Feladat megoldási módszerek összehasonlító vizsgálata a pedagógus illetve a diák rendelkezésére álló ismeretek birtokában.

Doktori értekezés

Fülöp Zsolt

Témavezető:

Dr. Szalay István

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Szegedi Tudományegyetem
Természettudományi és Informatikai Kar
Bolyai Intézet

2017
Szeged

Tartalomjegyzék

"...nem szabad semmi olyant elmulasztani, aminek valami
esélye van arra, hogy a diákokhoz közelebb hozza a matematikát.
A matematika nagyon absztrakt tudomány -
éppen ezért nagyon konkrétan kell előadni." (Pólya György)

1. Bevezetés

1.1. A témaválasztás indoklása, kutatási előzmények

Kutatási tevékenységem középpontjába a problémamegoldási képesség kettős szemlélettel való megközelítését helyeztem, amint előzetesen közölt legfontosabb publikációimból is kiderül [20]-[28]. Gyakorló pedagógusként nagy szükségét éreztem annak, hogy az elemi matematikai problémákat kettős látásmódban szemléljem: elemi matematikai ismeretekkel (amelyek a diák rendelkezésére állnak), illetve olyan felsőbb matematikai eszközökkel, amelyekkel a diák nem rendelkezik, mivel ezek a főiskolai vagy egyetemi képzés része (ezek az ismeretek viszont a tanár rendelkezésere állnak). Ilyen értelemben egy problémát megközelíthetünk "diák-eszköztárral", illetve "tanár-eszköztárral", ugyanakkor beszélhetünk az adott probléma "diák-megoldásáról", illetve "tanár-megoldásáról" is.
Nagyon sok esetben egy matematikai problémára a "tanár-megoldás" gyors választ ad, viszont olyan matematikai eszköztárat feltételez, amely nem áll a diák rendelkezésére, ugyanakkor diákjaink számára nem is magyarázhatjuk el. Ebben az esetben a tanár kidolgozza a "diák-megoldást" is, amely az esetek többségében több kreativitást igényel és szebb a "tanár-megoldásnál". A „diák-megoldást” a diák is megtalálhatja vagy önállóan, vagy pedig a tanár irányításával. A matematika tanításában a tanár előnyét a többlet-tudása képezi, amelyet változatos formában képes kamatoztatni az oktatási folyamat során.
A közoktatásban a matematika oktatás elsődleges célja a kreatív gondolkodásra való nevelés. A problémamegoldás fejlesztése és a felfedeztető tanítás szükségessé teszi a tanárok számára a feladatok kettős látásmóddal való megközelítését. Egy adott helyzetben a matematika tanár szembesülhet azzal, hogy a diákok között vannak olyanok, akik egy bizonyos matematikai problémát sokkal kreatívabban közelítenek meg, viszont az adott feladatról a tanárnak kell legtöbbet tudni az osztályban. Ez a tanári többlet-tudás, amelyet az egyetemi képzés során szerez, lehetővé teszi számára a matematikai problémák általánosabb és sokrétűbb megközelítését. Ugyanakkor erről a többlettudásról nagyon sok pedagógus úgy vélekedik, hogy matematikai gondolkodásának kialakításán és látókörének szélesítésén túl nem sok konkrét hasznát látja az oktatási folyamat során. Viszont nagyon sok problémára előbb a "tanár-megoldás" adja a választ, majd ennek a megoldásnak a birtokában következik a problémamegoldási folyamat kidolgozása

"diák-eszköztárral". Lénárt F. szerint az iskolai oktatás során a diák számára problémát jelenthet például egy olyan feladat, amelyhez hasonlóval még nem találkozott és a megoldást tanári segítség nélkül, saját tudására támaszkodva kell megoldani [56]. A problémamegoldás különböző megközelítéseivel találkozunk Pólya Gy. munkáiban (lásd [75] és [76]). A problémamegoldás vizsgálata a magyar szakmódszertanban újabb lendületet kapott Ambrus A. munkásságával (lásd [2] és [3]).
A problémamegoldási folyamat megtervezése során figyelembe kell venni a problémamegoldás kognitív, metakognitív és affektív komponenseit. A kognitív komponens a problémamegoldáshoz szükséges fogalmak, összefüggések, stratégiák ismeretét jelenti. A tanár úgy kell kidolgozza a megfelelő "diák-megoldást", hogy az összhangban legyen az adott évfolyam matematikai ismereteivel, tudástárával. A metakognitív komponens a saját tudás működtetésének kontrollját, a problémamegoldás közben végrehajtott önszabályozó mechanizmusok összességét jelenti. Az önszabályozó mechanizmusok sorába tartozik a problémamegoldásra tett kísérlet eredményének ellenőrzése, a problémamegoldás következő lépésének megtervezése, a végrehajtott cselekvés hatékonyságának megfigyelése. Ennek a komponensnek a vizsgálata a "tanár megoldás-diák megoldás" dichotómiából kiindulva kiemelt fontossággal bír. Teljesen másképp látja a megoldás folyamatát a pedagógus (aki "tanár-eszköztárral" rendelkezik), mint a diák, amelynek tudástára jóval szűkebb, illetve másképp működnek az elvonatkoztató, analizáló és szintetizáló képességei. Az affektív komponens a problémához való pozitív hozzáállás, önbizalom és kitartás erősítését jelenti. Hiába dolgozza ki a tanár (a "tanár-megoldásból" kiindulva) azt a "diák-megoldást", amely a tanulókban ellenérzést vált ki (még akkor is ha az adott évfolyam diákjai rendelkeznek az illető megoldáshoz szükséges módszerekkel). A tanári többlettudás nemcsak a problémák megoldásában játszik fontos szerepet, hanem az új (vagy a diák számára újszerűnek tűnő) feladatok megalkotásában is. A tanár tankönyvből vagy feladatgyűjteményből válogat feladatokat oktató munkájához. Ez viszont sok esetben akadályokba ütközik, ugyanis nem mindig talál az adott témakörhöz olyan feladatokat, amelyek összhangban vannak az adott tanulók tudásszintjével és szervesen illeszkednek az oktatott témakörbe. Bármennyire sokrétű és differenciált egy feladatgyűjtemény, akkor sem elégítheti ki teljes mértékben az igényeket, ugyanis az osztályközösségek összetétele, tudásszintje egyedi sajátosságokat mutat. Esetenként egy tanóra keretén belül, az előkészített feladatok feldogozása során derül ki, hogy a pedagógusnak újabb problémákat kell "rögtönöznie". Ez történhet például amikor a tanulói kérdések, ötletek analóg problémák felvetését teszik szükségessé. Ezért jelenik meg az egyetemi-főiskolai oktatási gyakorlatban a problémamegoldás tanítása mellett a problémaalkotási képesség fejlesztése. Az új problémák megalkotásának egyik módja, hogy egy viszonylag egyszerű alapfeladatból kiindulva a tanár egy általá-

nos feladatot alkot (amely például paramétereket is tartalmazhat), amelyet "tanári módszerrel" old meg. Az így megalkotott általános feladat különböző speciális eseteit véve egy feladat-család keletkezik, ezeknek a feladatoknak a megoldása viszont már "diák-eszköztárral" is megvalósítható. A „tanár-megoldás” és „diák-megoldás” kettősségével, illetve a feladatok kettős látásmódban való megközelítésével találkozhatunk Szalay István egyik cikkében [90].
A tanár a matematika különböző témaköreit a "tanár-eszköztár" és "diák-eszköztár" kettősséggel szemlélve a különböző problémákhoz igazodó ismert és új módszereket használ fel, állandóan bővítve és megújítva a rendelkezésére álló matematikai és szakmódszertani apparátust, és ezzel fokozatosan gazdagítja saját tudományos eszköztárát.

1.2. Célkitűzés

A fentiekben említett szemléletből kiindulva célul tűztük ki a következő témakörök feldolgozását:

1. *A szöveges feladatok aritmetikai, illetve algebrai módszerekkel való megközelítése az általános iskolás tanulók körében*:
A nemzetközi szakirodalomban nem létezik egységes álláspont arra vonatkozóan, hogy az aritmetikai módszerekről az algebrai módszerekre való áttérés milyen életkorban, milyen módszerekkel, illetve milyen előzetes felvezetéssel történjen. 6. osztályos tanulók körében végzett felmérésekkel vizsgáljuk az algebrai módszerekre történő áttérés nehézségeit, a jellegzetes típushibákat. Megvizsgáljuk, hogy milyen típusú szöveges feladatok taníthatók algebrai módszerekkel a 6. évfolyamon. Ezeknek a feladatoknak az általános algebrai modelljéből kiindulva a tanárok számára útmutatásokat fogalmazunk meg.
8. osztályos tanulókon végzett felmérések segítségével vizsgáljuk, hogy ezek a tanulók mennyire képesek a tanult algebrai ismereteket alkalmazni a szöveges feladatok megoldásában, illetve melyek azok a feladat-típusok, ahol még az aritmetikai módszerek dominálnak.

2. *A szélsőérték-problémák megközelítése tanár, illetve diák-eszköztárral*:
A legtöbb szélsőérték-probléma megoldásának hatékony "tanár-eszköze" a differenciálszámítás ide vonatkozó módszereinek az alkalmazása. Ezek a módszerek viszont sok esetben sablonosak, fő hátrányuk pedig az, hogy nem taníthatók a normál középiskolai oktatásban. Megvizsgáljuk azokat a "diák-módszereket", amelyek segítségével ezek a problémák megközelíthetők. Elemezni fogjuk továbbá azokat az eljárásokat, amelyek során a "tanár-eszköztárral" megoldható szélsőérték-problémákból kiindulva hogyan alkothatunk olyan feladatokat, amelyeket a normál középiskolai oktatásban is ki

lehet tűzni.
Egy felmérés során megvizsgáljuk a 10-11. osztályos tanulók problémamegoldó képességeit a szélsőérték-feladatok megoldása során.

3. *A tanári problémaalkotás a matematikai indukció és a számelmélet fejezetek tanítása során*
Megvizsgáljuk, hogy milyen módszerek állnak a tanár rendelkezésére ahhoz, hogy az említett fejezetek tanítása során (saját többlet-tudását felhasználva) újszerű problémákat alkosson, amelyeket tanórán kitűzhet. Ezek az ötletek hasznosak lehetnek arra vonatkozóan, hogy a tanár a matematika más fejezeteinek tanítása során is önállóan alkosson új problémákat.

4. *A matematika és a nyelv viszonyának vizsgálata tanár, illetve diák-eszköztárral*:
A kijelentések tagadását vizsgáljuk matematikai, illetve nyelvi eszközökkel. A "tanár-eszköztár" része a matematikai logika műveleti szabályainak ismerete, a diákok viszont (kivételt képeznek a 12. osztályosok) leginkább nyelvi ismereteikre hagyatkozhatnak. Egy 7-12. osztályos tanulókon végzett felmérés során arra keressük a választ, hogy a tanulók milyen módon közelítik meg néhány kijelentés tagadását.

Részben a kutatási folyamatokból adódóan, részben a disszertáció megírása során szerzett tapasztalatok eredményeképpen, részben a korábbi szakmai-oktatási tapasztalatokból kiindulva megpróbálunk következtetéseket megfogalmazni a különböző módszerek előnyeire és hátrányaira vonatkozóan.
Az említett témakörök feldolgozásával bizonyítani kívánjuk egyrészt a "kettős-szemlélet" gazdag felhasználásának lehetőségeit, másrészt azt, hogy egy-egy probléma megoldása során nagyon eltérő problémamegközelítések is helyénvalóak lehetnek és ezek a differenciált utak végső soron ugyanahhoz az eredményhez vezetnek. Egyes témakörök esetében megjelöljük azokat az irányvonalakat, amelyek további kutatások tárgyát képezhetik.

2. Szöveges feladatok megoldása az általános iskolában

2.1. Az aritmetikáról az algebrára való áttérés az általános iskolában

2.1.1. A szöveges feladatok kettős megközelítésének főbb szempontjai

A szöveges feladatok megoldása már az elemi osztályos matematika oktatásban jelen van, viszont az általános iskola felső évfolyamain egy különös módszertani jelentőséggel bír. Ugyanis ezeken az évfolyamokon történik meg az átmenet az aritmetikai módszerekről algebrai módszerekre, ez pedig a tanár-tudás egy bizonyos részének diák-tudássá alakulását jelenti. Egyre több szöveges feladat esetében a diák is képes az algebra eszköztárát felhasználni, ezáltal megnyílik a lehetőség, hogy a tanár egyre bonyolultabb és összetettebb feladatokat jelöljön ki. Amint a későbbiekben látni fogjuk, ez a folyamat nagyon sokrétű, rengeteg leleményességet igényel a pedagógus részéről. Pontosan ezért nagyon fontos, hogy a tanár tisztában legyen a "kettős-látásmód" mindazon vetületeivel, amely a szöveges feladatok megoldásában hasznos lehet. Elsősorban ismernie kell az adott típusú feladatok összes megoldási módszerét, át kell látnia a párhuzamot a saját eszközeivel megalkotott módszerek és a diák ismeretanyagával kivitelezhető megoldások között. Másodsorban meg kell terveznie azt a stratégiát, amellyel fokozatosan a diák eszköztárát bővíti, vagyis bizonyos tanár-módszereket diák-módszerré alakít át. Ez a feladat nem egyszerű, mivel a tervezés során mindig szem előtt kell tartsa a tanítványai életkori sajátosságait, a tudás-szintjüknek alakulását, az osztályközösség nyitottságát az új módszerek irányába, stb. Tudnia kell, hogy a módszerek összességéből melyek azok, amelyeket a diák nemcsak megért és befogad, hanem később alkalmazni is tud.
A feladatok megoldása során az aritmetikai és algebrai módszerekkel kapcsolatban feltétlenül szükséges figyelembe venni a következő szempontokat:

(1) Minden feladat, a legegyszerűbbtől a legnehezebbig, kezelhető mindkét megközelítésben;

(2) A két megközelítés nagyon hasonló, olyan szempontból, hogy a tényleges számítások szinte ugyanazok mindkét esetben;

(3) A nehezebb feladatok irányába haladva, az aritmetikai megközelítés egyre több erőfeszítést igényel, míg az algebrai módszerekkel többé-kevésbé ugyanaz marad a módszer alkalmazásának nehézségi foka; ezalatt elsősorban azt értjük, hogy a könnyebb feladatok algebrai megközelítése sokszor túlzottan aprólékosnak tűnik, viszont a későbbiekben, a nehezebb feladatok esetében, ez a megközelítés bizonyul hatékonyabbnak;

(4) Az algebrai megoldások sok esetben rugalmasabbak; az ismeretleneket többféleképpen választhatjuk meg, viszont a megoldás menete, struktúrája majdnem ugyanaz, a különböző megoldások könnyen összehasonlíthatók; az ezekkel párhuzamos aritmetikai megközelítések viszont sokszor nagyon eltérnek egymástól;

(5) Az általános iskolai oktatásban mindkét megközelítés bemutatása nagyon fontos a tanórai tevékenységek során; a feladatok megoldása mindkét módszerrel azért szükséges, mert az általános iskolás tanulók egy része még 8. osztályos korában is nehezebben boldogul az algebra eszköztárával, míg mások már 6. osztályos korban is könnyedén kezelik azt;

(6) Algebrai megközelítés esetén nagyon fontos a változók helyes meghatározása, a tanuló tisztában kell legyen, hogy a betűvel jelölt ismeretlen mindig valamilyen számot jelöl;

(7) Olyan feladatok esetében, ahol úgy az algebrai, mint az aritmetikai megközelítés viszonylag bonyolult, nagyon hasznos lehet a hamis feltételezések módszere (ezt a nemzetközi szakirodalom *regula falsi* néven említi); ez azért is indokolt, mert a tanulók ha nem találnak egy megoldási módszert az adott problémára, akkor hajlamosak arra, hogy próbálgatással kitalálják a megoldást; a hamis feltételezések módszere viszont szisztematikusabbá, ezáltal "okosabbá" teszi a próbálgatást;

(8) Az algebrai egyenletek felírása során nagy hangsúlyt kell fektetni arra, hogy eg bizonyos betűszimbólum csak egyfajta ismeretlent jelöljön, ugyanis a tanulók hajlamosak arra, hogy ugyanazzal a betűvel két különböző, a feladat szövegében szereplő, ismeretlen mennyiséget jelöljenek.

2.1.2. Az aritmetikáról az algebrára való áttérés elméleti hátere

Az áttérés az aritmetikai módszerekről algebrai módszerekre az általános iskola 5-8. évfolyamain történik. Értelemszerűen ez a folyamat nem egyik pillanatról a másikra történik, a módszerek bevezetése fokozatosan, lépcsősen valósul meg. A tanulók először a változók fogalmával, az egyismeretlenes egyenletek különböző típusaival ismerkednek meg, majd a továbbiakban képesek lesznek a különböző matematikai problémákat lefordítani az algebra nyelvére. A szöveges feladatok algebrai módszerekkel, egyenletekkel való megoldása is ennek a viszonylag hosszú folyamatnak egy végső eredménye. Ebben az esetben is nyomon követhető az a fokozatosság, amit az említett áttérés jelent. Első fázisban az algebra nyelvére

könnyen lefordítható feladatok (a későbbiekben ezekre "algebrai feladatként" fogunk utalni) kerülnek előtérbe. Az algebrai ismeretek bővülése és a tanulói gondolkodás fejlődése lehetőséget teremt az egyre komplikáltabb problémák algebrai eszközökkel történő megközelítésére. Végül eljutunk az egyenletrendszerekkel megoldható szöveges feladatokig, amely már a középiskolás képzés része.
Ebben a tanulmányban a fent említett témakörben végzett nemzetközi kutatások néhány vetületéhez kapcsolódnánk. Ennek az igénye a magyarországi matematika oktatásban különös jelentőséggel bír. A 6. évfolyamon már megjelenik a szöveges feladatok algebrai úton történő megközelítése, annak ellenére, hogy az algebrai kifejezések tanítása a 7. osztályos tananyag részét képezi. Ilyen körülmények között még általában az aritmetikai gondolkodásmód dominál, nem létezik az a fajta absztrakciós képesség, amely az algebrai fogalmak megértését szolgálja. Az egyenletek megoldási módszerei már 6. évfolyamon is könnyen taníthatók, viszont a szöveges feladatok lefordítása az algebra nyelvére még jelentős nehézségekbe ütközik. További nehézségeket jelent, hogy a tanulók tipikusan aritmetikai gondolkodásmódja megnehezíti bizonyos típusú szöveges feladatok algebrai úton való megközelítését. Ezért nagyon fontos körülhatárolni azokat a feladat-típusokat, amelyek a 6. évfolyamon (az algebra bevezetésének nagyon kezdetleges szakaszában) már taníthatók. Fontos beazonosítani azokat a nehézségeket, amelyeket az aritmetikáról az algebrára való áttérés jelent és amelyek az algebra tanításának kezdeti fázisaiban hatványozottan jelen vannak.
Külön vizsgálat tárgyát képezi az aritmetikai és algebrai eszközök alkalmazása a 8. évfolyamon. Ezek a tanulók már ismerik az algebrai kifejezéseket, a változókkal és betűszimbólumokkal történő manipulációt és műveleti szabályokat. Az ők esetében is érdemes vizsgálat tárgyává tenni, hogy milyen arányban vannak jelen az aritmetikai, illetve algebrai módszerek a szöveges feladatok megoldása során, továbbá melyek azok a feladat-típusok, amelyek algebrai eszközökkel való megközelítése még ezen az évfolyamon is nehézkes. Az algebrai eszközök alkalmazása során még ebben az életkorban is fellépnek bizonyos típus-hibák, amelyeket érdemes megvizsgálni. A kutatás során szerzett tapasztalatokat párhuzamba lehet állítani a nemzetközi kutatásokban elért eredményekkel.
A matematika oktatásban az algebrai fogalmak bevezetése az aritmetikai műveletek vizsgálatán keresztül történik, a különböző ismeretlen mennyiségeknek és számoknak betűszimbólumokkal történő helyettesítése révén. Ez a folyamat általában az aritmetikai műveletek változókkal történő általánosításában és az egyenletek vizsgálatában és megoldásában nyilvánul meg [97]. Amikor a tanulók áttérnek az aritmetikai gondolkodásról az algebrai gondolkodásra nagyon fontos, hogy ők tisztában legyenek egy bizonyos probléma vagy feladat számadatai közötti összefüggésekkel, el tudják a feladatot hétköznapi nyelven mondani, és utána képesek legyenek betűszimbólumokkal leírni [32]. Ez a folyamat feltételezi az áttérést az

"aritmetikai egyenletekről" (ahol a számadatokkal végzett műveletek dominálnak) az "algebrai egyenletekre" (ahol változókkal vagy ismeretlenekkel végezzük a műveleteket). Két nagyon fontos vetületet kell vizsgálni az aritmetikáról algebrára történő áttérés során. Elsősorban, a betűk használatát (amelyek számokat jelölnek) kell pontosan megismertetni, másodsorban pedig nagy figyelmet kell fordítani a matematikai módszerre, amelyet a számok, betűk és műveletek segítségével vezetünk be [17], [43], [44].
A probléma matematikai struktúrájának ismerete nagyon fontos az algebrára való sikeres áttéréshez. A probléma matematikai struktúrája valójában a következő tényezőkkel áll összefüggésben: a mennyiségek közötti viszonyok (pl. egyenlő, kisebb, nagyobb, legalább, legfeljebb); műveletek tulajdonságai (pl. asszociatív, kommutatív, ellentétes művelet, ekvivalens művelet); a műveletek közötti viszonyok (pl. egyik művelet disztributivitása a másikra nézve); a mennyiségeken átívelő viszonyok (pl. az egyenlőség vagy egyenlőtlenség tranzitivitása). Általában a tanárok azt feltételezik, hogy a diákok már az aritmetikai módszerek gyakorlása során a fent említett tényezőkkel tisztában vannak, ezért az algebrára való áttéréskor nem fektetnek nagy hangsúlyt ezek gyakorlására, elmélyítésére [64].
A tanulók sok esetben komoly gondokkal küzdenek az aritmetikáról az algebrára történő áttérés során. Gyakran az első ilyen nehézségek akkor adódnak, amikor a tanulók megpróbálnak algebrai egyenleteket felírni a szöveges feladatok megoldásakor. Ebben az esetben a tanárnak tisztában kell lennie azokkal a kognitív folyamatokkal, amelyek lehetővé teszik az ilyen problémák megoldását. Az algebra egy olyan absztrakt rendszer, ahol a különböző kapcsolatok és kölcsönhatások az aritmetika struktúráját követik [13], [14], [37]. Az algebra eszközrendszere absztrakt sémákon és az aritmetikai műveletek strukturális koncepcióin alapszik [71],[81],[82]. Az algebra a műveleti tulajdonságokat és az egyenlőséget a különböző változókkal kombinálja [13]. Az aritmetika nem absztrahál olyan szinten mint az algebra. Bár mindkettőre érvényes, hogy a műveleti tulajdonságok (műveletek sorrendje, ellentétes művelet stb.) alapos megértését igénylik, az aritmetika csak a számokra és számokkal végzett műveletekre korlátozódik [32], [57], [60]. Az aritmetika és algebra közötti alapvető különbség, hogy az aritmetikában a műveletek folyamata szervesen elkülönül a kapott eredménytől, ezeket egyenlőségjel választja el egymástól [59]. Az algebrában az egyenlőségjel ekvivalenciát jelent, ahol a műveletek fordított irányban is végrehajthatók [42], [57].
Sok esetben azok a nehézségek, amelyekbe a diákok ütköznek az algebra tanítása során valójában számolással kapcsolatosak. Például, Linchevski és Livneh [60] egy 6. osztályosokon végzett felmérés során arra a következtetésre jutottak, hogy a tanulók algebrával kapcsolatos nehézségei valójában számolási eredetűek. A tanulók nem vették figyelembe a műveletek sorrendjét, zárójeleket hagytak el, nem értették meg a tagok eltűnését az egyenletek megoldása során. Norton és Irvin

egy felmérés esetében azt tapasztalták, hogy az algebrai műveletek elvégzése során vétett hibák kizárólag aritmetikai eredetűek [68] .
Slavitt tíz szempontot különböztet meg, amelyek alapján fel lehet mérni a tanulók műveletekkel kapcsolatos készségeit és betekintést lehet nyerni az algebrai gondolkodás kialakulásával kapcsolatban [83]. Ezek a szempontok, attól függően, hogy mire vonatkoznak, három nagy csoportba sorolhatók, nevezetesen tulajdonságokkal, alkalmazással illetve relációkkal kapcsolatos szempontok. A tulajdonságokkal kapcsolatos szempontok elsősorban a műveleti tulajdonságok ismeretére, az illető műveleteket képviselő különböző szimbólum-rendszerek megértésére irányulnak. Az alkalmazási szempontok magukba foglalják az illető műveletek alkalmazását különböző szövegösszefüggésekben, illetve változókra és ismeretlenekre vonatkozóan. A relációkkal kapcsolatos szempontok a műveletek közötti összefüggések, a számfogalom különböző szintjein történő reprezentációknak a megértését foglalják össze. Az említett szempontokban foglaltak szükségessé teszik azokat a képességeket és készségeket, amelyek a probléma megoldása során a műveleti tulajdonságok, relációk és alkalmazások közötti áthajlásokat szolgálják. Tehát az algebrára való áttérés sokkal többet igényel, mint az aritmetikai tulajdonságok absztrakciója, megköveteli a műveletek általánosításának megértését is. A tanulóknak nemcsak a műveleteknek a lényegét kell megértsék, hanem ezeket egy bizonyos szimbólumrendszerben alkalmazniuk is kell.
Több felmérés is rávilágított azokra az akadályokra, amelyeket a tanulók aritmetikai tapasztalatai jelentenek az algebra tanítása során. Ezek a munkák elsősorban a két rendszer közötti különbségekre helyezték a hangsúlyt, mint például a különböző szintaxisok [61], egyenlőségjel szerepének a megértése ("closure") [12], [44], [70], a betűk rövidítésekként való használata [6], manipuláció [7], változók és objektumok [12], [18], [19] és egyenlőségek [96].
Sfard az algebrát "általánosított aritmetikának" tekinti, amely az "operacionális vagy procedurális" és "strukturális" fázisból áll. Az "operacionális vagy procedurális algebra" úgy foglalható össze, mint az algebrának az a része, amely az aritmetikai műveletekhez kapcsolható, például a $2 \cdot x + 5 = 11$ egyenlet megoldása. Ebben a fázisban az egyenletek megoldása lebontogatással összekapcsolható az aritmetikában jól ismert visszafelé következtetés módszerével. A "strukturális algebra" az olyan műveletekre vonatkozik, mint például a $3 \cdot x + y + 8 \cdot x$ algebrai kifejezés egyszerűsítése összevonással. Egy másik példa az olyan egyenletek megoldása, amelyek mindkét oldalán találunk változókat, tehát a visszafelé következtetés nem elégséges megoldási módszer. Ebben az esetben a megoldás megköveteli az "operacionális gondolkodástól" való elrugaszkodást ahhoz, hogy az egyenlet teljes struktúráját átláthassuk [82]. Ez a megközelítés más alapokra helyezi azt az általános koncepciót, hogy az algebra felépítése a diákok előzetes aritmetikai ismereteire támaszkodik, amelyet később a magasabb rendű absztrak-

ciók irányába kell kiterjeszteni. Az előzetes tudás magában foglalja az aritmetikát a saját szimbólumrendszerével, műveleteivel és törvényeivel. A további szükséges tudás az algebrai kifejezések partikuláris jegyeinek ismerete, mint például a változó, együttható, egyenlet, egyenlőtlenség, ekvivalencia, stb [55], [43]. Stacey és MacGregor a "formális algebra" egy indikátorának tekintik a tanulóknak azt a képességét, hogy meg tudnak oldani olyan egyenleteket, amelyeknek mindkét oldalán találhatók változók [85], [86]. Filloy és Rojano kiemelték azt a nehézséget, amelyet az ilyen típusú egyenletek jelentenek, ezt egyenesen az aritmetika és algebra közötti "didaktikai bemetszésnek" ("didactic cut") neveztek [19].
Tall és Thomas az algebra három szintjét különböztették meg: értékmegállapításon alapuló algebra (evaluation algebra), amikor a helyettesítési értékeit számoljuk például a $4 \cdot x + 3$ algebrai kifejezésnek, az algebratanítás kezdeti fázisaiban; manipuláláson alapuló algebra (manipulation algebra), amikor az algebrai kifejezésekkel végezzük a műveleteket, például az egyenletek megoldása során; és az axiomatikus algebra, ahol az algebrai rendszereket, mint például a vektortereket vagy lineáris egyenlet-rendszereket definíciók és formális bizonyítások szintjén kezelünk [92].
MacGregor és Stacey több tanulmányban azokat a nehézségeket és buktatókat elemezték, amelyeket az algebrai jelölésekre való áttérés jelent. Arra a következtetésre jutottak, hogy az a fajta absztrakciós képesség, amelyet az algebrára való áttérés igényel a tanulók többségéből hiányzik, ugyanakkor a tanulók nehezen boldogulnak azokkal a feladatokkal, amelyekben a számok helyén betűk szerepelnek. Ezért azt javasolták, hogy az algebra tanítását a betűkkel való konkrét műveletekkel kell kezdeni, annak ellenére, hogy a betűk tárgyakként való használata szembemegy azzal a céllal, hogy a betűk bizonyos számokat jelképeznek. Továbbá kiemelték azt a tényt, hogy a tantervi követelmények szerint a tanulók az algebrai jelölésekkel csak néhány rövid fejezetben találkoznak, ezért hamar elfelejtik azt. Következésképpen szükségesnek tartják, hogy a matematika más fejezeteiben is előkerüljenek az algebrai jelölések [62], [87],[88].
Más kutatások az algebrai ismeretek elsajátításának alacsony színvonalát emelték ki [8]. Például, a középiskolás tanulók nagyon gyakran képtelenek alkalmazni a legalapvetőbb algebrai fogalmakat és készségeket a problémamegoldási szituációkban, illetve munkáikból nem tűnik ki, hogy megértették azokat az összefüggéseket, amelyek ezeknek a fogalmaknak a hátterében állnak. Az algebra tanítás nehézségeit több szakirodalmi anyagban dokumentálták [93], [80].
Booth az algebrai hibákat két csoportra osztotta: az algebrai válaszok nem számadatokkal kapcsolatos jellegéből, illetve a betűk és változók félreértelmezéséből fakadó hibák [7]. Herscovics és Kieran felfedték az egyenletekkel és az egyenlőségjellel kapcsolatos nehézségeket [31]. Megállapították, hogy az algebra oktatás során nem mindig sikerül áthidalni az aritmetika és algebra közötti szakadékot, főként a változók és az egyenlőségjel helyes értelmezésével vannak gondok. Nagyon

sok esetben az algebra tanítása és tanulása céltalan szertartások gyűjteményének tekinthető [15].
Clements az előforduló hibák okait tanulmányozta (például szövegértési problémák, a feladat lefordítása matematikai műveletekre, a kérdés megfogalmazása, figyelmetlenség, a motiváció hiánya) és arra a következtetésre jutott, hogy a legtöbb hiba a megfelelő szövegértés hiányából ered, valamint nehézséget okoz a megoldási módszer megválasztása is [11]. Newman szerint is a feladatok megoldása során a legnagyobb nehézséget a feladat szövegének megértése és az adatok közötti összefüggések felírása jelenti [66]. Radatz a fentieken kívül még olyan hibaforrásokat is említett, mint például a helytelen asszociációk, túlságosan merev sémákon alapuló gondolkodás, az előzetes ismeretek és tapasztalatok hiánya [79].
Yerushalmy és Schwartz támogatják azt a véleményt, hogy a függvény fogalmának, különböző reprezentációkban, az algebra bevezetésének kezdeteitől jelen kell lennie az oktatási folyamatban[99]. A függvények témaköre az alkalmazott matematika egyik központi eleme és több kutató javasolja az algebra tanításának függvénytani alapokra helyezését [55], [94], [47]. Napjainkban a számítógéppel támogatott matematika oktatás lehetővé teszi a függvények értéktáblázatának és grafikonjának könnyű és gyors elkészítését, a különböző kísérleti adatok leírását szolgáló függvények hozzárendelési szabályának a megállapítását és az algebrai műveletek végrehajtását. A függvények oktatása során is szemléletváltás szükséges: az absztrakt függvényfogalom helyett azt a vetületet kell kiemelni, hogy a függvény egy olyan eszköz, melynek segítségével könnyen leírhatunk bizonyos mindennapi jelenségeket. Egy ilyen szemléletből kiindulva, a hagyományos algebra-oktatás során előforduló alapvető fogalmak (például betűszimbólumok, változók, ismeretlenek, egyenletek) új értelmet nyernek [46]. A számítástechnikai segédanyagok felhasználásával a hagyományos értelemben vett "megoldani egy egyenletet" feladat két különböző megközelítést nyer: egyik a tipikus, szimbólumokkal való manipuláció, másik a függvény grafikonokról történő leolvasás és értelmezés; napjainkban ennek a két megközelítésnek az összefonódása egyre gyengül.

2.1.3. Néhány tipikus problémaszituáció összehasonlítása tanár- illetve diák-szemlélettel

Ebben a részben néhány szöveges feladatot próbálunk megközelíteni először tanár- majd diák-eszköztárral. A kettős szemlélet vizsgálatánál a főbb szempontok:
1) Az általános iskola 5. évfolyamán a szöveges feladatok megoldása kizárólag aritmetikai eszközökkel történik, az algebrai módszerek, illetve az egyenletek alkalmazása tanári eszköznek minősül. Kijelenthetjük ezt annak ellenére, hogy az 5. évfolyamon a tanulók már ismerkednek az egyismeretlenes egyenletekkel. Egyes tankönyvek esetében pedig a szöveges feladatok algebrai eszközökkel történő megközelítése is megjelenik.

2) Az egyismeretlenes egyenletek a 6. évfolyamon kezdenek beépülni a diák-eszköztárba. Egyes tanulók a szöveges feladatokat már könnyebben közelítik meg az algebra eszközeivel, megkezdődik az ismeretlenek betűszimbólumokkal történő helyettesítése és egyes feladatok esetében már az egyenletek felírása kiszorítja az aritmetikai számításokat. Ez a folyamat nem köthető egyértelműen egy bizonyos évfolyamhoz, inkább azt mondhatjuk, hogy lépcsősen valósul meg a 6-8. évfolyamokon. Itt figyelembe kell venni a tanulók életkori és egyéni sajátosságai mellett az illető matematikai probléma jellegét is. Vannak olyan tanulók, akiknek már 6. évfolyamon nem okoz gondot bizonyos szöveges feladatokat egyismeretlenes egyenletekkel megoldani. Mások estében viszont még 8. osztályos korban is inkább az aritmetikai módszerek bizonyulnak kézzelfoghatónak. Az áttérést az algebra eszközeire az adott problémaszituáció is döntően befolyásolja. Léteznek ugyanis olyan szöveges feladatok, amelyek algebrai modelljét viszonylag nehéz egyismeretlenes egyenletek képezik. Ezek felírása még 8. osztályos korban, viszonylag jó képességű tanulóknak is gondot okoz.
3) A szöveges feladatok több ismeretlenes egyenletrendszerekkel való megközelítése kizárólag a tanári eszköztár részét képezi. Ez a módszer a tanár számára egy előnyt jelent, ugyanis gyorsan és hatékonyan meg tudja találni a megoldást és így könnyen ellenőrizheti a tanulók munkájának helyességét. Viszont minden feladat esetében ki kell dolgozza az ezzel párhuzamos diák-megoldást is.

1. Feladat: *Egy szálloda 23 szobájában 52 fekvőhely van, a szobák kétágyasak, illetve háromágyasak. Hány kétágyas szoba található a szállodában?*

Tanár-megoldások

Kétismeretlenes egyenletrendszer

A tanár ezt a feladatot kétismeretlenes egyenletrendszerként általánosan a következő alakban írhatja fel:

$$\begin{aligned} a\cdot x+b\cdot y&=c\\ x+y&=d \end{aligned} \tag{1}$$

Az egyenletrendszer megoldása során, az egyenlő együtthatók vagy a behelyettesítés módszerét alkalmazva, az általános alakban megadott $x=\dfrac{c-b\cdot d}{a-b}$ és $y=\dfrac{c-a\cdot d}{b-a}$ megoldáshoz jutunk.
Jelen feladat esetében az egyenletrendszer a következőképpen írható fel:

$$(2) \qquad \begin{aligned} 2 \cdot x + 3 \cdot y &= 52 \\ x + y &= 23 \end{aligned}$$

ennek a megoldása pedig $x = 17$ és $y = 6$.
Az általános iskolás tanulók csak az egyismeretlenes egyenleteket ismerik, a szöveges feladatok egyenletekkel történő megoldását pedig csak 6. osztályban kezdik el. Éppen ezért a tanár számára szükséges, hogy kezdetben aritmetikai módszerekre támaszkodva dolgozza ki a diák-megoldást.

A hamis feltételezések módszere

A hamis feltételezések módszerét gyakran hamis hipotézisek módszere vagy egyszerűen feltételezések módszere néven emlegetik. A módszer az aritmetikának egy sajátos feladatmegoldási módszere, amelyet két- vagy háromismeretlenes feladatok esetében alkalmazhatunk, de akár még több ismeretlenes feladatokat is oldhatunk meg vele.
A módszer lényege: a feladat ismeretleneire nézve valamilyen feltételt (feltételeket) állítunk és összehasonlítjuk a valódi helyzetet (a feladat adatait) a hipotézisek által létrehozott helyzettel. Az eltérés figyelembevételével egyszerű számolások segítségével könnyen következtethetünk arra, hogy mennyiben tér el a hamis feltételezés a helyes megoldástól. Fontos kiemelni, hogy a feltételezések módszere különbözik az egyszerű próbálgatásoktól és nem a "megoldás eltalálása" a fő célkitűzés. A legfőbb különbséget az jelenti, hogy a hipotézisek felállítása után megpróbálunk következtetni arra, hogy milyen irányban és mennyivel változtassuk meg a feladat ismeretleneit ahhoz, hogy a jó megoldást megtaláljuk.
A hamis feltételezések módszerének az elméleti háttere tanár-eszköztárral a következő általános formában vezethető le. Tekintsük, például az (1) egyenletrendszert és legyen $x = x_1$ egy tetszőlegesen választott szám, így $y = y_1 = d - x_1$ (x_1 és y_1 jelentik a kezdeti feltételezéseket az ismeretlenekre vonatkozóan).

$$(3) \qquad a \cdot x + b \cdot y = a \cdot x_1 + b \cdot (d - x_1) = c' \ .$$

Legyen $k = \dfrac{c - c'}{a - b}$ és a következőkben igazoljuk, hogy az egyenletrendszer megoldása $x = x_1 + k$ és $y = d - (x_1 + k)$.
Valóban

$$a \cdot x + b \cdot y = a \cdot (x_1 + k) + b \cdot [d - (x_1 + k)] =$$
$$= a \cdot x_1 + b \cdot (d - x_1) + k \cdot (a - b) = c' + k \cdot (a - b) = c' + (c - c') = c \ .$$

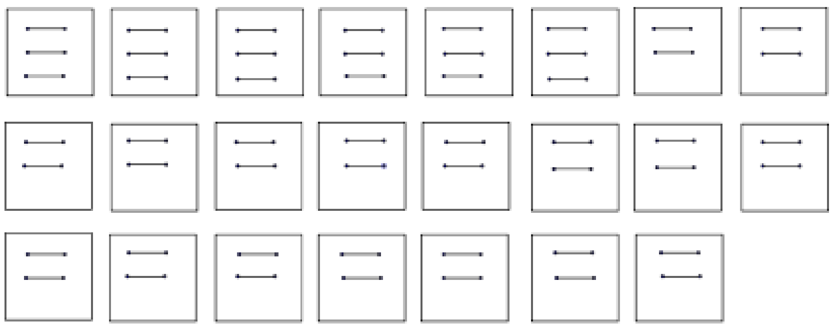
Például, az *1. Feladat* esetében: $a = 2$; $b = 3$; $c = 52$; $d = 23$ és tekintsük az $x_1 = 10$ és $y_1 = 13$ kezdeti feltételezést (hipotézist). Ebben az esetben

$c' = 2 \cdot 10 + 3 \cdot 13 = 59$, tehát $k = \dfrac{52-59}{2-3} = 7$. Tehát az egyenletrendszer megoldása $x = 10 + 7 = 17$ és $y = 23 - 17 = 6$.
A hamis feltételezések módszerének egy rövid összefoglalása megtalálható Tuzson Z. "Hogyan oldjunk meg aritmetikai feladatokat?" c. könyvében [95].

Amint a fentiekből kitűnik, a tanár rendelkezik két hatékony feladatmegoldási módszerrel. Az általánosítás készsége is a tanári többlettudás egyik előnyét képezi, mivel az általános esetből kiindulva, a paramétereket konkrét számadatokkal helyettesítve, a feladat szövegkörnyezetét pedig átrendezve egy egész feladat-családot alkothatunk.
Felvetődik a kérdés, hogy a tanár hogyan képes a fenti, nagyon általános feladatmegoldási módszereket átültetni az oktatási gyakorlatba, vagyis hogyan képes megtalálni egy olyan "diák-megoldást", amely az adott korosztály számára hozzáférhető. Ennek a megalkotása annál nagyobb kihívást jelent, minél alacsonyabb korosztályról van szó. Például nehezebb kitalálni egy jó megoldást olyan tanulók számára, akik még nem ismerkedtek meg az algebra szimbólumrendszerével és nem tudják megoldani még az egyismeretlenes egyenleteket sem.

Diák-megoldások

Ábrakészítés módszere



1. ábra.

Szemléletes ábrát készíthetünk, például téglalapokat rajzolunk (ezek a szobákat jelképezik), majd a téglalapokba egyenes vonalakat (strigulákat) húzunk, ezek

jelentik az ágyakat (lásd 1. ábra). Kezdetben legcélszerűbb minden "szobában" két "ágyat" elhelyezni, ezáltal a szobák mind kétágyasak lesznek. A fennmaradó "ágyakat" elhelyezve bizonyos számú (jelen feladat esetében 6) háromágyas szobát hozunk létre.
A módszer nagy előnye, hogy akár alsós osztályokban is diák-módszernek minősül. Hátránya, hogy csak olyan feladatok esetében alkalmazható, ahol a feladat adatai és a megoldás viszonylag kis természetes számok.
Az ábrakészítés és a képi reprezentációk szükségességét a problémamegoldásban Ambrus A. több tanulmányban is kiemeli (lásd [2], [3]). Én is több cikkemben hangsúlyoztam az ábrakészítés, valamint a geometriai szemléltetés fontosságát (lásd [22] és [27]).

Próbálgatások módszere

Kiindulunk egy kezdeti helyzetből, például 10 kétágyas és 13 háromágyas szoba van. Ebben a helyzetben a feladat egyik feltétele (a szobák száma 23) ki van elégítve, viszont az ágyak száma összesen $2 \cdot 10 + 3 \cdot 13 = 59$, ami 7-tel eltér a feladat második feltételétől (az ágyak száma 52). Észrevehetjük, hogy túl nagy az ágyak száma, ezért a háromágyas szobák számát csökkentenünk kell. Ugyanakkor a kétágyas szobák számát növelni kell azért, hogy az első feltétel ne sérüljön. A próbálgatásokat táblázatba lehet foglalni a következőképpen:

2.1. Táblázat

kétágyas	háromágyas	ágyak száma	hiba
10	13	59	7
11	12	58	6
12	11	57	5
13	10	56	4
14	9	55	3
15	8	54	2
16	7	53	1
17	6	52	0

A sorozatos próbálgatások során a hiba egyre csökken, ezáltal egyre közelebb jutunk a helyes válaszhoz. A módszer hátránya, hogy nagy számadatok esetén viszonylag sok próbálkozásra van szükség ahhoz, hogy a jó választ meg tudjuk adni. Ennek ellenére a tanulók szívesen alkalmazzák, ugyanis nem igényel különösen sok ismeretet és olyankor is elő lehet venni, amikor semmi más ötletük nincs.

A hamis feltételezések módszere

A hamis feltételezések módszerét általánosan bemutattuk a tanár-megoldások tárgyalásánál. Felvetődik a kérdés, hogy a tanár hogyan képes az ott tárgyalt nagyon általános feladatmegoldási módszert átültetni az oktatási gyakorlatba, vagyis hogyan képes megtalálni egy olyan "diák-megoldást", amely olyan tanulók számára is hozzáférhető, akik még nem ismerkedtek meg az algebra szimbólumrendszerével?

A tanórákon az egyik gyakori módszer, hogy elsőre azt állítjuk, hogy minden szoba kétágyas. Ezzel már meg is tettük az *első feltételezést.* Ha minden szoba kétágyas, akkor az ágyak száma 46, így a feladat adataitól való $52 - 46 = 6$ eltérést a tanár nevezheti *a feltételezés hibájá*-nak. A következő lépésben belátjuk, hogy ha egy kétágyas szobát három ágyasra cserélünk, akkor az ágyak száma eggyel növekszik (miközben a szobák száma változatlan marad), tehát a hiba eggyel csökken. Mivel a kezdeti hiba 6, ezért 6 ilyen cserét kell végrehajtanunk ahhoz, hogy a hiba 0 legyen, vagyis megtaláljuk a helyes megoldást, nevezetesen $x = 17$ és $y = 6$. Egy hasonló feladat ilyen módszerrel történő megoldása megtalálható egy 6. osztályos tankönyvben [10]. Megállapítható, hogy a fentiekben az "első feltételezés: 23 kétágyas 0 háromágyas; második feltételezés: 22 kétágyas, 1 háromágyas" hipotézisekből indultunk ki.

Felvetődik a kérdés, hogy a feladat megoldható az előzőtől eltérő hipotézissel? Ezt a gondolatmenetet, a jobb áttekinthetőség kedvéért, táblázatba foglaljuk.

2.2. Táblázat

	kétágyas	háromágyas	ágyak száma	hiba
első feltételezés	10	13	59	59-52=7
második feltételezés	11	12	58	58-52=6

Megfigyelhető, hogy ebben az esetben az első feltételezés után (ahol a hiba 7 volt) a kétágyas szobák számát eggyel növelve megtettük a második feltételezést, ezáltal a hiba eggyel csökkent. Tehát a fentiekből kikövetkeztethető, hogy az első feltételezéshez képest a kétágyas szobák számát 7-tel kell csökkenteni, ennek nyomán pedig 17 kétágyas és 6 háromágyas szoba lesz.

Algebrai megoldás

A szöveges feladatok egyismeretlenes egyenletekkel való megközelítése 6. osztályos korban válik elérhetővé a tanulók számára. Ennek ellenére, a többség még 6. osztályos korban is inkább az aritmetika módszereivel próbálkozik, az algebra szimbólumrendszere, a szöveges feladatok lefordítása az algebra nyelvére az ő esetükben még elég kezdetleges formában van jelen. Ebben a korosztályban a tanár már bemutathatja a szöveges feladatok megoldását az algebra eszközeivel is, bár a tapasztalat azt mutatja, hogy még nagy szükség van a feladatok aritmetikai módszerekkel történő megközelítésére.
Jelen feladat egyike azoknak, amelyeknek az algebrai megközelítése viszonylag nehézkes. A kétágyas szobák számát x-szel jelöljük, tehát a háromágyas szobák száma $23-x$ lesz. A feladatot leíró algebrai egyenlet pedig $2\cdot x+3\cdot(23-x)=52$, amelynek megoldása $x=17$.

2. Feladat: *Péter egy 8580 forintos játékot 50 és 20 forintos érmékkel fizetett ki. Hány érme volt mindegyikből külön-külön, ha 3-szor annyi 20 forintost használt fel, mint 50 forintost?*

Tanár-megoldások

Kétismeretlenes egyenletrendszer

Ennek a feladatnak az általános algebrai modellje a következő kétismeretlenes egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} a\cdot x+b\cdot y&=c \\ y&=m\cdot x \end{aligned} \tag{4}$$

A tanár a behelyettesítés módszerét alkalmazva megadja az egyenletrendszer megoldását általános alakban, nevezetesen $x=\dfrac{c}{a+b\cdot m}$ és $y=\dfrac{m\cdot c}{a+b\cdot m}$.
Jelen feladat esetében az $a=50$; $b=20$; $c=8580$; $m=3$ behelyettesítést alkalmazva adódik, hogy $x=78$ és $y=234$.
A tanár az általános alakot felhasználhatja minden ilyen algebrai modellel rendelkező feladat megoldása esetén, illetve ő maga is alkothat ilyen típusú feladatokat más szövegkörnyezettel.

A hamis feltételezések módszere

Először oldjuk meg általánosan a (4) egyenletrendszert tanári eszközökkel.
Legyen $x=x_1$ tetszőleges szám, így $y=y_1=m\cdot x_1$.

Legyen $c' = a \cdot x_1 + b \cdot m \cdot x_1$ és $k = \dfrac{c}{c'}$. Igazoljuk, hogy az egyenletrendszer megoldása $x = k \cdot x_1$ és $y = m \cdot k \cdot x_1$. Valóban,

$$a \cdot x + b \cdot y = a \cdot k \cdot x_1 + b \cdot m \cdot k \cdot x_1 = k \cdot (a \cdot x_1 + b \cdot m \cdot x_1) = k \cdot c' = c\,.$$

Az adott feladat esetében $a = 50\,; b = 20\,; c = 8580\,;\ m = 3$.
Tekintsük továbbá első feltételezésként, például az $x_1 = 10$ és $y_1 = 30$ értékeket. Ennek alapján $c' = 50 \cdot 10 + 20 \cdot 30 = 1100$ és $k = 8580 : 1100 = 7,8$. Tehát $x = 7,8 \cdot 10 = 78$ és $y = 7,8 \cdot 30 = 234$.
Belátható, hogy az (4) típusú egyenletrendszereknél valójában arányosságokban gondolkodunk. Az első feltételezésnél figyelembe vesszük a feladat adatait az érmék számára vonatkozóan. A következő lépésben megvizsgáljuk, hogy az érméknek a feladat adataiban szereplő összértéke hányszorosa a mi feltételezésünk esetében előforduló értéknek.

Diák-megoldások

Aritmetikai megoldás

A tanulók számára a feladat elsősorban aritmetikai eszközökkel közelíthető meg. A játék kifizetését olyan "tasakokkal" oldjuk meg, hogy minden tasakban 3 darab 20 forintos és 1 darab 50 forintos érme van (ezáltal biztosítjuk azt, hogy a 20 forintosok száma 3-szor annyi legyen, mint az 50 forintosoké). Ilyen összeállításban az egy "tasakban" lévő érmék összértéke 110 forint. A 8580 forintos játék kifizetéséhez 8580 : 110 = 78 "tasakra" van szükség.
Ennek a feladatnak az aritmetikai megoldását ezzel a "tasakos" szemléltetéssel könnyen el lehet végezni, viszont minden szövegkörnyezet más-más szemléltetést igényel. Ebben az esetben érvényesül a tanár kreativitása, aki minden feladatra megalkotja azt a konkrét modellt, amelynek segítségével a diákok számára minél érthetőbbé és hozzáférhetőbbé teszi a feladatot.

Próbálgatások módszere

A gondolatmenet hasonló, mint az *1. Feladat* esetében. Itt is a próbálgatás lényege, hogy a feladatban szereplő egyik feltételt figyelembe véve adunk meg különböző értékeket, majd a másik (általában a feladatbelivel nem egyező) adat változásait szemléljük, illetve hasonlítjuk össze a feladatban szereplő adattal. Itt például az érmék számára vonatkozóan adunk különböző becsléseket (figyelembe véve, hogy a 20 forintosok száma 3-szor annyi, mint az 50 forintosoké), majd figyeljük az érmék összértékének változását.

A hamis feltételezések módszere

A tanári módszereknél tárgyalt általános megoldás tapasztalatait a tanár kétféle módszerrel alakíthatja diák-megoldássá, illetve mutathatja be a tanórákon.

Első módszer: Ez a módszer hasonlatosságot mutat a fenti gondolatmenettel, illetve az aritmetikai megoldással. Feltételezzük, hogy 1 darab 50 forintos és 3 darab 20 forintos érméje van Petinek. Ez összesen 110 forintot ér. A játék viszont 8580 forintba kerül, vagyis $8580 : 110 = 78$-szor annyi érmére van szüksége, tehát 78 darab 50 forintosra és 234 darab 20 forintosra. Észrevehető a párhuzam az ilyen kezdeti értékekkel végrehajtott hamis feltételezések módszere és az aritmetikai módszer között. Megjegyezhetjük, hogy a kezdeti feltételezést bármilyen számú 50 forintossal és 3-szor annyi 20 forintossal megtehettük volna (mint például az előzőekben a tanári módszernél 10, illetve 30 volt), viszont abban az esetben a szorzó tizedes tört érték is lehet, amely túlságosan bonyolítaná a megoldást,illetve megszűnne a párhuzam az aritmetikai módszerrel.

Második módszer: A továbbiakban oldjuk meg a feladatot egy más gondolamenettel is. Kezdetben feltételezzük, például, hogy 50 darab 50 forintos és 150 darab 20 forintos van, ezeknek az értéke összesen $50 \cdot 50 + 150 \cdot 20 = 5500$ forint, ez $8580 - 5500 = 3080$ forint értékben tér el a feladat adataitól. A második feltételezés során az 50 forintosok számát 1-gyel növeljük, ezáltal a 20 forintosok száma 3-mal nő, míg a feltételezés hibája $8580 - 5610 = 2970$ lesz,vagyis az első feltételezéshez képest 110-zel csökken. Viszont az első feltételezés hibája 3080 forint volt. Ezért ahhoz, hogy a hiba nullára csökkenjen (vagyis megkapjuk a helyes megoldást), az első feltételezéshez képest $3080 : 110 = 28$ ilyen lépést kell végrehajtani. Tehát az 50 forintosok számát 28-cal kell növelnünk (az első feltételezéshez képest), így a helyes megoldás 78 darab 50 forintos és 234 darab 20 forintos lesz. A gondolatmenetet a következő táblázatban foglalhatjuk össze.

2.3. Táblázat

	50 forintos	20 forintos	összérték	hiba
első feltételezés	50	150	5500	3080
második feltételezés	51	153	5610	2970
megoldás	78	234	8580	0

Az első feltételezésnél az 50 forintosok számát találomra választottuk, a második feltételezésnél viszont tanácsos ugyanazt a mennyiséget eggyel növelni vagy csökkenteni, mert így könnyebb a változást figyelni és észrevenni a feltételezések és a hiba alakulása közötti összefüggéseket.
A hamis feltételezéseken alapuló második módszer az elsőnél látszólag körülménye-

sebb, ugyanakkor számos más modellezésű feladat esetében is alkalmazható (ahol például az első módszer nem), amint a későbbiekben látni fogjuk.

Algebrai megoldás

Ha az 50 forintosok számát x-szel jelöljük, akkor a 20 forintosok száma $3 \cdot x$ lesz, a megfelelő algebrai egyenlet pedig $50 \cdot x + 20 \cdot 3 \cdot x = 8580$, az 50 forintosok számát az egyenlet $x = 78$ megoldása szolgáltatja.
Megjegyzésünk, hogy az algebra eszközeivel történő megközelítés ennek a feladatnál jóval könnyebb, mint az előzőnél. Ezt az oktatási folyamat során több esetben is tapasztaltuk.

2.2. A kutatás - szöveges feladatok megoldása a 6. évfolyamon

2.2.1. A kutatás célja

A kutatás a 6. osztályos tanulók problémamegoldási képességeinek alakulását vizsgálja az aritmetikai gondolkodásról az algebrai gondolkodásra való átmenet során.
A kutatás során a következő kérdésekre keressük a választ:

- A tanulók milyen képességekkel rendelkeznek a szöveges feladatok megoldásának terén?
- A tanulók mennyire kreatívan közelítenek meg bizonyos matematikai problémákat, illetve milyen mértékben van jelen a betanult módszerek, algoritmusok alkalmazására való hajlandóság?
- A tanulók milyen módszereket részesítenek előnyben a feladatok megoldása során?
- Mennyire változik a feladatmegoldási szemlélet az algebrai módszerek bevezetése után?
- A tanult aritmetikai, illetve algebrai módszerek mennyire tartósan maradnak meg, vagyis a tanulók milyen mértékben képesek alkalmazni azokat a későbbiekben?
- A tanulók milyen mértékben hagyatkoznak a legutóbb tanult módszerekre, illetve a legfrissebben szerzett ismeretekre?

2.2.2. A kutatás lebonyolítása

A veresegyházi Kálvin Téri Református Általános Iskola 6. osztályos évfolyamának 50 diákja (2 osztály) vett részt a felmérésben. Ebbe az általános iskolába 15 környező településről járnak gyerekek. Viszonylag könnyen és hatékonyan motiválható tanulókról van szó, akik a tanári utasításokat igyekeznek, tudásukhoz

mérten, a lehető legjobban végrehajtani. Ilyen körülmények között nem állt fenn a motiválatlanság veszélye, vagyis az, hogy valamely feladatra a tanulók nem adnak választ vagy esetleg csak odaírnak valamit anélkül, hogy a feladattal érdemben foglalkoznának. Ezért meg voltunk győződve, hogy az esetleges hibák nem az érdektelenségből, hanem a probléma helytelen értelmezéséből vagy bizonyos módszerek hiányos megértéséből fakadnak.
A program teljes lebonyolítása 2016 tavaszán zajlott, ugyanis ebben az időszakban került sor az egyenletek tanítására és a szöveges feladatok egyenletekkel való megoldására a 6. évfolyamon.
A program három fő részből állt:

1. Felmérés: Ebben az aritmetikai módszerek elsajátításának mértékét próbáltuk felmérni. A felmérés előtt 4 tanóra keretében bemutattuk a szöveges feladatok megoldásához szükséges aritmetikai módszereket: szakaszos ábrázolás, visszafelé következtetés, mérleg használata. Az *1. Feladatlap* (lásd *Melléklet*) feladatait dolgoztuk fel, ezekre helyeztük a fő hangsúlyt, ugyanakkor (ha szükségesnek láttam) megemlítettem még ezekkel rokon feladatokat is.
Az előkészítő órákat egy 6 feladatot tartalmazó feladatlap (*2. Feladatlap*) megoldása követte, amelyben a tanult aritmetikai módszerek elsajátításának és megértésének mértékét vizsgáltuk.

2. Felmérés: A továbbiakban 4 tanóra keretében foglalkoztunk az egyenletek megoldási módszereivel. Ismertettem a lebontogatással, illetve mérleg-elv alkalmazásával kapcsolatos technikákat, majd nagy hangsúlyt fektettünk ezek begyakorlására. Ezeket a tanórákat egy 10 egyenletet tartalmazó feladatlap megoldása követte, amelynek során ellenőriztük azt, hogy milyen szinten van az egyenletek megoldási módszereinek megértése (*3. Feladatlap*). Az eredmények bizalomkeltőek voltak, ezért hozzáláttunk a szöveges feladatok algebrai úton történő tárgyalásához. 6 tanóra keretében ezekkel a módszerekkel dolgoztuk fel az *1. Feladatlap* és a *2. Feladatlap* feladatait, itt aprólékosan ismertettem az aritmetikai, illetve algebrai módszerek közötti párhuzamot (mivel ezeket a feladatokat előzőleg aritmetikai úton is megoldottuk). Következett a *4. Feladatlap* megoldása, amelynek egyes feladatait közösen beszéltük meg, bizonyos feladatokat viszont a tanulók önálló munkában oldottak meg. Rögzítettük a szabályt, hogy minden feladatot kötelezően algebrai módszerekkel kell megoldani, viszont utólag megtárgyaltuk az illető feladatok aritmetikai úton történő megközelítését is. Ennek a fázisnak a végén a tanulók szintén egy 6 feladatból álló feladatsort (*5. Feladatlap*) oldottak meg, ahol a tanult módszerek bármelyikével dolgozhattak. A fő cél annak a felmérése volt, hogy az aritmetikai vagy algebrai módszereket részesítik előnyben, illetve, hogy a választott módszereknek milyen mértékű a hatékonysága, eredményessége?

3. Felmérés: Ennek a felmérésnek célja volt ellenőrizni, hogy a tanult módszerek mennyire bizonyulnak tartósnak, vagyis egy bizonyos időtartam után a tanulók milyen mértékben képesek felidézni és alkalmazni azokat? Ugyanakkor céljaink között szerepelt annak a felmérése is, hogy a tanulók milyen mértékben részesítik előnyben az aktuálisan tanult módszereket, illetve mennyire képesek "visszanyúlni" a régebben tanultakhoz. Ebből a célból, a tavaszi szünet után 2 gyakorló tanórában szintén szöveges feladatokat oldottunk, itt viszont a hamis feltételezések módszerével dolgoztunk. Az aritmetikai, illetve algebrai módszerek csak olyan szinten kerültek szóba, hogy a feladat megoldása után (amit a hamis feltételezések módszerével végeztünk el) a "ki tud még más módszert is?" kérdés következett, majd megbeszéltük ezeket (ha valaki tudott ilyet fölhozni). Ezt követte a felmérés, ahol a tanulók a *6. Feladatlap* feladatait kellett megoldják. Ennél a munkánál a tanult módszerek közül bármelyiket alkalmazhatták. Mivel a *2. Felmérés* után eltelt időtartam kb. három hét volt, ezért a tanulók az aritmetikai és algebrai módszerekhez közelítőleg egy hónap távlatából kellett "visszanyúljanak". A hamis feltételezések módszere viszont friss ismeretanyagnak számított, mivel a legutóbbi tanórákon ezzel a módszerrel oldottunk feladatokat.

2.2.3. Az 1. Felmérés

Az aritmetikai módszerek gyakorlása

Az aritmetikai módszerek bevezetésében és tárgyalásában a vezérfonalat az *1. Feladatlap* (lásd *Melléklet*) feldolgozása jelentette. Az esetek többségében közösen dolgoztunk, néhány feladat önálló munkában zajlott, az elért eredmények utólagos megbeszélésével és az alkalmazott módszerek értékelésével.
A tanulók minden feladat esetében kezdetben kaptak néhány percet, hogy átgondolják a feladatot, vázolják elképzeléseiket a megoldásra vonatkozóan, utána következett az egyéni ötletek elemzése és megbeszélése, majd végül összefoglaltuk a problémamegoldás modelljét. Ha bizonyos tévhitek merültek fel vagy teljesen elakadtak, akkor tanári kérdésekkel segítettem őket abban, hogy a problémamegoldás következő lépését megtalálják. Egyes esetekben egyszerűbb, analóg problémákat vetettem fel és tárgyaltuk meg a könnyebb érthetőség kedvéért. Mindezek a közbeavatkozások általánosan a gondolkodást segítették, nem pedig a feladat megoldását tártam fel. Minden ötlet helyességét egy-egy kérdéssel ellenőriztettem. A felmerült jó ötleteket a táblára írtam, egyfelől a további gondolatébresztés, másfelől pedig a megoldás összefoglalásának könnyítése céljából. Ahol szükségesnek láttam egy-egy téves ötletet, esetleges típushibát is a táblára jegyeztem ahhoz, hogy összehasonlíthassuk a jó megoldással, illetve könnyebben felhívhassam a figyelmet a hiba forrására. Amikor egy feladat esetében önállóan dolgoztak,

munkáikat szemléltem és az ötletek ismertetésénél tudatosan a típushibákat vétő tanulókat is engedtem szóhoz jutni, majd a hibás ötletek javításával jutottunk el a jó megoldáshoz. Egy-egy mintafeladat megoldása után közösen összefoglaltuk a tapasztalatokat és elmélyítés céljából részletesen megbeszéltük a megoldási módszert.
A tanulók nagyon motiváltak voltak, szorgalmasan együttműködtek a közös munkában. Több esetben apróbb viták alakultak ki egy-egy ötlet körül, melyet egyesek helyesnek, mások pedig helytelennek tartottak. Ahogy a feladatok megoldásával előre haladtunk, több esetben megtalálták az összefüggéseket a közös elméleti modellel rendelkező feladatok között és az előzőleg tanult módszereket nagyon hatékonyan alkalmazták.
A problémák megoldását a következőkben részletesen bemutatom.

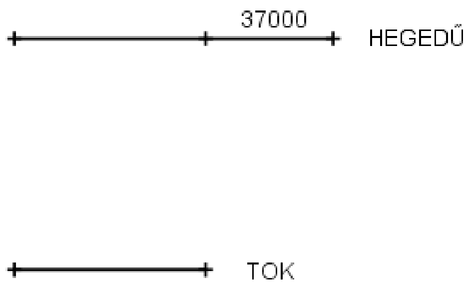
1. Feladat: *Egy hegedű tokkal együtt 65000 Ft-ba kerül. A tok 37000 Ft-tal kevesebbe kerül, mint a hegedű. Mennyibe kerül a hegedű tok nélkül?*

A tanulók többsége kezdetben megfelezte a 65000 forintot, ezt tekintették a tok árának, majd hozzáadták a tok árához a 37000 forintot ahhoz ,hogy megkapják a hegedű árát. Vagyis a következő műveleteket végezték:
- tok ára: $65000 : 2 = 32500$ forint
- hegedű ára: $32500 + 37000 = 69500$ forint

Először ezt a hibás gondolatmenetet tárgyaltuk meg. Nagyon könnyen rá lehetett vezetni őket arra, hogy észrevegyék az ellentmondást, ugyanis az ellenőrzés során a hegedű ára tokkal együtt több lett, mint 65000 forint.
Analóg probléma megbeszélése: A hibás gondolatmenet javítása céljából egy egyszerűbb, analóg feladatot tárgyaltunk meg:
Osszunk szét 5000 forintot András és Béla között úgy, hogy András 1000 forinttal többet kapjon, mint Béla!
Nagyon rövid gondolkodás után többen megadták a jó választ. Az egyszerű számadatoknak is szerepük volt abban, hogy fejben, írásbeli műveletek elvégzése nélkül számoltak és jól válaszoltak.
Válasz indoklása: Legtöbbek számára az indoklás annyi volt, hogy "csak" ; "ez természetes" ; "ez egyszerű" ; "így van és ennyi". Megtárgyaltuk, hogyan végeznénk el az osztozkodást: kezdetben 1000 forintot adnánk Andrásnak (ennyivel kell többet kapjon), majd utána a maradékot két egyenlő részre osztanánk. Ezzel próbáltuk hangsúlyozni, hogy az összegből egyszer el kell venni a különbözetet és utána osztani két egyenlő részre, vagyis a műveletek helyes sorrendje $5000 - 1000 = 4000$; Béla pénze $4000 : 2 = 2000$ forint; András pénze:$2000 + 1000 = 3000$ forint.
Utána több tanuló javasolta, hogy ezt úgy is el lehet végezni, hogy először kettéosztjuk a pénzt, majd utána Béla adjon át Andrásnak 500 forintot, tették mindezt

úgy, hogy előzetesen már tudták mi a helyes válasz. Ezzel viszont körvonalazódott a második megoldási módszer.

Visszatérés az eredeti problémára. Ábrázoljunk szakaszokkal!



2. ábra.

Szakaszosan ábrázoltuk a problémában szereplő összefüggéseket (2. ábra). A kérdés ami elhangzott, hogy mit írjunk az üres szakaszok helyére ahhoz, hogy a szakaszokon lévő számok összege 65000 forint legyen? Az ábra alapján indokolható volt, hogy miért kell először a 65000-ből 37000-et elvenni, majd utána osztani két egyenlő részre a különbséget.

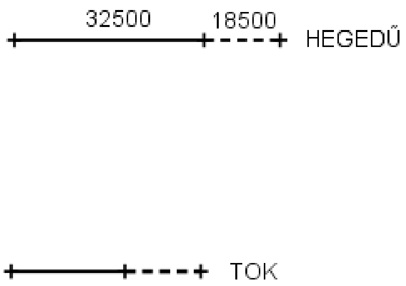
1. Megoldás A tok ára: $65000 - 37000 = 28000$; $28000 : 2 = 14000$ forint.
A hegedű ára: $14000 + 37000 = 51000$ forint.

2. Megoldás A segédfeladat megoldása során elhangzott, hogy először a két fiú között egyenlően szétosztjuk a pénzt, utána pedig Béla adjon 500 forintot (a különbség felét) Andrásnak. Ezt a gondolatmenetet vittük át erre a feladatra, vagyis:

- tok ára: $65000 : 2 - 37000 : 2 = 14000$ forint
- hegedű ára: $65000 : 2 + 37000 : 2 = 51000$ forint

A megoldás után a tanulók azt a feladatot kapták, hogy önállóan készítsék el a 2. megoldásnak megfelelő ábrát. Ez viszonylag nehezen ment, annak ellenére, hogy a megoldás számadatai már birtokukban voltak. Többen nem tudták a két egyenlő szakasz megrajzolása után mit tegyenek a toknak megfelelő szakaszon lévő fölösleggel (egyesek radíroztak) és hogyan helyezzék át a hegedűhöz. Felhívtam a figyelmet a szaggatott vonallal történő ábrázolás lehetőségére is. Egyeseknek még a 2. ábra értelmezésénél is gondot okozott, hogy az előzőleg nagyobbnak ábrázolt szakasz kisebb mennyiséget jelentett, ezért hangsúlyoztam, hogy itt az a lényeg, hogy szemléletesek legyünk, a méretarányos ábrázolás lehetetlen, mivel bizonyos mennyiségeket kezdetben nem ismerünk.

Egyes tanulók már az ábrakészítés előtt (sőt az analóg probléma felvetése előtt) rájöttek a helyes megoldáshoz vezető aritmetikai számításokra, számukra teljesen fölöslegesnek tűnt a szakaszos ábrázolás, azzal érveltek, hogy a jó megoldáshoz vezető számításokat ők "anélkül is tudják". Végül tanári segítséggel a tanulók többsége elkészítette a *2. Megoldás*-nak megfelelő ábrát is.



3. ábra.

2. Feladat: *Gondoltam két számot. Különbségük 435, összegük pedig 819. Mi a két gondolt szám?*

A tanulóknak kezdetben a feladat megfogalmazása jelentett gondot. Tisztázni kellett, hogy a "különbségük 435" valójában azt jelenti, hogy egyik a másiknál 435-tel több, ugyanis kezdetben egy kivonásra gondoltak. Utána önálló munkában kellett megoldják a feladatot az előző mintájára, amit meg is tettek, csak néhány tanuló szorult segítségre.

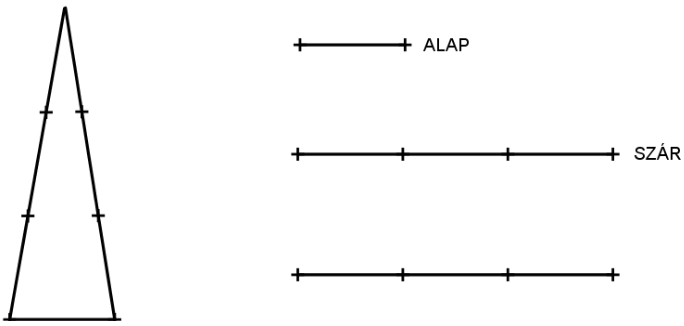
3. Feladat: *Katiék egy almafáról összesen 3 láda almát szedtek le. Az első ládában 12 kg-mal több alma van, mint a másodikban. A harmadikban 18 kg-mal több van, mint a másodikban. Összesen 129 kg almát szedtek. Hány kg alma van az egyes ládákban külön-külön?*

A feladatban a nehezítést a három mennyiség együttes jelenléte okozta. Viszont könnyedséget jelentett, hogy az első, illetve a harmadik láda tartalmát is a másodikhoz kellett viszonyítani, ezáltal könnyen adódott az ötlet, hogy a második láda tartalma lesz az ismeretlen szakasz. Az ábra elkészítése ezek után nem okozott gondot, majd könnyen következett a megoldás lépéseinek végrehajtása.

4. Feladat: *Egy kertből 550 kg zöldséget gyűjtöttek be: háromszor több krumplit, mint répát, és 50 kg-mal több káposztát, mint répát. Hány kg-ot gyűjtöttek be az egyes zöldségekből?*

További nehezítést jelentett, hogy a krumpli mennyisége a répáénak a háromszorosa volt. Viszont itt is könnyítést jelentett, hogy a répa mennyiségéhez képest volt megadva a másik két mennyiség. Viszonylag könnyen megértették, hogy a "háromszor több" az három ugyanolyan szakaszt jelent, ezek után az ábrát könnyen felrajzolták. A szakaszos ábrából könnyen felírták az aritmetikai számításokat.

5. Feladat: *Egy egyenlő szárú háromszög egyik szára az alap háromszorosa. A háromszög kerülete 119 cm. Mekkora a háromszög alapja?*



4. ábra.

Az ilyen típusú geometriai feladatoknál gondot szokott okozni, hogy a kerület fogalmának említésekor a diákok képletet próbálnak emlékezetből felírni (leginkább az $a \cdot b \cdot c$ képletet veszik elő). Tehát ebben az esetben tudatosítani kellett, hogy a kerület nem jelent mást, mint a háromszöget határoló törött vonal hosszát, vagyis az oldalak összegét. Ehhez a feladathoz két ábrát is készítettünk (lásd 4. ábra). Az első a háromszöget ábrázolta, az oldalak arányának megfelelő szakaszos beosztással, a második a háromszögek oldalait vízszintesen lerajzolva (a szárakat kétszer rajzoltuk le). Érdekes módon a második rajz azért született, mert az első rajzról (ami valójában konkrétan a háromszöget szemléltette) nehezen ment az összefüggések leolvasása. A második rajzból sokkal könnyebben tájékozódtak és kiszámították a megfelelő mennyiségeket.

6. Feladat: *Gondoltam egy számot. Ha a négyszereséhez hozzáadom a háromszorosát, akkor 77-et kapok. Melyik számra gondoltam?*

Ezt a feladatot a tanulók önálló munkában oldották meg. Az előző feladatok tapasztalataiból kiindulva nem okozott gondot ennek a feladatnak a megoldása. A gondolt számot egy szakasszal jelölték, "a négyszereséhez hozzáadom a háromszorosát" műveletet pedig hét szakasszal ábrázolták és elvégezték a $77 : 7 = 11$ műveletet.

7. Feladat: *Egy medve 360 kg-mal nehezebb, és így háromszor olyan nehéz, mint egy tigris. Hány kilogramm egy medve?*

A tanulók önálló munkában dolgoztak, a megoldások során a tigris tömegét egy szakasszal, a medve tömegét három szakasszal ábrázolták. A diákok közel háromnegyede viszont a $360 : 3 = 120$ műveletet végezte el vagyis 360 kg-nak a medve tömegét tekintették.
A hibák javítása során kiemeltük, hogy "a medve 360 kg-mal nehezebb mint a tigris" hány szakaszt is jelent valójában? A táblán a különbségnek megfelelő két szakaszt vastagabb vonallal rajzoltuk.

8. Feladat: *Ha 3 banánt vennénk, ugyanannyit fizetnénk, mintha egy banánt vennénk, és még elköltenénk 496 forintot. Mennyibe kerül egy banán?*

Az ábrázolás technikáját tekintve ez a feladat nagyon hasonlít az előzőre. A tanulók először önálló munkában dolgoztak, legtöbben három szakaszt rajzoltak, majd egyet áthúztak vagy kettőt kapcsos zárójellel jelöltek be, mindenképpen azt szemléltetve, hogy két szakasz 496 forintot jelöl és kiszámították egy banán árát: $496 : 2 = 248$ forint.
Jelen feladaton keresztül mutattam be a mérleg használatát. Lerajzoltunk egy mérleget, amelynek egyik serpenyőjében egy banánt és 496 forint szerepelt, a másik serpenyőben pedig három banán. Utána mindkét serpenyőről "levettünk" egy-egy banánt, vagyis rajzoltunk egy másik mérleget, amelynek egyik serpenyőjében 2 banán, a másikban pedig 496 forint volt látható, ebből megértették a "2 banán = 496 forint" összefüggést. A továbbiakban ugyanaz a műveletsor következett mint az előző megoldás esetében.

9. Feladat: *Egy áruházban 5 kivit és 2 mangót vásároltunk 510 Ft-ért. Mennyibe kerül a kivi és a mangó darabja, ha tudjuk, hogy egy mangó ára hatszorosa egy kivi árának?*

A tanulók az előbbi feladat kapcsán bemutatott mérleg-módszert egyáltalán nem használták (ezt a megoldások értékelésekor én mutattam meg nekik). Legtöbben szakaszokkal ábrázolták az árakat (kivi ára=1 szakasz; mangó ára=6 szakasz), de voltak akik az $5K + 2M = 510$, illetve $1M = 6K$ aritmetikai egyenletekkel dolgoztak. Helyesen kikövetkeztették, hogy 17 kivi 510 forintba kerül és megadták a helyes választ.

10. feladat: *Egy ceruza és egy radír együtt 60 g, két ceruza tömege ugyanannyi, mint három radíré. Hány gramm egy ceruza, illetve egy radír?*

A megoldási ötletek kizárólag az *1 ceruza = 1,5 radír* ötletre korlátozódtak, a tanulókat nem zavarta, hogy a radír törtrészeiben kell gondolkodni. Ilyen gondolatmenettel a *2,5 radír = 60 g* összefüggésből az *1 radír* $=60 : 2,5 = 24$ *g* következett.
Egy általam elvárt gondolatmenet lett volna, hogy két ceruza és két radír együtt 120 g, ebből adódik (a két ceruzát három radírra cserélve), hogy öt radír tömege 120 g, ez viszont egyik tanulónak sem jutott eszébe. Utólag ezt is megbeszéltük. A tanulók a megoldás során inkább az $1C = 1,5R$ vagy $2,5R = 60$ aritmetikai egyenletek felírását részesítették előnyben. Hiába buzdítottam őket mérleg készítésére, idegenkedtek ettől a módszertől. Ennek ellenére, mérleg alkalmazásával és rajzolásával is eljátszottuk a következő megoldást:
- egyik serpenyőben 1 radír és 1 ceruza, a másikban 60 g;
- egyik serpenyőben 2 radír és 2 ceruza, a másikban 120 g;
- egyik serpenyőben 5 radír, a másikban 120 g.

11. Feladat: *Gondoltam egy számra. A hétszereséből kivontam 8-at, és így 83-at kaptam. Melyik számra gondoltam?*

Ilyen típusú feladattal már alsóbb osztályokban találkoztak, ezért a buborékábra elkészítése sem okozott különösebb gondot és visszafelé következtetéssel megadták a helyes választ.

12. Feladat: *Egy baromfiudvarban tyúkok, kacsák és libák vannak. A szárnyasok fele tyúk, negyede kacsa, a libák száma 28. Mennyi szárnyas van a baromfiudvarban?*

Néhány tanuló egy szakaszt négy részre osztott, majd kettőt bejelölt a tyúkoknak, egyet-egyet pedig a libáknak és kacsáknak. Tehát ők tudatában voltak annak, hogy negyedekben érdemes gondolkodni és miután a libák száma a szárnyasok számának egy negyed része, ezért az egyik szakasz fölé (libák) 28-at írtak, ahonnan a $4 \cdot 28 = 112$ művelet elvégzése után jó választ adtak. Voltak akik szakaszos ábrázolással úgy dolgoztak, hogy a különböző szárnyasoknak megfelelő szakaszokat egymás alá rajzolták. Ők is ugyanezt a gondolatmenetet követték, annyi különb-

séggel, hogy nem az összlétszámot jelképező szakaszt osztották részekre, hanem a különböző szárnyasok száma közötti viszonyt szemléltették. Mivel a feladatban megadott törtrészek egyszerűek voltak, ezért sokan jó választ adtak.
Voltak olyan tanulók, akik az előző feladat mintájára buborék-ábrát készítettek, ezért az általuk adott válasz helytelen volt.
Kiemeltük, hogy a törtrészek és számadatok között kell az összefüggéseket keresni és arányosságokban gondolkodni. Megbeszéltük, hogy a jobb átláthatóság kedvéért itt is lehet ábrát készíteni, viszont az ábra ebben az esetben pontos kell legyen, ahhoz, hogy helyesen lássuk az összefüggéseket (ugyanis egyes tanulók különböző hosszúságú szakaszokat rajzoltak, amelyek nem tükrözték helyesen az összefüggéseket, így az általuk készített ábra használhatatlan volt).

13. Feladat: *A hatodikosok háromnapos túrára mentek. Első nap megtették a túraútvonal* $\frac{2}{5}$ *részét, második nap a túraútvonal* $\frac{1}{4}$ *részét, így a harmadik napra 21 km maradt. Milyen hosszú volt a teljes túraútvonal?*

Ennél a feladatnál nehezítést okozott, hogy a törtrészek esetében közös nevezőben kellett gondolkodni. Az előző feladatban megbeszélt módszerekből kiindulva a tanulók elkezdtek arányosságokban gondolkodni, felismerték azt, hogy közös nevezőre kell hozni (közös nevező a 20), utána pedig huszadokban gondolkodtak. Többségük könnyen rájött arra, hogy a harmadik napra eső 21 km a teljes túraútvonal $\frac{7}{20}$ része, amelyből megadták a helyes választ. Voltak akik kezdetben szakaszos ábrákat készítettek, viszont rajzaik nélkülözték a pontosságot (például egy szakasz három különböző hosszúságú részre osztva 1. nap, 2. nap, illetve 3. nap felirattal), ezért ezek az ábrák alkalmatlanok voltak arra, hogy az aritmetikai számításoknak egy alapot nyújtsanak. A feladat megbeszélése során szükségesnek éreztem kiemelni, hogy a pontos ábra huszadokkal van összefüggésben, ezért egy szakasz húsz részre osztásáról lenne szó. Többen úgy nyilatkoztak, hogy ebben az esetben véleményük szerint fölösleges a rajz, ők anélkül is átlátják a megoldást.

14. Feladat: *Az iskola tanulóinak* $\frac{1}{4}$ *része fekete,* $\frac{1}{6}$ *része vörös,* $\frac{1}{3}$ *része barna hajú. A szőkék száma 360. Hány tanuló jár az iskolába, ha más hajszín nem fordul elő?*

Az előző feladat után ezt a feladatot gyakorló feladatnak jelöltem ki. Önálló munkában dolgoztak, azoknak segítettem akik önállóan nem boldogultak. Kevesen voltak akiknek segíteni kellett, egy-két rövid utasítás után ők is elboldogultak a feladattal. A többség könnyen rájött, hogy a szőkék az iskola tanulóinak $\frac{1}{4}$ részét képezik (egyesek $\frac{3}{12}$ -ben, mások $\frac{6}{24}$ -ben gondolkodtak), utána arányosságokban gondolkodva helyes választ adtak.

15. Feladat: *Egy istállóban levő lovak számának a fele 5-tel több, mint a negyedrésze. Hány ló van az istállóban?*

Ehhez a feladathoz kértem, hogy ábrát is készítsenek. Mivel sokan rájöttek, hogy az 5 a lovak számának negyedrészét jelenti (és így a lovak száma 20), ezért fölöslegesnek tartották az ábra elkészítését. Ennek ellenére teljesítették a feladatot és pontos ábrák készültek egy szakasz negyedelésével és a törtrészek, illetve számadatok feltüntetésével.

16. Feladat: *András elolvasta a könyv $\frac{1}{4}$ részét és még 20 oldalt, hátra van még 8 oldal híján a könyv $\frac{2}{3}$ része. Hány oldalas a könyv?*

Kezdetben gondot okozott a "8 oldal híján" kifejezés, tehát tisztáznunk kellett, hogy az a könyv $\frac{2}{3}$ -ánál 8 oldallal kevesebbet jelent. Ennek ellenére nehezen ment annak a felismerése, hogy a $20 - 8 = 12$ oldal valójában a könyv $\frac{1}{12}$ részét jelenti. Egyes tanulók kezdetben az $\frac{1}{4} + 20 + \frac{2}{3} - 8$ művelettel akartak valamit kezdeni. Tisztázás céljából egy pontos ábrát készítettünk tizenkettedekben, ahol szemléletessé tettük a 20 oldal, illetve 8 oldal jelentését.

A 12-16 feladatok esetében megerősítést nyert az a tény, hogy az ilyen típusú feladatok esetében a szakaszos ábrázolás nem feltétlenül segíti a feladat megoldását. Ennek egyik oka az, hogy itt az ábra nemcsak szemléletes, hanem pontos is kell legyen. Ezért az ábra készítését minden esetben egy aritmetikai gondolatmenetnek kell megelőznie, amely nem más mint a feladatban szereplő törtszámok közös nevezőre hozása. A közös nevező szolgáltatja az alapot egy pontos ábra készítéséhez, amelyből az összefüggések könnyen kiolvashatók. Viszont azok a tanulók, akik már közös nevezőre hozással átgondolták a feladatot nagyon könnyen átlátták a kapcsolatot egy törtrész és a neki megfelelő számadat között, majd arányosságokban gondolkodva megoldották a feladatot. Ilyenkor egy szakaszos ábra elkészítése terhükre van (főleg abban az esetben, ha a szakaszt sok részre kell osztani). Ellenkező esetben, ha a tanuló nem hozza közös nevezőre a törteket, akkor az általa elkészített ábra nem tükrözi helyesen az arányokat és nem alkalmas a törtrészek és számadatok közötti összefüggések szemléltetésére.

17. Feladat: *János gazda udvarán tyúkok és nyulak vannak. Az állatoknak összesen 48 lába és 18 feje van. Hány tyúk és hány nyúl van János gazda udvarán?*

A tanulók kezdetben önállóan kellett megoldják a feladatot az eredmények utólagos megbeszélésével. A legtöbb tanuló próbálgatással viszonylag gyorsan pontos választ adott. Átbeszéltük az ábrakészítés módszerét is, a fejeket körökkel, a lábakat pálcikákkal ábrázoltuk, kezdetben csak tyúkokat rajzolva és utólag a "fölöslegesen maradt" lábakat elhelyezve kaptuk a nyulakat. Az eredmények megbeszélése során előtérbe került az a kérdés, hogy miként járnánk el, ha a feladat adatai például négyjegyű számok lennének és a próbálgatás nehézkes lenne. Elhangoztak humoros vélemények, hogy készítsünk ábrát!
Itt került előtérbe a hamis feltételezések módszere, amit pontosan az ábrakészítés tapasztalataiból kiindulva vezettünk be:

- Mi volt az ábrakészítés első lépése?
- Kezdetben csak tyúkokat rajzoltunk.
- Hány lábat használtunk fel?
- $18 \cdot 2 = 36$ -ot.
- Hány láb maradt?
- $48 - 36 = 12$.
- Ez hány nyúl rajzolásához elégséges?
- $12 : 2 = 6$ nyúl.

Megoldottuk a feladatot 3644 fej és 8656 láb esetére is. Először a "3644 tyúk és 0 nyúl" esetéből kiindulva adtuk meg a választ, utána viszont megoldottuk a feladatot a "3000 tyúk és 644 nyúl" kezdeti feltételezéssel is.

18. Feladat: *A tricikli tolvajokat a rendőrök biciklin üldözik. Összesen 34 keréken gurulnak, és 14 kormánnyal kormányoznak. Hány triciklit loptak el?*

A tanulók ezt a feladatot kizárólag a hamis feltételezések módszerével kellett megoldják. A legtöbben kezdetben feltételezték, hogy minden jármű bicikli, így $14 \cdot 2 = 28$ kerék van. Mivel a kerekek száma $34 - 28 = 6$ -tal több, ezért 6 tricikli és $14 - 6 = 8$ bicikli van. Néhányan viszont azt feltételezték, hogy minden jármű tricikli, megtárgyaltuk, hogy az is ugyanolyan jó megoldás. Sőt, a feltételezést tetszőleges számú biciklivel és triciklivel is megtehetjük, csak az a fontos, hogy a járművek számának összege 14 legyen. A kerekek számából következtethetünk arra, hogy miként kell változtatnunk a biciklik, illetve triciklik számát. Eljátszottuk a "kezdetben 7 bicikli és 7 tricikli" esetét is, a gondolatmenetet ebben az esetben táblázatba foglaltuk.

Összegzés: A feladatokon keresztül bemutattuk a szakaszos ábrázolás módszerét (1-8. feladatok), a mérleg használatát (8-10. feladatok) és a visszafelé következtetés módszerét (11. feladat). A 8. feladatot szakaszos ábrázolással és mérleg használatával is megoldottuk, érdekes módon ennek a feladatnak az esetében a tanulók fogékonyabbak voltak a szakaszos ábrázolással történő megoldásra, mint a mérleg használatára. A mérleg készítésének fontosságát a 9-10. feladatokon keresztül látták át, de még utána is szívesebben írtak fel aritmetikai egyenleteket a változók között. A 12-15. feladatokat szakaszos ábrázolással is szemléltettük. Az aritmetikai számítások során a számadatok és törtrészek közötti összefüggéseket vizsgáltuk, ugyanezt ábrázolással is megpróbáltuk illusztrálni. A tanulók inkább ábrakészítés nélkül dolgoztak, a törtrészek ábrázolása sok esetben nehézségeket okozott. A 17-18. feladatok esetében az ábrakészítést, illetve a hamis feltételezések módszerét mutattuk be. A módszerek bemutatása és a feladatok feldolgozása 4 tanórát vett igénybe. Ezeken a tanórákon az említett feladatsor feladatain túlmenően egyéb egyszerű példákat is felhoztunk a módszerek ismertetésére, elmélyítésére.

A felmérés megvalósítása - A tanult aritmetikai módszerek elsajátításának mérése

Elsődleges célunk volt felmérni, hogy a tanult módszereket milyen mértékben sajátították el a tanulók, illetve milyen mértékben tudják alkalmazni hasonló feladatok megoldása során? A felmérés lebonyolítására egy 6 feladatból álló feladatsort tűztük ki (lásd *Melléklet 2. Feladatlap*). A feladatok megoldása során 45 perc állt a tanulók rendelkezésére. A tanulókat arra ösztönöztem, hogy akkor is próbálkozzanak a feladat megoldásával, ha nem minden lépést ismernek, illetve a végső választ nem tudják megadni. Többször is hangsúlyoztam, hogy a gondolatmenet vizsgálata számomra legalább annyira fontos, mint a feladat helyes megoldása. Arra ösztönöztem őket, hogy írjanak le minden gondolatot, ötletet, még akkor is ha ezek nem vezetnek el a feladat megoldásához. A tanulók a felmérés során nagyon motiváltak, együttműködők voltak.

A feladatok megoldásának értékelése

A tanulók többsége a tanult módszereket próbálta alkalmazni a feladatok megoldása során. A könnyebb áttekinthetőség kedvéért az alkalmazott módszerek szerinti megoszlást táblázatba foglaltuk.

1. Feladat: *Egy szálloda 23 szobájában 52 fekvőhely van, a szobák kétágyasak, illetve háromágyasak. Hány kétágyas szoba található a szállodában?*

2.6. Táblázat

Jó válasz	25
Rossz válasz	19
Nem foglalkozott vele	6

2.7. Táblázat

Alkalmazott módszer	Jó válasz	Rossz válasz
Ábrakészítés	2	2
Hamis feltételezések módszere	13	2
Próbálgatás	10	6
Aritmetikai műveletek	0	9

Amint a 2.7. Táblázatból kitűnik, a legtöbb tanuló a próbálgatás módszerét alkalmazta. Előzetes kutatásaim, felméréseim is igazolták, hogy ilyen típusú feladatok megoldása esetében (ahol a probléma egy kézzelfogható gyakorlati példán alapszik, viszonylag kis számadatokkal, illetve a megoldás csak egész szám lehet) a diákok előszeretettel alkalmazzák ezt a módszert [28]. Többek között azért mutattam be a gyakorló órákon a hamis feltételezések módszerét, hogy az ilyen szertelen próbálgatások gyakoriságát csökkentsem (mivel ez sok esetben időigényes, illetve nagy számok esetén viszonylag nehézkes). Végül a hamis feltételezések módszere lett ennél a feladatnál a leghatékonyabb megoldási eljárás. A tanulók többsége a "minden szoba kétágyas" kezdeti feltételezésből indult ki és adott jó választ.
Egyes tanulók a hamis feltételezések módszerének táblázatos formában történő tárgyalására is fogékonyaknak bizonyultak, az egyik tanuló a következő táblázatot készítette:

2.8. Táblázat

	kétágyas	háromágyas	ágyak száma	hiba
első feltételezés	11	12	58	6
második feltételezés	12	11	57	5
megoldás	17	6	52	0

Látható, hogy ez a tanuló nem a "minden szoba kétágyas" kezdeti feltételezést választotta, ahogyan azt a legtöbben tették.
Felvetődik a kérdés, hogy a hamis feltételezések módszere miben tér el a közönséges próbálgatástól, legalábbis hogyan tűnik ki egy tanuló munkájából, hogy tudatosan alkalmazta ezt a módszert vagy csak próbálkozott? Az elemzés során ezt ahhoz kötöttük, hogy két feltételezés után a tanuló megadta a helyes választ, nem pedig többszörös próbálgatásokkal jutott el a megoldáshoz (ugyanilyen módon jártunk

el a rossz válaszok elemzésénél is). Ha a feltételezésekkel párhuzamosan léteznek olyan számítások vagy műveletek, amelyek arra utalnak, hogy a tanuló összefüggéseket keresett a feltételezések számadatai és a hiba alakulása között, akkor biztosak lehetünk abban, hogy a tanuló tudatosan alkalmazta a hamis feltételezések módszerét.
10 tanuló próbálgatások sorozatával jutott el a helyes válaszhoz, sokan közülük nyomon követték a hiba alakulását, de nem fogalmaztak meg következtetést a hiba alakulására vonatkozóan. Összesen 8 diák esetében született rossz válasz az említett két módszer alkalmazásával, ez általában számítási hibákból adódott.
9 tanuló sikertelenül próbálkozott olyan aritmetikai számítások elvégzésével, amelyek több esetben nélkülöztek minden logikát, inkább a feladat adataival történő matematikailag indokolatlan műveletek végrehajtásában nyilvánultak meg. Ezek a tanulók elmulasztották a feladat végén az ellenőrzést is, egyébként észrevehették volna a válaszaikban rejlő ellentmondásokat.
4 tanuló próbálkozott ábra készítésével, közülük ketten jó választ adtak. Mindannyian 23 téglalapot rajzoltak (szobák), ezekbe helyeztek el kisebb téglalapokat vagy vonalkákat (ágyak), viszont ketten belekavarodtak a számolásba, egyikük végül egyágyas szobákat is rajzolt. Meglepő, hogy viszonylag kevesen próbálkoztak ezzel a módszerrel, annak ellenére, hogy tanórákon ezt a módszer több rokon feladat kapcsán is megemlítettük.

2. Feladat: *Egy iskolába összesen 760 tanuló jár. A lányok száma 168-cal több, mint a fiúk száma. Hány fiú jár az iskolába?*

Az alkalmazott módszereket a következő táblázat szemlélteti:

2.9. Táblázat

Jó válasz	33
Rossz válasz	16
Nem foglalkozott vele	1

2.10. Táblázat

Alkalmazott módszer	Jó válasz	Rossz válasz
Ábrakészítés	25	7
Próbálgatás	1	1
Aritmetikai műveletek ábrakészítés nélkül	6	8
Algebrai egyenlet	1	0

A feladat megoldása során a tanulók többsége sikeresen alkalmazta az ábrakészítés módszerét. Voltak azonban olyan tanulók is, akik az ábra sikeres elkészítése után

rossz műveleteket felírva téves eredményre jutottak vagy feladták. Ezeknek a tanulóknak az esetében egyértelmű, hogy elsajátították az ábrakészítés technikáját, de nem tudtak kapcsolatot teremteni az ábra és a hozzá kapcsolódó aritmetikai számítások között. Néhány jól elkészített ábra és helyes algoritmus esetében számítási hibák is előfordultak. Egy tanuló a helyesen elkészített ábrának a hiányzó szakaszaira próbálgatással helyezett el számokat, úgy, hogy végül helyes eredményre jutott.
6 tanuló ábrakészítés nélkül végezte el helyesen az aritmetikai számításokat.
8 tanuló ábrakészítés nélkül helytelenül dolgozott. Egyesek a feladat adatait rosszul értelmezték, többen viszont logikátlan számolgatások és az ellenőrzés hiánya miatt adtak rossz választ.
Próbálgatással 2 tanuló kísérletezett, de mivel a feladatban viszonylag nagy számadatok szerepeltek csak egyikük találta meg a helyes eredményt (ő is viszonylag hosszadalmas számolgatással), a másik viszont többszöri próbálgatás után feladta.
Egy tanuló helyesen oldotta meg az $x+(168+x) = 760$ egyenletet, annak ellenére, hogy a felmérés előtt a szöveges feladatok megoldása egyenletekkel ebben a tanévben még nem lett bemutatva. Viszont 5. osztályban a tanulók már megismerték az egyenletek megoldási módszereit és azoknak az alkalmazhatóságát szöveges feladatok esetében.

3. Feladat: *Egy udvarban kacsák és libák vannak, négyszer annyi kacsa, mint liba. Összesen 165 szárnyas van. Hány liba van az udvarban?*

2.11. Táblázat

Jó válasz	37
Rossz válasz	11
Nem foglalkozott vele	2

2.12. Táblázat

Alkalmazott módszer	Jó válasz	Rossz válasz
Ábrakészítés	30	2
Próbálgatás	4	1
Aritmetikai műveletek ábrakészítés nélkül	3	8

A feladat jellegéből kifolyólag előzetes elvárásaink között szerepelt, hogy a tanulók túlnyomó többsége az ábrakészítés módszerét fogja alkalmazni. Ez meg is történt, az említett módszert 30 tanuló alkalmazta sikeresen, ez hatékonyságban messze meghaladja a más módszereket. Egy tanuló jól készítette el az ábrát, ugyanakkor próbálgatások sorozatán keresztül igyekezett megtalálni azt a számot, amit a szakaszok helyére kell illeszteni, majd jó választ adott. Két tanuló helyesen készítette

el a szakaszos ábrát, viszont utána helytelen aritmetikai számításokat végeztek, vagyis a helyesen elkészített ábrában rejlő összefüggéseket nem voltak képesek átvinni az aritmetikai számításokba.
Néhány tanuló nem készített ábrát, ők egyszerűen műveletek elvégzésével próbálkoztak. Közülük 3 tanuló a $165 : 5 = 33$ osztás elvégzése után megadta a jó választ. Valószínűleg ezek a tanulók tisztában voltak a feladat aritmetikai hátterével és fölöslegesnek tartották az ábra elkészítését. Ezzel ellentétben néhány tanuló megoldásából kitűnt, hogy nincsenek tisztában az aritmetikai módszerekkel, ötlettelen műveletek végrehajtásával próbáltak választ találni a kérdésre.
A próbálgatás módszerét öt tanuló alkalmazta, négyen közülük jó választ adtak. Egyesek a kacsák számára vonatkozóan adtak különböző értékeket, majd ezt negyedelve megkapták a libák számát (amely több esetben tizedes tört volt, de ez őket nem zavarta), mások pedig fordítva, a libák számából indultak ki, majd ezt négyszerezve megkapta a kacsák számát. Egy tanuló többszöri próbálkozás után feladta, annak ellenére, hogy közel járt a jó válaszhoz.

4. Feladat: *Egy szekrény három polcán könyvek vannak. Az első polcon 5-tel több, mint a másodikon. A harmadik polcon kétszer annyi, mint a másodikon. A három polcon összesen 149 könyv van. Hány könyv van a polcokon külön-külön?*

2.13. Táblázat

Jó válasz	28
Rossz válasz	18
Nem foglalkozott vele	4

2.14. Táblázat

Alkalmazott módszer	Jó válasz	Rossz válasz
Ábrakészítés	21	11
Próbálgatás	3	0
Aritmetikai műveletek ábrakészítés nélkül	4	5
Visszafelé következtetés (buborékábra)	0	2

A tanulók többsége az ábrakészítés módszerével adott jó választ (21 tanuló). 3 tanuló helyes ábrakészítés mellett számolási hibákat vétett. 8 tanuló viszont helytelenül készítette el az ábrát, a hibák fő forrása a szövegben rejlő összefüggések helytelen értelmezése volt. 1 tanuló rossz ábrakészítés után feladta és egy másik módszert, a visszafelé következtetést próbálta buborékos ábrával (annak ellenére, hogy ez a módszer ennek a feladatnak az esetében nem célravezető). A visszafelé gondolkodás módszerét két másik tanuló is alkalmazta helytelenül.
Ábrakészítés nélkül végezte el helyesen a műveleteket és adott jó választ 4 tanuló.

Ők is a $149 - 5 = 144$ és $144 : 4 = 36$ műveleteket végezték, akárcsak az ábrakészítés módszerével helyesen dolgozó tanulók, viszont nem tartották szükségesnek az ábra elkészítését.
5 tanuló ábrakészítés nélkül rossz választ adott, mindannyian logikátlan számolgatásokba bocsátkoztak és nem vették figyelembe a feladatban rejlő összefüggéseket. Próbálgatással 3 tanuló adott jó választ. Mindhárman a második polc tartalmának adtak különböző értékeket, majd ezt felhasználva a másik két polc tartalmát számították ki. A próbálkozás helyességét az összes könyv számából ellenőrizték.

5. Feladat: *Bea a zsebpénzét megkétszerezte, majd elköltött 368 forintot, így 432 forintja maradt. Mennyi pénze volt eredetileg?*

2.15. Táblázat

Jó válasz	38
Rossz válasz	10
Nem foglalkozott vele	2

2.16. Táblázat

Alkalmazott módszer	Jó válasz	Rossz válasz
Aritmetikai műveletek ábrakészítés nélkül	11	6
Visszafelé következtetés (buborékábra)	27	4

A feladat jellegéből kifolyólag a tanulók többsége a visszafelé következtetés módszerét alkalmazta. Ők buborékábrákat rajzoltak, melyekre a műveleteket illesztették, majd az ellentétes műveleteket végrehajtva jó választ adtak (27 tanuló).
2 tanuló a buborékábrába a műveleti jeleket fordított sorrendben illesztette be és ezért a következő rossz választ adták: "$432 - 368 = 64$; $64 \cdot 2 = 128$ ". 4 tanuló a buborékábrát helyesen készítette el, de számolási hibát vétett.
11 tanuló buborékábra alkalmazása nélkül helyesen írta fel fordított sorrendben a "$432 + 368 = 800$; $800 : 2 = 400$ " aritmetikai műveleteket. 2 tanuló előzetesen még felírta a "$\Delta \cdot 2 - 368 = 400$ " összefüggést is.

6. Feladat: *Egy osztály diákjainak fele Debrecenbe utazott, egy harmada Székesfehérvárra, a többi 6 tanuló pedig Budapestre. Hány fős az osztálylétszám?*

2.17. Táblázat

Jó válasz	21
Rossz válasz	26
Nem foglalkozott vele	3

2.18. Táblázat

Alkalmazott módszer	Jó válasz száma	Rossz válasz
Ábrakészítés	12	17
Aritmetikai műveletek ábrakészítés nélkül	9	7
Visszafelé következtetés (buborékábra)	0	2

12 tanuló az ábrakészítés módszerével adott jó választ. Az ábrakészítésekből kiderült, hogy 9 tanuló tudatosan az osztálylétszám hatodaiban, míg 3 tanuló tizenkettedekben gondolkodott, de mindannyian megadták a jó választ.
Ábrakészítés módszerével sikertelenül próbálkozott 17 tanuló. Egyesek az osztálylétszámot egy körön próbálták szemléltetni vagy szakaszos ábrázolással próbálkoztak, viszont ezeket nem a feladat adatainak megfelelően osztották törtrészekre, illetve nem találták meg a helyes megfeleltetést az osztálylétszám törtrészei és a megfelelő számadatok között.
9 tanuló aritmetikai számításokkal, ábra készítése nélkül próbálkozott. Közülük 7-en az $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$ művelet elvégzése után megtalálták az "osztálylétszám egy hatod része $=$ 6" megfeleltetést, majd megadták a jó választ. 2 tanuló csak a "$6 \cdot 3 = 18$; $18 \cdot 2 = 36$ " műveleteket végezte el és adott jó választ.
Az ábra készítése nélkül próbálkozó tanulók közül heten adtak rossz választ, több tanuló esetében a számítások csupán szertelen próbálkozások voltak.
2 tanuló buborékábrát készített, majd visszafelé következtetéssel próbálkozott sikertelenül.

2.2.4. A 2. Felmérés

Az algebrai egyenletekről

A tanulók az 5. osztályos tananyagban ismerkednek az egyenletekkel, bevezetjük az ismeretleneket jelölő betűszimbólumokat, az alaphalmaz és igazsághalmaz fogalmát, viszont az egyenletek megoldása csak visszafelé következtetéssel (ahol lehetséges) vagy próbálgatással történik. 6. osztályban kerül sor az egyenletek részletesebb tárgyalására, itt a lebontogatással, illetve mérleg-elvvel történő megoldási módszereket mélyítjük el.
Az *1. Felmérés* elvégzése után 4 tanórát az egyenletek megoldási módszereinek gyakorlására fordítottunk. Egyenleteket oldottunk lebontogatással, illetve a mérlegelv alkalmazásával. Ezt a szakaszt egy felméréssel zártuk, amelynek során ellenőriztük, hogy a tanulók mennyire sajátították el az egyenlet-megoldási technikákat. Ugyanis a szöveges feladatok megoldását egyenletekkel csak úgy lehet megvalósítani, ha a tanulók nem vétenek hibákat az egyenletek megoldása során. A felmérés során a tanulók a *3. Feladatlap*-on található (lásd *Melléklet*) 10 egyenletből álló

feladatsort oldották meg.
A dolgozatok értékelésekor a jól megoldott egyenletek 1 pontot, a hibás megoldások 0 pontot értek (még akkor is, ha csak egy előjel tévesztése vagy egyéb apró hiba szerepelt benne). Ilyen körülmények között osztályozva, az elért átlag 59 százalékos lett. Az egyenletek nehézségi fokát, illetve a viszonylag szigorú osztályozást figyelembe véve levontuk a következtetést, hogy a tanulók jó arányban elsajátították azokat az egyenlet megoldási módszereket, amelyek szükségesek a szöveges feladatok algebrai úton való megközelítéséhez.

Az algebrai módszerek bevezetése és gyakorlása

A bizalomkeltő eredmények után hozzálátunk a szöveges feladatok algebrai módszerekkel történő feldolgozásához. Erre a tevékenységre 6 tanórát szántunk. Tekintettel voltunk arra, hogy a 6. osztályos diákok számára a feladatok algebrai úton való megközelítése viszonylag bonyolult. Elsőként az *1. Feladatlap* 18 feladatát oldottuk meg egyenletek felírásával. Itt nagy hangsúlyt fektettünk az aritmetikai és algebrai módszerek közötti párhuzam elemzésére. Kiemeltük például, hogy a szakaszos ábrázolásnál rajzolt szakaszokat x-szel jelöljük, a visszafelé következtetésnél pedig egyenletet írtunk fel x-ből kiindulva. Utána a *2. Feladatlap* feladatai következtek, ahol megbeszéltük, hogy miként lehetett volna ezeket algebrai úton megközelíteni. Ahol nehézségeket tapasztaltunk egyszerűbb rokon feladatokkal, példákkal igyekeztünk a megoldási módszereket még érthetőbbé tenni. Az említett feladatlapok megoldása után tovább mélyítettük az ismereteket, megoldva a Mozaik Kiadó 7. osztályos tankönyvének néhány ide vonatkozó, egyszerűbb feladatát [34] (lásd *Melléklet*, *4. Feladatlap*). Ezekből a feladatokból is kitűnik, az algebrai módszerek gyakorlása során nagy hangsúlyt fektettünk a tipikusan „algebrai" feladatokra, vagyis azokra, amelyekben az egyik ismeretlen a másiknál valamennyivel több (vagy kevesebb), illetve az egyik mennyiség a másiknak a valahányszorosa. Ezeknek a szöveges feladatoknak az algebra nyelvére történő lefordítása viszonylag egyszerű, ugyanakkor a felírt egyenletek is könnyen megoldhatók. Ezeknek a feladatoknak a segítségével lehet leghatékonyabban szemléltetni az aritmetikai és algebrai módszerek közötti párhuzamot. A feladatokat a tanórákon frontálisan, illetve önálló munkában dolgoztuk fel. Néhány feladat otthoni munkára lett kijelölve az eredmények és módszerek utólagos megbeszélésével. A tanulókat arra ösztönöztem, hogy mindenképpen próbáljanak a feladatokhoz egyenletet is fölírni, még akkor is, ha az aritmetikai megközelítést könnyebbnek ítélik meg. A megoldási eljárások és a felmerült ötletek részletes ismertetése túlságosan hosszadalmas lenne, ezért leginkább azokra a vetületekre összpontosítanék, amelyek az algebrai módszerekre való áttérés jellegzetességeit, illetve nehézségeit tükrözik. Néhány tanuló munkáján keresztül mutatnám be azokat a buktatókat, amelyeket az algebrai módszerekre történő áttérés jelent. Mivel bizonyos tanulók munkáit több feladat esetében is idézem, ezért ennek az elemzésnek a során minden tanuló, akinek a munkájából valamit kiemeltem, egy sorszámot kapott az elemzés jobb áttekinthetősége céljából.

1. Feladat: *Zsófi és Dorka együtt 34 kg újságot gyűjtött, Zsófi 11 kg-mal többet, mint Dorka. Mennyit gyűjtöttek külön-külön?*

Kezdetben megbeszéltük, hogy a szakaszos ábrázolást tekintjük kiindulópontnak, viszont az itt használatos szakaszokat most x -szel jelöljük. Ilyen módon bevezettük a Dorka, illetve Zsófi által gyűjtött mennyiségre vonatkozóan az x , illetve $x+14$ jelöléseket. Utána a tanulók helyesen írták fel és oldották meg az $x+x+11=34$ egyenletet. Néhány számolási hibától eltekintve mindannyian jó választ adtak.

2. Feladat: *Annának ötször annyi ötöse van matekból, mint Zsuzsinak. Ketten együtt 18 db ötöst kaptak eddig. Hány ötösük van külön-külön?*

Ennél a feladatnál is a szakaszos ábrázolásból indultunk ki, majd a Zsuzsi ötöseinek számát x -szel, míg az Annáét $5\cdot x$ -szel jelöltük, majd a tanulók kellett felírják az egyenletet. Legtöbben jó választ adtak, viszont megemlíteném az alábbi hibát.
1. és 2. tanuló: Zsuzsi, illetve Anna ötöseinek számát x -szel, illetve $x\cdot 5$ -szel jelölve helyesen írták fel az $x+x\cdot 5=18$ egyenletet, de nem vették figyelembe a műveletek sorrendjét, ezért a következőket írták: $2\cdot x\cdot 5=18$.

3. Feladat: *Gabi nagyon szeret kosárlabdázni. A legutóbbi mérkőzésén kétszer annyi pontot dobott, mint az előzőn. A két mérkőzésen összesen 33 pontot dobott. Hány pontot dobott a két mérkőzésen külön-külön?*

Ez a feladat nagyon hasonlít az előzőre, ezért rövid megbeszélés után önálló munkára jelöltem ki. A tanulók az előző feladat mintájára dolgoztak és néhány kivételtől eltekintve jó választ adtak. A következő hibás megoldások fordultak elő.
1. tanuló: A második mérkőzésen szerzett pontok számát $2\cdot x$ -szel jelölte és megoldotta a $2\cdot x=33$ egyenletet. Mivel megoldásként $x=16,5$ -öt kapott, ezért nem tudta megválaszolni a kérdést (a tizedes tört okozta a gondot).
5. tanuló: Tévesztette a műveletek sorrendjét az egyenlet megoldása során

$$\begin{aligned} x+x\cdot 2&=33\\ 2\cdot x\cdot 2&=33 \end{aligned} \tag{5}$$

majd feladta.

4. Feladat: *A labdarúgó bajnokság 2006/2007-es szezonjában a bajnok Debrecen éppen 50-nel több pontot szerzett, mint az utolsó helyen végzett Vác. A két csapat pontjainak átlaga 44 pont. Hány pontot gyűjtött Vác?*

Itt a nehezítést az jelentette, hogy a pontok összege helyett az átlag szerepelt. Ahhoz, hogy a nehézséget áthidaljuk, felelevenítettük az átlag számításának szabályát, ahol a tanulók a "hogyan számoljuk ki két szám átlagát?", illetve a "milyen módon kaphatjuk meg az összeget az átlagból?" kérdésekre kellett válaszoljanak. Ezek után az összefüggések, illetve az egyenlet felírása nem okozott gondot. Ennek ellenére néhányan nehézségekkel küzdöttek.
1. tanuló: A Vác által szerzett pontok számát x -szel jelölte, majd a következő egyenletet megoldva kapott helyes eredményt:

$$\begin{aligned} x + x + 50 : 2 &= 44 \\ 2 \cdot x + 50 : 2 &= 44 \quad &| \cdot 2 \\ 2 \cdot x + 50 &= 88 \quad &| - 50 \\ 2 \cdot x &= 38 \quad &| : 2 \\ x &= 19 \end{aligned} \tag{6}$$

Megállapíthatjuk, hogy a megoldás során nem használt zárójeleket (ami hibának számít), ugyanakkor a lebontogatás elvét alkalmazta helyesen. Munkájából kitűnik, hogy az aritmetikai gondolatmenetet követve egyenletet oldott meg, viszont helytelenül írta le a feladatot az algebra eszközeivel.
2. és 9. tanuló: Helyesen jelölték a változókat, viszont az $x + 50 + x = 44$ egyenletet írták fel, vagyis tévesztették az átlag és összeg fogalmát.

5. Feladat: *A focimeccsen Bálint kezdőjátékos volt, majd lecserélték, és a 90 perces meccs végéig Csaba játszott a helyén. Csaba feleannyi időt töltött a pályán, mint Bálint. A meccs hányadik percében történt a csere?*

Kezdetben tisztáztuk, hogy a "Csaba feleannyi időt töltött a pályán, mint Bálint" ugyanazt jelenti mint a "Bálint kétszer annyi időt töltött a pályán, mint Csaba", utána a tanulók önálló munkában dolgoztak. Legtöbben már könnyen fel tudták írni az $x + 2 \cdot x = 90$ egyenletet.
Egyes tanulóknál viszont még gondot okozott az összefüggések helyes lefordítása az algebra nyelvére, illetve az (esetleg helyesen felírt) törtegyütthatós egyenlet megoldása.
1. tanuló: Helyesen írta fel az $x + x : 2 = 90$ egyenletet, utána a $2 \cdot x : 2 = 90$ helytelen összevonás következett.

2. tanuló: "Bálint $=x \cdot 90$ " és "Csaba $= x$" jelölések után az $x \cdot 90 + x = 90$ egyenletet írta fel (helytelenül jelölte betűszimbólumokkal a feladatban szereplő összefüggéseket).

6. Feladat: *Kukutyin három iskolájába összesen 1480 gyerek jár. Az Arany Iskolának kétszer annyi tanulója van, mint az Ezüst Iskolának, legtöbben pedig a Bronz Iskolába járnak: 10-zel többen, mint a másik kettőbe összesen. Hány gyerek jár a három iskolába külön-külön?*

A legtöbb tanuló a $2 \cdot x + x + 2 \cdot x + x + 10 = 1480$ egyenlet megoldásával adott jó választ.
1. tanuló: Az egyenlet helyes felírása után hibát vétett az összevonás során:

$$\begin{aligned} x + x \cdot 2 + x + x \cdot 2 + 10 &= 1480 \\ 4 \cdot x \cdot 4 + 10 &= 1480 \end{aligned} \tag{7}$$

Néhány tanuló nem tudta helyesen felírni a feladat adatait algebrai szimbólumokkal.
2. tanuló: "Arany Iskola $= x \cdot 2$; Ezüst Iskola $= x$ és Bronz Iskola $= x \cdot 10$ " jelölések után az

$$x \cdot 2 + x + x \cdot 10 = 1480 \tag{8}$$

egyenlet megoldása következett.
10. tanuló: "Ezüst Iskola $= x$, Arany Iskola $= 2 \cdot x$, Bronz Iskola $= (2 \cdot x + x) \cdot 2$". A Bronz Iskola létszámának felírásánál nem szerepel a "10-zel többen" összefüggés, viszont megjelenik egy 2-es szorzó (valószínűleg a "mint a másik kettőbe összesen" rész generálta az ötletet). Utána a $3 \cdot x \cdot 2 = 1480$ egyenletet írta fel, itt a Bronz Iskola létszámát tekintette 1480-nak.
5. tanuló: Az Ezüst, illetve Arany iskola létszámát helyesen jelölte (x -szel, illetve $2 \cdot x$ -szel), ő is a Bronz iskolánál tévedett, ennek a létszámát $2 \cdot 2 \cdot x + 10$ -zel jelölte. Utána pedig a $2 \cdot 2 \cdot x + 10 = 1480$ egyenletet oldotta meg.

7. feladat: *Január 23-án az éjszaka 5 óra 40 perccel hosszabb a nappalnál. Mikor nyugszik a nap, ha 7 óra 21 perckor kel?*

A tanulók önálló munkában oldották meg a feladatot, majd a megoldásokat és eredményeket közösen beszéltük meg.
Több tanuló sikeresen oldotta meg a feladatot órákban számolva a $x + x + 5\frac{2}{3} = 24$ egyenlet megoldásával, ahol x a nappal hosszát jelenti órákban kifejezve. Kevesebben voltak azok akik szükségesnek látták percekbe átváltani az időtartamokat

(pedig előzetes elvárásaim között szerepelt, hogy megteszik ezt).
Akadtak olyanok, akik helytelenül értelmezték a feladatban szereplő *7 óra 21 perc* adatot, ezért ez helytelenül az egyenlet felírásába is bekerült, amint azt a következő példa is szemlélteti.
2. tanuló: A következő egyenlet megoldásával próbált célt érni: $x+5+40 = 7+21$.

8. Feladat: *Hókuszpók elfogott néhány törpöt, és most szószt szeretne készíteni hozzájuk. Ehhez vásárolt négy üveg áfonyalekvárt és három üveg mogyorókrémet. Összesen 4030 Ft-ot fizetett. Mennyibe kerül egy üveg áfonyalekvár és egy üveg mogyorókrém külön-külön, ha egy üveg mogyorókrém éppen háromszor olyan drága, mint egy üveg áfonyalekvár?*

A tanulók nehezen írták fel az összefüggéseket az algebra eszközeivel, néhány típushibát említenénk.
1. és 2. tanuló: Az áfonyalekvár $= x$ és mogyorókrém $= 3 \cdot x$ helyes jelölések után a helytelenül felírt $x + 3 \cdot x = 4030$ egyenlet következett.
3. tanuló: Helytelenül írta fel az egységárakat, egy üveg mogyorókrém árát $3{\cdot}x{+}3$ -mal, míg egy üveg áfonyalekvár árát $x{+}4$ -gyel jelölte, utána a következő egyenletet írta fel: $3 \cdot x + 3 + x + 4 = 4030$.
5. tanuló: A $4 \cdot x + 9 \cdot x = 4030$ egyenlethez az "áfonyalekvár $= 4 \cdot x$ " és "mogyorókrém $= 3 \cdot 3 \cdot x$ " összefüggések felírása után jutott, viszont az egyenlet megoldása után nem tudta megadni a helyes választ. Nem tudta miként értelmezze az egyenlet $x = 310$ megoldását, vagyis hiányzott az egyenlet megoldásából a feladat adataira történő visszacsatolás.
7. tanuló: Az áfonyalekvár egységárát x -szel, a mogyorókrémét $3 \cdot x$ -szel jelölte, majd felírta az $x + 3 \cdot x + 4 + 3 = 4030$ egyenletet. Nála nem rögzültek helyesen a változóval végzett műveleti szabályok.
12. tanuló: A $4 \cdot x + 3 \cdot x = 4030$ egyenletet írta fel, vagyis mindkét termék egységárát x -szel jelölte. Gyakran előfordul az algebratanítás kezdeti fázisaiban, hogy a tanulók két különböző mennyiséget ugyanazzal a változóval jelölnek, náluk még nem alakult ki helyesen a változó fogalma és matematikai jelentése.
A fentiekhez hasonló hibákat a következőképpen javítottuk ki. Megállapodtunk abban, hogy egy üveg áfonyalekvár árát x −szel, egy üveg mogyorókrémét pedig $3 \cdot x$ − szel jelöljük. Utána a " 4 áfonyalekvár + 3 mogyorókrém = 4030 " aritmetikai egyenletet írtuk fel, ebbe helyettesítettük be az x -szel, illetve $3 \cdot x$ -szel jelölt egységárakat, majd megoldottuk a $4 \cdot x + 9 \cdot x = 4030$ egyenletet.

9. Feladat: *Nagy úr fizetésemelésben reménykedik. Ha fizetését a két és félszeresére emelnék, és még adnának ezen felül is 10000 Ft emelést, akkor már csak 5000 forinttal keresne kevesebbet, mint főnöke, Kiss úr. Kiss úr fizetése 290000*

Ft. Mennyit keres Nagy úr?

Ebben az esetben a nehezítést nem a feladat algebrai modellje, hanem inkább a bonyolult megfogalmazása jelentette. Ennek ellenére a tanulók többsége algebrai módszerekkel jó választ adott. Az előforduló hibákból néhányat kiemelnénk.
2. tanuló: Helytelenül fordította le a feladatot az algebra nyelvére, Kiss úr fizetését x -szel, a Nagy úrét pedig $x \cdot 2,5 + 10000$ -rel jelölte. Utána a két fizetés összegéből az alábbi egyenletet írta fel: $x + x \cdot 2,5 + 10000 = 290000$.
6. tanuló: Visszafelé következtetéssel próbálkozott, de tévesen írta fel a műveleteket és számolási hibákat is vétett: "$290000 - 10000 = 28000$; $28000 - 5000 = 23000$; $23000 \cdot 2,5 = 57500$ ".
13. tanuló: Nagy úr fizetését x -szel jelölte, majd a következő egyenletet $2 \cdot x + 10000 - 5000 = 290000$ írta fel. Az egyik hiba, hogy a két és félszerese helyett csak a kétszeresét vette. A másik hiba, hogy az 5000 -et nem a jobb oldalon szereplő mennyiségből, hanem a bal oldalból vonta ki. Ez viszont elég gyakran előfordul általános iskolások körében, hogy a különbséget a kisebb mennyiségből vonják ki az egyenlet felírásakor.

10. Feladat: *Egy kétkarú mérleg egyik serpenyőjében 4 db 15 dkg-os vaj és három ismeretlen (de egyforma tömegű) margarin, a másikban pedig 8 db 15 dkg-os vaj van. A mérleg egyensúlyban van. Mekkora egy margarin tömege?*

Először mérleget rajzoltunk, amelynek egyik serpenyőjébe 4 darab 15 dkg-os vajat és 3 darab x tömegű margarint, a másik serpenyőjébe pedig 8 darab 15 dkg-os vajat rajzoltunk. Utána a tanulók önállóan írták fel és oldották meg az egyenletet. Legtöbben a mérleg-elv gyakorlásánál tanultakból indultak ki és a $3 \cdot x + 60 = 120$ egyenletet írták fel. Mások viszont először mindkét serpenyőből eltávolítottak 4 darab vajat, majd utána írták fel a $3 \cdot x = 60$ egyenletet. Az alábbiakban néhány tévesen felírt egyenletet is megemlítenék.
2. tanuló: A következő egyenletet írta fel és oldotta meg: $x \cdot 4 + 15 + 3 = 8 + 15$.
7. tanuló: A "3 db $= x$; 4 db $= x + 15$ dkg; 8 db $= x + 15$ dkg +15 dkg" után a következő egyenletmegoldással próbálkozott: $x + x + x + 15 + 15 + 15 = x$.
Ezeknek a tanulóknak nem sikerült a mérleg segítségével ábrázolt összefüggéseket egyenlet formájába átültetni.

11. Feladat: *A parkban sokan sétáltatják a kutyáikat. Most éppen 98 láb sétál a parkban, és ezekhez 34 fej tartozik. Ha a parkban csak kutyák és emberek vannak, melyikből hány van?*

A feladat algebrai modellje nagyon hasonlít a *2. Feladatlap*-on található *1. Fel-*

adat-hoz. Az aritmetikai felmérés során a tanulók fele adott helyes választ erre a feladatra, legtöbben a hamis feltételezések módszerét alkalmazták vagy egyszerűen próbálgatással adtak jó választ. Mivel a *2. Feladatlap*-ot algebrai módszerekkel is megoldottuk, ezért most arra kértem a tanulókat, hogy önállóan próbálják meg felírni a feladat megoldásához szükséges egyenletet. Ez csak néhány tanulónak sikerült.
Már kezdetben gondok adódtak az ismeretlenek algebrai szimbólumokkal történő helyes jelölésénél:
16. tanuló: A "fej $= x$ " és "láb $= x + 98$" összefüggéseket és az $x + x + 98 = 132$ egyenletet írta fel.
Többen a kutyák és emberek számát is x -szel jelölték, ezek után helytelenül írtak fel egyenleteket, mint például: $x + x = 98$ (*2. tanuló*) vagy $4 \cdot x + 2 \cdot x = 98$ (*3. tanuló*).
Adódtak olyan esetek is, amikor az ismeretlenek helyes felírása után egy helytelenül felírt egyenlet következett.
15. tanuló: Helyesen írta fel a változók közötti összefüggéseket algebrai szimbólumokkal (emberek száma x , kutyák száma $34 - x$) viszont tévedett az egyenlet felírásánál: $x + 34 - x = 98$. Nála még nem rögzült helyesen a változókkal végzett műveletek jelentése.
4. tanuló: Az emberek számát x -szel jelölte és felírta a $2 \cdot x + 4 \cdot (34 - x) = 34$ egyenletet. Látható, hogy az egyenlet bal oldalán helyesen írta fel a lábak számára vonatkozó összefüggést, viszont az egyenlet jobb oldalán (érthetetlen módon) a fejek száma szerepel. Miután a megoldás során eljutott a $136 - 2 \cdot x = 34$ összefüggéshez odaírta, hogy ellentmondás és feladta. Valószínűleg az x előtt szereplő negatív szorzó zavarta meg, mivel feltételezte, hogy az x csak pozitív mennyiség lehet. Amint a [70]-ből is kiderül, a tanulóknak a negatív együtthatókkal történő manipulálás gondot okoz az algebrai módszerek bevezetésének kezdeti szakaszában.
Érdemes megjegyezni, hogy ennél a feladatnál több tanuló a próbálgatás módszerét alkalmazta. Tették ezt annak ellenére, hogy határozott kérésem volt, hogy írjanak fel egyenletet a feladatra vonatkozóan. Innen is látszik, hogy ez a feladat nem kimondottan azok közé tartozik, amelyek algebrai módszerekkel könnyen kezelhetők, ezt igazolja a fentiekben említett nagy számú típushiba is. Eddigi tapasztalataim is azt igazolják, hogy az olyan feladatok esetében, amelyek algebrai modellje a

$$\begin{aligned} a \cdot x + b \cdot y &= c \\ x + y &= d \end{aligned} \tag{9}$$

típusú kétismeretlenes egyenletrendszer, a tanulók nehezen írják fel a megfelelő egyismeretlenes egyenletet. Ezek a feladatok könnyebben taníthatók aritmetikai módszerekkel, itt kiemelnénk a hamis feltételezések módszerének nagy előnyét.

12. Feladat: *Gondoltam egy számot. A háromszorosához 12-t adva 2-vel kisebb számot kaptam, mintha a négyszereséből levontam volna 3-at. Melyik számra gondoltam?*

A tanulók algebrai módszerrel önállóan kellett megoldják a feladatot. Többen helyesen írták fel és oldották meg a $3 \cdot x + 12 + 2 = 4 \cdot x - 3$ vagy a $3 \cdot x + 12 = 4 \cdot x - 5$ egyenleteket. Előfordultak azonban hibás megoldások is, amint az alábbiakból kiderül.
6. tanuló: A $3 \cdot x + 12 - 2 = 4 \cdot x - 3$ egyenletet oldotta meg. Az egyenlet felírásánál azt a hibát követte el, hogy a kisebb mennyiségből elvett 2-t, ahelyett hogy hozzáadta volna. Ennek a viszonylag gyakori hibának az oka, hogy a "2-vel kisebb" kifejezés a tanulóknak elsőre a kivonás műveletét sugallja.
17. tanuló: A $3 \cdot x + 12 = 4 \cdot x - 3$ egyenletet írta fel (megoldás $x = 15$). Fel tudta írni algebrai szimbólumokkal a "háromszorosához 12-t adva", illetve "a négyszereséből levontam volna hármat" összefüggéseket, viszont az egyenlet felírásánál kimaradt a "2-vel kisebb" reláció.
18. tanuló: "A gondolt szám $= x$, a háromszorosa $= 3 \cdot x + 12 - 2$, négyszerese $= x - 3$ ", vagyis elég sajátosan fordította le a feladat szövegét az algebra nyelvére.

13. Feladat: *Az osztálykiránduláson az első napi szállás harmadannyiba került, mint a második napi, a harmadik napi pedig feleannyiba, mint az első napi. A három éjszakára a szállásért összesen 13500 Ft-ot fizettünk. Mennyibe került a három éjszaka külön-külön?*

A helyes választ adó tanulók először felismerték, hogy az első napi szállás ára a harmadnapinak a kétszerese, míg a második napi az első napinak a háromszorosa. Ennek alapján "az első nap $= 2 \cdot x$, a második nap $= 6 \cdot x$ és a harmadik nap $= x$" jelölésekkel a $2 \cdot x + 6 \cdot x + x = 13500$ egyenletet írták fel és oldották meg. Azok a tanulók, akik a feladatban szereplő törtrészekben gondolkodtak, általában hibás megoldást adtak. Legtöbben már az ismeretlen mennyiségeket helytelenül jelölték algebrai szimbólumokkal, mások az egyenlet megoldása során hibáztak, amint az alábbi példák is szemléltetik.
2. tanuló és *3. tanuló*: mindketten a következő jelöléseket vezették be: "első nap $= \frac{x}{3}$; második nap $= x$; harmadik nap $= \frac{x}{2}$ ", utána felírták az $x + \frac{x}{3} + \frac{x}{2} = 13500$ egyenletet, majd a megoldás során eltérő hibákat vétettek.
4. tanuló: Az ismeretlen mennyiségekre helyes, ugyanakkor komplikált jelöléseket vezetett be: 1. nap $= x : 3$; 2. nap $= x$; 3. nap $= (x : 3) : 2$. Az egyenletet is helyesen írta fel $x + x : 3 + (x : 3) : 2 = 13500$, viszont a következő lépésben egy rossz összevonás után a $2 \cdot x : 3 + (x : 3) : 2 = 13500$ összefüggéshez jutott, majd feladta.

19. tanuló: Ugyanazokat a jelöléseket alkalmazta és ugyanazt az egyenletet írta fel, mint a *4. tanuló*, viszont az egyenlet megoldása során az összevonás érdekesen alakult $3 \cdot x + 8 = 13500$.
20. tanuló: Az ismeretlen mennyiségekre az "1. nap $= 3 \cdot x$; 2. nap $= x$; 3. nap $= x - 2$ jelöléseket alkalmazta, majd az $x + x - 2 + 3 \cdot x = 13500$ egyenletet írta fel (az egyenlet megoldása során is vétett hibákat).
21. tanuló: Az ismeretlenek jelölésénél "1. nap $= \frac{x}{3}$; 2. nap $= x$; 3. nap $= \frac{x}{5}$ ", majd az $\frac{x}{3} + x + \frac{x}{5} = 13500$. Az egyenlet megoldása során az $5 \cdot x + x + 3 \cdot x = 13500$ -at írta, vagyis elkövette azt a viszonylag gyakori hibát, hogy a tanulók közös nevezőre hozás során csak a törtmennyiségeket szorozzák meg, az egészek nem kapnak szorzót.

A 2. Felmérés megvalósítása - A tanult aritmetikai és algebrai módszerek elsajátításának mérése

Ebben a felmérésben egy összefogó képet akartunk kapni az eddig tanult módszerekkel kapcsolatban. Elsősorban a következő kérdésekre kerestük a választ:

- A tanulók az aritmetikai vagy az algebrai módszereket részesítik előnyben?
- Melyik módszert milyen hatékonysággal alkalmazzák?
- Mennyire alakultak ki a tanulókban a tipikusan algebrai fogalmak (változó, egyenlet, ekvivalencia, stb)?
- Melyek a legtipikusabb hibák, amelyeket a tanulók az algebrára való áttérés során ejtenek?

Ebből a célból egy 6 feladatból álló feladatsort állítottunk össze (lásd *Melléklet, 5. Feladatlap*), a tanulók ezt 45 perc alatt oldották meg. A feladatok, algebrai modelljüket tekintve, nagyon hasonlítottak az előző felmérés feladataira (*2. Feladatlap*), teljesen más szövegkörnyezettel. A tanulókat arra ösztönöztük, hogy a számukra legkézenfekvőbb módszerrel dolgozzanak (lehet az aritmetikai vagy algebrai módszer). További kérésünk volt, hogy egy általuk hibásnak ítélt gondolatot ne radírozzanak vagy töröljenek, hanem egy vonallal húzzák át. Ezzel az volt a célunk, hogy ellenőrizzük azokat a gondolatokat és módszereket, amelyekkel a tanulók próbálkoztak, de nem jutottak helyes eredményre. A tanulókat arra kértük, ha az általuk választott módszer nem vezetne eredményre, akkor ne adják fel, hanem más módszerrel is próbálkozzanak. Akárcsak az előző felmérés esetében, itt is azt kértük, hogy minden gondolatot vagy ötletet jegyezzenek le, még akkor is ha a jó megoldást nem sikerült megtalálni.

A feladatok megoldásának értékelése

1. Feladat: *Peti a 960 forintos csokit 20 forintos és 100 forintos érmékkel fizeti ki. Hány érme van mindegyikből külön-külön, ha összesen 20 érmét használt?*

2.19. Táblázat

Jó válasz	36
Rossz válasz	9
Nem foglalkozott vele	5

2.20. Táblázat

Alkalmazott módszer	Jó válasz száma	Rossz válasz
Algebrai módszer, egyenlet	1	4
Hamis feltételezések módszere	22	0
Próbálgatás	13	4
Aritmetikai műveletek	0	1

A tanulók többsége próbálgatással, illetve a hamis feltételezések módszerével adott jó választ, akárcsak a *2. Feladatsor 1. Feladatá*-nál (amelynek az algebrai modellje ehhez nagyon hasonló). 10 tanuló már az első feltételezésnél megtalálta a jó választ. A többiek az első feltételezés eredményéből kiindulva tudatosan következtettek, pl. kihasználták, hogy egy húszast százasra cserélve az összeg 80 forinttal növekszik.
13 tanuló próbálgatással adott helyes választ, próbálkozásaikat legtöbben táblázatokba foglalták. Közülük ketten azért a próbálgatást választották mert előzőleg sikertelenül próbálkoztak algebrai módszerekkel.
A próbálgatással rossz választ adó tanulók csak a feladat egyik feltételét (vagy az érmék száma vagy az értékük) vették figyelembe vagy számolási hibákat vétettek, majd feladták.
5 tanuló egyenlet felírásával dolgozott, közülük csak egy adott jó választ, miután a 100 Ft-osok számát x -szel, a 20 Ft-osok számát $20 - x$ -szel jelölte és helyesen megoldotta a $100 \cdot x + 20 \cdot (20 - x) = 960$ egyenletet. A többiek munkái jól tükrözik, hogy az ilyen típusú feladatok algebrai megközelítése nehezen hozzáférhető a 6. osztályos korosztály számára.

2. Feladatlap: *Egy téglalap kerülete 136 cm. A hosszúsága 12 cm-rel több, mint a szélessége. Mekkorák a téglalap oldalai?*

2.21. Táblázat

Jó válasz	19
Rossz válasz	28
Nem foglalkozott vele	3

2.22. Táblázat

Alkalmazott módszer	Jó válasz száma	Rossz válasz
Algebrai módszer, egyenlet	8	18
Ábrakészítés	5	5
Aritmetikai műveletek	6	5

26 tanuló algebrai módszereket alkalmazott, viszont közülük csak 8 tanuló adott jó választ. A "rövidebb oldal $= x$ és "a hosszabb oldal $= x+12$ " jelöléseket alkalmazták, majd helyesen írták fel és oldották meg a $2\cdot x+2\cdot(x+12)=136$ (vagy az ezzel ekvivalens $4\cdot x+24=136$, illetve $x+x+12+x+x+12=136$) egyenletet. Amint a 2.22. Táblázatból is kitűnik, a legtöbb rossz megoldás az egyenletek alkalmazásánál fordult elő. A nehézségeket viszont nem minden esetben az algebrai szimbólumokkal, ismeretlenekkel való manipulálás vagy az egyenletek felírása és megoldása jelentette. Ugyanis 11 tanuló helyesen vezette be a "rövidebb oldal $= x$ " és "a hosszabb oldal $= x+12$ " jelöléseket, de ők a kerületet a két oldal hosszának összegeként azonosították, majd téves eredményre jutottak (ugyanazt a hibát követte el 3 tanuló, akik az ábrakészítés aritmetikai módszerét alkalmazták,ők helyesen készítették el az ábrát, majd a $136-12=124$; $124:2=62$; $62+12=74$ algoritmussal ugyanazt a hibás megoldást adták). 7 tanuló helytelenül adta meg algebrai szimbólumokkal a feladatban szereplő összefüggéseket, illetve hibázott az egyenlet felírásánál is.
Ábrakészítés módszerével 5 tanuló adott helyes választ, szakaszok segítségével ábrázolták az oldalak közötti összefüggéseket, majd a "$136-24=112$; rövidebb oldal $=112:4=28$ cm és hosszabb oldal $=28+12=40$ cm" számításokkal adtak jó választ. Ugyanígy számolt 6 tanuló szakaszos ábrázolás nélkül. Ezek közül egyik kezdetben algebrai módszerekkel próbálkozott, de feladta és utána helyesen dolgozott aritmetikai módszerrel.
Ábrakészítés nélkül 5 tanuló rossz választ adott, közülük az egyik számolási hibákat vétett, a többiek rossz műveleteket írtak fel.

3. Feladat: *Kukutyinban háromszor annyian laknak, mint Nekeresden. Kukutyin lakosainak száma 264-gyel több, mint a nekeresdi lakosok száma. Hányan laknak Nekeresden?*

2.23. Táblázat

Jó válasz	23
Rossz válasz	24
Nem foglalkozott vele	3

2.24. Táblázat

Alkalmazott módszer	Jó válasz száma	Rossz válasz
Algebrai módszer, egyenlet	8	13
Ábrakészítés	14	3
Aritmetikai műveletek ábrakészítés nélkül	1	8

A legtöbben (21 tanuló) algebrai módszerekkel próbálkoztak, viszont ezeknek a tanulóknak csak a harmada adott jó választ. 7 tanuló helyesen írta fel és oldotta meg a $3 \cdot x - x = 264$ (vagy az $x + 264 = 3 \cdot x$) egyenletet, 1 tanuló pedig a "$3 \cdot x > x$ (264) $2 \cdot x > 0$ (264) tehát $x = 132$ " gondolatmenettel adott jó választ. Algebrai módszerrel 13 tanuló adott rossz választ. Közülük négyen helyesen írták fel az ismeretlenek közötti összefüggéseket algebrai szimbólumokkal, viszont helytelenül írták fel az egyenletet. A többiek az ismeretlenek közötti összefüggéseket hibásan fordították le az algebra nyelvére (a leggyakoribb hiba a "Nekeresd lakosai $= x$ és Kukutyin lakosai $= 3 \cdot x + 264$ " volt), ezt követte a helytelenül felírt egyenlet.
Az ábrakészítés módszerével próbálkozó 17 tanuló közül 14-en jó választ adtak, tehát ennek a módszernek a hatékonysága messze felülmúlta az algebrai módszerekét. A tanulók Kukutyin lakosainak számát három, illetve Nekeresd lakosainak számát egy szakasszal ábrázolták, majd pontosan behatárolták, hogy a 264 lakos az ábrán két szakaszt jelöl és a $264 : 2 = 132$ osztás elvégzése után megadták a jó választ. 3 tanuló jól készítette el az ábrát, illetve helyesen jelölte be a "2 szakasz $= 264$ " összefüggést, majd érthetetlen okból kettő közülük a $264 : 3$, illetve egy másik a $264 : 4$ osztást végezte el.
9 tanuló előzetes ábrakészítés nélkül bocsátkozott aritmetikai számítások elvégzésébe, közülük csak egy tanuló adott jó választ, elvégezve a $264 : 2 = 132$ osztást.

4. Feladat: *Bea három nap alatt elköltött 5450 forintot. Első nap háromszor annyit, mint a másodikon, a harmadikon pedig 40 forinttal többet, mint a másodikon. Mennyit költött el az első napon?*

2.25. Táblázat

Jó válasz	29
Rossz válasz	20
Nem foglalkozott vele	1

2.26. Táblázat

Alkalmazott módszer	Jó válasz	Rossz válasz
Algebrai módszer, egyenlet	23	17
Ábrakészítés	5	1
Aritmetikai műveletek ábrakészítés nélkül	1	1
Próbálgatás	0	1

23 tanuló helyesen oldotta meg a $3 \cdot x + x + x + 40 = 5450$ egyenletet, majd jó választ adott. 6 tanuló helyesen oldotta meg az említett egyenletet (megoldás $x = 1082$), viszont tévesen hajtották végre a visszacsatolást az egyenlet megoldásából a feladat adataihoz, ezért adtak rossz választ (ketten közülük egyszerű számolási hibát vétettek). 7 tanuló jól írta fel az egyenletet, de hibákat vétett a mérleg-elv alkalmazása során. 4 tanuló tévedett az egyenlet felírásánál.
5 tanuló jó választ adott a szakaszos ábrázolás módszerével. 1 tanuló helyesen készítette el az ábrát, majd rossz műveleteket végzett.
1 tanuló helyesen adta meg a jó választ aritmetikai műveletek segítségével, miután előzőleg sikertelenül próbálkozott algebrai módszerekkel.
1 tanuló próbálgatással igyekezett eltalálni a helyes eredményt, de egy oldalnyi hiábavaló számolás után feladta.

5. Feladat: *Egy településen a lakosok száma megkétszereződött, majd elköltözött 456 lakos. A település lakosainak száma így 1230 lett. Mennyi lakosa volt eredetileg a településnek?*

2.27. Táblázat

Jó válasz	35
Rossz válasz	15
Nem foglalkozott vele	0

2.28. Táblázat

Alkalmazott módszer	Jó válasz	Ross válasz
Algebrai módszer, egyenlet	13	8
Visszafelé következtetés (buborékábra)	15	2
Aritmetikai műveletek ábrakészítés nélkül	7	5

Buborékábra készítésével, majd visszafelé következtetéssel dolgozva 15 tanuló adott jó választ (közülük az egyik előzőleg algebrai eszközökkel próbálkozott). 2 tanuló jól készítette el a buborékábrát, de számolási hibát vétett.
Buborékábra elkészítése nélkül, de szintén visszafelé következtetéssel dolgozott 12 tanuló, közülük 7 tanuló adott jó választ. 3 tanuló a műveletek sorrendjének tévesztése miatt adott rossz választ. 2 tanuló a nem megfelelő műveletek alkalmazása

mellett még számolási hibákat is vétett.
13 tanuló jó választ adott algebrai eszközök alkalmazásával, ők helyesen oldották meg a $2 \cdot x - 456 = 1230$ egyenletet.
Az algebrai eszközöket alkalmazó tanulók közül 8-an adtak rossz választ. Közülük 3-an jól írták fel az egyenletet, majd egyikük rosszul alkalmazta a mérleg-elvet, ketten pedig számolási hibákat vétettek. A többiek tévedtek az egyenlet felírása során.

6. Feladat: *Egy farmon libák, kacsák és pulykák vannak. A szárnyasok negyede pulyka és harmada liba. A kacsák száma 65. Mennyi szárnyas van a farmon?*

2.29. Táblázat

Jó válasz	16
Rossz válasz	26
Nem foglalkozott vele	8

2.30. Táblázat

Alkalmazott módszer	Jó válasz	Rossz válasz
Algebrai módszer, egyenlet	6	14
Ábrakészítés (szakaszos ábrázolás)	1	2
Aritmetikai műveletek ábrakészítés nélkül	9	10

Algebrai módszerekkel csak 6 tanuló adott jó választ. Öten közülük a szárnyasok számát x –szel jelölték, majd felírták és helyesen megoldották az $\frac{x}{3} + \frac{x}{4} + 65 = x$ egyenletet. Egy tanuló kezdetben csupán a „ $L = \frac{4}{12}$; $K = 65$; $P = \frac{3}{12}$ ” adatokat írta fel, közvetlenül utána a $4 \cdot x + 65 + 3 \cdot x = 12 \cdot x$ egyenlet következett. Tehát ennek a tanulónak az esetében az egyenlet felírását egy aritmetikai gondolkodás előzte meg, vagyis a feladatban szereplő törtrészeket közös nevezőre hozta. Utána az egy tizenkettednek megfelelő szárnyasok számát jelölte x -szel és írta fel az algebrai egyenletet.
14 tanuló tévesen dolgozott algebrai módszerekkel. Ez elsősorban azzal magyarázható, hogy a feladat algebrai modellje egy törtegyütthatós egyenlet. Az egyenlet megoldása során vétett hibák részletes elemzése megtalálható a 2.4. alfejezetben, a kutatás tapasztalatainak az összegzésénél.
9 tanuló a megszokott aritmetikai gondolatmenetet követve adott jó választ, ők helyesen beazonosították hogy a kacsák száma a szárnyasok számának az $\frac{5}{12}$ része. Közülük az egyik kezdetben algebrai módszerekkel próbálkozott sikertelenül. Csak egy tanuló munkájában érezhető, hogy tudatosan alkalmazta az ábrakészítés módszerét. Ő egy szakaszt tizenkét egyenlő részre osztott, majd 3, 4, illetve

5 részt jelölt be a pulykáknak, libáknak, illetve kacsáknak, ezután következtek a tudatosan végrehajtott aritmetikai számítások.
Két tanuló sikertelenül próbálkozott ábrakészítéssel. Egyikük három különböző szakaszon próbált beosztásokat készíteni, majd feladta. A másik helyesen rajzolt a libákhoz négy szakaszt, illetve a pulykákhoz 3 ugyanolyan hosszúságú szakaszt, utána viszont a következőket írta "$\frac{1}{4} + 65 + \frac{1}{3} \mid k.n. = 12$; $\frac{3}{12} + 65 + \frac{4}{12} \mid \cdot 12$; $3 + 65 + 4 = 102$ ".

Tapasztalatok összegzése

A *2. Felmérés* tapasztalatait legkönnyebben a következő táblázatok segítségével foglalhatjuk össze.

2.31. Táblázat - A választott módszerek szerinti megoszlás (módszer/fő)

Alkalmazott módszer	1. Fel.	2. Fel.	3. Fel.	4. Fel.	5. Fel.	6. Fel.
Algebrai módszer, egyenlet	5	26	21	40	21	20
Ábrakészítés (szakaszos ábrázolás)	0	10	17	6	0	3
Visszafelé következtetés (buborékábr.)	0	0	0	0	17	0
Hamis feltételezések módszere	22	0	0	0	0	0
Próbálgatás	17	0	0	1	0	0
Aritmetikai műveletek	1	11	9	2	12	19
Nem foglalkozott vele	5	3	3	1	0	8

A fenti táblázat megmutatja, hogy egy-egy feladat esetében az említett módszereket hány tanuló választotta. Az "Ábrakészítés" alatt főként a szakaszos ábrázolást értjük. A "Visszafelé következtetés (buborékábra)" sor azokat a diákokat tartalmazza, akik az aritmetikai számítások elvégzése előtt "buborékábrát" láttak szükségesnek elkészíteni. Az "Aritmetikai műveletek" sorban azok a diákok szerepelnek, akik a számításaik elvégzéséhez nem éreztek szükségesnek semmiféle ábrázolási módszert. A *2.32. Táblázat* az alkalmazott módszer hatékonyságát mutatja olyanszerűen, hogy az illető módszert választó tanulóknak hány százaléka adott helyes választ.

2.32. Táblázat - A választott módszerek eredményessége (% -ban)

Alkalmazott módszer	1. Fel.	2. Fel.	3. Fel.	4. Fel.	5. Fel.	6. Fel.
Algebrai módszer, egyenlet	20%	31%	38%	58%	62%	30%
Ábrakészítés	-	50%	82%	83%	-	33%
Visszafelé következtetés (buborékábr.)	-	-	-	-	88%	-
Hamis feltételezések módszere	100%	-	-	-	-	-
Próbálgatás	76%	-	-	0%	-	-
Aritmetikai műveletek	0%	55%	11%	50%	58%	47%

Mivel ez egy nem reprezentatív felmérés, ezért csak olyan következtetéseket vonhatunk le, amelyek nem általános érvényűek, ugyanakkor hasznos jelzések lehetnek minden pedagógus számára. A két táblázat együttes vizsgálata alapján a következőket tudjuk megállapítani.
Az *1. Feladat* esetében a tanulók a próbálgatást, illetve hamis feltételezések módszerét részesítették előnyben. Ezeknek a módszereknek a hatékonyságát is érdemes kiemelni. Algebrai módszerrel csak 5 tanuló próbálkozott, ezek közül csak egy adott jó választ. Ez jelzés lehet a pedagógusok számára, hogy az olyan feladatokat, amelyek általánosított algebrai modellje az

$$\begin{aligned} a \cdot x + b \cdot y &= c \\ x + y &= d \end{aligned} \tag{10}$$

egyenletrendszer, aritmetikai módszerekkel érdemesebb megközelíteni. A leghatékonyabb a hamis feltételezések módszere. Az ilyen típusú feladatok esetében ezt nemcsak a 6. osztályosok részesítik előnyben, hanem a nyolcadikos tanulók is alkalmazzák, amint a későbbiekben kiderül. Egy másik lehetséges módszer az ábrakészítés (vizuálisan szemléltetve a különböző objektumokat), viszont ez elég körülményes ha a feladatban nagy számok szerepelnek.
A *2. Feladat* az algebrai módszereket a tanulók több mint fele választotta. Előzetes kutatásaim során is tapasztaltam (lásd [28]), hogy a tanulók előnyben részesítik az algebrai módszereket (egyenlet felírását) az olyan geometriai feladatok esetében, ahol a feladatban szereplő összefüggések kapcsolatban állnak egy geometriai képlettel (jelen esetben a kerület képlete). Ez leginkább a képletekben is jelen lévő betűszimbólumokkal hozható összefüggésbe. Az ilyen feladatok esetében könnyebb az áttérés az algebrai eszközökre, mivel a tanuló könnyen megfeleltetést valósít meg a képletben szereplő betűszimbólumok (amelyek bizonyos szakaszok mértékét jelentik) és az egyenletben található ismeretlen mennyiséget jelölő betűk között. Ki kell emelnünk viszont az algebrai módszer alkalmazásának alacsonyabb hatékonyságát. Ennek egyik oka a kerület képletének helytelen felírása (a kerületet az egy csúcsból induló két oldal összegének tekintették), viszont gyakran tapasztaltunk hibákat az oldalak hossza közötti összefüggések algebra nyelvére történő lefordítása és az egyenletek felírása során.
A *3. Feladat*-ot a tanulók többsége egyenlettel, illetve ábra készítésével próbálta megoldani. Ki lehet emelni az ábrakészítés jóval nagyobb hatékonyságát az egyenletekhez képest. Az ábrakészítés nélkül végzett aritmetikai számítások (9 tanuló esetében) inkább a feladat számadataival történő szertelen manipulációkban merültek ki.
A *4. Feladat* esetében az algebrai módszer dominált, ami várható volt, ugyanis egy tipikusan "algebrai feladatról" van szó. Az ilyen feladatok esetében a probléma

szövegének lefordítása az algebra nyelvére egyszerűbb, mivel csak azt a mennyiséget szükséges megtalálni, amelyhez a többit viszonyítjuk, majd ezt x -szel jelölve könnyen felírhatók a megfelelő összefüggések és felállítható az egyenlet. Az a javaslatom, hogy az algebra bevezetésének kezdeti fázisában elsősorban ilyen típusú feladatokat kell gyakorolni. Ki lehet viszont emelni az ábrakészítést választó tanulók nagyobb hatékonyságát, ami alátámasztja, hogy a 6. osztályos tanulók még ezeknek a feladatoknak az esetében is könnyebben manipulálnak aritmetikai eszközökkel.

Az *5. Feladat* tipikus megoldási módszere a visszafelé következtetés, amelyben a buborékábra készítése hatékony segédeszközt jelent. Ezt a megoldási módszert viszonylag sok tanuló választotta és ők adták a legtöbb jó választ is. Az egyenlet felírását is sokan választották, az ők hatékonyságuk közel azonos volt azokéval, akik ábrakészítés nélkül végezték az aritmetikai műveleteket.

A *6. Feladat*-hoz hasonló feladatok esetében a tanulók a legsikeresebben az arányosságokon alapuló aritmetikai műveletek alkalmazásával érnek célt, az előkészítő tanórákon is ez derült ki. Ezt a módszert, előzetes feltételezéseinkkel összhangban, sok tanuló választotta és ők voltak a legeredményesebbek. Az algebrai megoldást is sokan választották, viszont ebben az esetben ez egy viszonylag nehéz törtegyütthatós egyenlet felírását feltételezi, ez a magyarázata annak, hogy a tanulók nem voltak olyan eredményesek. Az előkészítő órákon is tapasztaltuk, hogy az ábrakészítés elég nehézkes ebben az esetben, mivel ezt egy aritmetikai gondolatmenet (a közös nevező megtalálása) előzi meg. Akik viszont ezt már sikeresen végrehajtották fölöslegesnek érzik az ábra elkészítését. Ezért csak 3 tanuló készített szakaszos ábrát és közülük csak egynek sikerült jó választ adni.

2.2.5. A 3. Felmérés

A mérés elméleti alapjai

Több nemzetközi kutatás is rávilágított arra, hogy a tanulók többsége a szöveges feladatok megoldása során nem a tanult aritmetikai, illetve algebrai módszereket választja, hanem a feladatot próbálgatással igyekszik megoldani. Az ilyen próbálgatáson alapuló módszerek közül említenék néhányat a következőkben, ezeket a nemzetközi szakirodalom más-más kifejezésekkel illeti.

(1) *Becslés vagy guess-and-check*: Az a módszer, amelyet a nemzetközi irodalom guess-and-check néven említ a következőkből áll: a tanulók a szöveges feladat megoldása során az ismeretlen mennyiségre vonatkozóan egy becslést adnak, majd ellenőrzik, hogy a becsült számadat kielégíti a feladat feltételeit. A módszer alkalmazásakor a tanuló a probléma megoldását megkerüli azáltal, hogy egyből az általa becsült kimeneti adatokat hasonlítja össze a kezdeti

feltételekkel. Ezt a módszert a kutató matematikusok is rendszeresen alkalmazzák, például a differenciál-egyenletek megoldása során. A kutatásban a becslés, illetve ellenőrzés helyett feltevésről, illetve bizonyításról beszélünk. A tanórai tevékenység és a matematikai kutatás között a legfőbb különbség az, hogy a tanórákon a tanárnak már birtokában van a helyes megoldás. A matematikai kutatások során a megoldás ismeretlen a kutató számára, tehát ebben az esetben az ellenőrzés kiemelt jelentőséggel bír.
A guess-and check egy olyan módszer, amelyet a tanulók gyakran alkalmaznak a számukra még ismeretlen feladatok és problémák megoldásakor, főként olyan helyzetekben, amikor nem találnak analóg problémákat vagy az általuk ismert algoritmusok nem vezetnek eredményre. Amikor a tanulók a guess-and-check módszert alkalmazzák, hasznos lehet a próbálkozások és elért eredmények rögzítése, erre alkalmas eszköz a táblázatok vagy jegyzetek készítése.

(2) *Trial-and-error*: A nemzetközi irodalomban trial-and -error néven említett módszer az adott probléma szituációra vonatkozó próbálgatások sorozatából áll. Itt mindegyik próbálgatás az előbbi hibáját igyekszik javítani. Az előrehaladás során a hiba egyre csökken, az egymást követő próbálgatások mind közelebb vezetnek a végső eredményhez. Pólya György ezt az eljárást "fokozatos próbálgatásnak", "fokozatos helyesbítésnek" vagy "szukcesszív approximációnak" nevezi [76]. Stacey és McGregor a trial-and-error két típusát különböztetik meg: "random trial-and-error" és "sequential trial-and-error" [86]. Ennek a módszernek az alkalmazása elsősorban a probléma egy megoldását szolgáltatja, viszont nem ad választ arra a kérdésre, hogy miként juthatunk el deduktív úton az illető megoldáshoz. A módszer nagyon hasznosnak bizonyul egyes tudományos területeken (mechanika vagy mérnöki tudományok, biológia), ahol elsősorban a megoldás megtalálása a fő cél. Ugyanakkor nem alkalmazható azokban a tudományos kérdésekben, ahol a megoldás megtalálása mellett arra a kérdésre is keressük a választ, hogy miért az a megoldás, illetve hogy nem létezik a problémának további megoldása is?
Bizonyos esetekben a matematika tanárok hangsúlyt fektetnek a trial-and-error alkalmazására, főként olyan esetekben amikor nem indokolt sok időt fordítani arra, hogy kielemezzék és elmagyarázzák, hogy miért pont a talált érték a probléma megoldása. Ilyenek lehetnek a feleletválasztós matematikai versenyfeladatok, ahol sok esetben a lehetséges válaszok kipróbálásával megkaphatjuk a helyes megoldást, vagy legrosszabb esetben is kizárhatjuk a lehetetlen válaszokat. Ki kell emelni viszont, hogy a trial-and-error nem mindig alkalmas arra, hogy megtaláljuk az összes megoldást, tehát nem beszélhetünk a megoldás teljességéről. Ilyen szemszögből tekintve, ez a módszer egy adott problémára egy lehetséges megoldást szolgáltat. A legfőbb előnye,

hogy nem igényel különösebb ismereteket az adott problémára vonatkozóan, de bizonyos esetekben nagy mennyiségű számolást feltételez, ezért meglehetősen időigényesnek bizonyulhat.

(3) *A hamis feltételezések módszere*: Ennek a módszernek több elnevezése ismeretes, a nemzetközi szakirodalomban leggyakrabban "false position method" vagy "regula falsi" néven említik. Az aritmetikai és algebrai feladatokban gyakran a "trial-and-error" -ral tévesztik, annak ellenére, hogy a két módszer bizonyos szempontokban eltérést mutat. Hasonlóság annyiban van közöttük, hogy mindkét módszer esetében bizonyos teszt-értékeket adunk az ismeretlen mennyiségeknek, majd vizsgáljuk az így létrehozott helyzet és a feladat adatai között fennálló különbség (vagyis a feltételezés hibájának) alakulását. Ugyanakkor, míg a trial-and-error próbálgatások sorozatát jelenti (ahol minden próbálgatás egyre közelebb visz a helyes megoldáshoz), addig a hamis feltételezések módszerével legfeljebb két próbálgatás után már összefüggéseket keresünk a hiba alakulására vonatkozóan és aritmetikai számításokkal találjuk meg a helyes választ. A hamis feltételezések módszere a szokványos aritmetikai és algebrai problémamegoldási eszközök, valamint az egyenletek bevezetésének előzményeként is elképzelhető. Ez a tipikusan aritmetikai módszer lehetőséget teremt két- vagy háromismeretlenes szöveges feladatok megoldására. A jelentősége folyamatosan növekszik, mivel a legtöbb kutatás azt igazolja, hogy a tanulók a szöveges feladatok megoldása esetén legtöbbször aritmetikai módszereket alkalmaznak, az algebrai eszköztár felhasználása, illetve az egyenletek felírása gyakran nehézségeket okoz. Mivel a 13-14 éves tanulók leggyakrabban próbálgatással közelítik meg a számukra teljesen újszerű problémaszituációkat, ezért a hamis feltételezések módszerének nagy előnye, hogy a próbálgatásokat rendszerezetté, szisztematikussá teszi.

A hamis feltételezések módszere - tudománytörténeti áttekintés

A hamis feltételezések módszerére a legrégebbi írásos emlékek Kr.e. 2000 év körüliek. Ezek közé tartozik a Rhind-papirusz (ezt a szerzője után Ahmes-papirusznak is nevezik), amelynek 84 tekercsét Londonban őrzik. Az itt található feladatok általában a gyakorlati élettel kapcsolatosak, és receptszerűen mutatják be a feladatok megoldási módszereit. A csupán szavakkal kifejezett utasításokban ráismerhetünk azokra a számolási eljárásokra, amelyeket az egyenletek megoldása során kell elvégeznünk.
A Rhind-papirusz néhány feladata a mai szóhasználattal élve a következőképpen hangzik: "Mennyi az x értéke, ha $x + a \cdot x = b$?". Négy feladat esetében az a

együttható egy olyan tört, amelynek a számlálója 1, míg másik négy feladat esetében kettő vagy három egyes számlálójú tört összege. Ezeket a feladatokat Ahmes azzal a módszerrel oldja meg, amely a későbbiekben regula falsi elnevezést kapta. Kezdetben egy (az ismeretlen értékére vonatkozó) hibás, de előnyös feltételezés után kiszámítja az egyenlet bal oldalán lévő kifejezés értékét, majd ezt hasonlítja össze az egyenlet jobb oldalán szereplő b számmal.
Tekintsük például a Rhind-papirusz 25. feladatának bemutatását.

1. Feladat: *Egy szám és a fele összesen 16. Melyik ez a szám?*

Az egyiptomi matematikus a feladat megoldását azzal e feltételezéssel kezdte, hogy az ismeretlen szám 2-vel egyenlő. Ha 2-höz hozzáadjuk a felét, akkor 3-at kapunk, ebből azt a következtetést vonta le, hogy az ismeretlen mennyiség úgy aránylik a 2-höz, mint 16 a 3-hoz. Utána a 16-ot 3-mal osztva 5 egész és 1 harmadot kapott, majd kettővel szorozva megkapta az ismeretlen szám értékét, amely 10 egész és 2 harmaddal egyenlő.
A mai szemmel tulajdonképpen a következő egyenletről van szó $x + \frac{x}{2} = 16$, amely általánosan az $a \cdot x = b$ alakot ölti. Legyen tehát $x = x_1$ tetszőleges, így ha $a \cdot x_1 = b_1$ és $k = \frac{b}{b_1}$, akkor $x = k \cdot x_1$ valóban megoldás, mert az $a \cdot x = a \cdot k \cdot x_1 = (a \cdot x_1) \cdot k = b_1 \cdot k = b$.
Az egyiptomiak által leírt eljárás tehát helyes, ezt a középkorban is használták, ahol a neve *regula falsi*-ként szerepel, a mai nemzetközi szakirodalom pedig *simple false position* vagy *single false position* néven említi.

A hamis feltételezések módszerét az ókori Kína matematikájában is fellelhetjük, erre példa a "Matematika kilenc könyvben" (angolul: The Nine Chapters on the Mathematical Art), amely Kr.e. 200 és Kr.u. 100 között íródott. Ennek a műnek a hetedik könyve, amelynek címe a "Többlet és hiány", tartalmazza azt a módszert, amely később a kettős regula falsi elnevezést kapta [39]. A kínai módszert, mai szemmel tekintve, kétismeretlenes egyenletrendszerek megoldására dolgozták ki. A módszer konkrét aritmetikai érvekkel volt alátámasztva és különböző gyakorlati feladatok megoldására használták fel, mint például:

2. Feladat: *Csirkét közösen fizetnek ki; ha mindenki 9-et fizet, a többlet 11 lesz; ha mindenki 6-ot fizet, a hiány 16 lesz. Hány ember van? Mennyi a csirke ára?*

Mai szemmel a következő egyenletrendszer megoldásáról van szó:

$$\begin{aligned} 9 \cdot x - 11 &= y \\ 6 \cdot x + 16 &= y \end{aligned}$$

ahol x-szel jelöljük az emberek számát és y-nal a csirkék számát. A kettős regula falsi alkalmazásával a következőképpen oldották meg a feladatot:

1. Első feltételezés: $x_1 = 5 \Rightarrow y_1 = 9 \cdot 5 - 11 = 34$ és $y_2 = 6 \cdot 5 + 16 = 46$, tehát az első feltételezés hibája $k_1 = y_2 - y_1 = 46 - 34 = 12$.

2 Második feltételezés: $x_2 = 6 \Rightarrow y_1' = 9 \cdot 6 - 11 = 43$ és $y_2' = 6 \cdot 6 + 16 = 52$, tehát a második feltételezés hibája $k_2 = y_2' - y_1' = 52 - 43 = 9$.

Az emberek számát a következő képlet alapján számították ki:

$$x = \frac{k_1 \cdot x_2 - k_2 \cdot x_1}{k_1 - k_2} \tag{11}$$

tehát az emberek száma $x = \dfrac{12 \cdot 6 - 9 \cdot 5}{12 - 9} = 9$ és a csirkék száma $y = 70$.
A mai napig rejtély maradt, hogy hogyan jutottak el a kínaiak a (11) megoldóképlethez. Az, hogy használták, bizonyított, mivel a hetedik könyv az előbbiekben ismertetett eljárást mutatja be.
A kettős regula falsi egy érdekes geometriai interpretációját megtalálhatjuk Szalay István "A kultúrfilozófia természettudományos alapjai" című könyvében [89].
Abu Kamil, egy a IX. században élő egyiptomi matematikus írt egy (mára már elveszett) tanulmányt a hamis feltételezések módszerével kapcsolatban, amelynek címe "A kettős tévedés könyve" (ang.: Book of the Two Errors). Az arab világból a módszerrel kapcsolatos legrégebbi forrás egy libanoni matematikus, Qusta ibn Luqa (X. század) munkája. Az arabok a hamis feltételezések módszerét főként kereskedelmi és jogi kérdések (például örökségek) megválaszolására használták, de ezzel oldottak meg különböző szórakoztató matematikai problémákat is.
A módszer Európába Leonardo of Pisa (Fibonacci) munkássága révén került, aki a Liber Abaci (1202) című művének a 13. fejezetében mutatja be az általa regulis elchatayn-nak nevezett eljárást. Később az arabok nyomán egész Európában elterjedt, még a XVIII. században is sok iskolában tanították, főként kereskedelmi feladatok megoldására használták.
Edward Hatton egy könyvében tárgyalja a hamis feltételezések módszerét, egyes feladatokat kettős regula falsi-val (vagyis két feltételezéssel), míg másokat egy feltételezéssel old meg. Így a feltételezések száma szerint beszélhetünk regula falsi I-ről, illetve regula falsi II-ről. Előbb bemutatjuk miként alkalmazza a kettős regula falsi-t a következő feladat esetében [30].

3. Feladat: *Három kereskedő egy hajót vásárol, amely 1600 fontba kerül.* ***A*** *egy ismeretlen összeget fizetett,* ***B*** *50 fonttal kevesebbet, mint az* ***A*** *által fizetett összegnek a kétszerese,* ***C*** *pedig 100 fonttal kevesebbet, mint* ***A*** *és* ***B*** *együtt. Ki mennyit fizetett külön-külön?*

1. Első feltételezés: Ha A 200 fontot fizetett, akkor a feladat adatait figyelembe véve B 350 fontot, míg C 450 fontot fizetett. Tehát összesen 1000 fontot fizettek, így a hiba 600 font.

2 Második feltételezés: Ha A 250 fontot fizetett, akkor B 450 fontot, míg C 600 fontot fizetett. Tehát összesen 1300 fontot fizettek, így a hiba 300 font.

Most szorozzuk meg az első feltételezést a második hibával, így $200 \cdot 300 = 60000$ -et kapunk. Utána a második feltételezést az első hibával, így $250 \cdot 600 = 150000$-et kapunk. A két szorzat különbsége $150000 - 60000 = 90000$. Ezt elosztjuk a két hiba különbségével $90000 : 300 = 300$, így megkapjuk, hogy A 300 fontot fizetett, ahonnan következik, hogy B 550 fontot, míg C 750 fontot fizetett.
A könyv egy szabályt is tartalmaz: "Szorozzuk meg felváltva a feltételezéseket a hibákkal, vagyis az első feltételezést a második hibával, a második feltételezést pedig az első hibával: ha mindkét hiba ugyanolyan típusú, vagyis mindkettő többlet, illetve mindkettő hiány, akkor a szorzatok különbségét osszuk el a hibák különbségével; ha viszont különböző típusúak, az egyik egy többlet, a másik egy hiány, akkor a szorzatok összegét osszuk el a hibák összegével, és a hányados a keresett mennyiséget adja."
A könyvben találunk megoldásokat az egy feltételezés módszerének (azaz a regula falsi I-nek) alkalmazására is, például a következő feladat esetében.

4. Feladat: *Három ember együtt épített egy házat, amely 300 fontba került.* ***A*** *fizetett egy bizonyos összeget,* ***B*** *kétszer annyit, míg* ***C*** *háromszor annyit. Melyikük mennyit fizetett külön-külön?*

Feltételezzük, hogy A 40 fontot fizetett, ebben az esetben B 80 fontot, míg C 120 fontot fizetett. Így a hármuk által fizetett összeg 240 font. Mivel $240 : 300 = 40 : 50$, ezért A által fizetett összeg 50 font, B pedig 100 fontot, míg C 150 fontot fizetett.

Hasonló feladatok és számítások a T. Weston könyvében is megtalálhatók [98].

A hamis feltételezések módszerének magyar úttörői is vannak. A régi magyar aritmetikai munkákban a szöveges feladatokat a regula falsi módszerével oldották meg, a tananyag része volt ennek a módszernek mindkét változata.
Maróthi György (lásd [63], [40]) Arithmetika című könyvében bemutatja az Egyes Mesés Regula szabályát, amellyel a következő feladatot oldja meg:

5. Feladat: *Egy leánytól kérdik a Leányt kérők, hány esztendős? Az anyám úgymond harmadfél annyi idős, mint én: az Atyám pedig háromszor annyi idős. A hármunk ideje tészen 117 esztendőt. Kérdés, hány esztendős volt?*

A Kettős Mesés Regula (vagy Regula Falsi Duarum Positionum) alkalmazásával oldja meg a következő feladatot.

6. Feladat: *Egy valaki ruhát akarván csináltatni, talál kétféle posztóra. Egyiknek singjét tartják 9 máriáson, a másikét tízen. Ebből a tíz máriásosból akarna venni, de nem érné meg a pénzével, hanem 8 máriás híja lenne. Ha pedig az olcsóbbikból veszen megmarad 3 máriása. Kérdés, hány singet akar venni, és mennyi pénze van?*

Nagy Károly például a kettős hibás helyzettel oldja meg a következő feladatot, amely az Elemi aritmologia, Arithmographia című könyvének a 202. feladata (lásd [41], [65]).

7. Feladat: *Valaki megkérdeztetvén, mennyi pénz van zsebiben? Így szóll: annyival több aranyaim ötszörös száma 30-nál, mint kettese 6-nál.*

A fentiekben említett feladatok és megoldási módszereik egy ma élő matematikus számára kissé körülményesnek, időnként erőltetettnek tűnhetnek. Ezért a matematika tanárok feladata megtalálni, hogy ezek a módszerek miként és milyen változtatásokkal vihetők be a tanórai tevékenységbe. Ennek bizonyos vetületeit fogjuk elemzés tárgyává tenni a következőkben.

Miért érdemes tanítani a hamis feltételezések módszerét az általános iskolában?

Iskolánkban a 2014/15 tanévtől kezdődően igyekszünk hangsúlyt fektetni a szöveges feladatok hamis feltételezésekkel történő megoldására is. Kezdetben ezt a módszert a 8. osztályosok esetében szakköri foglalkozáson ismertettem, ennek az eredményeit egy szakmódszertani publikációmban tettem közzé [26]. A tapasztalatokat kielemezve megszületett az ötlet, hogy a 2015/16-os tanévben a 6. osztályosok esetében, kicsit módosított módszertani eszközökkel, ismertessem a módszert tanórai keretek között. Felvetődik a kérdés, hogy miért érdemes tanítani a hamis feltételezések módszerét az általános iskolai oktatás során? Véleményem szerint ennek a módszernek helye van a szöveges feladatok megoldásának gyakorlása során, főként az aritmetikai módszerek ismertetésénél, illetve az algebra bevezetésének kezdeti fázisaiban. Az okok közül a következőkben említenék néhányat.
A hatodikos korosztályban lévő tanulók többsége még abban a stádiumban van, hogy nem mindig képes absztrahálni, elvonatkoztatni, a bonyolultabb szöveges feladatok lefordítása az algebra nyelvére és szimbólumrendszerére pedig viszonylag nehézkes és bonyolult. Ezért nagyon kézenfekvő a szöveges feladatok gyakorlati

szemmel történő megközelítése. Egy ilyen módszer lehet a hamis feltételezések módszere. Egy első feltételezés (amely általában hibás) során a tanuló „ráhangolódik” a probléma adataira, elemzi azt az eltérést (vagy hibát), ami az ő feltételezése és a feladat adatai között van. A második feltételezés (amely általában szintén hibás) után már képes összefüggéseket találni a saját feltételezései és a hiba alakulása között. A következő lépésben pedig a megtalált összefüggések alapján képes kikövetkeztetni a probléma megoldását. A módszer egyik nagy előnye az affektív aspektusok fejlesztésében rejlik, ugyanis ösztönzi az önálló problémamegoldást és erősíti a problémamegoldás sikeréhez való pozitív hozzáállást. A tanuló abban az esetben is megpróbál konstruktívan hozzáállni a problémamegoldáshoz, ha nincsen a birtokában semmiféle aritmetikai, illetve algebrai módszer. Az a tény, hogy szabadon lehet feltételezni (értelemszerűen léteznek azért bizonyos korlátok, nevezetesen a feladat adataiban rejlő összefüggések), nagyon sok olyan tanulót közelíthet a szöveges feladatokhoz, akik ebben látják a matematika tantárgy egyik fő nehézségét.
Egyes feladattípusok algebrai úton való megközelítése annyira bonyolult, hogy még a 8. osztályos tanulóknak is gondot okoz (ilyen típusú feladatokra az előzőekben már utaltunk). Néhány ilyen probléma esetében a hamis feltételezések módszere kimondottan a leghatékonyabb feladatmegoldó eszköznek minősül.
A módszer bemutatása tudománytörténeti szempontból is érdekes lehet. Azoknak a módszereknek az ismertetése, amelyeket az ókortól napjainkig alkalmaztak szöveges feladatok megoldására, olyan tanulókat is közelíthet a matematikához, akik egyébként más tantárgyakhoz (például történelem) vonzódnak.
Az előbbiekben felsorolt okok ellenére alig találunk a hamis feltételezések módszerére utaló nyomokra az általános iskolai tankönyvekben.

A 3. Felmérés célja

Az 1. és 2. Felmérés után tanórai tevékenység keretein belül ismertettük a hamis feltételezések módszerét, majd utána került sor a *3. Felmérés* lebonyolítására. Ennek során céljaink között szerepelt annak a felmérése, hogy a tanult aritmetikai, illetve algebrai módszerek mennyire bizonyulnak tartósnak, vagyis azt akartuk felmérni, hogy a tanulók bizonyos idő elteltével milyen mértékben és módon képesek felidézni és alkalmazni azokat?

A hamis feltételezések módszerének gyakorlása

A *2. Felmérés* után körülbelül három hét elteltével 2 gyakorló órában szöveges feladatokat oldottunk meg. Ezeken a tanórákon a hamis feltételezések módszerével dolgoztunk. Az előzőekben tanult aritmetikai, illetve algebrai módszereket csak

olyan szinten említettük meg, hogy minden feladat (hamis hipotézisek módszerével történő) megoldása után a "ki tudna még más módszert is?" kérdés következett. A tanulók igyekeztek felidézni a régebben tanultakat, egyesek kifejezetten jó ötleteket adtak, helyesen idézték fel a tanult módszereket. Voltak olyanok is (viszonylag kevesen) akiknek az volt a véleményük, hogy a régebben tanult módszerek gyorsabbak, kevésbé körülményesek. Egyesek helytelenül emlékeztek a régebbi módszerekre, az ők hibás ötleteiket átbeszéltük, kijavítottuk. A hamis feltételezések módszerének felvetése ebben az esetben új ismeretnek számított és céljaink között szerepelt annak a felmérése, hogy a tanulók milyen arányban alkalmazzák az új ismereteket, illetve mennyire képesek "visszanyúlni" a régebben tanult módszerekhez?
Ezeken a gyakorló órákon az *1. Feladatlap* néhány feladatát vettük elő és oldottuk meg a hamis feltételezések módszerével. A következőkben ezekből mutatnék néhány példát.

Egy kertből 550 kg zöldséget gyűjtöttek be: háromszor több krumplit, mint répát, és 50 kg-mal több káposztát, mint répát. Hány kg-ot gyűjtöttek be az egyes zöldségekből?

Megegyeztünk abban, hogy a feltételezések során a répa mennyiségéből induljunk ki, mivel a többi mennyiséget ehhez viszonyítja a feladat szövege. Mivel az összefüggéseket könnyebb átlátni kis számok esetében, ezért arra ösztönöztem őket, hogy kis számokkal dolgozzanak. A következő észrevételem volt, hogy a választott mennyiséget (jelen esetben a répa tömegét) a második feltételezésnél csak eggyel emeljük. Próbálkozásainkat mindig táblázatba foglaltuk.

2.33. Táblázat

	répa	krumpli	káposzta	összesen	hiba
első feltételezés	1	3	51	55	495
második feltételezés	2	6	52	60	490
megoldás	100	300	150	550	0

A tanulók könnyen észrevették, hogy a répa mennyiségét 1 kg-mal növelve a hiba 5 -tel csökken, ezért a répa mennyiségét az első feltételezéshez képest $495 : 5 = 99$ -cel kell növelni, ebből adódott a megoldás.

Egy medve 360 kg-mal nehezebb, és így háromszor olyan nehéz, mint egy tigris. Hány kilogramm egy medve?

A feladat érdekessége, hogy két feltétel közül bármelyiket választhatjuk a feltételezésekhez, a másik feltételből következtetünk a hibára. A tanulók ötlete volt, hogy a feltételezésekhez "a medve háromszor olyan nehéz, mint a tigris" feltételt használjuk, az első feltételezés pedig "a tigris 1 kg, a medve 3 kg" legyen (az előző feladatból indultak ki és jót derültek). Végül a táblázatunk a következő lett.

2.34. Táblázat

	tigris	medve	különbség	hiba
első feltételezés	1	3	2	358
második feltételezés	2	6	4	356
megoldás	180	540	360	0

Amint a táblázatból látható, a hiba vizsgálatát a "medve 360 kg-mal több, mint a tigris" feltételhez kötöttük.
Mindkét feladat esetében megbeszéltük, hogy a szakaszos ábrázolás is eredményre vezet, amint azt már előzőleg is láthattuk. Arra a kérdésre, hogy melyik módszert tartják eredményesebbnek, nagyon megoszlottak a vélemények.

A hatodikosok háromnapos túrára mentek. Első nap megtették a túraútvonal $\frac{2}{5}$ *részét, második nap a túraútvonal* $\frac{1}{4}$ *részét, így a harmadik napra 21 km maradt. Milyen hosszú volt a teljes túraútvonal?*

A feltételezésnél abból indultunk ki, hogy a teljes túraútvonal hossza olyan szám legyen, amelynek a negyede, illetve ötöde is egész szám, így elkerüljük azt, hogy törtszámokkal dolgozzunk. Nagyon könnyen adódott az első feltételezés, amely szerint "a túraútvonal teljes hossza 20 km". A következő számításokat végeztük.

2.35. Táblázat

	túraútvonal	1. nap	2. nap	3. nap	összesen	hiba
első feltételezés	20	8	5	21	34	14
második feltételezés	40	16	10	21	47	7
megoldás	60	24	15	21	60	0

Néhány tanuló azzal érvelt, hogy egészrész-törtrész közötti arányosságokban gondolkodva kevesebbet kell számolni, viszont több tanulónak tetszett ez a módszer. Ebben az is hozzájárult, hogy viszonylag kis számokkal kellett dolgozni és könnyen észrevehették az összefüggéseket.

Egy ceruza és egy radír együtt 60 g, két ceruza tömege ugyanannyi, mint három radíré. Hány gramm egy ceruza, illetve egy radír?

Kezdetben vitát váltott ki, hogy melyik feltételt használjuk a feltételezésekhez? Végül "a két ceruza tömege ugyanannyi, mint három radíré" feltétel mellett állapodtunk meg. Olyan számokat választottunk, melyek teljesítik a feltételt, itt is kis számokkal dolgoztunk, a gondolatmenetet a táblázat szemlélteti.

2.36. Táblázat

	radír	ceruza	együtt	hiba
első feltételezés	2	3	5	55
második feltételezés	4	6	10	50
megoldás	24	36	60	0

Észrevehető, hogy ha a radír tömegét 2 grammal növeljük, akkor a hiba 5 -tel csökken gondolatmenetet követtük, az előző feladatok mintájára. Egy másik gondolat, hogy ha az első feltételezésnél az össztömeg 5 gramm, akkor az itt szereplő tömegeknek a $60 : 5 = 12$ -szeresét kell venni ahhoz, hogy a helyes választ megadjuk (vagyis, hogy az össztömeg 60 g legyen). Ezt a módszert is említettem, de láttam, hogy inkább az előbbi mellett maradnának.
A következő feladatot is megoldottuk a hamis feltételezések módszerével, ilyen modellezésű feladatok a 8. osztályos felvételi vizsgákon is előfordultak.

Anna és Csaba tömegének összege 93 kg, Béla és Csaba tömegének összege 85 kg, Béla és Anna tömegének összege 82 kg. Mennyi a gyerekek tömege külön-külön?

Ennek a feladatnak az algebrai modellje egy háromismeretlenes elsőfokú egyenletrendszer, amelyben az ismeretlenek a gyerekek tömegei.
A tanulóknak kezdetben nehézséget okozott a három feltétel együttes jelenléte. El kellett magyarázni nekik, hogy a feltételezéseknél olyan tömegeket válasszunk, amelyek kielégítik az első két feltételt, a hiba pedig a harmadik feltételtől való eltérés lesz. Kezdetben Csaba tömegét rögzítettük (mivel ő szerepel úgy az első, mint a második feltételben) és a másik két gyerek tömegét úgy választottuk meg, hogy az említett feltételek teljesüljenek. Csaba tömegét elsőre 40 kg-nak választottuk (az 1 kg például elég vicces lett volna, bármennyire azt támogattam, hogy kezdetben kicsi számokkal dolgozzunk). Munkánkat a következő táblázat foglalja össze.

2.37. Táblázat

	Csaba	Anna	Béla	Anna + Béla	hiba
első feltételezés	40	53	45	98	16
második feltételezés	41	52	44	96	14
megoldás	48	45	37	82	0

Egy ilyen típusú feladatnak többféle megközelítése lehetséges, egy érdekes megoldása [1]-ben megtalálható.
Az említett 2 tanóra alatt a tanulók megértették a hamis feltételezések módszerét, utána következett a *3. Felmérés*.

A 3. felmérés lebonyolítása

A tanulók a *6. Feladatlap* feladatait oldották meg. A feladatok nehézségi foka magasabb volt, mint az első két felmérésen, a rendelkezésre álló idő viszont ugyanúgy 45 perc. Ezért arra kértem őket, hogy az általuk könnyebbnek tartott feladatokkal kezdjék és minél több feladatot próbáljanak megoldani. A módszerek tekintetében kiemeltem, hogy bármilyen módszerrel dolgozhatnak, "visszanyúlhatnak" az aritmetikai és algebrai módszerekhez is.

A feladatok megoldásának értékelése

A megoldásokat és az alkalmazott módszereket a következőkben mutatnám be részletesen.

1. Feladat: *Hajni pókokat és cserebogarakat gyűjtött, összesen 38 darabot. Egy cserebogárnak 6, míg egy póknak 8 lába van. Összesen 250 lábat számolt meg. Hány pókot és hány cserebogarat gyűjtött külön-külön?*

Jelen feladattal rokon feladat volt az *1. Felmérés*, illetve a *2. Felmérés* első feladata. Ezeken a felméréseken is legtöbben a hamis feltételezések módszerével, illetve próbálgatással adtak jó választ.
Ennél a feladatnál a válaszok megoszlása a következő volt.

2.38. Táblázat

Jó válasz	38
Rossz válasz	11
Nem foglalkozott vele	1

2.39. Táblázat

Alkalmazott módszer	Jó válasz	Rossz válasz
Hamis feltételezések módszere	27	10
Próbálgatás	11	1

A legtöbb tanuló a hamis feltételezések módszerét választotta és ez a módszer bizonyult hatékonyabbnak is. A többség az első feltételezésnél valamelyik rovarnak kerek számot választott (pl. 15 pók, 23 cserebogár vagy 20 cserebogár, 18 pók; stb.) vagy a "38 cserebogár és 0 pók" feltételezésből indult ki. A második feltételezés esetén pedig tudatosan eggyel változtatták fel, illetve le a rovarok számát, amelyből azonnal világossá vált számukra, hogy a hiba kettővel változik, így a következő lépésben megadták a helyes választ, amelyet a táblázatban le is ellenőriztek. 4 tanuló a második feltételezést már kihagyta, ők az első feltételezés után már megadták a helyes választ, miközben tudatosan bejelölték a rovarok számának, illetve a hibának az alakulására vonatkozó helyes elképzeléseiket. Egyetlen tanuló nem táblázattal dolgozott, de munkájából kiderül, hogy ő is a hamis feltételezések módszerét alkalmazta: "30 pók + 8 cserebogár = 288 láb; $288 - 250 = 38$; $38 : 2 = 19$; $30 - 19 = 11$ pók és 27 cserebogár".
10 tanuló rossz választ adott, ők számolási hibákat vétettek, illetve belebonyolódtak az összefüggések keresésébe. Közülük az egyik tanuló munkája érdekes:

2.40. Táblázat

	cserebogár	pók	lábak száma	hiba
első feltételezés	5	6	78	172
második feltételezés	6	7	92	158

Utána azt a következtetést vonta le, hogy mindkét oszlopban a rovarok számát eggyel növelve a hiba 14-gyel csökken, majd elvégezte a $172 : 14 = 12,2$ osztást. Utána feladta, mivel érezte, hogy a rovarok száma tizedes tört nem lehet. Ez a tanuló a feltételezések során nem vette figyelembe azt a fontos követelményt, hogy a feladat egyik adatához (rovarok száma összesen 38) igazítjuk a feltételezésekben szereplő számadatokat.
Próbálgatással 11 tanuló adott helyes választ. Ők is táblázatot készítettek, minden lépésben kiszámították a hibát, amelyet a következő lépésekben fokozatosan csökkentettek, amíg a jó választ meg nem kapták. Ők viszont nem kerestek összefüggést a hiba alakulása és a rovarok száma között. Legtöbben négy-öt próbálkozás után megadták a helyes választ, kevesen voltak olyanok, akiknek ez több lépést vett volna igénybe. Ketten a próbálgatások közben még számolási hibákat is vétettek, de ennek ellenére megadták a jó választ. Egy tanuló próbálgatással rossz választ adott, ugyanis a próbálgatások során csak arra törekedett, hogy a lábak számának az összege 250 legyen, de figyelmen kívül hagyta, hogy összesen 38 rovar van. Ezért

a 15 cserebogár és 20 pók választ adta, amely a lábak számára vonatkozóan helyes lenne, de nem elégíti ki a "rovarok száma = 38" feltételt.

2. Feladat: *Bea egy 2410 forintos játék kifizetésénél 5-tel több 20 forintost használt, mint 50 forintost. Hány 20 forintos, illetve hány 50 forintos érmét használt külön-külön?*

2.41. Táblázat

Jó válasz	40
Rossz válasz	10
Nem foglalkozott vele	0

2.42. Táblázat

Alkalmazott módszer	Jó válasz	Rossz válasz
Hamis feltételezések módszere	24	9
Próbálgatás	16	1

24 tanuló (a felmérésben részt vevőknek a fele) a hamis feltételezések módszerét helyesen alkalmazta. Közülük 7 tanuló a következőképpen járt el:

2.43. Táblázat

	50 forintosok	20 forintosok	összeg	hiba
első feltételezés	20	25	1500	910
második feltételezés	21	26	1570	840
megoldás	33	38	2410	0

A táblázat mellett szerepelt a $910 : 70 = 13$ osztás, amely a módszer tudatos alkalmazására utal. A többiek is hasonló módon dolgoztak, annyi különbséggel, hogy másképp választották az első feltételezés számadatait, leggyakoribbak a "15 darab 20 forintos, 10 darab 50 forintos (7 tanuló)", illetve a "20 darab 20 forintos, 15 darab 50 forintos (3 tanuló)" voltak. Egy tanuló a helyes válaszhoz nagyon közel álló "35 darab 20 forintos és 30 darab 50 forintos" első feltételezésből indult ki. Érdekesség, hogy mindössze egy tanulónál történt meg, hogy az első feltételezésnél "fölé becsült" (105 darab 20 forintos, 100 darab 50 forintos), utána viszont ő is helyesen dolgozott. A tanulóknak a gyakorló órákon azt tanácsoltuk, hogy az első feltételezés során kis számadatokat válasszanak, így könnyebben elkerülhetők a számítási hibák, ugyanakkor az adatok közötti összefüggések is könnyebben átláthatók. Talán ennek hatására, 3 tanuló az "5 darab 20 forintos és 0 darab 50 forintos" (egyébként nagyon irreális) első feltételezésből indult ki és adott jó választ. 9 tanuló adott rossz választ, egyikük a következő táblázatot készítette:

2.44. Táblázat

50 forintosok	20 forintosok	összeg	hiba
25	20	1500	910
26	19	1470	940
30	25	1850	560
45,5	40,5	2410	0

Megfigyelhető, hogy az első feltételezés teljesen helyes volt, viszont a második sorban már nem vette figyelembe a feladat adatait, itt az egyik mennyiséget csökkentette, míg a másikat növelte eggyel (hasonló gondolatmenetet alkalmazott, mint az első feladatnál). A harmadik sorban már újra figyelembe vette a feladat adatait, viszont az első és harmadik sor számadatai között túl nagy a különbség ahhoz, hogy következtetéseket tudjon levonni a hiba alakulására vonatkozóan. A táblázat alatt szerepeltek a $910 : 20 = 45,5$ és $910 : 50 = 18,2$ osztások, innen adódott valószínűleg a negyedik sor tartalma, ahol az összeg és hiba minden ellenőrzés nélkül lettek beírva. Ezek a megfigyelések rávilágítanak arra, hogy milyen hibákat kell kiküszöbölni a módszer hatékonyságának növelése érdekében. Többben apró figyelmetlenségek miatt adtak rossz választ, egy ilyen tanulói munka a következő:

2.45. Táblázat

	50 forintosok	20 forintosok	összeg	hiba
első feltételezés	10	15	800	1610
második feltételezés	11	16	870	1540
megoldás	34	39	2410	0

Tehát a tanuló jól kiszámolta, hogy az első feltételezéshez képest 23-mal kell növelni az érmék számát, de ezt a második feltételezés adataihoz adta hozzá. Ugyanakkor nem végezte el helyesen az ellenőrzést a megoldás sorában. 2 tanuló az összeg oszlopba az érmék számának összegét (és nem az értékeiknek az összegét) írta és ezt vonta ki a 2410-ből, ezért adtak rossz választ.
Próbálgatással 16 tanuló adott jó választ. Míg az előző feladatban négy-öt próbálkozás után született meg a jó válasz, addig ennél a feladatnál zömében öt-hat próbálkozásra volt szükség (voltak tanulók, akik hét vagy nyolc próbálkozás után adtak jó választ). Ez annak tulajdonítható, hogy a feladat számadatai nagyobbak voltak. Ennek ellenére viszont az egyik tanuló már a második próbálkozás során ráhibázott a jó megoldásra.

3. Feladat: *Egy autóbusz az első napon négyszer akkora távolságot tett meg, mint a másodikon. Mekkora utat tett meg a két napon külön-külön, ha az első napon 135 km-rel többet tett meg, mint a másodikon?*

2.46. Táblázat

Jó válasz	31
Rossz válasz	14
Nem foglalkozott vele	5

2.47. Táblázat

Alkalmazott módszer	Jó válasz	Rossz válasz
Algebrai módszer, egyenlet	0	1
Hamis feltételezések módszere	16	6
Ábrakészítés (szakaszos ábrázolás)	8	1
Aritmetikai műveletek ábrakészítés nélkül	1	6
Próbálgatással	6	0

6 tanuló próbálgatással adott jó választ. Viszonylag könnyű dolguk volt, csak olyan számokat kellett vegyenek, ahol az egyik a másiknak a négyszerese, majd megvizsgálni a különbséget.
8 tanuló szakaszos ábrázolással adott jó választ. Ők az első napon megtett utat négy szakasszal, míg a második napon megtett utat egy szakasszal ábrázolták, majd legtöbben kapcsos zárójellel jelezték, hogy három szakasz 135 km-t jelent. Utána a $135 : 3 = 45$ osztás, illetve a $4 \cdot 45 = 180$ szorzás elvégzése után adtak jó választ. Megjegyezhetjük, hogy ez a módszer a leginkább alkalmas az ilyen típusú feladatok megoldására.
16 tanuló a hamis feltételezések módszerével adott jó választ. Mivel a feladatban két feltétel van megfogalmazva, ezért a diákmunkákat két kategóriába sorolhatjuk, ezt két tanuló különböző módszerein keresztül szemléltetném.

2.48. Táblázat (Első tanuló)

	1. napon	2. napon	különbség	hiba
első feltételezés	80	20	60	75
második feltételezés	84	21	63	72
megoldás	180	45	135	0

Ez a tanuló "az első napon négyszer akkora távolságot tett meg, mint a másodikon" feltételből indult ki a feltételezések adatainak megválasztásánál és "az első napon 135 km-rel többet tett meg, mint a másodikon" feltételtől való eltérést tekintette hibának. Észrevette, hogy második napon megtett kilométerek számát eggyel növelve a hiba 3-mal csökken, ezért elvégezte a $75 : 3 = 25$ osztást és megadta a helyes választ. Ezzel a módszerrel (értelemszerűen más számadatokkal a feltételezéseknél) oldotta meg a feladatot 10 tanuló.

2.49. Táblázat (Második tanuló)

	1. napon	2. napon	négyszerese	hiba
első feltételezés	136	1	4	132
második feltételezés	137	2	8	129
megoldás	180	45	180	0

Ebben az esetben "az első napon 135 km-rel többet tett meg, mint a másodikon" feltétel szolgáltatta az adatokat a feltételezéshez. A hiba kiszámításához a tanuló vette a 2. napon megtett út négyszeresét és ezt összehasonlította az 1. napon megtett úttal, majd az eltérést tekintette hibának. Ezzel a módszerrel adott helyes választ 4 tanuló.
Két tanuló a hamis feltételezések módszerével már a második feltételezésnél ráhibázott a jó megoldásra, egyikük megoldása a következő.

2.50. Táblázat

	1. napon	2. napon	különbség	hiba
első feltételezés	200	50	150	15
második feltételezés	180	45	135	0

Természetesen az ilyen szerencsés véletlenek is ugyanolyan jó megoldásnak számítanak, bár tekinthetők szerencsés próbálkozásnak is.
3 tanuló a hamis feltételezéseket alkalmazva nem találta az összefüggéseket, mivel a feltételezések során nagy számokat választott (2. nap 100 km, 1. nap 235 km; illetve 2. nap 101 km, 1. nap 236 km értékeket). Egy tanuló miután mindent jól kiszámolt, a szükséges hozzáadást nem az első feltételezéshez, hanem a másodikhoz adta hozzá, ezért az "1. napon 184 km-t, a második napon 46 km-t" választ adta (az ő munkáját szemléltettük az előző feladat kapcsán is, ahol ugyanazt a hibát vétette). 2 tanuló viszonylag összefüggéstelenül és követhetetlenül dolgozott a hamis feltételezések módszerével.
Egy tanuló a helytelenül felírt $4 \cdot x + x + 132 = 0$ egyenletet helyesen oldotta meg, így $x = -26,4$ eredményt kapott.
3 tanuló a $135 : 4 = 33,75$ osztás elvégzése után "az első napon 135 km-t, míg a második napon 33,75 km-t" választ adta.

4. Feladat: *Peti és Zoli bélyegeket gyűjt. Zolinak 12-vel több bélyege van, mint Peti bélyegei számának a kétszerese. Kettőjüknek együtt 168 bélyege van. Hány bélyegük van külön-külön?*

2.51. Táblázat

Jó válasz	26
Rossz válasz	20
Nem foglalkozott vele	4

2.52. Táblázat

Alkalmazott módszer	Jó válasz	Rossz válasz
Algebrai módszer, egyenlet	1	0
Hamis feltételezések módszere	12	12
Próbálgatás	9	3
Ábrakészítés (szakaszos ábrázolás)	3	2
Aritmetikai műveletek ábrakészítés nélkül	1	3

1 tanuló választotta az algebrai eszközöket, ő a $2 \cdot x + 12 + x = 168$ egyenletet felírva és jól megoldva adott helyes választ.
A hamis feltételezések módszerével 12 tanulónak sikerült helyesen megoldani a feladatot. Ők mindannyian a feltételezések során Peti bélyegeinek számára vonatkozóan adtak egy értéket (amelyet a második feltételezésnél eggyel változtattak), ezt megkétszerezve, majd 12-t hozzáadva kapták meg a Zoli bélyegeinek számát. Utána a Peti és Zoli bélyegei számának így kapott összegét hasonlították össze a feladat adataival és vizsgálták a feltételezések hibáját. A következőkben az egyik diák munkáját részletezzük.

2.53. Táblázat

	Peti	Zoli	összesen	hiba
első feltételezés	15	42	57	111
második feltételezés	16	44	60	108
megoldás	52	116	168	0

Az említett tanuló megfigyelte, hogy a Peti bélyegeinek számát 1-gyel növelve a hiba 3-mal csökken. Utána a $111 : 3 = 37$ osztást elvégezve kapta, hogy Peti bélyegeinek száma $15 + 37 = 52$. A többiek is hasonlóan dolgoztak, más számadatokat választva a feltételezések során.
12 tanuló adott rossz választ azok közül, akik a hamis feltételezések módszerét alkalmazták. 4 tanuló számolási hibát vétett. 2 tanuló az összesen oszlopban a Peti bélyegei számának a kétszeresét adta Zoli bélyegeinek számához, ezért kaptak rossz eredményt, egyébként mindketten következetesen alkalmazták a hamis feltételezések módszerét. 1 tanuló helyesen tette meg a feltételezéseket, de nem találta meg a helyes összefüggéseket a hiba alakulására vonatkozóan. 1 tanuló a "Zolinak 12-vel több bélyege van, mint Petinek" feltétellel dolgozott és miután helyesen végezte el a műveleteket a "Petinek 78, Zolinak 90 bélyege van" választ adta. 4 tanuló a kezdeti feltételezéseknél a "kettőjüknek együtt 168 bélyege van" feltételt kielégítő számadatokat választottak, egyikük munkáját idézném.

2.54. Táblázat

	Peti	Zoli	Peti·2	Zoli +12	hiba
első feltételezés	68	100	136	112	24
második feltételezés	67	101	134	113	21
megoldás	60	108	168	120	0

A fenti munkából látható, hogy a tanuló tisztában volt a hamis feltételezések módszerének alkalmazásával, de rosszul értelmezte a feladat szövegét, úgy tekintette, hogy Zolinak 12-vel kevesebb bélyege van, mint a Peti bélyegeinek a kétszerese. Egyébként a tanulók munkájából kitűnik, hogy a hamis hipotézisek módszerénél mindegy, hogy a feladat két feltétele közül melyiket tekintjük mérvadónak a kezdeti feltételezések számadatainak megválasztásánál, illetve a hiba kiszámításánál, a lényeg az, hogy következetesen alkalmazzuk a szabályokat.
9 tanuló próbálgatással adott jó választ. Ők ugyanolyan táblázatokkal dolgoztak, mint a hamis feltételezések módszerét alkalmazók, minden sorban feltüntették a hibát. Ők viszont nem próbáltak összefüggéseket keresni a feltételezett értékek és a hibák alakulása között, könnyebbnek tartották a 4-5 soros próbálgatásokat. Voltak, akik már egy-két próbálgatás után megadták a jó választ. 3 tanuló a próbálgatások módszerénél számolási hibát vétett.
3 tanuló a szakaszos ábrázolás módszerét alkalmazta szabályszerűen és adott jó választ. 1 tanuló elvétette a szakaszos ábrázolást, ő Petihez két szakaszt, Zolihoz két ugyanolyan szakaszt és még 12-t rajzolt. Egy másik tanuló ugyanezt a hibát követte el a szakaszos ábrázolásnál, ő viszont Zolihoz rajzolt két szakaszt, Petihez két szakaszt és még 12-t.
Egy tanuló aritmetikai számításokkal adta meg a helyes választ anélkül, hogy ábrát készített volna. 3 tanuló hibás eredményeket kapott aritmetikai műveleteket végezve.

5. Feladat: *Két könyvespolcon könyvek vannak, a másodikon háromszor annyi, mint az elsőn. Ha a másodikról elveszünk 13 könyvet, az elsőre pedig felteszünk még 10 könyvet, akkor a másodikon kétszer annyi könyv lesz, mint az elsőn. Hány könyv van a két könyvespolcon külön-külön?*

2.55. Táblázat

Jó válasz	27
Rossz válasz	13
Nem foglalkozott vele	10

2.56. Táblázat

Alkalmazott módszer	Jó válasz	Rossz válasz
Algebrai módszer, egyenlet	0	1
Hamis feltételezések módszere	14	6
Próbálgatás	13	4
Ábrakészítés (szakaszos ábrázolás)	0	1
Aritmetikai műveletek ábrakészítés nélkül	0	1

A hamis feltételezések módszerével 14 tanuló adott helyes választ. Legtöbben öt oszlopban dolgoztak, amint a következőkben az egyik tanuló munkáján láthatjuk.

2.57. Táblázat

	1. polc	2. polc	1. polc +10	2. polc −13	hiba
első feltételezés	10	30	20	17	23
második feltételezés	11	33	21	20	22
megoldás	33	99	43	86	0

A fenti munkából is látható, hogy a hibának a kiszámításakor a tanulók az első polc tartalmának kétszeresét hasonlították össze a második polc tartalmával. 4 tanuló jól írta fel a feltételezéseket, de nem vette észre az összefüggéseket az adatok és a hiba alakulása között. 2 tanuló helytelenül értelmezte a feladat szövegét, ezért adott rossz választ.

13 tanuló próbálgatással adott jó választ. Többségük ugyanolyan ötoszlopos táblázattal dolgozott, mint a hamis feltételezések módszerét alkalmazó diákok. Voltak közöttük olyanok is, akik azért tértek rá erre a módszerre, mert a hamis feltételezések módszerével dolgozva számolási hibákat vétettek, ezért nem tudtak helyes következtetéseket levonni a hiba alakulására vonatkozóan, utána pedig sorozatos próbálgatással találták meg a helyes választ. Ennek a feladatnak az esetében kiemelném, hogy a tanulók többszörös próbálgatásokkal találták meg a jó választ, néhányan kilenc próbálkozás után voltak sikeresek. 4 tanuló a próbálgatások során számolási hibák miatt nem találta meg a helyes választ.

1 tanuló szakaszos ábrázolással próbálkozott, különböző szakaszokat próbált rajzolni a feladat adatainak megfelelően, de munkájában nem lehetett összefüggő gondolatmenetet felfedezni.

1 tanuló felírta és megoldotta az $x+10 = 3 \cdot x - 12 \cdot 2$ egyenletet, majd az $x = 17$ megoldás után a "17 könyv van a két könyvespolcon" választ adta.

1 tanuló sikertelenül próbálkozott különböző aritmetikai műveletekkel.

6. Feladat: *András elolvasta egy könyvnek az* $\frac{1}{4}$ *részét és még 12 oldalt, hátra van még a könyv* $\frac{2}{3}$ *része. Hány oldalas a könyv?*

2.58. Táblázat

Jó válasz	14
Rossz válasz	16
Nem foglalkozott vele	20

2.59. Táblázat

Alkalmazott módszer	Jó válasz	Rossz válasz
Algebrai módszer, egyenlet	0	3
Hamis feltételezések módszere	6	7
Próbálgatás	3	0
Ábrakészítés (szakaszos ábrázolás)	0	0
Aritmetikai műveletek ábrakészítés nélkül	5	6

6 tanuló a hamis feltételezések módszerét helyesen alkalmazta. Egyikük munkája a következő, a többieké is nagyon hasonló.

2.60. Táblázat

	könyv	$\frac{1}{4}+12$ oldal	$\frac{2}{3}$	hiba
első feltételezés	48	24	32	8
második feltételezés	60	27	40	7
megoldás	144	48	96	0

Az említett tanuló észrevette, hogy a könyv terjedelmét 12 oldallal növelve a hiba 1-gyel csökken, tehát az első feltételezéshez képest az oldalak számát $8 \cdot 12 = 96$ -tal kell növelni, így a könyv terjedelme 144 oldal lesz. Azok a tanulók, akik helyes választ adtak a hamis feltételezések módszerével, mindannyian ilyen módon dolgoztak, vagyis az első feltételezésnél a könyv oldalainak számát 12 -nek egy többszöröseként adták meg, majd a második feltételezésnél 12 -nek a következő többszörösét vették, vagyis tudatosan olyan számokkal dolgoztak amelynek $\frac{2}{3}$ -a és $\frac{1}{4}$ -e is egész szám. Egy tanuló már az első feltételezésnél 144 -et választott, tehát "elsőre" megtalálta a megoldást.
7 tanuló nem tudott helyes választ adni a hamis feltételezések módszerével. 4 -en közülük a könyv oldalainak a számát nem 12 többszörösként keresték, ezért a könyv oldalainak $\frac{2}{3}$ -a, illetve $\frac{1}{4}$ -e (több esetben nem is véges) tizedes tört lett, így belebonyolódtak a számításokba és nem sikerült megtalálni a helyes összefüggéseket. Egy tanuló a következő hibát vétette:

2.61. Táblázat

	könyv	$\frac{1}{4}+12$ oldal	$\frac{2}{3}$	hiba
első feltételezés	12	15	8	7
második feltételezés	24	18	14	4

Látható, hogy számolási hibákat is vétett, viszont fajsúlyos tévedés volt, hogy a feltételezés hibáját a könyv "$\frac{1}{4}$ -e +12 oldal" és a könyv $\frac{2}{3}$ -a különbségeként számította ki.
Egy másik tanuló nagyon közel járt a helyes megoldáshoz, az ő munkája:

2.62. Táblázat

	könyv	$\frac{1}{4}+12$ oldal	$\frac{2}{3}$	összeg	hiba
első feltételezés	12	15	8	23	11
második feltételezés	24	18	16	34	10
megoldás	132	45	88	132	0

Látható, hogy tisztában volt azzal, hogy a hiba nullára csökkentését úgy lehet megvalósítani, hogy a könyv oldalainak számát $11 \cdot 12 = 132$ -vel növeljük, ezért megoldásnak a 132 -t adta. Nem végzett ellenőrzést az utolsó sorban, különben lehet, hogy rájött volna a tévedésre.
1 tanuló 7-szeres próbálgatással találta meg a jó választ. Másik 2 tanuló kevesebb próbálgatással ért el eredményt.
3 tanuló sikertelenül próbálkozott az $\frac{1}{4}+12+\frac{2}{3}=x$ egyenlettel.
5 tanuló aritmetikai számolással ért el jó eredményt, ők kiszámították, hogy a 12 oldal a könyv $\frac{1}{12}$ részét jelenti, majd jó választ adtak.
6 tanuló találomra, minden logikát nélkülözve végzett különböző műveleteket a szöveges feladatban szereplő számadatokkal, több helyen számolási hibákat vétettek, munkájukat nem érdemes elemzés tárgyává tenni.

A 3. felmérés tapasztalatainak összegzése

Amint a fentiekből kiderül, a tanulók döntő többsége a hamis feltételezések módszerét alkalmazta. Ennek egyik oka az, hogy a tanulók az aritmetikai és algebrai módszereket kb. 3 héttel korábban tanulták és inkább hagyatkoztak a frissen szerzett ismeretekre. Például a *3. Feladat* és a *4. Feladat* a szakaszos ábrázolás módszerével, illetve az algebrai egyenlet felírásával történő megközelítés viszonylag egyszerű, ennek ellenére a tanulók többsége ezeknél a feladatoknál is a hamis feltételezések módszerét alkalmazta.

A másik ok a feladatok algebrai modelljében keresendő. Például az *1. Feladat* esetében az egyenlet felírása még a 8. osztályos tanulók számára is nehézkes, amint a későbbiekben látni fogjuk. Az *5. Feladat* algebrai úton való megközelítése is elég komplikált, ezért a tanulók inkább a hamis feltételezések módszerének alkalmazására hagyatkoztak, illetve próbálgatásokba bocsátkoztak. Ennél a feladatnál a konkrét számadatokkal (a feltételezésekben szereplő adatokkal) történő manipulálás sokkal kézzelfoghatóbb, mint az algebrai szimbólumokkal való absztrakt megközelítés.
A gyakorló órákon nagy volt a módszer elfogadottsága, azok a tanulók is aktívan bekapcsolódtak a feladatok megoldásába, akiknek azelőtt az aritmetikai és algebrai módszerek nehézségeket okoztak. Tehát az affektív aspektusok fejlesztésének tekintetében a módszer nagyon hatékonynak bizonyult.
További megerősítést nyert az a véleményem, hogy a hamis feltételezések módszerét tanítani lehet (és kell) az általános iskolai oktatás során. Ez nem helyettesítheti, hanem hatékonyan kiegészítheti az aritmetikai és algebrai módszereket. Egy olyan alternatívát kínál a feladatok megoldására, amelyet főként azoknál a feladatoknál lehet alkalmazni, amelyek aritmetikai vagy algebrai úton való megközelítése viszonylag bonyolult egy adott évfolyam számára. Egy évfolyamon belül lehetőséget nyújt a differenciálásra is: azok a tanulók, akiknek az algebrai módszerek elsajátítása nehézkesen történik dolgozhatnak a hamis feltételezések módszerével, miközben társaik már az algebra eszközeit alkalmazzák. Az oktatás során szerzett tapasztalatom az, hogy magasabb évfolyamokon az algebrai módszerek ismeretének megszilárdulásával fokozatosan háttérbe szorul a hamis feltételezések módszere, ugyanis a tanulók számára egyre könnyebbé válik az egyenletek felírása, ezzel párhuzamosan a feltételezésekbe bocsátkozás és összefüggések megfogalmazása már körülményesnek tűnik. Ilyen módon nem kell attól tartani, hogy a hamis feltételezések módszere teljesen kiszorítaná a szöveges feladatok algebrai úton való megközelítését.

2.3. Dinamikus párhuzam - Az aritmetikai és algebrai módszerek alkalmazása a 8. osztályos tanulók körében

Iskolánkban a 2015/16-os és 2016/17-es tanévekben nagy figyelemmel kísértük a 8. osztályos tanulók problémamegoldási készségeinek alakulását az "Szöveges feladatok" fejezet (Tankönyv Mozaik Kiadó, 8. oszt., [35]) tanítása során. Célunk volt párhuzamba állítani a 8. osztályosok gondolkodásmódját a 6. osztályosokéval, legfőképpen az aritmetikai és algebrai módszerek alkalmazásával kapcsolatban.

2.3.1. A mérés módszere és célja

Az említett témakör oktatása előtt egy feladatlap megoldásával (*Melléklet - 7. Feladatlap*) felmértük, hogy a tanulók mire emlékeznek az előző tanévek anyagából, illetve melyek azok a módszerek amelyek tartósnak bizonyultak. A fejezet végén egy záró mérésben megvizsgáltuk a problémamegoldási képességek változását, a feladatmegoldási módszerek alakulását a fejezet oktatása során. Ehhez más szövegkörnyezettel megadott, de hasonló algebrai modellel rendelkező szöveges feladatokból összeállított feladatlapot (*Melléklet - 8. Feladatlap*) alkalmaztunk.
A felmérés során a következő kérdésekre kerestük a választ:

- Az aritmetikai vagy algebrai módszerekre emlékeznek jobban az előző tanévekből?
- A tanulók milyen módszereket alkalmaznak a fejezet tanítása előtt és után hasonló modellezésű feladatok megoldására?
- Melyek azok a feladat-típusok, amelyeknél a fejezet oktatása során jelentősen megváltoznak a tanulók által alkalmazott módszerek, illetve melyek azok, amelyek esetében nem tapasztalható változás?
- Mennyire javul az egyes megoldási módszerek alkalmazásának hatékonysága a fejezet végéhez érve a kezdeti állapotokhoz képest?

Ezzel a felméréssel legfőbb célunk elemezni, hogy a szöveges feladatok megoldása terén a tanulók milyen képességekkel rendelkeznek, illetve mennyire emlékeznek az előző években tanult feladatmegoldási módszerekre. Egyben azt is tanulmányozzuk, hogy az aritmetikai vagy algebrai módszereket részesítik előnyben. A megoldások tanulmányozása és kiértékelése jó támpontot jelent a szükséges oktatási stratégiák felépítése céljából. Ugyanakkor kialakul egy átfogóbb kép a 8. osztályosok gondolkodásmódjával, problémamegoldó képességeivel kapcsolatban. A 2015/16 és 2016/17-es tanévekben összesen 79 tanuló oldotta meg a feladatokat, a következőkben az ők munkáikat vizsgáljuk. Jelen tanulmány terjedelme nem teszi lehetővé ugyanazt az aprólékos elemezést az alkalmazott módszerekre és típushibákra vonatkozóan, mint amilyent a 6. osztályosok körében végeztünk. Ezért az elemzés súlypontját inkább arra helyeztük, hogy a tanulók milyen arányban alkalmazták az algebrai, illetve aritmetikai módszereket, és ezt milyen hatékonysággal tették.
A szöveges feladatok megoldásának nehézségeiről a 8. osztályos tanulók körében más kutatásokat is végeztem, ezek eredményeiről egy előző tanulmányban számoltam be [20].

2.3.2. Az előzetes mérés

A mérés lebonyolítása

Az említett fejezet tanítása előtt a tanulók a *7. Feladatlap*-on szereplő feladatokat oldották meg. A feladatlap megoldására 45 perc állt a tanulók rendelkezésére.

A feladatok megoldásának értékelése

Az alábbiakban a feladatok megoldása során alkalmazott módszerek megoszlását, illetve néhány tanulói megoldást és típushibát mutatnánk be.

1. Feladat: *Péternek és Pálnak összesen 1664 forintja van. Péternek 3-szor annyi pénze van, mint Pálnak. Mennyi pénzük van külön-külön?*

2.63. Táblázat

Alkalmazott módszer	Jó válasz	Rossz válasz
Algebrai módszerek	31	3
Aritmetikai módszerek	31	14

A fenti táblázat kimutatja, hogy ugyanannyi jó válasz született algebrai, illetve aritmetikai módszerek alkalmazásával. Ugyanakkor több tanuló választotta az aritmetikai módszereket és ennek az alkalmazásánál adódott a több hibás megoldás is. A legtöbb hibát az $1664 : 3$ és $1664 : 5$ műveletek jelentették, néhányan voltak akik jó gondolatmenettel számolási hibákat vétettek.
Az algebrai módszerek alkalmazásánál a hibás megoldásokat az $x + x \cdot 3 = 1664$ helyesen felírt egyenletet követő $2 \cdot x \cdot 3 = 1664$ helytelen összevonás okozta (ebben az esetben a tanulók nem vették figyelembe a műveletek sorrendjét).

2. Feladat: *Péternek és Pálnak összesen 1850 forintja van. Péternek 320 forinttal több van, mint Pálnak. Mennyi pénzük van külön-külön?*

2.64. Táblázat

Alkalmazott módszer	Jó válasz	Rossz válasz
Algebrai módszerek	25	2
Aritmetikai módszerek	35	17

Amint a fenti táblázat mutatja, több tanuló választotta az aritmetikai módszereket, viszont ebben az esetben is az algebrai eszközöket alkalmazó tanulók nagyobb arányban adtak jó válaszokat. Az aritmetikai számítások esetében a leggyakoribb hiba az "$1850 : 2 = 925$ Péternek $925 + 320 = 1225$, Pálnak $925 - 320 = 605$

forintja van" gondolatmenet volt, ugyanakkor számolási hibák is előfordultak.

3. Feladat: *Péter 1400 forintot fizetett ki 20 és 50 forintos érmékkel. Összesen 46 érmét használt fel. Hány 20 forintos, illetve hány 50 forintos érmét használt fel?*

2.65. Táblázat

Alkalmazott módszer	Jó válasz	Rossz válasz
Próbálgatás	41	29
Hamis feltételezések	4	0

5 tanuló nem foglalkozott a feladattal, ők csupán az adatokat írták fel. A válaszadók többsége próbálgatással adta meg a választ. A próbálgatást többféleképpen kezdték el ezekből említenék néhányat. Többen az $1400 : 50 = 28$ és $1400 : 20 = 70$ műveletek elvégzése után kezdték a próbálgatást, a kapott hányadosok szolgáltatták a kiindulópontot. Mások a "20 darab 20-as és 20 darab 50-es 1400 forintot ér" (annak ellenére, hogy ez csak 40 érmét jelent) kezdeti ötletet használták gondolatébresztőnek, így könnyebben rájöttek a helyes megoldásra. Egy tanuló a 23 darab 20-as és 23 darab 50-es kezdeti feltételezésből indult ki. Egyesek két külön sorba 50-eseket és 20-asokat irkáltak, majd ezeket összeadogatva és újabb számokkal pótolgatva kapták meg a helyes választ. Voltak akik első próbálkozásra sikeresen a jó választ találták meg, ők egy egyszerű ellenőrzés után készen voltak.
Ebben a felmérésben szereplő 8. osztályos tanulók nagyon keveset tudtak a hamis feltételezések módszeréről (ellentétben azokkal a 6. osztályos tanulókkal, akik a másik felmérésben szerepeltek). Egyetlen tanóra keretében, még 7. osztályos korukban, lett megemlítve ez a módszer néhány feladat kíséretében. Ennek ellenére, 4 tanuló még emlékezett rá és helyesen oldotta meg a feladatot ezzel a módszerrel.

4. Feladat: *Elolvastam egy könyv* $\frac{1}{4}$ *részét és még 20 oldalt, hátra van a könyv* $\frac{2}{3}$ *része és még 16 oldal. Hány oldalas a könyv?*

2.66. Táblázat

Alkalmazott módszer	Jó válasz	Rossz válasz
Algebrai módszerek	4	16
Aritmetikai módszerek	19	30

10 tanuló nem foglalkozott a feladattal. Az aritmetikai módszereket többen választották, és ezeknél a tanulóknál volt nagyobb a hatékonyság aránya is. Ennek egyik oka az, hogy a feladat algebrai modellje egy törtegyütthatós egyenletet jelent,

amelynek nemcsak a felírása, hanem megoldása is gondot okozhat (az egyenletek megoldásával a tanulók utoljára 7. osztályos korukban találkoztak). 4 tanulónak sikerült helyesen felírni és megoldani az $\frac{1}{4} \cdot x + 20 + \frac{2}{3} \cdot x + 16 = x$ egyenletet. Többben az $\frac{1}{4} + 20 + \frac{2}{3} + 16 = x$ egyenletet írták fel, majd a megoldások két irányba divergáltak. Egyesek egyenletként oldották meg és a $11 + 432 = 12 \cdot x$ összefüggéshez, illetve az $x = \frac{443}{12}$ megoldáshoz jutottak (ezeket a rossz algebrai megoldásokhoz soroltuk). Mások az egyenlet bal oldalából kiindulva a törteket különválasztották az egész számoktól és aritmetikai gondolatmenetet követve megoldották a feladatot (ezeket az aritmetikai módszerrel adott helyes válaszokhoz soroltuk). Többben jól írták fel az algebrai egyenletet, de hibát vétettek a megoldása során. Ugyanez elmondható azokról az aritmetikai módszerrel dolgozó tanulókról is, akik helyes gondolatmenetet követtek, de számolási hibákat vétettek, főként a törtműveletek területén.

5. Feladat: *Egy téglalap kerülete 96 cm, a hosszúsága 3 cm-rel nagyobb, mint a szélességének a kétszerese. Mekkorák a téglalap oldalai?*

2.67. Táblázat

Alkalmazott módszer	Jó válasz	Rossz válasz
Algebrai módszerek	12	12
Aritmetikai módszerek	7	35
Próbálgatás	7	0

6 tanuló nem foglalkozott a feladattal.

Amint látható, a próbálgatással dolgozó tanulók mindegyike jó választ adott. Ők egy téglalapot rajzoltak, majd a feladat feltételeinek megfelelően számokat írtak a téglalap hosszúságára, illetve szélességére, majd ezeket áthúzgálták és újabb számokat írtak, következetesen törekedve arra, hogy a kerület végül 96 cm legyen. Ezek a tanulók tisztában voltak a kerület fogalmával és addig próbálkoztak, amíg az 96 cm lett.

Az algebrai módszerekkel helyes választ adó tanulók a kerületre vagy a félkerületre írtak fel algebrai egyenletet. Az aritmetikai módszereket helyesen alkalmazó tanulók visszafelé következtetéssel végezték a számításokat, többen voltak azok, akik a félkerületből következtettek visszafelé.

Kiemelném, hogy azok a tanulók akik algebrai módszerekkel dolgoztak jóval nagyobb arányban adtak helyes választ. Egy előző cikkemben is rámutattam arra, hogy a tanulók könnyebben írnak fel algebrai egyenleteket, ha a feladat hátterében geometriai képletek állnak [28]. Ezzel ellentétben az aritmetikai számítások esetében nem minden tanuló követi azt a zsinórmértéket, amit a geometriai képletek

jelentenek, így sok esetben inkább csapongó számolgatásokat végeznek a feladatban szereplő adatokkal.
Az algebrai és aritmetikai számításoknál is több esetben gondot okozott a kerület helytelen értelmezése. Többen felírták az $x + 2 \cdot x + 3 = 96$ egyenletet, amelyből a szélességre 31 cm, a hosszúságra pedig 65 cm adódott (ezek a tanulók az oldalak összegét tévesztették a kerülettel). Még többen voltak azok, akik ennek a párhuzamos aritmetikai gondolatmenetét követték, vagyis a $96 - 3 = 93$; $93 : 3 = 31$ műveletek után adták ugyanazt a választ.

2.3.3. A záró mérés

A mérés lebonyolítása

A "Szöveges feladatok" fejezet (Tankönyv Mozaik Kiadó, 8. oszt., [35]) tanítása után a tanulók problémamegoldó készségeinek alakulását és az algebrai módszerek bővülését a következő feladatlap segítségével mértük fel.

A feladatok megoldásának értékelése

Az alkalmazott módszereket, valamint az említésre méltó tanulói megoldásokat, illetve típushibákat az alábbiakban mutatnám be.

1. Feladat: *Egy műhelyben két nap alatt összesen 2857 csavart gyártottak, az első napon 345 csavarral többet, mint a másodikon. Mennyi csavart gyártottak külön-külön az első, illetve a második napon?*

2.68. Táblázat

Alkalmazott módszer	Jó válasz	Rossz válasz
Algebrai módszerek	44	5
Aritmetikai módszerek	19	10

Az algebrai módszereket alkalmazó tanulók az $x + x + 345 = 2857$ egyenlet helyes megoldásával adták meg a választ.
1 tanuló helyesen jelölte a mennyiségek közötti összefüggéseket, viszont helytelenül írta fel az egyenletet. 4 tanuló az egyenletek helyes felírása után számolási hibákat vétett.
Az aritmetikai módszereket alkalmazó tanulók döntő többsége a $2857 - 345 = 2512$; $2512 : 2 = 1256$ számolások után adtak jó választ. Csak néhányan alkalmazták a "$2857 : 2 = 1428,5$; $345 : 2 = 172,5$; az első napon $1428,5 + 172,5 = 1601$; a második napon $1428,5 - 172,5 = 1256$ csavart gyártottak" gondolatmenetet.

Annak ellenére, hogy a két napon összesen gyártott csavarok száma páratlan volt, két tanuló a következő (ennél a típusú feladatnál egyébként gyakori) hibás megoldási módszert választotta: "$2857 : 2 = 1428,5$; $1428,5 + 345 = 1773,5$; $1428,5 - 345 = 1083,5$ ". Mivel ilyen módon a csavarok száma nem volt egész, ezért felfelé, illetve lefelé kerekítéssel próbálkoztak. Voltak akik szintén ezzel a hibás megoldási algoritmussal próbálkoztak, de érzékelték, hogy ebben az esetben a módszer alkalmazása nem szolgáltat egész számokat, így arra következtettek, hogy nem a helyes eljárást választották. Ők feladták és más irányba indultak el, néhányan közülük az algebrai egyenletet írták fel és adtak jó választ.
1 tanuló nem foglalkozott a feladattal.

2. Feladat: *Egy farmon összesen 3850 állat van, juhok és kecskék. Mennyi juh, illetve kecske van külön-külön, ha a juhok száma négyszerese a kecskék számának?*

2.69. Táblázat

Alkalmazott módszer	Jó válasz	Rossz válasz
Algebrai módszerek	48	3
Aritmetikai módszerek	22	6

Az algebrai módszert alkalmazó tanulók az $x + 4 \cdot x = 3850$ egyenlettel dolgoztak. A legtöbben helyes választ adtak. 1 tanuló helytelenül a $4 \cdot x = 3850$ egyenlettel próbálkozott. 2 tanuló számolási hibákat vétett.
Azok, akik az aritmetikai eszközöket részesítették előnyben a $3850 : 5 = 770$ osztás elvégzése után a kecskék száma $= 770$ és a juhok száma $= 4 \cdot 770 = 3080$ választ adták.
6 tanuló rosszul oldotta meg a feladatot aritmetikai módszerekkel. Ketten közülük a $3850 : 2$ osztással, egy másik tanuló a $3850 : 4$ osztással próbálkozott, a többiek számolási hibákat vétettek.

3. Feladat: *Egy iskolában összesen 1236 diák van. A fiúk száma 63-mal kevesebb a lányok számának a kétszeresénél. Hány fiú, illetve lány van az iskolában külön-külön?*

2.70. Táblázat

Alkalmazott módszer	Jó válasz	Rossz válasz
Algebrai módszerek	43	17
Aritmetikai módszerek	0	17
Próbálgatás	1	0
Hamis feltételezés	1	0

Ennek a feladatnak a matematikai modellje nagyon hasonlít a *7. Feladatlap 5. Feladatá*-ra. A nehezítést az jelentette, hogy itt a " fiúk száma 63-mal kisebb,

mint a lányok számának a kétszerese" szerepelt, ellentétben a másik feladatban szereplő "a hosszúsága 3 cm-rel nagyobb, mint a szélességének a kétszerese". Ez gondot okozott az aritmetikai gondolatmenetnél, ugyanis sokan az "$1236 - 63 = 1173$; $1173 : 3 = 391$ " számításokat végezték, ahelyett, hogy az 1236-hoz hozzáadták volna a 63-at. Olyan aritmetikai számítások is előfordultak, hogy "$1236 : 3 = 412$; $2 \cdot 412 = 824$; $824 - 63 = 759$; $1236 - 759 = 477$ ", majd a "477 lány és 759 fiú" válasz következett. A tanulók többsége az $1236 : 3$ vagy az $1236 : 2$ osztásokból indult ki, majd következetesség nélkül végeztek mindenféle műveleteket.
Sokkal célravezetőbbnek bizonyult az algebrai módszer, ugyanis a tanulók a lányok számát x -szel jelölték, így könnyen következett a fiúk számára vonatkozó $2 \cdot x - 63$ összefüggés, majd az $x + 2 \cdot x - 63 = 1236$ egyenletet oldották meg. Ezzel magyarázható az algebra eszközeivel dolgozó tanulók nagyobb hatékonysága.
8 tanuló helyesen írta fel az $x + 2 \cdot x - 63 = 1236$ egyenletet, viszont hatan közülük hibáztak az egyenlet megoldása során, ketten pedig rosszul helyettesítettek vissza a feladat adataiba.
Egy tanuló a hamis feltételezések módszerével adott helyes választ.

4. feladat: *Egy asztalon 100 pohár található, ezek űrtartalma 20 cl vagy 35 cl. Ha mindegyiket megtöltenénk vízzel, 2870 cl vízre lenne szükség. Hány pohár van mindegyikből külön-külön?*

2.71. Táblázat

Alkalmazott módszer	Jó válasz	Rossz válasz
Algebrai módszerek	4	3
Próbálgatás	8	18
Hamis feltételezés	22	5

Amint a *7. Feladatlap 3. Feladatá*-nál is tapasztaltuk, az ilyen típusú feladatok nem könnyen kezelhetők algebrai úton.
Csak 4 tanulónak sikerült algebrai módszerekkel megoldani a feladatot. Ők felírták és helyesen megoldották a $20 \cdot x + 35 \cdot (100 - x) = 2870$ egyenletet.
3 tanuló sikertelenül próbálkozott algebrai módszerekkel.
Próbálgatással 8 tanuló adott jó választ, legtöbben számításaikat táblázatba a foglalták. 13 tanuló feladta a próbálgatás módszerét, mivel a nagy számadatok miatt időigényes számolásokba bocsátkoztak. 5 tanuló próbálgatással rossz választ adott, mivel számolási hibákat vétettek.
A hamis hipotézisek módszere bizonyult a leghatékonyabbnak. 17 tanuló kezdetben feltételezte, hogy minden pohár 20 cl-es, majd a $2870 - 2000 = 870$; $870 : 15 = 58$, számítások elvégzése után arra következtettek, hogy 35 cl-esből 58 darab, 20 cl-esből pedig 42 darab van. 5 tanuló más kezdeti feltételezésekből kiindulva

adott jó választ.
10 tanuló nem foglalkozott a feladattal, míg 9 tanuló néhány összefüggéstelen művelet elvégzése után feladta (az ő munkáikat nem lehetett egyik módszerhez sem besorolni).

5. feladat: *Egy túra alkalmával megtettük a teljes út* $\frac{1}{3}$ *részét és még 3 km-t, hátra van a teljes út* $\frac{3}{5}$ *része és még 5 km. Mennyi a teljes út hossza?*

2.72. Táblázat

Alkalmazott módszer	Jó válasz	Rossz válasz
Algebrai módszerek	8	11
Aritmetikai módszerek	39	16

Az aritmetikai gondolatmenet bizonyult hatékonyabbnak, a tanulók beazonosították, hogy a teljes út hosszának az $\frac{1}{15}$ része 8 km, majd a $8 \cdot 15 = 120$ szorzás elvégzése után megadták a helyes választ. 2 tanuló ábrát is készített, ők tizenöt egyenlő részre osztottak egy szakaszt, amelyen nagyon szemléletesen illusztrálták a fennálló összefüggéseket. Ezt követően ők is a többiekhez hasonlóan végezték el a számításokat.
Az aritmetikai módszerek alkalmazása során a hibák leginkább az egészrész-törtrész közötti viszony, illetve a feladat szövegének helytelen értelmezéséből adódtak.
Az algebrai módszereket választó tanulók nem voltak olyan hatékonyak, mint az aritmetikai eszközöket alkalmazó társaik.
Csak 7 tanulónak sikerült felírni és helyesen megoldani a nem feltétlenül egyszerű $\frac{x}{3} + 3 + \frac{3 \cdot x}{5} + 5 = x$ algebrai egyenletet.
Egy tanuló a $\frac{2 \cdot x}{3} - 3 = \frac{3 \cdot x}{5} + 5$ egyenletet írta fel, vagyis abból a tényből indult ki, hogy a teljes út $\frac{2}{3}$ részénél 3 km-rel rövidebb távolság van hátra.
Egy tanuló helyesen dolgozott mindaddig, míg a $\frac{14}{15} \cdot x + 8 = x$ összefüggést megtalálta, utána viszont számunkra érthetetlen módon feladta.
A helytelenül felírt algebrai egyenletek közül a következőket említeném

$$\frac{x}{3} + 3 + \frac{3 \cdot x}{5} + 5 = 1$$

$$\frac{1}{3} + 3 + \frac{3}{5} + 5 = x$$

ugyanis itt még nem különült el teljesen az aritmetikai gondolkodásmód az algebraitól, a tanulók vagy a teljes utat tekintették 1 egésznek (helyesen x kellett volna

szerepeljen), vagy a törtrészek felírásánál nem szerepelt az x ismeretlen.
3 tanuló az adatok felírása és néhány összefüggéstelen számolás után feladta, 2 tanuló pedig egyáltalán nem foglalkozott a feladattal.

A tapasztalatok összegzése

A feladatmegoldásokat elemezve az általunk megfogalmazott néhány kérdésre próbálunk válaszokat találni. A feladatokat az algebrai modelljeik alapján próbáljuk csoportosítani és elemezni a következőkben.

7. Feladatlap 2. Feladat és *8. Feladatlap* 1. Feladat:

A feladatok algebrai modellje az

$$\begin{aligned} x + y &= b \\ y &= x + a \end{aligned} \tag{12}$$

egyenletrendszer, illetve az $x + x + a = b$ egyismeretlenes egyenlet.
Úgy a fejezet elején, mint végén az egyenlet felírása hatékonyabb módszernek bizonyult az ábrakészítésnél. A fejezet végére megnőtt az algebrai módszereket alkalmazó tanulók száma. Ez várható volt, mivel ezeknek a feladatoknak az algebrai modellje egy viszonylag egyszerű egyenlet.

7. Feladatlap 1. Feladat és *8. Feladatlap* 2. Feladat:

A feladatok algebrai modellje az

$$\begin{aligned} x + y &= b \\ y &= a \cdot x \end{aligned} \tag{13}$$

egyenletrendszer, illetve az $a \cdot x + x = b$ egyismeretlenes egyenlet.
A fejezet végére megnőtt úgy az aritmetikai, mint az algebrai eszköztár alkalmazásának hatékonysága, illetve több tanuló áttért az algebrai módszerek alkalmazására.

7. Feladatlap 5. Feladat és *8. Feladatlap* 3. Feladat:

A feladatok algebrai modellje az

$$\begin{aligned} x + y &= c \\ y &= a \cdot x + b \end{aligned} \tag{14}$$

egyenletrendszer, illetve az $a \cdot x + b + x = c$ egyismeretlenes egyenlet.
Ezeknél a feladatoknál a fejezet elején a tanulók többsége aritmetikai módszereket alkalmazott, míg a végére egy nagymértékű eltolódás volt tapasztalható az algebrai módszerek irányába. A *8. Feladatlap* 3. Feladatának esetében a tanulók nagy számban alkalmazták az egyenletek felírását, ki kell emelni ennek a módszernek a nagy hatékonyságát is. Itt az aritmetikai módszerek alkalmazásánál a gondot az is jelentette, hogy a b paraméter negatív volt, ez lényegesen megnehezítette az ábrakészítést.

7. Feladatlap 3. Feladat és *8. Feladatlap* 4. Feladat:

A feladatok algebrai modellje az

$$\begin{aligned} a \cdot x + b \cdot y &= c \\ x + y &= d \end{aligned} \tag{15}$$

egyenletrendszer, illetve az $a \cdot x + b \cdot (d - x) = c$ egyismeretlenes egyenlet.
Az ilyen feladatok esetében az algebrai módszerek alkalmazása komoly nehézségeket okoz, ezt a jelen felmérés is igazolta. A fejezet elején a tanulók döntő többsége próbálgatással adott jó választ. A fejezet végén néhányan már algebrai módszerekkel is sikeresek voltak, viszont a legtöbb jó válasz a hamis feltételezések módszerének alkalmazásával adódott (ezt a módszert a fejezet tanítása során egy tanóra keretében mutattuk be és gyakoroltuk).

7. Feladatlap 4. Feladat és *8. Feladatlap* 5. Feladat:

A feladatok algebrai modellje egy törtegyütthatós egyismeretlenes egyenlet. A fejezet elején a tanulók nehezen boldogultak a *7. Feladatlap* 4. Feladatával. A fejezet végére nagyon megnőtt az aritmetikai módszerek alkalmazásának hatékonysága, ugyanakkor még mindig kevesen voltak azok, akik egyenletek felírásával adtak jó választ. Ez egyértelmű jelzés lehet, hogy a tanulók még 8. osztályos korukban is hatékonyabbak tudnak lenni az egészek és törtrészek közötti megfeleltetésekkel és arányosságokon alapuló aritmetikai számításokkal, mint törtegyütthatós egyenletek felírásával.

2.4. A kutatás tapasztalatainak összegzése

2.4.1. Az algebrai gondolkodásmódra való áttérés

Az algebra bevezetésében jelentős szerepe van annak, hogy az a tanulók szakítsanak az aritmetikai gondolkodásmóddal és elsajátítsák a változókkal való műveleteket, ezt Filloy és Rojano "didactic cut"-nak nevezik [19]. Ezen a ponton

jelenik meg a változókkal végzett műveletek fontossága, főként az olyan egyenletek esetében, ahol az ismeretlen több mint egy helyen szerepel. Erre leginkább akkor van szükség, amikor rátérünk az $A \cdot x + B = C$ típusú egyenletekről az $A \cdot x + B = C \cdot x + D$ típusúakra, illetve az ezekkel felírható szöveges feladatokra. Ebben a fázisban történik Sfard szerint az áttérés az "operacionális" fázisról a "strukturális" fázisra [82]. Itt jelenik meg az igénye annak, hogy a tanulók egy algebrai szintaxis ismeretével rendelkezzenek. Aritmetikai szemszögből vizsgálva, egy egyenlet bal oldala nem más mint bizonyos (ismert vagy ismeretlen) számokon végzett műveletek összessége, míg a jobb oldala ezeknek a műveleteknek az eredményét jelenti. Ilyen szemszögből megközelítve, az $A \cdot x + B = C$ típusú egyenletek könnyen megoldhatók az aritmetikai gondolatmenetet követve, a műveleteket visszafelé következtetéssel végezve a C számból kiindulva. Ezeket az egyenleteket nevezhetjük "aritmetikai" egyenleteknek. Az $A \cdot x + B = C \cdot x + D$ típusú egyenletek esetében viszont nem alkalmazhatjuk az aritmetikai gondolatmenetet, ezek megoldása az aritmetika tárgykörén kívül eső, ismeretleneken végrehajtott műveleteket igényel. Ezeket "nem-aritmetikai" egyenleteknek nevezzük. Ahhoz, hogy az ilyen egyenletek lényegét megértsék, a tanulóknak tisztában kell lenniük azzal, hogy az egyenlet mindkét oldalán lévő kifejezések azonos természetűek és az ismeretlen ugyanazt a számot jelenti akármelyik oldalán is álljon az egyenletnek. A "nem-aritmetikai" egyenletek megoldása jóval nagyobb körültekintést igényel (gondolok itt elsősorban a mérleg-elv alkalmazása kapcsán előforduló hibákra), ugyanakkor az ezekkel megoldható szöveges feladatok is nagyobb nehézségeket okoznak.
Tekintsük például az *5. Feladatlap* 3. Feladatát. Gondok elsősorban az egyenlet felírásával kapcsolatban adódtak, mivel a tanulók úgy kellett felírják az egyenletet, hogy ennek mindkét oldalán szerepeljen az ismeretlen (amennyiben az $x + 256 = 3 \cdot x$ alakban írjuk fel) vagy pedig az egyik oldalon két ismeretlen különbsége szerepeljen (a $3 \cdot x - x = 256$ alakú egyenlet). Mindkét esetben a feladat lefordítása egy elvonatkoztatást jelent az aritmetikai gondolkodásmódtól, ezzel is magyarázható az algebrai módszerek sikertelensége.
A fenti gondolatok érvényesek az *5. Feladatlap* 6. Feladatára is. Itt az egyenlet felírása nemcsak az ismeretlen mindkét oldalon való jelenlétét feltételezte, hanem ennek a törtrészeivel történő manipulálást is. A tanulók esetében a legnagyobb gondot itt is az algebrai gondolkodásmód kezdetlegessége okozta. Egyenlet felírása nélkül, az egész törtrészeiben és a köztük lévő arányosságokban gondolkodva jóval nagyobb sikerrel értek célt.
Az algebrai módszerek alkalmazása sokkal zökkenőmentesebb volt az *5. Feladatlap* 5. Feladatának esetében, ugyanis itt a feladat algebrai modellje egy tipikusan "aritmetikai" egyenlet volt. Ennek a feladatnak az esetében már sikeresen írták fel az egyenleteket, ugyanakkor még mindig az aritmetikai módszerekkel értek el jobb eredményeket.

Az *5. Feladatlap* 4. Feladatánál a tanulók többsége az algebrai módszereket részesítette előnyben. Ennek a feladatnak az algebrai modellje könnyen visszavezethető egy $A \cdot x + B = C$ típusú "aritmetikai" egyenletre. Ennek az egyenletnek a felírása csak 4 tanulónak okozott gondot, többen viszont hibáztak az egyenlet megoldása (a mérleg-elv alkalmazása), illetve az egyenlet megoldásából a feladat adataira történő visszacsatolás során.
A fentieket összegezve arra a következtetésre jutottunk, hogy a 6. osztályos tanulók még nem rendelkeznek azzal az algebrai gondolkodásmóddal, amely lehetővé tenné a szöveges feladatok egyenletekkel történő megközelítését. Kivételt képeznek a viszonylag egyszerű "aritmetikai" egyenletekkel megoldható feladatok.

2.4.2. Az egyenletek felírásában és megoldásában való jártasság elemzése

Mielőtt az algebrai módszerekben való jártasságot elemezzük, meg kell vizsgálni az egyenletek megoldási módszereinek ismeretét. Hiába próbálkozik a tanuló az algebrai módszerekkel, amennyiben hibát vét az esetleg helyesen felírt egyenlet megoldása során. Az egyszerűbb egyenleteket már a 6. osztályos tanulók is viszonylag nagy hatékonysággal oldották, a legnagyobb nehézségek a törtegyütthatós egyenletek megoldásában adódtak. Ehhez elemzés tárgyává tesszük azokat a buktatókat, amelyek az ilyen típusú egyenletekkel megoldható szöveges feladatok esetében adódtak. Ahhoz, hogy például egy törtegyütthatós egyenletet helyesen megoldjunk feltétlenül szükségesek a következő ismeretek:
- Az egyenlőség fogalma;
- Műveletek egész számokkal;
- Műveletek törtekkel;
- Műveletek sorrendje;
- A változó fogalma.

Ha a fentiek közül valamelyik hiányzik, akkor az egyenletek helyes megoldása lehetetlenné válik.
Ha az egyenlőség fogalma nem rögzül helyesen, akkor a tanuló nem végzi el ugyanazt a műveletet az egyenlet mindkét oldalán.
Ha a tanuló nem értette meg az egész számokkal végzett műveleti szabályokat, akkor például nem változtatja meg minden tag előjelét egy negatív számmal való beszorzás során.
Amennyiben hiányosak a törtszámokra vonatkozó műveleti szabályok, a tanulónak nehézségei támadnak a közös nevezőre hozás során.
A változó fogalmának helytelen megértése több szempontból is gondokat okoz. Elsősorban téveszteni fogják a változókkal végzett műveleteket miközben az egyenletet oldják meg. Ugyanakkor az esetleg helyes megoldás esetén nem tudják értelmezni az ismeretlenre kapott értéket, így képtelenek a szöveges feladatra választ

adni (hiányozni fog a feladat adataihoz való visszacsatolás).
A tanulók az algebrai módszer alkalmazása során a legnagyobb nehézségekbe az *5. Feladatlap* 6. Feladatának a megoldása során ütköztek. Ez várható volt, mivel a feladat jellegéből adódóan a változó helyes megválasztása és az összefüggések felírása után egy törtegyütthatós egyenlet megoldása következett. A következőkben néhány tanuló hibás megoldását fogom bemutatni, következtetések megfogalmazásával együtt.

1. megoldás (2 tanuló):

$$\begin{aligned} \frac{x}{3}+\frac{x}{4}+65 &= x \\ \frac{4\cdot x}{12}+\frac{3\cdot x}{12}+65 &= x \quad |\cdot 12 \\ 4\cdot x+3\cdot x+780 &= x \quad |:3 \\ 7\cdot x+780 &= x \quad |-780 \\ 7\cdot x &= x-780 \quad |-x \\ 6\cdot x &= -780 \quad |\cdot(-1) \\ 6\cdot x &= 780 \quad |:6 \\ x &= 130 \end{aligned} \tag{16}$$

2. megoldás (1 tanuló):

$$\begin{aligned} \frac{x}{3}+\frac{x}{4} &= 65 \\ \frac{4\cdot x}{12}+\frac{3\cdot x}{12} &= 65 \quad |\cdot 12 \\ 4\cdot x+3\cdot x &= 780 \quad |:3 \\ 7\cdot x &= 780 \\ x &= 111,42 \end{aligned} \tag{17}$$

3. megoldás (1 tanuló):

$$\begin{aligned} \frac{x}{3}+\frac{x}{4} &= 65 \\ \frac{4\cdot x}{12}+\frac{3\cdot x}{12} &= 65 \quad |\cdot 12 \\ 4\cdot x+3\cdot x &= 65 \quad |:3 \\ 7\cdot x &= 65 \\ x &= \frac{65}{7} \end{aligned} \tag{18}$$

4. megoldás (1 tanuló):

$$\begin{aligned}
\frac{x}{3}+\frac{x}{4}&=65\\
\frac{4\cdot x}{12}+\frac{3\cdot x}{12}&=\frac{125}{12} \quad |\cdot 12\\
4\cdot x+3\cdot x&=125 \quad |:3\\
7\cdot x&=125\\
x&=\frac{125}{7}
\end{aligned} \tag{19}$$

5. megoldás (1 tanuló)

$$\begin{aligned}
x:4+x:3+65&=x\\
2\cdot x:7+65&=x \quad |-65\\
2\cdot x:7&=x+65 \quad |-x\\
x:7&=65 \quad |\cdot 7\\
x&=455
\end{aligned} \tag{20}$$

6. megoldás (1 tanuló)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+65&=x\\
\frac{4}{12}+\frac{3}{12}+\frac{780}{12}&=\frac{12\cdot x}{12} \quad |\cdot 12\\
4+3+780&=12\cdot x\\
x&=\frac{787}{12}
\end{aligned} \tag{21}$$

7. megoldás (2 tanuló)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+65&=x\\
\frac{3}{12}+\frac{4}{12}+\frac{65}{12}&=\frac{x}{12} \quad |\cdot 12\\
3+4+65&=x\\
72&=x
\end{aligned} \tag{22}$$

8. megoldás (1 tanuló)

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\cdot x+\frac{1}{3}\cdot x+65 &=? \\ \frac{3}{12}\cdot x+\frac{4}{12}\cdot x+65 &=? \quad |-65 \\ \frac{3}{12}\cdot x+\frac{4}{12}\cdot x &=? \\ 3\cdot x+4\cdot x &=? \end{aligned} \tag{23}$$

(ennél a lépésnél feladta)

9. megoldás (1 tanuló)

$$\begin{aligned} \frac{x}{4}+\frac{x}{3}+65 &=? \\ \frac{3\cdot x}{12}+\frac{4\cdot x}{12}+65 &=? \quad |\cdot 12 \\ 3\cdot x+4\cdot x+780 &=? \\ 7\cdot x+780 &=? \end{aligned} \tag{24}$$

(ennél a lépésnél feladta)

10. megoldás (1 tanuló)

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}+\frac{1}{3}+65 &=? \\ \frac{3}{12}+\frac{4}{12}+\frac{780}{12} &=? \quad |\cdot 12 \\ 3+4+780 &=? \end{aligned} \tag{25}$$

válasz: 787 szárnyas van a baromfiudvaron.

11. megoldás (1 tanuló)

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+65 \\ &\frac{3}{12}+\frac{4}{12}+65 \quad |\cdot 12 \\ &3+4+780=787 \end{aligned} \tag{26}$$

válasz: 787 szárnyas van a farmon.

12. megoldás (1 tanuló)

$$\begin{aligned} &\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+65 \quad |\cdot 3 \\ &x+\frac{x}{4}+195 \quad |\cdot 4 \\ &x+x+780 \quad |-x \\ &x=780 \end{aligned} \tag{27}$$

A típushibákat a következő csoportokba sorolnám:

(1) *Az ismeretlen mennyiségek közötti összefüggések helytelen értelmezése:*
A 2., 3. és 4. megoldás esetében a tanulók helyesen írták fel a pulykák és libák számára vonatkozó összefüggést, ahol x -szel az összes baromfi számát jelölték. Az egyenlet felírása során viszont a pulykák és libák számának összegét a kacsák számával tették egyenlővé, vagyis a mennyiségek közötti összefüggéseket helytelenül értelmezték.

(2) *A betűszimbólummal jelölt ismeretlen helytelen használata:*
A 6. és 7. megoldás esetében a tanulók az összes szárnyas számát x -szel jelölték, viszont a pulykák, illetve libák számát $\frac{1}{4}$ -nek, illetve $\frac{1}{3}$ -nak tekintették. Nem tudták helyesen értelmezni az x -nek az $\frac{1}{4}$ -e, illetve x -nek az $\frac{1}{3}$ -a fogalmakat. Ugyanez a hiba az aritmetikai gondolkodásmódban is jelen van, ahol a tanulók nem képesek szétválasztani a törtrészt kifejező törtszámokat azoktól az egész számoktól, amelyek valamely mennyiségnek konkrétan a darabszámát fejezik ki. Ilyen hibák tapasztalhatók a 10. és 11. megoldásnál található $\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+65$ művelet esetében is.

(3) *A műveletek helytelen végrehajtása:*
Itt elsősorban a közös nevezőre hozással kapcsolatos hibákat említjük. A 3. és 7. megoldások esetében, például a közös nevezőre hozáskor a tanulók csak a törtszámokat bővítették megfelelő módon, az egész számokat csak ellátták a közös nevezővel (nem vették figyelembe, hogy az egész számok valójában 1-es nevezővel rendelkező törtszámok).

(4) *A műveleti sorrend felcserélése:*
A fentiekben az 5. megoldás esetében a tanuló külön összeadja a változókat és külön az osztókat (vagyis az összeadást részesíti előnyben), utána pedig a $2 \cdot x : 7 - x = x : 7$ esetében a kivonást végzi el elsőként.

(5) *Az egyenlőségjel hiánya:*
A 11. és 12. megoldásnál a tanulók nem írtak egyenlőségjelet a megoldás során. Ennek ellenére a mérlegelv szabályait próbálták sajátos módon alkalmazni, az egyenlőségjelet csak abban a lépésben tették ki, amikor a végső választ adták.

(6) *Az egyenlőségjel helytelen értelmezése:* A mérleg-elv alkalmazása során szükséges, hogy a műveleteket az egyenlőségjel mindkét oldalán hajtsuk végre. Az

1. és 3. megoldásnál a kijelölt műveleteket a tanulók csak az egyenlőség-jel baloldalán hajtották végre, a másik oldal változatlan maradt. Ezek a tanulók nem értették meg, hogy az egyenlőségjel két oldalán egyenlő mennyiségek állnak, az egyik oldalon végrehajtott művelet megbontja ezt az egyensúlyt, amennyiben az illető műveletet nem hajtjuk végre a másik oldalon is. A 9. és 10. megoldásnál a tanulók úgy tekintettek az egyenlőségjelre, mint egy olyan szimbólumra, amely mögött a feladat kérdésére adott válasz kell szerepeljen. Mindez összhangban van más kutatásokkal is, amint a következőkben kiderül.

Az aritmetikáról algebrára történő sikeres áttérés egyik legfontosabb eleme az egyenlőség-jel használatának helyes megértése. Az algebrai gondolkodásra való átérés egyik fő ismérve, hogy a tanuló tisztában van azzal, hogy az egyenlőségjel egy ekvivalenciát jelent és az egyenlőség bal- illetve jobb oldala felcserélhető, vagyis az egyenlet bármelyik oldalán szereplő műveletek "végeredménye" a másik oldalon szereplő kifejezés [42], [58]. Sok esetben a tanulók úgy értelmezik, hogy az egyenlőségjel jobb oldalán mindig a bal oldalon feltüntetett művelet eredménye kell álljon [84]. Léteznek olyan esetek is, amikor az egyenlőség-jelnek egyszerűen mondattani jelentést tulajdonítanak, vagyis egy olyan szimbólumnak tekintik, amely mögött a feladat kérdésére adott válasz kell szerepeljen [19]. Az egyenlőtlenségjel helytelen értelmezése nagy nehézséget okoz a tanulóknak az egyenletek felírása és megoldása során [45], [59]. Amint S. Norton és T. Cooper hangsúlyozták, a tanulóknak szükséges megérteniük, hogy az egyenlőségjel nem feltétlenül azt a helyet jelöli ahova a választ kell írni, illetve egy műveletsor végén nem mindig valamilyen számszerű eredménnyel való lezárásnak (ezt a nemzetközi irodalom "closure" néven említi) kell lennie, hanem ott szerepelhet egy, a műveletsorral egyenértékű kifejezés is [69].
Tapasztalatainkat összefoglalva, a 6. osztályos tanulók esetében az algebrai módszerek alkalmazása a szöveges feladatok megoldásában még nagy nehézségekbe ütközik. Behatároltuk azokat a feladat-típusokat, amelyeket a tanulók már viszonylag könnyen oldottak meg algebrai egyenletek felírásával (ezek többségében az $A \cdot x + B = C$ típusú "aritmetikai egyenletekre" visszavezethető szöveges feladatok). Egyébként még inkább az aritmetikai módszerek és a numerikus számítások (itt elsősorban a próbálgatásokra és a hamis feltételezések módszerére gondolok) dominálnak.
Jelen tanulmány elkészítése során elért kutatási eredményeimről további információk elérhetők a következő felületen:
https://drive.google.com/file/d/0BzpXdoJD5tkUTEhSZEg1dVZzMGlJYkpmVmd XOXNhdVowbkd3/view?usp=sharing

3. A szélsőérték-feladatok összevetése a tanár és a diák rendelkezésére álló ismeretek birtokában

3.1. Bevezetés

A szélsőérték-feladatok kettős látásmódban való megközelítése röviden úgy jellemezhető, hogy a differenciálszámítás ide vonatkozó alkalmazásának általános, sőt gyakran sablonossá vált módszerét („tanár-megoldás") esetenként a matematika különböző területeiről vett elemi ismeretek, összefüggések és egyenlőtlenségek felhasználásával pótoljuk („diák-megoldás"). A közoktatás tananyagában a szélsőérték-feladatok elhanyagolt terület, annak ellenére, hogy bármely matematikai témánál, fejezetnél behozhatók és rendkívül hasznosak a gondolkodás fejlesztése céljából. A megoldás során értékesíthető ötletek sokszínűsége változatossá teszi a szélsőérték-feladatok tanítását. Véleményem szerint ezeknek a feladatoknak az elemi megoldásából származó didaktikai előnyök indokolttá teszik, hogy a középiskolában az eddiginél nagyobb terjedelemben és mélyebben foglalkozzanak ilyen természetű feladatok megoldásával. Több szerző próbálkozott valamilyen formában összefoglalni a szélsőérték feladatok megoldásával kapcsolatos módszereket, stratégiákat [33], [9]. A teljesség igényével nagyon nehéz egy ilyen művet megalkotni, mivel nagyon sok feladat megoldása sajátságos jegyeket mutat, hasonlóan a geometriai szerkesztések tárgyköréhez. Ennek a fejezetnek a célja rávilágítani néhány olyan elméleti ismeretre és feladatra, amelyek a közoktatásban dolgozó kollégáknak ötleteket és segítséget jelentenek, nem pedig a szélsőérték-feladatok megoldásának egy összefoglalása, amely jóval meghaladná ennek a tanulmánynak a terjedelmét. A közoktatásban dolgozó kollégák jelzései alapján egyértelmű, hogy a diákok némiképpen idegenkednek a szélsőérték-feladatoktól. Ennek véleményem szerint egyik oka az ilyen típusú feladatokra szánt viszonylag szűk órakeret, a másik oka pedig az, hogy napjainkban a diákok az olyan feladatokat kedvelik, melyek megoldása algoritmizálható, a megoldási módszerek sémákra épülnek vagy típusokba rendezhetők és mindezek nem vonatkoznak a szélsőérték-feladatok elemi úton történő megközelítésére. A továbbiakban néhány olyan tételt közölnék (néhányat bizonyítással is ellátva), melyeket a diákoknak megtanítva bizonyos mértékben tipizálhatnánk és algoritmizálhatnánk a szélsőérték-feladatok egy részét, ezáltal lehetővé téve, hogy ezek a feladatok olyan diákok számára is hozzáférhetők legyenek, akik kevésbé képesek kreatívan megközelíteni a matematika feladatokat. Ha a szélsőérték-feladatok esetében "tanár-eszközökről" beszélünk, akkor majdnem mindenkinek a differenciálszámítás ide vonatkozó alkalmazásai jutnak eszébe. De a tanári többlettudás része lehet a nevezetes közepek közötti egyenlőtlenségek n darab számra vonatkozó általánosított alakja, a függvények tulajdonságainak ismerete (folytonosság, differenciálhatóság, stb.), az n dimenziós vektorok skaláris szorzata, stb. A tanári többlettudás segítséget jelent abban, hogy a tanár gyorsabban és hatékonyabban megoldjon feladatokat, valamint könnyen ellenőrizze a diák munkájának helyességét. Legalább olyan fontos viszont, hogy a tanári többlettudás lehetővé teszi új elemi módszerek kigondolását, illetve új feladatok megalkotását, amelyeket a tanórán kitűzhet. Ezáltal a tanári többlettudás hozzájárul a tanár probléma alkotó tevékenységének a kibontakoztatásához, az általa létrehozott feladatok a tanár önálló, kreatív munkájának eredménye. A tanár- és diák-módszerek kettősségét, illetve a tanári többlettudásból származó előnyöket próbáljuk összefoglalni a következőkben.

3.2. A nevezetes közepek közötti egyenlőtlenségek és azok alkalmazásai

3.2.1. A tanár rendelkezésére álló eszközök

Ebben a részben a tanári többlettudásnak kizárólag azt a részét próbáljuk kiemelni, amely valamilyen formában köthető a középiskolai matematika oktatáshoz, illetve amelynek bizonyos elemei "lefordíthatók" a diákok nyelvére, vagyis a diák- eszköztár részévé tehetők.

A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség

Az a_1 , a_2 , ... , a_n számok számtani (aritmetikai) közepe:

$$A = \frac{1}{n} \cdot (a_1 + a_2 + ... + a_n) .$$

Az a_1 , a_2 , ... , a_n nem negatív számok mértani (geometriai) közepe:

$$G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n} .$$

A szélsőérték-feladatok megoldásában nagy jelentősége van a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenségnek, amelyet a következőképpen fogalmazhatunk meg.

Bármely a_1 , a_2 , ... , a_n nem negatív valós számok mértani közepe mindig kisebb, illetve legfeljebb akkora, mint e számok számtani közepe:

$$G(a_1 , a_2 , ... , a_n) \leqq A(a_1 , a_2 , ... , a_n)$$

Itt az egyenlőség akkor és csakis akkor érvényes, ha az adott nem negatív számok mind egyenlők egymással.

A fenti egyenlőtlenségnek egy Cauchy-tól származó bizonyítása megtalálható a [33]-ban. A számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség néhány fontos következményét (bizonyítás nélkül) az alábbiakban mutatnám be.

1. Következmény: *Ha az* a_1 , a_2 , ... , a_n *nem negatív számok összege állandó:*

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = S$$

akkor a

$$\Pi = a_1^{\alpha_1} \cdot a_2^{\alpha_2} \cdot ... a_n^{\alpha_n}$$

szorzat, ahol $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ *tetszőlegesen adott pozitív racionális számok,*

$$\frac{a_1}{\alpha_1} = \frac{a_2}{\alpha_2} = ... = \frac{a_n}{\alpha_n}$$

esetén lesz a lehető legnagyobb.

A fenti következmény középiskolai oktatás szempontjából fontos esete (amint a későbbiekben látni fogjuk) az, amikor

$$\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 1 \; .$$

Ekkor a fenti következmény így hangzik:

Ha az $a_1, a_2, ..., a_n$ *nem negatív számok összege állandó* $a_1 + a_2 + ... + a_n = S$, *akkor a* $\Pi = a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n$ *szorzat* $a_1 = a_2 = ... = a_n$ *esetén lesz a lehető legnagyobb.*

Továbbá könnyen belátható, hogy $\Pi_{max} = \left(\frac{S}{n}\right)^n$.

Tekintsük most az *1. Következmény* inverzét:

2. Következmény: *Ha az* a_1 , a_2 , ... , a_n *nem negatív számok szorzata állandó:*

$$a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n = \Pi$$

akkor az

$$S = \alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + ... + \alpha_n \cdot a_n$$

összeg, ahol $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ *tetszőlegesen adott pozitív egész számok,*

$$\sqrt[\alpha_1]{a_1} = \sqrt[\alpha_2]{a_2} = ... = \sqrt[\alpha_n]{a_n}$$

esetén lesz a lehető legkisebb.

Megjegyzés: Megtörténhet, hogy a 2. Következmény feltételei teljesülnek, vagyis az a_1 , a_2 , ... , a_n nem negatív számok

$$\Pi = a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n$$

szorzata állandó, viszont egy olyan

$$S = \beta_1 \cdot a_1 + \beta_2 \cdot a_2 + ... + \beta_n \cdot a_n$$

összeget vizsgálunk, ahol $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ tetszőlegesen adott pozitív racionális számok. Ebben az esetben a β_i számok $\beta_i = \dfrac{p_i}{q_i}$ alakú törtek, ahol p_i és q_i pozitív egészek $(i = 1, 2, ..., n)$. Jelöljük N -nel a q_i nevezők legkisebb közös többszörösét és d_i -vel az $\dfrac{N}{q_i}$ hányadost, akkor az S a következőképpen alakul:

$$S = \frac{1}{N} \cdot (p_1 \cdot d_1 \cdot a_1 + p_2 \cdot d_2 \cdot a_2 + ... + p_n \cdot d_n \cdot a_n) \ .$$

Mivel $\dfrac{1}{N}$ mennyiség állandó, ezért az S értéke akkor minimális, ha a zárójelben szereplő szorzat a lehető legkisebb. Viszont a $p_i \cdot d_i$ (ahol $i = 1, 2, ..., n$) számok pozitív egészek, így alkalmazható a 2. Következmény.
A *2. Következménynek* is fontos speciális esete az, amikor:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 1 \ .$$

Ekkor a *2. Következmény* így hangzik:

Ha az $a_1, a_2, ..., a_n$ nem negatív számok szorzata állandó $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n = \Pi$, akkor az $S = a_1 + a_2 + ... + a_n$ összeg $a_1 = a_2 = ... = a_n$ esetén lesz a lehető legkisebb.

Könnyen belátható, hogy ez a legkisebb érték: $S_{min} = n \cdot \sqrt[n]{\Pi}$.

A fenti állítások és következmények bizonyítása a tanári eszköztár felhasználásával történik, mivel a tantervi követelmények szerint a szélsőérték feladatokat 10. osztályban tanítjuk, míg a matematikai indukció tanítására csak 12. osztályban kerül sor. Másrészt a tételek bizonyítása elég bonyolult ahhoz, hogy azokat a tanórán elvégezzük (akár a 12. osztályban). Ekkor felvetődik az a kérdés, hogy a tanár ezekből a tételekből mit képes átvinni a középiskolai oktatásba, vagyis ennek a "tanár-eszköztárnak" mely része kerül át a "diák-eszköztárba"? "A diák rendelkezésére álló eszközök" című alfejezetben azokat a tételeket fogjuk bemutatni, egyeseket bizonyítással is ellátva, amelyeket a tanórán ilyen formában tárgyalni lehet és ezeknek az ismerete lehetővé teszi változatosabb és bonyolultabb szélsőérték-feladatok megoldását.
A számtani és mértani közepekre vonatkozó tételnek és néhány következményének

bemutatása (megfelelő feladatokkal, példákkal alátámasztva) megtalálható Pólya Gy. " A matematikai gondolkodás művészete" c. könyvében [73].

A számtani és négyzetes közép közötti egyenlőtlenség

Vegyük először azt az ismeretanyagot, amellyel a tanár rendelkezik a számtani és négyzetes közepek közötti egyenlőtlenség területén.
Az említett egyenlőtlenség legkönnyebben a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenségből következik, amely legáltalánosabb formában a (valós vagy komplex számtest feletti) V euklideszi vektortér tetszőleges x és y elemének $\langle x, y\rangle$ skaláris szorzata abszolút értékének felső becslésére szolgál:

$$|\langle x, y\rangle| \leqq \|x\| \cdot \|y\|$$

A Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenség a skalárszorzattal ellátott V vektortér választásától függően többféle speciális alakot ölthet.
Egyik ilyen speciális alakja a valós szám n -esek terére, vagyis az R^n vektortérre vonatkozik. Ebben a vektortérben az $\mathbf{a}(a_1, a_2, ..., a_n)$ és $\mathbf{b}(b_1, b_2, ..., b_n)$ vektorok skaláris szorzatát a következőképpen definiáljuk:

$$\langle a, b\rangle = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + ... + a_n \cdot b_n \ .$$

A Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenségre vonatkozó állítás a következő alakot ölti:

Legyenek $a_1, a_2, ..., a_n$ és $b_1, b_2, ..., b_n$ valós számok. Ekkor

$$a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + ... + a_n \cdot b_n \leqq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2} \ ,$$

az egyenlőség pedig csak akkor áll fenn, ha $b_i = c \cdot a_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$ és c egy valós számot jelöl.

A Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz-egyenlőtlenség felhasználásával könnyen igazolhatjuk a számtani és négyzetes közepek közötti egyenlőtlenséget:

Az $a_1, a_2, ..., a_n$ nem negatív számok négyzetes közepe mindig nagyobb, illetve legalább akkora, mint e számok számtani közepe:

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \leqq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n}} \ .$$

Az egyenlőség akkor és csakis akkor teljesül, ha az adott nem negatív számok mind egyenlők egymással, vagyis $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

A fenti egyenlőtlenségek bizonyítása megtalálható Leindler László Analízis c. művében [54]. Mivel ez egyetemi jegyzetnek számít, a tanárok döntő többségének ismernie kell ezeket az egyenlőtlenségeket, a bizonyításokkal együtt.

3.2.2. A diák rendelkezésére álló eszközök

Ebben a részben főként azokkal a kérdésekkel foglalkozunk, hogy az előzőekben említett "tanár-eszköztár" hogyan alkalmazható a középiskolai matematika oktatás során. A tanári ismeretanyagnak azt a részét próbáljuk kiemelni, amely tanórákon tanítható, ezáltal bővíthetjük a "diák-eszköztárat" és kiszélesíthetjük a tanórán kitűzhető problémák és feladatok tárházát.

A számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség

A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség $n = 2$ speciális esete:

Két nemnegatív a és b valós szám esetén $\sqrt{a \cdot b} \leqq \dfrac{a+b}{2}$.

Számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség $n = 2$ speciális esetének egy fontos következménye:

3. Következmény: *Legyen két pozitív szám a és b , amelyekre érvényes, hogy $a + b$ állandó. Az $a \cdot b$ szorzat akkor maximális, ha $a = b$.*

Ennek többféle bizonyítását is bemutatjuk, bármelyik közülük tanórán is elvégezhető.

1. Bizonyítás Bevezetjük az $S = a + b$ jelölést és alkalmazzuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget:

$$\sqrt{a \cdot b} \leqq \frac{a+b}{2} = \frac{S}{2} .$$

Mivel az egyenlőtlenség mindkét oldala nemnegatív, ezért a négyzetre emelés ekvivalens átalakítást jelent, ebből következik, hogy:

$$a \cdot b \leqq \left(\frac{S}{2}\right)^2 .$$

Tehát az $a \cdot b$ szorzat maximális értéke $\left(\dfrac{S}{2}\right)^2$, ez pedig az $a = b$ esetben következik be.

2. Bizonyítás: Legyen $S = a + b$ és $P = a \cdot b$, ahol S egy adott számot jelöl (mivel $a + b$ állandó). Tekintsük az $x^2 - S \cdot x + P = 0$ egyenletet, melynek gyökei az a és b valós pozitív számok. Mivel a és b valós pozitív egészek, ezért szükséges, hogy az egyenlet diszkriminánsa nem negatív legyen, vagyis $S^2 - 4 \cdot P \geqq 0$, tehát $P \leqq \left(\frac{S}{2}\right)^2$, így P maximális értéke $P_{max} = \left(\frac{S}{2}\right)^2$. Ebből következik, hogy $\sqrt{a \cdot b} = \frac{a+b}{2}$, vagyis $a = b = \frac{S}{2}$.

3. Bizonyítás: Megrajzolunk egy $a + b = S$ átmérőjű félkört. Thálész tétele értelmében a körív bármely pontját összekötve az átmérő két végpontjával egy derékszögű háromszöget kapunk. A befogók átfogóra eső merőleges vetületeinek hossza legyen a tételben szereplő a, illetve b szám. A magasság-tétel értelmében a derékszögű háromszög magassága $\sqrt{a \cdot b}$, vagyis az a és b számok szorzatának négyzetgyöke. Az így megalkotott derékszögű háromszögek közül az egyenlő szárúnak a legnagyobb a magassága, ebben az esetben $a = b$.

Megfogalmazható a *3. Következmény* inverze is:

4. Következmény: *Legyen két pozitív szám a és b , amelyekre érvényes, hogy $a \cdot b$ állandó. Az $a + b$ összeg az $a = b$ esetben minimális.*

A bizonyítások nagyon hasonlatosak a *3. Következmény* bizonyításaival. A *3. Bizonyítás* átrendezése érdekesebb, ugyanis ez egy konstruktív jelleget nyer azáltal, ha a következőképpen vezetjük be: "Adott egy $\sqrt{a \cdot b}$ rögzített hosszúságú szakasz, amely egy derékszögű háromszög magassága. Szerkesszük meg az ilyen típusú derékszögű háromszögek közül azt, amelyiknek a legrövidebb az átfogója!"

A *3. Következményt* tanórán is lehet általánosítani a következőképpen.

5. Következmény: *Ha az $a_1, a_2, ..., a_n$ pozitív számokra érvényes, hogy $a_1 + a_2 + ... + a_n$ állandó, akkor az $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n$ szorzat az $a_1 = a_2 = ... = a_n$ esetben maximális.*

Bizonyítás: Bizonyítás során a tanórán nem hivatkozhatunk arra, hogy ez a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenségből adódik, mivel ezt az egyenlőtlenséget n szám esetére tanórán nem áll módunkban bizonyítani. Ezért az indirekt úton történő bizonyításhoz folyamodunk a következő módon. Feltételezzük például, hogy $a_1 \neq a_2$, ugyanakkor az $P = a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n$ szorzat maximális. De a számtani és mértani egyenlőtlenségből kiindulva könnyen belátható, hogy

$a_1 \cdot a_2 \leqq \dfrac{a_1+a_2}{2} \cdot \dfrac{a_1+a_2}{2}$. Így az a_1 és a_2 változókat $\dfrac{a_1+a_2}{2}$ -vel helyettesítve az összeg változatlan marad, viszont a $P' = \dfrac{a_1+a_2}{2} \cdot \dfrac{a_1+a_2}{2} \cdot \dots \cdot a_n$ szorzat értéke nagyobb lesz P értékénél. Ez ellentmond annak, hogy P az adott feltételeket tekintve maximális.

Az *5. Következmény* inverze a következő:

6. Következmény: *Ha az $a_1, a_2, \dots, a_n$ pozitív számokra érvényes, hogy az $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$ szorzat állandó, akkor az $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ összeg az $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ esetben minimális.*

A bizonyítás az előző tételhez hasonlóan, indirekt úton történik. Annyi különbséggel, hogy az $a_1 \neq a_2$ változókat külön-külön a $\sqrt{a_1 \cdot a_2}$ -vel helyettesítjük, azáltal az eredeti szorzat változatlan marad, miközben az összeg csökken. Ez ellentmond annak, hogy az eredeti összeg minimális.

Az *1. Következmény* egy, tanórán is könnyen tanítható, speciális esete a következő. Ezt egy olyan bizonyítással látjuk el, amely diák eszközökkel is hozzáférhető, ugyanis az *1. Következmény* bizonyítása szigorúan a tanár eszköztár részét képezi.

7. Következmény: *Ha az a és b pozitív számokra érvényes, hogy $a + b$ állandó, akkor az $a^m \cdot b^n$ szorzat az $\dfrac{a}{m} = \dfrac{b}{n}$ esetben maximális, ahol m és n pozitív egész számok.*

Bizonyítás: Az $a^m \cdot b^n = \dfrac{a^m}{m^m} \cdot \dfrac{b^n}{n^n} \cdot m^m \cdot n^n$ szorzat akkor maximális, ha $\dfrac{a^m}{m^m} \cdot \dfrac{b^n}{n^n}$ maximális, mivel $m^m \cdot n^n$ állandó. Mivel $m \cdot \dfrac{a}{m} + n \cdot \dfrac{b}{n} = a + b$ összeg állandó, ezért az $(m+n)$-tagú $\dfrac{a}{m} \cdot \dfrac{a}{m} \cdot \ldots \dfrac{a}{m} \cdot \dfrac{b}{n} \cdot \dfrac{b}{n} \cdot \ldots \cdot \dfrac{b}{n} = \dfrac{a^m}{m^m} \cdot \dfrac{b^n}{n^n}$ szorzat, az *5. Következmény* értelmében, $\dfrac{a}{m} = \dfrac{b}{n}$ esetben maximális.

A *7. Következmény* inverzének egy módszertanilag hasznosítható változata a következő:

8. Következmény: *Ha az a és b pozitív számokra érvényes, hogy az $a^m \cdot b^n$ szorzat állandó (ahol m és n pozitív egész számok), akkor az $a + b$ összeg az $\dfrac{a}{m} = \dfrac{b}{n}$ esetben minimális.*

A bizonyítás az előző tételhez hasonlóan történik, felhasználva a *6. Következményt.*

A feladatmegoldások során a fenti Következmények mellett a következő megjegyzéseket is figyelembe kell venni:

- Egy kifejezés maximuma (illetve minimuma) a változók ugyanolyan értéke mellett következik be, mint a kifejezés valamely pozitív kitevőjű hatványának maximuma (illetve minimuma);

- Egy kifejezés maximuma (illetve minimuma) a változók ugyanolyan értéke mellett következik be, mint a kifejezés reciprokának a minimuma (illetve maximuma);

- Egy kifejezés szélsőértékének helye és jellege nem változik azáltal, hogy a kifejezést egy pozitív konstanssal szorozzuk.

Ezeknek a Következményeknek a tanórán történő bemutatását (akár bizonyítással egybekötve) azért tartom fontosnak, mert ezáltal a diákoknak nagyobb rálátásuk lesz a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség következményeire, például tudatosan keresni kezdenek olyan adatokat, amelyeknek összege, illetve szorzata egy adott szám (vagy állandó mennyiség). Utána pedig alkalmazzák az adott szituációban a megfelelő Következményt. Tehát elmondhatjuk, hogy a fenti Következmények ismerete a feladatok megoldását leegyszerűsíti, mivel a diák feladata csupán arra korlátozódik, hogy felismerje a megoldás során előforduló összefüggések alapján a megfelelő Következményt és alkalmazza azt.
Tehát az *1-8. Következmények* alkalmazása lényegesen leegyszerűsíti, bizonyos mértékben algoritmizálja a feladatok megoldási módszereit. A módszer alkalmazásával szemben a legfőbb kifogás az lehet, hogy a diákok elkezdenek sémákban gondolkodni (állandó összeg vagy szorzat keresése), megkerülve a közepek közötti egyenlőtlenség jóval több leleményességet igénylő módszerét. Ezeknek a Következményeknek az ismerete viszont lehetővé teszi jóval nehezebb szélsőérték-számítási feladatok megoldását, ezáltal ki lehet bővíteni a tanórákon tárgyalt feladatok tárházát olyanokkal is, melyeket kizárólag a közepek közötti egyenlőtlenségre hagyatkozva túlságosan nehéznek találunk. A tanárok az 1-8. Következmények birtokában válogathatnak vagy önállóan alkothatnak feladatokat, tudatosan szem előtt tartva, hogy a megoldás során az előforduló összefüggések esetében teljesüljenek valamely Következménynek a feltételei.
Az *1-8. Következmények* ismeretének egy másik előnye, hogy bizonyos mértékben eloszlatja a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alkalmazása kapcsán

előforduló tévedéseket. A számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség téves használatára például a következő feladat segítségével mutatunk rá.

3.1. Feladat: *Határozzuk meg az* $a \cdot b$ *szorzat maximumát, ha* $a \geqq 0$, $b \geqq 0$ *és* $a + 2 \cdot b = 4$.

A feladat megoldására több középiskolában tanítható módszer létezik, ezek közül az egyik a közepek közötti egyenlőtlenség alkalmazása. Egy általam 10. és 11. osztályosok körében elvégzett felmérés során (lásd [25]) tapasztaltam a következő, gyakran előforduló hibát. A felmérésben részt vevő diákok közül többen is tévesen alkalmazták a közepek közötti egyenlőtlenséget. Felírták, hogy $\sqrt{a \cdot b} \leqq \frac{a+b}{2}$ és az $a \cdot b$ szorzat akkor maximális, ha a közepek egyenlők. Ez pedig akkor és csakis akkor következik be, ha $a = b$. Ezt behelyettesítve az $a+2 \cdot b = 4$ feltételbe következett, hogy $a = b = \frac{4}{3}$, innen pedig $\sqrt{a \cdot b} \leqq \frac{4}{3}$, tehát $a \cdot b$ maximális értéke $\frac{16}{9}$. Ebben az esetben a diákok nem érzékelik, hogy a közepek közötti egyenlőtlenség alkalmazhatóságának legfontosabb feltétele, hogy a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség valamelyik oldala (jelen esetben a jobb oldal) egy adott szám legyen. Ezért a helyes megoldáshoz a $\sqrt{a \cdot 2 \cdot b} \leqq \frac{a + 2 \cdot b}{2} = 2$ összefüggésből kell kiindulni. Ez könnyebben átlátható a *3. Következmény* alkalmazásával, ugyanis ebben az esetben a diák tudatosan két olyan mennyiséget keres (a és $2 \cdot b$) amelyeknek az összege állandó, a feladat kezdeti feltételéből kiindulva.
Megjegyezném, hogy a tankönyvekben (lásd [51]) és feladatgyűjteményekben (lásd [29]) szereplő szélsőérték-feladatok jelentős része olyan típusú, amely megerősíti a diákokban, hogy egy szélsőérték-feladat megoldása két vagy több mennyiség egyenlőségén alapul. Ilyen feladatok például:

• *Bontsuk fel a 30-at két szám összegére úgy, hogy a tagok négyzetösszege a lehető legkisebb legyen!* (Válasz: mindkét szám 15)

• *Egy 160 cm hosszú szalagot vágjunk ketté úgy, hogy a levágott szakaszokból készített négyzetek területének összege minimális legyen.* (Válasz: mindkét szakasz hossza 80 cm).

• *Legyenek* x , y , z *pozitív valós számok, melyekre* $\sqrt{x \cdot y}+\sqrt{x \cdot z}+\sqrt{y \cdot z} = 1$. *Legyen* $S = \frac{x^2}{x+y} + \frac{y^2}{y+z} + \frac{z^2}{z+x}$. *Mikor van az* S *–nek minimuma?* (Válasz: $x = y = z = \frac{1}{3}$).

Az ilyen típusú feladatoktól el lehet rugaszkodni az olyan feladatok irányába, ahol a szélsőérték keresése kicsit bonyolultabb számításokat, több rálátást, a fentiekben említett Következmények tudatos alkalmazását és a matematika különböző területeiről merített ismeretek szintézisét igényli. Ilyenek lehetnek a geometriai vonatkozású szélsőérték-feladatok is, ezekből mutatnánk be néhányat.

3.2. Feladat: *Válasszuk ki az adott m magassággal rendelkező ABC derékszögű háromszögek (ahol BC a háromszög átfogója) közül azt, amelyre érvényes, hogy a CD szögfelező hossza minimális (m az átfogóra húzott magasságot jelöli)!*

Megoldás: A C csúcsból induló CD szögfelező hossza:

$$CD = \frac{m}{\cos\frac{\gamma}{2} \cdot \sin\gamma}\ ,$$

ahol γ a háromszög C csúcsnál lévő szögét jelöli.
Mivel az átfogóra húzott magasság állandó, ezért a CD hossza minimális, ha $\cos\dfrac{\gamma}{2} \cdot \sin\gamma$ értéke maximális. Mivel egy pozitív mennyiségről van szó, ezért a maximuma ugyanabban az esetben következik be, mint a négyzetének a maximuma, vagyis elegendő ha $\cos^2\dfrac{\gamma}{2} \cdot \sin^2\gamma$ maximumát keressük. Ez a kifejezés, a megfelelő trigonometriai átalakításokat elvégezve, a $4 \cdot \sin^2\dfrac{\gamma}{2} \cdot \left(1 - \sin^2\dfrac{\gamma}{2}\right)^2$ alakot ölti. Mivel $\sin^2\dfrac{\gamma}{2} + \left(1 - \sin^2\dfrac{\gamma}{2}\right) = 1$ állandó, a *7. Következmény* értelmében ez a kifejezés akkor maximális, ha $\sin^2\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{1 - \sin^2\frac{\gamma}{2}}{2}$, amelyből $\sin\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ adódik.

3.3. Feladat: *Az egyenlő térfogatú kúpok közül határozzuk meg azt, amelynek a palástfelszíne minimális!*

Megoldás: A számítások könnyítése érdekében a kúp állandó térfogatát a következőképpen adjuk meg $V = \dfrac{\pi \cdot a^3}{3}$, ahol az a adott számot jelöl. A kúp alapkörének sugarát x -szel jelölve adódik, hogy a palástfelszín $P = \pi \cdot \sqrt{x^4 + \dfrac{a^6}{x^2}}$.
Könnyen észrevehető, hogy a *8. Következmény* feltételei teljesülnek, nevezetesen $x^4 \cdot \left(\dfrac{a^6}{x^2}\right)^2 = a^{12}$ állandó, tehát az $x^4 + \dfrac{a^6}{x^2}$ összeg minimális ha $x^4 = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a^6}{x^2}$, amelyből $P = \dfrac{\pi \cdot \sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}} \cdot a^2$ következik.
Ugyanez az eredmény a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség alkal-

mazásával is megkapható:

$$\frac{x^4+\dfrac{a^6}{x^2}}{3}=\frac{x^4+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a^6}{x^2}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a^6}{x^2}}{3}\geqq\sqrt[3]{x^4\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{a^6}{x^2}\right)^2}=\frac{a^4}{\sqrt[3]{4}}\,. \tag{28}$$

Az egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $x^4=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a^6}{x^2}$.

3.4. Feladat: *Legyen egy adott $BC=a$ átfogóval rendelkező derékszögű háromszög és CD a háromszög egyik hegyesszögének a szögfelezője. Melyik esetben lesz az $AB\cdot CD$ szorzat maximális?*

Megoldás: Egyszerű trigonometriai számításokkal adódnak az $AB=a\cdot\sin\gamma$ és $CD=\dfrac{a\cdot\cos\gamma}{\cos\frac{\gamma}{2}}$ összefüggések, ahol $\gamma=ACB\angle$. Tehát $AB\cdot CD=a^2\cdot\sqrt{2\cdot(1-\cos\gamma)\cdot\cos^2\gamma}$. Mivel $1-\cos\gamma+\cos\gamma=1$ állandó, a *7. Következmény* értelmében a négyzetgyök alatti kifejezés $1-\cos\gamma=\dfrac{\cos\gamma}{2}$ esetben maximális. Ebből $\cos\gamma=\dfrac{2}{3}$ következik.

A határozatlan paraméterek módszere

Léteznek olyan feladatok, ahol a nevezetes közepek közötti egyenlőtlenségek alkalmazhatósági feltételei nehezen átláthatók. Ilyenkor hamarabb célt érünk, ha bizonyos paraméterek bevezetésével próbáljuk elérni azt, hogy az *1-8. Következmények* közül valamelyiknek a feltételei teljesüljenek. Ezáltal az illető Következmény alkalmazhatóvá válik és könnyebben megtalálhatjuk a keresett szélsőértéket. Ennek szemléltetéséhez tekintsük a következő feladatokat.

3.5. Feladat: *Egy egyenlő szárú trapézban adott az egyik alap és a szár hossza. Határozzuk meg a másik alap hosszát úgy, hogy a trapéz területe maximális legyen!*

Megoldás: Az adott mennyiségeket b -vel (az adott alap hossza), illetve c -vel (a szár hossza) jelöljük. A feladat feltételeihez igazodva a két alap közül adottnak a nem nagyobbik alapot célszerű tekinteni, ugyanis így kaphatunk maximális területet. Változónak tekintjük és x -el jelöljük a szár nagyobbik alapra eső merőleges vetületét. A trapéz területe:

$$T=\frac{(b+2\cdot x+b)\cdot\sqrt{c^2-x^2}}{2}=(b+x)\cdot\sqrt{c^2-x^2}\,. \tag{29}$$

Belátható, hogy a terület akkor maximális, ha az $f(x)=(b+x)^2\cdot(c^2-x^2)$ negyedfokú függvény maximális értéket vesz fel. Ezt a függvényt egy négytényezős szorzattá alakítjuk $f(x) = (b+x)\cdot(b+x)\cdot(c+x)\cdot(c-x)$, majd keressük az *5. Következmény* alkalmazhatóságának feltételeit. Belátható, hogy a tagok összege egy x -től függő (nem állandó) mennyiség és nem létezik olyan pozitív x érték, amelyre $b+x = c+x = c-x$. Az alkalmazhatóság érdekében bevezetjük az m és n pozitív paramétereket majd tanulmányozzuk a $(b+x)\cdot(b+x)\cdot(m\cdot c+m\cdot x)\cdot(n\cdot c-n\cdot x)$ szorzatot (a paraméterekkel való beszorzás nem befolyásolja a szélsőérték helyét). Az első feltétel, hogy az

$$s = 2\cdot(b+x)+(m\cdot c+m\cdot x)+(n\cdot c-n\cdot x) \tag{30}$$

összeg állandó legyen (mivel ez az *5. Következmény* alkalmazhatóságának feltétele), tehát

$$2+m-n=0\,. \tag{31}$$

Az *5. Következmény* értelmében a szorzat akkor éri el a maximumát, ha

$$(b+x) = m\cdot(c+x) = n\cdot(c-x)\,. \tag{32}$$

Tehát az (32) egyenlőségekből $m = \dfrac{b+x}{c+x}$ és $n = \dfrac{b+x}{c-x}$ összefüggések adódnak, ezeket a (31) egyenlőségbe helyettesítve, majd a kapott másodfokú egyenletet megoldva megkapjuk az egyetlen geometriailag elfogadható értéket, vagyis $x = \dfrac{-b+\sqrt{b^2+8\cdot c^2}}{4}$, amelyből adódik a nagyobbik alap hossza $a = b + \dfrac{-b+\sqrt{b^2+8\cdot c^2}}{2}$.

Az előző feladat megoldási módszerét nevezhetjük a határozatlan paraméterek módszerének is, ezáltal utalva az m és n paraméterekre, amelyek értéke kezdetben ismeretlen. A fenti feladat szemléletes példája annak a ténynek, hogy a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség alkalmazása lehet körülményes és nehezen áttekinthető, az előbbiekben említett *Következmények* alkalmazása bizonyos esetekben hatékonyabbnak bizonyul.

A számtani és négyzetes közepek közötti egyenlőtlenség

Ennek a témának "diák-módszerrel" történő megközelítéséhez a tanár két módszerrel is kiindulhat. Az első módszer már a 10. osztályos tanulók számára hozzáférhető, ugyanis már a 9. osztályos matematika-oktatás során a tanulók megismerkednek az algebrai műveletekkel, illetve a nevezetes azonosságokkal. Az algebrai azonosságok alkalmazásával könnyen beláthatjuk a számtani és négyzetes közepek közötti egyenlőtlenséget $n=2$, illetve $n=3$ esetére.

Az a_1 és a_2 nem negatív számok négyzetes közepe mindig nagyobb, illetve legalább akkora, mint e számok számtani közepe:

$$\frac{a_1+a_2}{2} \leqq \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2}{2}}\ .$$

Az egyenlőség akkor és csakis akkor teljesül, ha $a_1 = a_2$.

Az a_1, a_2 és a_3 nem negatív számok négyzetes közepe mindig nagyobb, illetve legalább akkora, mint e számok számtani közepe:

$$\frac{a_1+a_2+a_3}{3} \leqq \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{3}}\ .$$

Az egyenlőség akkor és csakis akkor teljesül, ha $a_1 = a_2 = a_3$.

Megjegyzés: A fenti egyenlőtlenségek bizonyítását a tanár elvégezheti a 10. osztályos matematika oktatás során, ezáltal jelentősen kibővítve a tárgyalható szélsőérték-feladatok típusait.

A számtani és négyzetes közép közötti egyenlőtlenség $n = 2$ esetének egy fontos következménye:

9. Következmény: *Legyen két pozitív változó a és b , amelyekre érvényes, hogy $a + b$ állandó. Az $a^2 + b^2$ összeg akkor minimális, ha $a = b$.*

Illetve ennek az inverz állítása:

10. Következmény: *Legyen két pozitív változó a és b , amelyekre érvényes, hogy $a^2 + b^2$ állandó. Az $a + b$ összeg akkor maximális, ha $a = b$.*

A fenti következményeket már a 10. osztályban is be lehet mutatni, ugyanakkor ezzel óvatosan kell bánni, mivel ezáltal triviálissá válnak olyan szélsőérték-feladatok, amelyek más módszerekkel eljárva jóval nagyobb kreativitást igényelnek. Példának a következő feladatot említeném:

- *Egy derékszögű háromszög befogói a , b és átfogója c. Mutassuk meg, hogy $a + b \leqq c \cdot \sqrt{2}$!*

Megoldás: Mivel a Pithagorasz-tétel értelmében a befogók négyzetösszege $a^2 + b^2 = c^2$ állandó, ezért az $a + b$ összeg (a *10. Következmény* értelmében) az $a = b$

esetben maximális, tehát $a + b \leqq 2 \cdot \frac{c}{\sqrt{2}} = c \cdot \sqrt{2}$.

A *9.* és *10. Következmények* viszont hasznosnak bizonyulnak olyan szempontból, hogy a tanár jóval összetettebb feladatokat jelölhet ki abban az esetben, ha a tanulók ismerik az említett következményeket.

Például a következő koordináta-geometriai feladatot említeném.

3.6. Feladat: *Határozzuk meg a $K(3;5)$ középpontú $r = 2$ sugarú körnek azt a $P(x;y)$ pontját, amelyre a koordináták $x + y$ összege maximális!*

Megoldás A kör geometriai szemléltetéséből kiderül, hogy a kérdéses pontot abban a körnegyedben kell keresni, amelyre érvényes, hogy $x \geqq 3$ és $y \geqq 5$. A kör egyenlete $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 4$, tehát az $x - 3$ és $y - 5$ pozitív számok négyzetösszege állandó. A *10. Következmény* értelmében az $x - 3 + y - 5$ összeg akkor maximális, ha $x - 3 = y - 5$, vagyis $x = y - 2$. Ezt visszahelyettesítve a kör egyenletébe az $x = 3 - \sqrt{2}$ és $y = 5 - \sqrt{2}$, illetve $x = 3 + \sqrt{2}$ és $y = 5 + \sqrt{2}$ megoldásokat kapjuk. Az utóbbi megoldás elégíti ki az $x \geqq 3$ és $y \geqq 5$ feltételeket, ezért a keresett pont $P(3 + \sqrt{2}\ ,\ 5 + \sqrt{2})$, a koordináták összegének maximális értéke pedig $8 + 2 \cdot \sqrt{2}$.

A vektorok skaláris szorzatának tanítása során (11. osztály) a számtani és négyzetes közepek közötti egyenlőtlenséget a következőképpen bizonyíthatjuk diákeszközökkel. Tekintsünk két tetszés szerinti $\mathbf{a}(a_1, a_2)$ és $\mathbf{b}(b_1, b_2)$ vektort, azaz $\mathbf{a} = a_1 \cdot \mathbf{i} + a_2 \cdot \mathbf{j}$ és $\mathbf{b} = b_1 \cdot \mathbf{i} + b_2 \cdot \mathbf{j}$, ahol $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ a derékszögű koordináta-rendszer x-, illetve y- tengelye irányába mutató egységvektort jelenti.
Definíció szerint a két vektor skaláris szorzata:

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\alpha \tag{33}$$

ahol α jelenti a két vektor által bezárt szöget.
A diákok számára ugyancsak ismert valamely vektor abszolút értékének és a két vektor skaláris szorzatának a derékszögű koordináták segítségével való felírása:

$$|\mathbf{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2\ , \quad |\mathbf{b}|^2 = b_1^2 + b_2^2\ ,$$

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

Ezeket a (33) összefüggésbe helyettesítve a következő összefüggéshez jutunk:

$$a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \cdot \cos\alpha$$

Mivel $|\cos\alpha| \leqq 1$, következik, hogy:

$$a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 \leqq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \tag{34}$$

Innen $b_1 = b_2 = 1$ választással adódik a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség $n = 2$ esetére:

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \leqq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2}{2}} .$$

Megjegyzés: Tanári tudással szemlélve az (34) összefüggés nem más, mint a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz-egyenlőtlenség $n = 2$ esetére. Mivel a skaláris szorzat ilyen jellegű megközelítése 11. osztályos tananyagnak számít, ezért az első és második bizonyítási módszer között több mint egy év időeltolódás van. Ugyanakkor a második bizonyítási módszert $n \geqq 3$ esetében nem alkalmazhatjuk, mivel a középiskolás tanulók nem ismerik a térvektor fogalmát és a térvektorok skaláris szorzatának műveletét.

A bizonyítások során több helyen megfigyelhettük a számtani és négyzetes közepek, illetve a vektorok skaláris szorzatának az összefonódását. Ezek a fogalmak nemcsak a bizonyítások során, hanem a különböző feladatok megoldásában is nagy hasonlatosságot mutatnak.
Tekintsük a következő feladatgyűjteményben szereplő feladatot [29].

3.7. Feladat: *Legyenek a, b, c pozitív valós számok, melyekre $a + b + c = 1$. Adjuk meg az $S = \sqrt{2 \cdot a + 1} + \sqrt{2 \cdot b + 1} + \sqrt{2 \cdot c + 1}$ maximumát!*

1. Megoldás:(A feladatgyűjtemény szerzőinek a megoldása)
Az említett könyv szerzői a feladat megoldása során a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget alkalmazzák, amelyből adódik, hogy $\frac{(2 \cdot a + 1) + 1}{2} \geqq \sqrt{(2 \cdot a + 1) \cdot 1}$, vagyis $a + 1 \geqq \sqrt{2 \cdot a + 1}$. Hasonlóan járva el b és c esetében következik, hogy $\sqrt{2 \cdot a + 1} + \sqrt{2 \cdot b + 1} + \sqrt{2 \cdot c + 1} \leqq a + b + c + 3 = 4$. Az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $2 \cdot a + 1 = 1$, vagyis $a = 0$, illetve hasonlóan eljárva $b = 0$, és $c = 0$. Ez viszont ellentmond az $a + b + c = 1$ kezdeti feltételeknek, tehát felső korlát adható, de maximuma nincs.
Megjegyezhetjük, hogy a számtani és mértani közepekből kiindulva a szerzők adtak egy becslést a felső korlátra, de nem találták meg a szóban forgó kifejezés maximumát. Ennek ellenére, az S -nek van maximuma, viszont az tényleg nem határozható meg a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség alkalmazásával. Ilyen szempontból azt is mondhatjuk, hogy a feladatnak ez a megoldása

nem teljes.
A feladat megoldása teljessé tehető a számtani és négyzetes közepek közötti egyenlőtlenség, illetve a skaláris szorzat tulajdonságainak alkalmazásával.

2. Megoldás:
A számtani és négyzetes közepek közötti egyenlőtlenséget alkalmazva következik, hogy:

$$\sqrt{2\cdot a+1}+\sqrt{2\cdot b+1}+\sqrt{2\cdot c+1} \leqq 3\cdot\sqrt{\frac{(2\cdot a+1)+(2\cdot b+1)+(2\cdot c+1)}{3}} = \sqrt{15}\ .$$

Tehát az S összeg maximuma $\sqrt{15}$, amit az $a=b=c=\dfrac{1}{3}$ esetben vesz fel.

3. Megoldás:

Az S összeg tekinthető az $\mathbf{e}(\sqrt{2\cdot a+1};\sqrt{2\cdot b+1};\sqrt{2\cdot c+1})$ és $\mathbf{f}(1;1;1)$ vektorok skaláris szorzatának. A skaláris szorzat definícióját felhasználva kapjuk, hogy:

$$\mathbf{e}\cdot\mathbf{f}=\sqrt{2\cdot a+1}+\sqrt{2\cdot b+1}+\sqrt{2\cdot c+1}=|\mathbf{e}|\cdot|\mathbf{f}|\cdot\cos\alpha \leqq |\mathbf{e}|\cdot|\mathbf{f}|=\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{15}\ .$$

Tehát az S összeg maximuma $\sqrt{15}$, ezt pedig akkor veszi fel, ha az $\mathbf{e}$ és $\mathbf{f}$ vektorok párhuzamosak, vagyis $\sqrt{2\cdot a+1}=\sqrt{2\cdot b+1}=\sqrt{2\cdot c+1}$, amelyből következik.

Összefoglalva, a feladatgyűjtemény szerzőinek megoldása (*1. Megoldás*) nem teljes, ugyanis a 4 tényleg egy felső korlát, ugyanakkor létezik az összegnek egy (a második és harmadik módszerrel meghatározható) maximuma. A *2. Megoldás* a középiskolás diákok számára hozzáférhető módszereken alapszik, ezáltal tekinthető diákmegoldásnak. A *3. Megoldás* hátránya viszont, hogy a középiskolás diákok nem ismerik a térvektor fogalmát, ezért a *3. Megoldás* úgy válhat diákmegoldássá ha a tanár a következőképpen egyszerűsítve jelöli ki a feladatot.

3.8. Feladat: *Legyenek a és b pozitív valós számok, melyekre $a+b=1$. Adjuk meg az $S=\sqrt{2\cdot a+1}+\sqrt{2\cdot b+1}$ maximumát!*

3.3. Egy probléma - több megoldási módszer

Általában a címben szereplő mondattal jellemezhetjük legjobban a szélsőértékfeladatokat. Ezeknek a feladatoknak több megoldási módszere ismeretes, ezek közül egyesek a tanári eszköztár, mások pedig a diák eszköztár részét képezik. A tanár körültekintően kell megtervezze, az aktuális tanterveket is szem előtt tartva, hogy melyik módszert mikor vezeti be az oktatás során, vagyis az illető módszer

mikor válik "diák-módszerré". Mivel minden módszer más-más matematikai ismeretet igényel, ezért a diákok ismeretanyagának bővülése újabb és újabb módszerek bevezetését teszi indokolttá. Ilyen módon az újabb módszerek megismerése nemcsak a diák eszköztár bővülését, hanem az aktuális tananyag megszilárdítását is elősegíti azáltal, hogy a tanár az új ismereteket beépíti egy régebben már tárgyalt matematikai probléma új módszerekkel történő megoldásába.
Ennek szemléltetésére tekintsük az alábbi feladatot.

3.9. Feladat: *Legyen adott egy egyenlő szárú háromszög szárának a hossza, ezt b -vel jelöljük. Határozzuk meg a háromszög területének a maximumát!*

1. Megoldás: Jelöljük x -szel a háromszög alapjának a felét, így a háromszög területe:

$$T = \sqrt{x^2 \cdot (b^2 - x^2)}\ . \tag{35}$$

Az $f(y) = y \cdot (b^2 - y)$ másodfokú függvény (ahol $y = x^2$) maximumhelye $y = \frac{b^2}{2}$, tehát a terület az $x = b \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ esetén maximális, $T_{max} = \frac{b^2}{2}$.

2. Megoldás: Az $x^2 + (b^2 - x^2) = b^2$ állandó. Ezért, a *3. Következmény* értelmében, az $x^2 \cdot (b^2 - x^2)$ akkor veszi fel a maximumát, ha $x^2 = b^2 - x^2$, vagyis ha $x = b \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$.

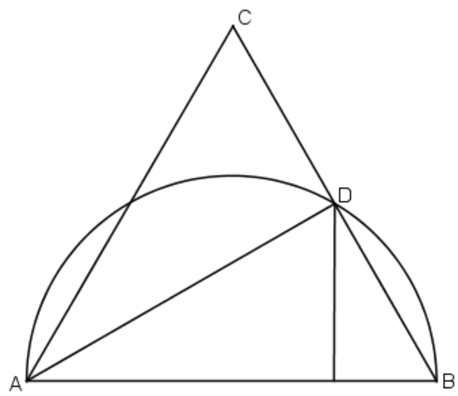
3. Megoldás: Egyszerű trigonometriai számításokkal következik, hogy a háromszög területe

$$T = b^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{b^2 \cdot \sin(2 \cdot \alpha)}{2}\ ,$$

ahol α-val a háromszög alapon fekvő szögét jelöltük. A terület akkor veszi fel a lehető legnagyobb értéket, amikor a $\sin(2 \cdot \alpha) = 1$. Következik, hogy $\alpha = \frac{\pi}{4}$ és $x = b \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. Megoldás A háromszög területe $T = \frac{b^2 \cdot \sin\gamma}{2}$, ahol γ -val a szárszöget jelöltük. A terület $\sin\gamma = 1$, vagyis $\gamma = \frac{\pi}{2}$ esetén éri el a maximumát, a megfelelő maximum-érték pedig $T_{max} = \frac{b^2}{2}$.

5. Megoldás: A feladatban szereplő egyenlő szárú háromszög egy olyan rombusz felének tekinthető, amelynek az oldala adott hosszúságú, ezt b -vel jelöljük. Tudjuk, hogy az adott oldalhosszúságú rombuszok közül a négyzetnek a legnagyobb a területe (mivel ebben az esetben a rombusz oldalára húzott magasság nem más mint a szomszédos oldal, tehát a lehető legnagyobb). Ezért a feladat adatainak megfelelő, legnagyobb területű háromszög egy olyan négyzet felét képezi, amelynek oldalhosszúsága b . Így a háromszög területének a maximuma $T_{max} = \dfrac{b^2}{2}$.



5. ábra.

6. Megoldás: Az ABC háromszög területe (ahol $AB = AC = b$) akkor maximális, amikor az ABD háromszög (az ABC háromszögnek a fele) területe maximális. Mivel az ABD háromszög derékszögű, ezért az AB szakasz, mint átmérő fölé kört rajzolhatunk és Thálész tétele értelmében az ABD háromszög D csúcsa rajta lesz a körön. Mivel az ABD háromszög átfogója az adott hosszúságú $AB = b$ szakasz, ezért a területe akkor maximális, ha az átfogóra húzott magasság a lehető legnagyobb, vagyis a kör sugarával egyenlő. Ebben az esetben az ABD háromszög egyenlő szárú (lásd 5. ábra). Tehát $BD = AD = b \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, ezért az ABD háromszög területe $\dfrac{b^2}{4}$ és az ABC háromszög területe $\dfrac{b^2}{2}$.

Figyelemmel kísérve az aktuális tanterveket a fentiekben bemutatott megoldási módszereket a középiskolai matematika oktatás különböző szakaszaiban lehet bevezetni, nevezetesen:

1. *Módszer:* Másodfokú függvények szélsőértéke (10. osztály);
2. *Módszer:* Számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség (10. osztály); itt be lehet mutatni a jelen tanulmányban említett *1-10. Következményeket*;

3. Módszer: Trigonometrikus függvények - összegzési képletek (11. osztály);

4. Módszer: Háromszög területének meghatározása szögfüggvények segítségével (10. osztály);

5. Módszer: Négyszögek területe (7. osztály)

6. Módszer: Thálész tétele (9. osztály)

Jelen feladat is ékes bizonyítéka annak, hogy a szélsőérték-feladatoknak helyük van a matematika oktatásának minden évfolyamán. Ugyanakkor majdnem minden fejezet esetében fel lehet dolgozni különböző szélsőérték-feladatokat, ezzel nemcsak a tanulókat serkentjük kreatív gondolkodásra, hanem az aktuális tananyagban lévő összefüggések megértését mélyítjük el.

3.4. A kétváltozós függvények szélsőértékének vizsgálata

A középiskolai oktatásban a tanár kijelölhet olyan feladatokat, amelyek esetében egy két- vagy többváltozós kifejezés szélsőértékét (maximumát vagy minimumát) keressük.
Ebben az esetben a tanár számára a legkézenfekvőbb eszköz a két-változós függvények szélsőértékének létezésével kapcsolatos tétel, amely megtalálható például Leindler L. könyvében (lásd [54]).

1. Tétel: *Tegyük fel, hogy az $f(x,y)$ függvény az (a,b) pontban minden sorrendben kétszer folytonosan differenciálható, $f'_x(a,b) = f'_y(a,b) = 0$, továbbá az $f'_x(x,y)$ és $f'_y(x,y)$ függvények az (a,b) pont valamely környezetében totálisan differenciálhatók.*
Ekkor, ha a

$$d^2 f = f''_{xx}(a,b)\, h^2 + 2\, f''_{xy}(a,b)\, h\, k + f''_{yy}(a,b)\, k^2$$

kvadratikus alak definit, úgy az $f(x,y)$ függvénynek az (a,b) pontban szigorú értelemben helyi szélső értéke van, mégpedig szigorú minimum, ha $d^2 f$ pozitív definit, és szigorú maximum, ha $d^2 f$ negatív definit; ha $d^2 f$ indefinit, akkor $f(x,y)$-nak az (a,b) pontban nincs szélső értéke; ha $d^2 f$ szemidefinit, akkor a szélső érték létezésének kérdése a második totális differenciál segítségével nem dönthető el.

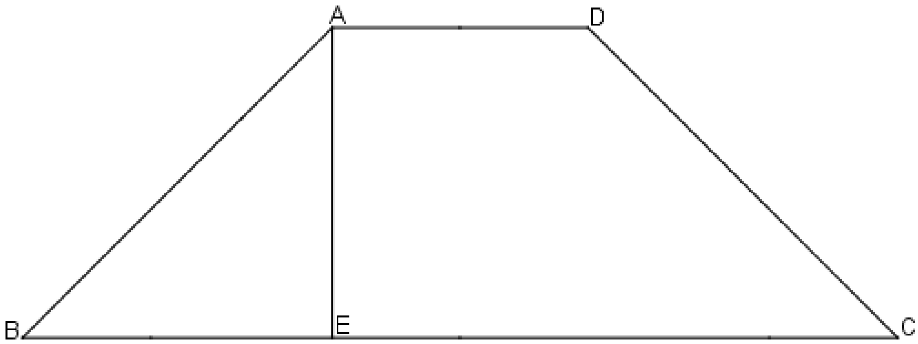
Ebből adódik egy könnyebben kezelhető kritérium is a szélső érték létezésének eldöntésére.

2. Tétel: *Az 1. Tétel feltételei mellett, ha $f''_{xx}(a,b)\, f''_{yy}(a,b) > \left(f''_{xy}(a,b)\right)^2$, akkor (a,b)-ben $f(x,y)$-nak helyi szélső értéke van, mégpedig minimuma, ha $f''_{xx}(a,b) >$*

0 , és maximuma, ha $f''_{xx}(a,b) < 0$, ha $f''_{xx}(a,b)\ f''_{yy}(a,b) < \left(f''_{xy}(a,b)\right)^2$, akkor nincs szélső értéke; ha $f''_{xx}(a,b)\ f''_{yy}(a,b) = \left(f''_{xy}(a,b)\right)^2$, akkor lehet, de nem biztos, hogy van szélső értéke $f(x,y)$-nak (a,b)-ben.

A fentiekben említett tételek segítik a tanárt abban, hogy viszonylag könnyen és gyorsan megoldja a kétváltozós szélsőérték-problémákat, a hátrány viszont, hogy tanórán nem tudja bemutatni azokat. Ezért minden feladat esetében ki kell dolgozza a megfelelő diák-megoldást is. Az összes változónak az együttes változását sok esetben nehéz átlátni. Ezért olyan módszerekhez kell folyamodni, amelyek segítségével a többváltozós kifejezések is kezelhetővé válnak a tanulók számára. Tekintsük, például az alábbi feladatot.

3.10. Feladat: *Egy egyenlő szárú trapéz esetében adott az egyik alap és a két szár hosszának összege. Határozzuk meg a trapéz területének a maximumát!*



6. ábra.

1. Megoldás:
Az előző paragrafusban bemutatott határozatlan együtthatók módszere ebben az esetben is alkalmazhatónak bizonyul, amint a későbbiekben látni fogjuk. Ennek érdekében tekintsünk két változót, a szár hosszát (amelyet $AB = x$ -szel jelölünk) és a szár nagyobbik alapra eső merőleges vetületét (amelyet $BE = z$ -vel jelölünk). Jelöljük továbbá s -sel az egyik alap és a két szár hosszának összegét. A feladat feltételeinek értelmében s -t egy adott számnak tekintjük.
A trapéz területe:

$$A = (s - 2 \cdot x + z) \cdot \sqrt{x^2 - z^2}\ . \tag{36}$$

Belátható, hogy a trapéz területe akkor maximális, ha az $(s-2\cdot x+z)^2\cdot(x-z)\cdot(x+z)$ szorzat maximális értéket vesz fel. Mivel egy négytagú szorzatról van szó (ahol az egyik tag kétszer szerepel), ezért az *5. Következmény* alkalmazása tűnik a leghatékonyabb megoldási módszernek. Akárcsak az előző feladat esetében, itt is a fő akadályt az képezi, hogy nem léteznek olyan x és z valós számok, melyekre az $s-2\cdot x+z$, $x-z$ és $x+z$ számok egyenlők lesznek. Tehát ebben az esetben is a határozatlan együtthatók módszerét alkalmazzuk, vagyis bevezetjük az m és n valós paramétereket úgy, hogy $s-2\cdot x+z=m\cdot(x-z)=n\cdot(x+z)$. Először meghatározzuk az m és n értékét úgy, hogy a következő összeg

(37) $2\cdot(s-2\cdot x+z)+(m\cdot x-m\cdot z)+(n\cdot x+n\cdot z)=s+(m+n-4)\cdot x+(2-m+n)\cdot z$

adott legyen (vagyis ne szerepeljenek benne az x és z változók), ezáltal teljesülnek az *5.Következmény* feltételei. Így a következő összefüggésekhez jutunk:

(38) $$m+n-4=0 \qquad 2-m+n=0$$

ahonnan következik, hogy $m=3$ és $n=1$.
Az *5. Következmény* értelmében az $(s-2\cdot x+z)^2\cdot(3\cdot x-3\cdot z)\cdot(x+z)$ szorzat az $s-2\cdot x+z=3\cdot x-3\cdot z=x+z$ esetben maximális. Innen $x=\dfrac{s}{3}$ és $z=\dfrac{s}{6}$ következik, a terület maximuma pedig $T_{max}=\dfrac{s^2\cdot\sqrt{3}}{12}$.

2. Megoldás:
Az ilyen típusú többváltozós kifejezéseket tartalmazó feladatokat úgy is megoldhatjuk, hogy az egyik változó kivételével minden változó értékét rögzítjük, majd megvizsgáljuk, hogy az adott változó milyen értéke mellett lesz a kifejezés értéke maximális (vagy minimális). Ennek a módszernek az elméleti háttere a következő: egy többváltozós függvény nem érheti el a maximumát (vagy minimumát) anélkül, hogy elérné a maximumát (vagy minimumát) külön-külön minden változóra.
Jelöljük s -el az adott összeget. Legyen az egyik változó a szár hossza (ezt x -szel jelöljük), a másik változó pedig a nagyobbik alap és a szár által bezárt szög, vagyis $\alpha=\angle ABE$ (lásd 6. ábra). Tehát a kisebbik alap hossza $s-2\cdot x$.
A trapéz területe

$$T=s\cdot x\cdot\sin\alpha-x^2\cdot\sin\alpha\cdot(2-\cos\alpha)\ .$$

Első lépésben az α változó értékét rögzítjük és a területet egy x szerinti egyváltozós másodfokú függvénynek tekintjük. Mivel $\alpha\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ (tehát $\sin\alpha>0$), ezért a terület

$$x=\frac{s}{2\cdot(2-\cos\alpha)}$$

esetén maximális, a terület maximális értéke pedig:

$$T_{max}(\alpha) = \frac{s^2}{4} \cdot \frac{\sin\alpha}{2-\cos\alpha} \ ,$$

ez a maximum, viszont még függ α -tól.
Mivel $\dfrac{s^2}{4}$ pozitív állandó, ezért azt kell megkeressük, hogy α mely értéke esetén lesz a lehető legnagyobb a $\dfrac{\sin\alpha}{2-\cos\alpha}$ kifejezés értéke. Végrehajtva a $\tan\dfrac{\alpha}{2} = u$ helyettesítést kapjuk, hogy:

$$\frac{\sin\alpha}{2-\cos\alpha} = \frac{2\cdot u}{1+3\cdot u^2} \ .$$

Mivel $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}]$, ezért u nem negatív. Tehát a $\dfrac{2\cdot u}{1+3\cdot u^2}$ az u változó ugyanolyan értékére lesz maximális, mint amelyikre a reciprok értéke minimális. De

$$\frac{1+3\cdot u^2}{2\cdot u} = \frac{1}{2\cdot u} + \frac{3\cdot u}{2}$$

vagyis olyan két pozitív szám összege, amelyeknek az $\dfrac{1}{2\cdot u}\cdot\dfrac{3\cdot u}{2} = \dfrac{3}{4}$ szorzata állandó. Tehát a *4. Következmény* értelmében a $\dfrac{1}{2\cdot u} + \dfrac{3\cdot u}{2}$ összeg akkor a lehető legkisebb, ha $\dfrac{1}{2\cdot u} = \dfrac{3\cdot u}{2}$, vagyis $u = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ és $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$. Tehát a trapéz területének legnagyobb értéke:

$$T_{max} = \frac{s^2\cdot\sqrt{3}}{12} \ .$$

3. Megoldás:
A probléma megoldása tanár-eszköztárral az *1-2. Tételek* alkalmazásával történik. A (36) összefüggésből indulunk ki, és a trapéz területére vonatkozóan bevezetjük a következő kétváltozós függvényt:

$$f(x,z) = (s - 2\cdot x + z)\cdot\sqrt{x^2 - z^2} \ . \tag{39}$$

Az $f'_x(x,z) = f'_y(x,z) = 0$ feltételekből adódik, hogy:

$$\begin{aligned} -2\cdot(x^2 - z^2) + x\cdot(s - 2\cdot x + z) &= 0 \\ (x^2 - z^2) - z\cdot(s - 2\cdot x + z) &= 0 \end{aligned} \tag{40}$$

A fenti egyenletrendszerből könnyen adódik, hogy $x = 2\cdot z$, valamint $x = \dfrac{s}{3}$ és $z = \dfrac{s}{6}$. A másodrendű deriváltak vizsgálatával a *2. Tétel* értelmében következik, hogy az $f(x,z)$-nek az $\left(\frac{s}{3},\frac{s}{6}\right)$ pontban maximuma van, a maximum értéke pedig $T_{max}=\frac{s^2\cdot\sqrt{3}}{12}$.

A fenti megoldásokat összevetve megállapítható, hogy a "diák-eszköztárral" végrehajtott *1. Megoldás* és *2. Megoldás* sokkal kreatívabb megközelítést igényel, ezáltal szebb a "tanár-megoldásnál". A tanár-eszköztárt igénylő *3. Megoldás* sablonosabb, ugyanakkor célratörőbb. Ez lehetővé teszi, hogy a tanár gyorsan és hatékonyan ellenőrizze a diák munkájának helyességét, viszont ki kell dolgoznia a megfelelő "diák-megoldást" is.

3.5. Az önálló tanári problémaalkotásról a szélsőérték-feladatok tanítása során

3.5.1. A racionális törtfüggvények szélsőértéke

A középiskolás tananyagban a függvényekkel kapcsolatos szélsőérték-feladatok jelentős része a másodfokú függvények szélsőértékeinek meghatározására korlátozódik olyanszerűen, hogy a függvény értékkészletéből következtetünk a szélsőérték jellegére, helyére és értékére (lásd [51]). Ez az ötlet, nevezetesen a szélsőérték meghatározása a függvény értékkészletének a tanulmányozásával, kiindulópont lehet a függvények szélsőérték vizsgálatának a kiterjesztésére a másodfokú függvényeknél komplikáltabb függvények esetére is.
A romániai matematikaoktatásban a diákok már 11. osztályban megismerkednek a derivált fogalmával, így viszonylag könnyen megoldanak szélsőérték-feladatokat komplikáltabb függvények esetében is. A derivált alkalmazása a függvények szélsőérték-vizsgálata során a magyarországi normál középiskolai oktatásban tipikusan tanár-módszernek minősül. Ugyanakkor a tanár megtalálhatja azt a megoldási módszert, amely már hozzáférhető egy diák számára is, így viszonylag komplikált függvényeket is lehet diák-módszerrel megközelíteni az oktatási folyamat során. Tekintsük például egy romániai tankönyv 11. osztályos feladatát (lásd [38]).

3.11. Feladat: *Határozzuk meg azt az $x\in\Re$ változót, melyre az $f(x)=\frac{2\cdot x^2+x+2}{x^2+1}$ kifejezés értéke a legnagyobb és számítsuk ki ezt a legnagyobb értéket!*

A fenti feladat az említett tankönyvben a differenciálszámítással kapcsolatos fejezet végén szerepel gyakorló feladatként. Deriválás segítségével könnyen adódik, hogy a függvénynek az $x=-1$ esetén minimuma, míg az $x=1$ esetén maximuma van, a megfelelő minimum, illetve maximum értékek $f(-1)=\frac{3}{2}$, illetve $f(1)=\frac{5}{2}$.

Felvetődik a kérdés, hogy milyen módszerrel oldható meg a feladat egy olyan diák esetében, aki nem ismeri a differenciálszámítás módszerét szélsőértékek meghatározására?
Keressünk egy "diák-módszert"! Próbáljuk megfordítani a feladat megoldását. Elsőre keressük meg a függvény szélsőértékeit, majd utána az illető szélsőértékekhez tartozó $x \in R$ értékeket.
Tehát elsőre tekintsük az

$$m = \frac{2 \cdot x^2 + x + 2}{x^2 + 1}$$

egyenletet, amelyből a megfelelő műveletek elvégzésével az

$$(m - 2) \cdot x^2 - x + m - 2 = 0 \tag{41}$$

egyenlethez jutunk. Ennek az egyenletnek a gyökei a függvény értelmezési tartományának elemei, tehát valós számok, ezért szükséges, hogy az (41) egyenlet diszkriminánsa pozitív legyen, vagyis $D = 1 - 4 \cdot (m - 2)^2 \geq 0$, innen pedig $m \in \left[\frac{3}{2} \; ; \; \frac{5}{2}\right]$ adódik. Tehát a függvény maximuma $\frac{5}{2}$, minimuma pedig $\frac{3}{2}$. A szélsőértékekhez tartozó $x \in R$ értékeket a $\frac{2 \cdot x^2 + x + 2}{x^2 + 1} = \frac{5}{2}$, illetve $\frac{2 \cdot x^2 + x + 2}{x^2 + 1} = \frac{3}{2}$ egyenletek megoldásából kapjuk.

Ilyen megközelítésben a feladat kijelölhető egy diák számára, ugyanakkor a tanár a deriválás segítségével gyorsan és hatékonyan ellenőrizheti a diák munkájának helyességét.
A tanári többlettudás viszont nemcsak ennek a konkrét feladatnak a megoldásában nyújt segítséget (szélsőérték-feladatok esetében például többlettudást jelent a differenciálszámítás ismerete), hanem a diák számára újnak tűnő feladatok megalkotásában is, vagyis ebben az esetben is érvényesülhet a tanár önálló problémaalkotó képessége.
Próbáljunk megalkotni egy ilyen feladatot. Az egyik nehézséget az jelenti, hogy "találomra" felírva egy ilyen függvényt bonyolult számításokat eredményez, nagyon sok esetben a szélsőérték helye és értéke pedig irracionális szám lesz (ezzel is bonyolítva a számításokat). Tehát elsősorban olyan feladatot kell alkotni, amely esetében a szélsőérték helye és értéke racionális szám.
Például kiválasztjuk a valós számok legbővebb részhalmazán értelmezett $f(x) = \frac{x^2 + p \cdot x - 3}{x^2 + q \cdot x + 5}$ függvényt és célunk meghatározni p és q értékét például úgy, hogy a függvénynek az $x = 2$ és $x = 3$ helyen szélsőértéke legyen. A szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a függvény elsőrendű deriváltja nulla legyen, ebből $p = -\frac{6}{5}$ és $q = -\frac{22}{5}$ következik. Tehát tanórán ki lehet tűzni a következő

feladatot:

3.12. Feladat: *Határozzuk meg a valós számok legbővebb részhalmazán értelmezett* $f(x) = \dfrac{5 \cdot x^2 - 6 \cdot x - 15}{5 \cdot x^2 - 22 \cdot x + 25}$ *függvény szélsőértékeit!*

Megjegyzés: Hasonló feladatokat alkothatunk ugyanabból a paraméteres alakból kiindulva, de másképpen választva a szélsőértékek helyét. Így például $x = 1$ és $x = 2$ esetén az $f : \Re \backslash \{\frac{5}{3}\ ;\ 3\} \to \Re \quad f(x) = \dfrac{3 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 9}{3 \cdot x^2 - 14 \cdot x + 15}$ függvény, míg $x = 1$ és $x = 0$ esetén az $f : \Re \backslash \{5 - 2 \cdot \sqrt{5}\ ;\ 5 + 2 \cdot \sqrt{5}\} \to \Re \quad f(x) = \dfrac{x^2 + 6 \cdot x - 3}{x^2 - 10 \cdot x + 5}$ függvény adódik. Tehát a függvénynek egy bizonyos paraméteres alakjából kiindulva és a szélsőérték helyét változtatva a tanár megalkothat egy feladat-családot, amelyből tanórán feladatokat tűzhet ki.
Észrevehetjük, hogy az utóbbi esetekben a függvénynek szakadási pontjai vannak, ennek a tanulmányozása újabb kihívást jelent, amint azt tárgyalni fogjuk egy másik egyszerűbb példán keresztül.
Ebből a célból vegyük a valós számok legbővebb részhalmazán értelmezett $f(x) = \dfrac{x^2 + x + b}{x^2 + a}$ alakban megadott függvényt, ahol a és b valós paraméterek. A szélsőérték létezésének szükséges feltételéből következik a $-x^2 + 2 \cdot a \cdot x + a - 2 \cdot x \cdot b = 0$ egyenlőség. Ha a szélsőértékek helyét az $x = 1$ és $x = -2$ pontokban választjuk, akkor az $f : \Re \to \Re \quad f(x) = \dfrac{2 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 5}{2 \cdot x^2 + 4}$ függvényhez, míg ha az $x = 1$ és $x = 2$ pontokban, akkor az $f : \Re \backslash \{-\sqrt{2}\ ;\ \sqrt{2}\} \to \Re \quad f(x) = \dfrac{2 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 7}{2 \cdot x^2 - 4}$ függvényhez jutunk. Ugyanabból a paraméteres alakból indultunk ki, viszont két nagyon különböző feladatot tűzhetünk ki, amint a következőkben kiderül.

3.13. Feladat: *Határozzuk meg a valós számok legbővebb részhalmazán értelmezett* $f(x) = \dfrac{2 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 5}{2 \cdot x^2 + 4}$ *függvény szélsőértékeit!*

Ez a függvény a valós számok halmazán folytonos, így az előbbiekben említett módszerrel a diák kiszámolhatja a függvény szélsőértékeit, nevezetesen a maximumértékre $\frac{3}{2}$, míg a minimumértékre $\frac{3}{4}$ adódik. Ezekből a szélsőértékekből meghatározhatja a szélsőértékek helyét is.
A másik feladat viszonylag bonyolultabb ennél.

3.14. Feladat: *Határozzuk meg a valós számok legbővebb részhalmazán értelmezett* $f(x)=\dfrac{2\cdot x^2+2\cdot x-7}{2\cdot x^2-4}$ *függvény szélsőértékeit!*

A tanári többlettudás lehetővé teszi a függvény teljes vizsgálatát. Ennek értelmében a függvénynek szakadása van az $x=-\sqrt{2}$ és $x=\sqrt{2}$ pontokban, az $x=1$ pontban az $f(1)=\dfrac{3}{2}$ minimumértéket, míg az $x=2$ pontban az $f(2)=\dfrac{5}{4}$ maximumértéket veszi fel. Egyik érdekesség, hogy a lokális maximumérték valójában kisebb, mint a lokális minimumérték. Kérdés, hogy a tanár hogyan képes összhangot teremteni a saját módszere és a diákmódszer között? Diákmódszerrel az $m\in\left[-\infty;\dfrac{5}{4}\right]\cup\left[\dfrac{3}{2};+\infty\right]$ feltétel adódik, ami sejteti, hogy a függvény értékkészlete a $\left[-\infty;\dfrac{5}{4}\right]\cup\left[\dfrac{3}{2};+\infty\right]$ tartomány. A továbbiakban a tanár elkészítheti a függvény vázlatos ábráját, ehhez hasonló ábrázolások a 9. osztályos tankönyv (lásd [50]) „Példák további függvényekre” témájánál találhatók. Az ábra helyességét ellenőrizni lehet különböző helyettesítési értékek kiszámításával, illetve sokat segíthet az $f(x)=1+\dfrac{2\cdot x-3}{2\cdot(x-\sqrt{2})\cdot(x+\sqrt{2})}$ átalakítás is. Ilyen módon bemutatva érthetővé válik úgy a maximum, mint a minimum léte is.

Egy feladat megalkotásánál ki lehet indulni olyan paraméteres alakból is, amelynek esetében a függvénynek eleve nem lehet szakadási pontja, tekintsük például a valós számok legbővebb részhalmazán értelmezett $f(x)=\dfrac{p\cdot x^2+x+q}{x^2+1}$ alakban adott függvények esetét. Ebben az esetben a szélsőérték létezésének szükséges feltétele a

$$2\cdot p\cdot x-2\cdot q\cdot x-x^2+1=0 \tag{42}$$

összefüggéshez vezet. Ebben az esetben egy újabb érdekesség adódik, nevezetesen ha mi választjuk meg mindkét szélsőérték helyét, például az $x=1$ és $x=2$ pontokban, akkor a

$$\begin{aligned} p-q&=0\\ 4\cdot p-4\cdot q&=3 \end{aligned} \tag{43}$$

egyenletrendszerhez jutunk, amelynek nincs megoldása. Tehát ebben az esetben csak a függvény egyik szélsőértékhelyét rögzítjük, például az $x=2$ pontban, így a paramétereket úgy kell megválasztanunk, hogy a $4\cdot p-4\cdot q=3$ feltétel teljesüljön. Például $p=1$ és $q=\dfrac{1}{4}$ értékekre az $f:\Re\to\Re\quad f(x)=\dfrac{4\cdot x^2+4\cdot x+1}{4\cdot x^2+4}$ függvény, míg a $p=\dfrac{1}{2}$ és $q=-\dfrac{1}{4}$ értékekre az $f:\Re\to\Re\quad f(x)=\dfrac{2\cdot x^2+4\cdot x-1}{4\cdot x^2+4}$

függvény adódik. Könnyen ellenőrizhető, hogy a függvények másik szélsőértékhelye is racionális szám, mégpedig mindkét függvény esetében az $x = -\dfrac{1}{2}$.

Más paraméteres alakban adott függvényekből kiindulva, például a valós számok legbővebb részhalmazán értelmezett $f(x) = \dfrac{p \cdot x^2 - 5}{q \cdot x^2 - 4 \cdot x + 3}$ függvényből, majd különböző szélsőérték helyeket választva újabb feladatcsaládokat alkotunk. Ilyen jellegű feladatok megalkotását az Olvasóra bízzuk!

A fenti gondolatmenet segítségével más típusú feladatcsaládokat is alkothatunk, például tekintsük a valós számok legbővebb részhalmazán értelmezett $f(x) = \dfrac{a \cdot x + b}{\sqrt{x+2}}$ alakú függvényt, és úgy határozzuk meg az a és b paraméterek értékét, hogy a függvény például az $x = 2$ pontban vegye fel a szélsőértékét. (A szélsőérték helyének célszerű egész számot választani úgy, hogy a gyök alatti kifejezés teljes négyzet legyen, ezzel leegyszerűsítjük a számításokat). Az $f'(2) = 0$ feltételből következik, hogy $b = 6 \cdot a$, amivel létrehoztunk egy feladatcsaládot. Így például az $a = 1$ és $b = 6$ választással kijelölhetjük a 3.15. Feladat a) alpontját. Az $f(x) = a \cdot x + b + c \cdot \sqrt{5 - x^2}$, illetve az $f(x) = \dfrac{a \cdot x + b}{\sqrt{x^2+3}}$ paraméteres alakokból kiindulva, mindkét esetben $x = 1$ szélsőértékhelyet választva kapjuk a valós számok legbővebb részhalmazán értelmezett $f(x) = a \cdot x + b + 2 \cdot a \cdot \sqrt{5 - x^2}$, illetve $f(x) = \dfrac{a \cdot x + 3 \cdot a}{\sqrt{x^2+3}}$ függvénycsaládokat, ezekből pedig kijelölhetjük például a 3.15. Feladat b) illetve c) alpontjait.

3.15. Feladat: *Határozzuk meg a következő függvények szélsőértékét:*

a) $f : [-2\,;\ +\infty] \to \Re \qquad f(x) = \dfrac{x+6}{\sqrt{x+2}}$

b) $f : [-\sqrt{5}\,;\ \sqrt{5}] \to \Re \qquad f(x) = x - 1 + 2 \cdot \sqrt{5 - x^2}$

c) $f : \Re \to \Re \qquad f(x) = \dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+3}}$

A tanár az előző fejezetben tárgyalt skaláris szorzat módszerét felhasználva is alkothat feladatokat függvények szélsőértékeinek vizsgálatára, ezzel is kiterjesztve a függvényekkel kapcsolatos szélsőérték-feladatokat. Tekintsük például az alábbi feladatot.

3.16. Feladat: *Határozzuk meg a következő függvények szélsőértékeit:*

a) $f : [3\ ,\ 7] \to R \quad f(x) = \sqrt{x-3} + \sqrt{7-x}$,

b) $f : [-3\ ,\ 2] \to R \quad f(x) = \sqrt{x+3} + 2 \cdot \sqrt{2-x}$.

Megoldás:
a) Az $f(x) = \sqrt{x-3}+\sqrt{7-x}$ tekinthető az $\mathbf{a}(\sqrt{x-3}; \sqrt{7-x})$ és $\mathbf{b}(1;1)$ vektorok skaláris szorzatának. A skaláris szorzat definícióját felhasználva kapjuk, hogy:

$$f(x) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\alpha = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos\alpha\ ,$$

ebből pedig kapjuk, hogy $f(x) \in [-2 \cdot \sqrt{2}\ ;\ 2 \cdot \sqrt{2}]$,$\forall x \in [3;7]$ mivel $\cos\alpha \in [-1;1]$, ezáltal a függvénynek alsó-, illetve felső korlátokat határoztunk meg. Az $\sqrt{x-3} + \sqrt{7-x} = 2 \cdot \sqrt{2}$ egyenlet megoldása megadja az $f(x)$ függvény $x = 5$ maximumhelyét, a megfelelő maximum-érték pedig $f(5) = 4$. Ugyanakkor belátható, hogy $f(x) \geqq 0$; $\forall x \in [3;7]$, tehát a $-2 \cdot \sqrt{2}$ alsó korlát nem tekinthető a függvény minimum-értékének. Ez egy szemléletes példája annak, hogy nem létezik olyan $x \in [3;7]$ érték, amelyre az $\mathbf{a}(\sqrt{x-3}; \sqrt{7-x})$ és $\mathbf{b}(1;1)$ vektorok ellentétes irányúak legyenek. Tehát a minimum helyének meghatározása céljából más függvénytani ismeretekre és műveletekre van szükség. Például, négyzetre emelés után kapjuk, hogy $f^2(x) = 4+2\cdot\sqrt{(x-3)\cdot(7-x)}$. Belátható, hogy a függvénynek a minimumát a négyzetgyök alatti függvénynek a minimuma adja meg, mivel a többi tényező állandó. A négyzetgyök alatt egy olyan másodfokú függvény található, amelynek két minimumhelye van, nevezetesen $x = 3$ és $x = 7$, a megfelelő minimumértékek pedig $f(3) = 2$ és $f(7) = 2$.

b)Hasonló módon járunk el, mint az a) alpont esetében, itt az $\mathbf{a}(\sqrt{x+3}; \sqrt{2-x})$ és $\mathbf{b}(1;2)$ vektorok skaláris szorzatát vesszük.

Megjegyzések:

• Az előző feladatban szereplő függvények maximum értékeit a számtani és négyzetes közepek közötti egyenlőtlenség alkalmazásával is meg lehet határozni a következőképpen:

a)

$$\sqrt{x-3} + \sqrt{7-x} \leq 2 \cdot \sqrt{\frac{x-3+7-x}{2}} = 2 \cdot \sqrt{2}$$

az egyenlőség az $x - 3 = 7 - x$, vagyis az $x = 5$ esetben áll fenn.

b)

$$\sqrt{x+3}+2\cdot\sqrt{2-x}=\sqrt{x+3}+4\cdot\frac{\sqrt{2-x}}{2}\leq 5$$

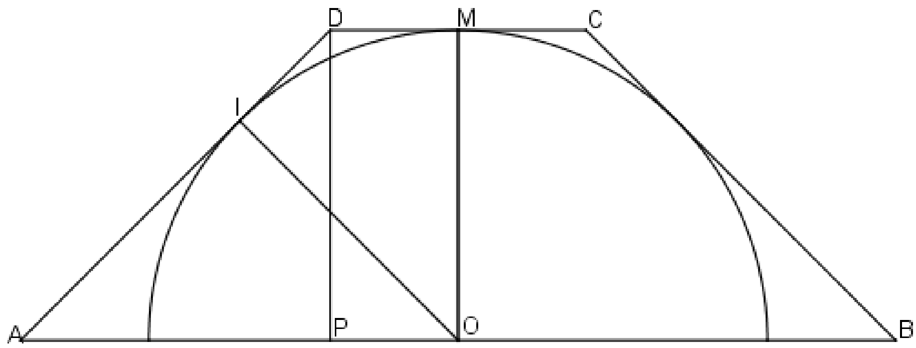
az egyenlőség a $\sqrt{x+3}=\dfrac{\sqrt{2-x}}{2}$ vagyis $x=-2$ esetben áll fenn.

• Az előző feladat skaláris szorzattal való megoldásának a geometriai interpretációja is fontos. Kiemelhető az a tény, hogy a függvények értelmezési tartományán belül nem találunk olyan x értékeket, hogy a megoldásban szereplő vektorok ellentétes irányúak legyenek.

A függvények szélsőértékének vizsgálatát a függvény értékkészletének segítségével a tanár kiterjesztheti a geometriai problémák irányába is. A tanár olyan geometriai feladatokat választ vagy önállóan alkot, ahol a változó(k) függvényében felírt mennyiségek egy olyan függvényhez vezetnek, amelyeknek a szélsőértékét a fentiekben leírt módszerekkel meg lehet határozni. Ilyen formában a függvények szélsőértékének a vizsgálata a középiskolai matematika oktatás különböző fejezeteiben újra és újra előkerül.

3.17. Feladat: *Írjunk egy adott R sugarú félkör köré egy $ABCD$ szimmetrikus trapézt úgy, hogy a trapéz nagyobbik alap körüli forgatása során keletkezett test térfogata minimális legyen!*

Megoldás: Belátható, hogy a keletkezett forgástest egy hengerből és két egybe-



7. ábra.

vágó forgáskúpból áll.

Bevezetjük a következő jelölést: $m(ADP\angle)=m(AOI\angle)=x$.

A trigonometriai azonosságok alkalmazásával adódik, hogy a keletkezett forgástest térfogata:

$$V=\frac{2\cdot\pi}{3}\cdot R^3\cdot\frac{3\cdot\tan^2\frac{x}{2}-4\cdot\tan\frac{x}{2}+3}{1-\tan^2\frac{x}{2}}\,.$$

Mivel $\frac{2\cdot\pi}{3}\cdot R^3$ adott, ezért a keletkezett forgástest térfogata akkor minimális, ha az $m=\frac{3\cdot y^2-4\cdot y+3}{1-y^2}$ értéke minimális, ahol $y=\tan\frac{x}{2}$. Ezzel a geometriai probléma egy $f\,:\,R\to R\;;\;f(y)=\frac{3\cdot y^2-4\cdot y+3}{1-y^2}$ alakú függvény szélsőértékeinek a vizsgálatára lett visszavezetve. Megfelelő átalakításokkal a következő egyenlet adódik:

$$(3+m)\cdot y^2-4\cdot y+3-m=0\,.$$

Mivel $y=\tan\frac{x}{2}\in R\;;\;\forall x\in\left[0\;;\;\frac{\pi}{2}\right]$ esetén, ezért az egyenlet diszkriminánsa nem negatív, tehát adódik, hogy $m^2-5\geqq 0$, vagyis $m\in]-\infty\;;\;-\sqrt{5}]\cup[\sqrt{5}\;;\;+\infty]$. Geometriailag csak a pozitív m értékek fogadhatók el, ezért csak $m\in[\sqrt{5}\;;\;+\infty]$ jöhet számításba, tehát az m minimumértéke $\sqrt{5}$.

Visszahelyettesítve az eredeti egyenletbe kapjuk, hogy $y=\tan\frac{x}{2}=\frac{2}{3+\sqrt{5}}$, a forgástest minimális térfogata pedig $V_{min}=\frac{2\cdot\pi}{3}\cdot R^3\cdot\sqrt{5}$.

A tanár a feladat megalkotásában szem előtt kell tartsa, hogy az adott problémaszituáció megoldási módszerei összhangban legyenek azokkal a módszerekkel, amelyeket gyakoroltatni kíván, illetve azokkal az ismeretekkel, amelyekkel a diák az adott pillanatban rendelkezik. Ilyen esetben az sem jelent gondot, hogy az adott feladat megfogalmazása kissé mesterkéltnek tűnik. Ilyen például az alábbi feladat.

3.18. Feladat: *Adott R sugarú körbe írjunk egy olyan egyenlő szárú háromszöget, amelyre érvényes, hogy az alap és a hozzá tartozó magasság összegének értéke maximális!*

Megoldás: A háromszög magasságát x -szel jelöljük, ezért a megfelelő geometriai számítások elvégzése után az alap és a hozzá tartozó magasság összege a következő egyváltozós függvény alakját ölti

$$f(x)=x+2\cdot\sqrt{x\cdot(2\cdot R-x)}\,,$$

amelynek a szélsőértékeit keressük. Vizsgáljuk a függvény értékkészletét, ennek érdekében vezessük be az

$$x+2\cdot\sqrt{x\cdot(2\cdot R-x)}=m$$

paraméteres egyenletet. Mivel $x \in R$, következik, hogy $m \in [(1-\sqrt{5})\cdot R\ ;\ (1+\sqrt{5})\cdot R]$ (viszont geometriailag csak az $m > 0$ van értelmezve). Tehát m legnagyobb értéke $(1+\sqrt{5})\cdot R$, ez pedig $x = \dfrac{R\cdot(5+\sqrt{5})}{5}$ esetén valósul meg.

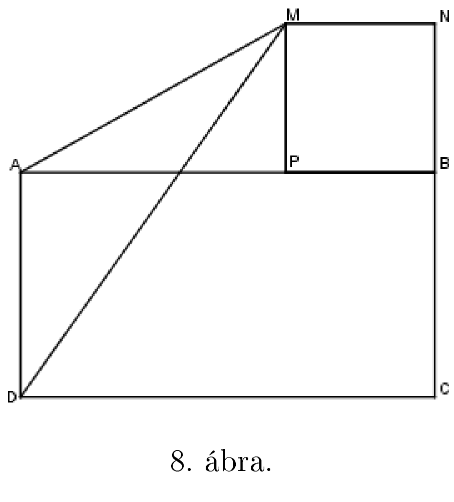
A fenti feladat azért tűnhet kissé mesterkéltnek, mivel gyakorlati, illetve geometriai szempontból "az alap és a hozzá tartozó magasság összegének" különösebb jelentősége nincs. Tehát ennek a szélsőértékeit keresni gyakorlati szempontból teljesen fölösleges. A diák számára viszont egy jó matematikai kihívásnak számít egy ilyen probléma megoldása. Ugyanakkor a diák részéről több ismeretet és rálátást feltételez, mintha csak egy olyan feladatot jelölünk ki, ahol például az

$$f : R \to R\ ;\ f(x) = x + 2\cdot\sqrt{x\cdot(2\cdot R - x)}$$

függvény szélsőértékeit kell kiszámítani.

A következő geometriai problémáról is elmondható, hogy nem annyira a geometriai tartalma a fontos, hanem a mögötte rejlő függvénytani érdekességek.

3.19. Feladat: *Egy téglalap oldalainak hossza $AB = a$ és $BC = b$ hosszúságú. Az AB oldalán felveszünk egy P pontot úgy, hogy $AP = x$, a téglalap egyik szárán pedig felvesszük a $PBNM$ négyzetet a 8. ábrán látható módon. Az $a = 8$ és $b = 1$ esetben határozzuk meg a* $\cot\alpha$ *szélsőértékét, ahol* $\alpha = \angle AMD$!



8. ábra.

Megoldás: Trigonometriai számításokkal belátható, hogy

$$\cot\alpha = \frac{2\cdot x^2 - (2\cdot a + b)\cdot x + a\cdot(a+b)}{b\cdot x}\ , \tag{44}$$

majd ebbe az $a = 8$ és $b = 1$ értékeket helyettesítve a feladatban szereplő speciális esetet kapjuk:

$$\cot\alpha = \frac{2\cdot x^2 - 17\cdot x + 72}{x}\ .$$

A következő paraméteres egyenletet felírva

$$\frac{2\cdot x^2 - 17\cdot x + 72}{x} = m$$

és figyelembe véve, hogy $x \in \Re$, következik, hogy $m \in]-\infty\ ;\ -41] \cup [7\ ;\ +\infty[$. Mivel α hegyesszög, ezért $\cot\alpha > 0$, tehát geometriailag csak az $m \in [7\ ;\ +\infty[$ eset fogadható el. Tehát $\cot\alpha$ -nak a minimum értéke $m = 7$, ezt pedig az $x = 6$ esetben veszi fel.

3.5.2. A trigonometrikus függvények szélsőértékének vizsgálata

A 11. osztályos tananyag keretében, ahol a tanulók megismerkednek a trigonometrikus függvényekkel, illetve az ezekkel kapcsolatos összegzési képletekkel, lehetőségek nyílnak a szélsőérték-feladatok egy újabb megközelítésére. Tekintsük kezdetben a következő problémát!

Legyen egy $f : R \to R$, $f(x) = a\cdot\sin x + b\cdot\cos x$ alakú függvény, ahol $a, b \in R\backslash\{0\}$. Keressük meg az $f(x)$ függvény szélsőértékeit!

Megoldás Az $f(x)$ függvényt a következő alakba írjuk:

$$f(x) = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\cos x\right)$$

amelyből a megfelelő trigonometrikus képletek alkalmazásával adódik, hogy $f(x) = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\cos(x-\alpha)$, ahol $\alpha = \arctan\frac{a}{b}$, tehát a függvény maximum-, illetve minimumértéke $f_{max} = \sqrt{a^2+b^2}$, illetve $f_{min} = -\sqrt{a^2+b^2}$.

Az ilyen típusú problémákat esetében is alkothatunk olyan geometriai szélsőértékfeladatokat, ahol nem pusztán egy trigonometrikus függvény szélsőértékeit kell kiszámítsuk, hanem ezek a számítások egy geometriai feladat megoldásának egyik szegmensét képezik.

3.20. Feladat: *Egy R sugarú, $\frac{\pi}{3}$ középponti szögű AOB körcikket megforgatunk az AO sugarának tartóegyenese körül. Legyen az AB körív egy pontja M . Milyen $x = AOM\angle$ szög esetén lesz az OM szakasznak, illetve az AM körívnek az*

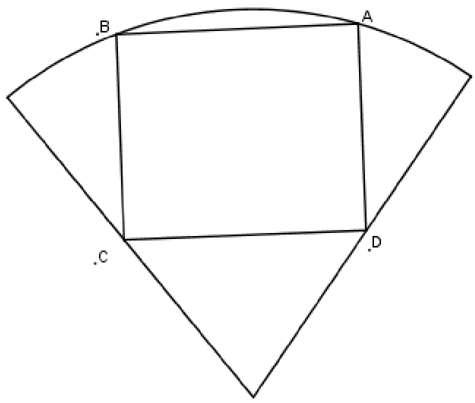
AO sugár tartóegyenese körüli forgatása által leírt felületek különbsége maximális?

Megoldás: A kúppalást, illetve a gömbsüveg felszíneinek különbsége az f : $\left[0; \frac{\pi}{2}\right] \to R$ egyváltozós függvény:

$$f(x) = A_1 - A_2 = \pi \cdot R^2 \cdot (\sin x + 2 \cdot \cos x - 2)$$

Könnyen belátható, hogy $\sin x + 2 \cdot \cos x = \sqrt{5} \cdot \cos(x - \alpha)$, ahol $\alpha = \arctan \frac{1}{2}$. Az $f(x)$ függvény akkor éri el a maximumát, ha $\cos(x - \alpha) = 1$, amelyből következik, hogy $x = \alpha = \arctan \frac{1}{2}$.

3.21. Feladat: *Határozzuk meg a $2 \cdot \alpha$ középponti szöghöz tartozó R sugarú körcikkbe írható téglalapok területének a maximumát!*



9. ábra.

Megoldás: Bevezetjük a következő jelöléseket: $COD\angle = 2 \cdot \alpha$ és $AOB\angle = 2 \cdot \beta$. Ebben az esetben a téglalap területe:

$$T = \frac{2 \cdot R^2}{\sin \alpha} \cdot \sin \beta \cdot \sin(\alpha - \beta) = \frac{R^2}{\sin \alpha} \cdot [\cos(2 \cdot \beta - \alpha) - \cos \alpha] \ .$$

Mivel R és α értéke állandó, ezért a terület abban az esetben maximális, ha $\cos(2 \cdot \beta - \alpha) = 1$, vagyis $\beta = \frac{\alpha}{2}$.

3.5.3. A feltételes szélsőérték-problémák a középiskolai matematika oktatásban

A feltételes szélsőérték-feladatok megoldására a tanár-eszköztár a Lagrange-féle határozatlan együtthatós (vagy multiplikátoros) módszert tartalmazza.
Tekintsük a következő kétváltozós függvénnyel adott egyenletet:

$$g(x,y)=0\ . \tag{45}$$

Azoknak a $P(x,y)$ pontoknak a halmazát, amelyek kielégítik a (45) alatti egyenletet, G -vel jelöljük.
Legyen $f(x,y)$ egy olyan függvény, amely G minden pontjában értelmezve van.
Akkor mondjuk, hogy az $f(x,y)$ függvénynek az $A(a_1,a_2)$ pontban feltételes (totális) maximuma (minimuma) van a (45) feltételek mellett, ha $f(x,y)\le f(a_1,a_2)$ $\big(f(x,y)\ge f(a_1,a_2)\big)$, valahányszor $(x,y)\in G$.
A feltételes szélsőérték-probléma megoldása a közönséges szélsőérték-problémára való visszavezetéssel történik. E célból keressünk egy olyan $\varphi(x,y)$ függvényt, amely a G halmazon megegyezik az $f(x,y)$ függvénnyel (azaz ha $(x,y)\in G$, akkor $\varphi(x,y)=f(x,y)$) és ennek a függvénynek keressük a közönséges szélsőértékeit. Természetesen egy olyan egyszerű $\varphi(x,y)$ függvényt kell keresni, amelynek közönséges szélsőértékeit meg tudjuk határozni. Egy ilyen $\varphi(x,y)$ függvényt a következő alakban keresünk:

$$\varphi(x,y)=f(x,y)+\lambda\cdot g(x,y)$$

ahol λ egy ismeretlen együttható.
Annak, hogy egy $A(a_1,a_2)\in G$ pontban a $\varphi(x,y)$ függvénynek szélsőértéke legyen az a szükséges feltétele, hogy $\varphi(x,y)$ elsőrendű parciális differenciálhányadosai A $-$ban mind nullák legyenek. Ez a feltétel tehát két egyenletet ad, ha ehhez hozzávesszük az (45) feltételi egyenletet, akkor három egyenletet kapunk az ismeretlen A pont koordinátáinak és az ismeretlen λ paraméternek a meghatározására, azaz

$$\begin{aligned} f'_x(A)+\lambda\cdot g'_x(A)&=0\ ,\\ f'_y(A)+\lambda\cdot g'_y(A)&=0\ ,\\ g(x,y)&=0\ . \end{aligned} \tag{46}$$

Ezekkel a λ paraméterekkel megalkotjuk a $\varphi(x,y)$ függvényt és valamilyen módon megvizsgáljuk, hogy a megfelelő A pontban a $\varphi(x,y)$ függvénynek van-e szélsőértéke. Ha $\varphi(x,y)$ $-$nak szélsőértéke van A $-$ban, akkor $f(x,y)$ $-$nak feltételes szélsőértéke van A $-$ban.
A feltételes szélsőérték feladatok érdekességét a középiskolai oktatásban főként az

képezi, hogy a Lagrange-féle megoldási módszer kimondottan tanári módszernek minősül, ezért minden feladat diák-eszköztárral nagyon kreatív megközelítést igényel, ezeket a feladatokat a megoldási módszerek sokszínűsége jellemzi. Egy ilyen feladatot az előzőekben már bemutattunk, a számtani és négyzetes közepek közötti egyenlőtlenség, illetve a skaláris szorzat párhuzamba állításának kapcsán (lásd *3.6 Feladat*).
Most tekintsük például a következő feladatot (lásd [33]):

3.22. Feladat: *Mikor lesz szélsőértéke az* $y - 2 \cdot x$ *kifejezésnek, és mekkora az, ha* x *és* y *között a következő összefüggés áll fenn:* $16 \cdot y^2 + 36 \cdot x^2 = 9$?

1. Megoldás A fentiekben említett Lagrange-féle multiplikátoros módszerrel a feladatot a következőképpen oldjuk meg. Legyenek

$$f(x,\ y) = y - 2 \cdot x\ , \quad g(x,\ y) = 16 \cdot y^2 + 36 \cdot x^2 - 9\ .$$

A továbbiakban a

$$\varphi(x,\ y) = y - 2 \cdot x + \lambda \cdot (16 \cdot y^2 + 36 \cdot x^2 - 9)$$

függvény közönséges szélsőértékeit keressük. A (46) alatti egyenletek ekkor a következők lesznek:

$$\begin{aligned} -2 + 72 \cdot \lambda \cdot a_1 &= 0\ , \\ 1 + 32 \cdot \lambda \cdot a_2 &= 0\ , \\ 16 \cdot a_1^2 + 36 \cdot a_2^2 - 9 &= 0\ . \end{aligned} \tag{47}$$

Könnyű belátni, hogy (47) megoldásai $a_1 = \dfrac{2}{5}$, $a_2 = -\dfrac{9}{20}$, $\lambda = \dfrac{5}{72}$, illetve $a_1 = -\dfrac{2}{5}$, $a_2 = \dfrac{9}{20}$, $\lambda = -\dfrac{5}{72}$. Továbbá az is könnyen bizonyítható, hogy a $\left(\dfrac{2}{5}\ ,\ -\dfrac{9}{20}\right)$ pontban minimum, míg a $\left(-\dfrac{2}{5}\ ,\ \dfrac{9}{20}\right)$ pontban maximum van.
Mivel a tanár ezzel a módszerrel tanórán nem oldhatja meg a feladatot, ezért ki kell dolgozza a megfelelő "diák-megoldásokat" is, amelyek kreatívabb megközelítést igényelnek és ilyen szempontból szebbek a "tanár-megoldásnál".

2. Megoldás: Az említett könyv szerzője a trigonometrikus függvények értékkészletének vizsgálatával oldja meg a feladatot a következőképpen. Észrevehető, hogy x és y az

$$\frac{x^2}{\frac{1}{4}} + \frac{y^2}{\frac{9}{16}} = 1$$

egyenletű ellipszis pontjainak koordinátáit jelentik. Az ellipszis egy lehetséges paraméteres előállítása a következő: $x = \dfrac{1}{2} \cdot \cos\alpha$; $y = \dfrac{3}{4} \cdot \sin\alpha$. A kifejezés, amelynek a szélsőértékét keressük, a következő alakban írható:

$$y - 2 \cdot x = \frac{3}{4} \cdot \sin\alpha - \cos\alpha = \frac{5}{4} \cdot \sin(\alpha + \beta) \ , \tag{48}$$

ahol $\cos\beta = \dfrac{3}{5}$ és $\sin\beta = -\dfrac{4}{5}$. A (48) összefüggés értelmében $y - 2 \cdot x$ maximum-értéke $\dfrac{5}{4}$, minimum-értéke pedig $-\dfrac{5}{4}$. Könnyen belátható, hogy az $y - 2 \cdot x$ maximuma az $x = -\dfrac{2}{5}$ és $y = \dfrac{9}{20}$ értékekre, míg a kifejezés minimuma az $x = \dfrac{2}{5}$ és $y = -\dfrac{9}{20}$ értékekre következik be.
Megemlíthetjük, hogy ez a megoldási módszer olyan fogalmakat tartalmaz, mint az ellipszis egyenlete vagy az ellipszis paraméteres alakban való felírása, melyeket a középiskolás (nem speciális matematika tagozatos) diákok nem ismernek.

3. Megoldás: Végezzük el az $y - 2 \cdot x$ kétváltozós kifejezés értékkészletének vizsgálatát! Ennek érdekében tekintsük az $y - 2 \cdot x = m$ egyenlőséget. A feladat feltételeit felhasználva $y - \dfrac{\sqrt{9 - 16 \cdot y^2}}{3} = m$ adódik. Mivel $y \in R$, ezért $m \in \left[-\dfrac{5}{4} \ ; \ \dfrac{5}{4} \right]$. Vagyis a kifejezés maximumértéke $\dfrac{5}{4}$, minimumértéke pedig $-\dfrac{5}{4}$. Ezeket visszahelyettesítve megkapjuk a megfelelő y értékeket. Majd az y értékeket a $16 \cdot y^2 + 36 \cdot x^2 = 9$ kezdeti feltételbe helyettesítve, megkapjuk a megfelelő x értékeket.

4. Megoldás: Az $y - 2 \cdot x$ kifejezést tekinthetjük az $\bar{a}(6 \cdot x \ ; \ 4 \cdot y)$ és $\bar{b}\left(-\dfrac{1}{3} \ ; \ \dfrac{1}{4} \right)$ vektorok skaláris szorzatának. A skaláris szorzat definícióját és a feladat feltételeit felhasználva kapjuk

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = y - 2 \cdot x = 3 \cdot \frac{5}{12} \cdot \cos\alpha \ ,$$

ahol α az $\bar{a}$ és $\bar{b}$ vektorok által bezárt szöget jelenti. Mivel $\cos\alpha \in [-1 \ ; \ 1]$, ezért $-\dfrac{5}{4} \leqq y - 2 \cdot x \leqq \dfrac{5}{4}$.

5. Megoldás: A skaláris szorzat és a számtani és négyzetes közepek közötti egyenlőtlenség analógiáit az előzőekben már érzékeltettük. Felvetődik az a kérdés, hogy ez a párhuzam jelen feladat esetében is fennáll, vagyis a skaláris szorzat segítségével megoldható feladat kezelhető a számtani és négyzetes közepek közötti

egyenlőtlenség alkalmazásával is?
Először próbáljuk megtalálni az $y-2\cdot x$ kifejezés legnagyobb értékét! Induljunk ki abból az előfeltételből, hogy $y-2\cdot x$ legnagyobb értékét az $y>0$ és $x<0$ esetben veszi fel. Ebben az esetben $-x>0$, tehát a következőképpen alkalmazhatjuk a számtani és négyzetes közepek közötti egyenlőtlenséget:

$$y-2\cdot x=9\cdot\frac{y}{9}+16\cdot\left(-\frac{x}{8}\right)\leqq 25\cdot\sqrt{\frac{9\cdot\left(\frac{y}{9}\right)^2+16\cdot\left(-\frac{x}{8}\right)^2}{25}}=5\cdot\sqrt{\frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{4}}=\frac{5}{4}\,,$$

ahol felhasználtuk a kezdeti feltétel $\frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{4}=\frac{1}{16}$ alakját. Tehát az $y-2\cdot x$ kifejezés legnagyobb értéke $\frac{5}{4}$. Az egyenlőség az $\frac{y}{9}=-\frac{x}{8}$ esetben áll fenn. Megoldva az

$$16\cdot y^2+36\cdot x^2=9$$
$$\frac{y}{9}=-\frac{x}{8}$$

egyenletrendszert, kapjuk, hogy $x=-\frac{2}{5}$ és $y=\frac{9}{20}$.
Az $y-2\cdot x$ legkisebb értékét $y<0$ és $x>0$ esetben veszi fel. A gondolatmenet nagyon hasonló az előzőhöz, annyi különbséggel, hogy az eredeti $y-2\cdot x$ kifejezés $-y+2\cdot x$ ellentettjének a legnagyobb értékét határozzuk meg.

A *3. Megoldás* egy lehetséges geometriai interpretációja a következő.

3.23. Feladat: *Határozzuk meg az $m\in R$ paraméter értékét úgy, hogy az $y-2\cdot x=m$ egyenletű egyenes a $16\cdot y^2+36\cdot x^2=9$ egyenletű ellipszis érintője legyen!*

Hasonló analóg probléma kör esetére a 11. osztályos koordináta-geometria tanítása során a következő formában fogalmazható meg:

3.24. Feladat: *Határozzuk meg az $y-2\cdot x$ kifejezés legnagyobb és legkisebb értékét, ha x és y között a következő összefüggés áll fenn: $x^2+y^2=9$!*

A többféle megoldási módszer közül most a koordináta-geometriával kapcsolatos megoldást emeljük ki.
Belátható, hogy $x^2+y^2=9$ egy origó középpontú, $r=3$ sugarú kör egyenlete. Tehát az általunk keresett x , illetve y érték a kör valamely P pontjának az abszcisszája, illetve ordinátája kell legyen. Ugyanakkor az is belátható, hogy az

$y-2\cdot x$ legnagyobb (illetve legkisebb) értékét úgy találhatjuk meg, ha meghatározzuk azokat az $m\in\Re$ értékeket, amelyek esetén az $y-2\cdot x=m$ egyenletű egyenes érinti a kört. Ez $m=3\cdot\sqrt{5}$ vagy $m=-3\cdot\sqrt{5}$ esetén következik be. Tehát az $y-2\cdot x$ kifejezés legnagyobb, illetve legkisebb értéke $3\cdot\sqrt{5}$, illetve $-3\cdot\sqrt{5}$, az ezeknek megfelelő x és y értékek pedig $x=-\dfrac{6}{\sqrt{5}}$ és $y=\dfrac{3}{\sqrt{5}}$, illetve $x=\dfrac{6}{\sqrt{5}}$ és $y=-\dfrac{3}{\sqrt{5}}$.
Próbáljuk továbbgondolni a problémát! Mi volt az alapötlet? Megkeresni az $m\in R$ paraméternek azokat az értékeit, amelyek esetén az $y=2\cdot x+m$ egyenletű egyenes érinti az $x^2+y^2=9$ egyenletű kört.
A továbbiakban tekintsük például az $(x-3)^2+(y-4)^2=1$ egyenletű kör egy tetszőleges $M(x\ ;\ y)$ pontját és az $A(1\ ;\ 2)$ külső pontot. Az AM egyenes egyenlete

$$y-2=m\cdot(x-1)$$

alakú, az egyenes meredeksége pedig

$$m=\frac{y-2}{x-1}\ .$$

Belátható, hogy az összes AM egyenesek közül a "felső" érintőnek a legnagyobb, míg az "alsó" érintőnek a legkisebb a meredeksége. Tehát az $A(1\ ;\ 2)$ pontból az adott körhöz húzható érintők egyenletét felírni nem jelent mást, mint meghatározni a legnagyobb, illetve legkisebb $m\in R$ értékeket, melyekre az

$$\begin{aligned}(x-3)^2+(y-4)^2&=1\\ y-2&=m\cdot(x-1)\end{aligned}$$

paraméteres egyenletrendszernek valós megoldása van. Tehát a fenti gondolatmenetet követve kijelölhetünk egy újabb feltételes szélsőérték-problémát:

3.25. Feladat: *Határozzuk meg az* $\dfrac{y-2}{x-1}$ *tört legnagyobb és legkisebb értékét, ha* x *és* y *között a következő összefüggés áll fenn:* $(x-3)^2+(y-4)^2=1$!

Ugyanezt az alapötletet használhatjuk fel trigonometriai szélsőérték problémák kijelölésére. Tekintsük például az előbbiekben említett kör

$$\begin{aligned}x&=3+\cos\alpha\\ y&=4+\sin\alpha\end{aligned}$$

paraméteres előállítását és az $A(1\ ;\ 2)$ külső pontot. Ha $M(3+\cos\alpha\ ;\ 4+\sin\alpha)$ a kör egy tetszőleges pontja, akkor az AM egyenes meredeksége $m=\dfrac{\sin\alpha+2}{\cos\alpha+2}$. Az előbbi gondolatmenetet végigkövetve megalkothatjuk a következő trigonometriai szélsőérték-problémát:

3.26. Feladat: *Határozzuk meg az* $f : R \to R$; $f(\alpha) = \dfrac{\sin\alpha + 2}{\cos\alpha + 2}$ *függvény szélsőértékeit!*

A fent említett ötleteket továbbgondolva a tanár újabb feladat-családokat alkothat, majd tanórán kitűzheti azokat, a feladatok megoldását pedig diák-módszerrel végzik el.

3.6. A felmérés lebonyolítása és eredményei

A felmérést a Boronkay György Műszaki Szakközépiskolában és a Gödöllői Református Líceumban végeztük el. Mindkét iskola a saját térségében elit iskolának számít, tehát a tehetséges tanulók egy jelentős része ezeket az iskolákat választja a középiskolai tanulmányok elvégzésére. A felmérésben részt vevő tanulók a tanáraik által lettek kiválasztva. A fő szempont a kiválasztás során az volt, hogy a felmérésben a matematika iránt leginkább érdeklődő tanulók vegyenek részt. Ugyanakkor azt is fontosnak tartottuk, hogy a felmérésben részt vevő tanulóknak semmiféle előképzettsége ne legyen a differenciálszámítás terén (vagyis kizártuk azokat a tanulókat, akik a matematikát magasabb óraszámban tanulják, illetve matematika szakkörökön már valamilyen képzettséget szereztek a differenciálszámításra vonatkozóan). Ezzel főként az volt a célunk, hogy felmérjük azokat az elemi módszereket, amelyeket a differenciálszámítást nem ismerő tanulók alkalmaznak a szélsőérték-feladatok megoldása során. A középiskolákban tanító matematika szakos tanárok körében általánosan elfogadott tény, hogy a szélsőérték-feladatok tekintetében a tanulók nagy nehézségekkel küzdenek. Ennek két fő oka van. Az egyik ok a tantervekben a szélsőérték-feladatokra szánt viszonylag szűk órakeret. A másik ok a szélsőérték-feladatok elemi úton való megközelítésének viszonylag komplex jellege: minden feladat más-más megközelítést igényel és gyakran a matematika különböző területeiről vett ismeretanyagoknak a megfelelő kombinálását igényli. Ezért az is a céljaink között szerepelt, hogy felmérjük, melyek azok a problémák, amelyek a legnagyobb nehézséget jelentik, illetve melyek a leggyakrabban előforduló típushibák a szélsőérték-feladatok megoldása során.

A felmérésben összesen 79 tanuló vett részt (közülük 46 tizedik osztályos és 33 tizenegyedik osztályos tanuló). Minden tanulónak 60 perc állt a rendelkezésére a feladatlap megoldásakor. A feladatlap 4 feladatot tartalmazott (lásd *Melléklet*, *9. Feladatlap* és *10. Feladatlap*), viszont minden tanulónak lehetősége volt arra, hogy egy feladatot kihagyjon (a feladatlapon viszont egyértelműen meg kellett jelölje, hogy melyik feladattal nem kíván foglalkozni). Ezzel az volt a célunk, hogy felmérjük melyik az a feladat-típus, amelyik nem annyira népszerű a tanulók körében,

illetve melyik feladatra nincsenek megoldási ötleteik vagy nem ismernek az illető feladathoz kapcsolódó módszereket. A feladatlapokat a jelen tanulmány szerzője állította össze. A felmérést a tanulók az illető iskolák tanárainak a felügyeletében írták meg, nagyon motiváltan és lelkiismeretesen dolgoztak. Külön kiemeltük, hogy akkor is próbálkozzanak a megoldással, ha a feladat viszonylag nehéznek tűnik, ugyanakkor írjanak le minden gondolatot vagy ötletet ami eszükbe jut, még akkor is, ha úgy érzik, hogy az nem vezet el a végső megoldáshoz. Ilyen módon a tanulók minden próbálkozásukat lejegyezték, még akkor is ha nem tudták a feladatot teljes egészében megoldani. A viszonylag bő időkeret lehetőséget adott a tanulóknak, hogy a feladatokat kellőképpen átgondolják és esetleg több megoldási módszerrel is próbálkozzanak egy-egy feladat esetében. Ez jó alapot biztosított az elemzés során a következtetések levonásához.
A feladatlapokon szereplő két-két feladat évfolyamonként különböző, ugyanakkor a feladatok megoldási modellje hasonló. A másik két-két feladat pedig a két különböző évfolyamon azonos. Ezzel azt akartuk felmérni, hogy nagyon hasonló probléma-szituációban a különböző évfolyamok tanulói hogyan reagálnak, milyen megoldási módszereket alkalmaznak, illetve melyek azok a jellegzetes típushibák, amelyek a különböző évfolyamokon előfordulnak?
A felmérés értékelését és a különböző megoldási módszereket, illetve az előforduló típushibákat a következőkben mutatjuk be. Mivel a feladatok a két évfolyamon nagy hasonlóságot mutattak, ezért a megoldásokat is párhuzamba állítva mutatjuk be.

1. Feladat (10. osztály): *Egy derékszögű háromszög átfogója* $c = 10$. *Határozzuk meg a befogók hosszát úgy, hogy a háromszög területe a lehető legnagyobb legyen!*

1. Feladat (11. osztály): *Egy egyenlő szárú háromszög szárainak hossza 4 cm. Határozzuk meg a háromszög alapját úgy, hogy a háromszög területe a lehető legnagyobb legyen!*

A 11. osztályosok esetében elvárásaink között szerepelt, hogy a jelen tanulmány "Egy probléma - több megoldási módszer" című részében általános formában (a szár hossza b) bemutatott hat módszer valamelyikét fogják alkalmazni.
A 10. osztályos feladat megoldási modellje nagyon hasonló, ezért az elvárásaink között szereplő módszerek is nagy hasonlatosságot mutattak, amint az alábbiakban bemutatjuk.

1. Megoldás: Jelöljük x -szel a háromszög egyik befogójának átfogóra eső vetületét (értelemszerűen a másik befogó átfogóra eső vetülete $10 - x$), m -mel pedig a háromszög magasságát. A magasság-tétel értelmében:

$$m = \sqrt{x \cdot (10 - x)} \, .$$

Tehát a háromszög területe:

$$T = \frac{c \cdot m}{2} = 5 \cdot \sqrt{x \cdot (10 - x)} \, . \tag{49}$$

A (49) összefüggés értelmében a terület akkor maximális, amikor az $f : [0 \, ; \, 10] \to R \, ; \, f(x) = x \cdot (10 - x)$ másodfokú függvény eléri a maximumát. Ennek a függvénynek a maximumhelye $x = 5$, tehát a terület $x = 5$ esetén maximális. Ezt a (49) összefüggésbe helyettesítve következik, hogy a terület maximális értéke $T_{max} = 25$. Az $x = 5$ -ből következik, hogy mindkét befogó átfogóra eső merőleges vetülete 5 cm , tehát a háromszög egyenlő szárú. Tehát a befogó (b -vel jelöljük) hossza már egyszerűen következik a Pithagorasz-tétel alkalmazásával: $b = \dfrac{10}{\sqrt{2}}$.

2. Megoldás: A háromszög területe akkor a lehető legnagyobb, ha $\sqrt{x \cdot (10 - x)}$ maximális. A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget felhasználva kapjuk, hogy:

$$\sqrt{x \cdot (10 - x)} \leqq \frac{x + (10 - x)}{2} = 5 \, ,$$

egyenlőség abban az esetben áll fenn, ha $x = 10 - x$, vagyis $x = 5$.
Ennek a megoldási módszernek egy másik változata a következő. Az $x + (10 - x)$ összeg állandó. Ezért az $x \cdot (10 - x)$ szorzat akkor veszi fel a maximumát, ha $x = 10 - x$, vagyis ha $x = 5$.

3. Megoldás: Legyen a derékszögű háromszög két befogója a és b . A háromszög területe $T = \dfrac{a \cdot b}{2}$, amely akkor a lehető legnagyobb, ha az $a \cdot b$ szorzat maximális. A mértani és négyzetes közép közötti egyenlőtlenséget felhasználva kapjuk, hogy:

$$\sqrt{a \cdot b} \leqq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} = \sqrt{\frac{c^2}{2}} = \sqrt{50} \, ,$$

az egyenlőség akkor áll fenn, ha a tényezők egyenlők, vagyis $a = b = 5 \cdot \sqrt{2}$, vagyis a háromszög egyenlő szárú. Következik, hogy az $a \cdot b$ szorzat maximális értéke 50 , amelyből $T_{max} = 25 \; cm^2$ következik.

4. Megoldás: Az háromszög területe $T = \dfrac{c \cdot m}{2}$ akkor maximális, amikor a háromszög átfogójára húzott magasság a lehető legnagyobb, mivel a háromszög átfogója állandó. A háromszög átfogója, mint átmérő, fölé kört rajzolhatunk és

Thálész tétele értelmében a háromszög derékszögű csúcsa rajta lesz a körön. A háromszög területe akkor maximális, ha az átfogóra húzott magasság a lehető legnagyobb, vagyis a kör sugarával egyenlő. Ebben az esetben az adott háromszög egyenlő szárú.

5. Megoldás: Jelöljük α -val a derékszögű háromszög egyik hegyesszögét, b -vel pedig a szög melletti befogót. Ekkor a háromszög magassága $m = b \cdot \sin\alpha = c \cdot \cos\alpha \sin\alpha = \frac{10 \cdot \sin(2 \cdot \alpha)}{2} = 5 \cdot \sin(2 \cdot \alpha)$, a háromszög területe pedig:

$$T = \frac{c \cdot m}{2} = 25 \cdot \sin(2 \cdot \alpha) .$$

A terület akkor veszi fel a lehető legnagyobb értéket, amikor a $\sin(2 \cdot \alpha) = 1$. Következik, hogy $\alpha = \frac{\pi}{4}$ és $b = c \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5 \cdot \sqrt{2}$.

A tanterveket tekintve az *5. Megoldás* már 11. osztályos ismereteket feltételez, mivel ezen az évfolyamon tanulják az összegzési képleteket, illetve az ezekből következő $\sin(2 \cdot \alpha)$ összefüggést. Ezt inkább a 11. osztályos feladat *3. Megoldás*-ának egy analogonjaként tárgyaltuk, valójában a fentiekben említett első négy megoldási módszer tárgyalható a 10. osztályos ismeretanyagra alapozva.

Az alábbi táblázat az eredmények évfolyamonkénti megoszlását szemlélteti.

3.1. Táblázat - Az 1. Feladatra adott válaszok megoszlása

	10. osztály	11. osztály
Jó válasz	34	10
Rossz válasz	9	20
Nem foglalkozott vele	3	3

Amint a fenti táblázat mutatja, a 10. osztályos tanulók jóval sikeresebbek voltak, mint 11. osztályos társaik. Azt is ki kell viszont emelnünk, hogy az ők feladatuk valamivel könnyebb volt, mint a 11. évfolyamosoké. Több 10. osztályos tanuló a közepek közötti egyenlőtlenség alkalmazásával adott helyes választ. 2 tanuló a mértani és négyzetes közepek közötti egyenlőtlenséget alkalmazta a következőképpen: $\sqrt{a \cdot b} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \Rightarrow a \cdot b \leqq 50$, az egyenlőség akkor és csakis akkor áll fenn, ha $a = b = \sqrt{50}$ (ahol a és b a háromszög két befogóját jelöli, a következő megoldások bemutatásánál is ezt az egységesített jelölést használjuk). 3 tanuló a következő módon oldotta meg a feladatot: $\sqrt{a \cdot b} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \Rightarrow a \cdot b \leqq 50$, innen kapták, hogy az $a \cdot b$ szorzat maximális értéke 50 , majd megoldották az

$$\begin{aligned} a \cdot b &= 50 \\ a^2 + b^2 &= 100 \end{aligned}$$

egyenletrendszert, amelynek egyetlen geometriailag elfogadható megoldásaként $a = b = \sqrt{50}$ -t kapták.
19 tanuló megadta a helyes választ minden különösebb indoklás nélkül, a legtöbben a következőképpen érveltek: a $T = \dfrac{a \cdot b}{2}$ terület akkor maximális (a lehető legnagyobb), amikor $a = b$, és Pithagorasz tételének értelmében $a^2 + b^2 = 100$, amelyből következik, hogy $a = b = \sqrt{50}$. Ketten közülük úgy érveltek, hogy az adott kerületű téglalapok közül a négyzetnek a legnagyobb a területe és a feladatban szereplő háromszög egy négyzetnek a fele kell legyen. Egy másik tanuló azt írta, hogy minden ilyen szélsőérték-feladatnál fennáll az $a = b$ összefüggés. Ezeknek a tanulóknak a munkáiból kiderül, hogy nagyon sok esetben a tanulók a szélsőérték-feladatok megoldását összekötik a feladatban szereplő mennyiségek közötti egyenlőséggel (jelen esetben a háromszög befogói egyenlők). Munkáikból viszont hiányzik az illető egyenlőség matematikai érvekkel történő alátámasztása, vagyis a szigorú matematikai értelemben végrehajtott bizonyítás.
4 tanuló a mértani és számtani közepek közötti egyenlőtlenséget alkalmazta, egyikük munkája a következő: " $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b} \Rightarrow \dfrac{a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2}{4} \geq a \cdot b \Rightarrow$ $25 \geq \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot b$ és az $a \cdot b$ szorzat maximális, ha $a = b = \sqrt{50}$ ".
Egy tanuló a magasságtételt alkalmazta a következő módon: $A = \dfrac{c \cdot \sqrt{p \cdot q}}{2} =$ $5 \cdot \sqrt{p \cdot q}$ (ahol p és q a befogók átfogóra eső vetületeit jelölik) és $\sqrt{p \cdot q} \leq \dfrac{p+q}{2} = 5$, az $\sqrt{p \cdot q} = 5$ egyenlőség akkor és csakis akkor áll fenn, ha $p = q = 5$. Ebből levonta a következtetést, hogy a háromszög egyenlő szárú és Pithagorasz tételét alkalmazva megkapta az $a = b = \sqrt{50}$ értékeket.
5 tanuló a helyes választ az előbbiekben bemutatott *4. Megoldás* alapján adta meg. Ők az átfogó fölé félkört rajzoltak, és rájöttek, hogy a terület akkor maximális, ha az átfogóra húzott magasság a félkör átfogóra merőleges sugarával esik egybe.
A továbbiakban néhány hibás megoldást részleteznénk.
3 tanuló a következő választ adta: $a^2 + b^2 = 100 \Rightarrow a + b = 10 \Rightarrow \sqrt{a \cdot b} \leq \dfrac{a+b}{2} = 5$ és az egyenlőség akkor és csakis akkor áll fenn, ha $a = b = 5$ (ebben az esetben a hiba forrása egy algebrai azonosság helytelen értelmezése).
2 tanuló felírta az $T = \dfrac{a \cdot m_a}{2}$ összefüggést (ahol m_a az a oldalra húzott magasságot jelenti), és arra a következtetésre jutottak, hogy a terület akkor a lehető

legnagyobb, amikor az a oldal a lehető legnagyobb (az m_a magasságot figyelmen kívül hagyták). Egyikük tovább fejtegette, hogy mivel az a oldal az egyik befogót jelenti, ezért annak az átfogónál kisebbnek kell lennie, így jutott az $a = 9,999...$ eredményre.
Egy tanuló először felírta az $a + b > 10$ háromszög-egyenlőtlenséget, majd bevezette az $a = x + 9$, $b = x$ jelöléseket, és végül az $a = 19$, $b = 10$ választ adta. Szertelen próbálkozásai során még azt sem vett észre, hogy az általa adott eredmény végül egy egyenlő szárú és nem egy derékszögű háromszögre vonatkoznak.
A 11. osztályos tanulók a 9. Feladatnak a $b = 4\ cm$ speciális esetét kellett megoldják. Az általunk elvárt megoldási módszereket az "Egy probléma - több megoldási módszer" fejezetben már szemléltettük.
A diákmunkákat a továbbiakban mutatjuk be.
5 tanuló sikeresen alkalmazta az általunk is bemutatott *4. Módszer*-t. Egy tanuló az *5. Módszer* alkalmazásával adta meg a helyes választ. Egy tanuló minden indoklás nélkül a következőket írta "a háromszög derékszögű kell legyen ha a területe maximális", majd helyes választ adott. Egy tanuló a következőképpen érvelt "az összes egyenlő szárú háromszögek közül a derékszögű háromszögnek a legnagyobb a területe" (nem indokolta meg, hogy mire alapozza állítását), majd ő is megadta a helyes választ. Egy tanuló gondolatmenete a következő: ha $m = \dfrac{a}{2}$ akkor $m = 2 \cdot \sqrt{2}\ cm$ és a háromszög területe $T = 8\ cm^2$; ha $h > \frac{a}{2}$, például $h = 2 \cdot \sqrt{3}$ és $\dfrac{a}{2} = 2$, akkor $T = 4 \cdot \sqrt{3} < 8\ cm^2$; ha $m < \frac{a}{2}$, például $m = \sqrt{5}$ és $\frac{a}{2} = 3$, akkor $T = 3 \cdot \sqrt{5}\ cm^2$ (itt egy számolási hiba is előfordul); és közvetlenül utána felírta a $\dfrac{\frac{a}{2} + m}{2} \geq \sqrt{\dfrac{a}{2} \cdot m}$ egyenlőtlenséget, majd azt írta, hogy az egyenlőség akkor és csakis akkor áll fenn, ha $m = \dfrac{a}{2}$, tehát $m = 2 \cdot \sqrt{2}$ és $a = 4 \cdot \sqrt{2}$, utána pedig a helyes válasz következett (a a háromszög alapját, m pedig a háromszög magasságát jelöli, a továbbiakban is ezt az egységesített jelölést alkalmazzuk). Egy komplikált, de ugyanakkor érdekes válasz a következő (néhány főbb mozzanatát mutatjuk be): "$T = \sqrt{16 \cdot m^2 - m^4}$; $-y^2 + 16 \cdot y - T^2 = 0$ (ahol $y = m^2$); $y_{1;2} = \dfrac{-16 \pm \sqrt{256 - 4 \cdot T^2}}{-2}$; értéke minimális, ha $256 - 4 \cdot T^2 = 0$ (a tanuló nem magyarázta meg, hogy miért kell megtalálnunk az y maximumát) $\Rightarrow T = 8\ cm^2$ és $y = 8$, tehát $h = 2 \cdot \sqrt{2}$ ". Meg kell jegyeznünk, hogy a helyes érvelés a következő: y egy valós szám, ezért $256 - 4 \cdot T^2 \geqq 0$, tehát $T \in [-8, 8]$ és a terület maximális értéke $T_{max} = 8\ cm^2$.
Több tanuló az $m^2 + \dfrac{a^2}{4} = 16$ Pithagorasz tétel felírása után feladta.
4 tanuló azt gondolta, hogy a terület akkor a lehető legnagyobb, ha a háromszög egyenlő oldalú és ebből a feltételből kiindulva végezték számításaikat.

3 tanuló abból indult ki, hogy a maximális terület egyedüli feltétele az, hogy a háromszög alapja a lehető legnagyobb legyen. De tudták, hogy az alap kisebb mint 8 cm (a háromszög-egyenlőtlenség értelmében), ezért ketten közülük az alap hosszát $a = 7,9\ cm$ -nek, egyikük pedig $a = 7,\dot{9}\ cm$ -nek vette. Ezek a tanulók nem vették figyelembe, hogy a háromszög területének kiszámításánál az alapra húzott magasságnak is jelentősége van. Ugyanakkor a továbbiakban nem számolták ki a háromszög területét (ezt a feladat nem is kérte), különben könnyen rájöttek volna, hogy nem a lehető legnagyobb területet kapták. 2 tanuló úgy gondolta, hogy a maximális terület feltétele, hogy az alap és a rá húzott magasság egyenlő legyen, egyikük a következőképpen számolt: $\frac{a^2}{4} + a^2 = 16 \Rightarrow a = \sqrt{\frac{64}{5}} \Rightarrow T_{max} = \frac{32}{5}$.

2. Feladat (10. osztály): *Határozzuk meg az* $f : [3\ ;\ 7] \to R\ ;\ f(x) = \sqrt{x-3} + \sqrt{7-x}$ *függvény legkisebb, illetve legnagyobb értékét!*

2. Feladat (11. osztály): *Határozzuk meg az* $f : [-3\ ;\ 2] \to R\ ;\ f(x) = \sqrt{x+3} + 2 \cdot \sqrt{2-x}$ *függvény legnagyobb értékét!*

A feladatokban szereplő függvények szélsőértékeinek kiszámítására többféle módszert is bemutattunk az előzőekben. Azok között viszont olyanok is szerepeltek (például a skaláris szorzat), amely nem található meg a 10. osztályos tanulók eszköztárában. Ezért a 10. osztályosok esetében előzetes elvárásaink között szerepelt, hogy legtöbben az $f^2(x) = 4 + 2 \cdot \sqrt{4-(x-5)^2}$ alakból fognak kiindulni, majd a négyzetgyök alatti $-(x-5)^2 + 4$ másodfokú kifejezés szélsőértékeit fogják vizsgálni az $x \in [3, 7]$ értékekre. A függvény maximumát a számtani és négyzetes közepek közötti egyenlőtlenség alkalmazásával is ki lehetett számolni, ezt a módszert részletesen tárgyaltuk a *3.16. Feladat* megoldásánál. A 11. osztályosok a 16. Feladat b) alpontjánál szereplő megoldások bármelyikét alkalmazhatták, mivel a megoldási módszereknél felhasznált ismeretanyaggal ők már rendelkeztek.
Amint az alábbi táblázat mutatja, a 10. osztályosok többsége a felmérés során ezt a feladatot hagyta ki.

3.2. Táblázat - A 2. Feladatra adott válaszok megoszlása

	10. osztály	11. osztály
Jó válasz	8	6
Rossz válasz	11	17
Nem foglalkozott vele	27	10

Mindössze egy tanuló alkalmazta az általunk is elvárt négyzetre emelésen alapuló módszert. Egy másik tanuló ugyanezzel a módszerrel próbálkozott, az ő megoldása a következőképpen alakult: $f^2(x) = 4 + 2 \cdot \sqrt{-x^2 + 10 \cdot x - 21}$; majd (átrendezve

és még egyszer négyzetre emelve) $f^4(x) - 8 \cdot f^2(x) + 16 = -4 \cdot x^2 + 40 \cdot x - 84$ következett, utána pedig nem tudta, hogy miként folytassa.
3 tanuló az $x \to \sqrt{x-3}$ és $x \to \sqrt{7-x}$ függvények grafikus ábrázolását végezte el ugyanabban a koordináta-rendszerben, majd a grafikonok alakjából kiindulva megadták a helyes választ (ők a függvény maximum, illetve minimum helyét határozták meg a grafikon segítségével, utána pedig a megfelelő behelyettesítéssel meghatározták a maximum, illetve minimum értékeket is).
4 tanuló megoldotta az $\sqrt{x-3} = \sqrt{7-x}$ egyenletet, majd arra a következtetésre jutottak, hogy a függvény maximum-helye $x = 5$ (az egyenlet megoldása) és az ennek megfelelő maximum érték $f(5) = 2 \cdot \sqrt{2}$, egyikük minden indoklást nélkülözve megadta a függvény minimum helyeit is. Ezeknek a tanulóknak az eljárása helyesnek tekinthető, ha abból a tényből indulunk ki, hogy a számtani és négyzetes közepek közötti egyenlőtlenséget alkalmazva az $\sqrt{x-3}$ és $\sqrt{7-x}$ számtani közepe akkor maximális ha $\sqrt{x-3} = \sqrt{7-x}$. Ilyenszerű indoklás viszont az említett tanulók munkáiban nincs jelen. Tehát azt feltételezhetjük, hogy az illető tanulók úgy gondolkodtak, hogy a szélsőérték létezése minden esetben maga után vonja a mennyiségek egyenlőségét, ami általánosan nem igaz. Egy másik tanuló a helyes választ a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség alkalmazásával adta meg a következőképpen: az $f(x)$ függvény akkor veszi fel a maximum értékét, ha fennáll az $\dfrac{\sqrt{x-3}+\sqrt{7-x}}{2} = \sqrt[4]{(x-3)\cdot(7-x)}$ egyenlőség, majd (megoldva az egyenletet) az $x = 5$ maximum helyet kapta, utána pedig helyesen kiszámolta az $f(5)$ maximum értéket. Ez a gondolatmenet olyan szempontból helytelen, hogy a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség általában a számtani közép minimum értékét szolgáltatja (nem pedig a maximum értéket), ennek pedig további feltétele az, hogy a mértani közép adott legyen, vagyis olyan állandó mennyiség, amely nem függ x -től (ebben az esetben ez nem történik meg). Ugyanez a tanuló a függvény minimum helyének a meghatározásához a következő gondolatmenetet követte: ahhoz, hogy a függvény minimum helyét megtaláljuk a következő egyenlőtlenséget alkalmazzuk $\dfrac{a^2+b^2}{4} \geqq \dfrac{a+b}{2}$ és elvégezve az $a = \sqrt{x-3}$ és $b = \sqrt{7-x}$ behelyettesítéseket az $1 \geq \dfrac{\sqrt{x-3}+\sqrt{7-x}}{2}$ egyenlőtlenséghez jutunk; a függvény azon az x helyen veszi fel a minimum értékét, amelyre fennáll az $1 = \dfrac{\sqrt{x-3}+\sqrt{7-x}}{2}$ egyenlőség, így határozta meg a függvény $x = 3$ és $x = 7$ minimum helyeit. Ebben a gondolatmenetben az egyik tévedés a számtani és négyzetes közepek közötti egyenlőtlenség helytelen felírása volt. A másik tévedés pedig, hogy az említett egyenlőtlenség a számtani közép maximumát (és nem minimumát) szolgáltatja. Helyesen felírva a közepek közötti egyenlőtlenség az $f(x)$ függvény maximumának kiszámítását tette volna lehetővé. Ennek a tanulónak a

munkájából kiderül, hogy ő rendelkezett bizonyos ismeretekkel a közepek közötti egyenlőtlenségekre vonatkozóan, tudta hogy ezek az egyenlőtlenségek alkalmasak szélsőérték-feladatok megoldására, de nem tudta helyesen alkalmazni azokat, illetve az egyenlőtlenségek felírásánál is hibát ejtett.
8 tanuló azt írta, hogy a függvény minimum, illetve maximum értéke 3, illetve 7 (ők az értelmezési tartomány legkisebb, illetve legnagyobb értékét tekintették a függvény minimum, illetve maximum értékének).
A 11. osztályosok feladata nehezebb volt, mivel a maximum meghatározásához a számtani és négyzetes közepek közötti egyenlőtlenségnek egy komplikáltabb, öt tényezős változatát kellett alkalmazni, ahol a $\sqrt{x+3}$ tényező egyszer, a $\sqrt{2-x}$ tényező pedig négyszer szerepel. Viszont ezek a tanulók már dolgozhattak a skaláris szorzat tulajdonságainak alkalmazásával is, amit a 10. osztályosok a saját feladatuk esetében még nem ismertek (bár a skaláris szorzat ilyenszerű alkalmazási lehetősége tanórán nem lett bemutatva). A feladatnak mindkét megoldása megtalálható jelen tanulmányban a 16. Feladat tárgyalása során.
A feladat nehézségi fokozatát tekintve arra számítottunk, hogy a 11. osztályosok többsége ezt a feladatot ki fogja hagyni, valójában viszont nem ez történt.
A helyes válaszokat a tanulók többsége elég érdekes módszerekkel adta meg.
6 tanuló azzal próbálkozott, hogy kiszámították a függvény helyettesítési értékeit az értelmezési tartomány egész értékei esetében. Négyen közülük jó választ adtak, miután próbálkozásaik során az $f(-2)$ helyettesítési érték bizonyult a legnagyobbnak. Az egyik tanuló munkája a következő (a többiek is hasonlóan dolgoztak): "a függvény értelmezési tartománya $x \in [-3,2]$,; $f(-3) = 2\cdot\sqrt{5}$; $f(-2) = 5$; $f(-1) = \sqrt{2}+2\cdot\sqrt{3}$; $f(0) = 2\cdot\sqrt{2}+\sqrt{3}$; $f(1) = 4$; $f(2) = \sqrt{5}$, tehát a függvény maximális értéke 5 és ezt az értéket az $x = -2$ helyen veszi fel". Annak ellenére, hogy jó választ adtak, a megoldásuk egyáltalán nem tekinthető matematikailag megalapozottnak, mivel a helyes eredményt annak köszönhették, hogy a megoldás egész szám volt. A másik 2 tanuló azért adott rossz választ, mert próbálkozásaik során nem minden egész számra számoltak helyettesítési értéket, többek között az $f(-2)$ érték is hiányzott a munkáikból.
2 tanuló ábrázolta az $x \to \sqrt{x+3}$ és $x \to 2\cdot\sqrt{2-x}$ közös koordináta-rendszerben és ezekből a grafikus képekből próbálták kikövetkeztetni a maximum helyét és értékét. Egyikük kiszámította az $f(-2) = 5$ értéket és minden indoklás nélkül leírta, hogy ez a függvény legnagyobb értéke az $x \in [-3,2]$ intervallumon. A másik kiszámította az $f(-2) = 5$, illetve $f(-3) = 2\cdot\sqrt{5}$ értékeket és megadta a helyes választ. ő azt is odaírta, hogy $f(-2)$ vagy $f(-3)$ kell legyen a függvény legnagyobb értéke, mivel $2\cdot\sqrt{2-x}$ -nek nagyobb a jelentősége, mint $\sqrt{x+3}$ -nak (ezt valószínűleg a négyzetgyök előtt szereplő 2-es szorzó miatt gondolta így).
2 tanuló azt írta, hogy a függvény maximum értéke $f(2) = \sqrt{5}$, mivel $x = 2$ a legnagyobb értéke a $[-3\ ;\ 2]$ intervallumnak. Egy tanuló úgy érvelt, hogy a

függvény maximum helye $x=-3$ vagy $x=2$ kell legyen, mivel ezek az értelmezési tartomány határai. Ezek után kiszámította az $f(-3)=2\cdot\sqrt{5}$ és $f(2)=\sqrt{5}$ értékeket, majd a függvény legnagyobb értékének az $f(-3)=2\cdot\sqrt{5}$ értéket adta meg.
Egy tanuló megoldotta a $\sqrt{x+3}=2\cdot\sqrt{2-x}$ egyenletet és így adta meg a függvény $x=1$ maximum helyét és $f(1)=4$ maximum értékét. Ez a tanuló úgy gondolta, hogy a szélsőérték akkor következik be, amikor az összeadásban szereplő két tényező egyenlő egymással. Amint a feladat megoldásában láthattuk, ebben az esetben a számtani és négyzetes közepek közötti egyenlőtlenséggel eljárva, ahhoz, hogy az $\sqrt{x+3}+2\cdot\sqrt{2-x}$ összeg a lehető legnagyobb legyen az $\sqrt{x+3}=\frac{\sqrt{2-x}}{2}$ egyenlőségnek kell teljesülnie. Ennek a tanulónak a munkája egy újabb példa arra, hogy a tanulók a szélsőérték-feladatok esetében egy kifejezés legnagyobb (vagy legkisebb) értékét a benne szereplő tényezők egyenlőségéhez kötik.
Egy tanuló munkájában a függvény szélsőértékének helye az $\sqrt{x+3}+2\cdot\sqrt{2-x}=0$ egyenlet gyöke, ugyanakkor hibákat vétett az egyenlet megoldása során is.
Két tanuló négyzetre emeléssel próbálkozott. Egyikük az $f^2(x)$ maximum értékét próbálta megtalálni (miután négyzetre emeléssel az $f^2(x)=11-3\cdot x+4\cdot\sqrt{(x+3)\cdot(2-x)}$ összefüggéshez jutott), a másik pedig két egymást követő négyzetre emelés után az $f^4(x)$ -et vizsgálta, de egyikük sem tudott mit kezdeni a viszonylag komplikált kifejezésekkel.
Egy tanuló rosszul alkalmazta a kéttagú kifejezések négyzetre emelését, ezért a következőket írta: $f^2(x)=x+3+4\cdot(2-x)\Rightarrow f^2(x)=-3\cdot x+11$. Utána meghatározta az $f^2(x)=-3\cdot x+11$ legnagyobb értékét az $x\in[-3,2]$ tartományon, nevezetesen az $f^2(-3)=20$ értéket és a függvény maximum értékére $f_{max}=f(-3)=\sqrt{20}$ -t írta.

3. Feladat(10. és 11. osztály): *Határozzuk meg az $a\cdot b$ szorzat maximumát, ha $a\geqq 0$, $b\geqq 0$ és $a+2\cdot b=4$!*

3.3. Táblázat - A 3. Feladatra adott válaszok megoszlása

	10. osztály	11. osztály
Jó válasz	20	12
Rossz válasz	20	17
Nem foglalkozott vele	6	4

5 tanuló a 10. osztályosok, illetve 2 tanuló a 11. osztályosok közül a az $a\cdot b$ szorzatba az $a=4-2\cdot b$ helyettesítést végezte, majd a kapott kifejezést az $f(b)=-2\cdot(b-1)^2+2$ hozzárendelési utasítással megadott másodfokú függvényként kezelte. Ez a másodfokú függvény $b=1$ esetben éri el a maximumát, a maximum

értéke pedig $f(1) = 2$. Ez egyike volt azoknak a válaszoknak, amelyek a tanári elvárásaink között szerepeltek.
Egy 11. osztályos tanuló helyesen írta fel a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget, vagyis:

$$\frac{a + 2 \cdot b}{2} \geq \sqrt{a \cdot 2 \cdot b} \quad \forall a, b > 0 \ ,$$

az egyenlőség pedig akkor és csakis akkor áll fenn, ha $a = 2 \cdot b$. Azután megoldotta az

$$\begin{aligned} a + 2 \cdot b &= 4 \\ a \cdot 2 \cdot b &= 4 \end{aligned}$$

egyenletrendszert és megadta a helyes választ. Megjegyezhetjük, hogy a megoldási módszer kissé komplikáltra sikeredett, ugyanis az $a = 2 \cdot b$ összefüggésből az a értékét az $a + 2 \cdot b = 4$ -be helyettesítve megkaphatjuk a helyes választ.
Egy másik 11. osztályos tanuló az $a \cdot b = x$; $a + 2 \cdot b = 4$ összefüggéseket írta fel, majd az a változót kiküszöbölve a $-2 \cdot b^2 + 4 \cdot b - x = 0$ (b -ben másodfokú) egyenletet kapta, amelyben az x változó paraméterként szerepel. Majd azt írta, hogy az x értéke akkor maximális, ha az egyenlet diszkriminánsa 0 , tehát $16 - 8 \cdot x = 0$ és ebből $x = 2$ következik. Megjegyezhetjük, hogy a helyes érvelés a következő: mivel b egy pozitív valós számot jelöl, ezért az egyenlet diszkriminánsa nem negatív, tehát $16 - 8 \cdot x \geqq 0$, ebből pedig $x \leqq 2$, innen pedig nyilvánvaló, hogy az x (ami az $a \cdot b$ szorzatot jelenti) legnagyobb értéke 2 .
7 tizedik osztályos és 5 tizenegyedik osztályos tanuló különböző értékeket adtak az a és b változóknak (olyan értékeket, amelyek kielégítik az $a + 2 \cdot b = 4$ feltételt), és megfigyelték az $a \cdot b$ szorzat alakulását, így találták meg a szorzat legnagyobb értékét (ők mindannyian helyes választ adtak). Tekintsük meg, az egyik 10. osztályos tanuló munkáját: "$a = 1,\ b = 1,5 \Rightarrow a \cdot b = 1,5$; $a = 2,\ b = 1 \Rightarrow a \cdot b = 2$; $a = 3,\ b = 0,5 \Rightarrow a \cdot b = 1,5$; $a = 3,2,\ b = 0,4 \Rightarrow a \cdot b = 1,28$; $a = 3,8,\ b = 0,1 \Rightarrow a \cdot b = 0,38$; tehát láthatjuk, hogy a szorzat maximális, ha $a = 2$ and $b = 1$, és a szorzat maximális értéke $a \cdot b = 2$ ". Megjegyzésünk, hogy az ilyenszerű próbálgatás módszere azért vezetett sok esetben helyes eredményre, mert a feladatban viszonylag egyszerű számadatok szerepeltek. Nagyobb számadatok (vagy tizedes törtek) esetén a fenti módszer viszonylag nehézkes lett volna.
8 tizedik osztályos és 3 tizenegyedik osztályos tanuló a helyes választ bármilyen indoklást nélkülözve adta meg, csak néhány tanuló adott nagyon gyenge érveket. Példának az egyik 10. osztályos tanuló munkáját idézném: "ha a szorzat maximális, akkor a -nak és b -nek 1 -nél nagyobbnak kell lennie, tehát $a = 2$ és $b = 1$, a szorzat maximális értéke $a \cdot b = 2$ ".
6 tizedik osztályos tanuló az $a = b = \frac{4}{3}$ és $a \cdot b = \frac{16}{9}$ rossz választ adta. Ők

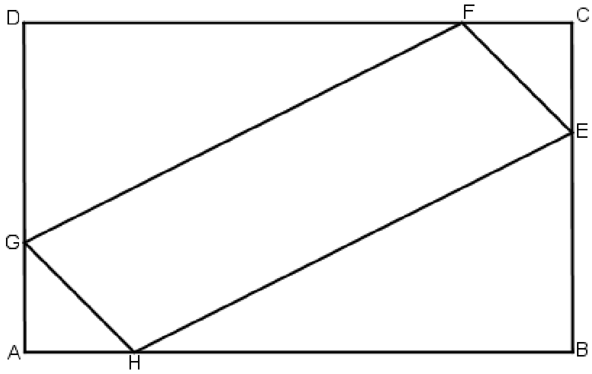
a következő típushibát követték el: $a \cdot b$ akkor a legnagyobb, ha $a = b$ és a $a + 2 \cdot b = 4$ feltételből következik, hogy $a = b = \frac{4}{3}$ (2 tanuló azt is leírta, hogy az $\sqrt{a \cdot b} = \frac{a+b}{2}$ egyenlőség $a = b$ esetben áll fenn). Ugyanazt a rossz választ 4 tizedik osztályos tanuló a következő számítások elvégzése után adta (az egyik tanuló gondolatmenetét követjük): "a szorzat akkor a legnagyobb, ha $\sqrt{a \cdot b} = \frac{a+b}{2}$, tehát $\sqrt{(4 - 2 \cdot b) \cdot b} = \frac{4 - 2 \cdot b + b}{2}$ következik; ebből (néhány közbeeső számítás elvégzése után) kapjuk, hogy $9 \cdot b^2 - 24 \cdot b + 16 = 0$ és $b = \frac{4}{3}$ ". Egy 11. osztályos tanuló is elkövette ugyanazt a hibát, ő az

$$\begin{aligned} \sqrt{a \cdot b} &= \frac{a+b}{2} \\ a + 2 \cdot b &= 4 \end{aligned}$$

egyenletrendszert oldotta meg.
Érdekes módon közelítette meg a problémát egy 10. osztályos tanuló: az $a + 2 \cdot b = 4$ feltételből kiindulva, a 4 -et három egyenlő részre osztotta, vagyis $4 : 3 = 1,\dot{3}$ -t kapta, utána pedig $a = 1,\dot{3}$ és $b = 2,\dot{6}$ következett (nem ellenőrizte le, hogy ezek az értékek kielégítik-e a kezdeti feltételeket), és a szorzat legnagyobb értéke $a \cdot b = 1,\dot{6} \cdot 2,\dot{6} = 3,\dot{5}$ lett.
Egy 11. osztályos tanuló felfedezte, hogy ez a probléma a következőnek az analogonja: mi egy maximális területű telket akarunk körbekeríteni, amely egy folyó mellett terül el (a folyóhoz nem építünk kerítést), és a kerítés teljes hosszát a $a + 2 \cdot b = 4$, feltétel adja meg. Viszont ő is, mint többen is, elkövette azt a hibát, hogy az $a = b$ egyenlőséget vette alapul és a $T_{max} = \frac{16}{9}$.
Több tanuló is rájött arra, hogy az $f(b) = 2 \cdot b \cdot (-b + 2)$ másodfokú függvény legnagyobb értékét kell meghatározzák, de nem emlékeztek azokra a módszerekre, amelyekkel a másodfokú függvény szélsőértékeit tudjuk meghatározni.

4. Feladat (10. és 11. osztály): *Legyen egy $ABCD$ téglalap, melynek oldalai 6 cm és 10 cm. A téglalap oldalain felvesszük az E , F , G , illetve H pontokat az ábrán látható módon, úgy, hogy $AH = AG = CE = CF = x$. Határozzuk meg, hogy az x mely értékére lesz az $EFGH$ paralelogramma területe maximális és számítsuk ki a terület maximumának értékét!*

Tanári elvárásaink között a következő válaszok szerepeltek:
A paralelogramma területét úgy kapjuk meg, hogy az $ABCD$ téglalap területéből kivonjuk a CEF , illetve BEH háromszögek területeinek a kétszeresét, a



10. ábra.

következőképpen:

$$T = 10 \cdot 6 - \frac{x^2}{2} \cdot 2 - \frac{(10-x)\cdot(6-x)}{2} \cdot 2 = 60 - x^2 - (10-x)\cdot(6-x) = 2 \cdot x \cdot (-x+8)\ .$$

A következőkben a probléma megoldását többféle módon is megközelíthetjük.

1. Módszer: A paralelogramma területét a következő másodfokú függvény írja le:

$$f : [0\ ;\ 6] \to R \qquad f(x) = 2 \cdot x \cdot (-x+8)$$

Ezt a másodfokú függvényt a következő alakra hozhatjuk:

$$f(x) = 2 \cdot \left[-(x-4)^2 + 16\right]\ .$$

Ebből könnyen következik, hogy a függvény maximum helye $x = 4$ és az ehhez tartozó maximum érték $f(4) = 16$.

2. Módszer: A paralelogramma területe akkor maximális, ha az $x \cdot (-x+8)$ szorzat maximális. A számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget alkalmazzuk a következő módon:

$$\sqrt{x \cdot (-x+8)} \leqq \frac{x + (-x+8)}{2} = 4$$

tehát a paralelogramma területe $T \leqq 32$ és $T_{max} = 32$ következik.

3. Módszer: Az $x + (-x+8) = 8$ összeg állandó, tehát alkalmazhatjuk a *3. Következményt*, melynek értelmében az $x \cdot (-x+8)$ szorzat akkor maximális, ha fenáll az $x = -x+8$ egyenlőség, amelyből $x = 4$ következik.

3.4. Táblázat - A 4. Feladatra adott válaszok megoszlása

	10. osztály	11. osztály
Jó válasz	6	1
Rossz válasz	32	16
Nem foglalkozott vele	8	16

Amint a fenti táblázat mutatja a 10. osztályos tanulókat sikeresebbeknek tekinthetjük 11. osztályos társaiknál. Ezt nemcsak a több jó válasz alapján mondhatjuk, hanem azért is, mert jóval kevesebb tizedikes tanuló hagyta ki ezt a feladatot, vagyis többségük érdemesnek látta foglalkozni ezzel a problémával. A következőkben először a 10. osztályos, majd a 11. osztályos tanulók munkáit szemléltetjük.
A helyes választ adó 10. osztályos tanulók mindegyike (6 tanuló) helyesen alkalmazta az előbbiekben bemutatott *1. Módszer*-t.
A többi tanuló rossz választ adott vagy nem foglalkozott a feladattal. Egyik tanuló írta: "a paralelogramma területe $T = 60 - x^2 - (10 - x) \cdot (6 - x)$, és ez a terület akkor maximális, ha $x^2 + (10 - x) \cdot (6 - x)$ minimális (utána nem tudta, hogyan folytassa).
Egy másik tanuló a következő terület képletből indult ki $T = 60 - x^2 - (10 - x)^2$, ő úgy gondolta, hogy $DG = DF = BH = BE = 10 - x$, illetve $CF = CE = AG = AH = x$, vagyis az ábrán szereplő háromszögek mind egyenlő szárúak. A továbbiakban helyesen számolt, de rossz választ adott a helytelenül felírt képlet miatt. 2 tanuló úgy gondolta, hogy a paralelogramma területe akkor a lehető legnagyobb, ha a paralelogramma $EF = GH$ oldalai a lehető legnagyobbak, ez pedig $x = 6$ esetben (vagyis amikor a B és E, illetve G és D pontok egybeesnek) következik be.
2 tanuló úgy gondolta, hogy az F pont a CD oldal felezőpontja kell legyen, ebből $x = 5$ következett. 3 tanuló hasonlóképpen gondolkodott, ők viszont az E pontot tekintették a BC oldal felezőpontjának, ebből $x = 3$ adódott.
3 tanuló azt gondolta, hogy a terület akkor maximális, ha a paralelogramma rombusszá fajul, ezért a $GH = GF$ feltételből az $x \cdot \sqrt{2} = \sqrt{(10 - x)^2 + (6 - x)^2}$ következett, amit megoldottak és az $x = 4,25$ értéket kapták.
Egy tanuló a következőképpen érvelt: "a terület akkor maximális, ha az $EFGH$ paralelogramma egy téglalap, és a téglalapok közül a négyzet területe a legnagyobb, tehát $EFGH$ egy négyzet"; ő ugyanakkor megoldotta az $x \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2 \cdot x^2 - 32 \cdot x + 136}$ egyenletet és az $x = 4,25$ értéket kapta (ez a tanuló emlékezett bizonyos tényekre a szélsőértékekkel kapcsolatban, viszont nem tudta helyesen alkalmazni azokat, és ellenőrzést sem végzett, hogy ellenőrizze állításainak helyességét).
Egy tanuló érdekes, ugyanakkor helytelen érvelése a következő: ha F a CD szakasz felezőpontja, akkor $x = 5$; ha E a BC szakasz felezőpontja, akkor $x = 3$; a terület akkor a legnagyobb, ha x a 3 és 5 számok számtani közepével egyenlő,

tehát $x = \dfrac{5+3}{2} = 4$.
Egy tanuló az x változónak konkrét értékeket adott, és kiszámította ezekre az értékekre külön-külön a paralelogramma területét: "$x = 2\ cm \rightarrow T = 24\ cm^2$; $x = 3\ cm \rightarrow T = 28\ cm^2$; $x = 4\ cm \rightarrow T = 32\ cm^2$" és utána levonta a következtetést, hogy "a terület értéke $x = 4\ cm$ esetében a legnagyobb, vagyis $T_{max} = 32\ cm^2$ " . Egy tanuló a következő ötletekkel próbálkozott: "$a \cdot b = max$ ha $a = b$, tehát a paralelogramma egy négyzet; ez nem lehetséges; tehát $\sqrt{a \cdot b} \leqq \dfrac{a+b}{2} \Rightarrow \sqrt{a \cdot b} \leqq \dfrac{\sqrt{2 \cdot x^2} + \sqrt{2 \cdot x^2 - 32 \cdot x + 136}}{2}$ " ; ezek után pedig feladta.
A 11. osztályos tanulók munkái gyengébbek voltak, mint a 10. osztályosoké. Egyetlen tanulónak sikerült helyes választ adni, az ő megoldása a következő: $T = 60 - x^2 - (6-x) \cdot (10-x) = -2 \cdot x^2 + 16 \cdot x = -2 \cdot (x-4)^2 + 32$, azután grafikusan ábrázolta az $f(x) = -2 \cdot (x-4)^2 + 32$ függvényt, a grafikonból pedig kiolvasta a maximum helyét és értékét, majd megadta a $T_{max} = 32cm^2$ választ.
Egyik tanuló a következőket írta $A = 60 - 2 \cdot x^2 - 2 \cdot (6-x) \cdot (10-x) = -4 \cdot x^2 + 32 \cdot x - 60$ (helytelenül írta a terület képletét), utána pedig meghatározta a $-4 \cdot x^2 + 32 \cdot x - 60 = 0$ egyenlet gyökeit, amelyek $x_1 = 3$ and $x_2 = 5$, majd az x értékét a két gyök számtani közepeként számította ki, vagyis $x = \dfrac{3+5}{2} = 4$, ebből pedig $T_{max} = 4\ cm^2$ következett. Egy másik tanuló a $T = (10 - 2 \cdot x) \cdot (6 - 2 \cdot x) = 60$ képletből indult ki, majd a $4 \cdot x^2 - 32 \cdot x = 0$ egyenletet oldotta meg, melynek gyökei $x_1 = 0$ és $x_2 = 8$. Utána ő is a két gyök számtani közepével számolt, vagyis $x = \frac{0+8}{2} = 4$. Ezek a tanulók tudták, hogy a másodfokú függvény szélsőértékének helye a gyökök számtani közepével egyenlő, de helytelenül írták fel a terület képletét. Ennek ellenére véletlen folytán jó x értéket kaptak. Egy tanuló azt írta, hogy a terület akkor a legnagyobb, amikor x a lehető legkisebb, vagyis $x = 0$.
5 tanuló a $T = -2 \cdot x^2 + 16 \cdot x$ képletet kapta, de nem tudták hogyan folytassák. A többi tanuló éppen csak elkezdte a feladat megoldását (beírta az ábrába a különböző jelöléseket és felírt egy-két képletet), utána pedig feladták, ezeket a munkákat külön nem említeném meg.

3.7. A szélsőérték-feladatokkal kapcsolatos tapasztalatok összegzése

Jelen fejezet célja rávilágítani néhány olyan előnyre, amit a tanári többlettudás jelent a szélsőérték-feladatok tanítása során. A tipikus „tanár-megoldások" szélsőérték-feladatok esetében feltételezik a differenciálszámítás ismeretét, ennek az ismertetésére viszont tanórán nincs lehetőség. Ennek ellenére ezek az ismeretek előnyt jelentenek, mivel a tanár gyorsan és hatékonyan ellenőrizheti a diák munkájának helyességét. Kitértünk a tanári többlettudás egy másik fontos előnyére,

amely az önálló tanári problémaalkotásban rejlik. Néhány problémaszituáción keresztül elemeztük, hogy milyen módon hasznosítható a tanári többlettudás új feladatok megalkotására. A fejezetben szereplő felmérés nem reprezentatív, mivel csak 79 tanuló gondolkodásmódját, illetve problémamegoldási képességeit és készségeit tükrözi. Ugyanakkor levonhatunk bizonyos következtetéseket, amelyek jelzés értékűek lehetnek a középiskolai oktatásban érintett matematika tanárok számára.
A szélsőérték-feladatok meglehetősen nehezek a középiskolás tanulók számára, ez a helytelen válaszok viszonylag nagy számából tapasztalható. Figyelemre érdemes, hogy a 10. osztályos tanulók válaszai átlagban jobbak voltak a 11. osztályosokénál. A hatékonyságon kívül, a 10. osztályosok sokkal megfelelőbb módszereket alkalmaztak 11. osztályos társaiknál. Véleményem szerint, ennek a hátterében (egyéb tényezők mellett) az állhat, hogy a 11. osztályos tananyag keretein belül a tanulók nem találkoznak szélsőérték-feladatokkal, tehát az ilyen típusú problémák tanulmányozása több mint egy év távlatára nyúlik vissza.
Több tanuló azt gondolta, hogy egy szélsőérték-feladat mindenképpen két mennyiség egyenlőségére vezethető vissza, ezért a szélsőérték létezésének feltételét minden esetben a feladatban szereplő változók egyenlőségére próbálták visszavezetni. Ez a gondolkodásmód a mértani, számtani és négyzetes közepek közötti egyenlőtlenség helytelen értelmezéséből fakad. A probléma másik oka az lehet, hogy a tankönyvekben és feladatgyűjteményekben szereplő szélsőérték-feladatok többsége főként olyan feladatokat tartalmaz, amelyekben a két, vagy több változó egyenlősége adja a helyes megoldást. Ennek az ellensúlyozására a jelen fejezetben tárgyalt feladatokhoz hasonlókat is ki lehet (sőt ki kell) tűzni az oktatási folyamat során.
Sokan a feladatokban szereplő függvények vagy kifejezések értékét kiszámították a változók különböző lehetséges értékeire és így, mintegy próbálgatással, adták meg a helyes választ. Ez ékesen bizonyítja azt, hogy a tanulók a megfelelő ismeretek hiányában ehhez a matematikai szempontból nem teljes és kielégítő módszerhez folyamodtak.
A tanulóknak nehézségei támadnak amikor egy szélsőérték-feladat megoldása során a függvénytani, geometriai, trigonometriai vagy algebrai kifejezésekkel kapcsolatos ismeretek szintézise szükséges. Ugyanakkor nehezen találnak az adott problémához köthető analóg feladatokat is.
Véleményem szerint a szélsőérték-feladatok megoldása terén nagy változtatásokra van szükség. Elsősorban a tanórákon feldolgozott problémák tárházát kell kibővíteni, új módszerek és feladatok bevezetésével. Ezek közül néhányat mintaként a jelen fejezet is tartalmaz. Ennek a bővítésnek a során el kell rugaszkodni a kizárólag a nevezetes közepek közötti egyenlőtlenségekkel megoldható feladatoktól. Végül, de nem utolsósorban, szükséges megemlíteni, hogy a szélsőérték-feladatoknak a középiskolai matematika oktatás minden fejezetében jelen kell lenniük, ezzel is színesítve a megoldásra kijelölt feladatok tárházát.

4. További kutatási lehetőségek

4.1. Problémaalkotás a tanári többlettudás alkalmazásával

A módszertani kutatásokban jól ismert, hogy a problémakitűzés kiemelt fontosságú az oktatási folyamat során. Hiába létezik a szakkönyvek, feladatgyűjtemények, internetes források egyre bővülő tömege, a tanár időnként szembesül azzal, hogy nem talál olyan megfelelő anyagot egy bizonyos témához, amely az adott osztály, vagy esetleg egy adott tanuló gondolkodásmódjához igazodjon. Ilyenkor, akár tanóra közben is, olyan új problémákat kell alkotnia, amelyek szervesen illeszkednek a tanóra menetébe.
Nemzetközi kutatások foglalkoznak a problémamegoldás folyamata során fellépő problémaalkotással is. Ez a folyamat mindig kétirányú: a tanár (többlettudását felhasználva) célzottan, a tanulók számára újszerűnek tűnő, konkrét problémákat alkot; létezik viszont egy fordított irányú folyamat is, amikor a tanulók a szerzett ismereteik, tapasztalataik alapján kérdések formájában új matematikai problémákat fogalmaznak meg. Ebben a kétirányú folyamatban is jelentősége van a "tanár-eszköztár" és "diák-eszköztár" kettősségének az ismeretére, a tanárnak tudnia kell, hogy az adott helyzetben a tanuló milyen ismeretekkel rendelkezik, illetve az új probléma feldolgozása során a "tanár-eszköztár" mely elemei kerülnek át a "diák-eszköztárba".
A problémaalkotási tevékenységek a Pólya-féle probléma megoldási fázisok mindegyikében jelen vannak. Ezek szerint:

1. Problémát alkothatunk egy bizonyos témakörhöz vagy adott szituációhoz, majd megoldjuk az általunk alkotott problémát.

2. A probléma megértése közben felvetődnek speciális esetek, amelyek hatására az eredeti probléma átfogalmazásra kerül, ezáltal új problémákat alkotunk.

3. A problémamegoldási folyamat során analóg problémák felvetése, egyszerűbb problémákra történő visszavezetés segíthet választ adni az előzőleg felvetett problémára.

4. A megoldás vizsgálata során új problémákat alkothatunk a kezdeti feltételek, adatok változtatásával vagy az adott probléma általánosításával.

Jelen fejezetben leginkább a fentiekben említett 4. vetületre térnénk ki. Amint a második fejezetben is említettük, egy adott probléma megoldásának vizsgálata, majd általánosítása új feladat-családok alkotásához vezethet. Ebből a célból most néhány olyan problémát fogunk megvizsgálni (tanár-, illetve diák-eszköztárral), amelyek a matematikai indukció, illetve a számelmélet témakörének a tanítása

során merülnek fel. Ennek a fejezetnek egy ilyen jellegű megközelítéséről a Matematika Tanítása folyóiratban egy tanulmányt közöltem (lásd [21]).
Kezdetben tekintsük például egy a 12. osztályos tankönyvben szereplő feladatot [52].

4.1. Feladat: *Bizonyítsuk be, hogy:*

$$17|2^{5n+3}+5^n\cdot 3^{n+2}$$

A feladat megoldását a diákok a teljes indukció módszerével végzik.
$n=1$ esetén az állítás igaz, mert $2^8+5\cdot 3^3=23\cdot 17$.
Tegyük fel, hogy egy n számra igaz az állítás. Állítjuk, hogy $n+1$ -re is igaz marad, vagyis $17|2^{5n+8}+5^{n+1}\cdot 3^{n+3}$. Alakítsuk át az állításban szereplő mennyiségeket a következő módon:

$$2^{5n+8}+5^{n+1}\cdot 3^{n+3}=32\cdot 2^{5n+3}+15\cdot 5^n\cdot 3^{n+2}=15\cdot(2^{5n+3}+5^n\cdot 3^{n+2})+17\cdot 2^{5n+3}\ .$$

Ennek az összegnek az első tagja az indukciós feltevés szerint osztható 17-tel, a második tagja pedig egy egész szám 17-szerese, ezért osztható 17-tel. Mivel az összeg mindkét tagja 17-tel osztható, így az állítás igaz.
A tanári többlettudást a maradékosztályok fogalmának ismerete és a kongruenciák műveleti tulajdonságai képezik. Ezekből (bizonyítás nélkül) a következőket emelném ki.

1. Tétel: Ha a ; b és c egész számok, akkor érvényesek a következők:

   $a\equiv a \quad mod\ (m)$ (*reflexivitás*)

   ha $a\equiv b \quad mod\ (m)$, *akkor* $b\equiv a \quad mod\ (m)$ (*szimmetria*)

   ha $a\equiv b \quad mod\ (m)$ *és* $b\equiv c \quad mod\ (m)$ *akkor* $a\equiv b \quad mod\ (m)$ (*tranzitivitás*)

2. Tétel: *Legyenek* a ; b ; c ; d ; m ; u ; v *egészek. Ha* $a\equiv b \quad (mod\ m)$ *és* $c\equiv d \quad (mod\ m)$, *akkor teljesülnek a következők:*

   a) $a+c\equiv b+d \quad (mod\ m)$;

   b) $a-c\equiv b-d \quad (mod\ m)$;

   c) $a\cdot u+c\cdot v\equiv b\cdot u+d\cdot v \quad (mod\ m)$;

   d) $a\cdot c\equiv b\cdot d \quad (mod\ m)$.

A fentiekben említett többlet-tudás alkalmazásával a *4.1. Feladat*-ra adott „tanár-megoldás" a következő:

$$2^5\equiv 15 \quad (mod\ 17)\ ,$$

tehát

$$2^{5\cdot n} \equiv 15^n \quad (mod\,17)\ ,$$

amelyből következik, hogy

$$2^{5n+3} + 5^n \cdot 3^{n+2} = 2^{5n} \cdot 2^3 + 15^n \cdot 3^2 \equiv 17 \cdot 15^n \equiv 0 \quad (mod\,17)\ .$$

A „tanár-megoldás” feltételezi a maradék-osztályok fogalmának ismeretét, amellyel a középiskolás diákok nem rendelkeznek (itt természetesen nem a speciális matematika osztályok diákjaira gondolok). Ebben az esetben a tanári többlettudás kizárólag az önálló problémaalkotás eszközét képezi.
A továbbiakban bemutatjuk, hogy milyen módon alkothat a tanár a *4.1. Feladathoz* hasonló feladatokat, elemezve ennek a feladatnak a megoldását és általánosítva a problémát. A tanári többlet-tudás segítségével belátható, hogy:

$$5^2 \equiv 2 \equiv 2^4 \cdot 3 \quad (mod\,23)\ , \tag{50}$$

tehát

$$5^{2n} \equiv 2^n \equiv 2^{4n} \cdot 3^n \quad (mod\,23)\ , \tag{51}$$

Célunk keresni olyan a, b és c számokat, melyekre érvényes, hogy $a + b + c \equiv 0 \quad (mod\,23)$, mivel ebben az esetben

$$a \cdot 5^{2n} + b \cdot 2^n + c \cdot 2^{4n} \cdot 3^n \equiv (a + b + c) \cdot 2^n \equiv 0 \quad (mod\,23)\ .$$

Minden ilyen számhármas megtalálása egy újabb feladat megfogalmazásával egyenértékű.
Példaként tekintsük a következőket:

$a = 5,\ b = 6,\ c = 12$

$23 \mid 5^{2n+1} + 3 \cdot 2^{n+1} + 2^{4n+2} \cdot 3^{n+1}$

$a = 1,\ b = 1,\ c = 21$

$23 \mid 5^{2n} + 2^n + 7 \cdot 2^{4n} \cdot 3^{n+1}$

$a = 3,\ b = 16,\ c = 4$

$23 \mid 3 \cdot 5^{2n} + 2^{n+4} + 2^{4n+2} \cdot 3^n$

További feladatokhoz jutunk, ha a (51) kifejezésben a kitevőt változtatjuk, például:

$$5^{2(n-1)} \equiv 2^{n-1} \equiv 2^{4(n-1)} \cdot 3^{n-1} \quad (mod\, 23)\ .$$

Ebben az esetben paramétereknek az $a = 5,\ b = 4,\ c = 12$ értékeket adva adódik, hogy

$$23 \mid 5^{2n-1} + 2^{n+1} + 2^{4n-2} \cdot 3^n\ .$$

Tehát egy alapötletből kiindulva, melyet jelen esetben a (50) összefüggés jelent, a tanár képes megalkotni egy olyan feladatot amelyben az a, b és c paraméterek szerepelnek. Ezeknek a paramétereknek konkrét értékeket adva egy feladatcsalád keletkezik. Láthatjuk, hogy a feladatcsaládot tovább szélesíthetjük azáltal, hogy a (51) kifejezésben a hatványkitevőt változtatjuk.
Minden a (50) összefüggéshez hasonló, maradékosztályokkal kapcsolatos összefüggés egy újabb feladat-családot jelent. Az olvasóra bízzuk olyan feladat-családok megalkotását, amelyek alapját a következő összefüggések képezik:

1) $2^3 \equiv 3^3 \quad (mod\, 19)$

2) $11 \equiv 12^2 \quad (mod\, 133)$

3) $2^7 \equiv 3^2 \cdot 5^4 \quad (mod\, 23)$

Szalay I. egy cikkében utalt arra, hogy a következő feladatra miként adható egy tanár-megoldás a Fermat-féle kongruencia-tétel segítségével [90] .

4.2. Feladat: *Bizonyítsuk be, hogy a* $2003^{2004} + 2004^{2003}$ *összeg osztható 5-tel!*

Az említett cikk szerzője a $2003^{2004} = (2003^{501})^4$ és $2004^{2003} = 2004^3 \cdot (2004^{500})^4$ felbontásokra alkalmazta a Fermat-tételt (Ha p prímszám és nem osztója a -nak, akkor $a^{p-1} - 1$ osztható p-vel).
Próbáljuk megfordítani a kérdést olyanszerűen, hogy az általános esetből, amelyet a Fermat-tétel jelent, kiindulva alkossunk feladatcsaládokat középiskolás (vagy akár tehetségesebb általános iskolás) tanulók számára.
Tekintsünk kezdetben egy p prímszámot és két olyan a és b számot, amelyek nem oszthatók p-vel. A Fermat-tétel értelmében

$$a^{p-1} \equiv 1 \quad (mod\, p) \qquad b^{p-1} \equiv 1 \quad (mod\, p)\ .$$

Tekintsünk olyan c és d számokat, melyekre érvényes, hogy $c + d \equiv 0 \quad (mod\, p)$. Ebben az esetben érvényes, hogy

$$c \cdot a^{p-1} + d \cdot b^{p-1} \equiv c + d \equiv 0 \quad (mod\, p)\ .$$

Ezzel megalkottunk egy feladat-családot, amelynek az

$$a = 2003^{501},\ b = 2004^{500},\ c = 1,\ d = 2004^3,\ p = 5$$

számokra vonatkozó speciális esete a *4.2. Feladat.* Hasonló feladatokat alkothatunk ha az a, b, c, d és p számoknak különböző értékeket adunk.

Példaként tekintsük a következőket:

$a = 11^{413},\ b = 110^{512},\ c = 8,\ d = 1,\ p = 3$

$3 \mid 8 \cdot 11^{826} + 110^{1024}$

$a = 2002^{504},\ b = 2003^{505},\ c = 2001,\ d = 2004,\ p = 5$

$5 \mid 2001 \cdot 2002^{2016} + 2004 \cdot 2003^{2020}$

A Fermat tétel feltételei szerint a fenti példákban szereplő p egy prímszám, ezért ilyen módon nem alkothatunk feladatokat a nem prímszámokkal való oszthatóságra vonatkozóan. Viszont a tanári eszköztárban szereplő Euler-Fermat tétel alkalmazásával ezek az akadályok is áthidalhatók.

3. Tétel: (Euler-Fermat tétel): *Legyen m pozitív egész, $a \in Z$ és $(a\ ;\ m) = 1$. Ekkor*

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \quad (mod\, m)\ ,$$

ahol $\varphi(m)$ -el jelöljük a $0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ \ldots\ ;\ m-1$ számok között az m -hez relatív prímek számát.

Kezdetben tekintsük a következő feladatok tanár-eszközzel való megoldását.

4.3. Feladat: *Ha p egy prímszám és a nem osztható p-vel, akkor*

$$a^{p\cdot(p-1)} - 1 \equiv 0 \quad (mod\, p^2)$$

Megoldás: A fenti összefüggés könnyen következik az Euler-Fermat tételből, ugyanis $(a\ ;\ p^2) = 1$ és $\varphi(p^2) = p \cdot (p-1)$, ezért $a^{p\cdot(p-1)} \equiv 1 \quad (mod\, p^2)$.

4.4. Feladat: *Ha a , $b \in Z$ és $(a\ ;\ b) = 1$, akkor*

$$a^{\varphi(b)} + b^{\varphi(a)} \equiv 1 \quad (mod\, a \cdot b)$$

Megoldás: Az Euler-Fermat tételből következik, hogy

$$a^{\varphi(b)} - 1 = b \cdot q_1 \; ; \qquad b^{\varphi(a)} - 1 = a \cdot q_2 \; ; \qquad q_1 \; , \; q_2 \in Z.$$

A fenti egyenlőségeket tagonként szorozva következik a bizonyítandó állítás.

A fenti feladatok tanár-eszközzel történő általános megoldása után térjünk át ezeknek néhány speciális esetére. Ezeket a tanár kijelölheti a tanítási folyamat során, ahol diák-módszerrel oldják meg.
Például, a *4.3. Feladat* esetében az $a = 2008$ és $p = 3$ helyettesítésekkel alkotjuk a következő feladatot.

4.5. Feladat: *Határozzuk meg* 2008^6 *-nak a 9-tel való osztási maradékát!*

A *4.4. Feladatból* kiindulva a tanár feladatot jelölhet ki például a 40-nel való oszthatóságra vonatkozóan az $a = 8$; $b = 5$ helyettesítéssel:

4.6. Feladat: *Bizonyítsuk be, hogy:*

$$40 \mid 8^4 + 5^4 - 1001^{2017}$$

Megjegyzés: A fenti feladat megalkotásakor figyelembe vettük, hogy

$$1001^{2017} \equiv 1 \quad (mod\, 40)$$

Most vegyünk két olyan a és b számot, amelyek nem oszthatók a p prímszámmal. Ekkor a *4.3. Feladat* eredményeiből következik, hogy

$$a^{p\cdot(p-1)} \equiv b^{p\cdot(p-1)} \equiv 1 \quad (mod\, p^2)$$

Tekintsünk olyan c és d számokat, melyekre érvényes, hogy $c + d \equiv 0 \quad (mod\, p^2)$. Ebben az esetben

$$c \cdot a^{p\cdot(p-1)} + d \cdot b^{p\cdot(p-1)} \equiv c + d \equiv 0 \quad (mod\, p^2) \; . \tag{52}$$

Az (52) összefüggés egy feladat-család megalkotását jelenti, amelyet általánosan a következő alakban tudunk megfogalmazni:

4.7. Feladat: *Bizonyítsuk be, hogy*:

$$p^2 \mid c \cdot a^{p\cdot(p-1)} + d \cdot b^{p\cdot(p-1)}$$

A *4.7. Feladat*-ból kiindulva a tanár feladatokat tűzhet ki például a 4-gyel vagy 9-cel való oszthatóságra vonatkozóan, amint az alábbi példákból kiderül:

$a = 2017^{1009}$; $b = 2015^{1008}$; $c = 3$; $d = 1$; $p = 2$

$4 \mid 3 \cdot 2017^{2018} + 2015^{2016}$

$a = 2^{336}$; $b = 5^{337}$; $c = 5$; $d = 4$; $p = 3$

$9 \mid 5 \cdot 2^{2016} + 4 \cdot 5^{2022}$

A következőkben tekintsünk egy romániai középiskolás feladatgyűjteményben szereplő feladatot [67].

4.8. Feladat: *Bizonyítsuk be, hogy bármely $n \geq 1$ esetén*:

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + ... = 2^{\frac{n}{2}} \cdot \cos\frac{n \cdot \pi}{4}$$
$$\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \binom{n}{7} + ... = 2^{\frac{n}{2}} \cdot \sin\frac{n \cdot \pi}{4}$$

A tanár viszonylag könnyen bizonyíthatja az összefüggéseket deduktív úton. Az $(1+i)^n$ kifejezést trigonometrikus alakba írva, majd alkalmazva a Moivre képletet kapjuk, hogy

$$(1+i)^n = \left[\sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^n = 2^{\frac{n}{2}} \cdot \left(\cos\frac{n \cdot \pi}{4} + i \cdot \sin\frac{n \cdot \pi}{4}\right) \tag{53}$$

Ugyanakkor a binomiális képlet alkalmazásával és a tagok megfelelő csoportosításával adódik, hogy:

$$(1+i)^n = 1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \cdots + i \cdot \left[\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \binom{n}{7} + \ldots\right]. \tag{54}$$

Az (53) és (54) összefüggések bármely $n \in N$, $n \geq 1$ esetén érvényesek. A valós és imaginárius részeket egyenlővé téve adódik, hogy

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \cdots = 2^{\frac{n}{2}} \cdot \cos\frac{n \cdot \pi}{4}, \tag{55}$$

$$\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \binom{n}{7} + \cdots = 2^{\frac{n}{2}} \cdot \sin\frac{n \cdot \pi}{4}. \tag{56}$$

A diák a teljes indukció módszerével képes igazolni a fenti összefüggéseket, a viszonylag bonyolult számítások során begyakorolja a kombinatorikai és trigonometriai összefüggésekkel kapcsolatos ismereteit.
$n = 1$ esetén mindkét összefüggés igaz, mivel

$$\binom{1}{0} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot \cos\frac{\pi}{4}$$

és

$$\binom{1}{1} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot \sin\frac{\pi}{4}\,.$$

Tegyük fel, hogy egy n számra igazak az (55) és (56) állítások. Állítjuk, hogy $n+1$ -re is igaz marad mindkét összefüggés. Tekintsük bizonyítandó állításként az (55) összefüggést $n+1$ -re:

$$\binom{n+1}{0} - \binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{4} - \binom{n+1}{6} + ... = 2^{\frac{n+1}{2}} \cdot \cos\frac{(n+1)\cdot\pi}{4}\,.$$

Alakítsuk a bal oldalt:

$$\binom{n+1}{0}-\binom{n+1}{2}+\binom{n+1}{4}-\binom{n+1}{6}+... = \binom{n}{0}-\binom{n}{1}-\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\binom{n}{4}-... =$$

$$= \left[\binom{n}{0}-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-...\right]-\left[\binom{n}{1}-\binom{n}{3}+\binom{n}{5}-...\right] = 2^{\frac{n}{2}}\cdot\cos\frac{n\cdot\pi}{4}-2^{\frac{n}{2}}\cdot\sin\frac{n\cdot\pi}{4} =$$

$$= 2^{\frac{n}{2}} \cdot \left[\cos\frac{n\cdot\pi}{4} - \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{n\cdot\pi}{4}\right)\right] = 2^{\frac{n+1}{2}} \cdot \cos\frac{(n+1)\cdot\pi}{4}\,.$$

A fenti levezetésben felhasználtuk az indukciós feltevést, vagyis azt, hogy egy n számra igazak az (55) és (56) állítások.
Az (56) összefüggés „diák-módszerrel” történő igazolása a fentiekhez hasonlóan oldható meg.
A fenti feladat „tanár-megoldását” úgy is tekinthetjük, mint egy feladatot alkotó módszert, vagyis a tanár kiindulva az $(1+i)^n$ kifejezés kétféle felírásából levezeti a *4.8 Feladat*-ban bizonyítandó összefüggéseket, majd a diákok számára kitűzi egy olyan bizonyítási feladatként, amelyet a teljes indukció módszerével lehet megoldani. Ugyanakkor a „tanár-megoldás” gondolatmenetét tovább fejlesztve újabb feladatokhoz juthatunk, ezáltal létrehozva egy másik feladat-családot.
Tekintsük például a következő összefüggéseket:

(57) $$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \binom{n}{6} + \cdots = 2^{n-1}$$

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\binom{n}{7}+\cdots=2^{n-1}. \tag{58}$$

Az (57) és (55) összefüggéseket összeadva, illetve kivonva, valamint a (58) és (56) összefüggéseket összeadva, illetve kivonva a következő feladathoz jutunk.

4.9. Feladat: *Bizonyítsuk be, hogy bármely $n \geq 1$ esetén*:

$$a)\quad \binom{n}{0}+\binom{n}{4}+\binom{n}{8}+\cdots=\frac{1}{2}\cdot\left(2^{\frac{n}{2}}\cdot\cos\frac{n\cdot\pi}{4}+2^{n-1}\right)$$

$$b)\quad \binom{n}{2}+\binom{n}{6}+\binom{n}{10}+\cdots=\frac{1}{2}\cdot\left(-2^{\frac{n}{2}}\cdot\cos\frac{n\cdot\pi}{4}+2^{n-1}\right)$$

$$c)\quad \binom{n}{1}+\binom{n}{5}+\binom{n}{9}+\cdots=\frac{1}{2}\cdot\left(2^{\frac{n}{2}}\cdot\sin\frac{n\cdot\pi}{4}+2^{n-1}\right)$$

$$d)\quad \binom{n}{3}+\binom{n}{7}+\binom{n}{11}+\cdots=\frac{1}{2}\cdot\left(-2^{\frac{n}{2}}\cdot\sin\frac{n\cdot\pi}{4}+2^{n-1}\right)$$

A binomiális tételt alkalmazva az $(1+\varepsilon_i)^n$ felbontására ($i=1,2,3$), ahol ε_1 , ε_2 illetve ε_3 a harmadik egységgyököket jelentik, majd felhasználva az egységgyökök közötti összefüggéseket (a számítások részletes elvégzését az olvasóra bízzuk) a tanár a következő feladatot alkothatja meg.

4.10. Feladat: *Bizonyítsuk be, hogy bármely $n \geq 1$ esetén*:

$$a)\quad \binom{n}{0}+\binom{n}{3}+\binom{n}{6}+\cdots=\frac{1}{3}\cdot\left(2^{n}+2\cdot\cos\frac{n\cdot\pi}{3}\right)$$

$$b)\quad \binom{n}{1}+\binom{n}{4}+\binom{n}{7}+\cdots=\frac{1}{3}\cdot\left(2^{n}+2\cdot\cos\frac{(n-2)\cdot\pi}{3}\right)$$

$$c)\quad \binom{n}{2}+\binom{n}{5}+\binom{n}{8}+\cdots=\frac{1}{3}\cdot\left(2^{n}+2\cdot\cos\frac{(n-4)\cdot\pi}{3}\right)$$

A következő feladat megtalálható tankönyvben [52], illetve feladatgyűjteményben [29].

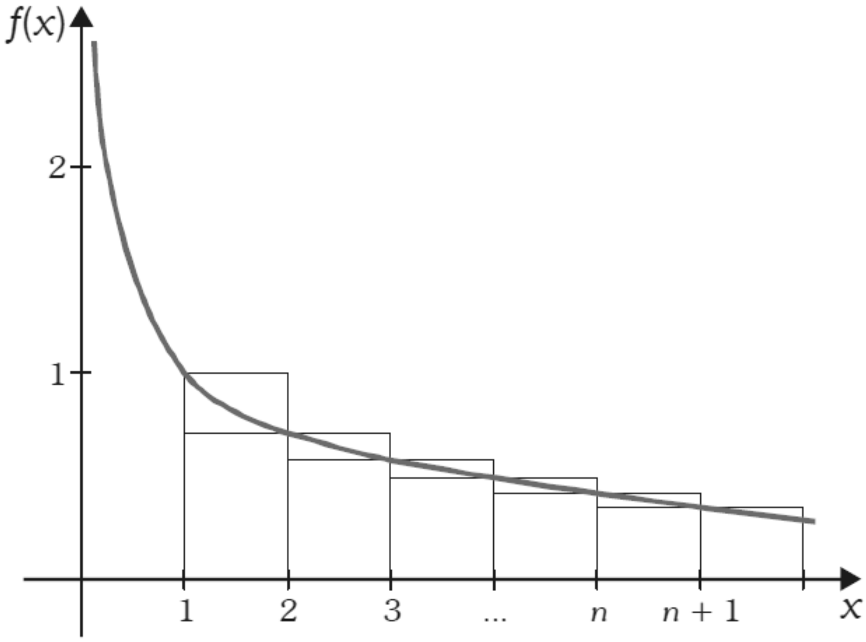
4.11. Feladat: *Bizonyítsuk be a következő egyenlőtlenséget bármely n pozitív egész számra:*

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\geq\sqrt{n}\,.$$

A feladatban szereplő egyenlőtlenséget lehet teljes indukcióval igazolni, de sokkal egyszerűbb módszer is létezik. Az egyenlőtlenség bal oldalának minden tagját, azaz n darabot helyettesítsük a legkisebbel, vagyis az utolsóval, így a következő összefüggéshez jutunk:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}\,.$$

Próbáljuk meg egy olyan nehezebb feladatot alkotni, amely esetében nem létezik



11. ábra.

ennyire egyszerű módszer a teljes indukció módszerének az elkerülésére. Tekintsük a következő ábrát, amely az $f(x) = \dfrac{1}{x}$ függvény grafikonjának egy részletét tartalmazza.

Az $\dfrac{1}{\sqrt{2}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ összeg a függvény grafikonja alatti, az $x = 1$ és $x = n$ abszcisszájú pontok között lévő téglalapok területeinek összegét jelenti, ezért érvényes a következő összefüggés:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < \int_1^n \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

amelyet átrendezve, kapjuk, hogy:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\cdot\sqrt{n}-1$$

minden $n\geq 2$ esetén.
A következőkben tekintsük azokat az $x=1$ és $x=n+1$ abszcisszájú pontok között lévő téglalapokat, amelyek a függvény grafikonját a belsejükben tartalmazzák, ezeknek a téglalapoknak a területösszege $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}$, tehát érvényes a következő összefüggés:

$$\int_1^{n+1}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=2\cdot\sqrt{n+1}-2<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\,.$$

Az eddigieket összefoglalva a tanár a következő feladatot tűzheti ki a diákok számára:

4.12. Feladat: *Bizonyítsuk be a következő egyenlőtlenségeket bármely* $n\geq 2$ *természetes számra:*

$$2\cdot(\sqrt{n+1}-1)<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\cdot\sqrt{n}\,.$$

A *4.12. Feladat* „diák-megoldása” a teljes indukció alkalmazásával történik. „Tanár-megoldásnak” tekinthető az előzőekben ismertetett levezetés, amelynek segítségével eljutottunk az egyenlőtlenséghez. Ebben az esetben is a „tanár-megoldás” valójában egy új feladat-család megalkotását jelenti, ugyanis az $f(x)$ függvényt változtatva és az előző gondolatmenetet alkalmazva olyan egyenlőtlenségekhez jutunk, amelyeket a tanár a tanórán kitűzhet, a diák pedig a teljes indukció alkalmazásával megoldja. Tekintsünk néhány feladatot ebből a feladat-családból:

1) $f(x)=\frac{1}{x^2}$ választással adódik:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<\frac{2\cdot n-1}{n}$$

bármely $n\geq 2$ esetén.

2) $f(x)=\frac{1}{x^3}$ választással adódik:

$$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{n^3}<\frac{3\cdot n^2-1}{2\cdot n^2}$$

bármely $n \geq 2$ esetén.

3) $f(x) = x^3$ választással adódik:

$$\frac{n^4-1}{4} < 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 < \frac{(n+1)^4-1}{4}$$

bármely $n \geq 2$ esetén.

A fenti egyenlőtlenségek levezetését, illetve hasonló feladatok megalkotását az olvasóra bízzuk.

Tekintsük a következő romániai feladatgyűjteményben található feladatot [9]:

4.13. Feladat: *Bizonyítsuk be, hogy bármely* $0 < a < b$ *és* $n \geq 2$, *egész szám esetén érvényes, hogy*

$$n \cdot (b-a) \cdot a^{n-1} < b^n - a^n < n \cdot (b-a) \cdot b^{n-1} \, .$$

A "diák-megoldás" esetében a teljes indukció módszerét alkalmazzuk.
$n = 2$ esetén az állítás igaz, mert $2 \cdot (b-a) \cdot a < b^2 - a^2 < 2 \cdot (b-a) \cdot b$, a $0 < a < b$ feltétel értelmében.
Tegyük fel, hogy egy n számra igaz az állítás. Állítjuk, hogy $(n+1)$-re is igaz marad, vagyis

$$(n+1) \cdot (b-a) \cdot a^n < b^{n+1} - a^{n+1} < (n+1) \cdot (b-a) \cdot b^n \, .$$

A bal oldali egyenlőtlenséget igazoljuk, a jobb oldali egyenlőtlenség igazolása hasonlóan történik.

$$(n+1) \cdot (b-a) \cdot a^n = n \cdot (b-a) \cdot a^{n-1} \cdot a + (b-a) \cdot a^n <$$
$$< (b^n - a^n) \cdot a + (b-a) \cdot a^n < b \cdot (b^n - a^n) + (b-a) \cdot a^n = b^{n+1} - a^{n+1} \, .$$

Ennek a feladatnak egy "tanár-megoldása" a következő.
Tekintsük az $f(x) = x^n$ függvényt, és az $[a;b] \subset \Re$ intervallumot. Mivel az $f(x)$ függvény folytonos a véges és zárt $[a;b]$ intervallumon és differenciálható az $]a;b[$ intervallumon, ezért a Lagrange-tétel értelmében létezik $c \in]a;b[$ úgy, hogy $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, amelyből következik az $n \cdot c^{n-1} = \dfrac{b^n - a^n}{b-a}$ összefüggés.

Ugyanakkor $a < c < b$ miatt $a^{n-1} < c^{n-1} < b^{n-1}$, így adódnak a következő egyenlőtlenségek:

$$a^{n-1} < \frac{1}{n} \cdot \frac{b^n - a^n}{b - a} < b^{n-1} \, .$$

A kettős egyenlőtlenség minden tagját a pozitív $n \cdot (b - a)$ -val szorozva adódik a *4.13. Feladat* állítása.
Jelen alfejezet célja rávilágítani azokra az előnyökre, amit a tanári többlet-tudás jelent az önálló problémaalkotásban a matematikai indukció, illetve az oszthatóság tanítása során. A tanári eszköztárat viszont óvatosan kell kezelni, nem szabad olyan feladatokat kitűzni a diákok számára, amelyek „tanár-megoldása" viszonylag egyszerűnek tűnik, ugyanakkor a „diák-megoldás" nehézkes vagy nagy mennyiségű számolást igényel. Ebből a célból érdemes, hogy a tanár a saját eszköztárával megalkotott feladatokat mindig megoldja a „diák-módszerek" segítségével is, mielőtt tanórán kitűzné azokat.
A tanári problémaalkotás ilyen módon történő megközelítése a matematika bármely fejezetének tanítása során hasznos lehet. Ezeknek a lehetőségeknek a feltérképezése, összefoglalása további kutatások tárgyát képezi, amely meghaladja jelen tanulmány terjedelmét.

4.2. A matematika és a nyelv viszonya

4.2.1. A matematikai logika - tudománytörténeti áttekintés

A logika, mint a helyes gondolkodás törvényeinek tudománya már az ókori időkben foglalkoztatta az emberiséget. A logika, ezen belül pedig a matematikai logika, alapjait a neves görög tudós filozófus Arisztotelész rakta le "Analitika" című művében, Kr.e. IV. században. Ő már tudatosan kereste azokat a módszereket, amelyeket az emberi gondolkodásnak követnie kell a tudományos kutatások közben. Sokat foglalkozott a logikus gondolkodás három elemével: a fogalmakkal, az állításokkal és a következtetésekkel. Bevezette változó fogalmát, és betűket is használt a fogalmak jelölésére.
Arisztotelész munkásságának két évezreden keresztül óriási hatása volt. Aquinói Szent Tamás (1225-1274) az arisztotelészi világkép és a keresztény teológia összhangját is megteremtette. Az Arisztotelész által megalapozott logika bármely tudományágban alkalmazható volt.
Míg kezdetben a logikát a filozófia részének tekintették, fokozatosan megjelent a logika matematizálásának gondolata is. Descartes, majd az ő nyomán Leibniz sajátos matematikai logika megteremtésével próbálkozott. A mai értelemben vett matematikai logika megszületését Leibniz-nek köszönhetjük. Őt a kombinatorika tanulmányozása közben az általános nyelv, a "lingua universalis" keresése vezette

el a szimbolikus logikához. Leibniz nyomán elsősorban az algebra területén kezdődtek meg azok a kutatások, amelyek elvezettek az 1854-ben megjelent munkához, amely a matematikai logikában úttörő jelentőségű volt.
A tizenkilencedik században, a „szigorúság forradalma” korában az algebra és az analízis fejlődésével párhuzamosan egyre inkább megjelent az igény az elszakadásra az "iskolás logika", mint nyelvi jelenség vizsgálatától, valamint a matematikai logikának az algebrai fogalmaival és szabályaival történő rendszerezésére. Ennek a megalapozása George Boole angol matematikus nevéhez fűződik, aki megalkotta a matematikai logikában alkalmazott és róla elnevezett Boole-féle algebrát, amelyet De Morgan angol matematikus fejlesztett tovább. A paradoxonok felfedezése a naiv halmazelméletben kiváltotta a struktúraosztályok további axiomatizálásának az igényét és ezzel párhuzamosan annak vizsgálatát, hogy mit tekinthetünk helyes definíciónak, illetve helyes következtetésnek. Ehhez a bizonyítások formalizálására volt szükség, illetve arra, hogy minden bizonyításról belássuk, megfelelnek egy adott formalizmusnak, leírhatók egy adott formális nyelven. Peano olasz matematikus Leibniz-et és Boole-t követve igyekezett megalkotni a matematika formális logikai alapjait. A formalizált állítások ellentmondásmentességének a bizonyítását Peano mellett még számos matematikus (és filozófus) tűzte ki célul a századfordulón, így például Gottlob Frege és David Hilbert is.
A későbbiekben döntő jelentőségű volt Hilbert, és tanítványainak, köztük például Neumann Jánosnak a működése. Bertrand Russell és Whitehead a Hilbert által kitűzött célok többségét megvalósították, eltekintve az ellentmondásmentesség bizonyításától. Nem sokkal később Gödel bebizonyította, hogy az ellentmondásmentesség bizonyítása, az így létrehozott formalizmus keretein belül, nem is lehetséges.

4.2.2. A matematikai- illetve nyelvi eszközök kettőssége

Az általános és középiskolai oktatásban a kijelentések vizsgálata kettős szemlélettel valósul meg. A nyelvi órákon a kijelentések szerkezetének vizsgálata nyelvi eszközökkel, a nyelvtani szabályrendszer alkalmazásával történik, figyelembe véve az adott nyelv sajátosságait, egyéni jegyeit. A matematika órákon kerül sor a kijelentések matematikai úton történő elemzésére, a logikai ítéleteken végrehajtott műveletek alkalmazására. Ennek a kettős megközelítésnek a vizsgálata során figyelembe kell venni, hogy a kijelentések szempontjából a nyelv jóval sokrétűbb és gazdagabb, ugyanakkor a matematika szűkebb, de annál pontosabb.
Az előbbiekben említett kettősséget a tanár-, illetve diák-eszköztár vizsgálata során is figyelembe kell venni. A matematikai logika elemei a tanári eszköztár részét képezik, csak a 12. osztályos matematika oktatás során épülnek be a diák-eszköztárba. Viszont ezzel párhuzamosan a tanulók eszközei között szerepelnek a nyelvi órákon megtanult különböző kijelentések, azok tagadása, illetve az összetett mondatokban szereplő különböző struktúrák (kötőszavak jelentése, alá és fölé

rendelés, stb.). Tehát a tanár-diák kettős szemlélet ebben az esetben tekinthető úgy is, mint a kijelentések matematikai, illetve nyelvi úton történő megközelítése. Míg a matematikatanár a matematikai logika eszközeit alkalmazza, addig a tanuló kizárólag nyelvi eszközökre hagyatkozhat. Ebben az esetben már nem feltétlenül beszélhetünk tanári többlettudásról, inkább a tanári- illetve diák-eszközök párhuzamát elemezhetjük. A matematika tanárnak fel kell ismernie, hogy tanítványai között léteznek olyan tanulók, akik a kijelentések nyelvtani szabályait nála jobban ismerik, valamint napjainkban a tanulók egyre több nyelvet ismernek meg és ezeknek az eltérő szabályrendszere is a diák-eszköztár jelentős bővülését szolgálja. Viszont a tanár birtokában vannak a matematikai logika elemei, amelyeket a tanulóknak úgy kell megtanítani, hogy azok érezzék a párhuzamot a nyelvtan, illetve a matematikai logika szabályai között. Ezért a továbbiakban nem annyira tanár-, illetve diák-eszköztárról fogunk beszélni, hanem inkább a kijelentésekkel kapcsolatos matematikai, illetve nyelvi megközelítésről.

4.2.3. A logikai ítéletek és műveleteik

A továbbiakban néhány logikai műveleten keresztül mutatnánk be a matematikai és nyelvi megközelítés kettősségét.
A matematikai logika szerint egy p állítás tagadása pontosan akkor igaz, ha p hamis, jelölése $\neg p$. Tehát a negáció egy egyszerű egyargumentumú mondatfunktor, amely a bemenetének az igazságértékét "megfordítja".
A köznapi nyelvben is találunk ilyen egyszerű példákat a negációra:

Az ítélet: *Béla tanul.*

Az ítélet negációja: *Béla nem tanul.*

Használhatjuk még a *nem igaz, hogy* fordulatot is:

Nem igaz, hogy Béla tanul.

A matematikai logikával ellentétben a beszélt nyelvben a tagadás jóval sokrétűbb. A nyelvben a tagadószavak segítségével a mondatban lévő állítás egészét vagy egy részletét tagadjuk. Különbség van azonban a negáció és a nyelvi tagadás között. Formailag a tagadó mondatoknak a jellegzetes ismertetőjegye a tagadószó vagy tiltószó. Számos tagadószót tartalmazó mondat viszont nem fejez ki negációt, az igaz állítást nem alakítja hamissá (és fordítva), erre több példát is találunk például [4]-ben.
A nyelvben akkor beszélünk tagadó mondatról, ha az állítmányhoz, a hangsúlyos alanyhoz, az állítmány hangsúlyos tárgyához vagy határozójához, a jelzős szerkezet egészéhez kapcsolódik a *nem, ne; sem, se* (lásd [36]). A magyar nyelvben előforduló tagadásokra vonatkozóan további példákat találhatunk Rácz E. könyvében [78].
A **kettős tagadás törvénye** értelmében egy p ítélet negációjának a negációja egyenértékű a p ítélettel:

$$p = \neg\neg p$$

Ezt úgy is mondhatjuk, hogy amennyiben kettős tagadást alkalmazunk, a kapott ítélet ugyanakkor lesz igaz, mint a tagadás nélküli ítélet:

Nem Béla nem tanul = Béla tanul.

A fenti esetben viszont a kétszeresen tagadott mondat nyelvi szempontból mégsem teljesen azonos jelentésű a tagadás nélkülivel, mivel hordoz egy előfeltevést: *Valaki nem tanul.*
Amint a fentiekből is kitűnik, a köznapi nyelvi tagadás sokkal bonyolultabb szabályszerűségeknek engedelmeskedik, mint a logikai. Ahhoz, hogy az eltéréseket tanulmányozni tudjuk, a kérdést egyes természetes nyelvekre kell korlátozni. Ugyanis mindenekelőtt azt kell megvizsgálnunk, hogy hogyan alakul a negáció szintaxisa, amely viszont nyelvről nyelvre eltérő. Tehát elsősorban azt kell megvizsgálnunk, hogy miképpen működik a tagadás a magyar nyelvben. Ehhez a magyar mondatszerkezettel kapcsolatos általános ismeretekre van szükség, amelyhez útmutatót találunk [48]-ban. Ha egy (egyszerű vagy összetett) mondatot a matematikai logika eszközeivel tagadni akarjuk, akkor nem hagyhatjuk teljesen figyelmen kívül a nyelvi tagadások ide vonatkozó sajátosságait.
A "megengedő vagy" (a köznyelvben "vagy") a matematikában a diszjunkció vagy szétválasztás (jele: $p \vee q$), míg a "kizáró vagy" (a köznyelvben esetleg "vagy p, vagy

q"), a matematikában az antivalencia (jele $p \oplus q$). Talán ezen a ponton történik a legtöbb ütközés a matematikai és nyelvi értelmezés között. Például a matematikában az ítéleteket összekötő diszjunkció nincs teljes összhangban a mondatokat összekötő **vagy** szó nyelvi jelentésével. A köznyelvben a „vagy” kötőszót többféle jelentésben használjuk attól függően, hogy megengedjük-e mindkét feltétel együttes teljesülését vagy sem. Ha a diszjunkció és antivalencia közötti különbséget a köznyelvben is hangsúlyozni akarjuk, akkor a megengedő vagy esetében egy "vagy" kötőszót, míg a kizáró vagy esetében páros "vagy-vagy" kötőszót használunk, de a mindennapi élőbeszédben ezek jelentése nem mindig egyértelmű. A matematikai logika értelmében a diszjunkció egy alapművelet, míg az antivalenciát a konjunkció, diszjunkció és negáció jeleivel a viszonylag bonyolult

$$p \oplus q = (p \vee q) \wedge (\neg(p \wedge q))$$

formula fejezi ki.
A diszjunkció tagadására vonatkozóan érvényesek a De Morgan azonosságok, míg az antivalencia tagadása a diszjunkciótól eltérő módon alakul. Két "kizáró vagy"-al összekötött állítás tagadásakor az állításokat (vagy az állítások tagadásait) "akkor és csak akkor"-ral kötjük össze: $p \oplus q$ tagadása $p \iff q$ (ami ugyanazt jelenti, mint $\neg p \iff \neg q$). Mindezt a következő logikai igazság-táblázattal szemléltetjük. Tehát a matematikai logika szabályai szerint a $p \oplus q$ tagadása kétféleképpen valósulhat meg (és a két tagadás logikailag egyenlő), viszont ezek a köznapi nyelvben nagyon eltérő jelentéstartalommal bírnak, esetenként viccesen is hangzanak.
Például *"Szombaton vagy Szegedre, vagy Debrecenbe utazunk."* tagadása *"Szombaton akkor és csak akkor utazunk Szegedre, ha Debrecenbe is."* (vagy esetleg *"Szombaton akkor és csak akkor nem utazunk Szegedre, ha Debrecenbe sem."*). Ebben az esetben még nem találunk kivetnivalót a két tagadás tartalmát tekintve.
Viszont egy másik érdekes példa *"Holnap este vagy moziba megyek, vagy otthon maradok."* tagadása *"Holnap este akkor és csak akkor megyek moziba, ha otthon is maradok."* vagy *"Holnap este akkor és csak akkor nem megyek moziba, ha otthon sem maradok."*. Ebben az esetben a köznapi nyelvben nem elfogadható a $p \iff q$ tagadás, viszont a $\neg p \iff \neg q$ már igen.
A következőkben tekintsünk egy olyan példát, amelynek a matematikai tagadása a köznapi nyelv szemszögéből vizsgálva érdekes lehet.
Szalay I. szerint a "*Ki korán kel, aranyat lel.*" ítéletet köznyelvi értelemben kétféleképpen is lehet értelmezni (lásd [91]).

1. Valaki korán kel és aranyat lel.

2. Ha valaki korán kel, akkor aranyat lel.

Matematikailag a két kijelentés nem megegyező, ezt a matematikai logika eszközeivel egyszerűen beláthatjuk. Tehát, ha matematikai szempontból egyértelműsíteni

akarunk, akkor például a "Ha valaki korán kel, akkor aranyat lel." ítéletet kell vizsgálnunk.
Próbáljuk meg az ennél is konkrétabb "Ha Béla korán kel, aranyat lel." ítélet tagadását vizsgálni. Legyen a p ítélet "Béla korán kel", míg a q ítélet "Béla aranyat lel." Ekkor a "Ha Béla korán kel, aranyat lel" $= p \to q$. Ennek az implikációnak a tagadása a negáció, konjunkció és diszjunkció Boole algebrájában:

$$\neg(p \to q) = \neg((\neg p) \vee q) = (\neg\neg p) \wedge (\neg q) = p \wedge (\neg q)$$

Tehát tanári eszköztárral könnyen bebizonyítottuk, hogy a "Ha Béla korán kel, aranyat lel" ítélet tagadása "Béla korán kel és nem lel aranyat ".
A továbbiakban tekintsünk öt olyan kijelentést, amely egy diák számára a "Ha Béla korán kel, aranyat lel" tagadása lehet.
Béla nem kel korán és nem lel aranyat. $(\neg p \wedge \neg q)$
Ha Béla nem kel korán, aranyat lel. $(\neg p \to q)$
Béla nem kel korán és aranyat lel. $(\neg p \wedge q)$
Ha Béla korán kel, nem lel aranyat. $(p \to \neg q)$
Ha Béla nem kel korán, nem lel aranyat. $(\neg p \to \neg q)$
A matematikai logika eszközeivel könnyen beláthatjuk, hogy a fenti öt kijelentés közül egyik sem lehet a "Ha Béla korán kel, aranyat lel" ítélet tagadása.

4.2.4. A mérés célja és módszere

A felmérést a Boronkay György Műszaki Szakközépiskola (Vác), a Gödöllői Református Líceum, a Veresegyházi Kálvin Téri Református Általános Iskolában és a Fabricziusz József Általános Iskolában (Veresegyház) végeztük. A felmérésben az említett iskolák összesen 817 tanulója vett részt. Ezek a tanulók, a 12. osztályosok kivételével, még nem tanulták a matematikai logika elemeit, tehát a válaszok megjelölésénél kizárólag a nyelvi ismereteikre hagyatkozhattak.
Jelen felmérésnek az előzménye egy jóval kisebb mintán végzett mérés, ennek eredményeiről egy korábbi cikkemben számoltam be (lásd [24]). Ennek a tanulmánynak a tapasztalataiból kiindulva született meg az ötlet, hogy a felmérést egy jóval nagyobb mintára lehetne kiszélesíteni.
A felmérés során a következő kérdésekre kerestük a választ:
1. *A tanulók milyen képességekkel rendelkeznek a különböző állítások tagadásának a megfogalmazása terén?*
2. *A nyelvi ismeretekre hagyatkozva a tanulók milyen arányban választják a matematikailag tökéletes tagadást, illetve mennyire részesítik előnyben a nyelvi szempontból elfogadható tagadásokat?*
3. *Milyen mértékben érvényesül a matematikai logika elemeinek ismerete a 12. osztályosok körében?*

A fenti kérdésekkel kapcsolatban, az előző mérés eredményeit is figyelembe véve, a következő hipotéziseket fogalmaztuk meg:
1. *A tanulóknak jelentős nehézségeik vannak a megfelelő tagadás megtalálásában.*
2. *A tagadások esetében a tanulók nagy arányban a nyelvi ismeretekre hagyatkoznak. Ez alól nem mentesek azok a tanulók sem, akik már tanulták a matematikai logika elemeit.*
3. *Összetett mondatok esetén a tanulók többsége a mellékmondatokat külön tagadja és a kötőszavakat változatlanul hagyja, még akkor is ha ezáltal sérül a tagadás logikai tartalma.*

A felmérés során a tanulók egy olyan feladatlapot oldottak meg, amelyen három kijelentés szerepelt, mindegyik 6-6 válaszlehetőséggel az illető kijelentés tagadására vonatkozóan (lásd *Melléklet*, *11. Feladatlap*). A tanulók ezen válaszok közül kellett kiválasszák az általuk megfelelőnek ítélt tagadást. A tanulói válaszokat a következőkben részletezzük.

1. Ha Béla korán kel, aranyat lel.

A. Béla nem kel korán és nem lel aranyat.
B. Béla nem kel korán és aranyat lel.
C. Béla korán kel és nem lel aranyat.
D. Ha Béla nem kel korán, nem lel aranyat.
E. Ha Béla nem kel korán, aranyat lel.
F. Ha Béla korán kel, nem lel aranyat.

4.1. Táblázat - Az 1. kijelentés esetében adott válaszok megoszlása

	7. évf.	8. évf.	9. évf.	10. évf.	11. évf.	12. évf.
A.	21	8	11	5	3	2
B.	0	0	3	2	1	1
C.	7	5	6	7	7	2
D.	88	81	111	66	70	65
E.	3	4	5	2	2	8
F.	17	39	47	36	40	42
Összesen	136	137	183	118	123	120

Amint a táblázatból kitűnik a tanulók több mint fele a D. lehetőséget választotta, vagyis mindkét kijelentést letagadták, a kötőszavakat pedig változatlanul hagyták. Viszonylag sokan jelölték meg az F. választ is. Ezek a tanulók úgy érezték, hogy csak az állítás egyik részét kell letagadni (mégpedig a főmondatnak számító "aranyat lel" kifejezést), viszont a mondat "ha...akkor" felépítése (matematikában implikáció) megmarad a tagadás során.

2. Hull a hó és Micimackó fázik.

A. Nem hull a hó és Micimackó nem fázik.

B. Nem hull a hó és Micimackó fázik.

C. Nem hull a hó vagy Micimackó nem fázik.

D. Hull a hó és Micimackó nem fázik.

E. Nem hull a hó vagy Micimackó fázik.

F. Hull a hó vagy Micimackó nem fázik.

4.2. Táblázat - A 2. kijelentés esetében adott válaszok megoszlása

	7. évf.	8. évf.	9. évf.	10. évf.	11. évf.	12. évf.
A.	106	88	126	82	84	57
B.	6	7	5	9	3	6
C.	3	3	8	9	8	34
D.	18	34	35	18	28	19
E.	1	5	7	0	0	3
F.	2	0	2	0	0	1
Összesen	136	137	183	118	123	120

Megközelítőleg a tanulók 70 % -a az A. választ jelölte meg (kivételt képeznek a 12. osztályosok, itt az arány kb. 50 % volt), vagyis ebben az esetben is a két kijelentés tagadásával egyidejűleg az "és" kötőszó megmaradt a tagadás során. A 12. osztályosok kb. negyede a matematikailag helyes tagadást (vagyis a C. választ) jelölte meg, ez volt a legmagasabb arány, ami a matematikai logika alkalmazásának helyességét illeti. Ők figyelembe vették a $\neg(p \vee q) = (\neg p) \wedge (\neg q)$ De Morgan azonosságnál tapasztalható konjunkcióról diszjunkcióra történő átmenetet. A D. választ is több tanuló megjelölte, ők csak a második kijelentést tagadták le.

3. Ha hull a hó, nem megyek moziba.

A. Nem hull a hó és moziba megyek.

B. Ha nem hull a hó, nem megyek moziba.

C. Nem hull a hó és nem megyek moziba.

D. Ha hull a hó, moziba megyek.

E. Hull a hó és moziba megyek.

F. Ha nem hull a hó, moziba megyek.

4.3. Táblázat - A 3. kijelentés esetében adott válaszok megoszlása

	7. évf.	8. évf.	9. évf.	10. évf.	11. évf.	12. évf.
A	14	7	6	4	3	3
B	11	7	6	9	12	6
C	2	1	3	3	3	1
D	21	39	50	31	31	44
E	1	6	7	3	4	5
F	87	77	111	68	70	61
Összesen	136	137	183	118	123	120

Itt is legnagyobb arányban a két kijelentés együttes tagadása szerepelt a kötőszavak változtatása nélkül (vagyis az F. válaszlehetőség). Ezt követte a D. válasz, ami csak a második rész (jelen esetben is a főmondat) tagadását jelenti. Ugyanakkor ki lehet emelni, hogy a tanulók tisztában voltak a kettős tagadás törvényével, amikor a "*nem megyek moziba*" kijelentést kellett tagadni.

A tanulói válaszok elemzése során a magyar szakos tanárok véleményét is kikértem. A nyelv sokszínűsége (itt főként a köznapi nyelvre gondolok) tágabb lehetőségeket biztosít a tagadások megfogalmazására vonatkozóan. Főként arra kerestem a választ, hogy melyek azok a válaszlehetőségek, amelyek bizonyos értelemben vagy nyelvi környezetben elfogadhatók az illető állítás tagadásaként. Itt elsősorban a köznapi nyelvhasználatra fókuszáltunk, mivel ez képezi a diák-eszköztár részét. A bonyolultabb mondattani szerkezetek tagadásának vizsgálata a magyar nyelvtanban egyetemi tananyagnak minősül és bizonyos értelemben egyre jobban közelít a matematikai logika szabályrendszeréhez, megtartva azonban a nyelvi sokszínűség jegyeit.
Két magyar szakos tanár kollégám véleményét az alábbiakban mutatnám be.

1. tanár:

Ez a tanár azt a feladatot kapta, hogy első ránézésre (maximum 2 perc állt a rendelkezésére), jelölje meg a feladatlapon az általa helyesnek vélt tagadást. Ő mindhárom állítás esetében a D választ jelölte meg.
"Én minden esetben a D választ jelöltem meg. A feladatot konkrétan 2 perc alatt végeztem el, így az első benyomásaimra hagyatkoztam. Az első állításnál az volt a célom, hogy tagadjam az állítmányt ahányszor csak lehet. Az állítmány tagadása ugyanis tipikus formája a tagadásnak. A második állításnál az *és* kötőszavas válaszok közül válogattam. Elsőként az A lehetőséget vizsgáltam. Itt a hóhullás tagadva volt és Micimackó nem fázott, így első ránézésre lényegében ugyanazt állította más előjellel, mint az eredeti mondat. Emiatt ezt elvetettem és tagadásként

a D választ jelöltem meg, amiben bár hull a hó, Micimackó mégsem fázik. A harmadik mondat esetében ugyanezen logika alapján hoztam meg a gyors döntésemet: mivel az F válasz nem változtatott semmit a mondat lényegén (értelmén), emiatt maradt a D, amiben bár hull a hó, mégis elmegyek a moziba."
Miután a fentieket átbeszéltük és kielemeztük, arra kértem, hogy alapos átgondolás után jelölje meg azokat a válaszlehetőségeket, amelyek bizonyos szövegkontextusban jelenthetik még az illető állítások tagadását.
"A köznapi nyelvben a *Ha Béla korán kel, aranyat lel.* tagadásának a következők minősülhetnek:
Béla nem kel korán és aranyat lel.
Béla korán kel és nem lel aranyat.
Ha Béla nem kel korán, aranyat lel.
Ha Béla korán kel, nem lel aranyat.
Alaposabban átgondolva, az olyan kettős tagadások, mint például *Ha Béla nem kel korán, nem lel aranyat* (feltételes kettős tagadás) vagy *Béla nem kel korán és nem lel aranyat* lényegében igenlést jelentenek.
A *Hull a hó és Micimackó fázik* tagadása a *Nem hull a hó és Micimackó fázik* vagy a *Hull a hó és Micimackó nem fázik* kijelentések lehetnek. A *Nem hull a hó és Micimackó nem fázik* nem mond ellent az eredeti mondatnak, nem lehet annak a tagadása. A "vagy" kötőszóval ellátott mondatok ebben az esetben életidegen kijelentéseknek minősülnek.
A *Ha hull a hó,nem megyek moziba.* tagadása hasonló logikával történik, mint a *Ha Béla korán kel, aranyat lel.* kijelentés esetében, vagyis itt sem minősülnek tagadásnak a *Nem hull a hó és moziba megyek*, valamint a *Ha nem hull a hó moziba megyek* kijelentések. A többi válaszlehetőség minősülhet az illető kijelentés tagadásának."
Ezzel a tanár kollégával csak a fenti okfejtések és elemzések után ismertettem a matematikai logika szabályain alapuló tagadásokat.

2. tanár

Ennek a tanárnak már kezdetben bemutattam a matematikailag helyes válaszlehetőségeket. Ő azt a feladatot kapta, hogy mindezek ismeretében elemezze, hogy a tanulók többsége miért nem ezeket a válaszokat jelölte meg. Válaszát az alábbiakban foglalnám össze.
"A tanulók feladataiban összetett mondatok szerepeltek (két predikatív viszonyt tartalmaztak). A tagmondatok között alárendelő (nyelvtani és tartalmi kapcsolat van) és mellérendelő (csak tartalmi kapcsolat van) mondatok is voltak.
Az *és* kötőszavú mondatok esetében az első tagmondat tartalmát a második tagmondat folytatja, kiegészíti, továbbfűzi, újabb mozzanattal bővíti.

A *Ha. . . , akkor* típusú mondatok alárendelt mondatok, feltételes, sajátos jelentéstartalmúak. A mellékmondatban foglalt körülménynek be kell következnie ahhoz, hogy a főmondatban foglalt megállapítás érvényre jusson, megvalósulhasson. A két tagmondat oksági viszonyban áll egymással (a mellékmondat okot, a főmondat pedig okozatot rejt magában).
A fentiek alapján a tanulói feladatlapok eredményeit a következőképpen véleményezném.
Ha Béla korán kel, aranyat lel (alárendelő mondat). A főmondat a 2., a mellékmondat az 1. tagmondat. Az 1.-nek be kell következnie ahhoz, hogy a 2. megvalósuljon. Ebből az következik, hogy *Ha Béla nem kel korán, nem lel aranyat.* A tanulók többsége nyelvi, kommunikációs szempontból választott, a nyelvi logikát követte, mely ebben az esetben eltér a matematikai logikától.
Hull a hó és Micimackó fázik (mellérendelő mondat). Ebben az esetben a tagmondatok egyenértékűek, tehát csak tartalmi kapcsolat van köztük. A 2. tagmondat újabb mozzanattal bővíti az elsőt. A tanulók itt mindkét tagmondatot tagadták, hiszen a kommunikáció szempontjából közelítették meg a kérdést. (A tagmondatok ebben az esetben felfoghatók két egyszerű mondatnak: *Hull a hó. Micimackó fázik.*) A matematikai logika szintén tagadja mindkét tagmondatot, de választássá alakítja az eredetit (*vagy* kötőszavas). Megjegyzem, hogy mint minden mondat, ez is egy szövegkontextusban nyeri el (nyerné el) tényleges jelentését. Többségében a tanulók szoros tartalmi összefüggést éreztek a két tagmondat között, ezért jelölték be az „A" választ. Tehát itt is a nyelvi logikát követték.
Ha hull a hó, nem megyek moziba. Az 1. mondathoz hasonló ez a mondat. Nyelvi szempontból mindkét tagmondatot tagadta a tanulók többsége, ezt a logikát követve: *ha nem hull a hó* (= ok), akkor *nem nem megyek moziba, azaz megyek moziba* (= okozat).
Véleményem szerint a matematikai logikát érdemes lenne már alsóbb évfolyamokon is oktatni, nemcsak 12. évfolyamon, hogy a diákok mielőbb lássák a különbségeket (esetleges hasonlóságokat) az anyanyelvi és matematikai logika között. Összetett mondatokkal részletesebben a 8. évfolyamon foglalkoznak a gyerekek, itt tanulják meg a tagmondatok közti nyelvtani és tartalmi összefüggéseket; hasonlóságokat és különbségeket is."

4.2.5. Következtetések megfogalmazása

Az első hipotézis beigazolódott, a tanulók nehezen találják meg a megfelelő tagadást, akár a matematikai logika szabályait, akár a köznapi nyelvet vesszük alapul. A második hipotézis is igazolódni látszott. A tanulók döntő többsége a köznapi nyelv alapján próbálta megtalálni a helyes választ. Ez még azokra a tanulókra is érvényes, akik a matematikai logika elemeit már tanulták. Egyetlen kivételt képez a 12. osztályos tanulók válaszainak megoszlása a 2. állítás esetében, ahol a tanulók

negyede a matematikailag helyes tagadást választotta. Tették ezt annak ellenére, hogy a köznapi nyelv értelmében ez a válasz életidegen, tehát ők tudatosan a matematikai logika szabályait követték.
A harmadik hipotézis is beigazolódott, a tanulók több mint fele az összetett mondatban szereplő mindkét kijelentést tagadta, a kötőszavakat pedig változatlanul hagyta. Ezáltal olyan válaszokat jelöltek meg, amelyek még a köznapi nyelvben sem tekinthetők az eredeti állítás tagadásának.

5. Összegzés, a kutatómunka eredményei

Munkánkat a disszertáció összefoglalásával, röviden bemutatva az egyes fejezetek tartalmát, és a saját kutatási eredmények azonosításával zárjuk.

5.1. Bevezetés

A bevezető részben azonosítottuk a vizsgált témát, indokoltuk a témaválasztást, meghatároztuk az elvégzendő feladatokat és célkitűzéseket, körvonalaztuk a dolgozat szerkezetét.

5.2. Szöveges feladatok megoldása az általános iskolában

A 2. fejezetben bemutattuk a "tanár-eszköztár" és "diák-eszköztár" párhuzamba állításával különböző típusú szöveges feladatok megoldási módszereit. Ezeknek a feladatoknak az algebrai modellje több esetben egy két- vagy több ismeretlent tartalmazó egyenletrendszer. Az általános iskolai oktatásban viszont a szöveges feladatok egyenletrendszerrel történő megoldása kifejezetten "tanár-eszköznek" minősül. Ezért megvizsgáltuk azokat az aritmetikai és algebrai módszereket, amelyek segítségével ezek a szöveges feladatok taníthatók az általános iskolában.
A Kálvin Téri Református Általános Iskola (Veresegyház) 6. évfolyamán (2015-16 tanév) végzett felmérések keretében arra kerestük a választ, hogy a szöveges feladatok megoldása során a tanulók az aritmetikai vagy algebrai módszereket részesítik előnyben, illetve milyen hatékonysággal alkalmazzák ezeket a módszereket. Ez a kérdés kiemelt fontossággal bír, ugyanis ezen az évfolyamon történik az algebrai módszerek bevezetése, vagyis ezeknek az áttérése a "tanár-eszköztárból" a "diák-eszköztárba". Az 1. és 2. felmérés eredményeit elemezve arra a következtetésre jutottunk, hogy az aritmetikai, illetve algebrai módszerek alkalmazásának megoszlása feladat-típusonként nagyon eltérő. Ugyanez a megállapítás érvényes az alkalmazott módszerek hatékonyságára is. Vannak olyan feladattípusok, amelyek esetében már a 6. osztályos tanulók is hatékonyan alkalmazzák az algebra eszközeit. Ugyanakkor léteznek olyan feladatok is, ahol majdnem kizárólag az aritmetikai módszerek dominálnak, ezeknél az algebrai módszereket választó tanulók többsége is hibásan fordítja le a szöveges feladatot az algebra nyelvére.
Gyakorló pedagógusként megfogalmazódott bennem az a vélemény, hogy a hamis feltételezések módszerének helye lenne az általános iskolai matematika oktatásban. Ebben a fejezetben bemutattam ennek a módszernek egy történeti áttekintését, majd leírtam ennek a tanórán történő konkrét megvalósítását. A 6. osztályosok körében végzett 3. felmérés igazolta, hogy a tanulók sokkal szívesebben alkalmazzák ezt a módszert mint a szokványos aritmetikai és algebrai módszereket.

A 8. évfolyam tanulói esetében végzett felmérés célja volt elemezni azokat a módszereket, amelyeket ebben a korosztályban alkalmaznak a szöveges feladatok megoldása során. Az eredmények elemzésekor kitűnt, hogy a 8. évfolyamon már egyre inkább az algebrai módszerek kerülnek előtérbe. A felmérés rávilágított (a típushibák mellett) azokra a feladat-típusokra is, amelyeket a tanulók még mindig aritmetikai módszerekkel közelítenek meg.

5.3. Szélsőérték-problémák megoldása

A 3. fejezetben bemutattuk azokat a módszereket, amelyek szükségesek a szélsőérték-problémák elemi úton történő megközelítéséhez. Mivel a differenciál-számítás ide vonatkozó vetületei kimondottan "tanár-eszköznek" minősülnek, kidolgoztuk bizonyos matematikai problémáknak a "diák-megoldását" is. Bemutattuk, hogy a differenciál-számításon alapuló tanári többlettudás miként válhat a tanári önálló problémaalkotás hatékony eszközévé.
A 10-11. évfolyamokon végzett felméréssel (amelyben két középiskola tanulói vettek részt) kielemeztük a középiskolás tanulók problémamegoldó képességeit a szélsőérték-feladatok megoldásában.

5.4. Továbblépési lehetőségek

A 4. fejezetben olyan kutatási kezdeményezéseket vetettünk fel, amelyeknek a további kutatása akár más tanár kollégák számára is ösztönző hatással lehet.
Bemutattuk néhány feladat esetében az önálló tanári problémaalkotást a tanári többlettudás alkalmazásával, a matematikai indukció és a számelmélet területén.
Elemeztük a matematika és a nyelv viszonyát a különböző állítások tagadásával kapcsolatban. Egy felmérés keretében (amelyet 7-12. osztályos tanulókkal végeztünk el) arra a következtetésre jutottunk, hogy a tanulók az állítások tagadásában inkább a köznapi nyelv szabályait követik vagy nyelvi logika alapján járnak el, amely nem minden esetben egyezik a matematikai logika szabályaival (ezt tapasztaltuk még a 12. osztályosok körében is, annak ellenére, hogy ők már tanulták a matematikai logika elemeit).

5.5. Saját kutatási eredmények

A dolgozat összetett módon mutat be szakirodalmi és saját kutatási eredményeket. Szükségesnek tartjuk elhatárolni, hogy melyek a saját és melyek a szakirodalomból felhasznált eredmények.

5.5.1. Saját kutatási eredmények a szöveges feladatok megoldási módszereinek vizsgálatában

A 6. és 8. évfolyamokon végzett felmérések és eredmények értékelése, valamint a nemzetközi szakirodalomban szereplő eredményekkel történő összehasonlítás saját kutatómunkának tekinthető.
A hamis feltételezések módszerének egy összefoglalása megtalálható Tuzson Zoltán könyvében [95]. Viszont ennek a módszernek a jelen dolgozatban szereplő megközelítése, a tanórai tevékenységre történő adaptálása és a 3. felmérés eredményének értékelése saját kutatómunkának minősül. A hamis feltételezések módszerének ilyen módon történő alkalmazását 8. osztályosok körében is kipróbáltam szakköri tevékenység keretében, ennek az eredményeiről egy cikk is megjelent [26].

5.5.2. Saját kutatási eredmények a szélsőérték-problémák megoldási módszereinek vizsgálatában

A 3. fejezetben feldolgozott módszerek és feladatok megtalálhatók a különböző feladatgyűjteményekben, ezek a megfelelő helyen meg lettek jelölve. Viszont saját kutatómunkának minősül a módszerek ilyen jellegű összefoglalása, valamint annak a bemutatása, hogy a "tanár-módszerek" milyen módon válhatnak a tanári önálló problémaalkotás eszközévé (feladatcsaládok alkotása). A 10-11. évfolyamon végzett felmérés eredményeinek értékelése és bemutatása, ahol a tanulók problémamegoldó képességeit vizsgáltuk a szélsőérték-feladatok megoldása során, szintén saját kutatási eredménynek tekinthető, amelyről egy cikk is megjelent [25].

5.5.3. Saját kutatási eredmények a továbblépési lehetőségek elemzésében

A 4. fejezetben két továbblépési lehetőséget vizsgáltunk, amelyek részletesebb elemzése meghaladná jelen tanulmány terjedelmét.
A tanári önálló problémaalkotásról egy cikkem jelent meg, amelyben megvizsgáltam azt, hogy miként alkalmazható a tanári többlettudás újszerű feladatok megalkotására a matematikai indukció tanítása során [21]. Ezeket a saját kutatási eredményeket egészítettem ki számelméleti feladatokkal (feladat-családokkal) is.
A matematika és a nyelv viszonyának vizsgálatában az alapötletet Szalay István egy művéből merítettem [91]. A nyelvi tagadás vizsgálatában az adott helyen megjelölt szakirodalmakra támaszkodtam. Ebben a témában egy felmérést végeztem, amelyben 78 általános iskolás és 65 középiskolás tanuló vett részt. Ennek a felmérésnek az eredményeiről egy cikkem jelent meg [24]. Ezt a felmérést egy jóval nagyobb mintán újra elvégeztem és eredményeit ebben a tanulmányban tettem közzé, ez is saját kutatási eredménynek tekinthető.

6. Záró gondolatok

Kutatásaink során nem találtunk olyan átfogó, rendszerező munkát, amely a "tanár-eszköztár" és "diák-eszköztár" közötti párhuzamot ilyen módon bemutatná. Jelen tanulmány ezt a hiányt igyekszik pótolni, nyilván a teljesség igénye nélkül. Azt kívántuk bemutatni, hogy a tanári többlettudás milyen előnyöket rejt magában. Ez főként azoknak a pedagógusoknak jelent segítséget, akik az egyetemi-főiskolai oktatás során szerzett tudásukra kizárólag úgy tekintenek, hogy az csak a matematikai látókörük szélesítésében játszik szerepet, viszont a konkrét tanítási tevékenység során kevés hasznát látják.
Az aritmetikáról az algebrára történő áttérés vizsgálatával azt próbáltuk elemezni, hogy a "tanár-eszközök" milyen módon alakulnak át "diák-eszközökké". Itt kapcsolódtunk a nemzetközi szakirodalomban megtalálható kutatási eredményekhez, mintegy kiegészítve azokat. Mivel nem reprezentatív felmérésekről van szó, tartózkodtunk attól, hogy általános érvényű következtetéseket vonjunk le. Viszont a megfigyelt eredmények és szerzett tapasztalatok, reményeink szerint, segítséget jelentenek a közoktatásban dolgozó kollégák számára, illetve egy kiindulópont lehet további kutatások elvégzésére.
A továbblépési lehetőségek elemzésével ösztönözni óhajtunk olyan kollégákat, akik szívesen megpróbálkoznának a leírt kutatási eredmények további bővítésével, kiszélesítésével.
A matematika oktatásban egy-egy feladat, probléma többféle módszerrel történő megoldásának vizsgálata hasznos lehet úgy a pedagógus, mint a tanuló számára. A tanulókkal ugyanazon problémát más-más módszerekkel megoldatjuk különböző évfolyamokon, majd (a nagyobb ismeretanyag birtokában) összehasonlítás céljából mindig visszatérünk a régebben megismert módszerekhez is. Minden esetben viszont a legfontosabb célkitűzés a gondolkodás és a problémamegoldó képességek fejlesztése kell legyen.

Köszönetnyilvánítás

Mindenekelőtt szüleimnek mondok köszönetet amiért felneveltek és lehetővé tették, hogy továbbtanuljak.

Tisztelettel köszönöm témavezetőmnek, Dr. Szalay Istvánnak azt a sokrétű segítségét, tanácsait, javaslatait, támogatását és bátorítását, amellyel segítette munkámat.

Köszönet illeti Dr. Kosztolányi Józsefet, tanácsaiból és a szakmai beszélgetéseinkből sokat tanultam.

Köszönöm Dr. Németh Józsefnek azokat a biztató szavakat, amelyekkel a matematika szakmódszertan területén végzett kutató munkámban bátorított és tanácsolt.

Köszönöm kollégáimnak, Sohonyai Józsefnek és Solt Domonkosnak a munkáját, akik a matematika és nyelv viszonyának a tárgyalásánál nyújtottak segítséget.

Köszönöm minden kedves matematika szakos kollégámnak, akik a különböző felmérések lebonyolításában segítséget nyújtottak.

Köszönöm feleségem, Fülöp Erika szerető gondoskodását, bátorítását, valamint gyermekeim, Vajk és Zselyke türelmét. Hálás vagyok a zavartalan alkotó munkához szükséges nyugodt háttér megteremtéséért.

Irodalomjegyzék

[1] N. Amado, S. Carreira, S. Nobre, J.P. Ponte, Representations in solving a word problem: the informal developement of formal methods, http://www.researchgate.net/publication/261176504

[2] Ambrus András: A konkrét és vizuális reprezentációk szükségessége az iskolai matematikaoktatásban, http://rmpsz.ro/uploaded/tiny/files/magiszter/2003/osz/9.pdf

[3] Ambrus András: Bevezetés a matematikadidaktikába, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 1995.

[4] Balog J., Haader L., Keszler B., Kugler N., Laczkó K., Lengyel K., Magyar Grammatika, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2000.

[5] A. Bell, K. Stacey, M. MacGregor, Algebraic manipulation: actions, rules and rationales, Proceedings of the Sixteenth Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Brisbane, 1993.

[6] L. Booth, Children's difficulties in beginning algebra, The ideas of algebra, K-12 (pp. 20-32),1988.

[7] L. Booth, A question of structure- a reaction to: Early learning of Algebra: A structural perspective, Research issues in the learning and teaching of algebra, Virginia, 1989.

[8] C. Brown, T. Carpenter, V. Kouba, M. Lindquist, E. Silver, J. Swafford, Secondary school results for the fourth NAEP mathematics assessment: Algebra, geometry, mathematics methods and attitudes, Mathematics Teacher, 81,337-347,1988.

[9] Cosnita C., Turtoiu F., Probleme de algebra, Editura Tehnica, Bucuresti, 1989.

[10] M. Csordás, L. Konfár, J. Kothencz, Á. Kozmáné Jakab, K. Pintér, I. Vincze, Sokszínű matematika 6, Mozaik, Szeged, 2008.

[11] M. A. Clements, Analyzing children errors on written mathematical tasks, Educational studies in mathematics, 1980.

[12] K. F. Collis, Cognitive developement of mathematics learning, Psychology of Mathematics Education Workshop Shell Mathematics Unit Centre for Science Education, Chelsea Colege, University of london, 1974.

[13] T. J. Cooper, G. Boulton-Lewis, B. Atweh, L. Willss, S. Mutch. The transition from aritmetic to algebra: Initial understandings of equals, operations and variable, International Group for the Psychology of Mathematics Education, 21, 1997.

[14] T. J. Cooper, A. M. Williams, A. R. Baturo, Equals, expressions, equations, and the meaning of variable: A teaching experiment, Proceedings of the twenty-second conference of the Mathematics Education Research Group of Australalasia, Adelaide, 1999.

[15] R. Davis, The interplay of algebra, geometry and logic. Journal of Mathematical Behavior, 7, 9-28, 1988.

[16] G. Detori, R. Garuti, E. Lemut, From arithmetic to algebraic thinking by using a spreadsheet, Perspectives on school algebra, Dordrecht, 2001.

[17] G. Egodawatte, Is Algebra Really Difficult for All Students?, Acta Didactica Napocensia, Volume 2, Number 4, Cluj Napoca, 2009.

[18] E. Filloy, T. Rojano, From an arithmetical to an algebraic thought, Proceedings of the 6th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, University of Wisconsin, Madison, 1984.

[19] E. Filloy, T. Rojano, Solving equations, the transition from arithmetic to algebra, For the Learning of Mathematics, 9 (2), 1989.

[20] Fülöp Zs., A szöveges feladatok megoldásának nehézségeiről a nyolcadik osztályos diákok körében, Sokszínű pedagógiai kultúra, International Research Institute, 2014.

[21] Fülöp Zs., A tanár előnye a matematikai indukció tanítása során, A matematika tanítása, 2013/3, Mozaik Kiadó, Szeged, 2013.

[22] Fülöp Zs., Az Euler-Mascheroni konstans tizedes jegyeinek meghatározása geometriai eszközök segítségével, POLYGON folyóirat, XXI. kötet 1-2. szám, Szeged, 2013.

[23] Fülöp Zs., Heuristic arguments and rigorous proofs in secondary school education, Teaching Mathematics and Computer Science 12/2, 2014.

[24] Fülöp Zs., Mathematics in Language, Practice and Theory in Systems of Education, 9. évf. 2. sz., 2014.

[25] Fülöp Zs., Maximum and minimum problems in secondary school education, Teaching Mathematics and Computer Science 13/1, 2015.

[26] Fülöp Zs., Regula falsi in lower secondary school education, Teaching Mathematics and Computer Science 14/2(3), 2016.

[27] Fülöp Zs., The role of the geometrical visualisations in problems related to algebra, Questions and Perspectives in Education, International Research Institute, Komarno 2013.

[28] Fülöp Zs., Transition from arithmetic to algebra in primary school education, Teaching Mathematics and Computer Science, 13/2, 2015.

[29] Gerőcs László - Orosz Gyula – Paróczay József – Szászné Simon Judit, Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I., Budapest, Nemzeti Tankönyvkiadó, 2005.

[30] E. Hatton, An Intire System of Arithmetic or Arithmetic in all its Parts, University of Michigan, 1721.

[31] N.Herscovics, C. Kieran, Constructing meaning for the concept of equation, The Mathematics Teacher, 73(8), 572-580, 1980.

[32] N.Herscovics, L. Linchevski, A cognitive gap between arithmetic and algebra, Educational Studies in Mathematics, 1994.

[33] Hódi E., Szélsőérték-feladatok elemi megoldása, Typotex Kiadó, Budapest, 1994.

[34] T. Jakab, J. Kosztolányi, K. Pintér, I. Vincze, Sokszínű matematika 7, Mozaik, Szeged, 2007.

[35] T. Jakab, J. Kothencz, Á. Kozmáné Jakab, K. Pintér, I. Vincze, Sokszínű matematika 8, Mozaik, Szeged, 2009.

[36] Jászó A., A magyar nyelv könyve, Trezor Kiadó, Budapest, 1997.

[37] D. I. Johanning, Supporting the developement of algebraic thinking in middle school: a closer look at students' informal strategies, Journal of Mathematical Behavior, 23, 2004.

[38] Kacsó F., Matematika M1, Analízis, 11. osztály, Kolozsvár, Ábel Kiadó, 2007.

[39] Shen Kangshen, John N. Crossley and Anthony W.-C. Lun, 1999, The Nine Chapters on the Mathematical Art: Companion and Commentary, Oxford: Oxford University Press, p. 358.

[40] S. Kántor, Maróthi György élete és munkássága, A Természet Világa, 2015.

[41] S. Kántor, T. Varga, Nagy Károly, A reformkor tankönyvírója, a tehetséggondozás úttörője, POLYGON, XXI/1-2., Szeged, 2013.

[42] C. Kieran, Concepts associated with the equal symbol, Educational Studies in Mathematics, 1981.

[43] C. Kieran, The early learning of algebra: A structural perspective, In Sigrid Wagner and Carolyn Kieran (Eds.), Research issues in the learning and teaching of algebra (pp.33-56), 1989.

[44] C. Kieran, The learning and teaching of school algebra. In Douglas A. Grouws (Ed.), The handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 390-419),1992.

[45] C. Kieran, The learning and teaching of school algebra, Handbook of research on mathematics teaching and learning, New York, 1992.

[46] C. Kieran, A. Boileau, M. Garancon, Introducing algebra by means of a technology-supported functional approach, Approaches to Algebra: Perspective for Research and Teaching, Dordrecht, 1996.

[47] C. Kieran, Mathematical concepts at the secondary school level: The learning of algebra and functions, Learning and teaching mathematics: An international perspective, Psychology Press, 1997.

[48] É. Kiss K., Kiefer F., Siptár P., Új magyar nyelvtan, Osiris, 1998.

[49] J. Kosztolányi, I. Kovács, K. Pintér, J. Urbán and I. Vincze, Sokszínű matematika 7., Mozaik, Szeged, 2003.

[50] Kosztolányi J., Kovács I., Pintér K., Urbán J. and I. Vincze I., Sokszínű matematika 9, Mozaik, Szeged, 2003.

[51] Kosztolányi J., Pintér K., Kovács I., Urbán J., Vincze I. Sokszínű matematika 10., Mozaik kiadó, Szeged, 2006.

[52] Kosztolányi J., Pintér K., Kovács I., Urbán J., Vincze I., Sokszínű matematika 12., Mozaik, Szeged, 2006.

[53] S. Laban, I. Osta, Seventh Graders' Prealgebraic Problem Solving Strategies: Geometric, arithmetic and algebraic interplay,
www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/osta.pdf

[54] Leindler L., Analízis, Polygon Kiadó, Szeged, 2004.

[55] Leitzel, J. R., Critical considerations for the future of algebraic instruction, In Sigrid Wagner and Carolyn Kieran (Eds.), Research issues in the learning and teaching of algebra (pp. 25-32), 1989.

[56] Lénárd F., A problémamegoldó gondolkodás, Budapest, Akadémiai Kiadó, 1963.

[57] L. Linchevski, Algebra with numbers and arithmetic with letters: a definition of pre-algebra, Journal of Mathematical Behavior, 1995.

[58] L. Linchevski, N.Herscovics, Cognitive obstacles in pre-algebra, Proceeding of the 18th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Lisbon, 1994.

[59] L. Linchevski, N.Herscovics, Crossing the cognitive gap between arithmetic and algebra: Operating on the unknown in the context of equations, Educational Studies in Mathematics, 1996.

[60] L. Linchevski, D. Livneh, Structure sense: The relationship between algebraic and numerical contexts, Educational Studies in Mathematics, 1999.

[61] R. D. Lodholz, The transition from arithmetic to algebra, Algebra for everyone, Richmond, 1993.

[62] M. MacGregor, K. Stacey, Students understanding of algebraic notation, Educational Studies in Mathematics, 33, 1997.

[63] Gy. Maróthi, Arithmetica, Debrecen, 1782, https://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=mdp.39015021321925

[64] C. Morris, Developing concepts of mathematical structure: Pre-arithmetic reasoning versus arithmetic reasoning, Focus on Learning Problems in Mathematics, 1999.

[65] K. Nagy, Elemi arithmologia, Arithmografia, 1835.

[66] M. A. Newman, An analysis of sixth-grade pupils errors on written mathematical tasks, Research in Mathematics Education in Australia, Melbourne, 1977.

[67] Nicolescu C. P., Sinteze de matematica, Editura Albatros, Bucuresti, 1990.

[68] S. Norton, J. Irvin, A Concrete Approach to Teaching Symbolic Algebra, Presented at the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Hobart, 2007.

[69] S. Norton, T. Cooper, Students' perceptions of the importance of closure in arithmetic: implications for algebra, 2001.

[70] S. Norton, T. Cooper, Do our students really have the arithmetic knowledge to start algebra? Analysing misconceptions, 1999.

[71] S. Ohlsson, Abstract schemas, Educational Psychologist, 1993.

[72] Pintér Lajos, Analízis, Typotex Kiadó, Budapest, 2006.

[73] Pólya Gy., A matematikai gondolkodás művészete I. kötet: Indukció és analógia, Gondolat Kiadó, Budapest.

[74] G. Pólya, Mathematical Discovery: On Understanding, Learning and Teaching Problem Solving, John Wiley and Sons. Inc., New York, 1981.

[75] G. Pólya, How to Solve It, Princeton University Press, Princeton, 1945.

[76] Póla Gy., A problémamegoldás iskolája, Tankönyvkiadó, Budapest, 1976.

[77] http://kerettanterv.ofi.hu/03 melleklet 9-12

[78] Rácz E., A mai magyar nyelv, Tankönyvkiadó, Budapest, 1985.

[79] H. Radatz, Error analysis in mathematics education, Journal for Research in Mathematics Education 10, 1979.

[80] P. Rosnick, J. Clements, Learning without understanding: the effect of tutoring strategies on algebra misconceptions. Journal of Mathematical Behavior, 3(l), 3-27, 1980.

[81] A. Sfard, On the dual nature of mathematics conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin, Educational Studies in Mathematics, 34, 1997.

[82] A. Sfard, The gains and pitfalls of reification - the case of algebra, Educational Studies in Mathematics, 26, 1994.

[83] D. Slavitt, The role of operation sense in transitions from arithmetic to algebra thought, Educational Studies in Mathematics, 1999.

[84] K. Stacey, M. MacGregor, Ideas about symbolism that students bring to algebra, The Mathematics Teacher, 1997.

[85] K. Stacey, M. MacGregor, Implications for mathematics education policy of research on algebra learning, Australian Journal of Education, 1999

[86] K. Stacey, M. MacGregor, Learning the algebraic methods of solving problems, Journal of Mathematical Behavior, 18, 2000

[87] K. Stacey, M. MacGregor, Taking the algebraic thinking out of algebra, Mathematics Education Research Journal, 1, 1999

[88] K. Stacey, The transition from arithmetic thinking to algebraic thinking, University of Melbourne, www.mathhouse.org/files/.../IMECstaceyALGEBRA.doc

[89] Szalay I., A kultúrfilozófia természettudományos alapjai, Szegedi Egyetemi Kiadó, Szeged, 2006

[90] Szalay I., A tanár előnye: a felsőbb matematikai módszerek ismerete és az általánosítás készsége, Polygon XX. évf. 1. sz., Polygon Kiadó, Szeged, 2011.

[91] Szalay I., Holistic approach to the teaching of Mathematics, Practice and Theory in Systems of Education, 5. évf. 1. sz., 2010.

[92] D. Tall, M. Thomas, The long-term cognitive development of symbolic algebra, International Congress of Mathematical Instruction (ICMI) Working Group Proceedings, The Future of the Teaching of Algebra, Melbourne, 2001.

[93] E. Thorndike, M. Cobb, J. Orleans, P. Symonds, E. Wald, E. Woodyard, The psychology of algebra, Macmillan, New York, 1923.

[94] J. A. Thorpe, What should we teach and how should we teach it? Research issues in learning and teaching of algebra, Lawrence Erlbaum Associates, 1989.

[95] Z. Tuzson, Hogyan oldjunk meg aritmetikai feladatokat?, Ábel Kiadó, Kolozsvár, 2011.

[96] S. Wagner, S. Parker, Advancing algebra, Research ideas for the classroom: high school mathematics, New York, 1993.

[97] E. Warren, The role of arithmetic structure in the transition from arithmetic to algebra, Mathematics Education Research Journal, 2003.

[98] T. Weston, A Treatise of Arithmetic: In Whole Numbers and Fractions, University of Michigan, 1729,
https://archive.org/details/atreatisearithm00westgoog

[99] M. Yerushalmy, Problem solving strategies, A longitudinal view on problem solving in a function based approach to algebra, Educational Studies in Mathematics, vol. 43, 2000.

Összefoglalás

A matematikai problémák megoldása során nagyon fontosak a módszerek. A mi kutatásaink fókuszában a probléma-megoldás módszereinek kettős szemlélettel való megközelítése áll: "tanár-eszköztárral", illetve "diák-eszköztárral". Az első szemlélettel megközelítve egy problémát, arra a következtetésre jutunk, hogy a matematikatanárok nagy ismeretanyaggal rendelkeznek, amelyet az egyetemi-főiskolai képzés során szereztek. A második szemlélettel tekintve a feladatokat, a tanulók ismeretei szűkebbek, ők a matematikai problémákat elemi úton közelítik meg. Az oktatási folyamat során a tanárok tisztában kell legyenek azzal, hogy miképpen hasznosíthatják a többlet tudásukat a tanulók problémamegoldási képességeinek a fejlesztésében.

Munkánk során többféle módszert ismertettünk a következő területeken: szöveges feladatok és szélsőérték-feladatok megoldása, önálló problémaalkotás a matematikai indukció, oszthatóság és számelmélet területén. Több esetben egyfajta áttekintést adtunk egy-egy sajátos probléma megoldásának a történeti hátteréről és továbbfejlesztési lehetőségeiről.

A disszertáció második fejezetében elemeztük a tanulók problémamegoldó képességeit a szöveges feladatok megoldásával kapcsolatban az általános iskolai oktatásban. Olyan feladatokat is tárgyaltunk, amelyek általánosított algebrai modellje egy két- vagy több ismeretlenes egyenletrendszer. Viszont az ilyen típusú egyenletrendszerek nem hozzáférhetők az általános iskolás tanulók számára. Ezért a tanárok minden esetben ki kell dolgozzák azokat a problémamegoldási stratégiákat, amelyek elemi aritmetikai, illetve algebrai eszközökön alapulnak, mint például buborék-ábra készítése, szakaszos ábrázolás, aritmetikai számítások, mérleg készítése, hamis feltételezések módszere, illetve egyismeretlenes egyenletek felírása.

Az algebra tanításában és tanulásában végzett kutatások bizonyos komoly problémákat és akadályokat tártak fel, főként az áttérés kezdeti fázisaiban. Egy fontos kihívás a nemzetközi kutatásokban és a kerettantervek megtervezésében azoknak a módszereknek az átgondolása, hogy az aritmetikáról algebrára való áttérés minél zökkenőmentesebb legyen. Különösen a "korai algebra" (early algebra) irányzat képviselői elemezték hogyan kell az aritmetika tanítását olyan módon megoldani, hogy az felkészítse a tanulókat az algebra megértésére, és kiemelje azokat a gondolkodási folyamatokat, amelyek az algebra alapjául szolgálnak. A fő célkitűzés nem az algebrai szimbólumok korai bevezetése, hanem az aritmetika oktatás súlypontjának áthelyezése kell legyen. Már nem megfelelő egy olyan aritmetikai tananyag, amely kizárólag a számoláson alapul, hanem be kell vezetni különböző általánosítási eljárásokat, matematikai struktúrákat, illetve el kell mélyíteni azokat a műveleti tulajdonságokat, amelyek elősegítik az algebra tanítását.

Elemeztük az aritmetikai gondolkodásról az algebrai gondolkodásra történő áttérést a Kálvin Téri Református Általános Iskola (Veresegyház) 6. osztályos tanulóinak körében (2015-2016-os tanév). Megjegyzem, hogy ennek az általános iskolának a matematika szakos tanára vagyok és a teljes programot a saját 6. osztályos tanulóimmal hajtottam végre. Ebből a célból egy három fázisból álló programot valósítottunk meg, amely a következőket tartalmazta.

1. *Aritmetikai számítások*: Kezdetben számos szöveges feladatot oldottunk meg aritmetikai módszerekkel, mint például buborék-ábra készítése, szakaszos ábrázolás, mérleg készítése, visszafelé következtetés. Minden feladat esetében többféle megoldási módszert mutattunk be, valamint kiegészítettem a tanulók megoldási ötleteit olyan esetekben, amikor saját magukra hagyatkozva nem találták a helyes megoldást. Ennek a fázisnak a végén a tanulók egy öt feladatból álló feladatlapot oldottak meg, ezzel mértük fel az aritmetikai módszereken alapuló problémamegoldó képességeket (*1. Felmérés*).

2. *Algebrai módszerek*: Mindezek után a tanulókkal fokozatosan megismertettem az algebrai módszereket. Kezdetben egyenleteket oldottunk meg a lebontogatás módszerével, illetve mérleg-elvvel. Mindezek után, a problémamegoldási tevékenységünk során a legfontosabb stratégiánk a szöveges feladatok egyismeretlenes egyenletekkel történő megoldása volt. Legvégül, ahhoz hogy körülhatároljuk a különböző megoldási módszereket és felmérjük, hogy mely módszerek bizonyulnak a leghatékonyabbaknak (valamint megismerjük a tanulók viszonyulását az aritmetikai, illetve algebrai módszerekhez), a tanulók írásban egy öt feladatból álló feladatlapot oldottak meg 45 perc alatt (*2. Felmérés*). Megjegyzésem, hogy az *1. Felmérés*-ben és a *2. Felmérés*-ben szereplő szöveges feladatok algebrai modellje nagyon hasonló volt, teljesen más szövegkörnyezettel. A *2. Felmérés*-sel kapcsolatban megfigyeléseink a következők voltak:

- Összességében tekintve azok a tanulók, akik aritmetikai módszereket választottak jóval sikeresebbek voltak mint az algebra eszközeit választó társaik.
- Körvonalazni tudtuk azokat a típus-feladatokat, amelyek esetében a legtöbb tanuló helyesen írta fel az algebrai egyenletet és jól oldotta meg a feladatot.
- Azonosítottuk azokat a kiemelkedő típus-hibákat és fő nehézségeket amelyeket az aritmetikáról algebrára történő áttérés okoz, mint például a műveletek sorrendjének felcserélése, a zárójelek kihagyása, az ismeretlen, illetve az egyenlőségjel jelentésének helytelen értelmezése, stb.
- Megjegyzésünk, hogy a tanulók amikor nehézségekbe ütköznek az egyenletek felírása vagy különböző aritmetikai módszerek alkalmazása során

legtöbb esetben a próbálgatás módszeréhez folyamodnak.

3. *A hamis feltételezések módszere*: Az a véleményünk, hogy az általános iskolás tanulók a szöveges feladatok megoldásakor több esetben előtérbe helyezik a próbálgatási módszereket. Ezeket a nemzetközi szakirodalom *estimation/guess and check* (az ismeretlenekre nézve becslést végzünk, összehasonlítva azokat az ismert mennyiségekkel, majd ellenőrizzük, hogy a becsült mennyiség kielégíti a feladat feltételeit) és *trial-and-error* (többszörös próbálkozás a feladat különböző ismeretlen adataival, az adott probléma-szituációra jellemző aritmetikai műveletek elvégzésével) néven említi. Ilyen módon felértékelődik a hamis feltételezések módszerének alkalmazása, mivel ez egy olyan eszköz, amelyet a tanulók bizonyos szöveges feladatok megoldásakor alkalmazhatnak. Ennek a módszernek a használata főként abban az esetben nyújt segítséget, amikor a tanulók (jobb híján) próbálgatással akarnak egy feladatot megoldani, ugyanis ez a deduktív módszer nem igényel különösebb ismereteket az aritmetikai, illetve algebrai módszerekre vonatkozóan.
2 tanóra keretében a hamis feltételezések módszerével oldottunk meg feladatokat. A következőkben a tanulók egy (hat feladatból álló) feladatlapot oldottak meg (*3. Felmérés*). Ezek a feladatok nem voltak egyszerűek, egyesek közepes nehézségűnek számítottak. Hangsúlyoztuk, hogy minden eddig tanult módszert elfogadunk, tehát mindenki kiválaszthatta a véleménye szerint legmegfelelőbb eszközt a probléma megoldására. A legtöbb tanuló a hamis feltételezések módszerével adott jó választ. Ez ékes bizonyítéka annak, hogy a különböző gyakorlati feladatok megoldásában a tanulók inkább intuitív, nem-algebrai módszereket választanak. Inkább hajlanak arra, hogy numerikus eljárásokat alkalmazzanak, és számolásokat végezzenek, mint aritmetikai vagy algebrai módszerekkel elemezzék az adott problémában szereplő mennyiségek közötti összefüggéseket.

A harmadik fejezetben bemutattuk a szélsőérték-feladatok olyan megoldási módszereit, ahol a differenciál-számítás általánosan alkalmazható módszerei elkerülhetők. A középiskolai oktatásban a szélsőérték-feladatok (a maximum és minimum feladatok, vagy a legnagyobb, illetve legkisebb értékekkel foglalkozó problémák) bizonyos tekintetben érdekesebbek más matematikai problémáknál. A szélsőérték-problémák fontossága elhanyagoltnak tekinthető a kerettantervekben, annak ellenére, hogy a versenyfeladatok egyik fő irányvonalát képezik. Ebből kifolyólag ezek a feladatok hasznos eszközei a tehetséges tanulók kiválasztásának és fejlesztésének.
A differenciál-számítás egy általános módszert ad a szélsőérték-feladatok megoldására. Ugyanakkor a jelenlegi tantervek nem tartalmazzák a differenciál- és integrál-számítás elemeit (ebben az esetben természetesen nem a speciális matematika osztályokra gondolunk). Viszont ez nem jelenti azt, hogy a középiskolai

oktatás során nem foglalkozhatunk szélsőérték-problémákkal, ugyanis az ilyen típusú feladatok jelentős része megoldható elemi módszerekkel is. Ezen túlmenően, olyan feladatokat is megoldhatunk elemi úton, amelyek esetében egy többváltozós függvény parciális deriváltjainak a vizsgálata szükséges (ezt viszont a középiskolai tantervek nem tartalmazzák).
Röviden, a szélsőérték-feladatok elemi úton történő megoldása a differenciál-számításon alapuló, esetenként kissé sablonszerű, módszerek olyan (a matematika különböző területeiről vett) elemi eszközökkel történő helyettesítését jelenti, mint például a nevezetes közepek közötti egyenlőtlenségek, a másodfokú- vagy a trigonometrikus függvények értékkészlete, a vektorok skaláris szorzata, stb.
Az elemi eszközökkel történő megoldások esetében nem beszélhetünk egy általánosan érvényes szabályról, minden feladat egy különálló problémát jelent. Ugyanakkor, ha egy érdekes és komplikált feladatot megoldunk, a tanulók értékes ötlethez vagy modellhez jutnak, amit hasonló feladatok megoldásához alkalmazhatnak. Ők továbbfejleszthetik ezt a módszert, miközben analóg problémákat közelítenek meg, vagy megvizsgálják azokat a feltételeket, amelyek lehetővé teszik ennek a módszernek az alkalmazását adott feladatok esetében. Egy megoldási eszköznek az ilyen jellegű továbbfejlesztése során végül olyan ismeretek birtokába jutnak, amelyek egy jól felépített és hasznosítható tudásanyagot jelentenek. Ennek a fejezetnek az első részében bemutattunk bizonyos problémamegoldási modelleket, amelyeket a tanulók hasznosíthatnak hasonló feladatok megoldásában. Ezek az eszközök hasznosak lehetnek a közoktatásban dolgozó tanárok számára is, amikor ezt a témakört tanítják a középiskolai oktatás során.
A fejezet második részében egy középiskolás tanulók körében (két középiskolában) végzett felmérést mutattunk be és megfogalmaztuk következtetéseinket a problémamegoldási képességek fejlesztésére vonatkozóan. A felmérés során kapott tanulói válaszokból kiindulva úgy gondoljuk, hogy a szélsőérték-feladatok eléggé nehézkesnek bizonyulnak a középiskolás tanulók számára, ezt tükrözi a nagy mennyiségű rossz válasz is. Ugyanakkor azt is megfigyeltük, hogy a 10. osztályos tanulók válaszai némileg jobbak voltak a 11. tanulókénál. A hatékonyságon túlmenően, a 10. osztályosok megfelelőbb módszereket alkalmaztak egy-egy probléma megoldására mint a 11. osztályosok. A mi véleményünk szerint ez annak tulajdonítható, hogy a 11. osztályos tantervek nem írnak elő szélsőérték-feladatok megoldását célzó tevékenységeket, így ezek a tanulók az ilyen jellegű feladatokkal közel egy éve nem találkoztak. Több tanuló úgy gondolta, hogy a szélsőérték létezése minden esetben két mennyiség egyenlőségét vonja maga után, ezért mindenképpen egyenlővé tettek két mennyiséget a feladat adatai közül és ezzel adtak rossz választ. Ezek a hibák legfőképpen a nevezetes közepek közötti egyenlőtlenségek helytelen értelmezéséből fakadnak. Ugyanakkor azt is kiemelnénk, hogy a középiskolai tankönyvek leginkább olyan feladatokat tartalmaznak, ahol két mennyiség egyenlősége esetén

adódik a helyes válasz (lásd [29],[51]). Javítási javaslatként bemutattunk néhány ilyen szempontból eltérő feladatot, amelyeket tanórákon fel lehet dolgozni. Több tanuló úgy adott helyes választ, hogy egy függvény vagy kifejezés értékét kiszámította a változó néhány lehetséges értéke esetén. Ez ékes bizonyítéka annak, hogy az említett tanulók nem rendelkeztek semmiféle ötlettel az illető feladat megoldására vonatkozóan, ezért választották ezt a matematikailag nem teljes megoldást. A tanulók sok esetben nem képesek szintetizálni a függvényekre, algebrai kifejezésekre és geometriai fogalmakra vonatkozó ismereteiket. Estenként az is nehézséget okoz, hogy az adott probléma megoldásánál visszacsatoljanak egyszerűbb, előzőleg már megoldott problémára.
Véleményünk szerint egy jelentős fejlődésre van szükség a szélsőérték-problémák megoldása terén a normál középiskolai oktatásban. Szükséges kiszélesíteni a tanított módszerek tárházát, illetve változatosabbá tenni a bemutatott problémákat olyan feladat-családok megalkotásával, amelyek nem kizárólag a nevezetes közepek közötti egyenlőtlenségen alapulnak. És, nem utolsósorban, a szélsőérték-problémáknak helyük van a középiskolai oktatás minden évfolyamán, nemcsak a 10. osztályos tantervekben.

A negyedik fejezetben néhány olyan továbblépési lehetőséget mutattunk be, amelyek részletes kidolgozása meghaladja jelen tanulmány kereteit.
Megvizsgáltuk, hogy a tanárok (saját többlet tudásuk felhasználásával) miként alkothatnak új feladat-családokat olyan területeken, mint a matematikai indukció, oszthatóság és számelmélet. Az a véleményünk, hogy szükséges a tanárok problémaalkotási képességeinek a fejlesztése.
Ebben a fejezetben kitértünk a matematika és a nyelv viszonyára is. A kijelentések megfogalmazása és a velük végzett műveletek sokrétűbbek és színesebbek a nyelvben, ilyen téren a matematika szűkebb, de annál pontosabb. Megfogalmaztunk néhány kijelentést és kerestük ezeknek a tagadását. Sokféle tagadási változatot vetettünk fel, de ezek közül matematikailag csak egy elfogadható (ezt matematikailag tökéletes tagadásnak neveztük). A fő célkitűzésünk az volt, hogy elemezzünk három kijelentést és a tagadásaikat olyan matematikai eszközökkel, mint a konjunkció, diszjunkció és implikáció. Ugyanakkor megvizsgáltuk ezeknek az állításoknak a tagadását a magyar nyelv eszközeivel is. A teljesség igénye nélkül elemeztük, hogy a nyelvi eszközök milyen mértékben igazodnak a matematikai logika elemeihez a tökéletes tagadás problémája kapcsán. Ezenfelül, céljaink között szerepelt annak a felmérése, hogy a tanulók hogyan gondolkodnak a kijelentések tagadásával kapcsolatban. 817 tanuló (7-12. osztályosok) csatlakozott a felméréshez négy iskolából. A feladatlapon három állítás szerepelt és a tanulónak kellett kiválasztaniuk az állítások tagadást 6-6 válaszlehetőség közül. Megjegyzésünk, hogy minden kijelentés esetében csak egy válaszlehetőség jelentette a matemati-

kailag tökéletes tagadást. A felmérés során célunk volt felmérni, hogy a tanulók hogyan képesek megoldani a feladatokat kizárólag köznyelvi és nyelvtani eszközökkel, ugyanis a matematikai logika elemeit csak a 12. osztályban tanulják. Az eredmények azt mutatják, hogy csak a tanulók egy kis része volt képes megtalálni a helyes választ, vagyis a matematikailag tökéletes tagadást. Arra a következtetésre jutottunk, hogy a nyelvi eszközök nem elegendőek ennek a kérdésnek a megválaszolására, itt szükség van a matematikai logika eszköztárára is. Megfogalmaztuk azon véleményünket, hogy a matematikai logika elemeit alacsonyabb évfolyamokon is tanítani kell, nemcsak a 12. osztályos tananyagban kell szerepelnie.

Summary

Methods are very important in solving mathematical problems. Our research focuses on the investigation of problem solving methods seen from two points of view: "teacher's methods" and "pupil's methods", respectively. If we approach a mathematical problem from the first point of view, we can conclude that Mathematics teachers possess a large amount of knowledge acquired during their studies at the university. From the second point of view, the pupils' knowledge is narrower, they can handle problems in more elementary ways. In the educational processes teachers need to be aware how to use their extra knowledge in order to improve the problem solving skills of their pupils. They also have to find out how to adapt their methods to the level of knowledge of the pupils.
During our work we have discussed many different methods in the following areas: solving word problems and extreme value problems; problem posing in some areas, such as mathematical induction, divisibility and number theory. In many cases we have given a sort of overview of the history of a particular problem and of the developmental aspects of its solution.
In the second chapter of the dissertation we have examined the lower-secondary school pupils' problem solving skills related to word problems in the lower secondary school educational processes. We have discussed some word problems whose generalised algebraic structure is a system of equation with two or more unknowns. However these systems of equations are not available for the lower secondary school pupils, so teachers have to adopt some problem solving strategies that require elementary arithmetical and algebraic procedures, such as drawing bubble figures and line segments, making a balance, making arithmetical computations, using the false position method or writing equations with one unknown.
Research in teaching and learning algebra has detected a number of serious cognitive difficulties and obstacles especially to novice students. An important challenge in international research and thinking on Mathematics education curriculum is to consider ways in which the transition from arithmetic to algebra can be achieved

more smooth. In particular, the "early algebra" movement has examined how to teach arithmetic in a way that prepares pupils for algebra, and which emphasises the thinking processes that underlie algebra. The main aim is not to introduce algebraic symbols at an earlier age, but to change the emphasis of arithmetic teaching. It is no longer appropriate to have an arithmetic curriculum which focuses exclusively on computation, so there is opportunity to include experiences of generalisation, mathematical structure and properties of operations that underpin algebra.
We examined the transition from arithmetic thinking to algebraic thinking in the case of grade 6 pupils in the Reformed Primary School in Veresegyház (in 2015-2016 school-year). I have to mention, that I am a Mathematics teacher in this school, and the entire project was carried out with my grade 6 pupils. For this purpose we have adopted a three-phase program that contained the followings.

1. *Aritmetic calculations*: At the begining, we have solved several word-problems with arithmetic methods, such as drawing bubble figures and line segments, using a balance, thinking backwards. We showed multiple solution methods for each problems and completed the pupils' problem-solving ideas if they could not find a correct solution themselves. At the end of this stage the pupils solved a list of five word problems to assess their problem solving skills by arithmetic methods (*Test 1.*).

2. *Algebraic methods*: Thereafter the pupils were initiated in the use of algebraic methods. Firstly, we solved equations thinking backwards and with the balance-principle. Thereafter, in our problem solving activities the most important strategy was to translate word problems into first-degree equations with one unknown. Finally, in order to delineate the procedures used to solve the exercises and to identify the most accepted methods (and to test especially the pupils' attitude towards arithmetic and algebraic methods), pupils were given a paper-and-pencil test with five word problems to solve in 45 minutes (*Test 2.*). We have to mention that the algebraic structure of the word problems in *Test 1.* and *Test 2.* was the same, but the context of the problems was quite different. The assessment of *Test 2.*:

- On the whole the pupils were more successful with arithmetic methods then with algebraic tools.
- We were able to feature some kind of problems, where most of the pupils were able to make up equations and solve them successfully.
- We have identified the prominent error types and major difficulties in the transition from arithmetic to algebra, such as the meaning of the

unknowns, the order of the operations, parenthesis omited, the meaning of the equal sign, closure, etc.

- We have to mention that as pupils encounter difficulties in writing an equation or making a graphical representation they resort to the method of guess and check.

3. *False-position method*: We consider that the lower secondary school pupils in word problem solving mainly prefer numerical checking strategies (we refered to these as *Groping*, according to Pólya), such as estimation/guess and check (estimating the unknown measures, by perceptively comparing them to other known measures, then verifying that the estimated values satisfy the problem conditions) and trial and error (repeating process using forward arithmetic operations inherent to the problem situation, testing different numbers in the statement of the problem). In this way the importance of the false-position method increases in a considerable way, because it is a pattern, a model which the students can use in case they have to deal with word problems. The usage of the false-position method is convenient to the pupils who try to solve these problems by groping, because this is a deductive method in which the students should not follow severe arithmetic or algebraic rules.
During 2 Mathematics lessons we solved word problem by false-position method. Thereafter pupils had to solve a list of six word problems (*Test 3.*). Problems on *Test 3.* were not quite simple, some of them were of moderate difficulty. We underlined that we agree with every learned method, they have to choose, according to their point of view the most suitable method to solve the given problem.
Most students used the false-position method and gave the right answer. This is a good evidence that pupils in every-day word problems mainly prefer to use intuitive, non-algebraic methods. Pupils tend to use numerical procedures mainly because they are used to perform procedural computations rather than to represent in an arithmetic or algebraic way the relations involved in a given problem.

In chapter three we have presented some possible ways of solving extreme value problems by elementary methods with which the generally available method of differential calculus can be avoided. In the secondary school education the extreme value problems (or maximum and minimum problems, or problems concerned with the greatest and the least values), in some ways, are more attractive than other mathematical problems. The importance of the extremum problems is ignored in the regular curriculum; however they are in the main stream of competition problems - therefore they are useful tools in the selection and developement of talented students. The differential calculus provides a general method for solving problems on minima and maxima. The present day secondary school curriculum does not contain the elements of differencial and integral calculus (we do not mean the secondary schools with advanced mathematical teaching programme). But it does not mean that we cannot deal with extreme value problems in secondary school educational processes, since most of these problems can be solved by elementary methods. Therewith, by elementary methods we can solve many problems which need the partial differential of a function of several real variables (and this method is not included in any secondary school curriculum). Briefly, problem-solving by elementary methods means the replacement of the methods based on differential calculus, which are quite stereotyped, by the elementary methods collected from different fields of Mathematics, such as elementary inequalities between geometric, arithmetic and square means, the codomain of the quadratic and trigonometric functions, the scalar product of the vectors, etc. In case of elementary methods there are no generally valid rules to solve the problems, every exercise is a particular problem. However, having solved a problem with real insight and interest, the students aquire a precious possession: a pattern, a model, that they can imitate in solving similar problems. They develop this pattern if they try to follow it, if they reflect upon the analogy of problems solved, upon the relevant circumstances that make a problem accessible to this kind of solution, etc. Developing such a pattern, they may finally attain a real discovery and they have a chance to aquire some well ordered and readily available knowledge.

In the first part of this chapter we have shown some patterns that students can imitate in solving similar problems. These patterns can also provide some ideas for Hungarian teachers on how to introduce this topic in their practice.

In the second part we have discussed the results of a survey carried out in two secondary schools and we formulate our conclusion concerning the improvement of students' performance in solving these kind of problems. Based on the evaluation of the answers we consider that the maximum and minimum problems are difficult enough for secondary school students, this fact is seen in the large number of wrong answers. Also, we can see that grade 10 students' results were slightly better than the results of grade 11 ones. Besides efficiency, grade 10 students apply more adequate methods than the grade 11 ones to solve the extreme value problems. In our opinion, this is due to the fact that the curriculum for grade 11 students does not prescribe any kind of maximum-minimum problem solving activities, these kind of exercises were not practiced for over a year.

A large number of students think that an extreme value problem somehow involves the equality of two quantities, so they look for two quantities which must be equal and they often give erroneous answers. The main cause of these errors is the misinterpretation of the basic inequalities between arithmetic, geometric and square means. We can also state that the students textbooks mostly deal with extreme value problems where the equality between two or more quantities delivers the right answer (see [29] and [51]). To make an improvement in this sense we have shown some problems which we consider to be necessary to deal with. Many students gave the right answer after they calculated the value of a function or expression for several certain values of the variable. This is an eloquent proof that most of them did not find any way to solve the problem and they ultimately appealed to this lacunary method. Students face difficulties when they have to synthetize knowledge concerning functions, algebraic expressions or geometry. It is also difficult for them to find analogous problems to the actual discussed problem.

In our opinion a serious improvement is necessary in the extreme value problem solving activities. It is necessary to enlarge the number of methods which are adequate to solve extreme value problem. It is also necessary to deal with a greater variety of problems, not only those that focuse on the inequalities between means. Futhermore, the extreme value problems have their rightful place in almost every chapter of the secondary school Mathematics education, not only in the grade 10 curriculum.

In chapter four we have shown some opportunities for other research works. We examined how the teachers (by the use of their extra knowledge) can be able to create new mathematical problems in different areas of Mathematics, such as mathematical induction or problem related to divisibility and number theory. In our opinion the Mathematics teachers' problem posing skills need a serious improvement.

In this chapter we have also focused on the relationships between Language and Mathematics. Formulating sentences is wider and reacher in Language, this kind of problem in Mathematics is narrow but more precise. We have considered some statements and we have set up the problem of their precise negation. In general we can get various variants of answers, but Mathematics accepts only one precise answer (we called this the perfect negation of the statement). The main objective is to analyse three statements and their negation with the tools of Mathematics, such as conjunction, disjucntion, implication, etc. We have also appealed to the tools of the Hungarian Language. We studied how the Language methods fits the requirements of Mathematics related to the problem of the perfect negation. Most of all, our attempt was to highlight the students' way of thinking related to the problem of the negation. A sample of 817 students have participated in the study. The test-paper contained three statements and the students had to choose the perfect negation of each statement from six versions of answers. We have to mention that only one is considered the right answer, if we argue with the tools of Mathematics. The aim of the research was to find out how the students can handle this kind of problem by the use of their Language and Grammar knowledge, because the tools of Mathematics necessary to solve the problems are contained in the grade 12 curriculum. The results of the survey show that a small part of the students gave the right answer, namely the perfect negation of the statements. Our conclusion is that the Language and Grammar knowledge is not enough to find the perfect negation of the statement, it is necessary the students be acquainted with the tools of Mathematics, especially with the tools of Mathematical logic. In our opinion the tools of Mathematical Logics have to be introduced at an earlier age, not only in the grade 12 curriculum.

Melléklet

1. Feladatlap

1. Feladat: *Egy hegedű tokkal együtt 65000 Ft-ba kerül. A tok 37000 Ft-tal kevesebbe kerül, mint a hegedű. Mennyibe kerül a hegedű tok nélkül?*

2. Feladat: *Gondoltam két számot. Különbségük 435, összegük pedig 819. Mi a két gondolt szám?*

3. Feladat: *Katiék egy almafáról összesen 3 láda almát szedtek le. Az első ládában 12 kg-mal több alma van, mint a másodikban. A harmadikban 18 kg-mal több van, mint a másodikban. Összesen 129 kg almát szedtek. Hány kg alma van az egyes ládákban külön-külön?*

4. Feladat: *Egy kertből 550 kg zöldséget gyűjtöttek be: háromszor több krumplit, mint répát, és 50 kg-mal több káposztát, mint répát. Hány kg-ot gyűjtöttek be az egyes zöldségekből?*

5. Feladat: *Egy egyenlő szárú háromszög egyik szára az alap háromszorosa. A háromszög kerülete 119 cm. Mekkora a háromszög alapja?*

6. Feladat: *Gondoltam egy számot. Ha a négyszereséhez hozzáadom a háromszorosát, akkor 77-et kapok. Melyik számra gondoltam?*

7. Feladat: *Egy medve 360 kg-mal nehezebb, és így háromszor olyan nehéz, mint egy tigris. Hány kilogramm egy medve?*

8. Feladat: *Ha 3 banánt vennénk, ugyanannyit fizetnénk, mintha egy banánt vennénk, és még elköltenénk 496 forintot. Mennyibe kerül egy banán?*

9. Feladat: *Egy áruházban 5 kivit és 2 mangót vásároltunk 510 Ft-ért. Mennyibe kerül a kivi és a mangó darabja, ha tudjuk, hogy egy mangó ára hatszorosa egy kivi árának?*

10. Feladat: *Egy ceruza és egy radír együtt 60 g, két ceruza tömege ugyanannyi, mint három radíré. Hány gramm egy ceruza, illetve egy radír?*

11. Feladat: *Gondoltam egy számra. A hétszereséből kivontam 8-at, és így 83-at kaptam. Melyik számra gondoltam?*

12. Feladat: *Egy baromfiudvarban tyúkok, kacsák és libák vannak. A szárnyasok fele tyúk, negyede kacsa, a libák száma 28. Mennyi szárnyas van a baromfiudvarban?*

13. Feladat: *A hatodikosok háromnapos túrára mentek. Első nap megtették a túraútvonal* $\frac{2}{5}$ *részét, második nap a túraútvonal* $\frac{1}{4}$ *részét, így a harmadik napra 21 km maradt. Milyen hosszú volt a teljes túraútvonal?*

14. Feladat: *Az iskola tanulóinak* $\frac{1}{4}$ *része fekete,* $\frac{1}{6}$ *része vörös,* $\frac{1}{3}$ *része barna hajú. A szőkék száma 360. Hány tanuló jár az iskolába, ha más hajszín nem fordul elő?*

15. Feladat: *Egy istállóban levő lovak számának a fele 5-tel több, mint a negyedrésze. Hány ló van az istállóban?*

16. Feladat: *András elolvasta a könyv* $\frac{1}{4}$ *részét és még 20 oldalt, hátra van még 8 oldal híján a könyv* $\frac{2}{3}$ *része. Hány oldalas a könyv?*

17. Feladat: *János gazda udvarán tyúkok és nyulak vannak. Az állatoknak összesen 48 lába és 18 feje van. Hány tyúk és hány nyúl van János gazda udvarán?*

18. Feladat: *A tricikli tolvajokat a rendőrök biciklin üldözik. Összesen 34 keréken gurulnak, és 14 kormánnyal kormányoznak. Hány triciklit loptak el?*

2. Feladatlap

1. Feladat: *Egy szálloda 23 szobájában 52 fekvőhely van, a szobák kétágyasak, illetve háromágyasak. Hány kétágyas szoba található a szállodában?*

2. Feladat: *Egy iskolába összesen 760 tanuló jár. A lányok száma 168-cal több, mint a fiúk száma. Hány fiú jár az iskolába?*

3. Feladat: *Egy udvarban kacsák és libák vannak, négyszer annyi kacsa, mint liba. Összesen 165 szárnyas van. Hány liba van az udvarban?*

4. Feladat: *Egy szekrény három polcán könyvek vannak. Az első polcon 5-tel több, mint a másodikon. A harmadik polcon kétszer annyi, mint a másodikon. A három polcon összesen 149 könyv van. Hány könyv van a polcokon külön-külön?*

5. Feladat: *Bea a zsebpénzét megkétszerezte, majd elköltött 368 forintot, így 432 forintja maradt. Mennyi pénze volt eredetileg?*

6. Feladat: *Egy osztály diákjainak fele Debrecenbe utazott, egy harmada Székesfehérvárra, a többi 6 tanuló pedig Budapestre. Hány fős az osztálylétszám?*

3. Feladatlap

1. egyenlet: $2 \cdot x + 8 = 5 \cdot x + 2$

2. egyenlet: $6 \cdot x - 7 = 10 \cdot x + 5$

3. egyenlet: $11 \cdot x + 8 = 3 - 5 \cdot x$

4. egyenlet: $12 \cdot x + 12 - 9 \cdot x = 6 \cdot x + 13 + 4 \cdot x + 6$

5. egyenlet: $15 - 3 \cdot x + 5 + 6 \cdot x = 18 \cdot x + 14 - 11 \cdot x$

6. egyenlet: $x + x + 1 + x + 2 + 2 \cdot x = 43$

7. egyenlet: $2 \cdot (x - 1) + 8 = 5 \cdot (x + 3) - 12$

8. egyenlet: $3 \cdot (x + 2) - 4(x - 1) = 12$

9. egyenlet: $\dfrac{x}{4} - \dfrac{5}{3} + \dfrac{x}{2} = \dfrac{5 \cdot x}{6} + \dfrac{7}{12}$

10. egyenlet: $\dfrac{x}{3} + \dfrac{x}{4} + 8 = 73$

4. Feladatlap

1. Feladat: *Zsófi és Dorka együtt 34 kg újságot gyűjtött, Zsófi 11 kg-mal többet, mint Dorka. Mennyit gyűjtöttek külön-külön?*

2. Feladat: *Annának ötször annyi ötöse van matekból, mint Zsuzsinak. Ketten együtt 18 db ötöst kaptak eddig. hány ötösük van külön-külön?*

3. Feladat: *Gabi nagyon szeret kosárlabdázni. A legutóbbi mérkőzésén kétszer annyi pontot dobott, mint az előzőn. A két mérkőzésen összesen 33 pontot dobott. Hány pontot dobott a két mérkőzésen külön-külön?*

4. Feladat: *A labdarúgó bajnokság 2006/2007-es szezonjában a bajnok Debrecen éppen 50-nel több pontot szerzett, mint az utolsó helyen végzett Vác. A két csapat pontjainak átlaga 44 pont. Hány pontot gyűjtött Vác?*

5. Feladat: *A focimeccsen Bálint kezdőjátékos volt, majd lecserélték, és a 90 perces meccs végéig Csaba játszott a helyén. Csaba feleannyi időt töltött a pályán, mint Bálint. A meccs hányadik percében történt a csere?*

6. Feladat: *Kukutyin három iskolájába összesen 1480 gyerek jár. Az Arany Iskolának kétszer annyi tanulója van, mint az Ezüst Iskolának, legtöbben pedig a Bronz Iskolába járnak: 10-zel többen, mint a másik kettőbe összesen. Hány gyerek jár a három iskolába külön-külön?*

7. Feladat: *Január 23-án az éjszaka 5 óra 40 perccel hosszabb a nappalnál. Mikor nyugszik a nap, ha 7 óra 21 perckor kel?*

8. Feladat: *Hókuszpók elfogott néhány törpöt, és most szószt szeretne készíteni hozzájuk. Ehhez vásárolt négy üveg áfonyalekvárt és három üveg mogyorókrémet. Összesen 4030 Ft-ot fizetett. Mennyibe kerül egy üveg áfonyalekvár és egy üveg mogyorókrém külön-külön, ha egy üveg mogyorókrém éppen háromszor olyan drága, mint egy üveg áfonyalekvár?*

9. Feladat: *Nagy úr fizetésemelésben reménykedik. Ha fizetését a két és félszeresére emelnék, és még adnának ezen felül is 10000 Ft emelést, akkor már csak 5000 forinttal keresne kevesebbet, mint főnöke, Kiss úr. Kiss úr fizetése 290000 Ft. Mennyit keres Nagy úr?*

10. Feladat: *Egy kétkarú mérleg egyik serpenyőjében 4 db 15 dkg-os vaj és há-*

rom ismeretlen (de egyforma tömegű) margarin, a másikban pedig 8 db 15 dkg-os vaj van. A mérleg egyensúlyban van. Mekkora egy margarin tömege?

11. Feladat: *A parkban sokan sétáltatják a kutyáikat. Most éppen 98 láb sétál a parkban, és ezekhez 34 fej tartozik. Ha a parkban csak kutyák és emberek vannak, melyikből hány van?*

12. Feladat: *Gondoltam egy számot. A háromszorosához 12-t adva 2-vel kisebb számot kaptam, mintha a négyszereséből levontam volna 3-at. Melyik számra gondoltam?*

13. Feladat: *Az osztálykiránduláson az első napi szállás harmadannyiba került, mint a második napi, a harmadik napi pedig feleannyiba, mint az első napi. A három éjszakára a szállásért összesen 13500 Ft-ot fizettünk. Mennyibe került a három éjszaka külön-külön?*

5. Feladatlap

1. Feladat: *Peti a 960 forintos csokit 20 forintos és 100 forintos érmékkel fizeti ki. Hány érme van mindegyikből külön-külön, ha összesen 20 érmét használt?*

2. Feladat: *Egy téglalap kerülete 136 cm. A hosszúsága 12 cm-rel több, mint a szélessége. Mekkorák a téglalap oldalai?*

3. Feladat: *Kukutyinban háromszor annyian laknak, mint Nekeresden. Kukutyin lakosainak száma 264-gyel több, mint a nekeresdi lakosok száma. Hányan laknak Nekeresden?*

4. Feladat:*Bea három nap alatt elköltött 5450 forintot. Első nap háromszor annyit, mint a másodikon, a harmadikon pedig 40 forinttal többet, mint a másodikon. Mennyit költöttem el az első napon?*

5. Feladat: *Egy településen a lakosok száma megkétszereződött, majd elköltözött 456 lakos, így a település lakosainak a száma 1230 lett. Mennyi lakos volt eredetileg a településen?*

6. Feladat: *Egy farmon libák, kacsák és pulykák vannak. A szárnyasok egy negyede pulyka és egy harmada liba. A kacsák száma 65. Mennyi szárnyas van a farmon?*

6. Feladatlap

1. Feladat: *Hajni pókokat és cserebogarakat gyűjtött, összesen 38 darabot. Egy cserebogárnak 6, míg egy póknak 8 lába van. Összesen 250 lábat számolt meg. Hány pókot és hány cserebogarat gyűjtött külön-külön?*

2. Feladat: *Bea egy 2410 forintos játék kifizetésénél 5-tel több 20 forintost használt, mint 50 forintost. Hány 20 forintos, illetve hány 50 forintos érmét használt külön-külön?*

3. Feladat: *Egy autóbusz az első napon négyszer akkora távolságot tett meg, mint a másodikon. Mekkora utat tett meg a két napon külön-külön, ha az első napon 135 km-rel többet tett meg, mint a másodikon?*

4. Feladat: *Peti és Zoli bélyegeket gyűjt. Zolinak 12-vel több bélyege van, mint Peti bélyegei számának a kétszerese. Kettőjüknek együtt 168 bélyege van. Hány bélyegük van külön-külön?*

5. Feladat: *Két könyvespolcon könyvek vannak, a másodikon háromszor annyi, mint az elsőn. Ha a másodikról elveszünk 13 könyvet, az elsőre pedig felteszünk még 10 könyvet, akkor a másodikon kétszer annyi könyv lesz, mint az elsőn. Hány könyv van a két könyvespolcon külön-külön?*

6. Feladat: *András elolvasta egy könyvnek az* $\frac{1}{4}$ *részét és még 12 oldalt, hátra van még a könyv* $\frac{2}{3}$ *része. Hány oldalas a könyv?*

7. Feladatlap

1. Feladat: *Péternek és Pálnak összesen 1664 forintja van. Péternek 3-szor annyi pénze van, mint Pálnak. Mennyi pénzük van külön-külön?*

2. Feladat: *Péternek és Pálnak összesen 1850 forintja van. Péternek 320 forinttal több van, mint Pálnak. Mennyi pénzük van külön-külön?*

3. Feladat: *Péter 1400 forintot fizetett ki 20 és 50 forintos érmékkel. Összesen 46 érmét használt fel. Hány 20 forintos, illetve hány 50 forintos érmét használt fel?*

4. Feladat: *Elolvastam egy könyv* $\frac{1}{4}$ *részét és még 20 oldalt, hátra van a könyv* $\frac{2}{3}$ *része és még 16 oldal. Hány oldalas a könyv?*

5. Feladat: *Egy téglalap kerülete 96 cm, a hosszúsága 3 cm-rel nagyobb, mint a szélességének a kétszerese. Mekkorák a téglalap oldalai?*

8. Feladatlap

1. Feladat: *Egy műhelyben két nap alatt összesen 2857 csavart gyártottak, az első napon 345 csavarral többet, mint a másodikon. Mennyi csavart gyártottak külön-külön az első, illetve a második napon?*

2. Feladat: *Egy farmon összesen 3850 állat van, juhok és kecskék. Mennyi juh, illetve kecske van külön-külön, ha a juhok száma négyszerese a kecskék számának?*

3. Feladat: *Egy iskolában összesen 1236 diák van. A fiúk száma 63-mal kevesebb a lányok számának a kétszeresénél. Hány fiú, illetve lány van az iskolában külön-külön?*

4. feladat: *Egy asztalon 100 pohár található, ezek űrtartalma 20 cl vagy 35 cl. Ha mindegyiket megtöltenénk vízzel, 2870 cl vízre lenne szükség. Hány pohár van mindegyikből külön-külön?*

5. feladat: *Egy túra alkalmával megtettük a teljes út* $\frac{1}{3}$ *részét és még 3 km-t, hátra van a teljes út* $\frac{3}{5}$ *része és még 5 km. Mennyi a teljes út hossza?*

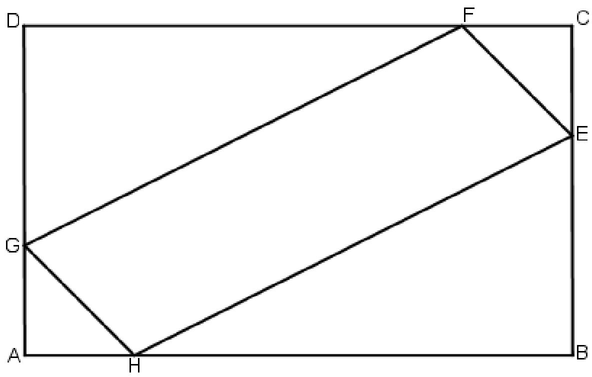
9. Feladatlap (10. osztály)

1. Feladat: *Egy derékszögű háromszög átfogója* $c = 10$. *Határozzuk meg a befogók hosszát úgy, hogy a háromszög területe a lehető legnagyobb legyen!*

2. Feladat: *Határozzuk meg az* $f : [3\ ;\ 7] \to R\ ;\ f(x) = \sqrt{x-3} + \sqrt{7-x}$ *függvény legkisebb, illetve legnagyobb értékét!*

3. Feladat: *Határozzuk meg az* $a \cdot b$ *szorzat maximumát, ha* $a \geqq 0$, $b \geqq 0$ *és* $a + 2 \cdot b = 4$!

4. Feladat: *Legyen egy* $ABCD$ *téglalap, melynek oldalai 6 cm és 10 cm. A téglalap oldalain felvesszük az* E , F , G , *illetve* H *pontokat az ábrán látható módon, úgy, hogy* $AH = AG = CE = CF = x$. *Határozzuk meg, hogy az* x *mely értékére lesz az* $EFGH$ *paralelogramma területe maximális és számítsuk ki a terület maximumának értékét!*



10. Feladatlap (11. osztály)

1. Feladat: *Egy egyenlő szárú háromszög szárainak hossza 4 cm. Határozzuk meg a háromszög alapját úgy, hogy a háromszög területe a lehető legnagyobb legyen!*

2. Feladat: *Határozzuk meg az* $f : [-3\ ;\ 2] \to R\ ;\ f(x) = \sqrt{x+3} + 2 \cdot \sqrt{2-x}$ *függvény legkisebb, illetve legnagyobb értékét!*

3. és 4. Feladat: *Ugyanaz mint az 10. Feladatlap 3., illetve 4. feladata.*

11. Feladatlap

1. Ha Béla korán kel, aranyat lel.

- **A.** Béla nem kel korán és nem lel aranyat.
- **B.** Béla nem kel korán és aranyat lel.
- **C.** Béla korán kel és nem lel aranyat.
- **D.** Ha Béla nem kel korán, nem lel aranyat.
- **E.** Ha Béla nem kel korán, aranyat lel.
- **F.** Ha Béla korán kel, nem lel aranyat.

2. Hull a hó és Micimackó fázik.

- **A.** Nem hull a hó és Micimackó nem fázik.
- **B.** Nem hull a hó és Micimackó fázik.
- **C.** Nem hull a hó vagy Micimackó nem fázik.
- **D.** Hull a hó és Micimackó nem fázik.
- **E.** Nem hull a hó vagy Micimackó fázik.
- **F.** Hull a hó vagy Micimackó nem fázik.

3. Ha hull a hó, nem megyek moziba.

- **A.** Nem hull a hó és moziba megyek.
- **B.** Ha nem hull a hó, nem megyek moziba.
- **C.** Nem hull a hó és nem megyek moziba.
- **D.** Ha hull a hó, moziba megyek.
- **E.** Hull a hó és moziba megyek.
- **F.** Ha nem hull a hó, moziba megyek.