietásnak a $\underset{\sim}{\mathbf{P}}$ által generált $\mathcal{X}$ kategória duális reprezentációja. Nem minden algebra rendelkezik természetes dualitással, és nem világos, hogy ez a tulajdonság egyáltalán eldönthető-e véges algebrákra. Ezt a problémát nevezzük *természetes dualitási problémának.*

Nagy áttörést jelentett a dualitáselmélet vizsgálatában a következő eredmény, amely algebrák egy jelentős osztályára a természetes dualitási problémát tisztán algebrai problémára redukálta. A $\mathbf{P}$ algebra t kifejezésfüggvényét *többségi függvénynek* nevezzük, ha az teljesíti a

$$t(y, x, \ldots, x) \approx t(x, y, x, \ldots, x) \approx \cdots \approx t(x, \ldots, x, y) \approx x$$

azonosságokat. *Egyesítés-féligdisztributívnak* nevezünk egy hálót, ha abban teljesül az

$$x \vee y = x \vee z \implies x \vee (y \wedge z) = x \vee y$$

kváziazonosság. Az $\mathbf{A} \in \mathcal{A}$ algebra *kongruencia-egyesítésféligdisztributív*, ha $\mathbf{A}$ kongruenciahálója egyesítés-féligdisztributív.

Tétel (B. A. Davey, L. Heindorf és R. McKenzie [5]). *Tetszőleges véges $\mathbf{P}$ algebrára és az általa generált $\mathcal{A}$ kvázivarietásra a következő állítások ekvivalensek:*

(1) $\mathbf{P}$ *rendelkezik többségi kifejezésfüggvénnyel.*

(2) $\mathbf{P}$ *rendelkezik természetes dualitással, és $\mathcal{A}$ minden algebrája kongruenciadisztributív.*

(3) **P** *rendelkezik természetes dualitással, és $\mathcal{A}$ minden véges algebrája kongruencia-egyesítésféligdisztributív.*

A *többségi függvény problémát* az előző tétel motiválta, ahol véges algebráról kell azt eldönteni, hogy rendelkezik-e többségi kifejezésfüggvénnyel. Természetesen, ha tudnánk a többségi függvény változóinak számát, akkor magát a többségi függvényt már könnyen megkereshetnénk, mivel a megfelelő számú elem által generált szabad algebrát egyszerű kiszámolni. A nehézséget az jelenti, hogy nem tudjuk a többségi kifejezésfüggvény változóinak számát, ha egyáltalán létezik; de még felső korlátunk sincs rá.

Többségi kifejezésfüggvénnyel rendelkező algebrák természetes módon fordulnak elő az univerzális algebra különböző területein. Például minden háló rendelkezik az

$$(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x)$$

háromváltozós többségi függvénnyel. E. L. Post [26] klasszifikációjából kiderül, hogy kételemű alaphalmazon majdnem minden klón tartalmaz többségi műveletet. Ismert, hogy minden többségi függvénnyel rendelkező algebra kongruenciadisztributív varietást generál, és véges azonosságbázissal rendelkezik (feltéve, hogy csak véges sok alapművelete van).

Könnyen eldönthető, hogy egy véges algebra kongruenciadisztributív varietást generál-e, mert elég a véges sok háromváltozós kifejezésfüggvény között Jónsson-függvényeket keresni. Ha a többségi függvény probléma eldönthetetlen lenne, akkor az előző megjegyzések alapján a többségi függvény probléma kongruenciadisztributív varietást generáló algebrákra is eldönthetetlen volna, és a tétel szerint így a természetes dualitási probléma is eldönthetetlen lenne.

A parciális többségi függvény eldönthetetlensége

R. McKenzie a következő megközelítéssel próbálta a többségi függvény problémának az eldönthetetlenségét bizonyítani:

2.1. Definíció. Legyen $t(x_1, \ldots, x_n)$ az **A** algebra kifejezésfüggvénye, és legyen $S \subseteq A$. Azt mondjuk, hogy t *parciális többségi függvény az S halmazon*, ha a

$$t(y, x, \ldots, x) = t(x, y, x, \ldots, x) = \cdots = t(x, \ldots, x, y) = x$$

egyenlőség teljesül minden $x, y \in S$ elemre.

Könnyen látható, hogy a t kifejezésfüggvény akkor és csak akkor többségi függvénye az **A** algebrának, ha az **A** által generált varietás két elem által generált szabad algebrájában t parciális többségi függvény a generáló elemek $\{x, y\}$ halmazán. Talán ez motiválta a parciális többségi függvény eldönthetőségét vizsgáló [22] cikket, amelyben R. McKenzie bebizonyítja, hogy a parciális többségi függvény létezése eldönthetetlen kételemű részhalmazokra.

A disszertáció második fejezetében ezt az eredményt terjesztem ki olyan részhalmazokra, amely az algebra két elemén kívül minden más elemet tartalmaz.

2.2. Tétel. *Nem létezik olyan algoritmus, amely tetszőleges véges* $\mathbf{A}$ *algebráról és* $r, w \in A$ *elemekről eldöntené, hogy* $\mathbf{A}$ *rendelkezik-e parciális többségi kifejezésfüggvénnyel az* $A \setminus \{r, w\}$ *halmazon.*

Ez a tétel nem tűnik jelentősnek utólag, a többségi függvény létezésének eldönthetőségét ismerve. Mindenesetre a bizonyításban használt technikák önmagukban is érdekesek, és esetleg hasznosak lehetnek más kifejezésfüggvények létezésével foglalkozó problémák eldönthetőségének vizsgálatakor.

A bizonyításban Minsky-gépeket használunk, amelyek lényegében ekvivalensek a Turing-gépekkel (lásd [24, 25]). A Minsky-gép végtelen szalag helyett csak két *regiszterrel* rendelkezik, amelyek tetszőleges nemnegatív egész értéket vehetnek fel. A gép programja *állapotok*, köztük egy *kezdő-* és egy *leállóállapot*, illetve *parancsok* véges halmazaiból áll. Kétféle parancs van: az első az adott állapotban az egyik regiszter aktuális értékét eggyel megnöveli, majd a gépet egy új állapotba lépteti. A másik fajta parancs végrehajtásakor a gép először megnézi, hogy milyen érték van az adott regiszterben; ha az nem nulla, akkor a gép azt eggyel csökkenti, és új állapotba lép; ha nulla, akkor egy másik állapotba lép. A gép *számításán* a gép állapotainak és regiszterei értékeinek a lépések során felvett (akár végtelen) sorozatát értjük.

Mivel a Minsky-gépek megállási problémája eldönthetetlen, ezért minden $\mathcal{M}$ Minsky-géphez elég (egy algoritmus segítségével leírható) olyan speciális r, w elemekkel rendelkező $\mathbf{A}(\mathcal{M})$ algebrát definiálni, amelynek akkor és csak akkor van parciális többségi kifejezésfüggvénye az alaphalmaz $A(\mathcal{M}) \setminus \{r, w\}$ részhalmazán, ha $\mathcal{M}$ megáll.

Az $\mathbf{A}(\mathcal{M})$ algebra konstruckiójában az alaphalmaz, illetve a műveletek halmaza rendre $\mathcal{M}$ állapotainak, illetve parancsainak halmazától függ. A konstrukcióban az a célunk, hogy $\mathcal{M}$ megálló számítását bekódoljuk $\mathbf{A}(\mathcal{M})$ valamely parciális többségi kifejezésfüggvényébe. A bizonyítás legkritikusabb része az, amikor megmutatjuk, hogy $\mathcal{M}$ megálló számítása felfedezhető minden olyan t kifejezésfüggvény alapműveletekből felépített fájában, amely az $A(\mathcal{M}) \setminus \{r, w\}$ halmazon parciális többségi függvény. Az alapműveletek megfelelő definíciójával elérhető, hogy ilyen esetben t lényegében lineáris szerkezetű legyen, amely $\mathcal{M}$ állapotainak egy sorozatát kódolja. Megfelelően definiálva az alapműveleteket, például úgy, hogy a különböző műveletek értékkészlete különböző legyen, könnyen elérhető az is, hogy az állapotok sorozata lényegében helyes legyen azt az esetet kivéve, amikor a következő állapot attól függ, hogy a regiszter tartalma nulla-e vagy nem. Ezt a problémát úgy oldjuk meg, hogy az állapotok mellé meg azt is bekódoljuk, hogy az adott lépésben az egyes regiszterek értéke nulla-e. Természetesen a regiszter pillanatnyi értékét, ami tetszőlegesen nagy természetes szám lehet, nem tudjuk bekódólni, mivel az $\mathbf{A}(\mathcal{M})$ algebrának csak véges sok eleme és művelete lehet. Már csak azt kell ellenőriznünk, hogy a fában kódolt állapotok és a regiszterek nulla értékét jelző kódok a Minsky-gép számításának megfelelően vannak-e elhelyezve. Ezt a fában előforduló változók megfelelő párosításával oldjuk meg, felhasználva azt, hogy ismerjük t értékét a parciális többségi függvény által előírt helyeken.

A $w \in A(\mathcal{M})$ elemnek (lényegében) megvan az úgynevezett *elnyelő tulajdonsága*, azaz minden $f(x_1, \ldots, x_n)$ alapműveletre a

$$w \in \{x_1, \ldots, x_n\} \implies f(x_1, \ldots, x_n) = w$$

tulajdonság teljesül. Az alkalmazott módszer a w elem segíségével jelzi, ha a t kifejezésfüggvény alakja vagy az általa bekódolt állapotsorozat nem felel meg a megálló számításnak. Ha valahol eltérés van, akkor a fában levő valamely alapművelet a megfelelő többségi $(x, \ldots, x, y, x, \ldots, x)$ kiértékelésnél a w elemet adja vissza, ami automatikusan terjed a fában a gyökér felé. Ebből az következne, hogy $t(x, \ldots, x, y, x, \ldots, x) = w$, ami pedig ellentmondás.

Valószínű, hogy a 2.2. tételt ki lehet terjeszteni az alaphalmaz csak egyetlenegy elemét, w-t kizáró részhalmazára, amit a [13] kézirat eredményéhez hasonlóan, legegyszerűbben parciális algebrákra lehet megfogalmazni:

1. Probléma. *Véges parciális algebráról eldönthető-e az, hogy rendelkezik olyan kifejezésfüggvénnyel, amely minden többségi kiértékelésnél értelmezve van, és teljesíti a többségi függvény azonosságait?*

A többségi függvény eldönthetősége

A disszertáció utolsó fejezetében bebizonyítom, hogy a többségi függvény probléma eldönthető. Mivel a bizonyítás során a klónok nyelvezetét használom, magát a tételt is így mondom ki:

3.17. Tétel. *Véges halmazon definiált véges sok műveletről eldönthető, hogy az általuk generált klón tartalmaz-e többségi függvényt.*

A bizonyítás a következő ötletre épül. A műveletek és a rajtuk értelmezett kompozícióoperátor használata helyett a műveletek olyan osztályozását keressük, amelyben

(1) a többségi függvények az osztályozás egyik blokkját alkotják,

(2) a blokkok halmazán be lehet vezetni a kompozíció fogalmát, és

(3) elég kevés blokk van ahhoz, hogy véges lépésben meg lehessen határozni a blokkok kompozícióra zárt halmazait.

Ezek alapján talán nem annyira meglepő a következő definíció, melynek kimondásához szükséges néhány jelölés bevezetése. Legyen ω, illetve ω^+ rendre a véges, illetve megszámlálható számosságok halmaza. Az A halmazon értelmezett műveletek halmazát $\mathcal{O}_A$-val jelöljük, továbbá minden $n \in \omega$ egészre legyen $\mathcal{O}_A^{(n)} = A^{A^n}$, ami az A halmazon értelmezett n-változós műveletek halmaza.

3.1. Definíció. Minden $f \in \mathcal{O}_A^{(n)}$ műveletre és $i \in \omega$ egészre definiáljuk az f művelet i-edik *polimerjének* nevezett $f|_i \in \mathcal{O}_A^{(2)}$ kétváltozós műveletet:

$$f|_i(x,y) = \begin{cases} f(x,\ldots,x,\overset{i.}{\smile}{y},x,\ldots,x) & \text{ha } 0 \leq i < n, \\ f(x,\ldots,x) & \text{ha } i \geq n, \end{cases}$$

ahol y az i-edik pozícióban szerepel az első esetben. Az f művelet polimerjeinek multihalmazát f *karakterisztikus függvényének* nevezzük, ami formálisan a

$$\chi_f(b) = |\{\, i \in \omega : f|_i = b \,\}|$$

formula által definiált $\chi_f \colon \mathcal{O}_A^{(2)} \to \omega^+$ leképezés.

Könnyen belátható, hogy a többségi függvények jellemezhetőek polimerjeik segítségével úgy, hogy minden polimernek x-szel kell egyenlőnek lennie. Következésképp az összes többségi függvénynek ugyanaz a χ_{nu} leképezés a karakterisztikus függvénye, amelyet a

$$\chi_{\mathrm{nu}}(b) = \begin{cases} \omega & \text{ha } b(x,y) \approx x, \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

formula definiál. Legyen $\mathcal{X}_A$ az A halmazon értelmezett műveletek karakterisztikus függvényeinek halmaza. Tehát a karakterisztikusfüggvény-képzés

$$\mathsf{X} \colon \mathcal{O}_A \to \mathcal{X}_A, \qquad \mathsf{X} \colon f \mapsto \chi_f$$

operátorának magja teljesíti az (1)-es célkitűzésünket.

A $\mathsf{C}_{\mathcal{F}}$ kompozícióoperátor technikai definícióját itt nem adjuk meg. Elég most annyit tudnunk róla, hogy megkülönböztetjük a „külső" $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}_A$ műveleteket azoktól a „belső" elemektől, amelyekre az $\mathcal{F}$-beli műveleteket alkalmazzuk. Műveletek minden $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subseteq \mathcal{O}_A$ halmazaira $\mathsf{C}_{\mathcal{F}}(\mathcal{G})$ tartalmazza az összes olyan

$$t(y_1,\ldots,y_k) = f\big(g(x_{11},\ldots,x_{1n}),\ldots,g(x_{m1},\ldots,x_{mn})\big)$$

műveletet, ahol $f \in \mathcal{F}$ és $g \in \mathcal{G}$ rendre m- és n-változós műveletek, továbbá $\{x_{11},\ldots,x_{mn}\} \subseteq \{y_1,\ldots,y_k\}$. A karakterisztikus függvények kompozícióoperátorának jelölésére is ugyanazt a $\mathsf{C}_{\mathcal{F}}$ szimbólumot használjuk: így minden $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{X}_A$ halmazra $\mathsf{C}_{\mathcal{F}}(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{X}_A$. A két kompozícióoperátor közötti kapcsolatot, a (2)-es célkitűzés valódi tartalmát, a következő segédtétel fejezi ki.

3.6. Segédtétel. *$\mathsf{XC}_{\mathcal{F}}(\mathcal{G}) = \mathsf{C}_{\mathcal{F}}\mathsf{X}(\mathcal{G})$ tetszőleges $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subseteq \mathcal{O}_A$ halmazokra.*

Az eddigiek alapján az $\mathcal{F}$ műveletek által generált $\langle \mathcal{F} \rangle$ klón akkor és csak akkor tartalmaz többségi függvényt, ha az egyváltozós projekció χ_{id} karakterisztikus függvényéből kiindulva a $\mathsf{C}_{\mathcal{F}}$ kompozícióoperátor véges sokszori alkalmazásával χ_{nu} megkapható. Sajnos a (3)-as célkitűzés megvalósításától még nagyon messze vagyunk; valójában annak csak egy gyengített változatát bizonyítjuk.

Tegyük fel, hogy mind az A alaphalmaz, mind az $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}_A$ műveletek halmaza véges, továbbá azt, hogy $\langle F \rangle$ tartalmaz többségi függvényt. Lovász Lászlónak a Kneser-gráfok kromatikus számáról szóló tételét (lásd [17]) felhasználva megmutatható, hogy $\langle F \rangle$-nek tartalmaznia kell a többségi függvény azonosságaihoz nagyon hasonló technikai feltételt teljesítő g műveletet is, amelynek változószáma csak A elemszámától függ, így az megkereshető.

A g művelet segítségével egy jólrendezett parciális rendezést definiálunk a karakterisztikus függvények valamely részhalmazán. Megmutatjuk, hogy ha a kompozícióoperátort (karakterisztikus függvényekből álló) filterre alkalmazzuk, akkor ismét filtert kapunk. A kapott filter minimális elemei (melyek száma szükségképpen véges) az eredeti filter minimális elemeiből kiszámíthatók. Ha a kompozícióoperátort ismételten alkalmazzuk, akkor filterek egy, a tartalmazásra nézve bővülő láncát kapjuk. Ismert azonban, hogy jólrendezett parciális rendezés filterei nem alkothatnak végtelen, szigorúan bővülő láncot, tehát ennek az eljárásnak véges lépésben meg kell állnia, és így a karakterisztikus függvények kompozícióoperátor szerinti lezártja kiszámítható.

Ahogy már utaltunk rá, az [5] cikk eredményét felhasználva a bizonyított tétel következményeként azt is megkaptuk, hogy kongruencia-egyesítés-féligdisztributív varietásba tartozó véges algebrákra a természetes dualitás problémája eldönthető.

Mivel legfeljebb r-változós műveletekkel rendelkező algebrából csak véges sok definiálható egy n-elemű halmazon, a többségi függvény eldönthetőségéből az is következik, hogy létezik olyan $N(n,r)$ rekurzív függvény, amely felülről korlátozza a többségi függvénnyel rendelkező ilyen algebrák többségi függvényeinek minimális változószámát. Következésképpen, minden ilyen $\mathbf{A}$ algebrára elég a legfeljebb $N(n,r)$ változójú kifejezésfüggvények között keresni a többségi függvényt. Ha ilyet nem találunk, akkor $\mathbf{A}$-nak nincs többségi kifejezésfüggvénye. Tudjuk, hogy létezik ilyen rekurzív függvény, de egyelőre nincs rá formulánk.

Nagyon érdekes megoldatlan probléma kapcsolódik az úgynevezett kényszerkielégíthetőségi problémához (constraint satisfaction problem). A problémát itt mi nem definiáljuk; az érdeklődő olvasónak T. Feder és M. Y. Vardi [8] cikkét ajánljuk. A [10] cikk eredménye szerint, ha relációk egy Γ halmazának van kompatibilis többségi függvénye, akkor a CSP(Γ) kényszerkielégíthetőségi probléma polinomiális időben megoldható. Ezért (is) érdekes a többségi függvény relációkra vonatkoztatott problémája:

2. Probléma. *Véges halmazon értelmezett relációk véges halmazáról eldönthető-e, hogy létezik a relációkkal kompatibilis többségi függvény?*

Egyelőre nem ismerjük erre a problémára a választ. Tudjuk azt (lásd pl. [30]), hogy ha relációk (akár végtelen) Γ halmazához létezik kompatibilis többségi függvény, akkor mind a Γ által generált relációklón, mind a relációkkal kompatibilis műveletek klónja végesen generált. Utolsó problémánk ehhez a kérdéskörhöz kapcsolódik:

3. Probléma. *Véges, közös alaphalmazon értelmezett műveletek $\mathcal{F}$ és relációk Γ halmazairól eldönthető-e, hogy az $\langle \mathcal{F} \rangle$ klón megegyezik a Γ-val kompatibilis műveletek klónjával?*

Hivatkozások

[1] L. M. Bobek: *Groups Acting on Join Semilattices.* Ph.D. dissertation, Browling Gree State University, 1992.

[2] S. Burris and H. P. Sankappanavar: *A course in universal algebra.* Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1981.

[3] S. Burris and M. Valeriote: *Expanding varieties by monoids of endomorphisms.* Algebra Universalis **17** (1983), 150–169.

[4] B. A. Davey: *Duality theory on ten dollars a day.* Algebras and Orders (Montreal, 1991), NATO Advanced Study Institute Series, Series C, **389**, 71–111.

[5] B. A. Davey, L. Heindorf and R. McKenzie: *Near unanimity: an obstacle to general duality theory* Algebra Universalis, **33** (1995), 428–439.

[6] B. A. Davey and H. Werner: *Dualities and equivalences for varieties of algebras.* Contributions to lattice theory (Szeged, 1980), Colloq. Math. Soc. János Bolyai, **33** (1983), 101–275.

[7] R. El Bashir and T. Kepka: *Commutative semigroups with few invariant congruences.* Semigroup Forum **64** (2002), 453–471.

[8] T. Feder and M. Y. Vardi: *The computational structure of monotone monadic SNP and constraint satisfaction: A study through Datalog and group theory.* SIAM Journal of Computing **28** (1998), no. 1, 57–104.

[9] D. Hobby and R. McKenzie: *The structure of Finite algebras.* Contemporary Mathematics **76**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1988.

[10] P. Jeavons, D. Cohen and M. C. Cooper: *Constraints, consistency and closure.* Artificial Intelligence **101** (1998), 251–265.

[11] J. Ježek: *Simple semilattices with two commuting automorphisms.* Algebra Universalis **15** (1982), 162–175.

[12] J. Ježek: *Subdirectly irreducible semilattices with an automorphism.* Semigroup-Forum **43** (1991), 178–186.

[13] J. Ježek and M. Maróti: *Membership problems for finite entropic groupoids.* (manuscript).

[14] K. A. Kearnes: *Semilattice modes I. The associated semiring, II. The amalgamation property.* Algebra Universalis **34** (1995), 200–303.

[15] K. A. Kearnes and Á. Szendrei: *Self-rectangulating varieties of type* **5**. Int. Journal on Algebra and Computation **7** (1997), 511–540.

[16] O. G. Kharlampovich and M. V. Sapir: *Algorithmic problems in varieties.* Int. Journal of Algebra and Computation **5** (1995), 379–602.

[17] L. Lovász: *Kneser's Conjecture, Chromatic Numbers and Homotopy.* J. Combin. Theory, Series A, **25** (1978), 319–324.

[18] M. Maróti: *Semilattices with a group of automorphisms.* Algebra Universalis, **38** (1997), no. 3, 238–265.

[19] M. Maróti: *On the (un)decidability of a near-unanimity term.* (submitted)

[20] M. Maróti: *The existence of a near-unanimity term in a finite algebra is decidable.* (manuscript)

[21] M. Maróti: *The variety generated by tournaments.* Vanderbilt University, Ph.D. dissertation, 2002.

[22] R. McKenzie: *Is the presence of a nu-term a decidable property of a finite algebra?* October 15, 1997 (manuscript).

[23] R. McKenzie, G. McNulty and W. Taylor: *Algebras, Lattices, Varieties, Volume I.* Wadsworth & Brooks/Cole, Monterey, CA, 1987.

[24] M. L. Minsky: *Recursive unsolvability of Post's problem of "tag" and other topics in the theory of Turing Machines.* Ann. Math. **74** (1961), 437–455.

[25] M. L. Minsky: *Computations: finite and infinite machines.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1967.

[26] E. L. Post: *The two-valued iterative systems of mathematical logic.* Number 5 in Annals of Math. Studies. Princeton Univ. Press, 1941.

[27] M. O. Rabin and D. Scott: *Finite automata and their decision problems.* IBM Journal of Res. and Devel. **3** (1969), no. 2, 114–125.

[28] A. Romanowska: *An introduction to the theory of modes and modals.* Proceedings of the International Conference on Algebra (Novosibirsk, 1989), Contemporary Mathematics **131** (1992), Part 3, 241–262.

[29] A. Romanowska and J. D. H. Smith: *Modal theory: an algebraic approach to order, geometry, and convexity.* Research and Exposition in Mathematics vol. **9**, Heldermann Verlag, Berlin, 1985.

[30] Á. Szendrei: *Clones in universal algebra.* Volume 99 of Séminaire de mathématiques supérieures. Les presses de l'Universit'e de Montréal, Montréal, 1986.