

A REPRESENTÁCIÓVÁLTÁS MINT PROBLÉMAMEGOLDÁSI STRATÉGIA TANÍTHATÓSÁGÁRÓL

Doktori (Ph.D.) értekezés tézislevele

NAGY ÖRS

Témavezető
DR. KOSZTOLÁNYI JÓZSEF
egyetemi docens

MATEMATIKA- ÉS SZÁMÍTÁSTUDOMÁNYOK DOKTORI ISKOLA

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI ÉS INFORMATIKAI KAR
BOLYAI INTÉZET

2017
SZEGED

1. A téma időszerűsége, célkitűzések

1.1. Problémamegoldás a romániai oktatásban

A matematikatanítás egyik legfontosabb célja a gondolkodásra nevelés, amely problémamegoldás és a matematika felfedeztető módon való tanításával valósítható meg. Korábbi kutatások [29], [17], [24] bizonyítják, hogy ebben óriási szerepet játszik az általános heurisztikus eljárások ismerete. Ennek ellenére a romániai közoktatásban az általános problémamegoldási eljárások explicit, de sajnos néha még implicit tanítása is meglehetősen háttérbe szorul.

A problémamegoldási képesség vizsgálatával foglalkozó szakdidaktikai kutatások száma jelentős, ám többségük csupán annak valamilyen szempontok alapján történő mérésére tér ki, nem társul hozzájuk fejlesztő foglalkozássorozat [38]. Ugyanakkor a különböző nemzetközi mérések hatására, túlnyomó többségük elemi osztályos vagy nagyobb általános iskolás tanulók szöveges feladat megoldási [34], illetve azokhoz tartozó vizuális reprezentáció készítése [6] képességét tanulmányozza, esetleg életszerű matematikai problémahelyzetek [22] megoldási képességével foglalkozik. Kevesebb azonban a középiskolás diákok, esetleg egyetemi hallgatók körében végzett, kifejezetten a (belső) matematikai problémamegoldásra fókuszáló mérésekről és fejlesztő foglalkozásokról beszámoló eredmény, és még ritkább a heurisztikus problémamegoldási stratégiák tanítására vonatkozó - közép-kelet európai - kutatás, romániaiáról pedig egyáltalán nem tudok.

Korábbi kutatások [29], [17], [24] ugyanakkor arra is rávilágítanak, hogy a különböző heurisztikák alkalmazási képessége különböző mértékben fejleszthető. Nehezebben alakítható ki például a problémának az eredeti kontextustól eltérő, más területen való reprezentálásának, különböző nézőpontból való tudatos megközelítésének gondolata. Ez a megfigyelés sarkallt arra, hogy olyan problémák révén, melyek sikeres megoldása az eredeti megfogalmazástól eltérő, más területen való okoskodást igényel, a reprezentációváltás mint problémamegoldási stratégia taníthatóságával foglalkozzak.

A kutatásom során középiskolás diákok és matematika szakos egyetemi hallgatók problémamegoldási képességét és célirányos fejlesztésének lehetőségeit vizsgáltam.

1.2. A kutatás célja

A kutatás során a következő céljaim voltak:

1. a matematikai gondolkodás, problémamegoldás elméleti hátterének áttekintése
2. a diákok problémamegoldási képességének mérése; ezen belül hangsúlyosan:
 - vizuális problémareprezentáció-készítési, elemzési és a problémamegoldási folyamatban való sikeres alkalmazási képesség mérése
 - a transzformációelv mint általános heurisztikus eljárás alkalmazásának mérése
 - tananyagrészek-összekapcsoló, -szintetizáló képesség mérése
3. célzottan a fenti képességeket fejlesztő tananyag kidolgozása és alkalmazása
4. a fejlesztés elején fölállított **hipotéziseim** igazolása:
 - megfelelő tananyaggal a diákok problémamegoldó képessége fejleszthető:
 - a diákok tananyagrészek-összekapcsoló, -szintetizáló képessége fejleszthető
 - a diákok vizuális problémareprezentáció-készítési és transzformációelv alkalmazási képessége fejleszthető
 - a problémamegoldási heurisztikák explicit tanítása révén a diákoknak a problémamegoldás során felhasználható eszköztára bővíthető

2. A kutatás elméleti háttere

A kutatást a fejlesztés kereteinek kijelölése végett a megfelelő matematikadidaktikai szakirodalom áttanulmányozásával kezdtem.

A kutatás során **probléma** alatt olyan feladatot értek, amely megoldásához szükséges eszköz ismeretlen, vagy több ismert eszköz újszerű kombinált alkalmazására van szükség, és ez nem nyilvánvaló a feladatmegoldó számára [5], [7].

A matematikatanítás különböző célrendszereinek [4], [39], [37] áttekintése után részletesen vizsgáltam a **problémamegoldó gondolkodás szerkezetét**: a problémamegoldás folyamatát [10],[25],[36],[18], az abban különösen hasznos heurisztikus eljárásokat [26], [30], valamint az ezeket végigkísérő metakognitív elemeket [19].

Schoenfeld [30] a kutatásai alapján kiegészítette, konkrétabbá, jobban használhatóbbá tette Pólya négy lépéses (A feladat megértése - Tervkészítés - Tervünk végrehajtása - A megoldás vizsgálata) problémamegoldási modelljét, ugyanakkor kiemelte a kognitív folyamatokról való aktív és tudatos gondolkodás, azaz a metakognitív elemek fontosságát is. A kutatás fejlesztő részében a diákokkal való munka során az ő modelljét tartottuk szem előtt.

A problémamegoldási folyamat szerkezetének jobb megértése érdekében kitértem a **matematikai gondolkodás természetének** néhány aspektusára is: a matematikai fogalmak külső és belső reprezentációs hálózatára [8], [13], a vizuális reprezentációk szerepére [9], [28], a kritikai, illetve kreatív gondolkodásmód jellemzőire [16], [23], [35], majd megadtam a problémamegoldó gondolkodás egy komplex kognitív modelljét [33].

Végül a **problémamegoldó képesség fejlesztésének lehetőségeit** tekintettem át, kitérve úgy a kognitív [9], [5], [37], mint a metakognitív [11] és affektív [32] elemekre.

3. A kutatás anyaga és módszere

2011, majd 2013 tavaszán három hónapon keresztül 10-11. osztályos tanulók, valamint II. és III. éves matematika szakos egyetemi hallgatók problémamegoldási képességeit vizsgáltam. A kutatás elő- és utómérési kísérleti módszerrel valósult meg, melyek között heti rendszerességgel fejlesztő foglalkozások zajlottak. A fejlesztés pontos céljának és anyagának meghatározása érdekében a diákok először egy előtesztelésen vettek részt.

3.1. Az előmérés

Az előtesztet 33 líceumi és 26 egyetemi diák írta meg, de csak annak - a matematika iránt jobban érdeklődő - 23 középiskolás tanulónak és 24 egyetemi hallgatónak az eredményeivel foglalkozom, akik az utómérésen is jelen voltak. Tehát összesen 47 diák teljesítményét tanulmányozom.

3.1.1. Az előteszt célja

Céлом annak fölmérése volt, hogy a kísérletben részt vevő diákok

- milyen általános problémamegoldási heurisztikákat ismernek,
- mennyire tudják a matematika különböző területeiről származó tudásukat a feladatmegoldás során mozgósítani, képesek-e a különböző jellegű ötleteiket ötvözni,
- bizonyos problémák esetén próbálkoznak-e a feladat kijelentésétől eltérő, más reprezentációkban való okoskodással,
- problémamegoldás közben milyen metakognitív gondolatok jelennek meg, illetve milyen érzelmek játszódnak le bennük, és mennyire tudják ezeket írásban közölni.

A felmérésnek egy másik célja a középiskolás és egyetemista csoport eredményeinek az összehasonlítása, az esetleges különbségekre való rávilágítás volt.

3.1.2. Az előmérés módszere

A felmérésen részt vevő 47 diáknak 90 perc alatt 3 nem szokványos, versenyfeladatnak tekinthető problémát kellett megoldania.

Mivel a teljes problémamegoldási folyamat minden vetületére kíváncsi voltam, a teszt elején a következő szempontokra hívtam fel a figyelmüket:

- A lapot függőlegesen kettéválasztva bal oldalra a feladatok megoldását, jobb oldalra a gondolataikat, észrevételeiket írják le.
- Minden feladathoz annyi megoldást adjanak, amennyit csak tudnak, és mindeniket részletesen közöljék.
- Ha valamelyik feladattal nem boldogulnak, írják le a megfigyeléseiket, sejtéseiket.
- Még akkor is hagyjanak a lapon minden észrevételt, ötletet, ha utólag esetleg kiderül róla, hogy használhatatlan vagy hibás.

3.1.3. A feladatok

1. Határozd meg az $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \end{cases}$ egyenletrendszer valós megoldásait!
2. Bizonyítsd be, hogy bármilyen $a, b, c > 0$ esetén

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{a^2 - ac + c^2} \geq \sqrt{b^2 + bc + c^2}.$$

3. Egy lakatlan szigeten miután a kalózok felhúzták a zendülőket az (A) akasztófára, a következő módon ásták el kincseiket: Kimérték a távolságot az akasztófától az (F) forrásig, majd jobbra fordultak, és ugyanannyit léptek, mint A -tól F -ig, majd itt kijelölték a K_1 pontot. Hasonlóan, az akasztófától a (B) barlangig lépkedtek, balra fordultak, majd ugyanannyit léptek, mint A -tól B -ig, és kijelölték a K_2 pontot. Végül a $[K_1K_2]$ felezőpontjánál elásták a kincset. Húsz év múlva a kapitány visszatért, hogy magával vigye a kincseket. Nagy meglepetésére az akasztófát sehol sem találta. Megtalálhatja-e a kincseket?

3.1.4. A feladatok értékelése

Céлом az első feladattal annak vizsgálata volt, hogy a jól ismert lineáris, illetve arra visszavezethető egyenletrendszerek megoldási módszerein kívül, a diákok rendelkezésére áll-e más megoldási módszer, technika, amely nem standard egyenletrendszerek megoldásakor használható lehet. Konkrétan: eszükbe jut-e teljes négyzetek kialakítása (7-8. osztályban a rövidített számítási képletek tanulásakor többszörösen ismert egyenletek megoldása során már találkozhattak hasonló ötlettel), esetleg a nevezetes középértékek közötti, vagy más egyenlőtlenség (Cauchy) felhasználása. Igaz, az utóbbi években a négyzetes középérték már nem kötelező iskolai tananyag, így a középiskolások egy részének eszébe sem juthatott. Néhány éve ugyancsak nem tananyag az analitikus térmértan, így a geometriai jellegű megoldás is csak az egyetemisták stratégiai eszköztárában szerepelhet. Az eredményeket az alábbi táblázat foglalja össze:

	Középiskolás tanuló	Egyetemi hallgató
Teljes, helyes megoldás	3/23 $\approx$ 13%	8/24 $\approx$ 33,34%
Jó sejtés bizonyítás nélkül	10/23 $\approx$ 43,5%	9/24 $\approx$ 37,5%
Geometriai gondolat	0/23 $\approx$ 0%	3/24 $\approx$ 12,5%
Hibás megoldás	10/23 $\approx$ 43,5%	7/24 $\approx$ 29,16%

A második feladat esetén arra voltam kíváncsi, hogy a diákoknak eszükbe jut-e egy algebrai probléma esetén a geometriai úton való próbálkozás. Észreveszik-e, hogy a gyökkifejezések szakaszhosszként reprezentálhatók, így tulajdonképpen két szakasz összhosszáról kell kimutatniuk, hogy nem kisebb, mint egy harmadik szakasz hossza. És ha eddig eljutnak, sikerül-e olyan ábrát készíteni, amelyről már könnyen leolvasható a háromszög-egyenlőtlenség.

	Középiskolás tanuló	Egyetemi hallgató
Teljes, helyes megoldás	3/23 $\approx$ 13%	4/24 $\approx$ 16,67%
Ebből geometriai úton	3/23 $\approx$ 13%	2/24 $\approx$ 8,33%
Geometriai gondolat	4/23 $\approx$ 17,4%	6/24 $\approx$ 25%
Nem oldotta meg	20/23 $\approx$ 87%	20/24 $\approx$ 83,33%

A 3. feladat célja annak fölmérése volt, hogy a diákok mennyire képesek akár több ábrázolási kísérlet útján valamilyen sejtést megfogalmazni, illetve eszükbe jutnak-e a geometriai transzformációk vagy a komplex számok geometriai alkalmazásai a sejtés bizonyítása érdekében.

	Középiskolás tanuló	Egyetemi hallgató
Teljes, helyes megoldás	0/23 $\approx$ 0%	0/24 $\approx$ 0%
Jó sejtés bizonyítás nélkül	7/23 $\approx$ 30,43%	5/24 $\approx$ 20,83%
Komplex számok alk. gondolata	0/23 $\approx$ 0%	0/24 $\approx$ 0%
Transzformációk alk. gondolata	0/23 $\approx$ 0%	0/24 $\approx$ 0%
Sejtés sincs	16/23 $\approx$ 69,57%	19/24 $\approx$ 79,17%

3.2. A fejlesztés céljai és módszere

Az előmérés eredményeiből kiderült, hogy úgy a középiskolás diákok, mint az egyetemi hallgatók eszköztára meglehetősen hiányos az olyan matematikai problémák megoldását illetően, ahol az a probléma kijelentésétől eltérő, más reprezentációban való gondolkodást igényel, vagy a más területen való okoskodás egyszerűbb, átláthatóbb a szövegezés adta kézenfekvő megoldásmódnál.

Ugyanakkor az is megfigyelhető, hogy még azok a diákok is, akikben megszületik a probléma egy más szemszögből való megközelítésének gondolata, több esetben nem tudják kivitelezni a teljes megoldást, ami az adott területre vonatkozó ismerethiányra utal.

Mindemellett, mivel többüknek semmilyen tapasztalatuk nincs nem standard, az osztályszintű feladatoktól eltérő problémák megoldásában, még a feladat megoldására (eredményére) vonatkozó valamilyen sejtés megfogalmazása is nehézséget jelent.

3.2.1. A fejlesztés céljai

A megfigyelések alapján a következő célokat fogalmaztam meg a fejlesztő foglalkozásokra vonatkozóan:

- a problémamegoldás lépéseinek tudatosítása

- általános heurisztikus eljárások, stratégiák tanítása problémamegoldás útján
- a transzformációelv mint általános heurisztikus eljárás alkalmazása
- különböző reprezentációkban való gondolkodásra nevelés a feladat szövegezésének mélyrehatóbb vizsgálata által; az „árulkodó jelek” megfigyelésére való érzékenység kialakítása és fejlesztése
- az egyes objektumok struktúráját legjobban szemléltető reprezentációk kiválasztásának felismerése
- vizuális problémareprezentációk készítése, elemzése
- új problémák megfogalmazása egy adott modellen történő módosítással
- kísérletezés alapján történő sejtések megfogalmazásának elősegítése

3.2.2. A fejlesztés módszere

Úgy a középiskolás diákok, mint az egyetemi hallgatók számára három hónapon keresztül, heti másfél órás fejlesztő foglalkozást tartottam tanítás utáni szakkör formájában. Minden foglalkozáson körülbelül 12-15 diák vett részt, tehát két-két szakkör zajlott egymás után középiskolásoknak, illetve egyetemistáknak egyaránt. A diákok a foglalkozásokon inkább párban, néha 3-4 fős kiscsoportokban dolgoztak. A diákok minden foglalkozás elején megkapták az aznapi feladatokat anélkül, hogy közöltem volna, hogy azok milyen témakörbe tartoznak. Igyekeztem elősegíteni az önálló felfedezést, így közvetlenül a probléma kitűzése után semmilyen segítséget nem adtam a megoldásra vonatkozóan. Segítő kérdésekkel, ötletekkel csak azután avatkoztam be, ha már teljesen elakadtak, és ők igényelték a segítséget. Minden foglalkozás végén az aktuális téma elmélyítése érdekében önálló megoldásra szánt házi feladatot kaptak a diákok, melyeket a következő foglalkozáson mindig megbeszeltünk.

4. A fejlesztés folyamata és értékelése

A feldolgozott problémák *három fő stratégia* köré szerveződtek:

1. Algebrai kijelentés - geometriai megoldás
Szintetikus, analitikus és trigonometrikus megoldásmódok
2. Geometriai kijelentés - algebrai megoldás
A Descartes-féle koordináta-rendszer felhasználása
A Gauss-féle komplex számsík alkalmazása
3. Alkalmas függvény bevezetése
Elemi függvények tulajdonságainak felhasználása
A matematikai analízis elemeinek alkalmazása

4.1. Algebrai problémák geometriai reprezentációi

Az első stratégiát algebrai szövegezésű feladatok, konkrétan egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek és szélsőérték-problémák megoldásának, különböző algebrai összefüggések bizonyításának a tanórákon megszokott tipikus módszerektől eltérő, más szemléletmódja révén kívántam bemutatni, elmélyíteni.

Céлом az volt, hogy a diákok algebrai szövegezésű problémák láttán is képesek legyenek aktivizálni mértantudásukat, a geometria szemüvegén keresztül is képesek legyenek tanulmányozni egy algebrai problémát, hiszen bizonyos esetekben az ilyen megközelítésmód eredményesebb a

tanórákon begyakorolt és reflexszerűen alkalmazott megoldási módszereknél. Például nem standard algebrai problémák esetén gyakran célravezető, nyerő stratégiai jellegű ötlet, valamilyen vizuális modell készítése, és a probléma geometriai úton való tárgyalása.

Olyan modellek készítésével foglalkoztunk, amelyek valamilyen algebrai szövegezésű feladat szintetikus-, analitikus-, vektorgeometriai vagy éppen trigonometriai megoldásmódját segítik elő. A feladatok többségénél általában, ha található a geometria egyik területén való tárgyalásmódot lehetővé tevő modell, akkor készíthető más területen való okoskodást lehetővé tevő modell is.

4.1.1. Szintetikus geometria

Amikor a feladat szövegezésében valamilyen geometriai objektum hosszára, területére vagy térfogatára vonatkozó összefüggéshez hasonló kifejezések jelennek meg „gyanút foghatunk”. Természetesen ezek felismerése megfelelő mennyiségű matematikai ismeretet, és azok között megfelelő minőségű kapcsolatrendszert feltételez.

Néhány tipikus, a problémák szövegében gyakran előforduló „árulkodó jel”:

- $\sqrt{x^2 + y^2}$ - téglalap átlójának, derékszögű háromszög átfogójának hossza
- $x\sqrt{2}$ - négyzet átlójának, egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogójának hossza
- $\sqrt{x^2 - y^2}$ - derékszögű háromszög egyik befogójának hossza
- $x^2 + y^2 \pm xy$ - háromszög valamely oldalhosszának négyzete
- $A \pm B \cdot \cos \alpha$ vagy $A \pm B \cdot \sin \alpha$ - háromszög valamelyik oldalhosszának négyzete
- $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ - téglatest testátlójának hossza
- $x\sqrt{3}$ - kocka testátlójának hossza
- $x \cdot y$ - téglalap területe
- $x \cdot y \cdot z$ - téglatest térfogata

4.1.2. Koordinátageometria

Az előző részhez hasonlóan, általában valamilyen geometriai objektum hosszára, területére vagy térfogatára vonatkozó összefüggésre utaló, a feladat szövegében szereplő kifejezés felfedezése a célravezető.

Néhány tipikus, a problémák szövegében gyakran előforduló „árulkodó jel”:

- $\sqrt{x^2 + y^2}$ - pont távolsága az origótól
- $\sqrt{(a-b)^2 + (c-d)^2}$ - két pont távolsága
- $a \cdot x + b \cdot y = c$ - egyenes egyenlete, általában feltételként
- $x^2 + y^2 = c$ - origó középpontú kör egyenlete
- $\sqrt{1 - x^2}$ - origó középpontú, egység sugarú körön levő pont ordinátája, tehát távolsága az Ox tengelytől
- $x^2 + y^2 + z^2 = c$ - origó középpontú gömb egyenlete
- $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d$ - sík egyenlete

Ha a kijelentésben szereplő kifejezések előállíthatók valamilyen koordinátájú vektorokkal végzett műveletek, illetve azokra vonatkozó tulajdonságok leírásaként, érdemes segítségül hívni azokat. Gyakori például valamilyen vektor abszolút értékének, két vektor skaláris szorzatának, vagy éppen ezekre felírt megfelelő nevezetes egyenlőtlenségnek az alkalmazása. A foglalkozásokon

két vektor skaláris szorzatának kétféle módon való felírása, a háromszög- illetve sokszög-egyenlőtlenség, valamint a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz-, és a Minkowski-egyenlőtlenségek fordultak elő.

4.1.3. Trigonometria

Bizonyos egyenletek, illetve egyenletrendszerek esetén előnyös lehet valamilyen trigonometrikus helyettesítés elvégzése, majd az így kapott egyenletek trigonometriai úton való kezelése. Általában, ha az egyenletben $\sqrt{1-x^2}$ vagy x^2+y^2 alakú kifejezések jelennek meg, ahol $|x|, |y| \leq 1$, akkor érdemes megpróbálni az $x = \sin \alpha$, $y = \cos \alpha$ helyettesítést, míg $\sqrt{1+x^2}$ alakú kifejezés esetén az $x = \operatorname{tg} \alpha$ vagy az $x = \operatorname{ctg} \alpha$ helyettesítés vezethet célba.

4.1.4. A stratégiát szemléltető példa

Az első stratégiát az alábbi példával szemléltetem. A foglalkozások szellemében megadom a segítő, rávezető kérdéseket is, majd a megoldást ezek mentén vezetem végig.

4.1. Feladat. *Bizonyítsd be, hogy ha az $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ számok esetén $4a+3b=12$ és $3d-4c=12$, akkor*

$$\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2} + \sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2} \geq 7,68.$$

Segítő kérdések:

- Mire emlékeztetnek a feltételek? Hát a gyök alatti kifejezések?
- Meg tudnád-e jeleníteni a feltételeket valamilyen geometriai modellen?
- Hogyan ábrázolhatók ekkor a gyökök? Miként jelenik meg a kapott ábrán az összegük?
- Hogyan ábrázolható a minimális összeg?
- Mikor van éppen egyenlőség az egyenlőtlenségben?
- Adott háromszögbe írt háromszögek közül melyiknek minimális a kerülete? Hogyan tudnád bizonyítani?

Megoldás: A feltételben két egyenes egyenlete szerepel. A $\sqrt{a^2+b^2}$ geometriailag az origónak és az $A(a,b)$ pontnak a távolságát jelenti. Hasonlóan $\sqrt{c^2+d^2}$ az origónak és a $B(c,d)$ pontnak a távolsága, és a bizonyítandó egyenlőtlenség bal oldalán a harmadik kifejezés pontosan az AB szakasz hossza.

Ha tekintjük az O középpontú derékszögű koordináta-rendszert, a feladat feltételei azt jelentik, hogy az $A(a,b)$ pont a $d_1: 4x+3y=12$ és a $B(c,d)$ pont a $d_2: -4x+3y=12$ egyenesen mozog. (1. ábra) Ezekkel a feltételekkel a bizonyítandó egyenlőtlenség

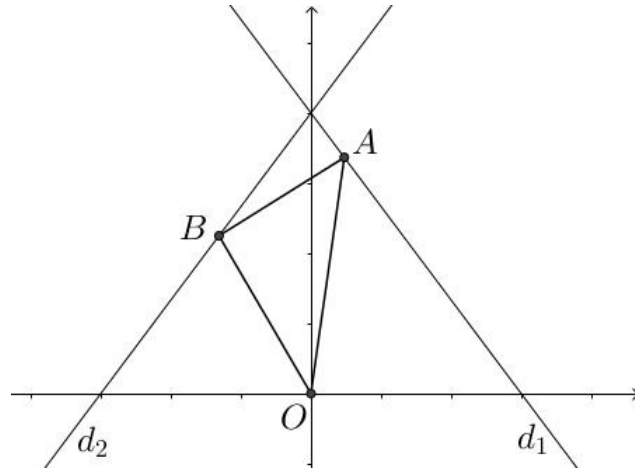
$$OA + OB + AB \geq 7,68$$

alakba írható, és bizonyítani kell, hogy az OAB háromszög kerülete nem kisebb 7,68-nál.

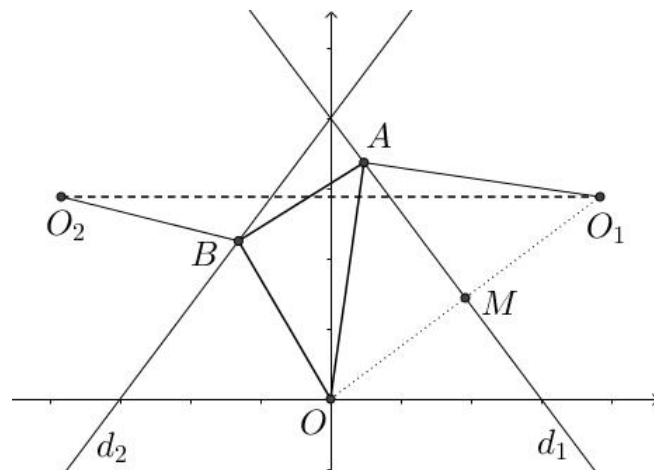
Feladatunk hasonlít a Fagnano-feladatra, amelyben egy háromszögbe írható háromszögek közül a legkisebb kerületűt kell meghatározni. Ezért az OAB háromszög oldalait terítsük ki úgy, hogy a terület két rögzített pont közti távolságot fejezzon ki. Vegyük fel O -nak a d_1 -re vonatkozó O_1 , és a d_2 -re vonatkozó O_2 szimmetrikusát. (2. ábra) Így $OA = O_1A$ és $OB = O_2B$, tehát

$$OA + OB + AB = O_1A + O_2B + AB.$$

Másrészt $O_1A + O_2B + AB \geq O_1O_2$, tehát $OA + OB + AB \geq O_1O_2$.



1. ábra. A minimális kerületű beírt háromszög



2. ábra. Fagnano feladata

Ha az $[O_1O_2]$ hossza 7,68, akkor a bizonyítás teljes, ha annál nagyobb, akkor a feladatbeli egyenlőtlenség élesíthető, míg ha annál kisebb, akkor a feladatbeli egyenlőtlenség nem igaz. Tehát a feladat megoldása érdekében elégséges kiszámítani az $[O_1O_2]$ hosszát.

Észrevehető, hogy ha O_1 koordinátái x_1 és y_1 , akkor az O_2 koordinátái $-x_1$ és y_1 , mert szimmetrikusak az Oy tengelyre nézve, így $O_1O_2 = 2x_1$. Tehát elég meghatározni x_1 -et.

Az OO_1 egyenlete $y = mx$ alakú, és az $OO_1 \perp d_1$ feltételből adódik, hogy $m = \frac{3}{4}$. Ha $OO_1 \cap d_1 = \{M\}$, melynek koordinátái x_2 és y_2 , akkor $x_1 = 2x_2$ és $y_1 = 2y_2$, mert M az $[OO_1]$ felezőpontja. Az M koordinátáira igaz tehát, hogy

$$\begin{cases} 3x_2 + 4y_2 = 12 \\ y_2 = \frac{3}{4}x_2 \end{cases}$$

Innen $x_2 = \frac{48}{25}$, és így $O_1O_2 = 4x_2 = \frac{192}{25} = 7,68$. Tehát az egyenlőtlenség igaz, hiszen

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} + \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2} = OA + OB + AB \geq O_1O_2 = 7,68.$$

Egyenlőség akkor áll fenn, amikor az A és B pontok a d_1 és d_2 egyenesek O_1O_2 által elmetezett pontjai. Ekkor $a = 0,84$, $b = 2,88$, $c = -0,84$ és $d = 2,88$. Az így kialakuló OAB háromszög éppen a két egyenes és az Ox tengely által alkotott nagy háromszög talpponti háromszöge.

Megjegyzések: 1. A feltételek és a gyökök geometriai megjelenítése némi segítséggel viszonylag egyszerűen ment, ám a háromszög oldalainak „kiterítése” a minimum érdekében, csak 1-2 diáknak jutott eszébe. Az ötlet közkinsé tétele után, a számításokkal már egyszerűbb vagy bonyolultabb módon ugyan, de elboldogultak, a minimumot és a minimumhelyeket is sikerült meghatározniuk.

2. Mivel a diákok közül senki sem ismerte a Fagnano-feladatot, ezért Fejér Lipótnak a tükrözéses, terület-kiterítéses módszerével bizonyítottuk, hogy adott háromszögbe írt háromszögek közül a talpponti háromszög a minimális területű.

4.2. Geometriai problémák - algebrai eszközök

A második stratégia szemléletében az előzőnek éppen a fordítottja: geometriai szövegezésű feladatok algebrai eszközökkel való megközelítése. Az előző rész szemléletéhez képest a diákoknak talán valamennyivel természetesebb a geometriai jellegű problémák algebrai úton való tárgyalása, de ez sajnos nem azt jelenti, hogy sokkal hatékonyabban és eredményesebben kezelnek az ilyen jellegű problémákat, csupán annyit, hogy a matematikának erre a területére való lépés, ebbe az irányba való váltás, az iskolai gyakorlatban megszokottabb a fordított irányhoz képest.

Céлом ennek a stratégiának a tanításával annak illusztrálása volt, hogy tipikusan geometriai szövegezésű feladatok megoldása, néha algebrai eszköztár bevetését kívánja.

4.2.1. A Descartes-féle koordináta-rendszer felhasználása

Az analitikus mértan a geometriának az algebrahoz legközelebb álló része, tulajdonképpen egyfajta algebra, hiszen a koordináta-rendszer megfelelő megválasztása után, az objektumok közötti geometriai viszony algebrai eszközökkel vizsgálható. A nyilvánvalóság kizárása érdekében igyekeztem olyan mértanfeladatokat választani, amelyek szövegezése nem árulkodik koordináták bevezetéséről, tehát nem szerepelnek benne például koordinátákkal megadott pontok. Így a feladatok megoldása során a nehézséget minden esetben inkább a vizsgált alakzatoknak a koordináta-rendszerben való megfelelő elhelyezése okozta. A tanulmányozott objektumok rögzítése után, az azok közötti viszonyok leírása és a kért összefüggések bizonyítása már egyszerűbben ment.

4.2.2. A Gauss-féle komplex számsík alkalmazása

A komplex számok segítségével megoldható feladatok tulajdonképpen minden esetben koordinátageometriai eszközökkel is megoldhatók, hiszen a Gauss-féle komplex számsík és a Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszer ekvivalenciája miatt egy pont affixumának valós, illetve imaginárius része egyenértékű annak koordinátáival.

Ennek ellenére bizonyos esetekben, főleg ha a feladatban valamilyen objektumok elforgatása szerepel, célszerűbb a komplex számsíkon dolgozni, hiszen két komplex szám szorzata geometriailag forgatva nyújtásnak felel meg. Így aztán forgatások segítségével sok esetben könnyen igazolható valamilyen alakzat szabályos volta vagy két egyenes merőlegessége, esetleg párhuzamossága.

4.2.3. A stratégiát szemléltető példa

4.2. Feladat. Egy 60° -os szög egyik szárán elhelyezkedő A , illetve A_1 pontoknak a szög csúcsától mért távolsága p , illetve $2q$; a másik száron elhelyezkedő B , illetve B_1 pontoknak a csúcsától mért távolsága pedig q , illetve $2p$. Az $[A_1B_1]$ szakasz felezőpontja C . Milyen természetű az ABC háromszög?

Segítő kérdések:

- Mi van megadva és mit kér a feladat? Készíts ábrát!
- Ki tudnád számítani a pontok affixumait az adatok segítségével?
- Meg tudnál fogalmazni valamilyen sejtést a keletkező háromszög természetére vonatkozóan?
- Hogyan tudnád bizonyítani ezt? Milyen lehetőségek vannak? Melyik előnyös, melyik kevésbé az?

Megoldás: Az egyszerűség kedvéért legyen a szög csúcsa az origóban, az $[OA]$ szára pedig legyen a valós tengely. A másik szár ennek 60° -kal való elforgatottja pozitív trigonometrikus irányba. (3. ábra) Ha a forgatás egységét

$$\epsilon = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \epsilon^3 = -1$$

jelöli, akkor

$$a = p, \quad a_1 = 2q, \quad b = q \cdot \epsilon, \quad b_1 = 2p \cdot \epsilon.$$

Mivel C az $[A_1B_1]$ felezőpontja, ezért $c = p \cdot \epsilon + q$.

1. módszer. Az ABC háromszög szabályos, ha például B a C pontnak az A pont körüli $+60^\circ$ -kal való elforgatottja, azaz

$$b - a = (c - a) \cdot \epsilon.$$

A fölirt affixumokat behelyettesítve

$$q \cdot \epsilon - p = (p \cdot \epsilon + q - p) \cdot \epsilon,$$

$$p(\epsilon^2 - \epsilon + 1) = 0,$$

ami igaz, mert $\epsilon^3 = -1$ miatt $\epsilon^2 - \epsilon + 1 = 0$.

2. módszer. Az affixumok értékét behelyettesítjük a szabályos háromszög csúcsainak affixumaira vonatkozó szükséges és elégséges feltételbe. Ekkor

$$p^2 + q^2 \cdot \epsilon^2 + p^2 \cdot \epsilon^2 + 2pq \cdot \epsilon + q^2 = pq \cdot \epsilon + pq \cdot \epsilon^2 + q^2 \cdot \epsilon + p^2 \cdot \epsilon + pq.$$

$$\begin{aligned} p^2(\epsilon^2 - \epsilon + 1) + q^2(\epsilon^2 - \epsilon + 1) &= pq(\epsilon^2 - \epsilon + 1), \\ (p^2 - pq + q^2)(\epsilon^2 - \epsilon + 1) &= 0, \end{aligned}$$

Megjegyzés: A feladattal önállóan boldogultak a diákok, és a háromszög szabályosságának mindkét módon való igazolása előfordult a megoldásokban. Akik nem teljesen biztosak a forgatások felírásában, inkább a 2. módszert, az azonosságba való behelyettesítést részesítik előnyben. Végül a feladat hasonlóságon alapuló szintetikus geometriai megoldására is kitértünk.

A fejlesztő foglalkozássorozatot utolsó harmadában olyan, a diák számára nagyrészt ismeretlen problémákat vizsgáltunk, amelyek célirányos megoldása érdekében valamilyen függvény bevezetése indokolt, majd a talált függvény bizonyos tulajdonságának tanulmányozása vezet el a megoldáshoz.

4.3.1. Elemi függvények tulajdonságainak felhasználása

11

4.3.2. A matematikai analízis elemeinek alkalmazása

A differenciál- és integrálszámítás a 11., illetve 12. osztályos romániai matematikatanítás központi eleme, így hangsúlyosan végigkíséri e két évfolyam tananyagát. A számtalan elemi, de akár többszörösen összetett függvény deriválása és a különböző integrálszámítási technikák mellett, a terület és térfogatszámítást leszámítva, kevés idő jut az analízis eszközeinek akár a matematikán belüli alkalmazásának tárgyalására. Ennek a hiánynak a pótlása érdekében végül olyan problémákat tanulmányoztunk, melyek megoldása igen egyszerű differenciál-, esetleg integrálszámítás bevonásával.

4.3.3. A stratégiát szemléltető példa

4.3. Feladat. Oldd meg az $\begin{cases} x - \sqrt{y} = 1 \\ y - \sqrt{z} = 1 \\ z - \sqrt{x} = 1 \end{cases}$ egyenletrendszert!

Segítő kérdések:

- Milyen szerkezetűek a rendszer egyenletei? Mit veszel észre?
- Át tudnád alakítani a rendszert? Hogyan tudnád kifejezni az egyik ismeretlent?
- Fel tudnál írni a három egyenlet alapján egy olyan egyenletet, amelyben csak az egyik ismeretlen szerepel?
- Milyen alakú ez az egyenlet? Mi következik ebből?

Megoldás: Mivel az egyenletekben csak két-két ismeretlen szerepel, ezért mindenikből kifejezve az elsőfokú tagot, majd egymásba helyettesítve egy egyismeretlenes egyenletet kapunk:

$$\begin{cases} x = 1 + \sqrt{y} \\ y = 1 + \sqrt{z} \\ z = 1 + \sqrt{x} \end{cases} \implies x = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{x}}}.$$

Tekintsük az

$$f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 1 + \sqrt{x}$$

függvényt. Ekkor a fenti egyenlet $f(f(f(x))) = x$ alakba írható, és az $f \circ f \circ f$ függvény fixpontját keressük. Mivel f szigorúan növekvő, ezért

$$f(f(f(x))) = x \iff f(x) = x \iff 1 + \sqrt{x} = x, \quad x \geq 1,$$

ahonnan rendezés, majd négyzetre emelés után kapjuk, hogy $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, de az egyenletnek csak az $x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ megoldása. Tehát $M = \left\{ \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right) \right\}$.

Megjegyzés: A feladat megoldásában az alábbi tulajdonság egy sajátos esetét használtuk, miszerint, az f szigorúan növekvő függvény fixpontja megegyezik az $f \circ f \circ \dots \circ f$ függvény fixpontjával, azaz

$$\underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{n\text{-szer}}(x) = x \iff f(x) = x.$$

A bizonyítás során beláttuk, hogy a függvény szigorúan növekvő tulajdonsága elégséges feltétel.

5. Az utómérés anyaga és értékelése

5.1. A mérés célja és módszere

A három hónapos tevékenységsorozatot követően a diákok egy zárómérésen vettek részt. Az előteszthez hasonlóan 90 perc alatt három, számukra ismeretlen problémát kellett minél részletesebben és akár többféle módszerrel megoldaniuk. A feladatok a következő képességek mérésére szolgáltak:

- kísérletezés alapján történő sejtések megfogalmazása, majd azok bizonyítása
- különböző reprezentációkban való gondolkodás, vizuális problémareprezentációk alkotása, elemzése
- a transzformációelv mint általános heurisztikus eljárás alkalmazása

Ezek mellett a diákoknak a problémamegoldási folyamatot végigkísérő tudatos metakognitív tevékenységének változására, fejlődésére is kíváncsi voltam.

5.2. A feladatok

1. Határozd meg az $x^2 + y^2$ kifejezés lehetséges legkisebb értékét, ha $5x + y = 7$ és $x, y \in \mathbb{R}$.
2. Határozd meg a $2xy + 2yz + xz$ kifejezés értékét, ha az $x, y, z > 0$ számok teljesítik a $3x^2 + 4y^2 + 6xy = 169$, $4y^2 + z^2 - 2yz = 25$, $3x^2 + z^2 + 3xz = 144$ összefüggéseket!
3. Oldd meg a $(2^x - 1)^2 = \log_2(\sqrt{x} + 1)$, $x \geq 0$ egyenletet!

5.3. A feladatok értékelése

Az első feladat esetén arra voltam kíváncsi, hogy a diákoknak eszükbe jut-e az algebrai szélsőérték-feladat geometriai úton való szemléletesebb megoldása az algebrai megoldáshoz képest, illetve hányan próbálkoznak esetleg mindkét módszerrel. A diákok eredményeit összesítő táblázat:

	Középiskolás tanuló	Egyetemi hallgató
Teljes, helyes megoldás	10/23 $\approx$ 43,48%	14/24 $\approx$ 58,34%
Ebből geometriai úton	4/23 $\approx$ 17,4%	6/24 $\approx$ 25%
Geometriai gondolat	13/23 $\approx$ 56,52%	16/24 $\approx$ 66,67%
Hibás megoldás	13/23 $\approx$ 56,52%	10/24 $\approx$ 41,66%

A második feladattal azt szándékoztam mérni, hogy egy algebrai szövegezésű feladat esetén eszükbe jut-e a diákoknak vizuális geometriai modell készítése, majd annak felhasználása a probléma sikeres megoldása érdekében. A diákok eredményeit összegző táblázat:

	Középiskolás tanuló	Egyetemi hallgató
Tökéletes megoldás	8/23 $\approx$ 34,78%	10/24 $\approx$ 41,67%
Helyes geom. modell	11/23 $\approx$ 47,82%	13/24 $\approx$ 54,16%
Geometriai gondolat	16/23 $\approx$ 69,56%	18/24 $\approx$ 75%
Semmilyen modell	7/23 $\approx$ 30,44%	6/24 $\approx$ 25%

A 3. feladat kitűzésével azt szándékoztam mérni, hogy a diákok milyen mértékben használnak függvénytanai eszközöket egyenletek megoldása során. Konkrétan eszükbe jut-e az egyenlet két oldalán álló kifejezésekről igazolni azok szigorú konvexitását, illetve konkavitását, ezáltal belátva,

hogy maximum két megoldás lehet, így azokat ki lehet találni. Esetleg észreveszik-e, hogy a két kifejezés egymás inverze, így az egyenlet egyszerűbb, könnyebben megoldható alakra hozható. A diákok eredményeit összegző táblázat:

	Középiskolás tanuló	Egyetemi hallgató
Tökéletes megoldás	6/23 $\approx$ 26,1%	10/24 $\approx$ 41,67%
Megoldás megsejtése	19/23 $\approx$ 82,6%	18/24 $\approx$ 75%
Inverzek észrevétele	4/23 $\approx$ 17,4%	14/24 $\approx$ 58,33%
Sejtés sincs	4/23 $\approx$ 17,4%	6/24 $\approx$ 25%

5.4. A mérések statisztikai összehasonlítása

Az utómérés eredményei egyértelműen igazolják a foglalkozások fejlesztő hatását úgy a középiskolások, mint az egyetemi hallgatók körében.

Jól látható, hogy nemcsak a hibátlan, teljes megoldást adók száma növekedett, hanem jelentősen nőtt azok száma is, akik esetleg figyelmetlenség, gyakorlatlanság, vagy éppen az adott probléma megkövetelte tárgyi tudás hiánya miatt nem oldották meg teljesen a illető feladatot, de többféle szemszögből megközelítették azt.

Tökéletes megoldások	Középiskolás tanuló	Egyetemi hallgató
Előteszt	6/69 $\approx$ 8,7%	12/72 $\approx$ 16,67%
Utóteszt	24/69 $\approx$ 34,78%	34/72 $\approx$ 47,22%

Lényegesnek tartom, hogy sokkal szembetűnőbb a pozitív változás a feladatok szövegezésétől eltérő megoldásmód, problémareprezentáció keresésére tett kísérletek számát tekintve. Míg az előteszten a három feladat más reprezentációban történő megoldására a középiskolások körében csupán 4, az egyetemi hallgatók között 9 sikeres vagy sikertelen kísérlet született összesen, addig az utóteszten ezek a számok 33-ra, illetve 48-ra növekedtek. Ezek a számok egyértelműen mutatják a foglalkozások pozitív hatását a diákok gondolkodásában végbement szemléletváltozás, gazdagodás tekintetében.

Más reprezentációk	Középiskolás tanuló	Egyetemi hallgató
Előteszt	4/69 $\approx$ 5,8%	9/72 $\approx$ 12,5%
Utóteszt	33/69 $\approx$ 47,83%	48/72 $\approx$ 66,67%

A foglalkozások fejlesztő hatását a két mérés statisztikai összehasonlítása révén elemeztem. Minden diák mindkét mérésen minden feladatára aszerint, hogy megoldotta, használható sejtése/modellje volt, vagy semmi érdemlegeset sem sikerült kezdenie az adott feladattal, 2, 1, illetve 0 pontot kapott. Azok a diákok, akik legalább két eltérő megoldást is adtak egy problémára plusz 1 pontot kaptak az illető feladatra. Így minden diák mindkét teszten 0 és $3 \cdot (2 + 1) = 9$ pont közötti minősítést kapott.

Mivel az elő- és utómérés eredményeire végrehajtott F-próba szerint a két adatsor szórása között nem mutatható ki szignifikáns eltérés, valamint mindkét adatsor megközelítőleg normál eloszlású, ezért a két adatsor átlagának szignifikáns eltérését egymintás párosított T-próbával ellenőriztem. Ez mindkét csoport eredményeinek szignifikáns növekedését mutatta, sőt ugyancsak szignifikáns növekedés figyelhető meg a teljesen hibátlan megoldást adók pontszámaira vonatkozóan is, és külön azok pontszámaira is, akik ugyan nem tudták megoldani teljesen a feladatot, de a probléma szövegétől eltérő, más használható reprezentációra váltottak. Így utóbbiak sikertelensége az adott területen levő tárgyi tudásuk, illetve gyakorlatuk hiányának tudható be.

6. Végkövetkeztetések

6.1. A hipotézisek igazolása

A diákok elő- és utómérésen közölt megoldásait összevetve, főleg az egyetemi hallgatók esetén egyértelmű változás figyelhető meg a problémamegoldási folyamatot végigkísérő metakognitív tevékenységük tekintetében is. Mindkét korosztály, de főleg az egyetemi hallgatók dolgozataiból az is kiderül, hogy nagy részük tudatosabban alkalmazza a különböző problémamegoldási heurisztikákat, illetve részletesebben számol be a feladatmegoldási folyamat során felvetődött ötleteiről, próbálkozásairól.

A fentiek és az előző rész alapján kijelenthető, hogy statisztikailag is alátámasztott az a kijelentés, miszerint a foglalkozásoknak fejlesztő hatása volt, hiszen úgy a középiskolások, mint az egyetemi hallgatók bizonyos problémamegoldó képessége, a feladat szövegétől eltérő, új reprezentációkban való gondolkodási képessége javult, a problémamegoldás során bevethető eszköztáruk bővült.

A kutatás igazolta az elején fölállított hipotéziseimet:

- megfelelő tananyaggal a diákok problémamegoldó képessége fejleszthető
 - a diákok tananyagrész-összekapcsoló, -szintetizáló képessége fejleszthető
 - a diákok vizuális problémareprezentáció-készítési és transzformációelv alkalmazási képessége fejleszthető
- a problémamegoldási heurisztikák tanítása révén a diákoknak a problémamegoldás során alkalmazható eszköztára bővíthető

6.2. Továbblépési lehetőségek

A problémamegoldási képesség eredményes fejlesztése csak hosszan tartó, szerteágazó és folyamatos munkával valósítható meg. Általános és középiskolás korban ennek legfőbb meghatározó tényezői az iskolai és az otthoni munka. Ezért nagyon fontos, hogy az osztályban való munka, nemcsak matematika, hanem egyéb órán is milyen szellemben zajlik. Emiatt szükségesnek tartom a heurisztikus problémamegoldási stratégiák explicit tanítását és tudatosítását nemcsak a szakkörök diákközönsége körében, hanem osztályszinten, a mindennapokban is. Továbblépésként egyik célom ennek megvalósítása lenne. Másik célom a fejlesztő tevékenységek feladatanyagának - amennyire lehetséges - a mindennapi matematikaóráim tananyagába való beépítése, valamint az érintett témakörök kibővítése más heurisztikus eljárásokra is kitérve.

Az egyetemi hallgatók körében végzett mérések ugyancsak azt mutatják, hogy számukra is fontos lenne akár egy választható problémamegoldó szeminárium hasonló témakörben.

Publikációs jegyzék

A szerző publikációi

1. **Nagy Örs**: *A reprezentációváltás mint problémamegoldási stratégia taníthatóságáról*, Polygon, 1 (2017)
2. **Nagy Örs**, András Sz.: *Approximated Poncelet configurations*, Teaching Mathematics and Computer Sciences, 13 (2015)
3. András Sz., **Nagy Örs**: *Measuring with unscaled pots - algorithm versus chance*, Electronic Journal of Mathematics and Technology, 4 (2010)
4. András Sz., Csapó H., **Nagy Örs**, Sipos K., Soós A., Szilágyi J.: *Kíváncsiságvezérelt matematikatanítás (Primas projekt)*, Státus Kiadó, Csíkszereda, 2010
5. Kupán P., Bencze M., **Nagy Örs**, et al.: *V. Erdélyi Magyar Matematikaverseny, 5-8. évfolyam*, Idea Studio, Szatmárnémeti, 2017
6. András Sz., Csapó H., David G., **Nagy Örs**, Szilágyi J., Zsombori G.: *I. Erdélyi Magyar Általános Iskolák Matematikaversenye*, Státus Kiadó, Csíkszereda, 2013
7. András Sz., Bencze M., Csapó H., David G., **Nagy Örs**, Szilágyi J.: *XXIII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny*, Prolog Kiadó, Nagyvárad, 2013
8. András Sz., Bencze M., Csapó H., Dávid G., Mészáros A., **Nagy Örs**, Szilágyi J.: *XXI. Erdélyi Magyar Matematikaverseny*, Státus Kiadó, Csíkszereda, 2011
9. András Sz., Mészáros A., **Nagy Örs**: *XIX. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny*, Státus Kiadó, Csíkszereda, 2010

Fontosabb előadások jegyzéke

1. *Kisebb kutatási feladatok a kíváncsiságvezérelt matematikatanítás tükrében* - Matematika- és informatika didaktikai kutatások konferencia, 2013. január 25-27., Debreceni Egyetem és Párciumi Keresztény Egyetem, Nagyvárad
2. *Semmi sem az, aminek látszik* - Magyar Tudomány Napja Erdélyben, Matematikadidaktika szekció, 2012. nov. 9-11., Kolozsvár
3. *Számítógépes kísérletezés, sejtés és bizonyítás a matematika tanításában* - Magyar Tudomány Napja Erdélyben, Matematikadidaktika szekció, 2011. nov. 4-6., Székelyudvarhely
4. *Kíváncsiságvezérelt matematikaoktatás* - Új utak és módok az oktatásban, BBTE Neveléstudományi konferencia, 2010. május, Kolozsvár
5. *Geometriai struktúrák számítógépes modellezése* - Minőségfejlesztés a matematikaoktatásban, BBTE tanártovábbképző, 2009, 2010, 2011. szept., Kolozsvár

Hivatkozások

- [1] Ambrus András: *A problémamegoldás tanításának elméleti alapjai*, Új Pedagógiai Szemle, 10 (2002), 157-169.
- [2] Ambrus András: *A konkrét és vizuális reprezentációk használatának szükségessége az iskolai matematikaoktatásban*, Magiszter, 3 (2003), 61-75.
- [3] Ambrus András: *Bevezetés a matematika-didaktikába*, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2004
- [4] Bloom, B. S., Engelhart, M. D., Furst, E. J., Hill, W. H., Krathwohl, D. R.: *Taxonomy of educational objectives: The classification of educational goals*, David McKay Company, New York, 1956
- [5] Claus, H. J.: *Einführung in die Didaktik der Mathematik*, Wissenschaftliches Buchgesellschaft, Darmstadt, 1989
- [6] Csíkos Cs., Szitányi J., Kelemen R.: *Vizuális reprezentációk szerepe a matematikai problémamegoldásban. Egy 3. osztályos tanulók körében végzett fejlesztő kísérlet eredményei*, Magyar Pedagógia, 110/2 (2010), 149-166.
- [7] Dörner, D.: *Emotion und problemlösendes Denken*. In. Mandl, H., Huber, G.: *Emotion und Kognition*, München, 1983
- [8] Devlin, Keith: *The Math Gene - How Mathematical Thinking Evolved And Why Numbers Are Like Gossip*, Basic Books, 2000
- [9] Dreyfus, T.: *A matematikai gondolkodás különböző oldalairól*. In Sternberg, R., Ben-Zeev, T.: *A matematikai gondolkodás természete*, Vince kiadó, Budapest, 1998
- [10] Fisher, R.: *Hogyan tanítsuk gyermekeinket gondolkodni?*, Műszaki könyvkiadó, Budapest, 2002
- [11] Garofalo, J., Lester, F. K.: *Metacognition, cognitiv monitoring, and mathematical performance*, Journal for Research in Mathematics Education, 16/3, 1985, 163-176.
- [12] Gick, M. L., Holyoak, K. J.: *Schema induction and analogical transfer*, Cognitive Psychology, 15 (1983), 1-38.
- [13] Goldin, G. A., Kaput, J.: *A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics*. In Steffe, L., Nesher, P., Cobb, P., Goldin, G., Greer, B.: *Theories of mathematical learning*, Erlbaum, Hillsdale, 1996
- [14] Goldin, G. A.: *Affective Pathways and Representation in Mathematical Problem Solving*, Mathematical Thinking and Learning, 2/3 (2000), 209-219.
- [15] Goldin, G. A.: *Representational Systems, Learning, and Problem Solving in Mathematics*, Journal of Mathematical Behavior, 17/3 (1998), 137-165.
- [16] Hámori József: *Az emberi agy asszimmetriái*, Dialog Campus, Budapest, 1999
- [17] Kosztolányi József: *A problémamegoldási stratégiák tanításáról*, PhD értekezés, Debreceni Egyetem, 2006

- [18] Lénárd Ferenc: *A problémamegoldó gondolkodás*, Gondolat kiadó, Budapest, 1985
- [19] Lester, F. K.: *Methodological Consideration in Research on Mathematical Problem-Solving Instruction*. In Silver, E. A.: *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives*, Routledge, New York and London, 2009
- [20] Lipman, M.: *Thinking in Education*, Cambridge University Press, Cambridge and New York, 2003
- [21] Mayer, R., Hegarty, M.: *A matematikai problémák megértésének folyamata*. In Sternberg, R., Ben-Zeev, T.: *A matematikai gondolkodás természete*, Vince kiadó, Budapest, 1998
- [22] Molnár Gyöngyvér: *Az életszerű feladathelyzetekben történő problémamegoldás vizsgálata*, Magyar Pedagógia, 101/3 (2001), 347-373.
- [23] Paivio, A., Begg, I.: *Psychology of language*, Prentice Hall, New Jersey, 1981
- [24] Pintér Klára: *A matematikai problémamegoldás és problémaalkotás tanításáról*, PhD értekezés, Szegedi Tudományegyetem, 2012
- [25] Pólya György: *A gondolkodás iskolája*, Akkord Kiadó, Budapest, 2000
- [26] Pólya György: *A problémamegoldás iskolája I-II.*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1967, 1968
- [27] Pólya György: *A matematikai gondolkodás művészete I-II.*, Gondolat Könyvkiadó, Budapest, 1988
- [28] Presmeg, N.: *Visualisation in high-school mathematics*, For the Learning of Mathematics, 6 (1986), 42-46.
- [29] Schoenfeld, Alan H.: *Problem Solving in the Mathematics Curriculum*, MAA Notes, 1983
- [30] Schoenfeld, Alan H.: *Mathematical Problem Solving*, Academic Press, INC., New York, 1985
- [31] Schoenfeld, Alan H.: *Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense-Making in Mathematics*. In Grouws, D.: *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning*, MacMillan, New York, 1992
- [32] Skinner, E. A., Belmont, M. J.: *Motivation in the classroom: Reciprocal effects of teacher behavior and student engagement across the school year*, Journal of Educational Psychology, 85/4 (1993), 571-581.
- [33] Tóth Péter: *A problémamegoldó gondolkodás fejlesztésének módszertana*, <http://www.fovpi.hu/data/cms42055/tppmgondolkodas.pdf>
- [34] Vincze Szilvia: *A matematikai képesség összetevőinek vizsgálata és kapcsolata az intelligenciával*, Magyar Pedagógia, 103/2 (2003), 229-261.
- [35] Wachsmuth, I.: *Two modes of thinking - also relevant for the learning of mathematics*. In *For the learning of mathematics*, 2 (1981), 38-45.
- [36] Wilson, J. W., Fernandez, M. L., Hadaway, N.: *Mathematical Problem Solving*. In Wilson, P. S. *Research Ideas for the Classroom: High School Mathematics*, MacMillan, New York, 1993

- [37] Wittmann, Erich Ch.: *Grundfragen des Mathematikunterrichts*, Vieweg+Teubner Verlag, 1981
- [38] Woodward, J., Beckmann, S., Driscoll, M., Franke, M., Herzig, P., Jitendra, A., Koedinger, K. R., Ogbuehi, P.: *Improving mathematical problem solving in grades 4 through 8: A practice guide*, National Center for Education Evaluation and Regional Assistance, Institute of Education Sciences, Washington DC., 2012
- [39] Zech, F.: *Grundkurs Mathematikdidaktik*, Belts Verlag, Basel, 1989

Feladatgyűjtemények

- [40] András Szilárd: *A matematika tanítása*, Státus Kiadó, Csíkszereda, 2009
- [41] Ábrahám Gábor: *Nevezetes egyenlőtlenségek*, Mozaik Kiadó, Szeged, 1995
- [42] Bogdán Zoltán: *Matematika feladatok, ötletek, megoldások középiskolásoknak, egyetemistáknak*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1995
- [43] Andrică Dorin și col.: *Geometrie pentru grupele de performanță*, Editura Studia, Cluj-Napoca, 2010
- [44] Czapáry Endre, Czapáry Endréné, Csete Lajos, Hegyi Györgyné, Irányiné Harró Ágota, Morvai Éva, Reiman István: *Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III.*, Nemzedékek Tudása Tankönyvkiadó, Budapest, 2005
- [45] Engel, Arthur: *Probleme de matematică - Strategii de rezolvare*, Editura Gil, 2006
- [46] Olosz Ferenc: *Egyenletek I-II.*, Zalamat Alapítvány, Nagykanizsa, 2012
- [47] Petrușel Adrian și col.: *Algebră pentru grupele de performanță*, Editura Studia, Cluj-Napoca, 2010
- [48] Pop Vasile, Lupșor Viorel și col.: *Matematică pentru grupele de performanță, clasa a IX-a*, Editura Dacia, Cluj-Napoca, 2004
- [49] Pop Vasile, Lupșor Viorel și col.: *Matematică pentru grupele de performanță. Exerciții și probleme, clasa a IX-a*, Editura Dacia, Cluj-Napoca, 2004
- [50] Pop Vasile, Lupșor Viorel și col.: *Matematică pentru grupele de performanță, clasa a X-a*, Editura Dacia, Cluj-Napoca, 2003
- [51] Pop Vasile, Lupșor Viorel și col.: *Matematică pentru grupele de performanță. Exerciții și probleme, clasa a X-a*, Editura Dacia, Cluj-Napoca, 2004
- [52] Reiman István, Dobos Sándor: *Nemzetközi matematikai diákolimpiák 1959-2003*, Typotex kiadó, Budapest, 2003
- [53] Reiman István: *Fejezetek az elemi geometriából*, Typotex kiadó, Budapest, 2002
- [54] Reiman István: *Geometria és határterületei*, Szalay Könyvkiadó és Kerereskedőház, Kisújszállás, 1999
- [55] Tudor Victor: *Probleme de algebră cu rezolvări ingenioase*, Editura Carminis, Pitești, 1999