

# Geometriák karakterizálása projektív-metrikus terekben

PhD-értekezés

**Kozma József**

Szegedi Tudományegyetem, Bolyai Intézet

Témavezető:

dr. habil Kurusa Árpád egyetemi docens



Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola  
Szegedi Tudományegyetem, Bolyai Intézet

Szeged  
2017

# Tartalomjegyzék

<b>1 Bevezető</b>	<b>1</b>
<b>2 Előismeretek</b>	<b>3</b>
2.1 Osztóviszony és kettősvizonyy . . . . .	3
2.2 Ellipszoidmetszetek és a John–Löwner-ellipszoid . . . . .	5
2.3 A Minkowski-geometriákról . . . . .	7
2.4 A hiperbolikus geometriáról modellekkel . . . . .	9
2.5 A Hilbert-geometriákról . . . . .	15
<b>3 Előkészületek</b>	<b>22</b>
3.1 Néhány technikai lemma . . . . .	22
3.2 Ellipszisek egy Segre-típusú jellemzése . . . . .	25
3.3 Ceva típusú tétel oválisba írt háromszögekre . . . . .	29
<b>4 A hiperbolikus geometria karakterizációi a Hilbert-geometriák között</b>	<b>33</b>
4.1 Karakterizáció Ceva- és Menelaosz-tulajdonsággal . . . . .	33
4.2 Karakterizáció biszektorális centrummal . . . . .	36
4.3 Karakterizáció ortocentrummal . . . . .	39
<b>5 Az euklideszi geometria karakterizációi a Minkowski-geometriák között</b>	<b>42</b>
5.1 Karakterizáció jobb-biszektorális és jobb-ortocentrummal . . . . .	42
5.2 Karakterizáció bal-biszektorális és bal-ortocentrummal . . . . .	48
<b>Jelölések</b>	<b>53</b>
<b>Hivatkozások</b>	<b>54</b>
<b>Köszönetnyilvánítás</b>	<b>57</b>
<b>Összefoglaló</b>	<b>58</b>
<b>Summary</b>	<b>61</b>

## 1. Bevezető

A 20. század első matematikai konferenciáján David Hilbert a század matematikáját szerinte meghatározó problémák sorát vetette fel. Negyedik helyen említette a klasszikus nemeuklideszi geometriák [30] közös általánosításaként felmerülő azon geometriák meghatározását, amelyekben az egyenes rendelkezik a „*legrövidebb út*” tulajdonságával.

Tanítványai, P. Funk [14] és G. Hamel [19] munkájával kezdve, majd sok más matematikus, mint W. Blaschke [4], A. V. Pogoderov [37] és Szabó Zoltán [41] munkájának köszönhetően mára az összes ilyen „*projektív-metrikus*” geometriát elő tudjuk állítani. Ezekből olyan sok van, hogy nem vizsgálhatók egyenként, de Busemann rámutatott [7], hogy a közülük kiválasztható két legfontosabb típus, mert pontosan a Minkowski- és a Hilbert-féle az, amelyben az egyenesek közti izometriák projektivitások (Minkowski-esetben konkrétan affinitások).

A Minkowski-geometriákat alaposan ismerhetjük, hiszen a matematikusok jelentős része ezeket normált vektortérként ismeri, és igen bőséges irodalom veszi számba jellemzőiket és tulajdonságaikat [1], [40]. A Hilbert-geometriák kevésbé ismertek<sup>1</sup>, de kutatásuk napjainkban egyre újabb és változatosabb eredményekkel zárkózik fel [36].

Ahogy az euklideszié a Minkowski-, a hiperbolikus geometria közvetlen általánosítása a Hilbert-geometria, így utóbbiak megismerésében elsőrendű feladat az euklideszi, illetve hiperbolikus geometriában megszokott konfigurációk tulajdonságainak vizsgálata. Kérdések két vonatkozásban merülnek fel.

(1) Vajon az egyes konfigurációk mely tulajdonságai maradnak meg az általános esetben, és melyek azok, amelyek tovább már nem jellemzik a konfigurációt?

(2) Milyen következménnyel jár a geometria egészére, ha egy konfiguráció valamely tulajdonsága megmarad? Van-e olyan konfiguráció és annak valamilyen tulajdonsága, amelyek együttesen kizárják az általánosítás lehetőségét (vagyis a geometria euklideszi, illetve hiperbolikus)?

Mindkét kérdés esetén felmerül, hogy amennyiben egy tulajdonságot nem általánosságban, hanem csak egy-két esetben írunk elő, akkor is következik-e ugyanaz az eredmény?

Ebben a disszertációban olyan vizsgálatokat mutatunk be, amelyek kivétel nélkül a klasszikus euklideszi, illetve hiperbolikus geometriák Minkowski-, illetve Hilbert-geometriák közti karakterizációjához vezetnek.

Az értekezésben háromszögek Ceva- és Menelaosz-tulajdonságának Hilbert-geometriában való érvényesülését és oldalfelező merőlegesek, illetve magasságvonalak

<sup>1</sup>Elsősorban ezért mutatjuk be a Hilbert-geometriákat kicsit részletesebben.

konkurenciáját vizsgálva jutunk el karakterizációs tételekhez mind Hilbert-, mind Minkowski-geometriák esetén ([Km], [KKh], [KKc]).

Vizsgáltuk azt is, hogy egy projektív metrika klasszikus-e, ha benne egy hiperbola kvadratikus görbe, de a válaszok bemutatása túlmutat jelen értekezés témáján, ezért csak megjegyezzük, hogy a Minkowski- és a Hilbert-geometria esetében is sikerült igazolni [KKq], hogy egy hiperbola akkor és csak akkor kvadratikus, ha a geometria euklideszi, illetve Bolyai-féle hiperbolikus.

A disszertációban a saját eredményeket tartalmazó tanulmányokra betűjelekkel, a további referenciákra számozással hivatkozunk.

## 2. Előismeretek

A nem elfajuló háromszögeket a rövidség kedvéért *trigonnak* nevezzük. Ha rögzítünk egy origót, akkor az  $A, B, \dots$  pontokat azonosíthatjuk a helyvektorukkal, és a vektoriális írásmód szerint is jelöljük:  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots$

A sík origó középpontú, egységsugarú körének paraméteres felírására használni fogjuk a rövid  $\mathbf{u}_\tau = (\cos \tau, \sin \tau)$  és  $\mathbf{u}_\tau^\perp = (-\sin \tau, \cos \tau)$  jelöléseket.

A  $\mathbf{c}(t), \mathbf{h}(\alpha), \dots$  vektor-skálár függvények deriváltjaira adott pontban használjuk a  $\dot{\mathbf{c}}(t_0)$  jelölést, illetve egyenértékűen a  $\frac{d\mathbf{c}}{dt}(t_0)$  jelölést is.

A közös pontra illeszkedő affin egyenesek halmazát *egyenesnyalábnak*, a közös pontot pedig ezen *egyenesnyaláb centrumának* nevezzük. Ha az egyenesnyaláb centruma végtelen távoli pont, akkor *párhuzamos egyenesnyalábról* beszélünk. Szakaszok egy halmazáról azt mondjuk, hogy egy *egyenesnyalábra illeszkednek*, ha egyenesaik nyalábot alkotnak.

Affin térben a korlátos másodrendű felületeket *ellipszoidnak* (két dimenzióban *ellipszisnek*) nevezzük. Euklideszi geometriában ez éppen egy gömbfelület (két dimenzióban körvonal) affin képe [31]. A továbbiakban, gyakran a fogalmak némi zavarát kockáztatva, de a kontextusból világos módon szintén ellipszoidnak (két dimenzióban ellipszisnek) hívjuk azt a korlátos, nyílt, konvex tartományt<sup>2</sup>, melynek határa ellipszoid (két dimenzióban ellipszis).

Egy szigorúan konvex síkbeli tartomány határát *oválisnak* nevezzük. Egy oválist egyértelműen meghatároz a *támaszfüggvénye*, amely minden irányhoz hozzárendeli a rá merőleges támaszhiperfelsíkok (két dimenzióban támaszegyenesek) origótól mért előjeles távolsága közül a nagyobbát. Az ovális támaszfüggvénye megszámlálhatóan sok iránytól eltekintve differenciálható [38, Note 2, 31. o.]. Erre tekintettel a kétszeres differenciálhatóságot a másodrendű Taylor-sorfejtés létezésével szokás definiálni, amiért a kétszeres differenciálhatóság is majdnem mindenütt fennáll, vagyis ennek feltételezése az általánosságot alig szorítja meg. A továbbiakban az oválisokról mindig feltesszük a kétszeres differenciálhatóságot.

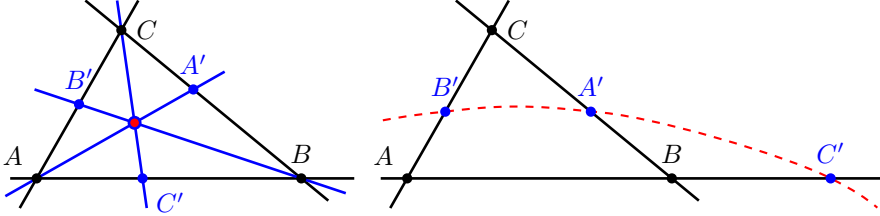
### 2.1. Osztóviszony és kettősvizony

**2.1. Definíció.** Az  $A, B$  és  $C \neq B$  kollineáris pontok  $(A, B; C)$  *affin osztóviszonya* az a valós szám, amelyre  $(A, B; C)\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ . ▲

Világos, hogy az osztóviszony folytonosan függ a benne szereplő pontoktól, kivéve a  $B = C$  esetet. Az osztóviszony egyik legfontosabb megjelenése az affin geometriában a Ceva- és a Menelaosz-tétel (lásd [31, 39. o.]).

<sup>2</sup>A magyar nyelvű irodalomban ezt gyakran az ellipszoid (illetve ellipszis) belsejének nevezik.

**2.2. Definíció.** Egy  $ABC\triangle$  trigon  $(C', A', B')$ -tripletjén három olyan, a csúcsoktól különböző  $C'$ ,  $A'$  és  $B'$  pontot értünk, amelyek rendre az  $AB$ ,  $BC$  és  $CA$  egyeneseken vannak.



**2.1. Ábra.** Ceva-ponthármas és Menelaosz-ponthármas

Az  $ABC$  trigon egy  $(C', A', B')$ -tripletjét

- (p1) *Menelaosz-tripletnek* (vagy *Menelaosz típusú tripletnek*) nevezzük, ha a  $C'$ ,  $A'$  és  $B'$  pontok kollineárisak, illetve
- (p2) *Ceva-tripletnek* (vagy *Ceva típusú tripletnek*) nevezzük, ha az  $AA'$ ,  $BB'$  és  $CC'$  egyenesek konkurensak.

Valós számok egy  $(\alpha, \beta, \gamma)$  hármasát

- (n1) *Menelaosz típusúnak* nevezzük, ha  $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = -1$ , illetve
- (n2) *Ceva típusúnak* nevezzük, ha  $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = +1$ . ▲

A vonatkozó klasszikus affin geometriai tételek a következők.

**2.3. Tétel.** (Ceva-tétel [31, 113. o.]) *Az affin térben az  $ABC$  trigon egy  $(C', A', B')$ -tripletje akkor és csak akkor Ceva típusú, ha az  $((A, B; C'), (B, C; A'), (C, A; B'))$  számhármas Ceva típusú.*

**2.4. Tétel.** (Menelaosz-tétel [31, 114. o.]) *Affin térben az  $ABC\triangle$  trigon egy  $(C', A', B')$ -tripletje akkor és csak akkor Menelaosz típusú, ha Menelaosz típusú az  $((A, B; A'), (B, C; A'), (C, A; B'))$  számhármas.*

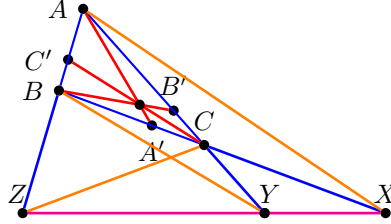
Projektív terekben a kettősviszonyt a homogén koordináták használatával definiálják, de ha a négy pont közös affin térbe esik, akkor az osztóviszonyokkal is megadható.

**2.5. Definíció.** A kollineáris  $A, B$  és  $C \neq B, D \neq B$  pontok *affin kettősviszonya* az  $(A, B; C, D) = (A, B; C)/(A, B; D)$  valós szám. ▲

Mivel az osztóviszony kivételktől eltekintve folytonosan függ a benne szereplő pontoktól, ez a kettősviszonyra is érvényes.

A kettősviszony alkalmazása lehetővé teszi a klasszikus Ceva- és Menelaosz-tétel egyesített projektív tárgyalását (lásd [KKp, 2.2. tétel]). Ehhez a 2.1. Ábra bal

oldalán szereplő eredeti Ceva-konfigurációt kiegészítjük egyenesekkel és pontokkal a bővítéssel származtatott projektív síkon (lásd a 2.2. Ábrát).



2.2. Ábra. Projektív Ceva-konfiguráció

**2.6. Tétel.** ([KKp, 2.2 Tétel]) Legyen  $f_A$ ,  $f_B$  és  $f_C$  az  $ABC\triangle$  trigon csúcsain átmenő egy-egy egyenes, és legyen  $X$ ,  $Y$  és  $Z$  rendre az  $ABC\triangle$  oldalegyenesein egy-egy pont. Az  $A'$ ,  $B'$  és  $C'$  pont legyen rendre az  $f_A$ ,  $f_B$  és  $f_C$  egyenes metszete a szemközti oldal egyenesével.

(1) Ha  $f_A$ ,  $f_B$  és  $f_C$  konkurenssek, és az  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  pontok kollineárisak, akkor

$$(A, B; C', Z)(B, C; A', X)(C, A; B', Y) = -1. \quad (2.1)$$

(2) Ha (2.1) teljesül, akkor az  $X, Y, Z$  pontok pontosan akkor kollineárisak, ha az  $f_A, f_B$  és  $f_C$  egyenesek konkurenssek.

## 2.2. Ellipszoidmetszetek és a John–Löwner-ellipszoid

Egy ellipszoid felismerhető a síkmetszetei által.

**2.7. Lemma.** ([16, Lemma 12.1]) Az  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ) egy korlátos, nyílt konvex  $\mathcal{H}$  halmaza akkor és csak akkor egy  $C$  centrumú ellipszoid, ha a  $C$ -n átmenő bármely kétdimenziós síkkal való metszete egy ellipszis.

Szokásos kompaktsági megfontolásokkal belátható, hogy az  $\mathbb{R}^n$  térben minden  $\mathcal{K}$  konvex test (konvex halmaz belső pontokkal) esetén van egy maximális térfogatú beírt ún. *John-ellipszoid* [24], és egy minimális térfogatú körülírt ún. *Löwner-ellipszoid* (lásd pl. [17]).

**2.8. Lemma.** ([21, Theorem 2.1]) Legyen  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  egy konvex test, és legyen  $\mathcal{E} \supseteq \mathcal{K}$  egy őt tartalmazó ellipszoid. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:

(1)  $\mathcal{E}$  minimális térfogatú.

(2) Vannak  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m \in \partial\mathcal{K} \cap \partial\mathcal{E}$  érintési pontok, és léteznek  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  ( $m \geq n$ ) pozitív számok úgy, hogy  $\sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{e}_i = 0$ , és  $I_n = \sum_{i=1}^m \lambda_i (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^T)$ , ahol  $I_n$  az  $(n \times n)$ -es négyzetes mátrix.

A számunkra érdekes kétdimenziós esetben a következők fogalmazhatók meg.

**2.9. Lemma.** ([KKc] Lemma 2.2) *A síkban minden olyan nem üres, nyílt, konvex  $\mathcal{H}$  halmazhoz, amely nem ellipszis, létezik egy olyan,  $\mathcal{H}$ -t tartalmazó  $\mathcal{E}$  ellipszis, amelyre az  $\partial\mathcal{E} \setminus \mathcal{H}$  halmaznak legalább 6 különböző pontja van, és  $\mathcal{E} \setminus \mathcal{H}$  nem üres.*

A John–Löwner-ellipszoidokra vonatkozó alábbi lemma egyes állításaira szükségünk lesz későbbi bizonyításainkban.

**2.10. Lemma.** ([KKh, Lemma 3.3]) *Legyen  $\mathcal{H}$  egy konvex tartomány a síkban. Ekkor*

- (1) *létezik a  $\mathcal{H}$ -nak egy  $\mathcal{E}$  köréírt ellipszise legalább három különböző  $E_1, E_2, E_3$  érintési ponttal a  $\partial\mathcal{H} \cap \partial\mathcal{E}$  halmazban úgy, hogy a zárt  $E_1E_2E_3\Delta$  tartalmazza a  $\mathcal{E}$  ellipszis  $C$  centrumát, és*
- (2) *ha  $\mathcal{H} \neq \mathcal{E}$ , akkor ezek az érintési pontok választhatók úgy, hogy közülük az egyiknek minden környezetében teljesül a  $\partial\mathcal{H} \setminus \partial\mathcal{E} \neq \emptyset$  feltétel.*

*Legyenek  $t_1, t_2$  és  $t_3$  a két alakzat közös érintői az  $E_1, E_2$ , illetve  $E_3$  pontban. Ekkor*

- (3) *ha  $E_1E_2E_3\Delta$  a belsejében tartalmazza a  $C$  pontot, akkor  $t_1, t_2, t_3$  egy trigont alkot az  $M_1 = t_2 \cap t_3$ ,  $M_2 = t_3 \cap t_1$  és  $M_3 = t_1 \cap t_2$  csúcsokkal úgy, hogy e trigon az  $E_1, E_2, E_3$  érintési pontok kivételével a belsejében tartalmazza az  $\mathcal{E}$  ellipszist;*
- (4) *ha az  $E_1E_2E_3\Delta$  háromszög valamelyik oldala tartalmazza  $C$ -t, mondjuk,  $C \in \overline{E_2E_3}$ , akkor a három érintő a síknak egy párhuzamosok közötti olyan félsívját határozza meg, amelynek (esetleg ideális) csúcsai  $M_2 = t_1 \cap t_3$ ,  $M_3 = t_2 \cap t_1$ , és ez a belsejében tartalmazza a  $\mathcal{E}$  ellipszist, kivéve az  $E_1, E_2, E_3$  érintési pontokat.*

*Ha  $B_1, B_2, B_3$  rendre az  $\overline{E_2E_3}$ ,  $\overline{E_3E_1}$  és  $\overline{E_1E_2}$  szakaszok felezőpontja, akkor*

- (5) *az  $M_iB_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) egyenesek a  $C$  pontban találkoznak.*

**Bizonyítás.** Tekintsük a minimális területű  $\mathcal{E}$  ellipszist, mely tartalmazza  $\mathcal{H}$ -t, és legyen ennek középpontjában az  $O$  origó. (1) A 2.8. Lemma (2) állítása szerint van egy  $(5 \geq) m \geq 3$  egész szám úgy, hogy léteznek  $E_1, \dots, E_m$  érintési pontok a  $\partial\mathcal{H} \cap \partial\mathcal{E}$  halmazban azzal a feltétellel, hogy valamely pozitív lineáris kombinációjuk eltűnik.

Ez azt jelenti, hogy az origó ezeknek az érintési pontoknak a konvex burkában van. Emiatt valamelyik hármójuk által alkotott (zárt) trigon — mondjuk, az  $E_1E_2E_3\Delta$  — szintén tartalmazza az origót.

(2) Transzformáljuk az (1)-ben adott konfigurációt egy  $\Phi$  lineáris affinitással oly módon, hogy a  $\mathcal{D} = \Phi(\mathcal{E})$  képhalmaz az origó centrumú egységsugarú körlemez legyen. Legyen  $E'_i = \Phi(E_i)$  ( $i = 1, 2, 3$ ), és  $\mathcal{H}' = \Phi(\mathcal{H})$ .

Az (1) szerint az  $O$  középpont az  $E'_1E'_2E'_3\Delta$  trigonban van.



Legyenek  $\varepsilon_i \in (-\pi, \pi]$  olyan számok, hogy  $E'_i = \mathbf{u}_{\varepsilon_i}$ , és a  $\mathcal{H}'$  támaszfüggvényét jelölje  $h_{\mathcal{H}'}$ . Vegyük ezután az  $\alpha_i := \limsup\{\alpha : h_{\mathcal{H}'}([\varepsilon_i, \alpha]) = \{1\}\}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) számokat. Ha  $\alpha_i$  végtelen, akkor  $\mathcal{H} \equiv \mathcal{E}$ , de ennek az ellenkezőjét tettük fel. Tegyük fel, hogy  $\alpha_k = \min_{i \in \{1, 2, 3\}} \alpha_i$ ,  $k \in \{1, 2, 3\}$ .

Az  $F_i = \Phi^{-1}(\mathbf{u}_{\varepsilon_i + \alpha_k})$  ( $i = 1, 2, 3$ ) pontok a  $\partial\mathcal{H}$  és  $\partial\mathcal{E}$  halmazok érintkezési pontjai, továbbá az  $F_1 F_2 F_3 \triangle$  trigon tartalmazza az  $O$  középpontot, és az  $F_1$  minden  $\mathcal{N}$  környezetében igaz, hogy  $(\partial\mathcal{H} \setminus \partial\mathcal{E}) \cap \mathcal{N} \neq \emptyset$ .

A (3) és (4) állítás egyszerű következménye az  $\mathcal{E}$  ellipszis szigorú konvexitásának. Az (5) állítást azonnal megkapjuk, ha az ellipszist egy lineáris affinitással egy körre transzformáljuk. ■

E lemmákat kiegészíti a következő, melynek igazolásához elegendő figyelembe venni, hogy egy ellipszoid szimmetriacentruma egyértelműen meghatározott, és egy centrálisan szimmetrikus test középpontjára való tükrözés az egyértelműen meghatározott John–Löwner-ellipszoidját is invariánsan hagyja.

**2.11. Lemma.** *Egy centrálisan szimmetrikus, korlátos, konvex test és a köré írt John–Löwner-ellipszoid középpontja megegyezik.*

### 2.3. A Minkowski-geometriákról

Legyen  $\mathcal{I}$ , az *indikátrix*, egy nyílt, szigorúan konvex, az origóra középpontosan szimmetrikus, korlátos tartomány az  $\mathbb{R}^n$  térben. Jól ismert ([30], [31]), hogy a  $d_{\mathcal{I}}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  függvény, melyet

$$d_{\mathcal{I}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \inf\{\lambda > 0 : (\mathbf{y} - \mathbf{x})/\lambda \in \mathcal{I}\}$$

definiál, egy metrika az  $\mathbb{R}^n$  téren. Ezt *Minkowski-metrikának* nevezzük. Az affin teret ezzel a metrikával *Minkowski-geometriának* nevezzük<sup>3</sup>, amit  $(\mathbb{R}^n, d_{\mathcal{I}})$  jelöl.

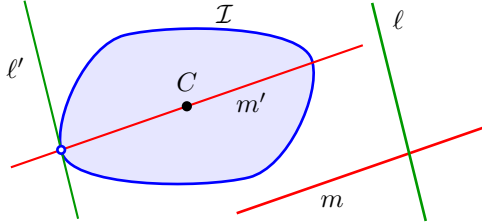
A kollineáris  $A$ ,  $B$  és  $C \neq B$  pontok (ilyen sorrendben vett)  $d_{\mathcal{I}}$ -metrikus osztóviszonyán az

$$(A, B; C)_{d_{\mathcal{I}}} = \begin{cases} -\frac{d_{\mathcal{I}}(A, C)}{d_{\mathcal{I}}(C, B)}, & \text{ha } C \in \overline{AB}, \\ \frac{d_{\mathcal{I}}(A, C)}{d_{\mathcal{I}}(C, B)}, & \text{egyébként,} \end{cases}$$

valós számot értjük. Világos, hogy ez megegyezik az affin osztóviszonnyal, így Ceva és Menelaosz tételei a metrikus osztóviszonnyal is teljesülnek.

<sup>3</sup>„Azoknak a normáknak a tanulmányozása, amelyek különböznek az euklideszitől, elsődlegesen Minkowskitól ered.”[12] Innentől terjedt el az irodalomban a Minkowski-geometria elnevezés. Minkowski e tárgykörhöz sorolhatóan 1897–1911 között hat jelentős tanulmányt publikált. Maga a téma két szálon indult. Brunn konvexitáselméleti és az absztrakt lineáris terek olaszországi iskolájának munkásságát Minkowski fűzte össze.

**2.12. Definíció.** ([40, Definition 3.2.2]) A  $C$  szimmetriacentrumú  $\mathcal{I}$  indikátrixszal meghatározott Minkowski-geometriában az  $\ell$  egyenes *bal-merőleges* az  $m$  egyenesre, ha az  $m$ -el párhuzamos,  $C$ -n átmenő  $m'$  egyenesnek az  $\mathcal{I}$ -vel vett metszéspontján átmenő,  $\ell$ -el párhuzamos  $\ell'$  egyenes érinti  $\mathcal{I}$ -t. Jelölése:  $\ell \perp_b m$ . ▲



**2.3. Ábra.** Merőlegesség Minkowski-geometriában

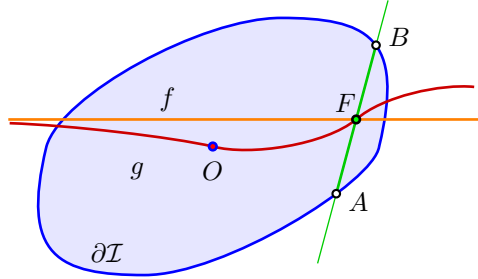
Ez a merőlegesség nem szimmetrikus reláció, ezért láttuk el a „bal” előtaggal. Ennek inverze a  $\perp_j$  *jobb-merőlegesség*, vagyis  $\ell \perp_b m \Leftrightarrow m \perp_j \ell$ .

A definíció következménye, hogy az ugyanazon egyenesre bal-, illetve jobb-merőleges egyenesek egymással párhuzamosak (lásd a 2.3. Ábrát). Az is igaz továbbá, hogy a szigorú konvexitás következtében két egyenes pontosan akkor párhuzamos, ha a rájuk bal-, illetve jobb-merőleges egyenesek egymással párhuzamosak. Következésképpen metsző egyenesekre bal(jobb)-merőleges egyenesek is metszők.

A bal- és a jobb-merőlegesség 2-nél magasabb dimenzióban akkor és csak akkor esik egybe, ha  $\mathcal{I}$  egy ellipszoid. A síkban ez az egybeesés pontosan akkor teljesül, ha  $\partial\mathcal{I}$  egy Radon-görbe (lásd [10]).

Az euklideszi geometriában minden háromszög oldalfelező merőlegesei a háromszög köré írt kör középpontjára illeszkednek, a magasságvonalai pedig a háromszög magasságpontjára. Minkowski-geometriában az általában meglévő kétféle merőlegesség a háromszögek magasságpontjára is kétféle állítást ad: a jobb-merőleges magasságvonalak (*jobb-magasságok*), illetve a bal-merőleges magasságvonalak (*bal-magasságok*) egyeneseinek egy pontra illeszkedésére is vannak tételek (5.2. Tétel és 5.4. Tétel). Ha a jobb-merőleges magasságvonalak egy ponton mennek át, e pontot *jobb-ortocentrumnak* nevezzük, ha a bal-merőleges magasságvonalakra igaz ez, akkor *bal-ortocentrumnak* nevezzük.

Hasonlóképpen külön tételeket igazolhatunk háromszögekre a bal-merőlegességnek eleget tévő oldalfelező merőleges egyenesek metszéspontjának (*bal-biszektorális középpont*), illetve a jobb-merőlegességnek eleget tévő oldalfelező merőleges egyenesek metszéspontjának (*jobb-biszektorális középpont*) létezéséről (5.3. Tétel és 5.1. Tétel).



**2.4. Ábra.** Kétpontekvidisztáns  $g$  görbe és  $f$  szakaszfelező merőleges

Síkban két ponttól megegyező távolságra lévő pontok halmazát *kétpontekvidisztáns görbének* nevezzük. Egy szakasz felező merőleges egyenese általában nem egyezik meg a végpontjai által meghatározott kétpontekvidisztáns görbével. Erre mutat példát a 2.4. Ábra. Az induktrix  $\partial\mathcal{I}$  határán lévő  $A$  és  $B$  pontok szakaszának felezőpontja  $F$ , felező merőleges egyenese  $f$ , míg kétpontekvidisztáns görbéje  $g$ . Ez nyilván átmegy az  $F$  felezőponton és az induktrix  $O$  középpontján, középpontosan szimmetrikus  $F$ -re, továbbá aszimptotája az  $f$  egyenes.

Az euklideszi geometria Minkowski-geometriák közti karakterizációjára az [1] könyvben mintegy 300 kritériumot találhatunk. Ezek egy része a különféle merőlegességfogalmakhoz kapcsolódik, mint például az [11], hogy egy Minkowski-sík akkor és csak akkor euklideszi, ha az *egységkör bármely  $\mathbf{x}$  és  $\mathbf{y}$  vektorára  $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \perp_b (\mathbf{x} - \mathbf{y})$* .

## 2.4. A hiperbolikus geometriáról modellekkel

Mivel eredményeink igazolását vissza tudjuk vezetni síkbeli megfontolásokra, most elegendő a kétdimenziós modellekkel foglalkoznunk.

A  $\mathbb{H}^2$  hiperbolikus sík alábbi modelljei az  $(\mathbb{R}^2$ -vel megfelelően azonosított) euklideszi sík egy-egy tartományáról való paraméterezésnek tekinthetők. Ebben az értelemben a szögtartó paraméterezés adja a Poincaré-féle körmodellt, a geodetikusokat tartó paraméterezés pedig a Cayley–Klein-modellt<sup>4</sup>.

Ez utóbbit  $\mathbb{K}_c^2$  jelöli, és úgy kapjuk [30], hogy pontjai a  $\mathcal{B}^2$  belső pontjai, egyenesei a  $\mathcal{B}^1$  körlap nyílt húrjai, az  $X, Y \in \mathbb{K}_c^2$  pontok közötti távolságot pedig  $d(X, Y) = \varrho |\ln \sqrt{(A, B; X, Y)}|$  definiálja, ahol  $A$  és  $B$  a  $\mathcal{B}^1$  körlap  $X$  és  $Y$  pontra illeszkedő húrjának az  $\mathcal{S}^1$  körvonalra eső pontjai.

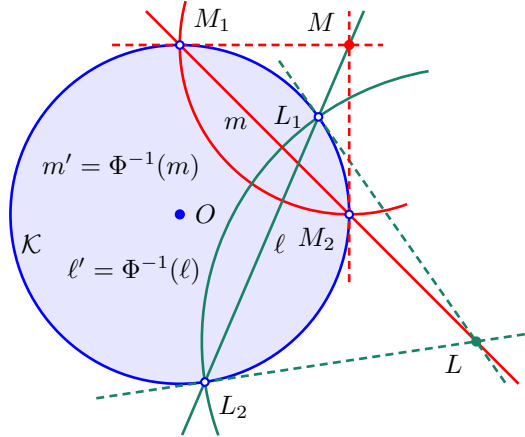
A  $\mathbb{K}_c^p$  Poincaré-féle körmodellben egyeneseknek nevezzük az átmérőket és az  $\mathcal{S}^1$  kört merőlegesen metsző körök  $\mathcal{B}^1$ -be eső íveit, az  $X, Y \in \mathbb{K}_c^p$  pontok közötti távolságot pedig  $d(X, Y) = \varrho |\ln(A, B; X, Y)|$  adja, ahol  $A$  és  $B$  az  $X$  és  $Y$  pontra illeszkedő, az  $\mathcal{S}^1$  kört merőlegesen metsző kör két metszéspontja az  $\mathcal{S}^1$  körrel.

<sup>4</sup>Vagy annak affin transzformáltjai, melyeket *affin CK-modellnek* nevezünk.

A  $\Phi: \mathcal{B}^1 \rightarrow \mathcal{B}^1$  transzformáció, melyre  $\Phi(\varphi, r) = (\varphi, \frac{2r}{1+r^2})$ , bijektíven képezi a  $\mathcal{B}^1$  egységkörlapot önmagára, megtartja az origón áthaladó egyeneseket, az egységkört merőlegesen metsző minden körívet a körív metszéspontjait összekötő húrba visz, és a kettősviszonyt a négyzetébe viszi, ezért a két modell között a  $\Phi: \mathbb{K}_\varrho^p \rightarrow \mathbb{K}_\varrho^c$  leképezéssel leírt kapcsolat izometria [30, 118. oldal].

Egy hiperbolikus  $t$  egyenesre tükrözés a Poincaré-modellben annak az inverzió-nak a  $\mathcal{B}^1$ -re vett megszorítása, melynek alapköre az  $\mathcal{S}^1$  kört a  $t$  körív végpontjaiban merőlegesen metsző  $\mathcal{T}$  kör. Eszerint adott különböző  $P$  és  $P'$  pontok esetén a  $P$ -t a  $P'$ -be vivő tükrözés tengelye egy olyan körnek a  $\mathcal{B}^1$ -be eső íve, amely átmegy a két ponton, és merőlegesen metszi  $\mathcal{S}^1$ -et. Pontosan egy ilyen kör van, ezért pontosan egy olyan tengelyes tükrözés van, amely a két pontot felcseréli.

Az egységkör középpontján átmenő egyenesre hiperbolikus értelemben merőleges egyenesek a Cayley–Klein-modellben euklideszi értelemben is merőlegesek, ugyanis  $\Phi$  egy  $O$ -n átmenő  $\ell$  egyenesre merőleges Poincaré-modellbeli egyenest (amely ott egy  $\ell$ -re és  $\mathcal{S}^1$ -re is merőleges kör íve) az invariáns  $\ell$ -re euklideszi értelemben merőleges egyenesbe viszi.



**2.5. Ábra.** Merőlegesség a Cayley–Klein- és a Poincaré-modellben

Mi jellemzi a Cayley–Klein-modellben a merőleges  $\ell$  és  $m$  egyeneseket? Az előzők szerint az  $\ell$  végpontjain átmenő,  $\mathcal{S}^1$ -re merőleges  $\Phi^{-1}(\ell)$  körív és az  $m$  végpontjain átmenő,  $\mathcal{S}^1$ -re merőleges  $\Phi^{-1}(m)$  körív a Poincaré-modell két merőleges egyenese. Ezért a  $\Phi^{-1}(\ell)$  körének középpontjából a másik két körhöz húzható érintőszakaszok hossza (a középpont és a metszéspontok távolsága) megegyezik, tehát e középpont rajta van a másik két kör hatványvonalán. Ez az egyenes pedig megegyezik a másik két kör metszéspontjain áthaladó  $m$  egyenessel. Tehát a merőleges

egyenesek végpontjaiban az  $S^1$ -hez húzott érintők a másik egyenes euklideszi síkbeli kiterjesztésén metszik egymást.

A két modell közti kapcsolatból következik, hogy bármelyik modellt tekintjük is, tükrözésekkel a modell bármely pontja „bevihető” a kör középpontjába, vagyis az euklideszi értelemben kiemelt középpont a hiperbolikus geometria szempontjából nem különbözik a többitől. Ez lehetővé teszi, hogy konfigurációkkal kapcsolatos tételek igazolása, illetve bizonyos számítások könnyebb elvégezhetősége érdekében a modellt eleve úgy válasszuk, hogy valamely célszerűen választott pont a középpontban legyen. Ezt fogjuk követni pl. a hiperbolikus Ceva-tétel (2.15. Tétel) és a hiperbolikus Menelaosz-tétel (2.14. Tétel), továbbá a háromszögek magasságvonalainak (4.4. Tétel), illetve oldalfelező merőleges egyenesének egy nyálábhoz tartozásának (4.3. Tétel) igazolásakor.

**2.13. Definíció.** A kollineáris  $A, B \neq A, C \neq B$  (ilyen sorrendben vett) pontok hiperbolikus (metrikus) osztóviszonya<sup>5</sup>

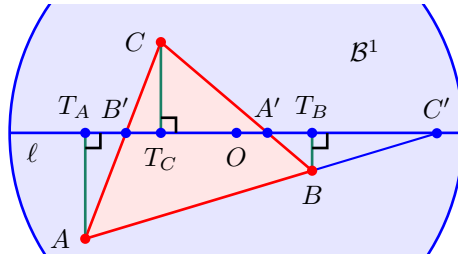
$$\langle A, B; C \rangle = \begin{cases} -\frac{\text{sh } d(A, C)}{\text{sh } d(C, B)}, & \text{ha } C \in \overline{AB}, \\ \frac{\text{sh } d(A, C)}{\text{sh } d(C, B)}, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

▲

A  $C$  pont (3.1) szerint bijektív kapcsolatban van  $\langle A, B; C \rangle$  értékével.

**2.14. Tétel.** (Hiperbolikus Menelaosz-tétel [33, 467—468. o.]) *A hiperbolikus térben az  $ABC\triangle$  trigon egy  $(C', A', B')$ -tripletje akkor és csak akkor Menelaosz típusú, ha az  $(\langle A, B; C' \rangle, \langle B, C; A' \rangle, \langle C, A; B' \rangle)$  számhármass Menelaosz típusú.*

**Bizonyítás.** Használjuk a Cayley-Klein-modellt! Tegyük fel, hogy a  $(C', A', B')$ -triplet Menelaosz típusú,  $\ell$  egyenesük a  $\mathcal{K}$  egy átmérője. Ekkor a trigon  $A, B, C$  csúcsai nincsenek az átmérőn, és  $T_A, T_B, T_C$  merőleges vetületeikre  $\overline{AT_A}, \overline{BT_B}, \overline{CT_C}$  az  $\ell$ -re merőleges szakaszok euklideszi értelemben is (lásd a 2.6. Ábrát).



2.6. Ábra. Hiperbolikus Menelaosz-tétel

<sup>5</sup>A hiperbolikus megnevezés nem a térre, hanem a formula hiperbolikus függvényeire utal. A használt metrikát, ha nem lenne egyértelmű, akkor az alsó indexben egyértelmű utalással jelezzük.

A hiperbolikus sík szinusz-tétele [30, 123. o.] szerint

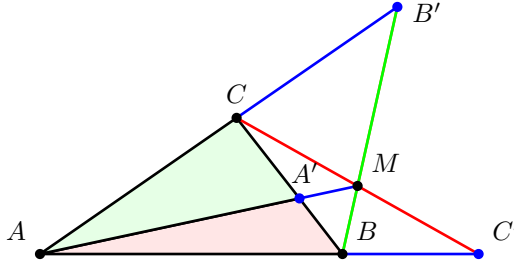
$$\begin{aligned} |\langle A, B; C' \rangle| |\langle B, C; A' \rangle| |\langle C, A; B' \rangle| &= \frac{\operatorname{sh} d(A, C')}{\operatorname{sh} d(C', B)} \frac{\operatorname{sh} d(B, A')}{\operatorname{sh} d(A', C)} \frac{\operatorname{sh} d(C, B')}{\operatorname{sh} d(B', A)} \\ &= \frac{\operatorname{sh} d(T_A, A)}{\operatorname{sh} d(T_B, B)} \frac{\operatorname{sh} d(T_B, B)}{\operatorname{sh} d(T_C, C)} \frac{\operatorname{sh} d(T_C, C)}{\operatorname{sh} d(T_A, A)} = 1 \end{aligned}$$

teljesül. Mivel  $\ell$  a trigonnak pontosan 0 vagy 2 oldalát metszi a Pasch-axióma miatt, az osztóviszonyok szorzata  $-1$ .

Megfordítva tegyük föl, hogy egy  $(C', A', B')$  tripletre az osztóviszonyok  $(\gamma, \alpha, \beta) := (\langle A, B; C' \rangle, \langle B, C; A' \rangle, \langle C, A; B' \rangle)$  számhármasa Menelaosz típusú. Ekkor a tripletből két pont (mondjuk,  $B'$  és  $A'$ ) egyenesének és a harmadik oldalnak a  $C^*$  metszéspontja az előző két ponttal a  $(C^*, A', B')$  Menelaosz-tripletet alkotja. Így bizonyításunk első része szerint  $(\gamma^*, \alpha, \beta) := (\langle A, B; C^* \rangle, \langle B, C; A' \rangle, \langle C, A; B' \rangle)$  is Menelaosz típusú. A  $\gamma\alpha\beta = \gamma^*\alpha\beta = -1$  következtében  $\gamma^* = \gamma$ , és így a tétel előtti észrevételre tekintettel  $C' = C^*$ . ■

**2.15. Tétel.** (Hiperbolikus Ceva-tétel [33, 467–468. o.]) *A hiperbolikus térben az  $ABC\triangle$  trigon egy  $(C', A', B')$ -tripletje akkor és csak akkor Ceva típusú, ha az  $(\langle A, B; C' \rangle, \langle B, C; A' \rangle, \langle C, A; B' \rangle)$  számhármás Ceva típusú.*

**Bizonyítás.** Annak megmutatását, hogy az  $M$  pontra illeszkedő egyeneseket adó Ceva típusú tripletre a megfelelő osztóviszonyok számhármasa Ceva típusú, visszavezetjük a Menelaosz-tétel szükséges részére (lásd a 2.7. Ábrát).



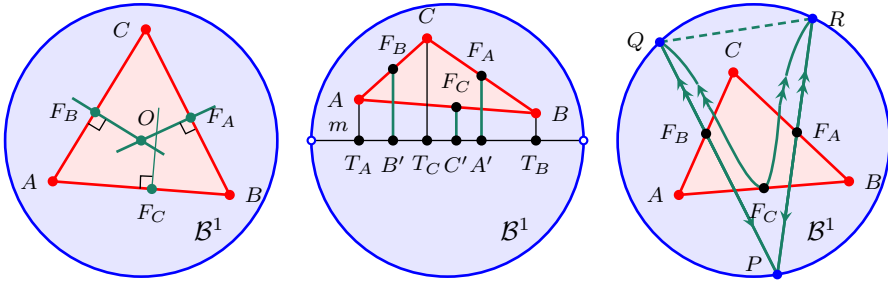
2.7. Ábra. Hiperbolikus Ceva-tétel

Az  $ABA'$  trigonra és  $CM$  egyenesre, valamint az  $AA'C$  trigonra és a  $BM$  egyenesre felírt Menelaosz-tétel szerint

$$|\langle A, B; C' \rangle| |\langle B, A'; C \rangle| |\langle A', A; M \rangle| = 1 = |\langle C, A; B' \rangle| |\langle A, A'; M \rangle| |\langle A', C; B \rangle|.$$

Ezek szorzata az arányok beírását követő egyszerűsítés után éppen az állítás, mivel az  $M$  ponton átmenő egyenesek közül pontosan 1 vagy 3 metszi a trigon oldalait.





**2.9. Ábra.** Oldalfelező merőlegesek sugár-, hiper- és paranyaláb esetén

(S) Tegyük fel, hogy két oldal felező merőlegese egy sugárnyalábhhoz tartozik, legyenek ezek az  $\overline{AC}$  és a  $\overline{BC}$  oldalak  $\overline{F_B O}$  és  $\overline{F_A O}$  felező merőleges egyenesei. Helyezzük el úgy az  $ABC$  trigont a  $\mathcal{K}$  körben, hogy a metszéspont az  $O$ -ba essen. Ekkor az  $O$ -n átmenő  $\overline{F_A O}$  és  $\overline{F_B O}$  a modellben euklideszi értelemben is merőleges. Továbbá a  $d(O, A) = d(O, C)$ . Az  $O$  választása miatt így az  $\overline{OA}$  és  $\overline{OC}$  szakaszok euklideszi távolsága is megegyezik, hasonlóképpen az  $\overline{OB}$  szakaszával is. Azt kaptuk, hogy  $\overline{F_A O}$  és  $\overline{F_B O}$  a megfelelő oldalaknak euklideszi értelemben is felező merőleges egyenesei. Így  $\overline{AO}$  és  $\overline{BO}$  szakaszok hiperbolikus és euklideszi hosszúsága is megegyezik, vagyis  $\overline{F_C O}$  merőleges az  $\overline{AB}$  oldalra (lásd a 2.9. Ábrát). Eszerint a harmadik oldal felező merőleges egyenese is a sugársorhoz tartozik.

(H) Tegyük fel, hogy az  $\overline{AC}$  oldal  $F_B$  és a  $\overline{BC}$  oldal  $F_A$  pontján átmenő felező merőleges egyenese egy hipernyalábot határoznak meg. Ekkor van pontosan egy közös merőleges  $m$  egyenesük. Vegyünk fel olyan Cayley–Klein-modellt, amelynek  $O$  középpontja ezen az egyenesen helyezkedik el úgy, hogy az abban állított  $l$  merőleges egyenes átmegy az  $\overline{AB}$  oldalt felező  $F_C$  ponton! Legyen  $T_A, T_B$  és  $T_C$  az  $A, B$  és  $C$  talppontja  $m$ -en. Az  $F_B B'$  és az  $F_A A'$  egyenes a modellben is merőleges  $m$ -re, ezért a rájuk vonatkozó tükrözés felcseréli  $A$ -t  $C$ -vel és  $T_A$ -t  $T_C$ -vel, illetve  $C$ -t  $B$ -vel és  $T_C$ -t  $T_B$ -vel. Ezért  $\overline{AT_A}$  és  $\overline{BT_B}$  ugyanolyan hosszú, és az átmérőre merőleges a modellben, tehát euklideszi értelemben szimmetrikusak az  $l$  egyenesre, vagyis  $l$  merőleges az  $\overline{AB}$  szakaszra, és ez igazolja az állítást.

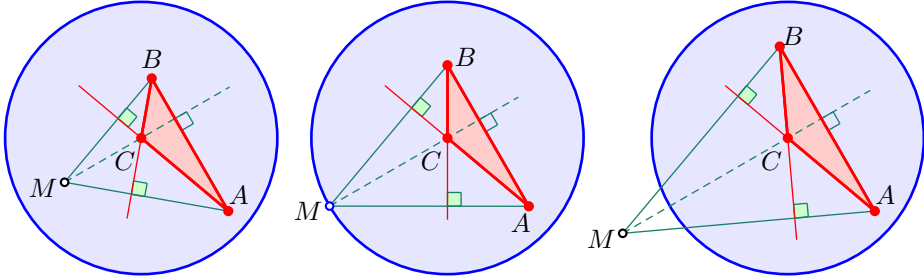
(P) Tegyük fel, hogy az  $F_A$  és  $F_B$  oldalfelező pontokon átmenő merőleges egyenesek a határon lévő  $P$  pontban metszik egymást. Ekkor az  $F_C$ -n átmenő oldalfelező merőleges egyenes az előző kettő egyikével sem lehet közös sugár-, vagy hipernyalábban, mert akkor (S) és (H) szerint az első két egyenes is abban lenne.

Ha tehát az  $F_C$  felezőpontbeli merőleges egyenes nem menne át a  $P$  ponton, akkor az egyiket a  $Q$ , a másikat az  $R$  pontban metszené, vagyis megegyezne a  $\overline{QR}$  húrral. Ám  $F_C$  nem lehet ezen a húron, hiszen az  $F_A F_B$  egyenes elválasztja az  $\overline{AB}$  és a  $\overline{QR}$  szakaszokat. ■



**2.17. Tétel.** (Hiperbolikus magasságpont tétele [23, Theorem 3]) *Hiperbolikus térben bármely trigon magasságvonalai egy nyalábhoz tartoznak.*

**Bizonyítás.** Az  $ABC\triangle$  trigon  $A$ , illetve  $B$  csúcson átmenő  $m_A$ , illetve  $m_B$  magasságvonala egy nyalábhoz tartozik. Azt igazoljuk, hogy a harmadik  $m_C$  is ehhez a nyalábhoz tartozik. E nyalábok lehetséges típusai jól látszanak a Cayley–Klein-modellben, ha annak középpontjául a  $C$  csúcsot választjuk.

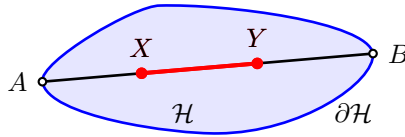


**2.10. Ábra.** A magasságvonalak metszéspontja a három nyalábtípus esetén

Ekkor az  $m_A$ , illetve  $m_B$  magasságvonalak egyenesei euklideszi értelemben is merőlegesek a  $CB$ , illetve  $CA$  egyenesre. Az euklideszi síkon az  $M$  metszéspontjuk létezik, ezért  $M$  az  $ABC\triangle$  trigon euklideszi magasságpontja. Eszerint  $MC$  az euklideszi értelemben merőleges az  $AB$  egyenesre. Mivel  $CM$  átmegy a modell középpontján, hiperbolikus értelemben is merőleges  $AB$ -re, amiért a harmadik hiperbolikus magasság is átmegy  $M$ -en. ■

## 2.5. A Hilbert-geometriáról

Tekintsük  $\mathbb{R}^n$  egy korlátos, konvex, nyílt  $\mathcal{H}$  tartományát, és abban tetszőleges  $X$ ,  $Y$  pontpárokat, melyek mondjuk az  $\overline{AB}$  húrra illeszkednek.



**2.11. Ábra.** A Hilbert-metrika definíciója

A pozitív  $k$  konstanssal adott

$$d_{\mathcal{H}}: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}, \quad d_{\mathcal{H}}(X, Y) = \begin{cases} \frac{k}{2} \ln(A, B; X, Y), & \text{ha } X \neq Y, \\ 0, & \text{ha } X = Y, \end{cases} \quad (2.2)$$

függvény egy metrika [30], melyet *Hilbert-metrikának* nevezünk.

A  $d_{\mathcal{H}}$  metrika nyilván folytonos mindkét változójában, így a  $(\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}})$  pár egy nem kompakt, teljes metrikus teret alkot, melyben az affin egyenesek szakaszai rendelkeznek a legrövidebb út tulajdonsággal.

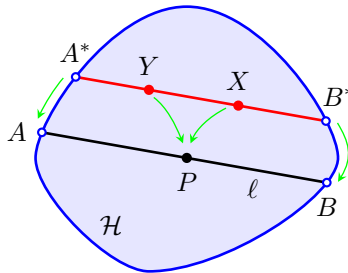
Ha a  $\mathcal{H}$  tartomány egy  $n$ -szimplex belseje, akkor  $(\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}})$  izomorf egy Minkowski-geometriával, vagyis egy  $n$ -dimenziós normált vektortérrel [20, 34]. Ennek a megfordítása is igaz: ha a Hilbert-geometria izomorf egy normált véges dimenziós vektortérrel, akkor egy szimplex belseje [13]. Két dimenzióban ez azt jelenti, hogy ha  $\mathcal{H}$  egy konvex sokszög, amelynek Hilbert-geometriája izomorf egy kétdimenziós normált vektortérrel, akkor a meghatározott metrika egy Minkowski-metrika, melynek a sokszög az indukáltrixa, ám a szükséges feltétel következtében ez csak háromszög lehet [42, 9. o.].

Ha  $\partial\mathcal{H}$  nem tartalmaz két nem kollineáris szakaszt, akkor  $d_{\mathcal{H}}$  teljesíti a szigorú háromszög-egyenlőtlenséget, vagyis az affin szakasz az egyetlen geodetikus.

**2.18. Definíció.** Az affin tér egy szigorúan konvex, korlátos, nyílt  $\mathcal{H}$  tartományának a  $d_{\mathcal{H}}$  Hilbert-metrikával alkotott  $(\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}})$  párját *Hilbert-geometriának* nevezzük.<sup>6</sup> ▲

Egy affin  $\ell$  egyenesnek a  $\mathcal{H}$  tartománnyal vett metszetét a Hilbert-geometria  $\tilde{\ell}$  egyenesének nevezzük.<sup>7</sup>

Tegyük fel, hogy két különböző  $X$  és  $Y$  pont a  $(\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}})$  Hilbert-geometriában tart valamely rögzített  $P$  ponthoz úgy, hogy közös egyenesük végig párhuzamos a  $P$  ponton átmenő  $\ell$  egyenessel, amelynek pontjai a  $\partial\mathcal{H}$  határon  $A$  és  $B$ . A mozgó  $X$  és  $Y$  pontok egyenesének pontjai a határon legyenek  $A^*$  és  $B^*$  úgy, hogy  $Y$  van az  $A^*$  és  $X$  között. Így a párhuzamosságra tekintettel  $A^* \rightarrow A$  és  $B^* \rightarrow B$  is teljesül.



**2.12. Ábra.** A Hilbert-metrika Finsler függvényének kiszámításához

<sup>6</sup>A Hilbert-geometriát David Hilbert fedezte fel. Először egy levélben ír róla, amelyet Felix Kleinnek 1894-ben küldött. Klein már jóval korábban kidolgozott konstrukcióját ([28]) követi, amikor az  $\mathbb{R}^3$  tér egy konvex tartományán kettősvizony logaritmusával definiálja pontok távolságát. Eredményeit egy évvel később az általa szerkesztett folyóiratban jelenteti meg [22]. Klein munkájára A. Cayley egy homogén koordinátákkal felírt formulája volt hatással ([8]).

<sup>7</sup>A  $\tilde{\ell}$  jelet csak akkor tesszük ki, ha egy szövegkörnyezetben szerepel az  $\ell$  és  $\tilde{\ell}$  egyenes.

A Hilbert-távolság definícióját és az  $\ln(1+x)$  függvény sorfejtését használva bármely  $d$  Minkowski-metrikára kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{H}}(X, Y) &= \frac{k}{2} \ln \left( \frac{d(A^*, X)}{d(A^*, Y)} \cdot \frac{d(B^*, Y)}{d(B^*, X)} \right) \\ &= \frac{k}{2} \ln \left( \frac{d(A^*, Y) + d(X, Y)}{d(A^*, Y)} \cdot \frac{d(B^*, X) + d(X, Y)}{d(B^*, X)} \right) \\ &= \frac{k}{2} \ln \left[ \left( 1 + \frac{d(X, Y)}{d(A^*, Y)} \right) \cdot \left( 1 + \frac{d(X, Y)}{d(B^*, X)} \right) \right] \\ &= \frac{k}{2} \left[ \ln \left( 1 + \frac{d(X, Y)}{d(A^*, Y)} \right) + \ln \left( 1 + \frac{d(X, Y)}{d(B^*, X)} \right) \right] \\ &= \frac{k}{2} \left[ \frac{d(X, Y)}{d(A^*, Y)} - \frac{1}{2} \frac{d^2(X, Y)}{d^2(A^*, Y)} + \cdots + \frac{d(X, Y)}{d(B^*, X)} - \frac{1}{2} \frac{d^2(X, Y)}{d^2(B^*, X)} + \cdots \right]. \end{aligned}$$

Ebből átosztással, majd határátmenettel adódik, hogy

$$\lim_{X, Y \rightarrow P} \frac{d_{\mathcal{H}}(X, Y)}{d(X, Y)} = \frac{k}{2} \left[ \frac{1}{d(P, A)} + \frac{1}{d(P, B)} \right] =: \Phi(P, \ell). \quad (2.3)$$

Ez csak a  $P$  ponttól és az  $\ell$  egyenestől függ, így a Hilbert-geometria az

$$F_{\mathcal{H}}(P, \mathbf{v}) = \frac{k}{2} |\mathbf{v}| \left( \frac{1}{d(P, A)} + \frac{1}{d(P, B)} \right) \quad (2.4)$$

Finsler-függvénnyel a  $\mathcal{H}$  tartományon adott Finsler sokaság, ahol  $A$  és  $B$  a  $\partial\mathcal{H}$  metszete a  $P$  ponton átmenő,  $\mathbf{v}$  irányvektorú egyenessel.

Ha a  $P$  ponton átmenő minden  $\ell$  egyenesen tekintjük a  $P$ -től  $1/\Phi(P, \ell)$  távolságnál nem messzebb lévő pontokat, akkor ezek halmaza egy  $P$ -re centrálisan szimmetrikus szigorúan konvex  $\mathcal{I}_P$  tartomány.

**2.19. Definíció.** Az  $\mathcal{I}_P$  mint indikátrix által az  $\mathbb{R}^n$ -en meghatározott  $d_{\mathcal{I}}$  Minkowski-metrika adta  $(\mathbb{R}^n, d_{\mathcal{I}})$  Minkowski-geometriát a  $P$  ponthoz tartozó lokális Minkowski-geometriának nevezzük. ▲

Világos, hogy a  $P$  ponthoz tartozó lokális Minkowski-geometria a  $P$  pont elegendően kicsiny környezetében jó közelítése a Hilbert-geometriának.

A *merőlegesség* fogalma a Birkhoff-merőlegesség mintájára alakul. Az  $S$  talp-pontja az  $\ell$  egy  $T$  pontja, ha  $d_{\mathcal{H}}(S, T) \leq d_{\mathcal{H}}(S, X)$  minden  $X \in \ell$  pontra. Mivel a távolság folytonos, nem negatív függvény, felveszi minimumát, vagyis minden  $S$  pontnak minden  $\ell$  egyenesen van talppontja.

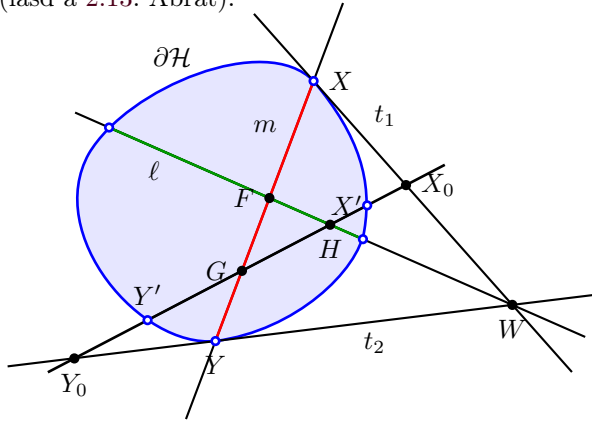
**2.20. Definíció.** Egy  $m$  egyenes *merőleges*<sup>8</sup> egy  $\ell$  a  $T$  pontban metsző  $\ell$  egyenesre, ha  $m$  minden pontjának  $T$  az egyetlen talppontja. Jelölése:  $m \perp \ell$ . ▲

<sup>8</sup>Ez a lineáris metrikus terekre megfogalmazott Birkhoff-féle merőlegesség megfelelője [3].

Jegyezzük meg, hogy  $m \perp \ell$  általában nem vonja maga után, hogy  $\ell \perp m$ , de minden pontból minden egyenesre lehet merőlegest állítani, amit most igazolunk.

**2.21. Lemma.** ([6, (28.11)]) Egy  $(\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}})$  Hilbert-geometriában egy  $\tilde{m}$  egyenes akkor és csak akkor merőleges egy  $\tilde{\ell}$  egyenesre, ha az  $m$  egyenesnek a  $\partial\mathcal{H}$  görbével vett metszéspontjaiban a támaszegyenesek konkurensak az  $\ell$  egyenessel.

**Bizonyítás.** *Elegendőség.* Legyenek  $X$  és  $Y$  az  $m$  egyenes metszéspontjai a  $\partial\mathcal{H}$  görbével;  $t_1$  és  $t_2$  ezekben a pontokban a  $\partial\mathcal{H}$  görbe támaszegyenesei; ezek közös (esetleg ideális) pontja  $\ell$ -l  $W$ ; az  $\ell$  és  $m$  metszéspontja  $F$ ;  $G \in \tilde{m}$  és  $H \in \tilde{\ell}$  tetszőleges  $F$ -től különböző pontok; végül  $GH$  metszéspontjai  $\partial\mathcal{H}$ -tal és a támaszegyenesekkel  $Y_0, Y', X', X_0$  (lásd a 2.13. Ábrát).



2.13. Ábra. Merőleges konstrukciója

A  $GH$  és  $m$  közötti  $W$  centrumú perspektivitás megtartja a kettősviszonyt, ezért  $(G, F; X, Y) = (G, H; X_0, Y_0)$ . A kettősviszony monotonitása szerint viszont  $(G, H; X_0, Y_0) > (G, H; X', Y')$ , ezért  $d_{\mathcal{H}}(G, F) > d_{\mathcal{H}}(G, H)$ . Következésképpen  $F$  talppont, és  $m$  merőleges az  $\ell$  egyenesre.

*Szükségesség.* Tegyük fel, hogy  $G$  az  $\ell$  egyenesen kívüli,  $H$  az  $\tilde{\ell}$  futó pontja,  $X'$  és  $Y'$  a  $GH$  pontjai  $\partial\mathcal{H}$ -n. Egyszerűen látható folytonossági és konvexitási megfontolásokkal, hogy a  $\mathcal{H}$  tartomány  $X'$  és  $Y'$  pontokon átmenő tartóegyeneseinek metszéspontja pontosan egyszer esik  $\ell$ -re. Vagyis  $H$ -nak pontosan egy olyan helyzete van az  $\ell$  egyenesen, hogy  $\ell$  és a két tartóegyenes konkurens (vagy párhuzamos). A korábbi megállapítás szerint erre a jól meghatározott  $H_0$  pontra az  $\tilde{m}$  egyenes merőleges az  $\tilde{\ell}$  egyenesre.

Ezen konstrukcióval adott  $\tilde{m}$  esetén az összes olyan  $\tilde{\ell}$  egyenest megkapjuk, amelyre  $\tilde{m}$  merőleges. Ha  $\partial\mathcal{H}$  sima görbe, akkor a tartóegyenesek egyértelműen meghatározott érintők, és az  $\ell$  egyenesek egy nyalábot alkotnak. ■

Egy adott  $\ell$  egyenesre pontosan akkor lehet minden rajta kívüli  $P$  pontból merőlegest állítani, ha minden  $X$  pontnak egyértelműen meghatározott talppontja van  $\ell$ -en [6, (21.7)]; és ezzel az egyenes is egyértelmű. Az egyértelműen meghatározott talppont létezése viszont azzal ekvivalens, hogy a körök konvexek (amiből szigorú konvexitásuk is következik) [6, (21.9)]. Ennek következménye, hogy *pontból egyenesre a merőleges állításának unicitás a ekvivalens azzal, hogy a körök (szigorúan) konvexek.*

**2.22. Definíció.** Az  $f$  egyenes  $\mathcal{H}$ -merőleges az  $\ell$  egyenesre ( $f \perp_{\mathcal{H}} \ell$ ), ha  $\ell \perp f$  a 2.20. Definíció értelmében. ▲

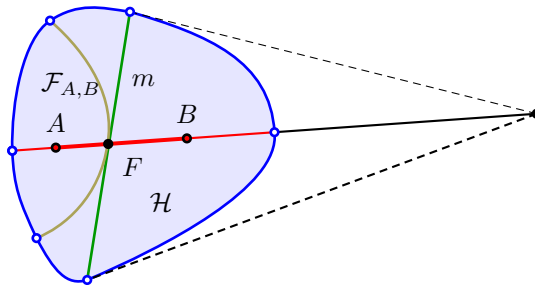
A továbbiakban a  $\mathcal{H}$ -merőlegességet használjuk, és nem az eredeti 2.20. Definíció szerinti Birkhoff-merőlegességet.

A  $(\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}})$  Hilbert-geometria metrikája kettősviszonnyal definiált, ezért minden olyan  $\Phi$  kollineáció, melyre  $\mathcal{H}$  invariáns, a Hilbert-geometria izometriáját adja. Ennek fordítottja is igaz [6, (22.10)]: *a Hilbert-geometria minden egyes izometriája a projektív tér olyan kollineációjának megszorítása a  $\mathcal{H}$  tartományra, amely a  $\mathcal{H}$  tartományt invariánsan hagyja.*

**2.23. Definíció.** Ha egy involutorikus izometriának egyetlen fixpontja van — a pont-képpont párok  $C$  felezőpontja —, akkor a  $C$ -re vonatkozó centrális tükrözésnek nevezzük. Ha a fixpontok egy  $\ell$  egyenest alkotnak, akkor az  $\ell$ -re vonatkozó tengelyes tükrözésről beszélünk [6, 127. o.]. ▲

Ha egy nem identikus izometria egy  $\ell$  egyenest pontonként fixen hagy, akkor ez az  $\ell$  tengelyre vonatkozó tükrözés [6, (23.8)]. Ha pedig létezik az  $\ell$  egyenesre vonatkozó tükrözés, akkor  $m \perp \ell$  maga után vonja, hogy  $\ell \perp m$  [6, (23.9)].

**2.24. Definíció.** Legyen  $A$  és  $A'$  két különböző pont. *Kétpontekvidisztáns alakzatnak* nevezzük azon  $X$  pontok  $\mathcal{F}_{A,A'}$  halmazát, amelyekre  $d_{\mathcal{H}}(A, X) = d_{\mathcal{H}}(A', X)$ . ▲



**2.14. Ábra.** Felező merőleges és kétpontekvidisztáns görbe

Egy kétdimenziós Hilbert-geometriában is beszélhetünk egy szakasz felező merőleges egyeneséről, ám ez általában nem a kétpontekvidisztáns alakzat. Ha egy

$\ell$  egyenesre létezik  $\tau_\ell$  tükrözés, és a különböző  $A$  és  $B$  pontokra  $\tau_\ell(A) = B$ , akkor e két pont ekvidisztáns alakzata az  $\ell$  (melyre ekkor  $AB$  merőleges) [6, (23.5)]. Ha minden egyenesre létezik tükrözés, akkor a geometria hiperbolikus [6, (29.3)], amiért a szakaszfelező merőleges egyenesek és a kétpontekvidisztáns görbék egybeesnek.

Hilbert-geometriában többféle módon is bevezethető görbület.

A Riemann-sokaságok metszetgörbületét általánosítja a Finsler-sokaságokra bevezetett *zászlógörbület* fogalma. Megállapítható, hogy egy Hilbert-geometria zászlógörbülete konstans  $-1$ . A Funk–Berwald-tétel a Finsler-geometria egyik alapvető eredménye ([2, 15]): *Legyen  $F$  egy differenciálható és szigorúan konvex Finsler-metrika az  $\mathbb{R}^n$  egy korlátos, nyílt, konvex  $\mathcal{H}$  tartományán. Tegyük fel, hogy  $F$  teljes, zászlógörbülete pedig konstans  $-1$ , továbbá a  $d_F$  távolságfüggvénye projektív metrikát határoz meg. Ekkor  $d$  Hilbert-metrika  $\mathcal{H}$ -n.*

A Busemann-féle görbületfogalom inkább minőségi tulajdonságot fejez ki, szemben a differenciálgeometriában szokásos mennyiségivel. Ez egyike a metrikus terek görbület-fogalmainak, és [5, 173. o.] alapján kellően sima Riemann-sokaságokban ekvivalens az Alexandrov-féle görbülettel.

**2.25. Definíció.** Azt mondjuk, hogy egy  $(\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}})$  Hilbert-geometriának a  $P$  pontban *nempozitív* görbülete van, ha  $P$ -nek van olyan környezete, amelynek minden  $A, B, C$  pontjára, illetve az  $\overline{AB}$  és  $\overline{AC}$  szakasz  $d_{\mathcal{H}}$  metrika szerinti  $F_C$  és  $F_B$  felezőpontjára

$$2d_{\mathcal{H}}(F_C, F_B) \leq d_{\mathcal{H}}(B, C).$$

Azt mondjuk, hogy  $P$ -ben a görbület *nemnegatív*, ha a fordított irányú egyenlőtlenség áll fenn. A görbületet  $P$ -ben *indeterminálnak* nevezzük, ha nem nempozitív, és nem nemnegatív  $P$ -ben. ▲

Ismeretes [32], hogy ha a  $\mathcal{H}$  Hilbert-geometria  $P$  pontjában a görbület nempozitív, akkor  $P$  a  $\mathcal{H}$  projektív centruma, és ennek fordítottja is igaz, sőt nincsen nemnegatív görbületű pont sem, és ha minden pontban nempozitív a görbület, akkor a geometria hiperbolikus.

Amennyiben  $\partial\mathcal{H}$  egy ellipszis, akkor két érintő  $W$  metszéspontja az érintési pontokat összekötő  $m$  egyenes pólusa, és az  $m$  tetszőleges pontjának polárisa átmegy  $W$ -n, emiatt a merőlegesség szimmetrikus [6, (28.12)]. Fordítva, a merőlegesség szimmetriája a Hilbert-geometriák közül pontosan az ellipszoiddal megadottakban, vagyis a hiperbolikus geometriában teljesül [26, Theorem 2].

A lokális Minkowski-metrika szerinti merőlegesség megegyezik a Hilbert-metrika szerinti merőlegességgel ([25, Theorem 2]), amiért *ha egy Hilbert-geometria minden pontjában lokálisan euklideszi, akkor hiperbolikus* [25].

Egy Hilbert-geometriában akkor és csak akkor van tengelyes tükrözés minden hipersíkra vonatkozóan, ha a geometria hiperbolikus. A szükséges feltétel élesíthető: ha csak egyetlen pontra illeszkedő hipersíkokra léteznek a tükrözések, már akkor is hiperbolikus a geometria [6, (29.2) második állítása]. Ugyanez igaz a pontra vonatkozó tükrözésre is [32].

A Hilbert-geometria lokálisan Minkowski-geometria, így az

$$A(\mathcal{B}) = \iint_{\mathcal{B}} \sigma(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \quad \text{ahol} \quad \sigma(x_1, x_2) = \pi \left[ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Phi^{-2}((x_1, x_2), l) d\omega \right]^{-1}$$

formulával definiálhatjuk bármely  $\mathcal{B}$  tartomány  $\mathcal{H}$ -területét. A hiperbolikus geometriában minden aszimptotikus<sup>9</sup> háromszög  $\mathcal{H}$ -területe  $\pi$ , ahogyan az a Poincaré-modellből azonnal látható, és valójában a szögdefektus. Ez a tulajdonság karakterizálja a hiperbolikus geometriát a Hilbert-geometriák között [9].

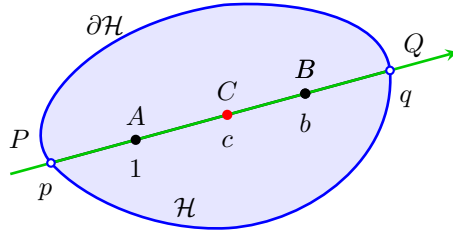
---

<sup>9</sup>Egy háromszög aszimptotikus, ha csúcsai a Hilbert-geometria határára esnek.

### 3. Előkészületek

#### 3.1. Néhány technikai lemma

Legyenek a  $(\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}})$ -val adott Hilbert-geometriában  $A, B$  és  $C$  kollineáris pontok, és legyen  $AB \cap \partial\mathcal{H} = \{P, Q\}$  úgy, hogy  $A$  a  $P$  és  $B$  között van. Tekintsük az  $AB$  egyenesnek egy olyan affin koordináta-rendszerét, hogy  $P$  koordinátája 0, és  $A$  koordinátája 1. Legyenek ebben a koordináta-rendszerben  $q, b$  és  $c$  a  $Q, B$  és  $C$  pontok koordinátái a  $q > b > 1$  és  $0 < c < q$  feltételekkel.



**3.1. Ábra.** A hiperbolikus osztóviszony kifejezése koordinátákkal

**3.1. Lemma.** [KKc, Lemma 2.3] *A hiperbolikus metrikus osztóviszonyra*

$$\langle A, B; C \rangle = \frac{c - b}{(c - 1)\sqrt{b}} \sqrt{1 + \frac{b - 1}{q - b}}. \quad (3.1)$$

**Bizonyítás.** A hiperbolikus metrikus osztóviszony 2.13. Definíciója szerint

$$\begin{aligned} |\langle A, B; C \rangle| &= \frac{\operatorname{sh} \left( \frac{\operatorname{sign}(c-b)}{2} \ln \frac{c(q-b)}{b(q-c)} \right)}{\operatorname{sh} \left( \frac{\operatorname{sign}(1-c)}{2} \ln \frac{q-c}{c(q-1)} \right)} = \frac{\left( \frac{c(q-b)}{b(q-c)} \right)^{\frac{\operatorname{sign}(c-b)}{2}} - \left( \frac{b(q-c)}{c(q-b)} \right)^{\frac{\operatorname{sign}(c-b)}{2}}}{\left( \frac{q-c}{c(q-1)} \right)^{\frac{\operatorname{sign}(1-c)}{2}} - \left( \frac{c(q-1)}{q-c} \right)^{\frac{\operatorname{sign}(1-c)}{2}}} \\ &= \frac{((c(q-b))^{\operatorname{sign}(c-b)} - (b(q-c))^{\operatorname{sign}(c-b)}) (c(q-1)(q-c))^{\frac{\operatorname{sign}(1-c)}{2}}}{((q-c)^{\operatorname{sign}(1-c)} - (c(q-1))^{\operatorname{sign}(1-c)}) (b(q-c)c(q-b))^{\frac{\operatorname{sign}(c-b)}{2}}}. \end{aligned}$$

Ebben három esetet kell megvizsgálnunk:  $0 < c < 1$ ,  $1 < c < b$  és  $b < c < q$ .

A  $0 < c < 1$  esetében  $\operatorname{sign}(1-c) = 1$ , továbbá  $\operatorname{sign}(c-b) = -1$ , és ezért

$$\begin{aligned} |\langle A, B; C \rangle| &= \frac{((c(q-b))^{-1} - (b(q-c))^{-1}) (c(q-1)(q-c))^{1/2}}{((q-c) - c(q-1)) (b(q-c)c(q-b))^{-1/2}} \\ &= \frac{(b-c)q(q-1)^{1/2}}{q(1-c)(b(q-b))^{1/2}} = \frac{(b-c)}{(1-c)\sqrt{b}} \sqrt{\frac{q-1}{q-b}}. \end{aligned}$$



Ha  $1 < c < b$ , következésképpen  $\text{sign}(1 - c) = -1$ , továbbá  $\text{sign}(c - b) = -1$ , akkor

$$\begin{aligned} |\langle A, B; C \rangle| &= \frac{((c(q - b))^{-1} - (b(q - c))^{-1}) (c(q - 1)(q - c))^{-1/2}}{((q - c)^{-1} - (c(q - 1))^{-1}) (b(q - c)c(q - b))^{-1/2}} \\ &= \frac{(b(q - c) - c(q - b)) (c(q - 1)(q - c))^{1/2}}{(c(q - 1) - (q - c)) (b(q - c)c(q - b))^{1/2}} \\ &= \frac{(b - c) (q - 1)^{1/2}}{(c - 1)\sqrt{b}(q - b)^{1/2}} = \frac{(b - c)}{(c - 1)\sqrt{b}} \sqrt{1 + \frac{b - 1}{q - b}}. \end{aligned}$$

Ha  $b < c < q$ , és így  $\text{sign}(1 - c) = -1$ , továbbá  $\text{sign}(c - b) = 1$ , akkor

$$\begin{aligned} |\langle A, B; \mathbf{C} \rangle| &= \frac{(c(q - b) - b(q - c)) (c(q - 1)(q - c))^{-1/2}}{((q - c)^{-1} - (c(q - 1))^{-1}) (b(q - c)c(q - b))^{1/2}} \\ &= \frac{(c(q - b) - b(q - c)) (c(q - 1)(q - c))^{1/2}}{(c(q - 1) - (q - c)) (b(q - c)c(q - b))^{1/2}} \\ &= \frac{(c - b) (q - 1)^{1/2}}{(c - 1)(b(q - b))^{1/2}} = \frac{(c - b)}{(c - 1)\sqrt{b}} \sqrt{1 + \frac{b - 1}{q - b}}. \end{aligned}$$

Mindhárom eset megvizsgálásával a lemmát igazoltuk. ■

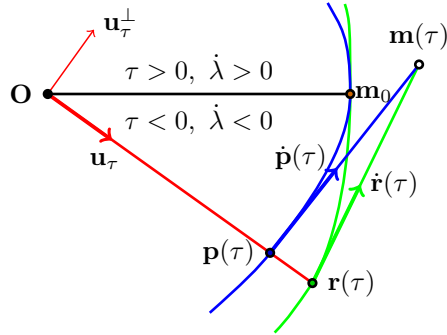
Ahogy arra a 2.13. Definíciónál már utaltunk, a (3.1) következménye, hogy egy egyenesen két pontot rögzítve kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést kapunk az egyenes  $A$ -tól és  $B$ -től különböző pontjai és  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$  között ( $-1$  az ideális pontnak felel meg).

A következő, differenciálható görbékre vonatkozó technikai lemmákhoz szükséges alapvető differenciálgeometriai ismeretek a [29] könyvben találhatók.

**3.2. Lemma.** ([KKh, Lemma 3.4]) *Legyenek  $\mathbf{r}, \mathbf{p}: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$  kétszer folytonosan differenciálható görbék kis  $\varepsilon > 0$  értékekre úgy, hogy  $\mathbf{p}(\tau) = p(\tau)\mathbf{u}_\tau$ , és  $\mathbf{r}(\tau) = r(\tau)\mathbf{u}_\tau$ , ahol  $p, r: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}_+$ , továbbá az  $r(\tau)/p(\tau)$  az 1 minimumértéket kizárólag a  $\tau = 0$  helyen veszi fel.*

*Ekkor az  $\mathbf{r}$ , illetve  $\mathbf{p}$  görbék  $\mathbf{r}(\tau)$ , illetve  $\mathbf{p}(\tau)$  pontbeli érintő egyenesei egy olyan  $\mathbf{m}(\tau)$  pontban metszik egymást, amely a  $\mathbf{p}(0)$  ponthoz tart, amint  $\tau \rightarrow 0$ , mégpedig úgy, hogy ez az  $\overline{\mathbf{Op}(\tau)}$  egyenesnek ugyanazon az oldalán van, mint a  $\mathbf{p}(0)$ .*

**Bizonyítás.** Legyen  $\lambda: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow [1, \infty)$  olyan, hogy  $r(\tau) = \lambda(\tau)p(\tau)$ . Akkor ez egyértelműen a 0-ban veszi fel az 1 minimumértéket. Így  $\dot{\lambda}(0) = 0$ , és  $\ddot{\lambda}(0) > 0$ . Ez pedig azt jelenti, hogy  $\lambda$  szigorúan monoton csökkenő  $\tau < 0$  esetén, és szigorúan monoton növekvő  $\tau > 0$  esetén.



3.2. Ábra. Az érintő egyenesek metszése

Mint hogy  $\dot{\mathbf{r}} = \lambda \dot{\mathbf{p}} + \dot{\lambda} \mathbf{p}$ ,  $\dot{\mathbf{p}} \parallel \dot{\mathbf{r}}$  akkor és csak akkor teljesül, ha  $\dot{\lambda} = 0$ , így az  $\mathbf{m}(\tau)$  egyértelműen meghatározott minden  $\tau \neq 0$  értékre.

Láthatóan fennáll

$$\pm |\mathbf{m} - \mathbf{p}| \frac{\dot{\mathbf{p}}}{|\dot{\mathbf{p}}|} + \mathbf{p} = \mathbf{m} = \pm |\mathbf{m} - \mathbf{r}| \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|} + \mathbf{r}, \quad (3.2)$$

vagyis  $\pm |\mathbf{m} - \mathbf{p}| |\dot{\mathbf{r}}| \dot{\mathbf{p}} + |\dot{\mathbf{r}}| \dot{\mathbf{p}} |\mathbf{p}| = \pm |\mathbf{m} - \mathbf{r}| |\dot{\mathbf{p}}| \dot{\mathbf{r}} + |\dot{\mathbf{p}}| \dot{\mathbf{r}} |\mathbf{r}|$ .

Mivel  $\dot{\mathbf{p}} = \dot{p} \mathbf{u}_\tau + p \mathbf{u}_\tau^\perp$ ,  $\dot{\mathbf{r}} = \dot{r} \mathbf{u}_\tau + r \mathbf{u}_\tau^\perp$  és  $\mathbf{u}_\tau \perp \mathbf{u}_\tau^\perp$  teljesül, azt kapjuk, hogy

$$|\mathbf{m} - \mathbf{p}| |\dot{\mathbf{r}}| p = |\mathbf{m} - \mathbf{r}| |\dot{\mathbf{p}}| r, \quad (3.3)$$

$$\pm |\mathbf{m} - \mathbf{p}| |\dot{\mathbf{r}}| \dot{p} + p |\dot{\mathbf{p}}| |\dot{\mathbf{r}}| = \pm |\mathbf{m} - \mathbf{r}| |\dot{\mathbf{p}}| \dot{r} + r |\dot{\mathbf{r}}| |\dot{\mathbf{p}}|. \quad (3.4)$$

A  $p$ -vel megszorozott (3.4) egyenlőségbe a (3.3) szerinti behelyettesítés azt adja, hogy  $\pm |\mathbf{m} - \mathbf{r}| |\dot{\mathbf{p}}| r \dot{p} + p^2 |\dot{\mathbf{p}}| |\dot{\mathbf{r}}| = \pm |\mathbf{m} - \mathbf{r}| |\dot{\mathbf{p}}| p \dot{r} + p r |\dot{\mathbf{r}}| |\dot{\mathbf{p}}|$ , így

$$\pm |\mathbf{m} - \mathbf{r}| = \frac{p |\dot{\mathbf{r}}| (r - p)}{r \dot{p} - p \dot{r}} = \frac{|\dot{\mathbf{r}}| p^2 (\lambda - 1)}{\lambda p \dot{p} - p (\dot{\lambda} p + \lambda \dot{p})} = |\dot{\mathbf{r}}| \frac{\lambda - 1}{-\dot{\lambda}}. \quad (3.5)$$

A l'Hôpital-szabály szerint ez a  $\lim_{\tau \rightarrow 0} |\mathbf{m}(\tau) - \mathbf{r}(\tau)| = 0$  egyenlőséghez vezet.

Másrészt felhasználva a (3.3) egyenlőséget, továbbá a (3.5) egyenlőség (3.2)-be való behelyettesítése azt eredményezi, hogy

$$\frac{\lambda(\lambda - 1)}{-\dot{\lambda}} \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{p} = \mathbf{m} = \frac{\lambda - 1}{-\dot{\lambda}} \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r}.$$

Tekintetbe véve, hogy  $\lambda \geq 1$ , ez utóbbi azt vonja maga után, hogy  $\mathbf{m}$  az  $\mathbf{Op}(\tau)$ , illetve  $\mathbf{Or}(\tau)$  egyenesnek ugyanazon az oldalán van, mint  $\mathbf{m}(0) = \mathbf{r}(0) = \mathbf{p}(0)$ .

Ezzel a bizonyítás teljes. ■

**3.3. Lemma.** ([Km, Lemma 2.4]) *Legyenek  $\mathbf{r}, \mathbf{p}: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  folytonosan differenciálható görbék, melyek deriváltja nem tűnik el.*

- (1) *Ha (i)  $\mathbf{r} \parallel \mathbf{p}$ , (ii)  $\dot{\mathbf{r}} \parallel \dot{\mathbf{p}}$ , és ezek a görbék metszik egymást, akkor  $\mathbf{r} = \mathbf{p}$ .*
- (2) *Ha  $\dot{\mathbf{r}}(0) \parallel \dot{\mathbf{p}}(0)$ , és  $\dot{\mathbf{r}}(1) \parallel \dot{\mathbf{p}}(1)$ , akkor létezik egy olyan  $t_0 \in (0, 1)$  érték, amelyre  $\dot{\mathbf{r}}(t_0) \parallel \dot{\mathbf{p}}(t_0)$ .*

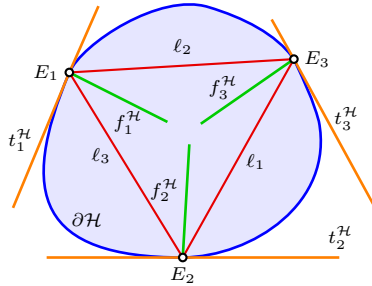
**Bizonyítás.** (1) Az (i) és (ii) feltételekből következik olyan differenciálható, nem eltűnő valós  $\lambda$ , illetve  $\mu$  függvények létezése, hogy  $\mathbf{r} = \lambda \mathbf{p}$ , illetve  $\dot{\mathbf{r}} = \mu \dot{\mathbf{p}}$  teljesül. Az első egyenlőség deriváltjába behelyettesítve a másodikat, azt kapjuk, hogy  $\mu \dot{\mathbf{p}} = \dot{\lambda} \mathbf{p} + \lambda \dot{\mathbf{p}}$ , ezért  $\mathbf{0} = \dot{\lambda} \mathbf{p} + (\lambda - \mu) \dot{\mathbf{p}}$ . Ha  $\mathbf{p} \not\parallel \dot{\mathbf{p}}$ , akkor ebből  $\dot{\lambda} = 0$  adódik, és ez maga után vonja az állítást. Ha  $\mathbf{p} \parallel \dot{\mathbf{p}}$ , akkor  $\mathbf{p}$  egy szakasz, így kapjuk az állítást.

- (2) Elegendő a középértéktételt alkalmazni az  $\arccos \frac{\langle \dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{p}} \rangle}{|\dot{\mathbf{r}}| |\dot{\mathbf{p}}|}$  függvényre. ■

### 3.2. Ellipszisek egy Segre-típusú jellemzése

Az ellipsziskarakterizációs tételünk a következő konfigurációra vonatkozik.

**3.4. Konfiguráció.** A  $\partial \mathcal{H}$  oválison lévő különböző  $E_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) pontokra jelölje  $\ell_i$  az  $E_j E_k$  egyenest ( $i, j, k$  különbözők),  $t_i^{\mathcal{H}}$  pedig a  $\mathcal{H}$  érintőjét az  $E_i$  ponton keresztül. Jelölje továbbá  $f_i^{\mathcal{H}}$  azt az egyenest, amelyet az  $\ell_j = E_k E_i$  és  $\ell_k = E_i E_j$  egyenesek ( $j, k = 1, 2, 3$ ) harmonikusan választanak el  $t_i^{\mathcal{H}}$ -től. ▲



**3.3. Ábra.** Konfiguráció ellipsziskarakterizációhoz

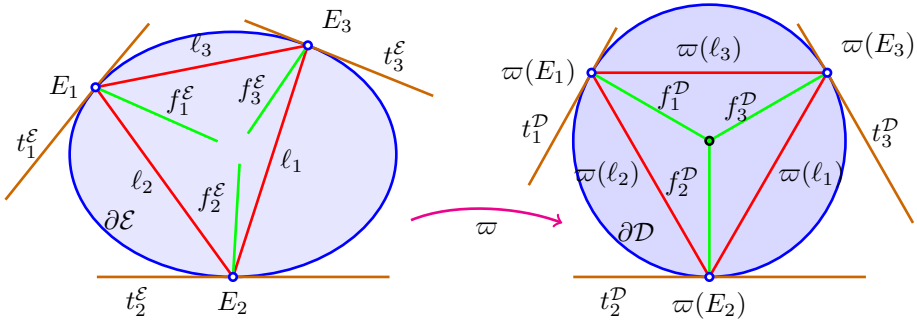
**3.5. Tétel.** [KKh, Theorem 4.2] *Tekintsünk egy 3.4. Konfigurációt.*

- (i) *Ha  $\mathcal{H}$  egy ellipszis, akkor az  $f_1^{\mathcal{H}}, f_2^{\mathcal{H}}, f_3^{\mathcal{H}}$  egyenesek konkurenssek.*
- (ii) *Ha az  $f_1^{\mathcal{H}}, f_2^{\mathcal{H}}, f_3^{\mathcal{H}}$  egy nyaláb egyenesei az  $E_1, E_2, E_3 \in \partial \mathcal{H}$  pontok tetszőleges választása esetén, akkor  $\mathcal{H}$  egy ellipszis.*

Érdeemes megjegyezni, hogy ezen tétel duálisa — a Ceva- és a Menelaosz-tétel révén — ekvivalens Segre egy eredményével [39, §3], amely bár véges testekre vonatkozik, de csak a test kommutativitását használja, amint arra [27, 6.15. Tétel] is rámutat.

**Bizonyítás.** Először is jegyezzük meg, hogy a projektivitások azon túl, hogy megtartják a kettősvizonyt, differenciálhatók is, így egy görbe érintőjét mindig a képgörbe érintőjébe viszik.

(i) Egy alkalmas affinitással egy  $\mathcal{E}$  ellipszis átvihető egy  $\mathcal{D}$  körlemezbe. Mint-hogy a projektív csoport háromszorosan tranzitíven hat minden kúpszeleten<sup>10</sup>, ezért feltehetjük, hogy  $E_1, E_2, E_3$  egy szabályos háromszöget határoz meg a  $\partial\mathcal{D}$  körön. Ezért az  $f_1^{\mathcal{D}}, f_2^{\mathcal{D}}, f_3^{\mathcal{D}}$  egyenesek nyilvánvalóan a  $\mathcal{D}$  középpontjában metszik egymást, ami bizonyítja a (i) állítást.



**3.4. Ábra.** A  $\varpi$  az  $\mathcal{E}$  ellipszistartományt a  $\mathcal{D}$  körlemezbe, az  $E_1E_2E_3\Delta$  háromszöget szabályos háromszögbe transzformálja.

(ii) A feltétel változatlan marad, amennyiben a konfigurációt egy projektív leképezéssel transzformáljuk, ezért a továbbiakban feltesszük, hogy a rögzített  $E_1, E_2$  és  $E_3$ , valamint az  $F := f_1^{\mathcal{H}} \cap f_2^{\mathcal{H}} \cap f_3^{\mathcal{H}}$  pont koordinátái a következők:  $E_1 = (0, 1)$ ,  $E_2 = (0, -1)$ ,  $E_3 = (1, 0)$  és  $F = (1/2, 0)$ .

Ekkor az  $f_1^{\mathcal{H}}, f_2^{\mathcal{H}}$  és  $f_3^{\mathcal{H}}$  egyenesek egyértelműen meghatározottak, és az  $(\ell_1, \ell_2; t_3^{\mathcal{H}}, f_3^{\mathcal{H}}) = (\ell_2, \ell_3; t_1^{\mathcal{H}}, f_1^{\mathcal{H}}) = (\ell_3, \ell_1; t_2^{\mathcal{H}}, f_2^{\mathcal{H}}) = -1$  feltételekből rendre az  $y = 1$ ,  $y = -1$  és  $x = 1$  egyenleteket kapjuk a  $t_1^{\mathcal{H}}, t_2^{\mathcal{H}}$  és  $t_3^{\mathcal{H}}$  érintő egyenesekre.

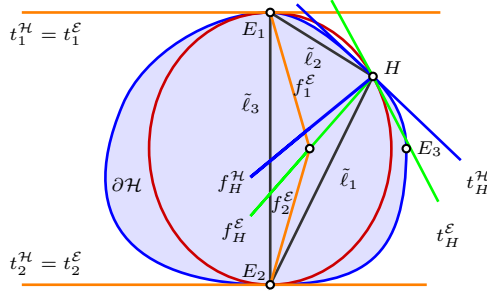
Válasszunk ezután egy általános  $H \in \partial\mathcal{H}$  pontot úgy, hogy különbözzön az  $E_1, E_2$  pontoktól. Legyen továbbá  $\partial\mathcal{E}_H$  az az egyértelműen meghatározott ellipszis, amely átmegy az  $E_1, E_2$  és  $H$  pontokon, valamint  $t_1^{\mathcal{E}} := t_1^{\mathcal{H}}$  és  $t_2^{\mathcal{E}} := t_2^{\mathcal{H}}$  az érintői.

További jelöléseket vezetünk be (lásd a 3.5. Ábrát):

- (1)  $t_H^{\mathcal{H}}$  a  $\mathcal{H}$  érintő egyenese a  $H$  pontban;
- (2)  $\bar{\ell}_i$  a  $HE_i$  egyenes ( $i = 1, 2$ );  $\bar{\ell}_3$  az  $E_1E_2$  egyenes;
- (3)  $f_i^{\mathcal{H}}$  az  $E_i$  ( $i = 1, 2$ ) ponton átmenő azon egyenes, amelyre  $-1 = (\bar{\ell}_j, \bar{\ell}_k; t_i^{\mathcal{H}}, f_i^{\mathcal{H}})$ , ahol  $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ ;
- (4)  $f_H^{\mathcal{H}}$  az az egyenes a  $H$  ponton keresztül, amelyre  $-1 = (\bar{\ell}_1, \bar{\ell}_2; t_H^{\mathcal{H}}, f_H^{\mathcal{H}})$ .

<sup>10</sup>Ez kúpszellet-involúciók alkalmazásával könnyen igazolható.

Analóg módon bevezetjük ugyanezeket az egyeneseket az  $\mathcal{E}_H$  ellipszis esetében is, a  $\mathcal{H}$  felső indexet minden esetben  $\mathcal{E}$ -re cserélve.



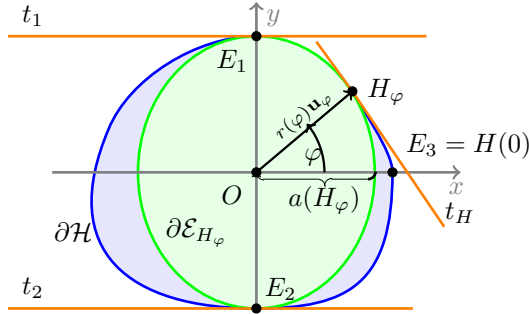
3.5. Ábra. Harmonikus sugárnyalábok bevezetése

Mivel két közös pontban az érintők megegyeznek:  $t_1^\mathcal{E} = t_1^\mathcal{H}$ , és  $t_2^\mathcal{E} = t_2^\mathcal{H}$ , ezért e pontokban a harmonikus negyedikek is megegyeznek:  $f_i^\mathcal{H} = f_i^\mathcal{E}$  ( $i = 1, 2$ ).

Minthogy az  $f_1^\mathcal{E}, f_2^\mathcal{E}$  és  $f_H^\mathcal{E}$  egyenesek a (i) szerint egy nyalábhoz tartoznak, továbbá az  $f_1^\mathcal{H}, f_2^\mathcal{H}$  és  $f_H^\mathcal{H}$  egyenesek is egy nyalábhoz tartoznak a (ii) feltétel szerint, arra következtethetünk, hogy az  $f_H^\mathcal{H}$  és  $f_H^\mathcal{E}$  egyenesek a  $H$  ponton kívül az  $f_1^\mathcal{H} \cap f_2^\mathcal{H} = f_1^\mathcal{E} \cap f_2^\mathcal{E}$  pontban is metszik egymást, amiért meg kell egyezniük.

Így azt kaptuk, hogy  $t_H^\mathcal{H} = t_H^\mathcal{E}$ . Ez ad értelmet a következő jelölések bevezetésének:  $t_i := t_i^\mathcal{E} = t_i^\mathcal{H}$  ( $i = 1, 2$ ) és  $t_H := t_H^\mathcal{E} = t_H^\mathcal{H}$ .

Legyen  $r: (-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}_+$  egy olyan leképezés, amelyre az  $r(\varphi)\mathbf{u}_\varphi$  helyvektor  $H_\varphi$  végpontja az  $\partial\mathcal{H}$ , görbén van minden  $\varphi \in (-\pi, \pi]$  esetén.



3.6. Ábra. A  $\partial\mathcal{H}$  paraméterezése

Ekkor a  $\partial\mathcal{H}$  érintővektora a  $\varphi$  paraméterű  $H_\varphi$  pontban  $\dot{r}(\varphi)\mathbf{u}_\varphi + r(\varphi)\mathbf{u}_\varphi^\perp$ , amely párhuzamos a  $H_\varphi$  ponton átmenő, egyértelmű  $\partial\mathcal{E}_{H_\varphi}$  ellipszis érintőjével.

Az  $\partial\mathcal{E}_{H_\varphi}$  ellipszis átmegy az  $E_1, E_2, H_\varphi$  pontokon, és az érintői az  $E_1$ , illetve  $E_2$  pontban  $t_1$ , illetve  $t_2$ , ezért egyenlete  $\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1$  valamely  $a = a(H_\varphi)$  értékre.

Ebbe az egyenletbe beírva a  $H_\varphi$  pont koordinátáit, azt kapjuk, hogy

$$1 = r^2(\varphi) \left( \frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \sin^2 \varphi \right), \quad \text{vagyis} \quad a^2 = \frac{r^2(\varphi) \cos^2 \varphi}{1 - r^2(\varphi) \sin^2 \varphi}. \quad (3.6)$$

Másrészt az ellipszis érintőjének meredeksége az  $(x, y)$  pontban  $dy/dx = -x/ya^2$ , és ennek értéke a  $H_\varphi$  pontban

$$\frac{\dot{r}(\varphi) \sin \varphi + r(\varphi) \cos \varphi}{\dot{r}(\varphi) \cos \varphi - r(\varphi) \sin \varphi} = \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{ya^2} = \frac{-\cos \varphi}{a^2 \sin \varphi}.$$

Eszerint

$$\frac{\dot{r}(\varphi)}{r(\varphi)} = \frac{(1 - a^2) \sin \varphi \cos \varphi}{a^2 \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi} = \frac{\left(1 - \frac{r^2(\varphi) \cos^2 \varphi}{1 - r^2(\varphi) \sin^2 \varphi}\right) \sin \varphi \cos \varphi}{\frac{r^2(\varphi) \cos^2 \varphi}{1 - r^2(\varphi) \sin^2 \varphi} \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi} = (1 - r^2(\varphi)) \operatorname{tg} \varphi.$$

Minden olyan  $\varphi$  helyen, ahol  $r(\varphi) \neq 1$ , ebből azt kapjuk, hogy

$$\frac{\dot{r}(\varphi)}{r(\varphi)(1 - r^2(\varphi))} = \operatorname{tg} \varphi.$$

Ebből integrálással adódik, hogy

$$\frac{-1}{2} \ln \frac{|1 - r^2(\varphi)|}{r^2(\varphi)} = -\ln |\cos \varphi| + c_0$$

valamely  $c_0$  állandóval, amiből

$$r(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1 \pm c_1 \cos^2 \varphi}}$$

következik valamely  $c_1$  konstansra. Ha ezt behelyettesítjük a (3.6) összefüggésbe, akkor  $a^2(1 \pm c_1) = 1$  adódik, és így  $a$  ugyanaz az állandó minden  $\partial \mathcal{E}_{H_\varphi}$  ellipszis esetére, amelyek ezért egyetlen rögzített  $\partial \mathcal{E}$  ellipszissel egyeznek meg. Ez azt jelenti, hogy  $\partial \mathcal{H}$  egy részhalmaza a  $(1 \pm c_1) \cdot x^2 + y^2 = 1$  egyenletű  $\partial \mathcal{E}$  ellipszisnek.

Vegyük azonban figyelembe, hogy  $\partial \mathcal{H}$  tartalmazza az  $E_3 = (1, 0)$  pontot is, következésképpen  $c_1 = 0$ , és így  $\partial \mathcal{H}$  az origó középpontú egységkör. Ez igazolja az (ii) állítást. ■

Megjegyezzük, hogy a [KKp] cikk tovább fűzi ezen eredménynek az egymásba írt háromszögek perspektivitására vonatkozó tartalmát.

### 3.3. Ceva típusú tétel oválisba írt háromszögekre

A 3.4. Konfiguráció bővítésén fogunk dolgozni.

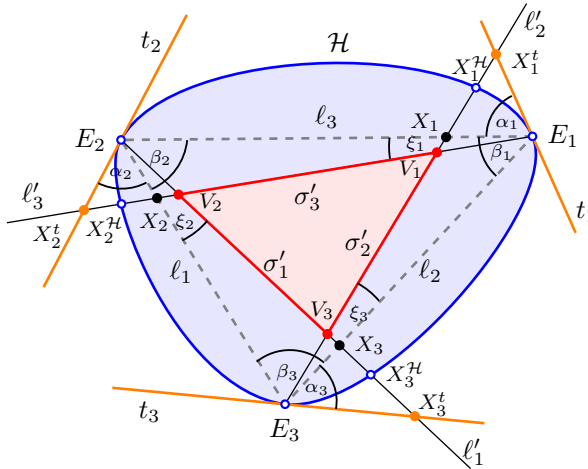
**3.6. Konfiguráció.** A 3.4. Konfigurációt az alábbiakkal bővítjük.

Legyen az  $X_i$  pont a  $\sigma_i = \overline{E_j E_k}$  nyílt szakaszon közel az  $E_i$  ponthoz minden  $i = 1, 2, 3$  esetén, ahol  $\{j, k\} = \{1, 2, 3\} \setminus \{i\}$ , és jelölje rendre az  $E_2 X_3$ ,  $E_3 X_1$  és  $E_1 X_2$  egyeneseket  $\ell'_1, \ell'_2$  és  $\ell'_3$ .

A  $V_1 = \ell'_2 \cap \ell'_3$ ,  $V_2 = \ell'_3 \cap \ell'_1$ , és  $V_3 = \ell'_1 \cap \ell'_2$  metszéspontok által alkotott nyílt szakaszok legyenek  $\sigma'_1 = \overline{V_2 V_3}$ ,  $\sigma'_2 = \overline{V_3 V_1}$  és  $\sigma'_3 = \overline{V_1 V_2}$ .

Vegyük továbbá az  $X_1^t = t_1 \cap \ell'_3$ ,  $X_2^t = t_2 \cap \ell'_1$ ,  $X_3^t = t_3 \cap \ell'_2$  és az  $X_1^{\mathcal{H}} = \partial\mathcal{H} \cap (\ell'_2 \setminus \{E_3\})$ ,  $X_2^{\mathcal{H}} = \partial\mathcal{H} \cap (\ell'_3 \setminus \{E_1\})$ ,  $X_3^{\mathcal{H}} = \partial\mathcal{H} \cap (\ell'_1 \setminus \{E_2\})$  metszéspontokat is az érintőkön, illetve a  $\partial\mathcal{H}$  görbén. Ezek a metszéspontok létrejönnek, amennyiben az  $X_i$  pontokat elegendően közel választjuk ki az  $E_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) pontokhoz.

Végezetül legyen az  $X_2 E_1 E_2 \triangleleft$ ,  $X_3 E_2 E_3 \triangleleft$ ,  $X_1 E_3 E_1 \triangleleft$  szögek nagysága rendre  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ , míg az  $X_1^t E_1 E_2 \triangleleft$ ,  $X_2^t E_2 E_3 \triangleleft$ ,  $X_3^t E_3 E_1 \triangleleft$  szögeké pedig rendre  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , és az  $E_3 E_1 E_2 \triangleleft$ ,  $E_1 E_2 E_3 \triangleleft$ ,  $E_2 E_3 E_1 \triangleleft$  szögeké rendre  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ . ▲



3.7. Ábra. Kibővített 3.4. Konfiguráció

**3.7. Tétel.** [KKh, Theorem 4.4] Tekintsünk egy 3.6-konfigurációt. Minden  $i = 1, 2, 3$  esetén jelölje  $B_i$  a  $\sigma_i$  szakasz euklideszi felezőpontját, és  $B_i^{\mathcal{H}}$  a nyílt  $\sigma'_i$  szakasz  $\mathcal{H}$ -felezőpontját. Az  $f_1, f_2, f_3$  egyenesek akkor és csak akkor tartoznak egy nyalábhoz, ha az  $X_1, X_2$  és  $X_3$  pontok választhatók úgy bármely  $\varepsilon, \delta > 0$  esetén, hogy

$$\begin{aligned} |B_1^{\mathcal{H}} - B_1| + |B_2^{\mathcal{H}} - B_2| + |B_3^{\mathcal{H}} - B_3| &< \varepsilon, \\ |X_1 - E_1| + |X_2 - E_2| + |X_3 - E_3| &< \delta. \end{aligned}$$

**Bizonyítás.** Mivel  $d_{\mathcal{H}}(V_j, B_i^{\mathcal{H}}) = d_{\mathcal{H}}(B_i^{\mathcal{H}}, V_k)$ , ahol  $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ , a (2.2) összefüggésből  $(E_j, X_k^{\mathcal{H}}; V_j, B_i^{\mathcal{H}}) = (E_j, X_k^{\mathcal{H}}; B_i^{\mathcal{H}}, V_k)$  következik, így

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{(E_j, X_k^{\mathcal{H}}; V_j, B_i^{\mathcal{H}})}{(E_j, X_k^{\mathcal{H}}; B_i^{\mathcal{H}}, V_k)} = \frac{(E_j, X_k^{\mathcal{H}}; V_j)/(E_j, X_k^{\mathcal{H}}; B_i^{\mathcal{H}})}{(E_j, X_k^{\mathcal{H}}; B_i^{\mathcal{H}})/(E_j, X_k^{\mathcal{H}}; V_k)} \\ &= \frac{(E_j, X_k^{\mathcal{H}}; V_k)(E_j, X_k^{\mathcal{H}}; V_j)}{(E_j, X_k^{\mathcal{H}}; B_i^{\mathcal{H}})^2} = \frac{|E_j - V_k||E_j - V_j|}{|X_k^{\mathcal{H}} - V_k||X_k^{\mathcal{H}} - V_j|} \frac{1}{(E_j, X_k^{\mathcal{H}}; B_i^{\mathcal{H}})^2}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Ettől kezdve feltételezzük, hogy  $\xi_i \rightarrow 0$  mindegyik  $i = 1, 2, 3$  értékre. Ekkor  $X_k^{\mathcal{H}} \rightarrow E_k$ , az  $E_j X_k^{\mathcal{H}}$  szakasz affin felezőpontja a  $B_i$  ponthoz konvergál, és ezért  $B_i^{\mathcal{H}} \rightarrow B_i$  akkor és csak akkor, ha  $(E_j, X_k^{\mathcal{H}}; B_i^{\mathcal{H}}) \rightarrow 1$ . Mivel igaz, hogy  $\frac{|E_j - V_k|}{|X_k^{\mathcal{H}} - V_j|} \rightarrow 1$ , a (3.7) összefüggés szerint teljesül a

$$(E_j, X_k^{\mathcal{H}}; B_i^{\mathcal{H}})^2 \sim \frac{|E_j - V_j|}{|X_k^{\mathcal{H}} - V_k|}$$

aszimptotikus egyenlőség, amely az előző következtetés szerint azt jelenti, hogy

$$B_i^{\mathcal{H}} \rightarrow B_i \text{ akkor és csak akkor, ha } |E_j - V_j| \sim |X_k^{\mathcal{H}} - V_k|. \quad (3.8)$$

A szinusztétel felhasználásával kapjuk a következő aszimptotikus egyenlőségeket:

$$\begin{aligned} &\frac{|X_k^{\mathcal{H}} - V_k|}{|E_j - V_j|} \\ &= \frac{|X_k^{\mathcal{H}} - E_j| - |V_k - E_j| - |X_k^{\mathcal{H}} - X_k^t|}{|E_i - E_j| \sin \xi_i / \sin(\beta_j - \xi_j + \xi_i)} \\ &= \frac{\frac{|E_j - E_k|}{\sin(\beta_k + \alpha_k + \xi_j)} \sin(\beta_k + \alpha_k) - \frac{|E_j - E_k|}{\sin(\beta_k - \xi_k + \xi_j)} \sin(\beta_k - \xi_k) - |X_k^{\mathcal{H}} - X_k^t|}{\frac{|E_i - E_j|}{\sin(\beta_j - \xi_j + \xi_i)} \sin \xi_i} \\ &= \frac{\sin(\beta_j - \xi_j + \xi_i)}{\sin \xi_i} \frac{|E_j - E_k|}{|E_i - E_j|} \times \\ &\quad \times \left( \frac{\sin(\beta_k + \alpha_k)}{\sin(\beta_k + \alpha_k + \xi_j)} - \frac{\sin(\beta_k - \xi_k)}{\sin(\beta_k - \xi_k + \xi_j)} - \frac{|X_k^{\mathcal{H}} - X_k^t|}{|E_j - E_k|} \right) \\ &= \frac{\sin(\beta_j - \xi_j + \xi_i)}{\sin \xi_i} \frac{|\sigma_i|}{|\sigma_k|} \times \\ &\quad \times \left( \frac{\operatorname{tg}(\beta_k + \alpha_k)}{\sin \xi_j + \cos \xi_j \operatorname{tg}(\beta_k + \alpha_k)} - \frac{\operatorname{tg}(\beta_k - \xi_k)}{\sin \xi_j + \cos \xi_j \operatorname{tg}(\beta_k - \xi_k)} - \frac{|X_k^{\mathcal{H}} - X_k^t|}{|E_j - E_k|} \right) \\ &= \frac{\sin(\beta_j - \xi_j + \xi_i)}{\sin \xi_i} \frac{|\sigma_i|}{|\sigma_k|} \times \\ &\quad \times \left( \frac{\sin \xi_j (\operatorname{tg}(\beta_k + \alpha_k) - \operatorname{tg}(\beta_k - \xi_k))}{(\sin \xi_j + \cos \xi_j \operatorname{tg}(\beta_k + \alpha_k))(\sin \xi_j + \cos \xi_j \operatorname{tg}(\beta_k - \xi_k))} - \frac{|X_k^{\mathcal{H}} - X_k^t|}{|E_j - E_k|} \right) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sin \xi_j}{\sin \xi_i} \frac{|\sigma_i|}{|\sigma_k|} \times \\
 &\quad \times \left( \frac{\sin(\beta_j - \xi_j + \xi_i)(\operatorname{tg}(\beta_k + \alpha_k) - \operatorname{tg}(\beta_k - \xi_k))}{(\sin \xi_j + \cos \xi_j \operatorname{tg}(\beta_k + \alpha_k))(\sin \xi_j + \cos \xi_j \operatorname{tg}(\beta_k - \xi_k))} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\sin(\beta_j - \xi_j + \xi_i)|X_k^{\mathcal{H}} - X_k^t|}{|E_j - E_k| \sin \xi_j} \right) \\
 &\sim \frac{\sin \xi_j}{\sin \xi_i} \frac{|\sigma_i|}{|\sigma_k|} \frac{\sin \beta_j (\operatorname{tg}(\beta_k + \alpha_k) - \operatorname{tg} \beta_k)}{\operatorname{tg}(\beta_k + \alpha_k) \operatorname{tg} \beta_k} = \frac{\sin \xi_j}{\sin \xi_i} \frac{|\sigma_i|}{|\sigma_k|} \frac{\sin \beta_j \sin \alpha_k}{\sin(\beta_k + \alpha_k) \sin \beta_k}.
 \end{aligned}$$

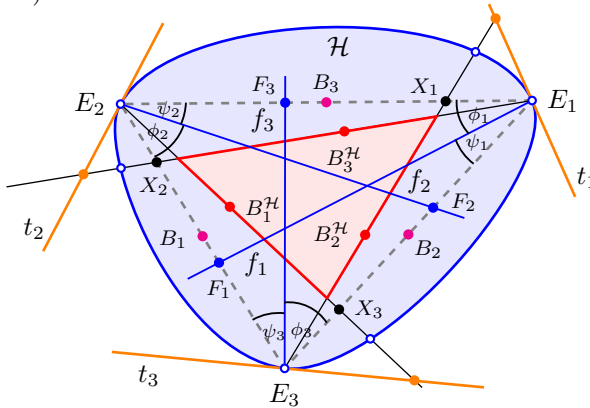
Ha ezt behelyettesítjük a (3.8) összefüggésbe, a következő feltételekhez jutunk:

$$\begin{aligned}
 B_1^{\mathcal{H}} \rightarrow B_i &\iff \frac{\sin \xi_1}{\sin \xi_2} \sim \frac{|\sigma_1|}{|\sigma_3|} \frac{\sin \beta_2 \sin \alpha_3}{\sin(\beta_3 + \alpha_3) \sin \beta_3}, \\
 B_2^{\mathcal{H}} \rightarrow B_2 &\iff \frac{\sin \xi_2}{\sin \xi_3} \sim \frac{|\sigma_2|}{|\sigma_1|} \frac{\sin \beta_3 \sin \alpha_1}{\sin(\beta_1 + \alpha_1) \sin \beta_1}, \\
 B_3^{\mathcal{H}} \rightarrow B_3 &\iff \frac{\sin \xi_3}{\sin \xi_1} \sim \frac{|\sigma_3|}{|\sigma_2|} \frac{\sin \beta_1 \sin \alpha_2}{\sin(\beta_2 + \alpha_2) \sin \beta_2}.
 \end{aligned}$$

Minthogy választhatunk úgy egyébként tetszőleges  $\xi_2 \rightarrow 0$ ,  $\xi_1 \rightarrow 0$  és  $\xi_3 \rightarrow 0$  szögeket, hogy ezen aszimptotikus egyenlőségek közül az első kettő teljesüljön, és ekkor a harmadik teljesülése pontosan a szorzatuktól szorzatuktól függ. Ilyen szögek  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  eszerint akkor és csak akkor választhatók, ha

$$\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 = \sin(\beta_1 + \alpha_1) \sin(\beta_2 + \alpha_2) \sin(\beta_3 + \alpha_3). \quad (3.9)$$

Jelölje az  $f_1 \ell_2 \angle, f_2 \ell_3 \angle, f_3 \ell_1 \angle$  szögek nagyságát rendre  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$ , és a  $f_1 \ell_3 \angle, f_2 \ell_1 \angle, f_3 \ell_2 \angle$  szögeket rendre  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$ . Nyilván  $\psi_i + \phi_i = \beta_i$  minden  $i = 1, 2, 3$  számra (lásd a 3.8. Ábrát).



**3.8. Ábra.** Konstrukció a felezőpontokkal

Vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned} -1 &= (\ell_3, \ell_2; t_1, f_1) = \frac{-\sin \alpha_1 / \sin(\beta_1 + \alpha_1)}{\sin \phi_1 / \sin \psi_1}, \\ -1 &= (\ell_1, \ell_3; t_2, f_2) = \frac{-\sin \alpha_2 / \sin(\beta_2 + \alpha_2)}{\sin \phi_2 / \sin \psi_2}, \\ -1 &= (\ell_2, \ell_1; t_3, f_3) = \frac{-\sin \alpha_3 / \sin(\beta_3 + \alpha_3)}{\sin \phi_3 / \sin \psi_3}, \end{aligned}$$

így a (3.9) egyenlőség ekvivalens az

$$1 = \frac{\sin \phi_1 \sin \phi_2 \sin \phi_3}{\sin \psi_1 \sin \psi_2 \sin \psi_3}$$

egyenlőséggel. Legyen  $F_i := f_i \cap \sigma_i$  minden  $i = 1, 2, 3$  számra. Ekkor a szinusztétel alapján kapjuk, hogy

$$(E_1, E_2; F_3) = \frac{|\sigma_2| \sin \phi_3}{|\sigma_1| \sin \psi_3}, \quad (E_2, E_3; F_1) = \frac{|\sigma_3| \sin \phi_1}{|\sigma_2| \sin \psi_1}, \quad \text{és} \quad (E_3, E_1; F_2) = \frac{|\sigma_1| \sin \phi_2}{|\sigma_3| \sin \psi_2}.$$

A Ceva-tétel szerint ezeknek az arányoknak a szorzata akkor és csak akkor egyenlő 1-gyel, ha az  $f_1, f_2$  és  $f_3$  egyenesek egy nyalábhoz tartoznak. Ez bizonyítja a tételt. ■

## 4. A hiperbolikus geometria karakterizációi a Hilbert-geometriák között

### 4.1. Karakterizáció Ceva- és Menelaosz-tulajdonsággal

Hilbert-geometriákban általában egyik tétel sem érvényes, sőt egy ezeknél sokkal gyengébb feltétel is karakterizálja a hiperbolikus geometriát.

**4.1. Tétel.** ([KKc, Theorem 3.1]) *Egy Hilbert-geometriában akkor és csak akkor létezik minden  $ABC\triangle$  trigonhoz olyan  $(C', A', B')$  Ceva-triplet, hogy az  $(\langle A, B; C'\rangle, \langle B, C; A'\rangle, \langle C, A; B'\rangle)$  számhármass Ceva típusú, ha ez a geometria hiperbolikus.*

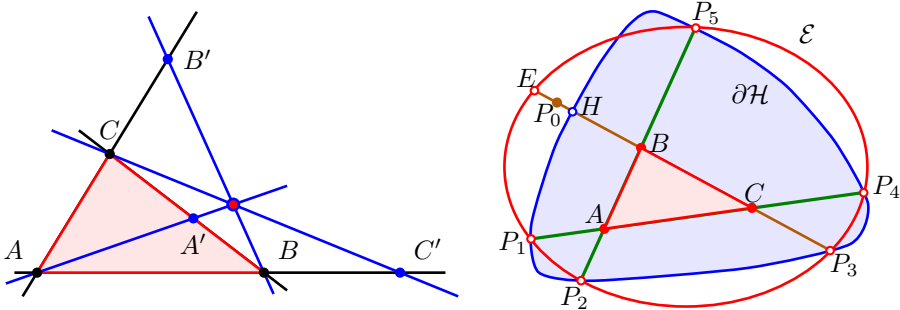
**Bizonyítás.** Vizsgáljuk a  $(\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}})$  Hilbert-geometriát! Ha  $\mathcal{H}$  egy ellipszoid, akkor a 2.15. Tétel szerint teljesül a Ceva tétel, ezért elég a fordított állítást igazolni.

Tekintettel a 2.7. Lemmára elegendő a síkban dolgoznunk.

Indirekt módon bizonyítunk. Tételezzük fel, hogy  $\partial\mathcal{H}$  nem ellipszis, de minden háromszögben igaz Ceva tétele.

Ekkor a 2.9. Lemma szerint van egy olyan  $\mathcal{E} \supseteq \mathcal{H}$  ellipszis, hogy a  $\partial\mathcal{E} \cap \partial\mathcal{H}$  halmaznak létezik legalább hat különböző  $P_i$  ( $i = 1, \dots, 6$ ) pontja, és  $\mathcal{E} \setminus \mathcal{H}$  tartalmaz belső pontot. Válasszunk ebből egy  $P_0 \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{H}$  pontot úgy, hogy ennek egy  $\mathcal{U}$  környezete is a  $\mathcal{E} \setminus \mathcal{H}$  halmaz része legyen.

A  $P_0P_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ) egyenesek nyilvánvalóan páronként különbözők, így közülük pontosan egy olyan van, amely úgy választja el a rá nem eső maradék négy pontot, hogy pontosan kettő-kettő esik a két különböző oldalára. Tegyük fel, hogy az indexek választásával ez a szeparáló egyenes  $P_0P_3$ , a  $P_1$  és  $P_2$  pontok vannak az egyik, a  $P_4$  és  $P_5$  pontok a másik oldalán; továbbá a  $\overline{P_1P_4}$  szakasz az  $\overline{P_2P_5}$  szakaszt egy  $A \in \mathcal{E} \cap \mathcal{H}$  pontban metszi. Ha  $A \in \overline{P_0P_3}$ , akkor mozgítsuk el a  $P_0$  pontot egy kicsit úgy, hogy maradjon az  $\mathcal{U}$  környezetben, de a  $P_0P_3$  egyenes szeparálja egymástól a  $\overline{P_1P_2}$  és  $\overline{P_4P_5}$  szakaszt. Így már  $A \notin \overline{P_0P_3}$  (lásd 4.1. Ábra jobb oldalán).



4.1. Ábra. Ceva-konfiguráció és egy háromszög az ellenpéldához

Legyen  $B = \overline{P_0P_3} \cap \overline{P_1P_4}$ , és  $C = \overline{P_0P_3} \cap \overline{P_2P_5}$ . Ekkor  $ABC\triangle$  egy trigon.

Azonnal észrevehetjük, hogy a nyílt  $\overline{P_1P_4}$  és  $\overline{P_2P_5}$  szakaszok egyszerre egyenesei a  $(\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}})$  Hilbert-geometriának, valamint az  $(\mathcal{E}, d_{\mathcal{E}})$  hiperbolikus geometriának, ugyanis végpontjaik az egyes geometriákat meghatározó mindkét konvex halmaznak a határán vannak (metszéspontok).

Továbbá a nyílt  $\overline{P_3E} = \mathcal{H} \cap \overline{P_3P_0}$  szakasz az  $(\mathcal{E}, d_{\mathcal{E}})$  hiperbolikus geometriának egyenesese, míg a  $\overline{P_3H} = \mathcal{H} \cap \overline{P_3P_0}$  nyílt szakasz a  $(\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}})$  Hilbert-geometriának egyenesese, és ráadásul az is teljesül, hogy  $\overline{P_3H} \subsetneq \overline{P_3E}$ .

A tétel feltétele szerint létezik az  $ABC\triangle$  háromszögnek egy olyan  $(C', A', B')$  Ceva-tripletje, amelyre

$$\text{az } (\langle A, B; C' \rangle_{\mathcal{H}}, \langle B, C; A' \rangle_{\mathcal{H}}, \langle C, A; B' \rangle_{\mathcal{H}}) \text{ számhármias Ceva típusú.} \quad (4.1)$$

A két geometria közös egyenesei esetében a hiperbolikus osztóviszonyok megegyeznek, míg a harmadik egyenespár esetében  $\langle B, C; A' \rangle_{\mathcal{H}} \neq \langle B, C; A' \rangle_{\mathcal{E}}$  a 3.1. Lemma következtében. Így a (4.1) összefüggés azt eredményezi, hogy

$$\text{a } (\langle A, B; C' \rangle_{\mathcal{E}}, \langle B, C; A' \rangle_{\mathcal{E}}, \langle C, A; B' \rangle_{\mathcal{E}}) \text{ számhármias nem Ceva típusú.}$$

Ez viszont ellentmondásban van a 2.15. Hiperbolikus Ceva-tétellel, amely ellentmondás mutatja a tétel igazságát. ■

**4.2. Tétel.** ([KKc, Theorem 3.2]) *Egy  $(\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}})$  Hilbert-geometriában akkor és csak akkor létezik minden  $ABC\triangle$  trigonhoz olyan  $(C', A', B')$  Menelaosz-triplet, amelyre az  $(\langle A, B; C' \rangle, \langle B, C; A' \rangle, \langle C, A; B' \rangle)$  számhármias Menelaosz típusú, ha  $(\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}})$  hiperbolikus.*

**Bizonyítás.** Ha  $\mathcal{H}$  egy ellipszoid, akkor a 2.14 tétel szerint Menelaosz tétele teljesül.

Figyelemmel a 2.7. Lemmára, ezúttal is elegendő a síkban dolgoznunk, és erre tekintettel a továbbiakban  $\mathcal{H}$  egy síkbeli nyílt, szigorúan konvex tartományt jelöl.

Feltéve, hogy minden tripletre teljesülnek a tétel feltételei, és hogy  $\mathcal{H}$  nem ellipszis, ellentmondáshoz fogunk jutni.

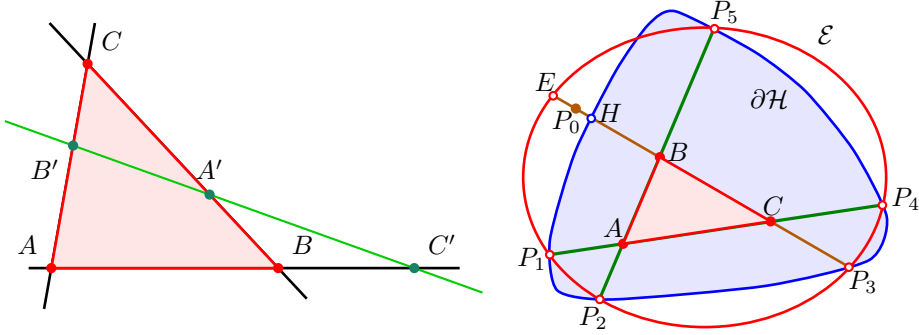
A 2.9. Lemma szerint van egy olyan  $\mathcal{E}$  ellipszis, amely esetén a  $\partial\mathcal{E} \cap \partial\mathcal{H}$  halmaznak létezik legalább hat különböző  $P_i$  ( $i = 0, 1, \dots, 5$ ) pontja, és  $\mathcal{E} \setminus \mathcal{H}$  tartalmaz egy belső pontot.

Válasszunk egy  $P_0 \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{H}$  pontot ebből a nem üres halmazból úgy, hogy e pontnak egy  $\mathcal{U}$  környezete is a  $\mathcal{E} \setminus \mathcal{H}$  halmaz része legyen.

Hasonlóan a Ceva-karakterizáció bizonyításához (lásd a 4.2. Ábrát), most is találhatunk olyan  $P_i$  ( $i = 0, 1, \dots, 6$ ) pontokat, hogy

- (i) a  $P_0P_i$  ( $i = 1, \dots, 5$ ) egyenesek páronként különbözők;

- (ii) a  $P_0P_3$  egyenes elválasztja a  $\overline{P_1P_2}$  és a  $\overline{P_4P_5}$  szakaszt;
- (iii) az  $A = \overline{P_1P_4} \cap \overline{P_2P_5}$  pont a  $\mathcal{E} \cap \mathcal{H}$  metszetben van;
- (iv) az  $A$  pont nincsen az  $\overline{P_0P_3}$  egyenesen.



**4.2. Ábra.** Menelaosz-konfiguráció és egy háromszög az ellenpéldához

Az elválasztások miatt létrejönnek a  $B = \overline{P_0P_3} \cap \overline{P_1P_4}$  és  $C = \overline{P_0P_3} \cap \overline{P_2P_5}$  metszéspontok, és e pontokkal az  $ABC\triangle$  egy trigon.

A konvex  $\mathcal{H}$  és  $\mathcal{E}$  tartományok határának metszéspontjait összekötő szakaszok egyenesei a  $\mathcal{H}$ -val adott Hilbert-geometriának és az  $\mathcal{E}$ -vel adott hiperbolikus geometriának is. Ilyen közös egyenesek a nyílt  $\overline{P_1P_4}$  és  $\overline{P_2P_5}$  szakaszok.

Megállapíthatjuk továbbá, hogy a nyílt  $\overline{P_3E} = \mathcal{H} \cap \overline{P_3P_0}$  szakasz az  $(\mathcal{E}, d_{\mathcal{E}})$  hiperbolikus geometriának egyenesese, míg a  $\mathcal{H} \cap \overline{P_3P_0} = \overline{P_3H} \subsetneq \overline{P_3E}$  nyílt szakasz a  $(\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}})$  Hilbert-geometriának egyenesese.

A tétel feltétele szerint létezik az  $ABC\triangle$  trigonnak egy olyan  $(C', A', B')$  Menelaosz-tripletje, amelyre az  $(\langle A, B; C' \rangle_{\mathcal{H}}, \langle B, C; A' \rangle_{\mathcal{H}}, \langle C, A; B' \rangle_{\mathcal{H}})$  számhármás Menelaosz típusú.

A két geometria közös egyenesesei esetében a hiperbolikus osztóviszonyok megegyeznek, míg a harmadik egyenespár esetében a 3.1. Lemma következtében  $\langle B, C; A' \rangle_{\mathcal{H}} \neq \langle B, C; A' \rangle_{\mathcal{E}}$ , így

$$\langle A, B; C' \rangle_{\mathcal{H}} \langle C, A; B' \rangle_{\mathcal{H}} \langle B, C; A' \rangle_{\mathcal{H}} \neq \langle A, B; C' \rangle_{\mathcal{E}} \langle C, A; B' \rangle_{\mathcal{E}} \langle B, C; A' \rangle_{\mathcal{E}} = -1.$$

Ez ellentmondás, hiszen a bal oldali számok Menelaosz típusúak. ■

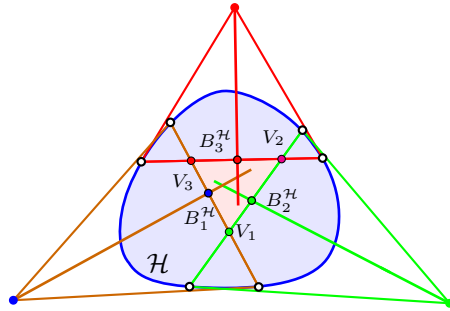
Érdeemes megjegyezni, hogy hasonló probléma a Minkowski-geometriákban fel sem vetődik, hiszen a pontok metrikus osztóviszonya megegyezik az affin osztóviszonnyal, és ezért a Ceva-tétel és a Menelaosz-tétel pontosan ugyanúgy teljesül, mint az affin geometriában.

## 4.2. Karakterizáció biszektorális centrummal

Az euklideszi geometriában érvényes tétel szerint az oldalfelező merőlegesek egy pont-ra, a körülírt kör középpontjára illeszkednek. Ugyanez a hiperbolikus geometriában csak annyiban igaz, hogy az oldalfelező merőlegesek nyalábot alkotnak (2.16. Tétel).

Felvetődik a kérdés, hogy a Hilbert-geometriában milyen feltétellel teljesül egy ilyen állítás, és ha teljesül, akkor mit mondhatunk a geometriáról? A választ a  $\mathcal{H}$ -merőlegességre adjuk meg.

**4.3. Tétel.** ([KKh, Theorem 5.1]) *Egy Hilbert-geometriában akkor és csak akkor létezik minden háromszögnek biszektorális centruma, ha a geometria hiperbolikus.*



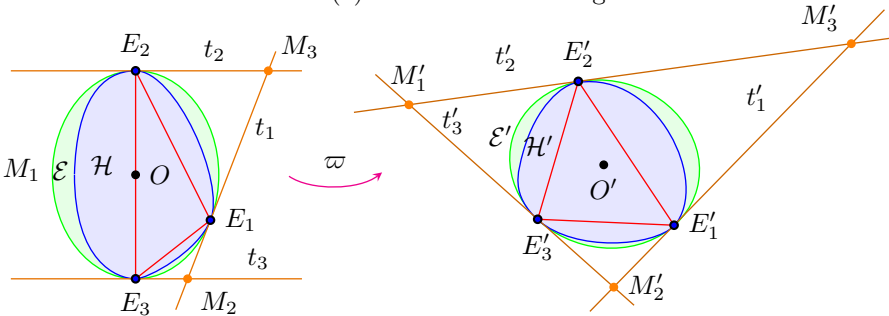
4.3. Ábra. Trigon oldalfelező  $\mathcal{H}$ -merőlegesei Hilbert-geometriában

**Bizonyítás.** Vizsgáljuk a  $(\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}})$  Hilbert-geometriát! Ha  $\mathcal{H}$  egy ellipszoid, akkor a 2.16. Tétel szerint teljesül a Ceva tétel, ezért elég a fordított állítást igazolni. A 2.7. Lemmára tekintettel elegendő a síkban dogoznunk.

Indirekt bizonyítást végezve tegyük fel, hogy  $\mathcal{H}$  nem ellipszis.

A 2.10. Lemma (1) része szerint van egy minimális területű  $\mathcal{E}$  ellipszis a  $\mathcal{H}$  köré írva, a  $\partial\mathcal{H} \cap \partial\mathcal{E}$ -ban lévő legalább három különböző  $E_1, E_2, E_3$  érintkezési ponttal azzal a tulajdonsággal, hogy a zárt  $E_1E_2E_3\Delta$  trigon tartalmazza az origót.

Tekintsük a 2.10. Lemma (4) részében leírt konfigurációt.

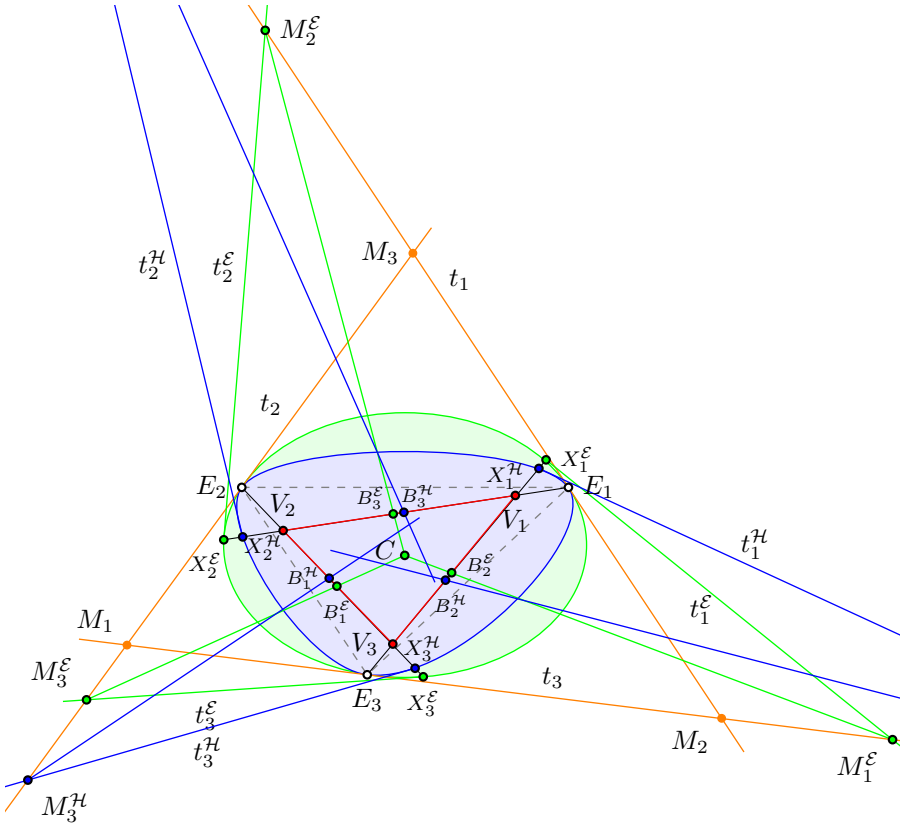


4.4. Ábra. A  $\varpi$  projektivitás hatása, ha az  $O \in \overline{E_2E_3}$

Válasszunk egy  $\mathcal{S}'$  síkot úgy, hogy az  $\ell = \mathcal{S} \cap \mathcal{S}'$  egyenes messe a  $t_2$  és  $t_3$  érintő egyeneseket, továbbá az  $\mathcal{S}'$  egyik  $\Sigma$  feltére tartalmazza az  $M_2, M_3$  pontokat és az  $\mathcal{E}$  ellipszist. Válasszunk most egy  $P$  pontot  $\mathcal{S}' \cup \mathcal{S}$ -en kívül a  $\Sigma$  feltérben. Legyen  $\varpi$  az  $\mathcal{S}$  síknak az  $\mathcal{S}'$  síkba való perspektív vetítése a  $P$  pontból. Ez a  $\varpi$  vetítés a 2.10. Lemma (4) részében leírt  $\mathcal{S}$  síkbeli konfigurációt az  $\mathcal{S}'$  síknak egy a 2.10. Lemma (3) részében leírt konfigurációjába viszi (lásd a 4.4. Ábrát).

Eszerint, mivel a tétel állítása projektív jellegű, feltételezhető, hogy olyan konfigurációval állunk szemben, amelyet a 2.10. Lemma (3) része ír le. Bővítsük ezt a konfigurációt egy 3.6. Konfigurációra (lásd a 4.5. Ábrát) úgy, hogy

$$\varepsilon = |X_1 - E_1| + |X_2 - E_2| + |X_3 - E_3|. \quad (4.2)$$



4.5. Ábra. Biszektoralis középpontok konstrukciója  $\mathcal{H}$  és  $\mathcal{E}$  esetén

A 2.10. Lemma (5) része szerint az  $M_i B_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) egyenesek találkoznak az  $\mathcal{E}$  ellipszis  $O$  centrumában, amely az  $E_1 E_2 E_3 \triangle$  belsejében van, és ezért az  $\mathcal{E}$

ellipszis  $O$  középpontja a  $V_1V_2V_3\Delta$  trigonnak is a belsejében van, amennyiben az  $\varepsilon$  érték elegendően kicsi, amit mostantól fogva fel is teszünk.

A 3.1. Lemmának megfelelően az  $\ell'_1, \ell'_2, \ell'_3$  egyenesek rendre az itt megadott sorrendben tartalmazzák az alábbi pontokat (lásd a 4.5. Ábrát):

$$\begin{aligned} E_2 &\prec V_2 \prec B_1^{\mathcal{H}} \prec B_1^{\mathcal{E}} \prec V_3 \prec X_3 \prec X_3^{\mathcal{H}} \prec X_3^{\mathcal{E}}, \\ E_3 &\prec V_3 \prec B_2^{\mathcal{H}} \prec B_2^{\mathcal{E}} \prec V_1 \prec X_1 \prec X_1^{\mathcal{H}} \prec X_1^{\mathcal{E}}, \\ E_1 &\prec V_1 \prec B_3^{\mathcal{H}} \prec B_3^{\mathcal{E}} \prec V_2 \prec X_2 \prec X_2^{\mathcal{H}} \prec X_2^{\mathcal{E}}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Vegyük a  $\mathcal{H}$ , illetve  $\mathcal{E}$  tartományok  $t_i^{\mathcal{H}}$ , illetve  $t_i^{\mathcal{E}}$  érintő egyeneseit azok  $X_i^{\mathcal{E}}$ , illetve  $X_i^{\mathcal{H}}$  pontjainál minden  $i \in \{1, 2, 3\}$  értékre.

Legyen  $M_1^{\mathcal{H}} = t_3^{\mathcal{H}} \cap t_2$ ,  $M_2^{\mathcal{H}} = t_1^{\mathcal{H}} \cap t_3$ , és  $M_3^{\mathcal{H}} = t_2^{\mathcal{H}} \cap t_1$ , továbbá  $M_1^{\mathcal{E}} = t_3^{\mathcal{E}} \cap t_2$ ,  $M_2^{\mathcal{E}} = t_1^{\mathcal{E}} \cap t_3$ , és  $M_3^{\mathcal{E}} = t_2^{\mathcal{E}} \cap t_1$  (lásd a 4.5. Ábrát).

A 3.2. Lemma szerint a  $t_1, t_2, t_3$  érintők rendre az itt megadott sorrendben tartalmazzák az

$$\begin{aligned} M_2 &\prec E_1 \prec M_3 \prec M_3^{\mathcal{E}} \prec M_3^{\mathcal{H}}, & M_3 &\prec E_2 \prec M_1 \prec M_1^{\mathcal{E}} \prec M_1^{\mathcal{H}}, \\ M_1 &\prec E_3 \prec M_2 \prec M_2^{\mathcal{E}} \prec M_2^{\mathcal{H}} \end{aligned} \quad (4.4)$$

pontokat (lásd a 4.5. Ábrát).

Figyelembe véve, hogy a  $V_1V_2V_3\Delta$  trigon az  $\text{Int } \mathcal{H} \cap \text{Int } \mathcal{E}$  metszetben van, ha  $\varepsilon \rightarrow 0$ , akkor e háromszög tart az  $E_1E_2E_3\Delta$  trigonhoz euklideszi értelemben, így a 3.2. Lemma azt eredményezi, hogy

$$M_i^{\mathcal{H}} \rightarrow M_i, \text{ és } M_i^{\mathcal{E}} \rightarrow M_i \quad \text{minden } i \in \{1, 2, 3\} \text{ értékre.} \quad (4.5)$$

Másrészt a 3.5. és a 3.7. Tétel azt eredményezi, hogy

$$B_i^{\mathcal{E}} \rightarrow B_i, \text{ és } B_i^{\mathcal{H}} \rightarrow B_i \quad \text{minden } i \in \{1, 2, 3\} \text{ értékre,} \quad (4.6)$$

amint  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

A (4.5) és (4.6) megállapítások szerint a  $V_1V_2V_3\Delta$  trigon  $C$  hiperbolikus biszektorális centruma konvergál az  $\mathcal{E}$  ellipszis  $O$  centrumához, amint  $\varepsilon \rightarrow 0$ , és ezért a  $C$  biszektorális centrum a  $V_1V_2V_3\Delta$  trigon belsejében van, ha  $\varepsilon$  elegendően kicsiny.

Tegyük fel, hogy a  $V_1V_2V_3\Delta$  trigonnak szintén van egy  $\mathcal{H}$ -biszektorális középpontja (a  $\mathcal{H}$  geometriában), legyen ez  $C'$ . A (4.5) és a (4.6) összefüggések szerint a  $\mathcal{H}$ -biszektorális  $C'$  középpont a  $\mathcal{E}$  ellipszis  $O$  középpontjához is konvergál, amint  $\varepsilon \rightarrow 0$ , ezért  $V_1V_2V_3\Delta$  trigon belsejében van, ha  $\varepsilon$  elegendően kicsiny.

Tekintettel a (4.3) és (4.4) összefüggésekre, a  $M_i^{\mathcal{H}}B_i^{\mathcal{H}}$  és  $M_i^{\mathcal{E}}B_i^{\mathcal{E}}$  szakaszoknak minden  $i \in \{1, 2, 3\}$  értékre van egy közös pontja, amely az  $\ell$  egyenesnek ugyanazon az oldalán van, mint az  $M_i$ .



Ebből következik, hogy  $C'$  az  $M_i^\mathcal{E} B_i^\mathcal{E}$  egyeneseknek a bal oldali nyílt félsíkjában van (ahol az egyeneseket  $M_i^\mathcal{E}$ -től  $B_i^\mathcal{E}$  felé irányítjuk) minden  $i \in \{1, 2, 3\}$  értékre.

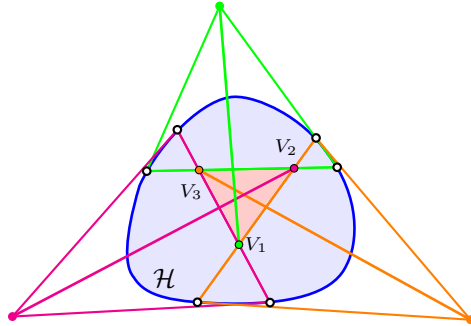
Ez ellentmond annak a ténynek, hogy e három félsík metszete üres, ezért a  $C'$  létezésére vonatkozó feltevés nem tartható, és így a tételt bizonyítottuk. ■

### 4.3. Karakterizáció ortocentrummal

Az euklideszi geometriában érvényes tétel szerint a háromszögek magasságvonalai egy pontra, a magasságpontra illeszkednek. A hiperbolikus geometriában ezzel szemben csak annyit állíthatunk, hogy a magasságvonalak nyalábot alkotnak (2.17. Tétel).

Itt is felvetődik a kérdés, hogy ez milyen Hilbert-geometriákban teljesül? A választ most is a  $\mathcal{H}$ -merőlegességre adjuk meg.

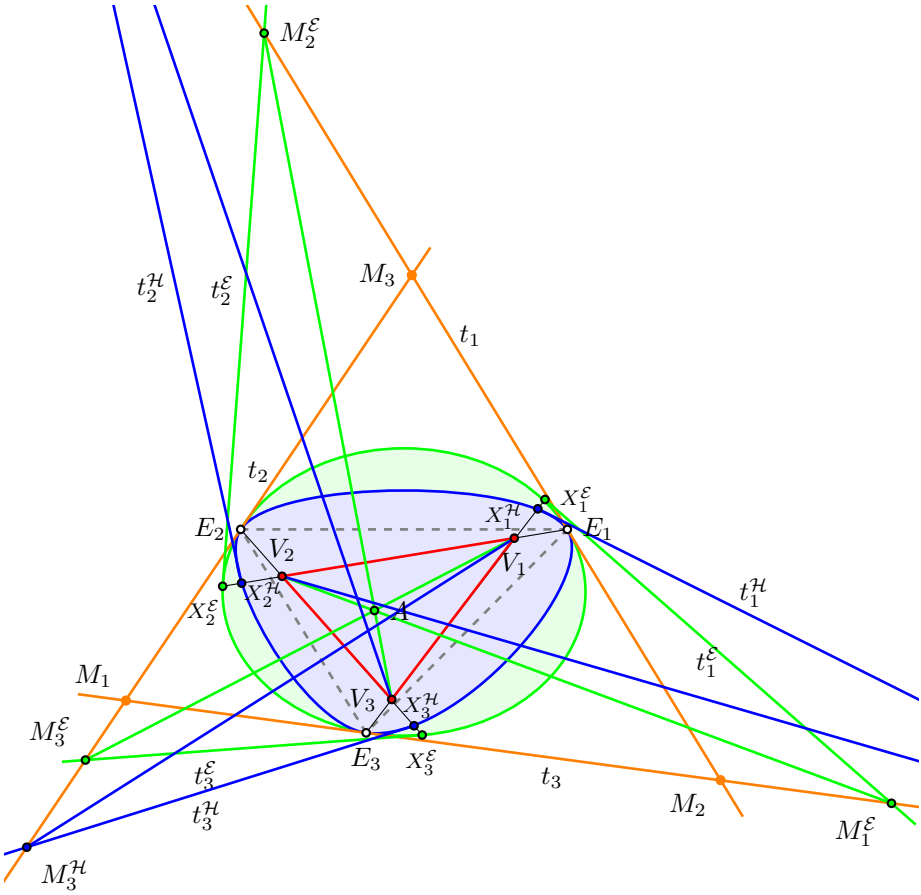
**4.4. Tétel.** ([KKh, Theorem 5.2]) *Ha egy Hilbert-geometriában minden trigonnak van ortocentruma, akkor az hiperbolikus geometria.*



**4.6. Ábra.** Trigon magasságvonalainak egyenesei Hilbert-geometriában

**Bizonyítás.** Mivel trigonok oldalaira merőleges egyenesek illeszkedéséről van szó most is, akár az oldalfelező merőlegesek esetében, a 4.3. Tétel bizonyításának lépéseit követhetjük, csak ezúttal a felezőpontokra vonatkozó megfontolások nélkül.

A bizonyítást most is elegendő a síkban elvégezni, ahol most is tekintjük a  $(\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}})$  tartományát köré írt minimális  $\mathcal{E}$  ellipszist. Ezután vesszük az  $E_i$  érintési pontok ( $i = 1, 2, 3$ ) háromszögét, oldalain a csúcsokhoz közeli  $X_1, X_2, X_3$  pontokkal, majd az általuk meghatározott  $V_1 V_2 V_3 \triangle$  trigont az érintési pontok háromszögének belsejében. Továbbá tekintjük e háromszög oldalegyenesének a  $\partial \mathcal{H}$  és  $\partial \mathcal{E}$  határgörbékkel vett  $X_i^{\mathcal{H}}$ , illetve  $X_i^{\mathcal{E}}$  metszéspontjaiban vett  $t_i^{\mathcal{H}}$ , illetve  $t_i^{\mathcal{E}}$  érintőknek a közös érintőkkel vett  $M_i^{\mathcal{H}}$ , illetve  $M_i^{\mathcal{E}}$  metszéspontjait (lásd a 4.7. Ábrát) minden  $i = 1, 2, 3$  értékre.



**4.7. Ábra.** Háromszög, melynek magasságai belső pontokban találkoznak

A (4.5) összefüggésnek megfelelően a  $V_1V_2V_3\triangle$  trigon  $V_iM_i^\varepsilon$  ( $i = 1, 2, 3$ ) hiperbolikus magasságvonalainak  $A$  metszéspontja konvergál az  $\mathcal{E}$  ellipszis  $O$  középpontjához, amint  $\varepsilon \rightarrow 0$ , ahol  $\varepsilon$  ezúttal is a (4.2) által adott. Így az  $A$  pont az  $V_1V_2V_3\triangle$  trigon belsejében van, ha  $\varepsilon$  elegendően kicsiny.

Tegyük fel, hogy a  $V_1V_2V_3\triangle$  trigon  $V_iM_i^{\mathcal{H}}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) magasságvonalai is metszik egymást egy közös  $A'$  pontban.

A (4.5) szerint az  $A'$  pont szintén konvergál az  $\mathcal{E}$  ellipszis  $O$  centrumához. Így ez a pont a  $V_1V_2V_3\triangle$  trigon belsejében van, ha  $\varepsilon$  elegendően kicsiny.

A (4.4) összefüggéseket figyelembe véve  $V_i = V_iM_i^{\mathcal{H}} \cap V_iM_i^\varepsilon$  minden  $i \in \{1, 2, 3\}$  értékre, és ezért  $A'$  a bal nyílt félsíkjaiban van mindegyik irányított  $V_iM_i^\varepsilon$  egyenesnek, amelyeken  $V_i \prec M_i^\varepsilon$  minden  $i \in \{1, 2, 3\}$  értékre.

Ez viszont ellentmond annak a ténynek, hogy ezeknek a félsíkoknak a metszete üres. Ezért az  $A'$  létezésére vonatkozó feltevést el kell vetnünk. Vagyis amennyiben  $\mathcal{H}$  nem egyezik meg az  $\mathcal{E}$  ellipszissel, akkor van olyan trigon, amelynek nincsen ortocentruma, ellentétben a tétel feltételével. Így a geometria valóban hiperbolikus. ■

Jegyezzük meg, hogy a  $\mathcal{H}$ -merőlegesség helyett a Birkhoff-merőlegességet (2.20. Definíció) használva nem jutottunk eredményre, és az irodalomban sem találunk akár csak hasonló eredményt sem.

## 5. Az euklideszi geometria karakterizációi a Minkowski-geometriák között

A Hilbert-geometriáknál már megvizsgált Ceva- és Menelaosz-tulajdonság minden Minkowski-geometriában teljesül, hiszen a metrikus és affin osztóviszony megegyezik. Ellenben háromszögekkel kapcsolatos olyan nevezetes konfigurációk, illetve pontok, amelyek a merőlegességgel kapcsolatosak, már karakterisztikusak.

Mind a biszektorális centrum, mind az ortocentrum esetében bebizonyítjuk, hogy a korábban bevezetett bal-, illetve jobb-merőlegesség esetén létezésük karakterizálja az euklideszi geometriát a Minkowski-geometriák között. Míg Hilbert-esetben a Birkhoff-merőlegességre nem tudtunk karakterizálást igazolni, addig Minkowski-geometriában a 2.12. Definíció szerinti bal-merőlegesség, illetve annak inverzeként bevezetett jobb-merőlegesség fogalmát alkalmazva is bebizonyíthatjuk a karakterizációt [Km].

Az indukátrix  $\mathcal{I}$  határgörbéjéről feltesszük a kétszeres differenciálhatóságot.

### 5.1. Karakterizáció jobb-biszektorális és jobb-ortocentrummal

Először a jobb-merőleges oldalfelező egyenesek, majd a jobb-merőleges magasságvonalak egyeneseinek konkurenciáját vizsgáljuk meg.

A biszektorális centrum kérdésével kezdjük. A 2.12. Definíció után tett megállapításunk szerint egy trigon három (akár bal-, akár jobb-) oldalfelező merőlegese közül bármely kettő metszi egymást. A vizsgálatnak tehát a páronkénti metszéspontok megegyezésére kell vonatkoznia.

**5.1. Tétel.** ([Km, Theorem 3.1]) *Egy Minkowski-geometriában a jobb-merőleges oldalfelezők akkor és csak akkor konkurenszek minden háromszögre, ha a geometria euklideszi.*

**Bizonyítás.** *Elegendőség.* Euklideszi geometriában a jobb-merőleges oldalfelező egyenesek a közös síkban oldalfelező merőlegesek, ezért egy ponton mennek át.

*Szükségesség.* Mivel a későbbiekben hivatkozni fogunk ennek a bizonyításnak egyes részleteire, a fő lépéseket megszámozzuk.

(A1. LÉPÉS) A 2.7. Lemmára tekintettel elegendő azt megmutatni, hogy az indukátrix határának minden, az origón átmenő kétdimenziós síkkal való metszete egy ellipszis.

Tekintsünk egy  $O$  origón átmenő síkot, és legyen  $\mathcal{I}'$  ennek metszete az indukátrix határával. Tekintsük továbbá az  $\mathcal{I}'$  minimális területű körülírt  $\mathcal{E}$  John–Löwner-ellipszisének. Indirekt bizonyítást végzünk. Feltéve, hogy  $\mathcal{I}' \neq \mathcal{E}$ , ellentmondásra akarunk jutni.

Tekintsük a síknak egy olyan affinitását, amely az  $O$  origót fixen hagyja, és az  $\mathcal{E}$  ellipszist egy  $O$  középpontú  $\mathcal{C}$  körbe viszi, a  $\mathcal{I}'$ -t pedig egy  $\mathcal{I}$  görbébe, amely szimmetrikus az origóra, és a körbe van beleírva. Minthogy minden affinitás megtartja a pontok és az egyenesek illeszkedését, megtartja az egyenesek jobb-merőlegességét is. Erre tekintettel elegendő egy középpontosan szimmetrikus  $\mathcal{I}$  görbével és körülírt,  $\mathcal{I}$ -vel koncentrikus  $\mathcal{C}$  körével foglalkoznunk.

Vegyük észre, hogy ezen feltételek mellett a kör egy érintője akkor és csak akkor jobb-merőleges a kör egy másik érintőjére, ha euklideszi értelemben merőlegesek, ezért a továbbiakban elhagyjuk az *euklideszi* jelzőt.

(A2. LÉPÉS) A 2.10. Lemmának megfelelően létezik három különböző pont az  $\mathcal{I} \cap \mathcal{C}$  halmazban. A középpontos szimmetriára tekintettel a két görbe metszéspontjai az  $O$ -ra szimmetrikus párokban fordulnak elő, ezért van legalább négy közös pontunk. Két esetet kell vizsgálnunk aszerint, hogy az  $\mathcal{I} \cap \mathcal{C}$  halmaz pontjainak száma (1) 5-nél nem kevesebb, illetve (2) négy.

1. Eset Az  $\mathcal{I}$  és az  $\mathcal{E}$  görbéknek van legalább öt közös pontja.

(A3. LÉPÉS) A szimmetrikus görbék közös pontjai átellenes párokat alkotnak, ezért kiválaszthatunk  $E_i$  ( $i = 1, \dots, 5$ ) pontokat úgy, hogy  $(E_1, E_2)$  és  $(E_3, E_4)$  átellenes pontok legyenek. A közös érintőket ezekben a pontok jelölje rendre  $t_i$ .

Ekkor a  $t_3$  és  $t_5$  érintő metszi a  $t_1$  és  $t_2$  érintőket, továbbá vagy  $t_3$ , vagy  $t_5$  nem merőleges rájuk. Ha szükséges, cseréljük fel az indexeket úgy, hogy  $t_3$  és  $t_2$  ne legyen merőleges, így feltételezhetjük, hogy van négy  $E_1 \prec E_4 \prec E_2 \prec E_3$  pontunk sorban a  $\mathcal{C}$  körüljárása szerint úgy, hogy  $t_1 \parallel t_2$ , és  $t_3$  nem jobb-merőleges a  $t_2$ -re.

(A4. LÉPÉS) A két különböző görbe középpontos szimmetriájának következményeképpen a  $\mathcal{C}(E_1 E_4) = \mathcal{I}(E_1 E_4)$  és a  $\mathcal{C}(E_4 E_2) = \mathcal{I}(E_4 E_2)$  egyenlőség nem állhatnak fenn egyidejűleg, különben  $\mathcal{C} = \mathcal{I}$  következne. Így az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy  $\mathcal{C}(E_1 E_4) \neq \mathcal{I}(E_1 E_4)$ .<sup>11</sup>

(A5. LÉPÉS) A  $t_2$  és  $t_3$  érintők nem párhuzamosok, mert  $E_2$  és  $E_3$  nem átellenes pontok, az  $\mathcal{C}(E_1 E_4)$  nyílt ív minden érintője pedig metszi a  $t_2$  és  $t_3$  érintőt is. A 3.3. Lemma az  $\mathcal{C}(E_1 E_4)$  és  $\mathcal{I}(E_1 E_4)$  ívre azt adja, hogy lennie kell olyan  $P_1^{\mathcal{C}} \in \mathcal{C}(E_1 E_4)$  és  $P_1^{\mathcal{I}} \in \mathcal{I}(E_1 E_4)$  pontoknak, amelyekre

(i)  $OP_1^{\mathcal{C}} \nparallel OP_1^{\mathcal{I}}$ ;

(ii) ezekben a pontokban a  $t_1^{\mathcal{C}}$ , illetve  $t_1^{\mathcal{I}}$  érintők párhuzamosak.

Továbbá az is igaz, hogy

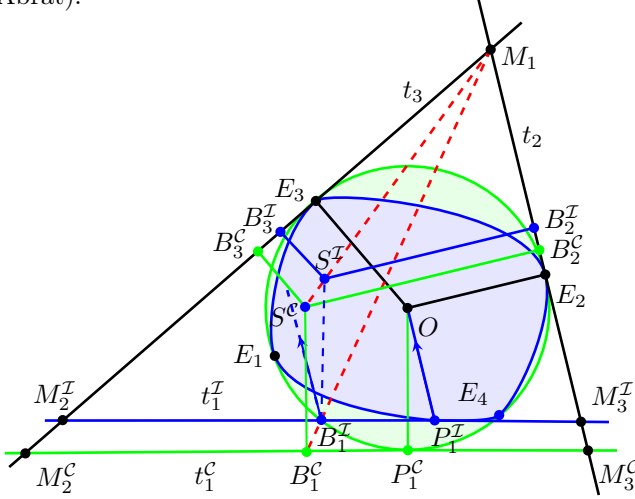
(iii)  $t_1^{\mathcal{C}}$  és  $t_1^{\mathcal{I}}$  metszi mind a  $t_2$ , mind a  $t_3$  érintőt; és

(iv)  $OP_1^{\mathcal{C}}$ , illetve  $OP_1^{\mathcal{I}}$  nem merőleges a  $t_3$ ,  $t_2$  egyikére sem,

ha ugyanis nem így lenne, akkor egy  $P_1^{\mathcal{C}}$ -hez elég közeli pont választható  $P_1^{\mathcal{C}}$  helyett.

<sup>11</sup>Ha  $\mathcal{C}(E_1 E_4) \neq \mathcal{I}(E_1 E_4)$ , akkor felcserélhetjük az 1 és 2 indexeket anélkül, hogy megszüntetnénk a  $t_3$  és  $t_2$  nem merőleges viszonyát.

(A6. LÉPÉS) Legyen  $M_1 = t_2 \cap t_3$ ,  $M_2^C = t_1^C \cap t_3$ ,  $M_3^C = t_1^C \cap t_2$ ,  $M_2^I = t_1^I \cap t_3$ ,  $M_3^I = t_1^I \cap t_2$ , és jelölje az  $M_1 M_2^I M_3^I \triangle$  trigon oldalainak felezőpontjait  $B_3^I, B_1^I, B_2^I$ ; az  $M_1 M_2^C M_3^C \triangle$  trigon oldalainak felezőpontjait  $B_3^C, B_1^C$ , illetve  $B_2^C$  (lásd az 5.1. Ábrát).



5.1. Ábra. Jobb-merőleges oldalfelezők, ha  $S^C \neq P_1^C$

Az  $M_1 M_2^C M_3^C \triangle$  trigon euklideszi oldalfelező merőlegeseinek van egy közös  $S^C$  pontja. Ez különbözik  $B_i^C$ -től, minthogy a trigon nem derékszögű háromszög. Továbbá az is igaz, hogy  $B_i^C S^C \parallel E_i O$  az  $i = 2, 3$  indexekre, és  $B_1^C S^C \parallel P_1^C O$ .

A feltevés szerint az  $M_1 M_2^I M_3^I \triangle$  trigon  $B_3^I$ , illetve  $B_2^I$  felezőpontokon átmenő jobb-merőleges oldalfelezőinek metszéspontja  $S^I$ , az  $M_1 M_2^I M_3^I \triangle$  trigon jobb-biszektorális centruma. Az  $M_1 M_2^C M_3^C \triangle$  és  $M_1 M_2^I M_3^I \triangle$  háromszögek középpontosan hasonlóak az  $M_1$  pontra vonatkozóan, mivel  $t_1^C \parallel t_1^I$ . Ez a  $\chi$  hasonlóság a  $B_i^C$  pontot a  $B_i^I$  pontba viszi ( $i = 1, 2, 3$ ), ezért a  $B_i^C S^C$  egyeneseket a velük párhuzamos, a  $B_i^I$  pontokon átmenő egyenesekbe viszi ( $i = 2, 3$ ). Így  $\chi$  az  $S^C$  metszéspontot az  $S^I$  metszéspontba viszi, ahol  $S^C$  különbözik  $B_i^I$  pontoktól. Következésképpen azt kaptuk, hogy  $P_1^C O \parallel B_1^C S^C \parallel B_1^I S^I$ . A  $B_1^I$  felezőponton átmenő jobb-merőleges felező egyenesnek át kell mennie az  $S^I$  ponton, amely metszéspontja a másik két jobb-merőleges oldalfelező egyenesnek, és így egyrészt párhuzamos a  $P_1^C O$  egyenessel, másrészt párhuzamos a  $P_1^I O$  egyenessel a jobb-merőlegesség definíciója szerint. Ez az ellentmondás igazolja a Tételt ebben az esetben.

2. Eset. Az  $\mathcal{I}$  és  $\mathcal{C}$  görbéknek pontosan négy közös pontja van.

(A7. LÉPÉS) Úgy számozzuk meg a közös pontokat, hogy a  $\mathcal{C}$  egy körüljárásában a sorrendjük  $E_1 \prec E_4 \prec E_2 \prec E_3$  legyen.

Ha  $OE_2$  nem merőleges  $OE_3$ -ra, akkor az  $e$  pontbeli érintőkre  $t_1 \parallel t_2$ , és  $t_3$  nem jobb-merőleges a  $t_2$  érintőre.

Továbbá a következő nyílt íveknek nincsen közös pontja, vagyis  $\mathcal{C}(E_1E_4) \cap \mathcal{I}(E_1E_4) = \emptyset$ , és  $\mathcal{C}(E_4E_2) \cap \mathcal{I}(E_4E_2) = \emptyset$ .

Így visszaléphetünk az A4. lépés végéhez, folytathatjuk az A5. lépéssel, és a bizonyítás teljessé tételéhez befejezhetjük a A6. lépéssel.

(A8. LÉPÉS) Ha  $OE_2$  merőleges  $OE_3$ -ra, akkor közös átellenes pontokból álló két párral van dolgunk, melyekre teljesül, hogy  $E_1 \prec E_4 \prec E_2 \prec E_3$  a  $\mathcal{C}$  egy körüljárásában, és hogy a megfelelő pontbeli  $t_3$  érintő merőleges a  $t_2$  érintőre.

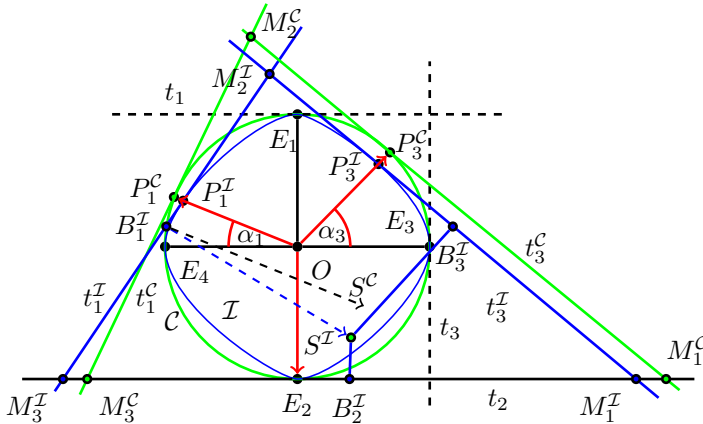
Ha alkalmazzuk a 3.3. Lemmát az  $\mathcal{C}(E_3E_1)$  és  $\mathcal{I}(E_3E_1)$  nyílt ívekre, akkor találhatunk olyan  $P_3^{\mathcal{C}}, P_3^{\mathcal{I}}$  pontokat az  $O$ -val egy egyenesen, amelyekben a  $\mathcal{C}$ , illetve  $\mathcal{I}$  görbéhez húzott  $t_3^{\mathcal{C}}$ , illetve  $t_3^{\mathcal{I}}$  érintő párhuzamos. Az is teljesül, hogy ezek az érintők nem párhuzamosak a  $t_2$  érintővel. Jelölje  $\alpha_3$  az  $\angle(E_3OP_3^{\mathcal{C}})$  szöget.

(A9. LÉPÉS) Alkalmazhatjuk a 3.2. Lemmát az  $\mathcal{C}(E_4E_1)$  és  $\mathcal{I}(E_4E_1)$  ívekre, hogy találjunk olyan  $P_1^{\mathcal{C}}$ , illetve  $P_1^{\mathcal{I}}$  pontokat a megfelelő íveken az  $E_4$  ponthoz tetszőlegesen közel úgy, hogy

- (i)  $OP_1^{\mathcal{C}} \parallel OP_1^{\mathcal{I}}$ ,
- (ii) a  $\mathcal{C}$ , illetve  $\mathcal{I}$  görbe  $t_1^{\mathcal{C}}$ , illetve  $t_1^{\mathcal{I}}$  érintője  $e$  pontokban nem párhuzamos,
- (iii)  $t_1^{\mathcal{C}} \cap t_1^{\mathcal{I}}$  közel van az  $E_4$  ponthoz, mégpedig az  $OP_1^{\mathcal{C}}$  egyenesnek ugyanazon az oldalán, mint ahol az  $E_4$  pont van.

A  $P_1^{\mathcal{C}}$  pontot választhatjuk az  $E_4$  ponthoz olyan közel, hogy a  $\angle(P_1^{\mathcal{C}}OE_4)$  szög  $\alpha_1$  nagysága kisebb, mint  $\min(\alpha_3, \pi/2 - \alpha_3)$ .

(A10. LÉPÉS) A  $t_1^{\mathcal{C}}$  metszi a  $t_2$  érintőt egy  $M_3^{\mathcal{C}}$  pontban, mivel  $t_4$  is metszi, és a  $t_1^{\mathcal{C}}$  és  $t_4$  érintő iránya is közel van egymáshoz. A  $t_1^{\mathcal{I}}$  hasonló okból metszi a  $t_2$  érintőt egy  $M_3^{\mathcal{I}}$  pontban, a  $\angle P_1^{\mathcal{C}}M_3^{\mathcal{C}}E_2$  és  $\angle P_1^{\mathcal{I}}M_3^{\mathcal{I}}E_2$  szögek pedig egyaránt hegyesszögek.



5.2. Ábra. A 2. eset: ha a  $t_3$  és  $t_2$  érintők merőlegesek

A  $t_3^C$  metszi a  $t_2$  érintőt egy  $M_1^C$  pontban, a  $t_3^I$  metszi a  $t_2$  érintőt egy  $M_1^I$  pontban, mivel  $0 < \alpha_3 < \pi/2$ , továbbá a  $\angle P_3^C M_1^C E_2$ ,  $\angle P_3^I M_1^I E_2$  szögek hegyesek, és a  $\angle P_3^C O P_1^C$  szög tompa. Eszerint a  $t_1^C$  metszi a  $t_3^C$  érintőt egy  $M_2^C$  pontban, és a  $\angle P_3^C M_2^C P_1^C$  szög hegyes. Mivel a  $t_1^C$  és  $t_1^I$  iránya csak egy kicsit különbözik,  $t_1^I$  és  $t_3^I$  metszi egymást egy  $M_2^I$  pontban (lásd az 5.2. Ábrát).

Eszerint az  $M_1^C M_2^C M_3^C \triangle$  és  $M_1^I M_2^I M_3^I \triangle$  is létezik, és minden szöge hegyes.

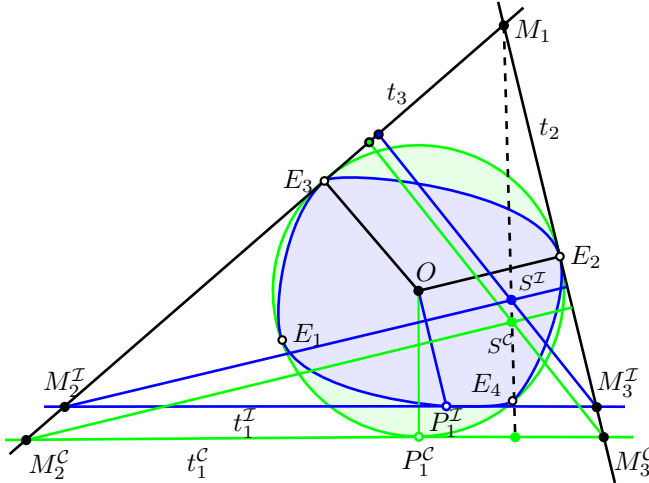
(A11. LÉPÉS) Jelölje a trigon  $M_i^I$  csúccsal szemközti oldalának felezőpontját  $B_i^I$  ( $i = 1, 2, 3$ ). A  $B_2^I$  és  $B_3^I$  pontokon átmenő jobb-merőleges oldalfelezők egybeesnek az euklideszi oldalfelező merőlegesekkel, és metszéspontjuk  $S^I$ . Ez a pont az  $M_1^I M_2^I M_3^I \triangle$  trigon euklideszi körülírt körének középpontja, és egyben jobb-merőleges biszektorális centrum is, amely különbözik mindegyik  $B_i^I$  felezőponttól, minthogy a háromszögnek nincsen derékszöge. Így  $B_1^I S^I$  a harmadik euklideszi oldalfelező merőleges, amely merőleges a  $t_1^I$  érintőre. Ugyanakkor a  $B_1^I S^I$  egyenesnek a harmadik jobb-merőleges oldalfelezőnek kell lennie, amely párhuzamos a  $P_1^I O$  egyenessel, és következésképpen merőleges a  $t_1^I$  érintőre. De a  $t_1^I$  és  $t_1^C$  érintők nem párhuzamosak, ami ellentmondás, a bizonyítás pedig teljes. ■

**5.2. Tétel.** ([Km, Theorem 3.2]) *Egy Minkowski-geometria akkor és csak akkor euklideszi, ha minden háromszögre a jobb-merőleges magasságvonalak konkurenssek.*

**Bizonyítás.** A szükségesség világos, így csak elegendőséget kell igazolnunk.

(B1. LÉPÉS) Az 5.1. Tétel A1. és A2. lépései alapján két eset van.

1. Eset.  $|C \cap I| \geq 5$ . (Az 5.3. Ábrán a  $C \cap I$  metszetnek csak négy pontja látszik.)



5.3. Ábra. Magasságvonalak az első esetben



(B2. LÉPÉS) Pontosan úgy, mint az 5.1. Tétel bizonyítása során, annak A3.–A5. lépéseivel olyan konfigurációhoz juthatunk, ahol a  $P_1^C \in \mathcal{C}$  és  $P_1^I \in \mathcal{I}$  pontbeli érintők párhuzamosak, ugyanakkor az  $OP_1^I$  és  $OP_1^C$  egyenesek nem párhuzamosak, amelyen az érintők metszéspontjait ugyanúgy jelöltük, mint előzőleg.

(B3. LÉPÉS) Az  $M_1M_2^CM_3^C \triangle$  trigon jobb-merőleges magasságvonalainak van egy közös  $S^C$  pontja, minthogy a konfiguráció tulajdonságai szerint azok egyben euklideszi magasságvonalak is, továbbá  $M_i^CS^C \parallel E_iO$  az  $i = 2, 3$  indexekre, és  $M_1^CS^C \parallel OP_1^C$ .

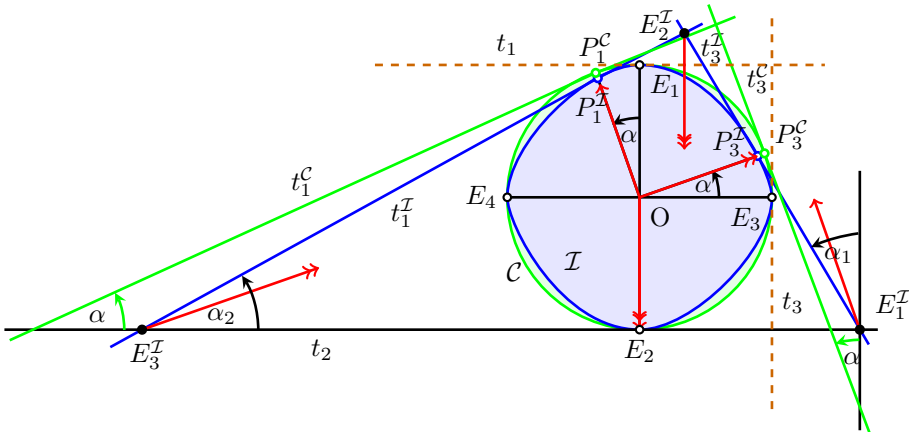
Jelöljük az  $M_1M_2^IM_3^I \triangle$  trigon  $M_3^I$ , illetve  $M_2^I$  csúcsain átmenő jobb-magasságainak metszéspontját  $S^I$ -vel. Mivel az  $M_1M_3^CM_2^C \triangle$  és  $M_1M_3^IM_2^I \triangle$  trigonok nyilvánvalóan középpontosan hasonlóak az  $M_1$  centrummal, az  $M_1, S^I, S^C$  pontok egy egyenesre esnek, és nyilvánvalóan különbözőek. Így az  $M_1S^I$  párhuzamos a  $P_1^CO$  egyenessel. Másrészt a jobb-merőlegesség definíciójára tekintettel a harmadik jobb-magasság párhuzamos a  $P_1^IO$  egyenessel. Ez egy ellentmondás, amely igazolja a tételt ebben az első esetben.

2. Eset  $|\mathcal{C} \cap \mathcal{I}| = 4$ .

(B4. LÉPÉS) Az A7. lépéssel folytathatjuk, és lezárhatjuk a bizonyítást, amikor  $E_2$  és  $E_3$  nem merőlegesek.

(B5. LÉPÉS) Már csak azt az esetet kell tekinteni, amikor  $t_3$  merőleges (és egyben jobb-merőleges is) a  $t_2$  érintőre.

A  $\mathcal{C}$  görbén válasszuk a  $P_1^C$ , illetve  $P_3^C$  pontokat az  $E_1$ , illetve  $E_3$  ponthoz közel úgy, hogy  $|\angle(E_1OP_1^C)| = |\angle(E_3OP_3^C)| = \alpha$  teljesüljön, és a szögek azonos módon irányítottak. A  $\mathcal{C}$  görbéhez ezekben a pontokban húzott érintőket jelölje  $t_i^C$  ( $i = 1, 3$ ), az  $\overline{OP_i^C}$  félegyeneseknek a  $\mathcal{I}$  görbén lévő pontját pedig  $P_i^I$  ( $i = 1, 3$ ). Az  $\mathcal{I}$  görbéhez ezen pontokon keresztül húzott érintők jelölése  $t_i^I$  ( $i = 1, 3$ ) (lásd az 5.4. Ábrát).



5.4. Ábra. 2. eset: amikor  $E_2 \perp E_3$

Világos, hogy a  $t_1^C$ ,  $t_3^C$  és  $t_2$  érintők egy trigont határoznak meg, mint ahogyan a  $t_1^I$ ,  $t_3^I$  és  $t_2$  érintők az  $M_1^I M_2^I M_3^I \triangle$  trigon oldalegyenesei.

A  $t_1^C$  és  $t_2$  egyenesek által bezárt szög nyilvánvalóan  $\alpha$ , ugyanúgy, mint a  $t_3^C$  egyenes és az  $OE_1$  egyenesek szöge. A 3.2. Lemma következményeként megállapítható, hogy a  $t_1^I$  és  $t_2$  által bezárt  $\alpha_2$  szög nagyobb, mint  $\alpha$ ; és hasonlóképpen a  $t_3^I$  és  $OE_1$  közötti  $\alpha_1$  nagyobb, mint  $\alpha$ .

A jobb-merőlegességeknek megfelelően az  $M_1^I M_2^I M_3^I \triangle$  trigon jobb-magasságai rendre párhuzamosak az  $OP_1^I$ ,  $OP_3^I$ ,  $OE_2$  egyenesekkel, így az  $M_1^I$  csúcson átmenő magasság az  $M_2^I$  csúcson átmenő magasságot a háromszögön kívül metszi, míg az  $M_3^I$  csúcson átmenő magasság az  $M_2^I$  csúcson átmenő magasságot a háromszög belsejében metszi. Ebből következik, hogy a három magasság nem mehet át egy ponton. Ez bizonyítja a Tételt erre az utolsó estre. ■

## 5.2. Karakterizáció bal-biszektorális és bal-ortocentrummal

Először a bal-merőleges oldalfelező egyenesek, majd a bal-merőleges magasságvonalak konkurenciáját vizsgáljuk.

**5.3. Tétel.** ([Km, Theorem 4.1]) *Egy Minkowski-geometria akkor és csak akkor euklideszi, ha minden trigon bal-merőleges oldalfelező egyenesei konkurensek.*

**Bizonyítás.** Nyilván elegendő a szükségességet igazolnunk.

(C1. LÉPÉS) Megismételhetjük az 5.1. Tétel A1. lépését, és kapunk egy középpontosan szimmetrikus, kétszeresen differenciálható  $\mathcal{I}$  görbét, valamint annak körülírt  $\mathcal{C}$  körét, mely vele koncentrikus (ez a görbe John–Löwner-ellipszise).

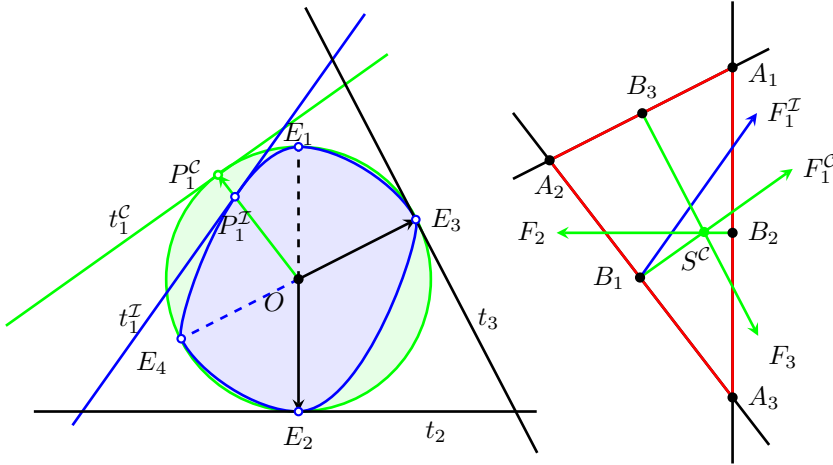
Most olyan trigont konstruálunk, amelynek három oldalfelező bal-merőlegese nem mehet át egy ponton. Ennek léte igazolja az állítást.

(C2. LÉPÉS) A 2.10. Lemma szerint létezik legalább három pont a  $\mathcal{I} \cap \mathcal{C}$  halmazban. A 2.10. Lemma (2) része szerint pedig a közös pontok közül (legalább) egynek tetszőlegesen kis környezetében a görbék különböznek. Mivel a közös pontok átellenes párokban fordulnak elő, van négy különböző közös  $E_i$  pont úgy, hogy

- (1)  $E_2$  és  $E_1$  átellenes pontok;
- (2)  $E_3$  és  $E_4$  átellenes pontok;
- (3)  $E_1$  olyan, hogy hozzá tetszőlegesen közel vannak olyan különböző  $P_1^C \in \mathcal{C}$  és  $P_1^I \in \mathcal{I}$  pontok, amelyek az  $O$ -ból kiinduló ugyanazon félegyenesen vannak, és e pontokban az  $\mathcal{C}$  görbe  $t_1^C$ , illetve a  $\mathcal{I}$  görbe  $t_1^I$  érintője metszik egymást a  $P_1^C P_1^I$  egyenesnek azon az oldalán, ahol  $E_1$  van (lásd a 3.2. Lemmát);
- (4) a  $\mathcal{C}$  görbe egy körüljárásában a pontok sorrendje  $E_1 \prec P_1^C \prec E_4 \prec E_2 \prec E_3$ .

Jelölje a görbék közös  $E_i$  pontbeli közös érintőit  $t_i$  ( $i = 2, 3$ ). A kör  $t_1^C$ ,  $t_2$ , illetve  $t_3$  érintője euklideszi értelemben merőleges az  $OP_1^C$ ,  $OE_2$ , illetve  $OE_3$  egyenesre, ezért közülük semelyik kettő sem párhuzamos. Mivel a  $t_1^C$  és  $t_1^T$  iránya közel van egymáshoz, a  $P_1^C$  pontot megfelelően közelinek választva az  $E_1$  ponthoz, a  $t_1^T$  érintő metszi a  $t_2$  és  $t_3$  érintőket is (lásd az 5.5. Ábra bal oldali részét). A bal-merőlegesség definíciójának megfelelően a  $t_1^T$  egyenes bal-merőleges az  $OP_1^T$  egyenesre.

Az  $\overrightarrow{OP_1^C}$ ,  $\overrightarrow{OE_2}$  és  $\overrightarrow{OE_3}$  vektorok nyilvánvalóan lineárisan függetlenek, így választható úgy egy  $A_1A_2A_3\triangle$  háromszög, hogy  $A_3A_2 \parallel OP_1^C$ ,  $A_2A_1 \parallel OE_3$ ,  $A_1A_3 \parallel OE_2$ , és az  $A_1, A_2, A_3$  csúcsok körüljárása ugyanaz, mint az  $E_3, P^C, E_2$  pontoké (lásd az 5.5. Ábra jobb oldali részét).



5.5. Ábra. Bal-merőleges oldalfelezők, ha  $S^C \neq B_1$ .

1. eset. Az  $\overrightarrow{OE_2}$  és  $\overrightarrow{OE_3}$  vektorok nem merőlegesek.

(C3. LÉPÉS) Jelölje az  $A_1A_2A_3\triangle$  háromszög  $\overline{A_iA_j}$  oldalainak felezőpontjait  $B_k$ ,  $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$  (lásd az 5.5. Ábra jobb oldali részét).

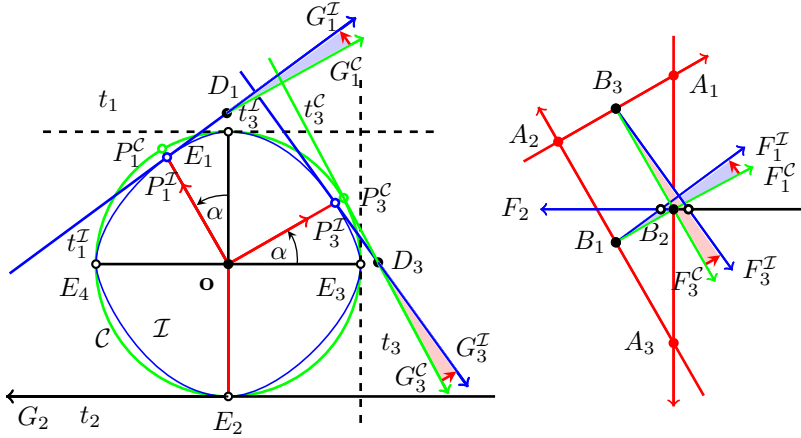
Vegyünk olyan  $B_1F_1^C$ ,  $B_2F_2$ , illetve  $B_3F_3$  egyeneseket, hogy  $B_1F_1^C \parallel t_1^C$ ,  $B_2F_2 \parallel t_2$ , illetve  $B_3F_3 \parallel t_3$ . Mivel ezek az egyenesek (euklideszi értelemben) merőlegesek a trigonban a nekik megfelelő oldalakra, van egy  $S^C$  közös pontjuk, amely az euklideszi körülírt kör középpontja. Mivel az  $OE_2$  és  $OE_3$  egyenesek nem merőlegesek, az  $A_2A_1$  és  $A_3A_1$  egyenesek szintén nem merőlegesek, így  $S^C \neq B_1$ .

Tekintsük most a  $B_1F_1^T \parallel t_1^T$  egyenest. Ennek át kell mennie a feltevés szerint az  $A_1A_2A_3\triangle$  trigon  $S^T = B_2F_2 \cap B_3F_3$  bal-biszektorális centrumán. Mivel  $S^C = B_2F_2 \cap B_3F_3$ , és  $S^C \neq B_1$ , azt kapjuk, hogy  $B_1F_1^T = B_1F_1^C$ . Azonban ez ellentmond annak, hogy  $t_1^T \nparallel t_1^C$ , ami bizonyítja a Tételt erre az esetre.

2. eset. Az  $E_2$  és  $E_3$  vektorok merőlegesek.

(C4. LÉPÉS) Ha az  $E_1, E_3$  és  $E_2, E_4$  pontpárokon túl további átteljes pontpár is van a  $\mathcal{C} \cap \mathcal{I}$  halmazban, és  $E_6 \in (\mathcal{C}(E_1, E_2))$  az egyik ilyen pár pontja, akkor a 6 és 3 indexek felcserélésével egy olyan konfigurációhoz juthatunk, amelyben  $t_3$  és  $t_2$  nem merőlegesek, és ekkor a bizonyítás az A3. lépés szerint zárul.

(C5. LÉPÉS) Ha  $\mathcal{C} \cap \mathcal{I} = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ , akkor az 5.1. Tétel bizonyításában a második eset B4. lépését kell követnünk. Tekintsük az 5.6. Ábra konfigurációját, amely egy megfelelően módosított változata az 5.4. Ábra konfigurációjának.



5.6. Ábra. Bal-merőleges oldalfelezők, ha  $s^c = B_1$

Tekintsük a  $D_i = t_i^c \cap t_i^I$  ( $i = 1, 3$ ) pontokat, és vezessük be a  $\overline{D_i}G_i^c$  és  $\overline{D_i}G_i^I$  ( $i = 1, 3$ ) jelöléseket a  $D_i$  pontokból kiinduló azon félegyenesekre a megfelelő érintő egyeneseken, amelyek nem tartalmazzák az érintési pontot. Világos, hogy az irányított  $\angle(G_i^c D_i G_i^I)$  szögeknek az irányítása megfelel a  $\mathcal{C}$  és  $\mathcal{I}$  görbék körüljárásának.

(C6. LÉPÉS) Tekintsük a  $\overline{B_1}F_1^c \parallel \overline{D_1}G_1^c$ ,  $\overline{B_2}F_2 \parallel \overline{E_2}G_2$  és  $\overline{B_3}F_3^c \parallel \overline{D_3}G_3^c$  félegyeneseket. Ezeknek a félegyeneseknek az egyenesei a derékszögű  $A_1A_2A_3\triangle$  háromszög megfelelő oldalainak oldalfelező merőlegesei, ezért euklideszi tulajdonságuk szerint átmennék a háromszög köré írt kör  $B_2$  középpontján.

A  $\overline{B_1}F_1^I \parallel \overline{D_1}G_1^I$  és  $\overline{B_3}F_3^I \parallel \overline{D_3}G_3^I$  félegyenesek egyenesei bal-merőleges oldalfelezői az  $A_1A_2A_3\triangle$  trigon megfelelő oldalainak, ezért a feltevés szerint egy ponton mennek át, a trigon bal-biszektorális centrumán.

Figyelembe véve az irányított  $\angle(F_1^c B_1 F_1^I)$  és  $\angle(F_3^c B_3 F_3^I)$  szögek irányítását, azt találjuk, hogy a  $\overline{B_1}F_1^I$  és  $\overline{B_3}F_3^I$  félegyenesek az  $B_2F_2$  egyenest a  $B_2$  pontjának ellentétes oldalain metszik. Így a trigon három bal-merőleges oldalfelező egyenes nem mehet át egy ponton. Ez az ellentmondás bizonyítja a tételünket ebben az esetben, és ezzel a bizonyítás teljes. ■

A bal-merőleges magasságvonalak metszéspontjának a vizsgálata van hátra.

**5.4. Tétel.** ([Km, Theorem 4.2]) *Egy Minkowski-geometria akkor és csak akkor euklideszi, ha minden trigon bal-merőleges magasságvonalai konkurenssek.*

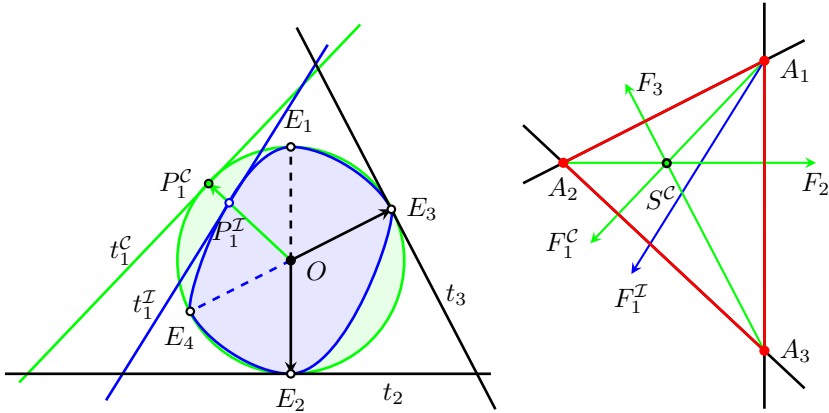
**Bizonyítás.** *Elegendőség.* Euklideszi geometriában a bal-merőlegesek egyben merőlegesek euklideszi értelemben is, ezért a bal-magasságvonalak egyenesei a magasságvonalakéival egyeznek meg, s ezért konkurenssek.

*Szükségesség.* Feltesszük, hogy minden trigonban egy ponton mennek át a bal-merőleges magasságvonalak.

(D1. LÉPÉS) Megismételhetjük az előző bizonyítás C1.—C3. lépéseit. Ekkor — amint ott is — megkonstruálhatunk egy  $A_1A_2A_3\triangle$  trigont úgy, hogy  $A_1A_2 \parallel OE_3$ ,  $A_2A_3 \parallel OP_1^C$ ,  $A_3A_1 \parallel OE_2$  teljesüljön, továbbá az  $A_1A_2A_3\triangle$  körüljárása ugyanaz, mint az  $E_3, P_1^C, E_2$  pontoké.

Két esetet kell megvizsgálnunk.

1. eset. Az  $OE_2$  és  $OE_3$  egyenesek nem merőlegesek.



5.7. Ábra. Bal-merőlegesség és magasságok, amikor  $S^C \neq A_2$

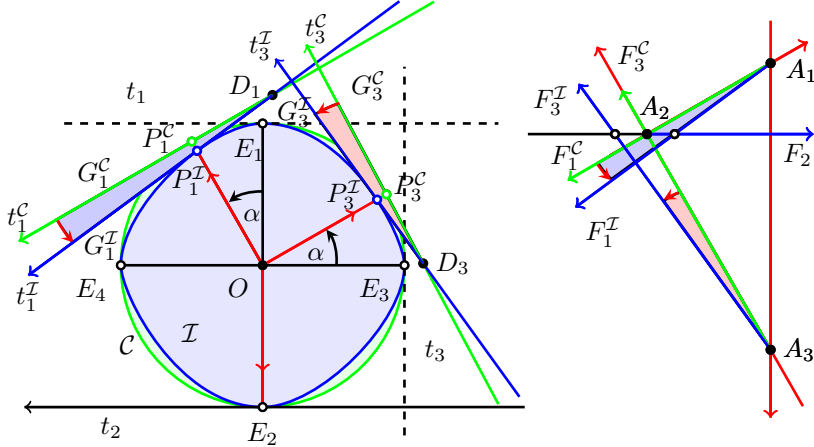
(D2. LÉPÉS) Hasonló megfontolásokat alkalmazunk, mint a C3. lépés során.

Válasszuk az  $A_1F_1^C$ ,  $A_2F_2$  és  $A_3F_3$  egyeneseket úgy, hogy  $A_1F_1^C \parallel t_1^C$ ,  $A_2F_2 \parallel t_2$ , és  $A_3F_3 \parallel t_3$ . Ezek euklideszi értelemben merőlegesek a trigon megfelelő szemközti oldalára, így átmennek annak euklideszi  $S^C$  magasságpontján.

Tekintsük most az  $A_1F_1^I \parallel t_1^I$  egyenest. Az  $A_1F_1^I$ ,  $A_2F_2$  és  $A_3F_3$  egyenesek az  $A_1A_2A_3\triangle$  trigon bal-merőleges magasságvonalainak egyenesei, ezért a feltevés szerint egy ponton mennek át: a trigon  $S^I$  bal-ortocentrumán.

Mivel  $t_1^C \nparallel t_1^I$ , teljesül az, hogy  $A_1F_1^C \neq A_1F_1^I$ . Ám ez ellentmond annak, hogy  $S^C = A_2F_2 \cap A_3F_3 = S^I$ , mivel  $A_1 \neq S^C \in A_1F_1^C \cap A_1F_1^I = \{A_1\}$ . Ez az ellentmondás igazolja az állítást az 1. esetben.

2. eset. Az  $OE_2$  és  $OE_3$  egyenesek merőlegesek (lásd az 5.8. Ábrát).



5.8. Ábra. Bal-merőlegesség és magasságok, amikor  $S^C = A_2$ .

(D3. LÉPÉS) A bizonyítást a korábbi C4.—C5. lépésekkel folytathatjuk, és a C6. lépésnek a következők szerint módosított változatával fejezhetjük be.

Tekintsük az  $\overline{A_1F_1^C} \parallel \overline{D_1G_1^C}$ ,  $\overline{A_2F_2} \parallel t_2$  és  $\overline{A_3F_3^C} \parallel \overline{D_3G_3^C}$  félegyeneseket. Az  $A_iF_i^C$  ( $i = 1, 3$ ) és  $A_2F_2$  egyenesek az  $A_1A_2A_3\Delta$  derékszögű háromszög (euklideszi) magasságvonalai, tehát átmennek a trigon  $A_2$  ortocentrumán.

Tekintsük most az  $\overline{A_1F_1^I} \parallel \overline{D_1G_1^I}$  és  $\overline{A_3F_3^I} \parallel \overline{D_3G_3^I}$  félegyeneseket. Az  $A_iF_i^I$  ( $i = 1, 3$ ) és  $A_2F_2$  egyenesek az  $A_1A_2A_3\Delta$  derékszögű háromszög bal-merőleges magasságvonalainak egyenesei, így a feltevés szerint át kell menniük a trigon bal-ortocentrumán.

Ugyanakkor megvizsgálva az  $\sphericalangle(F_1^C A_1 F_1^I)$  és  $\sphericalangle(F_3^C A_3 F_3^I)$  irányított szögeket, azt találjuk, hogy az  $\overline{A_1F_1^I}$  és  $\overline{A_3F_3^I}$  félegyenések az  $A_2F_2$  egyenest az  $A_2$  pontjának különböző oldalain metszik, tehát  $A_1F_1^I$ ,  $A_2F_2$  és  $A_3F_3^I$  nem mehet át egy ponton. Ez az ellentmondás igazolja a tételünket ebben az utolsó esetben.

A bizonyítás teljes. ■

## Jelölések

$A, B, C$	pontok
$l, m, n$	egyenesek
$AB$	a különböző $A$ és $B$ pontokon átmenő egyenes
$ABC\triangle$	háromszög $A, B, C$ csúcsokkal
$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$	vektorok, valós $n$ -esek
$\overrightarrow{AB}$	vektor az affin térben ( $A$ kezdő-, $B$ végpontú reprezentáncsal)
$ \mathbf{a} $	vektor normája, hossza, abszolút értéke
$\overline{AB}$	$A$ kezdőpontú, $B$ -t tartalmazó félegyenes
$\overline{AB}$	nyílt szakasz $A$ és $B$ végpontokkal
$(A, B; C)$	affin osztóviszony
$(A, B; C)_d$	metrikus osztóviszony a $d$ metrikával
$\langle A, B; C \rangle_d$	hiperbolikus osztóviszony a $d$ metrikával
$(A, B; C, D)$	kettősviszony
$(\mathbf{a}, \mathbf{b}; \mathbf{c}, \mathbf{d})$	kettősviszony (vektorokkal)
$d, d_{\mathcal{L}}, d_{\mathcal{H}}$	távolság (függvény)
$\mathbb{P}^n, \mathbb{R}^n, \mathbb{H}^n$	$n$ -dimenziós projektív, affin, hiperbolikus tér
$\mathcal{D}, \mathcal{H}$	nyílt tartomány vagy test
$\partial\mathcal{D}, \partial\mathcal{H}$	a $\mathcal{D}$ és $\mathcal{H}$ tartomány vagy test határa
$m \perp n$	merőlegesség, $m$ merőleges $n$ -re
$\Phi, \Psi, \Xi$	terek transzformációi
$(\mathcal{M}, d)$	metrikus tér ( $\mathcal{M}$ alaphalmaz, $d$ metrika)
$\mathcal{B}^n$	$n$ -dimenziós egységgömb
$\mathcal{S}^{n-1}$	$n$ -dimenziós egységgömb felülete

## Hivatkozások

- [1] D. AMIR, *Characterizations of Inner Product Spaces*, Birkhäuser Verlag, Basel – Boston – Stuttgart, 1986; doi: [10.1007/978-3-0348-5487-0](https://doi.org/10.1007/978-3-0348-5487-0). (1, 9, 58, 61)
- [2] L. BERWALD, Über die n-dimensionalen Geometrien konstanter Krümmung, in denen die Geraden die kürzesten sind, *Math. Z.*, **30** (1929), 449–469; url: <http://eudml.org/doc/168133>. (20)
- [3] G. BIRKHOFF, Orthogonality in linear metric spaces, *Duke Math. J.*, **1** (1935), 169–172; doi: [10.1215/S0012-7094-35-00115-6](https://doi.org/10.1215/S0012-7094-35-00115-6). (17)
- [4] W. BLASCHKE, *Integralgeometrie 11: Zur Variationsrechnung*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 11:1(1935), 359–366; doi: [10.1007/BF02940732](https://doi.org/10.1007/BF02940732). (1)
- [5] M. R. BRIDSON and A. HAEFLIGER, *Metric Spaces of Non-positive Curvature*, Springer-Verlag, Berlin, (1999); doi: [10.1007/978-3-662-12494-9](https://doi.org/10.1007/978-3-662-12494-9). (20)
- [6] H. BUSEMANN AND P. J. KELLY, *Projective Geometries and Projective Metrics*, Academic Press, New York, 1953; url: <http://store.doverpublications.com/0486445828.html>. (18, 19, 20, 21)
- [7] H. BUSEMANN, *Recent Synthetic Differential Geometry*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1970; doi: [10.1007/978-3-642-88057-5](https://doi.org/10.1007/978-3-642-88057-5). (1)
- [8] A. CAYLEY, A sixth Memoir upon Quantics, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, **149** (1859), 61–90; url: <https://archive.org/details/philtrans01763152>. (16)
- [9] B. COLBOIS and C. VERNICOS and P. VEROVIC, L'aire des triangles idéaux en géométrie de Hilbert, *Enseign. Math.*, (2) **50** (2004), 203–237; doi: [10.5169/seals-2649](https://doi.org/10.5169/seals-2649). (21)
- [10] M. M. DAY, Some characterizations of inner product spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **62** (1947), 320–337; doi: [10.1090/S0002-9947-1947-0022312-9](https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1947-0022312-9). (8)
- [11] M. M. DAY, Some criteria of Kasahara and Blumenthal for inner product spaces, *Proceedings of Amer. Math. Soc.*, **10** (1959), 92–100; doi: [10.1090/S0002-9939-1959-0106407-0](https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1959-0106407-0). (9)
- [12] N. DUNFORD and J. T. SHWARTZ, *Linear Operators Part I*, Wiley-Interscience, New York, 1958; url: <https://isbsearch.org/isbn/0471608483>. (7)
- [13] T. FOERTSCH AND A. KARLSSON, Hilbert Geometries and Minkowski norms, *Journal of Geometry*, **83** (2005), 22–31; doi: [10.1007/s00022-005-0005-1](https://doi.org/10.1007/s00022-005-0005-1). (16)
- [14] P. FUNK, Über Flächen mit lauter geschlossenen geodätischen Linien, *Mathematische Annalen*, **74** (1913), 278–300; doi: [10.1007/BF01456044](https://doi.org/10.1007/BF01456044). (1)
- [15] P. FUNK, Über Geometrien, bei denen die Geraden die Kürzesten sind, *Mathematische Annalen*, **101** (1929), 226–237; doi: [10.1007/BF01454835](https://doi.org/10.1007/BF01454835). (20)
- [16] P. M. GRUBER, *Convex and Discrete Geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 2007; doi: [10.1007/978-3-540-71133-9](https://doi.org/10.1007/978-3-540-71133-9). (5)
- [17] P. M. GRUBER, John and Loewner Ellipsoids, *Discrete Comp. Geom.*, **46** (4)(2011), 776–788; doi: [10.1007/s00454-011-9354-8](https://doi.org/10.1007/s00454-011-9354-8). (5)



- [18] R. GUO, A Characterization of Hyperbolic Geometry among Hilbert Geometry, *Journal of Geometry*, **89** (2008), 48–52; doi: [10.1007/s00022-008-1989-0](https://doi.org/10.1007/s00022-008-1989-0).
- [19] G. HAMEL, Über die Geometrien, in denen die Geraden die Kürzesten sind, *Mathematische Annalen*, **57** (1903), 231–264; url: <http://gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/load/img/?PID=GDZPPN002259230>. (1)
- [20] P. DE LA HARPE, *On Hilbert's metric for simplices*. In *Geometric group theory*, Cambridge Univ. Press, 1 (1991), 97–119; doi: [10.1017/CB09780511661860.009](https://doi.org/10.1017/CB09780511661860.009). (16)
- [21] M. HENK, Löwner-John Ellipsoids, *Documenta Mathematica*, Extra Volume ISMP, (2012), 95–106; url: [http://emis.ams.org/journals/DMJDMV/vol-ismpp/24\\_henk-martin.pdf](http://emis.ams.org/journals/DMJDMV/vol-ismpp/24_henk-martin.pdf). (5)
- [22] D. HILBERT, Über die gerade Linie als kürzeste Verbindung zweier Punkte, *Mathematische Annalen*, **46** (1895), 91–96; url: <http://eudml.org/doc/157750>. (16)
- [23] N. IVANOV, V. Arnol'd, the Jacobi identity, and orthocenters, *Amer. Math. Monthly*, **118** (2011), 41–65; doi: [10.4169/amer.math.monthly.118.01.041](https://doi.org/10.4169/amer.math.monthly.118.01.041). (15)
- [24] F. JOHN, Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions, Studies and Essays Presented to R. Courant on his 60th Birthday, *Interscience Publishers Inc. New York*, (1948), 187–204; doi: [10.1007/978-3-0348-0439-4\\_9](https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0439-4_9). (5)
- [25] D. C. KAY, The Ptolemaic Inequality in Hilbert Geometries, *Pacific. J. Math.*, **21** (1967), 293–301; url: <https://projecteuclid.org/euclid.pjm/1102992501>. (20)
- [26] P. J. KELLY and L. J. PAIGE, Symmetric Perpendicularity in Hilbert Geometries, *Pacific J. Math.*, **2** (1952), 319–322; url: <https://msp.org/pjm/1952/2-3/pjm-v2-n3-p05-s.pdf>. (20)
- [27] GY. KISS and T. SZŐNYI, *Véges geometriák*, Polygon, Szeged, (2001); url: <http://www.math.u-szeged.hu/polygon/szokis.htm>. (25)
- [28] F. KLEIN, Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie, *Math. Ann.*, **IV** (1871), 573–625; doi: [10.1007/978-3-7091-9511-6\\_5](https://doi.org/10.1007/978-3-7091-9511-6_5). (16)
- [Km] J. KOZMA, Characterization of Euclidean geometry by existence of circumcenter or orthocenter, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **81:3-4** (2015), 685–698; doi: [10.14232/actasm-015-518-0](https://doi.org/10.14232/actasm-015-518-0). (2, 25, 42, 46, 48, 51)
- [KKc] J. KOZMA and Á. KURUSA, Ceva's and Menelaus' Theorems Characterize Hyperbolic Geometry Among Hilbert Geometries, *Journal of Geometry*, **106** (2014), 465–470; doi: [10.1007/s00022-014-0258-7](https://doi.org/10.1007/s00022-014-0258-7). (2, 6, 22, 33, 34)
- [KKh] J. KOZMA and Á. KURUSA, Hyperbolic is the only Hilbert geometry having circumcenter or orthocenter generally, *Beiträge zur Algebra und Geometrie*, **57:1** (2016), 243–258; doi: [10.1007/s13366-014-0233-3](https://doi.org/10.1007/s13366-014-0233-3). (2, 6, 23, 25, 29, 36, 39)
- [KKp] KURUSA Á. és KOZMA J., Egymásba írt háromszögek perspektivitása, *Polygon*, **24:1** (2016), 1–11; url: <http://www.math.u-szeged.hu/polygon/polyxxiv1.pdf>. (4, 5, 28)
- [KKq] Á. KURUSA and J. KOZMA, Projective metrics with quadratic hyperbolas, *kézirat*, (2017), pp. 21. (2, 60)

- [29] KURUSA Á., *Bevezetés a differenciálgeometriába*, Polygon Jegyzettár **11**, Polygon Kiadó, Szeged, 1999. ⟨23⟩
- [30] KURUSA Á., *Nemeuklidészi geometriák*, Polygon Jegyzettár **47**, Polygon Kiadó, Szeged, 2009. ⟨1, 7, 9, 10, 12, 15⟩
- [31] KURUSA Á., *Bevezetés a geometriába*, Polygon Jegyzettár **57**, Polygon Kiadó, Szeged, 2015. ⟨3, 4, 7⟩
- [32] Á. KURUSA, Curvature in Hilbert-geometries, *submitted* (2017). ⟨20, 21⟩
- [33] G. E. MARTIN, *The Foundations of Geometry and the Non-Euclidean Plane*, Springer Verlag, New York, 1975; doi: [10.1007/978-1-4612-5725-7](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5725-7). ⟨11, 12, 13⟩
- [34] R. D. NUSSBAUM, *Hilbert's projective metric and iterated nonlinear maps*, Mem. Amer. Math. Soc., 75 (1988), no. 391, iv+137 pp; doi: [10.1090/memo/0391](https://doi.org/10.1090/memo/0391). ⟨16⟩
- [35] K. OHIRA, On some characterizations of abstract Euclidean spaces by properties of orthogonality, *Kumamoto Jour. Sci.*, **1** (1952), 23–26; url: <http://www.sci.kumamoto-u.ac.jp/~kjm/BKS/kjmpdf/KJSM/v1-5-ohira.pdf>.
- [36] A. PAPADOPULOS and V. TROYANOV, *Handbook of Hilbert geometry*, European Mathematical Society, Zürich (2014), ; doi: [10.4171/147](https://doi.org/10.4171/147). ⟨1, 58, 61⟩
- [37] A. V. POGORELOV, *Hilbert's fourth problem*, Winston & Sons, Washington DC (1979), ; url: <https://catalogue.nla.gov.au/Record/2596811>. ⟨1⟩
- [38] R. SCHNEIDER, *Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory*, Cambridge University Press, (1993), ; doi: [10.1017/CB09781139003858](https://doi.org/10.1017/CB09781139003858). ⟨3⟩
- [39] B. SEGRE, *Ovals in a finite projective plane*, Canadian J. Math., **7** (1955), 414–416; doi: [10.4153/CJM-1955-045-x](https://doi.org/10.4153/CJM-1955-045-x). ⟨25⟩
- [40] A. C. THOMPSON, *Minkowski Geometry*, Encyclopedia of Math. and its Appl., Vol. 63, Cambridge Univ. Press, 1996; doi: [10.1017/CB09781107325845](https://doi.org/10.1017/CB09781107325845). ⟨1, 8⟩
- [41] Z. I. SZABÓ, Hilbert's fourth problem I., *Adv. Math.*, **59** (1986), 185–301; doi: [10.1016/0001-8708\(86\)90056-3](https://doi.org/10.1016/0001-8708(86)90056-3). ⟨1⟩
- [42] C. VERNICOS, On the Hilbert Geometry of Convex Polytopes. Handbook of Hilbert geometry, *European Math. Society, Zürich*, (2014), ; doi: [10.4171/147-1/4](https://doi.org/10.4171/147-1/4). ⟨16⟩
- [43] G. WEISS, The concepts of triangle orthocenters in Minkowski planes, *Journal of Geometry*, **74** (2002), 145–156; doi: [0.1007/PL00012533](https://doi.org/0.1007/PL00012533).

## Köszönetnyilvánítás

*A szerző köszönetét fejezi ki az SZTE Bolyai Intézetének, illetőleg Doktori Iskolájának azért, hogy az elmúlt időszakban támogatták a kutatásait. Különösen hálás kollégáinak, akik a munka végzéséhez mindig alkotó légkört teremtettek. Fontos volt a szerzőnek, hogy a kutatás folyamatában az eredményekről beszámolhasson a BME Geometria szemináriumán, a Kerékhajtó Szemináriumon és a Basilicatai Egyetem Matematikai és Informatikai Tanszékének szemináriumain. A köszönet kiemelten illeti dr. Kurusa Árpádot, aki a dolgozatban felölelt kutatási témát felvetette, a kutatások során kiváló partner és segítőkész doktori témavezető volt.*

*Kozma József  
Szeged, 2018. január. 5.*

## Összefoglaló

Az értekezésben két projektív-metrikus geometria, a Hilbert-, illetve a Minkowski-féle geometria területén folytatott azon vizsgálatainkat mutatjuk be, melyek során geometriai konfigurációkkal a hiperbolikus, illetve az euklideszi geometriát tudjuk karakterizálni.

A Minkowski-geometriákat a matematikusok jelentős része normált vektortérként ismeri, és igen bőséges irodalom veszi számba jellemzőit és tulajdonságait [1]. A Hilbert-geometria kutatása napjainkban egyre újabb és változatosabb eredményekkel zárkózik fel [36].

Ahogy az euklideszi a Minkowski-, a hiperbolikus geometria közvetlen általánosítása a Hilbert-geometria, melyek megismerésében elsőrendű feladat az euklideszi, illetve hiperbolikus geometriában megszokott konfigurációk tulajdonságainak vizsgálata.

A kutatás általános kiindulópontja ezért az a kérdés volt, hogy egyes — más geometriákban alaposan jellemzett — konfigurációknak a Minkowski- és a Hilbert-geometriában milyen tulajdonságai vannak, illetve teljesülésük milyen további következményekkel jár? Ennek értelmében áttekintjük a vizsgált geometriák alaptulajdonságait is, így a Minkowski-geometriák mellett a hiperbolikus geometriát és a Hilbert-geometriákat is ismertetjük, majd a következő kérdéseket vizsgáljuk:

- (1) *Vajon az egyes konfigurációknak mely tulajdonságai maradnak meg az általános esetben, és melyek azok, amelyek tovább már nem jellemzik a konfigurációt?*
- (2) *Milyen következménnyel jár a geometria egészére, ha egy konfiguráció valamely tulajdonságának megmaradását követeljük meg?*
- (3) *Van-e olyan konfiguráció és annak valamilyen tulajdonsága, amely kizárja az általánosítás lehetőségét (vagyis a geometria euklideszi, illetve hiperbolikus)?*

Mindegyik kérdés esetén érdekes annak felvetése is, hogy *ha egy tulajdonság teljesülését nem általánosságban, hanem csak egy-két esetben írjuk elő, akkor az ugyanazt az eredményt adja-e?*

Az értekezés olyan vizsgálatainkról ad képet, amelyek kivétel nélkül a klasszikus euklideszi, illetve hiperbolikus geometriák Minkowski-, illetve Hilbert-geometriák közti karakterizációjához vezetnek.\*

A háromszögekkel kapcsolatos olyan ismert konfigurációkat vizsgálatunk, amelyekre vonatkozólag analóg tételek teljesülnek az euklideszi és a hiperbolikus geometriában is. Ilyenek a Ceva- és Menelaosz-tételek, amelyek automatikusan teljesülnek a Minkowski-geometriákban, és a hiperbolikus osztóviszonnyal a hiperbolikus síkon

\*Az értekezésben szereplő fogalmakra, állításokra az egyszerű azonosíthatóság kedvéért úgy hivatkozunk, hogy az ottani sorszámuk elé a „D:” utalást szúrjuk be.

is igazolhatók (D: 2.14. HIPERBOLIKUS MENELAOSZ-TÉTEL és D: 2.15. HIPERBOLIKUS CEVA-TÉTEL), de ilyen a háromszögek magasságvonalainak, illetve oldalfelező merőleges egyenesének egy nyalábhoz tartozása is (D: 2.17. HIPERBOLIKUS MAGASSÁGPONT-TÉTEL és D: 2.16. HIPERBOLIKUS BISZÉKTORÁLIS CENTRUM-TÉTEL). Mivel a Birkhoff-merőlegességi reláció (D: 2.12. DEFINÍCIÓ) nem szimmetrikus, külön problémaként foglalkozunk a Minkowski-, illetve a Hilbert-geometriában a *háromszögek oldalfelező merőlegeseinek*, illetve *magasságvonalainak* egy pontra illeszkedésével a Birkhoff-merőlegesség (a továbbiakban bal-merőlegesség), illetve annak a megkülönböztetésül *jobb-merőlegességnek*, illetve  $\mathcal{H}$ -merőlegességnek elnevezett inverze esetében.

Kutatásunk során fontos szerephez jutnak a szigorúan konvex tartományok körül-, illetve beírt (minimális, illetve maximális térfogatú) *John*-, illetve *Löwner-ellipszoidjai*. Ezeknek a tartománnyal való érintési pontjaira vonatkozó alapvető állításokat is áttekintjük (D: 2.10. LEMMA és D: 2.11. LEMMA).

Több technikai jellegű állítás mellett egy ellipsziskarakterizációs eredményt és egy oválisokba írt háromszögekre vonatkozó Ceva-típusú tételt is igazolunk. Ezek önmagukban is érdekesek (D: 3.5. TÉTEL és D: 3.7. TÉTEL). Az ellipsziskarakterizációs eredményünk egy harmonikus elválasztásra építő jellemzés, amelynek duális a — a Ceva- és a Menelaosz-tétel révén — ekvivalens Segre egy tételével.

A Hilbert-geometriákra vonatkozóan igazoljuk, hogy a *hiperbolikus geometriát karakterizálja, ha minden trigon rendelkezik*

- \* a Ceva-tulajdonsággal (D: 4.1. TÉTEL);
- \* a Menelaosz-tulajdonsággal (D: 4.2. TÉTEL);
- \* biszektoralis centrummal<sup>12</sup> (D: 4.3. TÉTEL);
- \* ortocentrummal<sup>13</sup> (D: 4.4. TÉTEL).

Az utóbbi két állítás kapcsán utalnunk kell arra, hogy azok a D: 2.20. DEFINÍCIÓ szerinti (Birkhoff-féle) merőlegesség  $\mathcal{H}$ -merőlegességnek nevezett inverzét használják, mert a Birkhoff-féle merőlegesség esetében nem jutottunk eredményre, és az irodalomban sem találtunk arra vonatkozó tételt.

Minkowski-terekben igazoljuk, hogy az *euklideszi geometriát karakterizálja a Minkowski-geometrián belül, ha minden trigon*

- \* jobb-merőleges oldalfelezői konkurensok (D: 5.1. TÉTEL);
- \* jobb-merőleges magasságainak egyenesei konkurensok (D: 5.2. TÉTEL);
- \* bal-merőleges oldalfelezői konkurensok (D: 5.3. TÉTEL);
- \* bal-merőleges magasságainak egyenesei konkurensok (D: 5.4. TÉTEL).

<sup>12</sup>Vagyis az oldalfelező merőlegesek egy nyalábhoz tartoznak.

<sup>13</sup>Vagyis a magasságvonalak egyenesei egy nyalábhoz tartoznak.

Karakterizációs eredményeinket általában indirekt módon bizonyítjuk a Hilbert-geometriát megadó vagy a Minkowski-geometriát definiáló szigorúan konvex tartomány és a köré írt minimális térfogatú John–Löwner-ellipszoid összehasonlításával. Ennek során mindig elegendőnek bizonyult (D: 2.7. LEMMA) a síkbeli esetben eljárni, vagyis egy szigorúan konvex határoló görbét és egy ellipszist összevetni e két görbe közös pontjainak száma és elrendeződése alapján. Valójában minden esetben olyan nem elfajuló háromszöget adunk meg, mely nem teljesítheti az adott feltételeket. Emiatt bizonyos értelemben *minden eredményünk tekinthető akár ellipsziskarakterizációs tételnek is.*

Végül megjegyezzük még, hogy habár az túlmutat ezen értekezés keretein, a hiperbolák esetén is választ kerestünk hasonló kérdésre: vajon egy projektív metrika klasszikus, ha benne egy metrikus hiperbola kvadratikus? A Minkowski- és a Hilbert-geometria esetében is sikerült igazolni [KKq], hogy egy hiperbola akkor és csak akkor kvadratikus, ha a geometria euklideszi, illetve Bolyai-féle hiperbolikus.

## Summary

In the dissertation, we present our research in the fields of projective metric geometries, in the course of which, we characterize the hyperbolic and Euclidean geometry among Hilbert, respectively Minkowski geometries by geometric configurations.

Most mathematicians know Minkowski geometries as normed vector spaces, and a wide literature counts their attributes and properties [1]. The research of Hilbert geometry falls into line in our days, with further various results [36].

Likewise Minkowski geometry is a straight generalisation of the Euclidean geometry, an immediate generalisation of hyperbolic geometry is Hilbert geometry. That is why investigations of properties of configurations well known from Euclidean and hyperbolic geometries is of prime importance in exploring these geometries.

Therefore, the general starting point of our dissertation was the question: what kind of properties do have some configurations — deliberately characterized in other geometries — in Minkowski and Hilbert geometries, furthermore, in case of fulfilling certain conditions, what sort of consequences shall we have take into account? Pursuant to this, a survey of the basic features of geometries under investigation is given. Beyond that of Minkowski geometries, a description of the hyperbolic and Hilbert geometries is given,

and afterwards the following questions are investigated:

- (1) *What properties of the particular configurations continue in the general case, and which properties will stop to characterize the configuration?*
- (2) *What kind of consequences implies for the whole geometry if a certain property of a configuration is required to retain?*
- (3) *Are there any configuration and a particular property of it which block the way of generalisation (i.e. the geometry will be Euclidean, respectively, hyperbolic)?*

In case of all questions worth to bring up the following problem: *if the fulfilment of a property is not a general requirement, but holds only for some specific cases, then will it result in the same result?*

The dissertation draws a picture of investigations which lead, without exception, to characterisation of classic Euclidean, respectively hyperbolic geometries among Minkowski, respectively Hilbert geometries\*.

We start with investigation of some significant configurations in connection with triangles, analogous theorems about which are well known in hyperbolic geometry, as well. A proof, in the Cayley–Klein model, is shown for the hyperbolic

---

\*For the sake of easier identification, notions and statements from the dissertation are referred so that reference „D:” is inserted before their numbers.

version of the Ceva's and Menelaus' theorems (HYPERBOLIC MENELAUS' THEOREM D: 2.14 and HYPERBOLIC CEVA'S THEOREM D: 2.15) which automatically come true in Minkowski geometries, as well as for the statement that altitudes, respectively orthogonal bisectors of triangles belong to a bundle (THEOREM ON HYPERBOLIC ORTHOCENTRE D: 2.17 and THEOREM ON HYPERBOLIC BISECTORAL CENTRE D: 2.16).

As the Birkhoff-orthogonality (DEFINITION D: 2.12) is not symmetric, concurrency of perpendicular bisectors and that of altitudes should be treated separately in Minkowski and Hilbert geometries in the case of Birkhoff-perpendicularity (*left-perpendicularity* for later use), and in the case of its inverse relation, called *right-perpendicularity*, or  $\mathcal{H}$ -perpendicularity, for the sake of distinction.

In the course of our research the inscribed (maximal volume) respectively the circumscribed (minimal volume) ellipsoids (called *Loewner*, respectively, *John ellipsoids*) of strictly convex bodies play a prominent role. Some basic statements regarding the tangent points of these ellipsoids to the convex bodies are considered: LEMMA D: 2.10 and LEMMA D: 2.11.

Besides several statements of technical kind, we prove a result about ellipse characterisation, and a theorem of Ceva type about inscribed triangles of ovals, which are interesting on their own, as well (THEOREM D: 3.5 and THEOREM D: 3.7). The ellipse characterisation is build upon harmonic division, dual of which is equivalent to — by means of Ceva's and Menelaus' theorem — a theorem of Segre.

With respect to Hilbert geometries is proven that *hiperbolic geometry is characterized by the property that every trigon possesses*

- ★ the Ceva property (THEOREM D: 4.1);
- ★ the Menelaus property (THEOREM D: 4.2);
- ★ a bisectoral centre<sup>14</sup>. (THEOREM D: 4.3);
- ★ an orthocentre<sup>15</sup> (THEOREM D: 4.4).

As regards latter two statements, we have to mention that they apply the inverse of the Birkhoff-perpendicularity, called  $\mathcal{H}$ -perpendicularity, (DEFINITION D: 2.20) as we could not achieve any result in the case of Birkhoff-perpendicularity, and we could not find any reference to a result of that kind in the literature.

In Minkowski spaces, it is proven equally for the case of the left- and the right-perpendicularity that *the Euclidean geometry is characterised by the property that every trigon possesses*

- ★ the right-bisectoral centre (THEOREM D: 5.1);
- ★ the right-orthocentre (THEOREM D: 5.2);

<sup>14</sup>I.e., perpendicular bisectors belong to a bundle.

<sup>15</sup>I.e., altitudes belong to a bundle.



- ★ *the left-bisectoral centre* (THEOREM D: 53);
- ★ *the left-orthocentre* (THEOREM D: 54).

In our indirect proofs the defining strictly convex bodies of the Hilbert- or Minkowski-geometries and their circumscribed minimal volume John–Löwner ellipsoids are compared. The demonstrations can be restricted to the (two dimensional) planar case (LEMMA D: 2.7), that is, to a strictly convex curve and an ellipse. We suppose that they do not coincide, and in each case, according to the number and the arrangement of the common points of the two borders, we look for such a non-degenerate triangle that can not fulfill the given assumption. That is why our results can be considered ellipse characterisation theorems with good reason too.

Finally, albeit it outreaches the subject of our dissertation, we notice that we have considered similar question for hyperbolas: *Is a projective metric a classic one if a hyperbola is quadratic in it?* We could prove, in the case of the Minkowski and the Hilbert geometries equally, that a hyperbola is quadratic if and only if the geometry is a Euclidean, respectively, a hyperbolic geometry.