

D/70

A MATEMATIKA KÖZÉPISKOLAI OKTATÁSÁBAN ELŐFORDULÓ NÉHÁNY
TIPIKUS HIBA GYAKORISÁGÁNAK FELMÉRÉSE ÉS JELLEMZÉSE

JÓZSEF ATTILA TUDOMÁNYEGYETEM
Pedagógiai-Pszichológiai
Szakcsoport Könyvtára

- Doktori értekezés -

A Szegedi József Attila Tudományegyetem Bölcsészettudományi
Karának benyújtotta

V a s k o r A n d r á s

1971

B e v e z e t é s

Mosonyi Kálmán "Tipikus gondolkodási hibák számolásból és mérésből az általános iskola felső tagozatában" című doktori disszertációjában tanulmányozta az egyes számolási hibák évről évre való következetes ismétlődését. Kísérleteivel megmutatta ezen tipikus hibáknak a kísérletben szereplő tanulók létszámához viszonyított százalékos előfordulását. Osztályozta a gondolkodási hibákat domináns okuk alapján. Mélyreható pedagógiai, pszichológiai és módszertani elemzés alapján javaslatot ad az egyes hibák gyakoriságának csökkentésére. Tanulmánya befejező részében említi: "Nyitott kérdés a fenti típusu hibák szerepe a középiskolában..., ez azonban külön tanulmányt igényelne." /17/ A teljesség és tökéletesség igénye nélkül vállalkozom e nyitott kérdést megközelíteni és 15 éves tapasztalatomat összegezni. A téma bonyolultsága és terjedelme miatt nem vállalkozhatom a középiskolai tananyagban előforduló minden tipikus hibának a feltárására. Különös figyelmet fordítok az algebrai műveletek, azonosságok, egyenletek, logaritmus és szögfüggvények témakörében előforduló hibákra, illetve hibatípusokra. Igyekszem ezen hibatípusok strukturáját általános formulában is megadni.

Eredményes matematikatanításunk szempontjából egyáltalán nem közömbös, hogy mi történik az általános iskolában tapasztalt hibákkal a középiskolában, hogyan javulnak százalékos összetételükben, hogyan játszanak szerepet a tanulók további munkájában, milyen újabb hibákkal gyarapodik a hibák száma? Mivel a középiskolai elsőéves algebra tananyagának egy része

az általános iskolai anyagot mintegy megismétli / geometriában még a felsőbb évfolyamokon is már az általános iskolában előfordult geometriai tételek, ismeretek újratárgyalásra kerülnek/, ezért szükséges és jogos az általános iskolában tapasztalt hibák sorsával törődni.

Vizsgálataim és kísérleteim elsődleges célja nem az, hogy az általános iskolából a középiskolába hozott hibákat felmérjem, osztályozzam és elemezzem, hanem az, hogy rámutassak ezen hibák súlyos következményeire abból a célból, hogy valóban az általános iskolákban és középiskolákban tanító kartársaim együttes munkája révén lehetséges a hibák előfordulását a minimálisra csökkenteni. Folytatni kell a középiskolában e hibák elleni küzdelmet lankadatlanul és tudatosan, bár a hibák jó részének eredete az általános iskolában gyökeredzik. A középiskolákban tanító egyik kartársam sem háríthatja a felelősséget az általános iskolára, mert:

- a./ A hibák egy része a legjobb tanári munka mellett is bizonyos százalékban előfordul /megszüntetni nem tudjuk, csak előfordulását csökkenthetjük/.
- b./ A gyermek nemcsak küllemre gyarapodik, fejlődik, alakul, hanem gondolkodásban, felelősségérzetben, megítélőképességben, absztraháló-képességben, és így tovább./Néhány hibát általános iskolában gyakran elkövet, a sorozatos ráhatás miatt esetleg ritkán, vagy egyáltalán nem követ el fejlettebb fokon./

A fentiekből következik, hogy a középiskolában tanító kartársak nincsenek feljogosítva arra, hogy pusztán unott is-

méltátlósan kezeljék ezeket az anyagrészeket, hiszen ilyen fel-fogás mellett az első súlyos hibát ők maguk követik el. Azok-nál a tanulóknál, akiknek hibákkal terhelték az előismeretei-ik ezen anyagrészeknél - általános iskolákból hozott problé-mák - ezek a hibák továbbra is megmaradnak és súlyos követke-zményekkel járnak továbbtanulásuk folyamán. Ezen hibák megmara-dása is többek között hozzájárul ahhoz, hogy egy-egy komolyabb feladat megoldásakor a tanuló kénytelen az idejét elfecsérelni részproblémák gyakorlati kivitelezésével /ha egyáltalán ész-reveszi, hogy valami problematikus számára/ ahelyett, hogy szellemi energiáját a feladat elvi, komplex megoldására for-dítaná.

Feltétlenül kívánatos, hogy elsőéveseink középisko-lai tanulmányaikat úgy kezdjék, hogy felmérő dolgozatot ira-tunk velük - osztályozás ígénye nélkül - , melyben gondosan összegyűjtjük azokat a feladatokat, amelyek megoldása során várható a már általános iskolában kialakult tipikus hibák el-követése. Ezen dolgozatok értékelése teszi világossá a tanár számára, hogy ne az önmaga számára tetszetős és megszokott praktikus módon tárgyalja ezeket az anyagrészeket, hanem min-den osztályban az adott valóságos helyzetből induljon ki. Igen sok tanár esetében találó Faragó László /7/ megállapítása: "Tanításuk halad tovább a maga rutin által taposott útján,... a problémákba nem mélyülnek el, oktató és nevelő munkájukat... nem szervezik meg a kitűzött célok értelmében." Ne olyan hi-bákra gondoljunk itt, amelyek kimondottan elemi hibák /tizedes vessző, helyi értékből és nagyságrendi viszonyokból származó

hibák, különböző numerikus számolási hibák /, hanem a későbbiek során említett hibákra.

Tanulmányom másik célja azon tipikus hibák egy részének feltárása, elemzése, amelyeknek "szülőházaja" a középiskolai matematika óra. Tizenöt éves gyakorlatom alatt, amely során mint matematika tanár, szakkörvezető, osztályfőnöki munkaközösség vezető, szakmai munkaközösség vezető, kollégiumi nevelő és számos, a matematikával bajlódó tanuló instruktora összegyűjtöttem ezeket a tipikus hibákat. Természetesen az általam összegyűjtött hibák lajstroma nem tekinthető teljesnek, mert:

- a./ az egyedi hibák tanulmányozása nem képezi tárgyát a tanulmánynak,
- b./ gyakorlott kartársaim további tipikusnak minősíthető hibákat tudnának felsorolni,
- c./ az általam tapasztalt hibák közül a legtipikusabbakat sorolom fel,
- d./ a középiskolai tananyag korszerűsítésével olyan új anyagrészek is bekerültek a középiskolai tananyagba /ábrázoló geometria problémái, vektoralgebra, analízis egyes kérdései/, amelyek eredményes tanításának tapasztalatait csak az elkövetkezendő években szűrhetjük le. Ezen anyagrészeknél előforduló tipikus hibák elemzését feltétlenül meg kell előznie a tanulók absztraháló-képességének szintjével kapcsolatos vizsgálatnak, hiszen ezekben a tananyagrészekben döntő szerepet játszik az absztraháló-képesség és ennek hiányos voltából származó tipikus hibák.

A főiskolai hallgatók munkájában előforduló tipikus hibák kérdése külön tanulmányt igényel. A középiskolai tananyag bővülése folytán fellépő hibák vizsgálata elvégezhető lenne főiskolai hallgatók munkájában. / Hiszen az említett anyagrészek jó része a felsőoktatás anyagából való levitel útján került a középiskolába. / De nem lenne szerencsés az itt nyert tapasztalatokat általánosítani középiskolai vonatkozásban is /egyrészt életkori sajátosság miatt, másrészt azon oknál fogva, hogy a főiskolán matematika szakon már csak a "jobbak" foglalkoznak matematikával./

Amellett, hogy gyakorlati munkám során évről-évre gazdagodott tapasztalatom a tipikus hibák számát és minőségét illetően, tapasztaltabb kartársaim segítségének sokat köszönhetek, akikkel konzultálhattam egy-egy hiba problémáiról. Köszönetet mondok a fent említett kollégáknak, továbbá azoknak a kartársaknak, akik közvetve vagy közvetlenül segítettek a vizsgálatok és kísérletek véghezvitelében.

Tanulmányomban a tipikus hibák okára való rámutatás mellett egyidőben a javítás egyik vagy több módját is tárgyalom. Ezeket a javítási módokat sikeresen alkalmaztam a hibák csökkentésében. Természetesen a tárgyalt eljárás csak egyike a sok javítási lehetőségnek, esetleg nem is a leghatásosabb.

"A gyermekek írásbeli dolgozatainak ... tanulmányozása és elemzése igen sok szempontból adhat értékes anyagot a kutatás számára. Következtetni tudunk belőle a gyermekek tudására, különböző képességeikre: gondolkodásuk, képzeletük fejlettségére ... tanulságokat kell levonnunk a gyermekekről

nyert tapasztalatból a nevelő-oktató munkánkra vonatkoztatva" - írja Ágoston György /1/.

Azok a kartársak, akik szintén éveken keresztül tanulmányozzák e problémát - kísérleteket végeznek, egy-egy nagyobb anyagrészt befejezése és összefoglalása után íratott iskolai "nagy" dolgozat kijavítása után nemcsak statisztikát készítenek a jeles, jó ..., elégtelen dolgozatokról és a dolgozatok értékelése nemcsak ezen statisztika kihirdetéséből áll, hanem minden pirossal aláhuzott hiba önmaga számára is jelent valamit, amelyen elgondolkodik - további javítási lehetőséggel gazdagíthatják az általam alkalmazott eljárást.

A hibakutatás rövid történeti áttekintése

"A természettudós tudja, hogy hiba nélkül észlelet nem gondolható. Azért vizsgálatainál előre megállapítja azokat a határokat, amelyek között az észlelési hibák mozoghatnak és másra nem is törekszik, minthogy e kétségtelenül hibás észleleti adatokból kiszámítsa a legvalószínű eredményt. Ha azonban azt tapasztalja, hogy az észlelet hibái következetesen a megszokott határokon túl vannak, akkor keresi azokat az okokat, amelyek e hibákat előidézhetik... Különös figyelemmel kell követni azokat a hibákat, melyek makacsabbak, jelentősebbek, tervszerűbbnek látszanak a közönséges apró hibáknál és nem szabad elmulasztani e hibák okainak gondos kutatását, és a kelendő diagnózis után azok orvoslását" - írja Beke Manó /2/.

A pedagógusok egy része nem vesz tudomást a tanulók matematikai munkájában évről-évre tapasztalható hibákról illetve prakticista álláspontot foglalnak el. "Én a szakmódszertani könyvek, elvek figyelembevételével tanítok, tehát a tanulók gyenge képessége miatt fordulnak elő ezek a hibák" - mondják egyesek. "Teljesen fölösleges az észlelt hibák ellen küzdeni, hiszen a középiskola létszámának jelentős bővülése miatt a nagy tömeg egy része ugyanis csak visszahuzó erő, nincs tehetsége a matematikához, erőmet inkább csak a jobbak számára kamatoztatom" - vallják mások. Ezek a pedagógusok elfelejtik, hogy az igazi út az lenne, hogy először a maguk eljárásában, másodszorban a tárgy természetében és csak harmadszorban keressék a

hibát a tanulóknál. Ez az út valóban szükségképpen ahhoz a módszerhez vezet, hogy a tapasztalt, tipikus hibákat felismerje, összegyűjtse, elemezze azokat gondolkodáslélektani vonatkozásban is, majd a hibák okainak megtalálása után próbálkozzék megelőzési eljárásokat alkalmazni. Ha ilyen irányú munkálkodása néhány százalékkal csökkenti a kritikus hibák előfordulásának számát, akkor is jelentős munkát végzett, hiszen valóban vannak olyan hibák, amelyeket a legjobb tanári munka mellett sem sikerül teljesen kiküszöbölni. A gondolkodás folyamata ugyanis magában foglalja az egyénben végbemenő teljes gondolkodási folyamatot a maga kerülőútjaival, tévedéseivel. Ha a gondolkodás folyamatából kihagyjuk a megoldás szempontjából kerülő- és téves lépéseket, akkor eljutunk a gondolatmenethez.

/ Logikai mozzanatok egymásutánja./ A gondolkodás folyamatában a pszichológiai és logikai mozzanatok között általában eltérés mutatkozik. Az oktatás folyamatában azonban a gondolkodás pszichológiai és logikai menete közel kerül egymáshoz. " Itt részben a tárgy logikája, részben a tanár által pontosabban körülhatárolt kérdések miatt a tanuló gondolkodása kénytelen bizonyos logikai keretek közt maradni... Itt is lesznek egyéni kitérők és tévedések, csak kisebb mértékben." /12/ Éppen itt rejlik a tanár egyik legfontosabb feladata, tudniillik igyekezzék az egyéni kitérők és tévedések mértékét minél kisebb százalékokra leszorítani. Az egyéni kitérők - amennyiben azok a helyes megoldáshoz mégis elvezetnek - nem csökkentik eredményes tanításunk mértékét, sőt azt mutatják, hogy a tanulók önállóan, sablonmentesen gondolkodnak.

/Természetesen az indokolatlanul nagy kitérők ködösítő hatásuk, zavarhatják a problémamegoldás tisztaságát/.

Eredményes matematikatanításunk a szaktárgyi kellékek mellett csak úgy képzelhető el, ha a pedagógus ismeri a tanulók gondolkodásának bonyolult folyamatát, ezért a gondolkodásra való nevelés központi szerephez jut a matematika tanításában. "Képzeljük magunkat a diák helyébe, éljük bele magunkat gondolkodásmódjába, próbáljuk megérteni, mi megy végbe a diák fejében" - írja Pólya György /20/. Nem véletlen tehát, hogy a hibákkal foglalkozó kutatók a hibák okának feltárásában és a hibák javításának módjában a gondolkodási folyamat pszichológiai és logikai mozzanataihoz nyulnak vissza. Nem kívánok foglalkozni azok eredményeivel, akik a helyesírás-, olvasás-, beszédhibák, stb. problémáival foglalkoztak / Harnisch, Hentscher, Meringer /, a matematika tanításában előforduló hibák kutatói közül is csak azokat említem, akik a középiskolai matematika területén végezték vizsgálataikat hazai viszonylatban.

Beke Manó a matematika tanításában előforduló tipikus hibák egész sorát tárja fel cikkeiben, amelyek szerint három forrásból erednek:

- a./ hamis vagy elhamarkodott analógiából származó hibák / a föltételeket más esetekben fennálló föltételekkel megegyezőknak vélik, holott a teljes megegyezés hiányzik/,
- b./ következtetés hibái /legtöbbször a tétel hamaros, elhírtelenkedett megfordításából erednek/,
- c./ a szemlélet hiányosságából fakadó hibák.

Megállapításai között szerepel az a gyakorlati tanács is, hogy a tanár ne foglalkozzék bővebben a tanulók előtt a hibákkal, mert a tanulók lelkében esetleg jobban megmarad a hibás, mint a helyes dolog.

Kauffmann, Schmidt és Szenes az 1920-as években elsősorban a tanulók számolási készségében és a négy alaptétellettel kapcsolatban előforduló hibákat vizsgálták.

Szelianszky Ferenc kutató munkájának gerincét az 1930-as évektől szintén a hibakutatás neveléslélektani problémái alkotják.

Cser Andor és Lénárd Ferenc számos tanulmányban és cikkben foglalkoznak a matematika tanításában előforduló hibákkal. Különös gondot fordítanak a matematika tanításában fellelhető formalizmus veszélyeire.

A hibák legkiemelkedőbb kutatója Faragó László, aki egész munkásságát az 1950-es évektől a matematikatanítás problémáinak szentelte. Vizsgálta a tanulók matematikai absztrakció-képességét, a logikus gondolkodásra való nevelés terén elkövetett didaktikai hibákat, aritmetikai feladatok megoldása során elkövetett tanulóhibákat, lélektani szempontok érvényesítését a matematikatanítás metodikájában. A hibákat elsősorban annak alapján vizsgálta, osztályozta, hogy a matematikai didaktika melyik alapelvének megsértéséből származnak.

Mosonyi Kálmán mélyreható elemzés után a hibákat domináns okuk alapján a következőképpen osztályozta:

- 1/ helytelenül feltételezett analógián alapuló hibák
- 2/ formalizmuson alapuló hibák

- 3/ megszokáson alapuló hibák
- 4/ fogalmak tisztázatlan voltából eredő hibák
- 5/ hiányos előismeret által okozott hibák
- 6/ matematikai műszavakból, kifejezésekből eredő hibák.

A hibáknak ilyen osztályozása magában foglalja a már említett kutatók által kimutatott hibaforrásokat, osztályokat, rámutat arra, hogy a tanulók szempontjából a hibák szubjektív és objektív okokra vezethetők vissza, és lehetővé teszi a hibák differenciált tárgyalását. Az általa vizsgált hibákat a fenti osztályokba való csoportosítás útján tárgyalja.

Dolgozatomban a Mosenyi által megalkotott hibaosztályok megtalálhatók, de a hibákat nem a domináns okuk szerinti csoportokba gyűjtve tárgyalom /hiszen középiskolában méginkább érvényes az a megállapítás, hogy a hibák eredete igen összetett/, hanem a tanított anyag logikai sorrendjében, miáltal pontosabb rámutatás adódik a hibák gyökereire, kölcsönhatásaikra és javítási illetve megelőzési módjukra.

Mielőtt az egyes konkrét hibákkal foglalkoznánk, említsünk meg néhány, az egyes hibaosztályokra vonatkozó megállapítást.

"Az analógia teljesen áthatja gondolkodásunkat, mindennapi beszédünket és hétköznapi logikánkat csakugy, mint a kifejezés művészi eszközeit és legmagasabb tudományos tevékenységet."/20/ Faragó László szerint tanításunk egyik legfőbb feladata az analógiák tudatos keresésére irányuló nevelés. A tanulóban készséggé kell válnia, szokássá kell szilárdulnia annak a viselkedési formának, hogy amikor új és szo-

katlan helyzetbe kerül, mindig feltegye a kérdést: "Beillik-e ez a szituáció megelőző tapasztalataim keretébe...Milyen ismert elemeket használhatok fel az új helyzet értelmezésére és a vele kapcsolatos probléma megoldására?" /7/ Pólya György szerint "aligha tudnánk elképzelni olyan feladatot, amely száz százalékosan új, amely egyetlen eddig megoldott feladathoz sem hasonlít..." /19/ Ezért ajánlja a módszert: "Nem ismersz valamilyen rokonfeladatot?"

Az analógia alkalmazása a tanulóknál különféle szinten történik. Gyakran alkalmaznak bizonytalan, félreérthető, sőt hamis analógiát. A tanulóknál nem meglepő és nem elítélendő a helytelenül feltételezett analógia alkalmazása, hiszen komoly matematikusok is beleestek már ebbe a hibába. /Pl. sokáig keresték a negyedfokunál magasabb egyenletek megoldását gyökvonások segítségével - nyilván a másod- és harmadfokú egyenletek gyökképletének analógiája alapján/.

Beke Manó szerint nagy gondot kell fordítani a "feltételek pontos és gondos megállapítására, a feltételekben mutatkozó különbségek szigorú kidomborítására" és a mechanikus, értelem nélküli számítások kiküszöbölésére. Vannak olyan elemek, amelyeknek mechanikussá kell válniuk, de ezt előzze meg az illető elemnek a mély átértékelése.

A matematikai jelölések is gyakran analógiát sugallnak a tanulók számára olyan esetekben is, amikor csak formai hasonlóságról beszélhetünk, ugyanakkor a tartalom teljesen különböző. A helytelenül feltételezett analógián alapuló hibákkal meglehetősen sok tanulóknál találkozunk.

A formalizmuson alapuló hibák száma is jelentős. A matematikatanítás formalizmusának megakadályozására igen sok törekvéstről olvashatunk a szakirodalomban. Voltak és vannak olyanok, akik a tanulók ismereteinek készséggé való begyakorlását a formalizmus elleni harc ürügyén elhanyagolják. A formalizmus pedig a formának a tartalomtól, az elméletnek a gyakorlattól való elszakadását jelenti.

A tanulók matematikai ismereteinek formalizmusa a matematikai elméletet formalizáló nyelv hiányos és helytelen tanulmányozásának az eredménye. A matematikai nyelv szintakszisének tanulmányozásától való eltávolodás és szemantikájának elhanyagolása azt eredményezi, hogy a tanulóknak emlékezniök kell a szimbólumokkal végzett műveletek formális szabályaira, azok értelmének belátása nélkül. Erről tanuskodnak többek között azok a hibák, amelyeket a tanulók az algebrai kifejezések olvasásakor követnek el, vagy pedig akkor, amikor a szóban megfogalmazott kifejezéseket a matematika nyelvén kell leírni. A formalizmust "az emlékezetnek a megértés fölött való elhatalmasodása jellemzi" - írja Sztoljár /24/.

Sok tanulóknál találkozunk a szabály betű szerinti, merev, vak alkalmazásával olyan esetekben, amelyekre a szabály alkalmazható és olyan esetekben is, amelyekre a szabály nem alkalmazható. "Az igazi alkotó szellem a szabályt természetes könnyedséggel az ítélőképességgel való alkalmazásában nyilvánul meg olyankor, amikor a szabály valóban alkalmazható, anélkül azonban, hogy a szabály szavai akár egy pillanatra is elfeledtetnék a feladat lényegét, vagy a helyzet kínálta lehe-

tóségeket" - írja Pólya György /20/. A matematikai jelölés nem formalizmust jelent, sőt nehéz gondolatmeneteket rögzíthetünk szavak használata nélkül. Ezek az ábrák és jelek szorosan kapcsolódnak a matematikai gondolkodáshoz, használatuk segíti az értelmet.

A szabályok és képletek tudásának megkövetelése és begyakoroltatása tehát nem formalizmus, "ha mögötte konkrét példák épülő, konkrét példák alkalmazható tudást is megkövetelünk. Az értelmes tudást a szavakban való elmondás tudatosabbá, tartósabbá és alkalmazhatóbbá teszi" - írja Cser Andor /4/. Azt nem kell szintén vitatnunk, hogy szükséges a helyes gondolkodási formák, műveletek és módszerek beidegzése, automatizálása. "Bizonyos esetekben tehát a tudatosság nem szükséges, sőt hiánya gazdaságos" - írja Kelemen László /12/ - mert a tudatot felszabadítja más irányító műveletek végzésére - feltéve, hogy az automatizált komponens kiépítése a fent elmondottak értelmében helyesen megtörtént. A formalizmusból eredő hibák jórésze a nem kellő módon átgondolt és elemzett tanári munkából származik, amelyek elleni küzdelem még fokozottabb erőfeszítést kíván a tanártól, mint az ugynevezett "tanulóhibák".

A megszokáson alapuló hibák nagy veszélye abban rejlik, hogy a tanár előtt sok esetben csak akkor lesznek nyilvánvalóak, amikor a tanuló esetleg már huzamosabb ideig "élt ezzel a lehetőséggel". Egyes tanulók ugyanis a saját maguk által kialakított dolgokat - amelyekről nem veszik észre, hogy hamis következtetések alapulnak - alkalmazzák különösképpen önálló

munkájukban /házi feladatok/. Jellemző ezekre a tanulókra, hogy a problémákat leegyszerűsítik abban a tudatban, hogy az általuk kigondolt eljárás sokkal egyszerűbb, mint a tanár eljárása. A legtöbb esetben nem mondják el a tanároknak, esetleg csak társaiknak, így sokáig rejtve maradnak ezek a hibák. Ha nincs kellő ellenőrzés és minden tanulóval szoros kontaktusunk, akkor ezek a hibák megszokássá válhatnak és megszüntetésük csak hosszú, türelmes munkával lehetséges. /A megszokás ugyanis igen erős ellenzést vált ki minden külső beavatkozással szemben./ A megszokáson alapuló hibák különösen az erősen inhomogén képességű osztályokban fordulnak elő, ha a tanár a gyengébb tanulókkal való foglalkozást a jobbak haladásának érdekében elhanyagolja.

A fogalmak tisztázatlan voltából eredő hibák csaknem kivétel nélkül a tanár munkájából származnak. A matematika absztrakt fogalmakkal dolgozik, ebből tüstént következik, hogy a fogalmak kialakítására a tanárnak különös figyelmet és gondot kell fordítania. Igen súlyos következményekkel jár abból a szemléletből eredő hiba, ha a tanár elhamarkodottan, felületesen intézi el az új fogalmak kialakítását. "Ezt így definiáljuk, ezt így jelöljük, ezt általánosan így írjuk és mondjuk"-találkozunk hasonló rövid elintézési módszerekkel azon jelszóval, hogy ugyanis az alkalmazása a lényeges, ne fecséreljük hát az időt feleslegesen. Ilyen felfogás mellett a tanuló nem tudja belehelyezni a már birtokában lévő ismeret és fogalomrendszerbe az új fogalmat, üres forma marad számára. Észre kell venni, hogy ha kezdetben "időt nyert" is a tanár, később azonban káros

következményekkel jár az alkalmazások felismerésénél és technikai véghezvitelénél. Ha pl. nem történt meg a helyes fogalomalkotás az algebrai alapismeretek tárgykörében, akkor az egyenletek és egyenletrendszerek témakörében olyan áthidalhatatlan nehézségek és hibák sora zudul a tanulókra, hogy tanításunk csődjével kell számolni. Pedig a helyes fogalomkialakítás útját járva ebben a témakörben látják a tanulók addigi fáradásunk realizálódását, gyümölcsét. A szöveges egyenletek megoldásának nyomasztó légkörét megszüntettük ezzel, hiszen szellemi energiájukat csak arra kell fordítani, hogy "a feladatot a matematika nyelvére kell átültetni, vagyis a feladat absztrakt matematikai modelljét kell megalkotni"./12/

Mencsinszkaja, Flesner, Kalmikova és Kelemen is hangsúlyozzák, hogy a fogalomalkotás nem egyszerű absztrakció eredménye, hanem hosszú műveletsoroké. Az igazi megértés és fogalmi műveletvégzés alapja az ismeretek rendszerbe foglaltsága. Leszűkítjük a fogalomalkotást és nem tartjuk be a fenti megállapításokat pl. akkor, ha a sinus fogalmát elintézzük azzal, hogy $\sin \alpha = \frac{a}{c}$. Ez formális, verbális tudást ad a tanulónak, bár sok esetben automatikusan helyesen alkalmazza, de mélyebb értelmezésétől pl. a hasonlóság fogalmával való kapcsolatának meglátásától megfosztjuk a tanulót. A fogalmak tisztázatlan voltából származó hibák észrevétele igen könnyű és szembetűnő, ha találkozunk velük, ne restelljünk önkritikát gyakorolni tanításunkról. Kíváncsi, hogy ismételjük el bővebben, mélyrehatóbban a fogalom kialakítását akár a mi hibánk, akár az előző osztályban keresendő a hiba eredete.

A hiányos előismeretekből származó hibák erősen gátolják továbbhaladásunk ütemét. A tanulók ismeretéből hiányzik egy láncszem, lehetséges, hogy előzőleg kiépitettük ezt a láncszemet, de nem tartottuk gondosan "karban", feledésbe merült. Bármelyik eset áll is előttünk, hibák forrását jelenti, amely hibák a tanulók munkájában felismerhetők. / Kereshető a hiányos előismereteknek oka abban, hogy a tananyag mennyiségileg esetleg túlméretezett és hiányzik a kellő értelmi feldolgozás, de a korszerűtlen - verbális, közlő, memoratív, stb... - oktatási módszerekben is. / Ezek a hibák szorosan összefüggnek a már tárgyalt többi típusu hibával, javítási módjuk nyilvánvalóan a hiányok utólagos pótlása.

Végül megemlítjük a matematika sajátos nyelvéből, kifejezéséből, jelölésrendszeréből és műszavaiból származó hibákat. Ezen hibák eredetének több oka lehet. Bizonyos esetekben a műszó vagy kifejezés nem azt a matematikai tartalmat jelenti, amelyre a mindennapi életben használjuk. A tanulók nyelvi nehézség vagy kényelem miatt csak a magyar megnevezését tartják a maguk számára kötelezően megtanulandónak és ha idegen szóval hallják, akkor keverik más fogalmakkal. Zavarólag hat több tanulóra, hogy ugyanazt a matematikai fogalmat, műveletet, objektumot többféle jelöléssel, kifejezéssel is illetjük, amelynek sok esetben történeti, hagyományos értelmük van /pl. az a és b szorzatának jelölésére alkalmazva látjuk : $a \times b$, $a \cdot b$, és ab /. "Általában jobb egy objektumra pontosan egy jelet használni, és mindenképpen elkerülendő többféle jelölés önkényes változtatása" - írja Pólya György /19/.

Ezen hibák megelőzésében már sokat tett a tanár akkor, ha tudatosítja nyomatékosan és ismételten a tanulók számára a többféle megnevezés matematikai azonosságát, ha kis kitérőket tesz az egyes műszavak vagy idegenből átvett szavak megmagyarázására, magyarra fordítására /exponens, logaritmus, quotiens, differencia, rádiusz, konvex, konkáv, abszcissza stb. /, mert ezzel sok esetben szemléletes tartalommal párosul a megnevezés.

Vizsgálatok és kísérlet leírása, értékelése

Vizsgálataimat és kísérletemet négy középiskola első és második osztályaiban hajtottam végre. Három osztályban feladatlapos vizsgálatot végeztem a feltételezett hibák előfordulási gyakoriságának felmérése, analizálása végett, egy osztályban pedig a tapasztalt hibák megelőzési illetve javítási módjának kipróbálása céljából kísérletet folytattam. /Mezőberény, Orosháza, Hódmezővásárhely, Szeged/. Az iskolák kiválasztásánál az a szempont vezetett, hogy legyen közöttük kisebb és nagyobb iskola, kis multtal, de a jövőben is működő vidéki iskola, tradíciókkal és tapasztalt oktató gárdával rendelkező iskola.

Az osztályok megválasztásánál figyelembe vettem, hogy ne túl gyenge, de ne a legerősebb osztályt bocsássák rendelkezésemre. A kiválasztott osztályokban tanító kartársak személyére is tekintettel voltam. /Fiatalabbak és idősebbek, a felügyeleti szervek véleménye szerint jó és közepes eredménnyel oktató kartársak. /

A vizsgálatok illetve a kísérlet azonos feltételek mellett folytak le, sugás és puskázás veszélye elkerülése végett előadótermekben végeztük, ahol lehetőség adódott a tanulók szétültetésére.

Előkísérletet folytattam az összeállított feladatsor megoldásának időtartama megállapítására. Az előkísérlet alapján a feladatok megoldására szánt időt reálisan megállapítottam. Nem az volt a cél, hogy minél kevesebb idő alatt oldják meg a feladatokat, hanem, hogy mindenkinek legyen ideje megoldani.

dani azokat. Az így megállapított időtartam a későbbi vizsgálati osztályokra és a kísérleti osztályra kötelező érvényű volt.

A vizsgálatokat és a kísérletet minden osztályban abban az időben hajtottuk végre, amikor a szaktanár a tanmenet alapján befejezettnak nyilvánította a szóbanforgó tárgykörrel való foglalkozást és újabb tárgykör tanítása következett, a másik részét pedig az év végi ismétlés után. A fent említett megszorításokkal igyekeztem a kísérlet komplexitását adó feltételeket közel azonos korlátok közé szorítani, hogy mind a vizsgálatok, mind pedig a kísérlet eredménye minél jobban az általános érvényűt, a reális állapotot mutassák.

A feltételezett hibák előfordulásával, javítási és megelőzési módjával éveken keresztül foglalkoztam oktató-nevelő munkám során. Vizsgálatokat és a kísérletet ezen tapasztalatok mellett azért végeztem el, hogy a szubjektív megítélés veszélyének érzése alól mintegy feloldódjak. A későbbiekben ismertetett vizsgálatok és kísérlet eredményei lényegében megegyeztek sokéves tapasztalatommal, természetesen egyes hibák ritkábban fordultak elő, mint a feltételezésem és addigi tapasztalatom alapján vártam volna. Ugyanakkor olyan hibák is felszínre kerültek, amelyeknek előfordulását tanításom során egyáltalán nem, vagy igen ritkán tapasztaltam. Az egyes vizsgálati osztályokban a hibák előfordulásának százalékos aránya ugyan bizonyos szórást mutatott, de az a tény, hogy az általam tanított osztályokban és a vizsgálatok szerint a személyileg és területileg különböző mindhárom osztályban ugyanazok

a hibák jelentős számban előfordultak, arra enged következtetni, hogy a feltételezett hibák előfordulása bizonyos valószínűségi szinten általánosnak mondható.

A kísérleti osztályt különös gonddal választottam ki. Mivel nem lehetséges ugyanabban az osztályban vizsgálatot és a tapasztalt hibák megelőzésére szánt beavatkozást /kísérlet/ egyszerre végezni és ilymódon a beavatkozás hatását megállapítani, ezért olyan kísérleti osztályt választottam az egyik vizsgálati osztály mellé, hogy a mellékfeltételek közelítően konstansnak tekinthetők legyenek, hogy a variábilis tényezők /tudnillik a vizsgált hibák javítására, megelőzésére tett erőfeszítések/ hatása minél jobban megmutatkozzék. A továbbiakban X osztálynak nevezem azt a vizsgálati osztályt, amely mellé választottam a kísérleti osztályt. Ezen osztályokban tanító kartársak többéves tapasztalattal rendelkeztek és a megítélés szerint hasonló eredményességgel tanítottak. Az X osztály létszáma 36, a kísérleti osztály létszáma 34 volt. Mindkét osztályban ugyanolyan felmérő dolgozatot irattunk és e dolgozatban mutatott teljesítmény, valamint a szaktanárok véleménye alapján 25-25 olyan tanulót választottunk ki, akiknek matematikai teljesítménye azonosan oszlott meg az 5-4-3-2 osztályzat között. Az ilyen kiválasztás az egyes osztályokban tanító tanárok szubjektív megítélését nagy mértékben csökkentette.

A felsőbb osztályokban végzett vizsgálatoknak és kísérletnek a fent említett módon való megszervezését mellőztük /többféle helyi- és személyi feltétel hiánya miatt/ ezen hi-

bák megelőzésére illetve javítására a tanulmányban szereplő módszereket középiskolai munkám során éveken keresztül folytatott kísérleteim alapján összegezem.

A kísérleti osztályban a szaktanárral közösen megbeszéltük a várható hibákat minden anyagrész tanítása előtt, a tanítási órákon tudatosan előidézte /magyarázatban és példamegoldásokban/ a várt jelenséget anélkül, hogy a tanulók figyelmét erre felhívta volna. "Belevitte" az óra menetébe a jónak vélt megelőzési illetve javítási elképzeléseket. A tárgykör befejezése után oldották meg ugyanazokat a feladatokat, mint a vizsgálatban szereplő osztályok.

Mind a vizsgálatoknál, mind pedig a kísérletnél a tanulók ráírták nevüket és osztályukat a feladatlapra. Ezzel mintegy komolyabb erő kifejtésre készítettük a tanulókat. Ugyanakkor az osztályokban tanító kartársak számára is gyümölcsöző volt, mert feltárultak előttük az egyes tanulók hibái, amelyeket később hasznosítottak további munkájukban. Számomra azért volt fontos elsősorban a nevek felírása, mert így a dolgozat kijavítása után egyéni beszélgetést folytathattam /exploráció/ a tanulókkal a hibák okának feltárása érdekében, illetve a kiegészítő kísérlet megszervezésére támpontot adott.

A feladatok általában egyszerűek voltak. Ezzel a következő célokat kívántam elérni:

- a./ ne vegyek el sok időt az iskola tervezett, normális előrehaladása folyamatából,
- b./ aránylag mindenki oldja meg a feladatokat, foglalkozzék velük,
- c./ az összetett feladatok megoldása során előforduló hibákat

"meztelenre" vetkőztettem, csak annyi "körítést" hagytam meg, amely a vizsgált jelenséget nem fosztja meg ugyan környezetétől, de fölösleges sallangok nélkül áll előttünk, d./ A vizsgált hibákat - ahol kézenfekvő - a matematika jeleivel általános formulával is felírassam.

A kísérleti eredmények értékelésénél egyrészt összehasonlítom a kísérleti osztály eredményét a vizsgálati osztályok együttes eredményével, másrészt az értékelés és összehasonlítás finomítása végett az X osztály eredményével. Némely esetben a beavatkozás hatásosságának megállapítására a matematikai statisztika módszereivel dolgozom, hogy a vizsgált populáció vonatkozásában általános megállapítást tehessek. Egyes anyagrészek tanításában az elméleti és gyakorlati munkára fordított idő helyes arányának megállapítására törekszem.

A vizsgált tipikus hibák tárgyalása

1. hiba

Az algebrai kifejezések számértékének kiszámítása során igen gyakori hiba az első osztályban /de még felsőbb osztályban is előfordul/, hogy a tanuló nem tesz különbséget a

$$-n^2 \quad \text{és} \quad (-n)^2$$

között.

Vizsgálat

a./ Számítsuk ki

$$-n^2 + 1$$

kifejezés értékét, ha $n=2$.

b./ Számítsuk ki

$$-n^2 + 1$$

kifejezés értékét, ha $n=-3$.

Azért adtam a/ és b/ feladatot, mert

- 1./ a "várt" hibás megoldások értékelésénél el akartam kerülni a véletlen, az elírás esetleges szerepét,
- 2./ az "n" értéke pozitív és negatív is legyen.

A vizsgálati eredmények értékelése után azonban igazolódott, hogy hü képet adott volna csak az egyik feladat^{is}, mivel azok a tanulók, akik hibát követtek el az a/ feladatban, csaknem mind a b/ feladatot is rosszul oldották meg.

A vizsgálat eredménye a következő volt:

X osztály	17 /68%/	hibátlan	8 /32%/	hibás
Y "	28 /66%/	"	14 /33%/	"
U "	27 /59%/	"	19 /41%/	"

A három osztály együttes eredménye:

72 /64%/ hibátlan 41 /36%/ hibás

A hibás megoldások csaknem minden esetben azt jelentették, hogy
a/ feladatban a helyes eredmény -3 helyett $+5$ -öt, a
b/ feladatban -8 helyett $+10$ -et jelöltek meg.

A hiba forrása nyilvánvalóan a következő hibás okoskodás:

$$-n^2 + 1 = (-n)^2 + 1$$

Megtanulta a tanuló a negatív számnak negatív számmal
való szorzási szabályát /vagy ennek megfogalmazása maradt meg
benne olymódon, hogy a negatív szám négyzete pozitív/ és meg-
szokás alapján a variánsok értékelése, gondolkodás nélkül al-
kalmazza:

" ... ha $n=2$, akkor minusz "n" egyenlő minusz kettővel, minusz
kettő négyzete pedig plusz négy. Az így kapott eredményhez hoz-
záadjuk az 1-et, kapjuk a $+5$ -öt."

A tanuló fenti hibás okoskodásának megmaradásához je-
lentősen hozzájárulnak még a következő okok:

- 1/ az algebrai kifejezések tagolt, "szemléletes" olvasásának
hiánya /"minusz n négyzet" és "minusz n a négyzeten"/,
- 2/ az együttható fogalmának /különös tekintettel a $+1$ / és
minusz 1 együtthatókra/ tisztázatlan volta. Nem látja a
tanuló, hogy tulajdonképpen a következőről van szó

$$-n^2 + 1 = (-1)n^2 + 1$$

/ Itt szerepet játszik az a szemlélet is, hogy az egyes szám a tanuló legkorábbi számbeli élménye és később elhomályosult az egységnek a szerepe, lekicsinylően kezelik. Ez abból a mondókából is kiderül, hogy "az egy sem nem szoroz, sem nem oszt"./

Kisérlet

A szaktanárral előre megbeszéltem, hogy az egyes tanítási órákon e témakör tárgyalása és begyakorlásakor sor kerüljön a fent említett megelőzési és javítási elgondolásokra is.

Gyakorolta a tanulókkal az algebrai kifejezések olvasását. Nem engedte meg, hogy a tanulók felületesen és pontatlanul használják az olvasásnál és beszédjükben a "minusz n négyzet" és "minusz n a négyzeten" kifejezéseket. Megoldották a tanulók aktív közreműködésével, hogy vajon n -nek van-e olyan számértéke, hogy

$$-n^2 = (-n)^2$$

A megoldás után megnyugvással látták, hogy ez csak $n=0$ esetben lehet igaz.

Az együttható pontos meghatározása után a következő kérdésekre adtak választ:

Mi az együtthatója $2a$ -nak

" " $3a^2$ -nek

" " a -nak

" " a^2 -nek

" " $\frac{a}{3}$ -nak

" " $\frac{2a}{3}$ -nak

" " $\frac{3}{2} a$ -nak

Mi az együtthatója $-a$ -nak

" " $-5a^3$ -nek

" " $-\frac{a}{2}$ -nek

" " $-\frac{2a}{5}$ -nek

" " $-\frac{2}{3}a$ -nak

.
.
.

Szorozzuk meg a -t minusz 1-gyel: $a(-1) = -a$

Szorozzuk meg a^2 -et minusz 1-gyel: $a^2(-1) = -a^2$

Igy tudatosabbá vált, hogy minusz a , minusz a^2 tulajdonképpen azt jelenti, hogy

$$-a = (-1)a$$

$$-a^2 = (-1)a^2$$

Ilyen előzmények után került sor a kísérlet lefolyására, melynek eredménye a következő:

Hibátlan megoldás: 22 /88%/

Hibás megoldás: 3 /12%/

A három hibázó tanuló közül egy tanuló nem előjel, hanem számolási hibát vétett / nyilván figyelmetlenségből/, a másik két tanuló továbbra is a már említett hibát követte el.

A kísérleti osztály eredményének a három osztály együttes teljesítményével illetve az X osztály eredményével való összehasonlításával láthatjuk, hogy a hibák előfordulása 36% illetve 32%-ról 12%-ra csökkent.

A kísérlet eredménye igazolja Kelemen László megállapításait is. Megfelelő gondolkodtató feladatrendszerek, sorok segítségével a gyengébb tanulók teljesítménye ugrásszerűen

emelkedik a műveltségvézésekben. Ezek a feladatrendszerek segítik a tanulókat az alapkérdések és összefüggések tisztázásában és biztonságosabban kezelik ezekután a gyakorlati alkalmazásokban.

A bevezetőben említettem, hogy az X osztály és a kísérleti osztály esetében igyekeztem a kísérleti feltételeket azonos módon megszabni. A két osztály kísérleti feltételei között csak egy feltétel különbözött, ez a feltétel az, hogy a kísérleti osztályban a kísérlet lefolytatása előtt a fent említett javítási és megelőzési eljárásokat alkalmaztuk. A matematikai statisztika módszereivel megvizsgáljuk, hogy ez az egyetlen nem azonos kísérleti feltétel a két osztály teljesítményében szignifikáns különbséget eredményezett-e, vagyis hogy beavatkozásunk hatásos volt-e? Ha hatásos volt, az azt jelenti, hogy igen kicsiny a P valószínűsége annak, hogy pusztán a véletlen folytán /tehát úgy, hogy a beavatkozásunk hatástalan/ kapnánk az észlelttel megegyező nagyságu vagy annál nagyobb eltérést a két osztály teljesítményében.

Azoknak a tanulóknak a teljesítményét, akik hibátlanul oldották meg a feladatot 1-essel, a hibát elkövető tanulók teljesítményét pedig 0-val jelölöm.

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{x}'}{s} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}$$

képlet alapján kiszámítom "t" értékét. A "t" érték kiszámítása után a Student-féle "t"-próba táblázata alapján megállapítom a szignifikancia fokát.

x : a kísérleti osztály egyéni teljesítményei

$\bar{x}$: " " teljesítményének átlaga

x' : az X osztály egyéni teljesítményei

$\bar{x}'$: " " teljesítményének átlaga

n_1 : az X osztály létszáma/akik a vizsgálatban résztvettek/

n_2 : a kísérleti osztály létszáma

$$s = \sqrt{\frac{(x - \bar{x})^2 + (x' - \bar{x}')^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)}}$$

Szabadsági fok: $n_1 + n_2 - 2$

A számítást meggyorsíthatjuk, ha felhasználjuk a következő összefüggéseket:

$$\sum (x - \bar{x})^2 = \sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n_1}$$

$$\sum (x' - \bar{x}')^2 = \sum x'^2 - \frac{(\sum x')^2}{n_2}$$

A képletben szereplő mennyiségek értékei:

<u>X osztály</u>	<u>Kísérleti osztály</u>
$\bar{x}' = \frac{17}{25} = 0,68$	$\bar{x} = \frac{22}{25} = 0,88$
$\sum x'^2 = 17$	$\sum x^2 = 22$
$\frac{(\sum x')^2}{n_1} = \frac{289}{25} = 11,56$	$\frac{(\sum x)^2}{n_2} = \frac{484}{25} = 19,36$
$\sum (x' - \bar{x}')^2 = 5,44$	$\sum (x - \bar{x})^2 = 2,64$

$$s = \sqrt{\frac{5,44 + 2,64}{48}} = \sqrt{\frac{8,08}{48}} = 0,41$$

$$t = \frac{0,88 - 0,68}{0,41} \sqrt{\frac{25 \cdot 25}{50}}$$

$$t = 1,805$$

A "t" táblázat alapján

$$0,05 < P < 0,10$$

Eredményünk tehát azt mutatja, hogy 5-10% a véletlen szerepe abban, hogy a kísérleti osztály jobb eredményt ért el az X vizsgálati osztálynál, 90-95% a beavatkozás hatásának tulajdonítható. Beavatkozásunk hatása bár nem mondható szignifikánsnak /ugyanis $P < 5\%$ esetében beszélünk a pedagógiai kísérleteknél szignifikáns hatásról/, de a szignifikancia határán mozog.

2. hiba

Az algebrai kifejezések szorzásának témakörében gyakran elkövetett hiba, hogy a tanuló többtényezős szorzatot úgy szoroz meg egy tényezővel, hogy a szorzat minden tényezőjét szorozza. Általános formulával ez a hiba így írható

$$a(bc) = abac$$

Itt nyilvánvalóan helytelenül feltételezett analógia a hiba közvetlen oka. A tanulók ugyanis megtanulták a többtaguak szorzásának szabályát, vagyis hogy a többtagu minden tagját szorozzuk a számmal, / $a(b+c) = ab+ac$ /, és ezt a szabályt átviszik a többtényezős szorzat szorzására is.

Vizsgálat

Végezzük el a következő szorzásokat:

1/ $3(-2)(-5)$

2/ $2a(-3b+4c)$

3/ $-2(a+b)(c+d)$

A hármas feladat a következő célokat szolgálta:

- a/ egyik feladatban ne szerepeljenek betűk, csak konkrét számok
- b/ a másik feladatban betűk is szerepeljenek és a tényezők egytaguak legyenek
- c/ a harmadik feladatban a tényezők között többtaguak is legyenek.

A vizsgálat eredményeit a következőkben foglalom össze:

1. feladat

X osztály	20	/80 %/	hibátlan	5	/20 %/	hibás
Y "	31	/ 74 %/	"	11	/26 %/	"
U "	28	/61 %/	"	18	/39 %/	"

A három osztály együttes eredménye:

79 /69 %/ hibátlan 34 /31 %/ hibás

A 34 hibázó tanuló közül 6 tanuló előjelhibát vétett, 28 tanuló a már említett helytelenül feltételezett analógián alapuló hibába esett. / $3(-2)(-5) = (-6)(-15) = 90$ /. Kilenc tanuló amellet, hogy hibásan oldotta meg a feladatot, a zárójelhasználat fontosságát sem érzi, ugyanis zárójel nélkül írja le a megoldást

$$3(-2)(-5) = -6 \cdot -15 = 90.$$

A zárójel elhagyása miatt ezen tanulók egy része a súlyos hiba mellett még egy hibába esik, mivel a

$$-6 \cdot -15 = -21$$

eredményt hozzák ki.

2. feladat

X osztály	18	/72 %/	hibátlan	7	/28 %/	hibás
Y "	27	/64 %/	"	15	/36 %/	"
U "	25	/54 %/	"	21	/46 %/	"

Összesített eredmény:

70 /62 %/ hibátlan 43 /38 %/ hibás

A 43 hibázó tanuló közül 7 tanuló előjelhibát vét, a többi a hibák szempontjából a következő módon oszlik meg:

24 tanuló így okoskodik

$$2a (-3b \cdot 4c) = -6ab \cdot 8ac = -48 a^2bc$$

6 tanuló megoldása így néz ki

$$2a (-3b \ 4c) = -6ab + 8ac$$

Ezek a tanulók tehát amellett, hogy a szorzat mindkét tényezőjét beszorozzák $2a$ -val, még azt a hibát is elkövetik, hogy a részletszorzatok közé a szorzás jele helyett összeadási jelet irnak. Ez méginkább megerősíti az előre feltételezett hibaforrást, t.i. azt, hogy mennyire a többtagu összegnek a szorzási szabályát igyeksenek érvényben tartani a többtényező szorzatnak a szorzása esetében is.

3 tanuló teljes tájékozatlanságot árul el, értelmetlen összevisszaságot ír le, megnyugtatta magát, hogy meg tudta oldani a feladatot.

A 2. feladat eredményének az 1. feladat eredményével való összehasonlítása után azt a következtetést vonhatjuk le, hogy azok a tanulók, akik az első feladatot hibásan oldották meg, a második feladatban is hibáztak /három tanuló kivételével/. Ez közös vonása a két feladat rossz megoldásainak, vagyis a hiba oka is ugyanaz. Az a tény viszont, hogy 31%-ról 38%-ra emelkedett a hibát elkövetők száma, azt mutatja, hogy a helytelenül feltételezett analógia mellett igen sok tanulót a betükifejezés is "zavar", a betük mintegy sugallják a hiba elkövetését. Ennek oka, hogy a többtaguak szorzásszabálya nem konkrét formában él a tanulóknak /tehát nem így pl., hogy $2(5+7) = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 7$ /, hanem az $a(b+c) = ab+ac$ általános formulában /amely különben tanításunk célja is/, ezért míg a csak numerikus formában adott feladat megoldásánál legtöbben el is gondolkodnak a megoldás helyességén, addig a betűszámok-

kal adott feladatnál az $a(b+c) = ab+ac$ azonosság emlékezetben való megléte miatt különösebb meggondolás nélkül "ráhuzza" a többtényezős szorzatra is, vagyis $a(bc) = ab \cdot ac$ vagy $a(bc) = ab+ac$.

Meglátásom szerint a számfogalom bővítései során az egyes műveleteknek és a műveletek közös tulajdonságaira vonatkozó kommutatív, asszociatív és disztributív tulajdonságok a tanulók számára üres, formális képletek maradnak. Sok tanár erősíti is ezt a hibát azzal, hogy elmulasztja, elsieti ezen tulajdonságok jelentőségének megmutatását, inkább csak formális elméletieskedésnek tekinti. /Hiszen a tanulók számára is nyilvánvaló, hogy $ab=ba$, $a+b=b+a$, $a+(b+c)=(a+b)+c$, $a(bc)=(ab)c$, $a(b+c)=ab+ac$ jelszóval/. Hogy mennyire fontos a fent említett szabályok mélyebb begyakorlása és tudatosítása, elmulasztását az 1. és 2. kísérlet eredménye is igazolja. Ha a tanulók tudatosan magukévá teszik a fenti műveleti tulajdonságokat és azoknak kombinált alkalmazását, tehát azt például, hogy

$$a(bc) = (ab)c = b(ac) = abc \dots$$

A hibát elkövető tanulók száma erősen lecsökken.

3. feladat

X osztály	13	/52%/	hibátlan	8	/32%/	hibás	4	/16%/	részen fogl.vele
Y	"	24	/57%/	"	13	/31%/	"	5	/12%/
U	"	21	/46%/	"	20	/43%/	"	5	/11%/

Összesen 58 /51%/ hibátlan, 41 /37%/ hibás, 14 /12%/ részben foglalkozik a feladattal, ami azt jelenti, hogy nem végzi el teljesen a kijelölt műveleteket, hanem egy lépés elvégzése után $a - 2(a+b)(c+d) = (-2a-2b)(c+d)$ vagy

$$-2(a+b)(c+d) = -2(ac+bc+ad+bd) \text{ alakot véglegesnek}$$

tekintik.

A 41 hibás dolgozatban a $-2(a+b)(c+d) = (-2a-2b)(-2c-2d)$ és $-2(a+b)(c+d) = -2a-2b(c+d)$ hibás elgondolások csaknem 50-50%-ban szerepelnek. A kísérlet eredménye a feltételezett hiba mellett az utóbbi hibát is felszínre hozta.

A zárójelek használatának szükségessége és a zárójelek jelentősége tehát sok tanulónál nem begyakorolt elem.

A hibázó tanulókkal kiegészítő kísérletet folytattam le. A feladatot $-2(a+b)(c+d)$ alak helyett $(a+b)(c+d)(-2)$ alakban adtam meg. A kísérleti eredmények azt mutatják, hogy az eredeti alakban adott feladatot hibásan megoldó 41 tanuló közül 9 az újabb alakban felírt feladatot helyesen oldotta meg, további nyolc tanuló $(a+b)(c+d)(-2) = (ac+bc+ad+bd)(-2)$ rész eredményt hozta ki. A kiegészítő kísérlet azt mutatja, hogy a tanuló általában a több taggal való szorzási szabályt tudja, ezért $(a+b)(c+d)(-2)$ alakban adott kifejezésnél gondolatilag úgy jártak el, hogy több tagot szorzok többtaguval /hiszen így kezdődik a feladat/ és a kapott eredményt szorzom minusz kettővel. Vagyis nem a szabály nem tudásából származik a hibák zöme, hanem

a/ a helytelenül feltételezett analógiából:

$$-2(a+b)(c+d) = (-2a-2b)(-2c-2d)$$

b/ a zárójelek használatának hiányos ismeretéből:

$$-2(a+b)(c+d) = -2a-2b(c+d)$$

c/ a kommutativitás törvényének nem eléggé tudatos voltából.

A tanuló hajlamos arra, hogy a többtényezős szorzatoknál a kijelölés sorrendjében végezze el a szorzást /első tényezőt

szorzom a másodikkal, stb./. Meggyőződhattunk erről abból is, hogy pl. $2 \cdot 8 \cdot 5$ szorzást több tanuló $2 \cdot 8 \cdot 5 = 16 \cdot 5 = 80$ sorrendben számítja ki, holott az ésszerűség nyilván $2 \cdot 8 \cdot 5 = 2 \cdot 5 \cdot 8 = 10 \cdot 8$ sorrendet kíván. Ezen kísérlet eredménye is igazolja Menscsinszkaja azon megállapítását, hogy a "feladat megoldásánál a művelet kiválasztása és a kapott eredmény értelmi kifejezésére közvetlen hatást gyakorolnak azok a kapcsolatok, amelyek a tanulóknak élettapasztalatában kialakultak azon sorrendjükben, amely számukra legmegszokottabb." /16/

Kísérlet

Ebben az osztályban a tanár különös figyelmet fordított a fenti hibák megelőzésére. A vizsgálatnál említett szempontokat, amelyektől e hibák számának csökkenését vártuk, szigorúan betartotta és betartatta. Az előjeltévesztés csökkentése céljából rászoktatta a tanulókat arra, hogy a művelet elvégzése előtt /amennyiben ez lehetséges/ először a részeredmény illetve eredmény előjelét kellett leírni /nemcsak mondani!/ és csak ezután kezdhette meg a számok abszolút értékeivel való számolást. Több és nehezebb zárójeles feladatot oldatott meg, mint a vizsgálati osztályokban, amely feladatokban mindig meg kellett mondani, miért kell zárójelet alkalmazni, az egyes zárójeleknek "megtől meddig van hatáskörük", ha egyes zárójeleket elhagynánk, mennyiben módosítaná az a feladat jelentését, megoldását és eredményét. Állandóan javíttatta, ha valaki a szorzótényezők helyett a szorzat tagjairól beszélt. Többtényezős szor-

zatok esetében gyakorolták a tényezők csoportosítását, felcserélését és rámutattak ennek jelentőségére./Mindezek természetesen arra vezettek, hogy ebben az osztályban a feladatok szám- és minőségbeli különbözősége miatt kevesebb idő jutott a szóbeli számonkérésre, a rendszeresebb feleltetésre. Ezt a hiányt azonban a többszöri "oszlopdolgozatos" eljárás pótolta./

A kísérlet eredménye:

1. feladat

23 /92 %/ hibátlan

2 /8 %/ hibás

Előjelet egy tanuló sem tévesztett. Két tanuló eredménye itt is 90 volt.

2. feladat

21 /84 %/ hibátlan

4 /16 %/ hibás

A négy tanuló közül egy tanuló előjelhibát vétett, tehát 3 tanuló követett el elvi hibát.

A kísérlet értékelése során kiderült, hogy a három tanuló közül egy tanuló olyan típusu hibát követett el, amellyel előzőleg nem találkoztunk:

$$2a(-3b \cdot 4c) = (2a-3b) \cdot 4c = 8ac-12bc$$

Ez a hiba a csoportosítás törvény "tulbuzgó" alkalmazásának következménye.

A harmadik feladatot a kísérleti osztályban nem adtam fel, mivel a vizsgálati osztályokban a kiegészítő kísérlet rámutatott a hiba okára és javítási módjára.

3. hiba

A törtes törtek /"emeletes törtek"/ előfordulása igen sok tanulóban félelemérzetet, ellenszenvet vált ki. Adott esetben ehhez hozzájárul az "emeletes tört" olyan hangnemben való emlegetése is, amely valami nagyra, igen nehézre való utalást jelent.

A törtes törtek körében elkövetett hibák csaknem mindig a fogalmak tisztázatlan voltából származó hibák, de sok esetben hozzájárulnak a hiányos alapismeretekből származó hibák is, / még mindig nem tudja vagy elfelejtette a közönséges törtekkel való műveletek szabályait/, továbbá a forma és tartalom egységének figyelmen kívül hagyása .

Az ide tartozó hibákat általában az

$\frac{\frac{a}{b}}{c}$, $\frac{a}{\frac{b}{c}}$, $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ alakban adott törtek problémáinak nevezhetjük.

Vizsgálat

Irják át a felsorolt három törtes törtet /"emeletes törtet"/ olyan törtalakba, hogy azokban csak egy törtvonal szerepeljen:

a/ $\frac{2}{\frac{3}{5}}$

b/ $\frac{\frac{2}{3}}{5}$

c/ $\frac{2}{\frac{3}{\frac{5}{7}}}$

A feladatban szereplő törteket olyan numerikus értékkel adtam meg, hogy az egyszerűsítés mint lehetőség, ne vonja el a figyelmet, csupán a törtes törtek értelmezése és különböző alak-

ja legyen a központi probléma.

A kísérlet eredménye:

	Hibátlan	1 hibás	2 hibás	3 hibás	Részb ^{vele} n fogl.
X osztály	12 /48%/	6 /24%/	3 /12%/	2 /8%/	2 /8%/
Y "	15 /36%/	7 /17%/	8 /19%/	6 /14%/	6 /14%/
U "	15 /33%/	10 /22%/	9 /20%/	8 /17%/	4 /8%/

Azokat, akik részben foglalkoztak a feladattal, nem sorolom a hibázó tanulók közé, mert értik a törtvonalak jelentését, mivel dolgozatukban ilyen alakba irták át a törteket:

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{5}} = \frac{2}{0,6} \quad \text{vagy} \quad \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{5}} = 2 : \frac{3}{5}$$

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{5}} = \frac{0,666...}{5} \quad \text{vagy} \quad \frac{2}{3} : 5$$

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}} = \frac{0,666...}{0,714...} = \quad \text{vagy} \quad \frac{2}{3} : \frac{5}{7}$$

/Ha szigorúan vesszük azt a tényt, hogy a tanuló a közönséges törteknek tizedestörtekkel való átalakítás útján igyekszik "megszabadulni" a törtes törttől, akkor nem nevezhetjük ezt általában csak formai hibának. A jelen feladatok közül az utóbbi kettőnél nem indokolt az egyenlőségjel a végtelen tizedestörtek miatt. Gyakran tapasztalhatjuk, hogy emiatt az egyenletmegoldásoknál csak közelítő megoldást adnak a tanulók. Különösen az exponenciális és logaritmikus egyenleteknél okoz ez problémát, amikor az ismeretlen pontos értéke általában táblázathasználat nélkül megállapítható lenne./

A 113 tanuló közül mindhárom példát hibátlanul 42 /37%/ tanuló oldotta meg, 16 /15%/ tanuló mindhárom példa megoldásánál

elvi hibát vét. 23 tanuló a feladat $2/3$ részét, 20 tanuló pedig csak $1/3$ részét oldja meg helyesen. 12 tanuló részben foglalkozik a feladattal.

Legtöbb hibát az a/, legkevesebbet a c/ feladatnál találhatunk, a kettő között foglal helyet a b/ feladat. A hibák ilyen sorrendben való előfordulása nem véletlen. Többéves tapasztalatom és hibázó tanulókkal való beszélgetés alapján a következő okokra vezethető vissza:

- 1./ A törtekkel végzett műveletek szabályai közül legélénkebben a törttel való osztás-szabályát az emlékezetükben. /A szabályban szereplő "reciprák" idegen szó nagymértékben hozzájárul a szabály megmaradásához./ A pongyola megfogalmazás /t.i. a legtöbben csak a "reciprok értékkel szorzok" formájában rögzítik, nem mondják hozzá, hogy az osztó tört reciprok értékével szorzok/ miatt azonban többen

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} \quad \text{helyett} \quad \frac{5}{7} \cdot \frac{3}{2} \text{-et írják.}$$

A c/ példánál ezért az elmondottak miatt a legtöbb jó megoldás adódott, kivételt azok képeznek, akik az említett reciprokokkal való szorzást rosszul alkalmazták.

- 2./ A c/ feladat aránylag sok jó megoldását az is elősegítette, hogy a tanulók hajlamosak arra, hogy a felírt három alak bármelyikénél felülről számítva az első két számot $/2$ és $3/$ tekintsék törtnek, amelyet azután osztani kell / tehát a $2/3$ -ot / az alatta levő egésszel vagy törttel. Ezen okoskodás valóban a c/ és b/ példánál beválik, tehát emiatt csökken a rossz megoldások száma. A b/ példánál a c/-hez viszo-

nyitva azért hibáznak többen, mert törtnek egésszel való osztási szabályát kisebb biztonsággal kezelik, mint a törtnek törttel való osztási szabályát.

Az elmondottak miatt az a/ példánál a hibázó tanulók száma mintegy megkétszereződik.

A hibák fentebb említett okainak ismerete a megelőzés illetve javítás módjait is tüstént kezünkbe adja:

a./ az általános iskolában megtanult szabályokat szigorú pontossággal átismételni és feladatok halmazával kinosan újra begyakoroltatni.

b./ megmutatni és begyakoroltatni, hogy a törtes törtelnél a törtvonalak különböző hosszúságúra való huzásával / "fő" és "melléktörtvonalak"/ fejezzük ki, hogy az egészet illetve törtet kell-e osztani egésszel vagy törttel. /A törtvonal "per" szócskával való helyettesítése is hozzájárul a hibák elkövetéséhez. Nem szerencsés pl. $\frac{2}{3}$ ilyen formában való mondása vagy olvasása: "kettő per három per öt". Ez zavart okozhat a tanulóknban. Helyette, ha "kettő osztva háromötödel" beszédmódot használjuk, akkor a formaprobléma / a fő-törtvonal hosszabbra huzása/ és ezzel együtt a kijelölt művelet értelme egyszerre világossá vált. A most tárgyalt hibatípussal kapcsolatban nem folytattam le az előzőekben szereplő hasonló kísérletet, hanem tanításaim során az elmondottak figyelembe vételével sikerült a hibákat csaknem teljesen kiküszöbölni.

4. hiba

Az algebrai kifejezések összevonásakor tapasztalható hibák felderítésére iktattam be a következő vizsgálatot.

Vizsgálat

Végezzük el az összevonásokat:

1./ $8a - 5a$

2./ $3x^2 + 5y^2 - x^2 - 6y^2 + 1$

A vizsgálat eredménye:

X osztály	19 /76 %/	hibátlan	6 /24 %/	hibás
Y osztály	37 /88 %/	"	6 /12 %/	"
U osztály	35 /77 %/	"	11 /23 %/	"

Bár egyszerűek voltak a feladatok, mégis a hibát elkövető tanulók százalékos aránya elgondolkodtató.

A példák megoldásánál a következő hibák előfordulását vártam:

1./ $8a - 5a = 3$ /vagyis a -ból kivonom az a -t az egyenlő nullával, ezután pedig 8 -ból kivonom az 5 -öt/.

2./ $3x^2 + 5y^2 - x^2 - 6y^2 + 1 = 2 - 1 + 1 = 2$

/ az előző hibás elgondolás alapján./

Az 1./hibatípus előfordulása nem váltotta be az előzetes "várakozást". Ugyanis $8a - 5a$ összevonást a 113 tanuló közül 110 helyesen végezte el és csak 3 tanuló eredménye $8a - 5a = 3$. /Mindegyik osztályból egy-egy tanuló./

A 2./ feladatnál lényegileg ugyanugy kellett eljárni, mint az 1./ feladatnál, csupán másodfoku tagok szerepeltek az első-

fokuk helyett, továbbá az összevonásnál a tagok csoportosítására is figyelemmel kellett lenni. / A csoportosítás egy tanulóknál sem jelentett problémát. / Ezért a hibás megoldásokat a már említett $3x^2+5y^2-x^2-6y^2+1=2$ alakban vártam. Az a három tanuló, akik az 1./ feladatnál elkövették az említett hibát, a második feladatban egy kivételével szintén hibáztak. A kísérlet fényt derített olyan hiba előfordulására, amelyről már szó volt, illetve előre nem számított hibára is. Ugyanis 12 tanuló szerint $3x^2-x^2=3$, vagyis x^2 -ből kivonja az x^2 -et, az egyenlő nullával és megmarad 3. Ez kétszeres hiba, hiszen nem veszi észre azt sem, hogy $3x^2-x^2=3x^2-1x^2$, vagyis az 1-es együttható elhagyása itt is kísért. Így ezen 17 tanulóknál az eredmény:

$$3x^2+5y^2-x^2-6y^2+1 = 3 - 1 + 1 = 3 .$$

7 tanulóknál az eredmény $2x-y+1$ vagy $3x-y+1$.

Az első esetben észrevették az egyes együttható szerepét, a másodikban nem. Közös viszont a hibázás annyiban, hogy gondolatmenetük a következő:

$3x^2-x^2 = 2x$ /vagy $3x$ /, mert a kivonás miatt a kitevőket is ki kell vonni, vagyis $2-2=0$, azaz akkor az x -nek "nincs kitevője". /A kitevők kivonása után x^0 hatványt kellene írni, de x^0 és $x=x^1$ közötti különbség nem tiszta előttük./

Több tanuló munkájában találkoztam ilyen írásmóddal:

$$3x^2 + 5y^2 - x^2 - 6y^2 + 1 = 2x^2 - 1y^2 + 1.$$

Ez nem hiba, hanem méginkább megerősíti az egyes együttható szerepét a gondolkodásban. Egyben a javítás egyik módszerét is sugallja, t.i. azt, hogy kezdetben mondjuk ki, hogy $5y^2 - 6y^2$ egyenlő minusz egy y^2 -tel. /Később az "egy" szócska elmaradása

nem okoz értelmi hibát./

A numerikus számolási hibákat nem tekintettem hibás megoldásnak /hiszen nem ez volt a célom/, csak az elvileg hibás megoldásokat vettem számításba.

A vizsgálat eredményét összefoglalva azt mondhatjuk, hogy mindkét feladatot helyesen megoldók számához viszonyítva a hibát elkövetők száma lényeges.

A hibákat általános formában így írhatjuk fel:

$$ax - x = a$$

$$ax - bx = a - b$$

$$ax^2 - bx^2 = (a - b) x$$

A hibák oka összetett:

- a./ az együttható külön "él" a betűkifejezéstől
- b./ az egyes együttható elhagyása
- c./ a hatványfogalom tisztázatlan voltából származó hiba
- d./ formalizmuson alapuló hiba /a műveleti jelek önálló életre kelnek a kitevőkben is/.

Kisérlet

Ebben az osztályban a fent említett hibák megelőzésére a gyakorlatok során több időt töltöttek el az algebrai kifejezések, az együttható és hatványozás fogalmával.

Nagyobb súlyt helyeztek az együttható, hatványalap, hatványkitevő és hatvány fogalmának tisztázására. Bevésettük a tanulókkal,

hogyan

$$a = la^1$$

$$-x = -1x^1$$

Az egynemű és különmemű algebrai kifejezések hangsúlyozottabb megkülönböztetése után belátták, hogy az egyneműek összevonásánál formailag az összevonást az együtthatókkal végezzük, amelyek előjeles számok összevonását jelentik.

Az együttható tiszta fogalmát zavarja az olyan megállapítás, hogy az együttható az egytaguban szereplő számtényező, amelyet első tényezőnek szokás írni. Ez később hibaforrássá válik, pl. a másodfoku egyenlet gyökképletének alkalmazásánál. Több tanuló pl. $3x(a^2 - bc)$ kifejezés együtthatóját /ahol a, b, c adott mennyiségek/ 3 -nak veszi, holott $3(a^2 - bc)$.

A kísérlet végrehajtása után megnyugtató eredményt kaptunk, a 25 tanuló közül 22 hibátlanul oldotta meg a feladatot. A hibázó 3 tanuló közül egy tanuló az összevonások során numerikus hibát követett el, 2 tanulónál a második feladat eredménye itt is 3 volt.

5. hiba

Ide sorolom a kiemeléssel való szorzattá alakítás során elkövetett hibákat. Általános formulával a tapasztalt hibákat így írhatjuk le:

1./ $ab + b = ba$

2./ $ab + b = 2ba$

3./ $ab + b = b(ab)$

Az 1./ hibánál így okoskodik a tanuló:

$$ab + b = b(a + 0) = ba$$

A hiba oka nyilvánvalóan abban van, hogy a kiemelésnek mint algebrai műveletnek a fogalma nem tiszta. A b kiemelését a b "elvonásával" helyettesíti.

Nincs tisztában azzal, hogy a kiemelés a többtagu egytaguval való szorzásának fordított művelete:

$$ab + b = b(a + 1) \quad , \text{ mert}$$

$$b(a + 1) = ab + b$$

Azt is mondhatnánk, hogy a disztributív törvény azonosság alakjában való felírásánál / $a(b+c)=ab+ac$ / nem tudatosították kellő módon, hogy "balról jobbra" haladva és visszafelé is igen fontos szerepe van ennek az azonosságnak.

A 2./ hibánál a tanulót a "szorzattá alakítás" kifejezés arra "serkenti", hogy b-t összevonja b-vel, így

$$ab + b = a2b = 2ba$$

A tanuló ezen helytelen elgondolása abból származik, hogy "szorzat" elnevezésen csak olyan szorzatra gondol, amelyben nem szerepel plusz vagy mínusz jel. Nem gondol pl. ilyen szorzatra

$$2a^2b(3a + 5)(b - 2)$$

A szorzótényező ezeknél a tanulóknál az egytaguakra korlátozódik, ha plusz vagy mínusz jelet látnak, akkor csak az összeg vagy különbség tagjainak tudják tekinteni őket. A plusz vagy mínusz jeltől való szabadulás /tehát, hogy tényezőket kapjon/, nem véletlenül vezet az $ab+b=2ba$ eredményhez, ez összefügg a már tárgyalt $ax-x=a$ hibával.

A 3./ hiba esetében a tanuló elgondolása a következő:

$$ab + b = b(a + b) = b(ab)$$

Kétszeres hibát vét a tanuló, mert az első lépésben csak az első tagból emel ki b-t. Ez egyrészt a fogalom tisztázatlan voltából származó hiba, másrészt téves analógián alapuló hiba, ugyanis tudja azt a szabályt, hogy szorzatnak csak az egyik tényezőjét szorozzuk, és mivel itt is szorzat szerepel a felszólításban, így a kiemelést is így akarja elvégezni, a második lépésben pedig a 2./ alatti pszichikai tényező is szerepet játszik. / az $a+b$ tényező ab alakot kap, mert így szorzat/

A fent elmondottakat a vizsgálati eredmények és a tanulókkal való személyes beszélgetések igazolták. A vizsgálat folyamán az volt a tanulók feladata, hogy a következő kifejezéseket alakítsák szorzattá a kiemelés módszerével:

1./ $a^2b + b$

2./ $-2a^5b^2 + 4a^6b^3 - 2a^2b^2$

Az írásbeli munkák értékelése után a következő képet kaptuk:

X osztály	18 /72%/	hibátlan	7 /28%/	hibás
Y osztály	31 /74%/	"	11 /26%/	"
U osztály	32 /69%/	"	14 /31%/	"

A hibák többsége a fentiekben tárgyalt hiba volt. Tapasztal-

hadtunk azonban olyan hibákat is, amelyek nem mondhatók tipikusnak, mivel előfordulásuk ritkább, mint a már említett hibák előfordulása. Pl. $a^2b + b = ab(a + 1)$, vagy $a^2b + b = a^2b^2$. Néhány tanulónál a szorzattá alakítás így néz ki:

$$a^2b + b = (a + b)(a - b)$$

Nyilván számukra a szorzattá alakításnak csak az az egy módja létezik, amely az $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ alakban él emlékezetükben és ezt akár lehet, akár nem, alkalmazzák. Nem számoltam a hibát elkövetőkhöz azokat a tanulókat, akik előjelhibát követtek el, vagy a 2./ feladatban $2a^2b^2$ helyett csak $2ab$ -t, vagy $2a^2$ -et, stb. emeltek ki.

Bár az 1./ feladat egészen egyszerű, könnyebben áttekinthető, mint a 2./ feladat, a hibák előfordulása ezt a különbséget nemigen mutatja. A vizsgálatban szereplő tanulók csaknem azonos számban követnek el hibát az 1./ és 2./ feladatban, de még többen vannak, akik mindkét feladatot hibásan oldják meg.

A fogalom tisztázatlan voltának bizonyítására a következő feladatot adtuk fel a tanulóknak:

Alakítsuk szorzattá $-2ab^2$ kiemelésével a következő kifejezést: $-2ab^2 - 4ab^2c + 2ab$

Az eredmény:

X osztály	8/32%/	hibátlan	11/44%/	hibás	3/12%/	nem fogl.	3/12%/	részben fogl.
Y "	9/21%/	"	24/57%/	"	4/9 %/	vele	5/13%/	vele
U "	11/24%/	"	28/60%/	"	3/7 %/	"	4/ 9%/	"

A vizsgálat eredménye azt bizonyítja, hogy nem érett meg a tanulóknak a kiemelés fogalma, sokkal több időt kell fordítani a kiemelés témakörére, több oldalról kell azt megvilágítani.

Akik foglalkoztak a feladattal, azoknál tipikus hibaként jelentkezett a következő:

$$1./ -2ab^2 - 4ab^2c + 2ab = -2ab^2(1 + 2c) + 2ab$$

/Tehát végeredménynek tekintik ezt az összeget./

$$2./ -2ab^2 - 4ab^2c + 2ab = -2ab^2(0 + 2c - 1) = -2ab^2(2c - 1)$$

Igen sok tanuló ráírta a feladatlapra, hogy "nem lehet kiemelni $-2ab^2$ -et, mert nem szerepel mindegyik tagban tényezőként". /Ezt a hiedelmet táplálja az olyan meghatározás is, hogy "ha az összeg minden tagjában tényezőként szerepel ugyanazon szám, akkor az összeg szorzattá alakítható."/ Számos tanuló úgy segített magán, hogy sajtóhibának minősítette a feladatban szereplő $2ab$ tagot, kijavította és

$$-2ab^2 - 4ab^2c + 2ab^2$$

alakban végezte el a kiemelést, míg mások a kiemelésre előírt $-2ab^2$ -et javították ki $-2ab$ -re és így végezték el a kiemelést.

A vizsgálati eredmények értékelése tüstént kezünkbe adja az említett hibák megelőzésének módszereit is:

- 1./ A disztributivitás törvényének mint azonosságnak a fokozottabb tudatosítása. A kiemelés elvégzése után kezdetben követeljük meg az ellenőrzést az $a(b+c) = ab+ac$ azonosság alapján.
- 2./ Az előző módszer eloszlata a tanulóknál azt a téves elgondolást, hogy a kiemelés után a zárójelben levő tagok nem kivonás útján adódnak, hanem osztás útján.
- 3./ A kiemelés tárgyalása előtt csináltassunk ilyen jellegű feladatokat:

Mivel kell szorozni $2ab^2$ -et, hogy $2ab$ -t kapjunk ?

Irjuk fel $3ab$ -t úgy, hogy egyik tényező $3ab^2$ legyen,

vagyis $3ab = 3ab^2 \cdot \frac{1}{b}$ alakban. Stb...

4./ A sablonos kiemeléseken kívül csináltassunk olyan feladatokat is, amelyeket nevezhetünk "előírt feltétel szerinti kiemelés"-nek, mint pl. $2a^2b + b$ kifejezésből emeljük ki a $2ab$ -t.

A 3. és 4. javítási lehetőséget az algebrai törtek fogalmának, és az algebrai törtekkel végzett műveletek tisztázása után használhatjuk fel a leg tudatosabban mintegy alkalmazásként visszatérünk a kiemelés problémájára. A tárgyalt hibával kapcsolatos kísérletet nem hajtottam végre, mivel bőven volt alkalmam ezekkel a hibákkal és javításukkal foglalkozni gyakorló munkám során. A kiemeléssel kapcsolatos hibák a tanulókat a későbbi előrehaladásuk során számos témakörnél zavarják, így:

- a. egyszerű gyakorló feladatok megoldásánál
- b. algebrai törtek egyszerűsítésénél
- c. paraméteres egyenletek és egyenletrendszerek megoldásánál
- d. $y = Ax^2 + Bx + C$ alakban adott parabolának
 $y = a(x - u)^2 + v$ alakban való megadásánál
- e. csonkagula térfogatképletének, a másodfoku egyenlet megoldóképletének, stb. levezetésénél.

Az elmondottak is bizonyítják, hogy kristálytiszta és kellően begyakorolt fogalommal kell ellátni a tanulókat, amelyhez tapasztalatom szerint a tárgyalt javítási eljárások hozzásegítenek bennünket.

6. hiba

Az algebrai törtek témakörében sok olyan tipikus hibával találkozhatunk, amelyek a tanulók későbbi teljesítményét is nagymértékben lerontják. Ha nem fordítunk kellő figyelmet ezekre a hibákra, akkor az egyenletek megoldása során léptenyomon tapasztaljuk e hibák hatását. A tanuló a legtöbb algebrai átalakításban bizonytalan lesz és hibák egész sorát követi el.

Vizsgálat

A felsorolt nyolc törtpár közül melyek közé írhatunk egyenlőségjelet? Írjuk be ezeket az egyenlőségjeleket és indokoljuk meg!

$$\frac{a-2}{b-4}$$

$$\frac{2-a}{b-4}$$

$$\frac{a-2}{b-4}$$

$$-\frac{2-a}{b-4}$$

$$\frac{a-2}{b-4}$$

$$\frac{a-2}{4-b}$$

$$\frac{a-2}{b-4}$$

$$-\frac{2-a}{4-b}$$

$$\frac{a-2}{b-4}$$

$$-\frac{a-2}{4-b}$$

$$\frac{-/a-2/}{-/b-4/}$$

$$\frac{a-2}{b-4}$$

$$\frac{-/a-2/}{b-4}$$

$$\frac{a-2}{4-b}$$

$$\frac{a-2}{-/b-4/}$$

$$\frac{-/a-2/}{4-b}$$

A felsorolt egyszerű feladatokban tulajdonképpen az

$$\frac{a}{b}, \frac{-a}{b}, \frac{a}{-b}, \frac{-a}{-b}, \frac{a}{b}$$

kifejezések közötti összefüggés illetve különbözőség felismerését kívántam vizsgálni annyi különbséggel, hogy kéttagu volt a számláló is és a nevező is. /A felsorolt alakok tisztázása tapasztalatom szerint valahogy elsikkad. Az általános iskolában a $-\frac{a}{b}$ alakokkal foglalkoznak számpéldák során, de a többivel nem, a középiskolában pedig úgy tekintjük, mintha az általános iskolában már begyakorolták volna./

A vizsgálat eredménye:

	4 találat	3 találat	2 találat	1 találat	0 találat
X osztály	8/32 %/	3/12 %/	4/16 %/	5/20 %/	5/20 %/
Y "	10/24 %/	7/17 %/	6/14 %/	8/19 %/	11/26 %/
U "	7/15 %/	8/17 %/	10/22 %/	11/24 %/	10/22 %/

A "4 találat" azt jelenti, hogy megtalálta mind a négy egyenlőséget, de a többihez egyikhez sem tett egyenlőségjelet. Az alacsonyabb találatot elért tanulóknál általánosnak mondható, hogy a helyes találatok mellett több olyan törtpár mellé is egyenlőségjelet irtak, amelyek nem egyenlőek. Azok, akik az egyenlőségjelek leírásakor a "szerencsére bízták magukat", nyilvánvalóan elérhettek bizonyos számú találatot, de mivel indokolni is kellett a beírást, így a "szerencse" szerepét lecsökkenttem. Az értékelésnél azokat a találatokat fogadtam el, amelyek indoklása is helyes volt.

A fenti táblázat százalékos értékei is mutatják, hogy valóban még az ilyen egyszerű feladatok is probléma elé állítják a tanulókat. Mégjobban láthatjuk az eredményt illetve az eredménytelenséget, ha észrevesszük, hogy az X osztály az elérhető

100 találatból csak 54-et, az Y osztály 168-ból 81-et, az U osztály pedig 184-ből 83-at ért el. Így az egyes osztályok, mint csoportok teljesítménye:

X osztály 54%-os teljesítmény

Y " 49%-os "

U " 45%-os "

A feladatlapon irt indoklások és a tanulókkal való egyéni beszélgetések arra mutatnak, hogy a hibák oka elsősorban a fogalom tisztázatlan volta. Tudják ugyan azt a szabályt, hogy a tört értéke nem változik, ha számlálóját is és a nevezőjét is ugyanazzal a számmal szorozzuk, de ez a szabálytudás nem teljesítőképes, különösen, ha betűk is szerepelnek, csak üres forma, verbális tudás. A tört előtti mínusz előjelben kevesen fedezik fel, hogy ez tulajdonképpen $-1/-$ gyel való szorzást is jelent. Sokak számára a mínusz jel csak műveleti jel /a kivonás jele/, és nem tudják összekapcsolni a számok előjelével /különösen akkor, ha ez a szám a z egyes/.

A beszélgetésekből az is kiderült, hogy a törtvonalnak és az osztásnak $:/$ jele nem azonosult a tanulóknál kellő mértékben, ugyanis, ha a feladatot:

$$\frac{a}{b}, \frac{a}{-b}, \frac{-a}{b}, \frac{-a}{-b}$$

alak helyett

$$a:b, a:/-b/, /-a:b, /-a:/-b/$$

alakban adtam fel, akkor a hibázó tanulók egy része az előjeles számokkal való osztás szabálya alapján jobban meg tudta jelölni a megegyező illetve a különböző értékeket.

Az indoklások között több tanuló megemlíti:

" $\frac{a-2}{b-4} = -\frac{2-a}{4-b}$, mivel az egyik törtet $-1/-$ gyel megszorozzuk, és akkor a másik törtet kapjuk."

/Ez már magában hordja annak a hibának a veszélyét, amellyel az egyenletek megoldásánál találkozunk, ugyanis amikor "elfelejti" beszorozni az egyenlet másik oldalát is./

Vagy:

" $\frac{a-2}{b-4} = -\frac{2-a}{b-4}$, mivel a második tört számlálójában felcseréltük a kivonandók sorrendjét, amely azt eredményezte, hogy a tört előjele megváltozott."

/Tehát a $-1/$ kiemelését azonosítja a "kivonandók" sorrendjének felcserélésével, bár az egyenlőség beírása helyes./

Vagy:

" $\frac{a-2}{b-4} = -\frac{2-a}{4-b}$, mert $-\frac{2-a}{4-b} = \frac{-/2-a/}{-/4-b/} = \frac{a-2}{b-4}$ "

/Vagyis a törtvonal előtti mínusz jel a számlálóra és nevezőre egyszerre érvényes, hiszen a tört értéke így nem változik./

A fenti első és harmadik elgondolás miatt a sok hiba közül a legjellemzőbbek voltak:

$$\frac{a-2}{b-4} = \frac{2-a}{b-4}$$

$$\frac{a-2}{b-4} = \frac{a-2}{4-b}$$

$$\frac{a-2}{b-4} = -\frac{2-a}{4-b}$$

A vizsgálat és a magam oktató munkája is megmutatta, hogy az algebrai törtek tanítása a középiskolai tananyagnak az a része, amely talán a legtürelmesebb, legnagyobb körültekintést és a legtöbb

gyakoroltatást igényli. Nem lehet ezt az anyagrészt könnyen elintézni azzal a szemlélettel, hogy a közönséges törték tanításánál a szabályokat ugyanis megtanították már, most csupán olyan törtékre alkalmazzuk ezeket, amelyekben betűk is szerepelnek.

Kísérlet

Ebben az osztályban a szaktanár által előírt gyakorlási feladatok közé beiktattunk olyan feladatokat, amelyektől a tapasztalt hibák megelőzését vártuk.

1./ Irjuk fel tört alakjában a következő algebrai kifejezéseket:

$$a : 3$$

$$4 : b$$

$$/a - b/ : 5$$

$$a^2 : /a + b/$$

$$/5a - 3b/ : /a - b/$$

$$/x^2 + x - 1/ : /2x^2 + 1/$$

2./ A következő kifejezések közül melyiknek változik meg az előjele, ha "x" előjelét ellenkezőjére változtatjuk:

$$\frac{5}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \frac{x^2 + 1}{x^2}, \frac{x^2 + 1}{x}, \frac{x}{x^2 + 4}$$

3./ Alakítsuk át a következő törtéket úgy, hogy se a számlálóban, se a nevezőben ne legyen mínusz jel:

$$\frac{-3x}{-5y}, \frac{6a^2}{-5b}, -\frac{-3a}{4b}, -\frac{-x}{-y}, -\frac{3a^2}{-b}$$

4./ Alakítsuk át a következő törtéket úgy, hogy a törték előtt mínusz előjel álljon:

$$\frac{1-a}{a}, \frac{b}{1-a}, \frac{a-b}{c+d}, \frac{-a-b}{c+d}$$

A feladatok megoldása során a vizsgálatban szereplő hibákat előidéző jelenségekkel bőven volt alkalma foglalkozni a szakta-

nárnak. Az előismereteket felfrissíthette, illetve kapcsolatba hozhatta az új fogalommal. A tanulók nem a "minusz jel kiemelését," hanem a -1 kiemelésének, vagy -1 -gyel való szorzásnak-osztásnak a kapcsolatát látták meg az előzőekből ismert szabályokkal.

A kísérlet eredménye:

4 találat 3 találat 2 találat 1 találat 0 találat

13 /52%/ 4 /16%/ 4 /16%/ 3 /12%/ 1 /4%/

Az elérhető 100 találatból 75 találatot ért el az osztály, amely 75%-os teljesítményt jelent az X osztály 54%-os teljesítményével szemben.

7. hiba

Szintén az algebrai törtek témakörénél tapasztalható hibát, illetve hibacsoportot vizsgáltam a következő feladatok megoldása kapcsán:

Vizsgálat

Egyszerűsítsük a következő törteket:

1./ $\frac{a^3}{a^4}$

2./ $\frac{ab}{a^2}$

3./ $\frac{3x^2y}{6x^2yz}$

4./ $\frac{2a^3b^2}{a^3b^2}$

A vizsgálat értékelését bontsuk fel példákra, hiszen az egyes példáknál elkövetett hibák forrása általában különböző.

1.példa

A vizsgálat eredménye:

X osztály	14	/56%/	hibátlan	7	/28%/	hibás	4/16%/	részben fogl. vele
Y	"	22	/52%/	"	13	/31%/	"	"
U	"	26	/56%/	"	17	/37%/	"	"

A 37 hibázó tanuló közül 27 tanuló eredménye:

$$\frac{a^3}{a^4} = a$$

Ezek a tanulók hibás analógia alapján kapják az "eredményt".

Ugyanis először olyan jellegű egyszerűsítésekkel találkozunk, amikor a számláló magasabb fokszámu, mint a nevező.

Pl.
$$\frac{a^4}{a^3} + \frac{a}{1} = a$$

Ezt az észrevételüket igyekezzenek érvényben tartani /hiszen a két feladat hasonlít egymáshoz/, nem veszik észre, hogy a feltételek nem azonosak.

A tanulókkal való egyéni beszélgetésekből kiderült, hogy az egyszerűsítés fogalma sem tiszta sokaknál. A számláló és nevező közös tényezőivel való egyszerűsítést /amely a számláló és nevező osztását jelenti ugyanazzal a számmal/ a kivonással helyettesítik így: "a számláló három a-t /vagy 3-szor a-t/ a nevező négy a-t tartalmaz, így egyszerűsítés után marad egy a" - de hogy az a számlálóban vagy a nevezőben marad-e, az már nem lényeges. Ehhez a téves elgondoláshoz hozzájárul annak a szabálynak a pongyola rögzítése is, hogy: "egyenlő alapu hatványokat így is osztunk: a számláló kitevőjéből kivonjuk a nevező kitevőjét, és a közös alapot erre a kitevőre emeljük." Ugyanis a megkérdezett tanulók egy része ezt a szabályt így rögzíti emlékezetében:

"egyenlő alapu hatványokat úgy osztunk, hogy a kitevőket kivonjuk" /Ennek oka, hogy a szorzásra vonatkozó hasonló szabálynál valóban mondhatjuk, hogy a kitevőket összeadjuk./

A hamis analógia mellett a fogalom tisztázatlan voltának szerepére utal az a tény is, hogy 8 tanuló megoldása:

$$\frac{a^3}{a^4} = a^{3-4}$$

Tovább nem haladnak, hiszen a nulla, negatív és törtekitevő csak

a következő évben kerül bevezetésre. Ez felfogható úgyis, hogy a tanulóknál igényként lép fel a negatív kitevő kérdése, de méginkább mondhatjuk, hogy formális tudással bírnak. Ahelyett, hogy közös tényezők szempontjából gondolkodnának, a kitevők érdekesek számukra, mert a szabály is

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s} \quad / r > s /$$

ezt mondja. Mondhatjuk, hogy ezen tanulók esetében a gondolkodás útja nem járta végig a konkrét-absztrakt-konkrét utat.

Három tanuló $\frac{a^3}{a^4} = a^7$ megoldást ad, az egyenlő alapu hatványok szorzásának szabályát "igyekszenek" alkalmazni.

Négy tanuló eredménye: $\frac{a^3}{a^4} = \frac{3}{4}$, amely a hatványfogalom teljes zavarára utal.

Három tanuló $\frac{a^3}{a^4} = a^{4-3}$ alakot ad meg, amely a már említett pongyola szabályrögzítés eredménye.

Azokat a tanulókat, akik részben foglalkoztak a feladattal, nem sorolom a hibát elkövetőkhöz, mert vagy az $\frac{a^3}{a^4} = a^{3-4}$, vagy $\frac{a^3}{a^4} = \frac{a}{a^2}$ eredményt tekintették megoldásnak. Az előző alak eredetéről már szóltam, nem kevésbé fontos megmézni, vajon miért tekintették végeredménynek a második alakot? - "Azért nem lehet tovább egyszerűsíteni, mert a számlálóban akkor már nem szerepelne semmi." - mondták többen. Vagyis az a-nak az elvonásával gondolják az egyszerűsítést és az így kapott $\frac{0}{a}$ már nem tört - szerintük. "Mivel a számlálóban a-nak nincs már kitevője, így tovább nem egyszerűsíthető, ez a legegyszerűbb alak." - mondták mások. Ime ismét előjött a már tárgyalt $a=1 \cdot a^1$ kérdése.

2.példa

Azért adtam ezt a példát, hogy a számlálóban az a-n kívül szerepeljen egy másik betű is. Ez a b szám elősegítette a hibátlan megoldások számának növekedését, bár strukturájában nehezebb az első példánál. Itt bátrabban egyszerűsítették a-val, mivel a számlálóban még marad betű, a b, tehát mintegy megerősítik az eredmények az első példánál fellépő hiba okának megállapítását. Gondolatukban ez ment végbe az első példánál:

$$\frac{a^3}{a^4} = \frac{\cancel{a} \cancel{a} \cancel{a}}{\cancel{a} \cancel{a} \cancel{a} a} = \frac{?}{a}$$

A második példánál a b segített a kérdőjel feloldásában:

$$\frac{ab}{a^2} = \frac{\cancel{a} b}{\cancel{a} a} = \frac{b}{a}$$

Természetesen a második példánál is több tanuló hibát követett el, hasonló okok miatt, mint az első példánál, de a 113 tanuló közül 92 tanuló helyes eredményt adott meg. A hibázó tanulók tipushibája - mint ahogy ez az első példa tapasztalata alapján várható volt - két változatban jelentkezett:

$$\frac{ab}{a^2} = ab$$

$$\frac{ab}{a^2} = \frac{b}{2}$$

3.példa

Ez a példa az előző példáktól abban különbözött, hogy egyrészt több betű szerepelt benne, másrészt konstans tényezőket is tartalmazott, amelyeknek szemmel láthatóan van közös törzstényezőjük.

A vizsgálat eredménye:

X osztály	11/44 %/	hibátlan	10/40 %/	hibás	4/16 %/	részben fogl. vele
Y	" 18/43 %/	"	17/40 %/	"	7/17 %/	"
U	" 21/45 %/	"	19/41 %/	"	6/14 %/	"

Az első példa vizsgálati eredményével összehasonlítva láthatjuk, hogy még több a hibát elkövető tanulók száma. Az x és y betűk nem okoztak különösebb gondot /mivel a számlálóban is és a nevezőben is ugyanolyan hatványon szerepelnek/, annál több hibát követtek el a z-érték illetve a konstansok vonatkozásában. Az első példa alapján természetes, hogy sok tanuló megoldása így néz ki:

$$\frac{3x^2y}{6x^2yz} = \frac{A}{B} z \quad \text{/ahol A és B konstansok/}$$

A konstansok értéke a következőképpen alakult:

$$\frac{3x^2y}{6x^2yz} = \frac{1}{2} z \quad \text{/ 16 tanuló /}$$

$$\frac{3x^2y}{6x^2yz} = 2z \quad \text{/ 10 tanuló /}$$

$$\frac{3x^2y}{6x^2yz} = 3z \quad \text{/ 7 tanuló /}$$

$$\frac{3x^2y}{6x^2yz} = \frac{1}{3} z \quad \text{/ 6 tanuló /}$$

Az első esetben helyesen adják meg a konstans értékét, de a z-t a már említett okok miatt nem a nevezőbe írják.

A második esetben a konstans is arra a "sorsra" jut, mint a z.

A harmadik változatban kettős hiba fedezhető fel, elkövetik az előző hibát és $6x^2yz - 3x^2y = 3z$ alakban okoskodnak.

A negyedik hiba a harmadiknak egy szépített formája, mivel a számláló és a nevező megkapja a maga helyét, de az egyszerűsítést

az elvonással helyettesítik. $/6x^2y$ -t "egyszerűsítve" $3x^2y$ -nal "marad" 3./

Azok a tanulók, akik részben foglalkoztak a feladattal, nem végezték el az összes lehetséges egyszerűsítést, hanem megálltak a következő alaknál:

$$\frac{3x^2y}{6x^2yz} = \frac{x^2y}{2x^2yz}$$

$$\frac{3x^2y}{6x^2yz} = \frac{3y}{6yz}$$

$$\frac{3x^2y}{6x^2yz} = \frac{y}{2yz}$$

4. példa

A vizsgált alaku algebrai törtek egyszerűsítésénél előforduló hibák és ezek okának pontos meghatározása érdekében végezettül a következő példát kellett a tanulóknak megoldani:

$$\frac{2a^3b^2}{a^3b^2}$$

A 113 tanuló közül csak 8 tanuló adott helytelen megoldást, hiszen itt az előző példában hibákat kiváltó okok hiánya miatt a hibák is elmaradtak.

A hibázó tanulók

$$\frac{2a^3b^2}{a^3b^2} = a^3b^2$$

eredményt kapták, amely alátámasztja azt a megállapítást, hogy $3a^3b^2 - 2a^3b^2 = a^3b^2$ kivonás útján végzik az egyszerűsítést.

Az 1-4. példákban tárgyalt részletes vizsgálat, a tanulókkal való egyéni beszélgetés sokoldaluan feltárta a hibák eredetét,

de megmutatja egyben a javítás és megelőzés lehetőségeit is. Tapasztalatom és meggyőződése, hogy a fenti hibák előfordulási számát - a vizsgálatban tisztázott okok ismeretében - eredményesen csökkenthetjük. Tanításunk során különösen nagy figyelmet fordítsunk:

- 1./ Az algebrai kifejezés, hatványozás és műveletek hatványokkal témakörre.
- 2./ Az algebrai tört fogalmának tisztázására.
- 3./ Az egyszerűsítés " "
- 4./ Az ismeretszerzés konkrét-absztrakt-konkrét útjára.
- 5./ Nem szabad lebecsülni a "kis példák" szerepét. A példatár egész sor olyan feladatot tartalmaz, amelyekre a tanulóknak szóban kell válaszolni, és éppen ezek teszik tudatossá a szabályok alkalmazását. Az ilyen egyszerű feladatok után adjuk csak a nehezebb feladatokat.
- 6./ Az elméleti megalapozás elcsúszása ugyanazzal a veszéllyel jár, mint a tudományokban az alapkutatások elhanyagolása.
/Ha csak a gyakorlati alkalmazásokat hajszolva dolgozunk, előbb-utóbb megrekedünk, nem tudjuk betölteni tudományunk a "termelő eszköz" szerepét./

8. hiba

Nem kevesebb azoknak a hibáknak a száma, amelyeket a tanulók a többtagu számláló vagy nevező esetében követnek el az algebrai törtek egyszerűsítésénél, átalakításánál.

A 6. és 7. hibánál megállapított okok természetesen ebben az esetben is fennállnak, sőt nyomatékosabb a kiemelés, szorzattá alakítás okozta nehézség hatása.

Vizsgálat

Egyszerűsítsük a következő törtet:

$$\frac{4ab - 2}{2ab}$$

A vizsgálat a következő képet mutatta:

X osztály	14 /56%/	hibátlan	11/44 %/	hibás
Y "	21 /50%/	"	21/50%/	"
U "	20 /43%/	"	26/57%/	"

A feladattal mindenki foglalkozott, így csak hibátlan és hibás megoldásokat értékelhettünk.

A vizsgálat igazolta a feltételezett hibák előfordulását, ugyanis a következő tipushibák adódtak:

$$a./ \quad \frac{4ab - 2}{2ab} = 2ab - 2 \quad / 26 \text{ tanuló} /$$

$$b./ \quad \frac{4ab - 2}{2ab} = 0 \quad / 18 \text{ tanuló} /$$

$$c./ \quad \frac{4ab - 2}{2ab} = 1 \quad / 14 \text{ tanuló} /$$

Mindhárom típusu hibára egyaránt vonatkozik, hogy tévesen feltételezett analógia következményei. Ugyanis közös vonásuk, hogy

az "ab-vel való egyszerűsítés" tényét használták fel. Az előző anyagrészben csak olyan törtekkel foglalkoztak, amelyeknek számlálójuk és nevezőjük is egytagu volt. Ezeknél a törteknél látták, hogy ha a számláló és a nevező tartalmaz ugyanolyan betűt, vagy annak valamilyen hatványát, akkor a számlálóból és nevezőből is lehuzhatjuk, pl. :

$$\frac{a^2 bc}{a^2 b^3} = \frac{\cancel{a^2} bc}{\cancel{a^2} b^3} = \frac{c}{b^2}$$

Ezt a formális szabályt igyekezzenek érvényben tartani a többtagu számláló esetében is.

A hamis analógián kívül a fogalom tisztázatlan volta is e hibás elgondoláshoz vezeti a tanulót. Ugyanis mindhárom esetben észrevehető az ab-vel vagy a 2ab-vel való egyszerűsítés gondolata hamis analógiára való hivatkozással /amiből következik, hogy a számlálónak csak az egyik tagját veszik figyelembe az egyszerűsítésnél/, de az első két esetben az egyszerűsítés a 2ab-nek a számlálóból való elvételét /elvonását/ jelenti.

Az egyszerűsítésnél "amivel egyszerűsítünk, az megszűnik" elv alapján az a./ esetben "megszűnik" vagy "eltűnik" a nevező 2ab-je, a számlálóból pedig ezt a 2ab-t elveszi és így adódik eredményül a $2ab - 2$.

A b./ esetben ezt a téves elgondolást még tetézik azzal, hogy a számlálóból a 2ab-t így vonják ki:

$$4ab - 2ab = 2 \quad \text{/erről a hibáról mást szoltam/}$$

Igy lesz az eredmény:

$$\frac{4ab - 2}{2ab} = 2 - 2 = 0$$

A c./ típusu hiba még a legszerencsésebb eset, mert ebben az esetben csak a hamis analógia indítja a tanulót arra, hogy csak az egyik tagot egyszerűsítse:

$$\frac{4ab - 2}{2ab} = \frac{4 - 2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Kísérlet

A vizsgálat feltárta az előforduló hibákat és azok okait. Az okok ismeretében a javítási és megelőzési eljárások szinte kínálják magukat.

- 1./ Az egytagu és többtagu algebrai kifejezések fogalmának felujtása.
- 2./ A tag és tényező közötti különbség meglátásának és mondásának szigorú megkövetelése. Begyakoroltatni, hogy pl. a következő kifejezések hánytaguak, illetve hány különböző szorzótényezőt tartalmaznak:

$$\frac{2a^2b}{3a^3bc}, \quad \frac{-/3a^2 - b/}{2ab}, \quad \frac{5a^2b/3a^3b - 2cd/}{3/a - b/a + b/}$$

Az utolsó kifejezés példa lehet arra is, hogy először "külső forma" alapján jellemezzük a kifejezést /tört, melynek számlálója és nevezője is szorzat/ és ezután bontsuk "finomszerkezet" szempontjából részekre /a tényezők számok, hatványok, különbségek, összegek/. A tanuló ugyanis, ha (+) vagy (-) jelet lát, akkor már csak összeg, különbség jelenik meg előtte /ami természetes is/, és kevesen vannak olyanok, akik ezeknek

az összegeknek vagy különbségeknek a kifejezésben elgondolt helyzetét, szerepét is meglátják. /Tudnillik olyan tényező, amely összeg vagy különbség/. Ezzel megelőzzük a tanuló kétélyét olyan esetben; amikor összeggel vagy különbséggel mint tényezővel egyszerűsítünk. /Mondani szokták egyesek ezen esetekben: "azt tanultuk, hogy tényezővel egyszerűsítünk, hogyan lehet akkor mégis összeggel vagy különbséggel egyszerűsíteni?"/

3./ A kiemeléssel és egyéb szorzattá alakítási eljárásokkal szorosan összekapcsolni az egyszerűsítés fogalmát.

4./ Annak a szabálynak, hogy a számláló és nevező közös tényezővel történik az egyszerűsítés, összekapcsolása azzal, hogy a többtagu számláló minden tagját egyszerűsítjük.

$$A \quad \frac{4ab - 2}{2ab} = \frac{2/2ab - 1/}{2ab} = \frac{2ab - 1}{ab}$$

műveleti sort kezdetben igen kamatoztató megkövetelni a

$$\frac{4ab - 2}{2ab} = \frac{2ab - 1}{ab}$$

helyett. Ugyanis így tud kapcsolatot teremteni a tanuló a kiemelés, szorzattáalakítás, tényezőkkal való egyszerűsítés és a tagonként való egyszerűsítés között. Gyakorlottabb fokon a közbeeső lépések természetesen már kimaradhatnak. A fent felsorolt elgondolások érvényre jutottak a kísérleti osztályban a gyakorlások során. Az eredmény minőségi különbséget mutatott a vizsgálati osztályok eredményéhez képest. A 25 tanuló közül 21 hibátlanul oldotta meg a feladatát.

Nézzük meg, hogy a vizsgált populációban a megelőzésre és javításra irányuló beavatkozásunk lényeges változást eredményezett-e a tanulók teljesítményében:

X osztály:

$$\bar{x}' = \frac{14}{25} = 0,56$$

$$\sum x'^2 = 14$$

$$\frac{(\sum x')^2}{n_1} = \frac{196}{25} = 7,84$$

$$\sum (x' - \bar{x}')^2 = 6,16$$

Kísérleti osztály:

$$\bar{x} = \frac{21}{25} = 0,84$$

$$\sum x^2 = 21$$

$$\frac{(\sum x)^2}{n_2} = \frac{441}{25} = 17,64$$

$$\sum (x - \bar{x})^2 = 3,36$$

$$s = \sqrt{\frac{6,16 + 3,36}{48}} = \sqrt{\frac{9,52}{48}}$$

$$s = 0,45$$

$$t = \frac{0,84 - 0,56}{0,45} \sqrt{\frac{25 \cdot 25}{50}}$$

$$t = 2,302$$

$$0,02 < P < 0,05$$

Vagyis beavatkozásunk szignifikáns különbséget eredményezett a tanulók teljesítményében. 95-98%-os valószínűséggel mondhatjuk, hogy a két osztály teljesítménye között tapasztalható különbség beavatkozásunknak az eredménye.

9. hiba

A többtagu számláló és többtagu nevező esete mellett azt is vizsgáltam, hogy a többtagu kifejezés hatványozása milyen újabb hibákkal szaporítja a hibák számát.

Vizsgálat

Átalakítás után egyszerűsítsük a következő törtet:

$$\frac{(a + b)^2 - 2ab}{a^2 + b^2}$$

A feladat szövegében azért említettem meg az átalakítást, mert úgy véltem, hogy ez kissé nehezebb feladat. /Bár az $(a+b)^2$ és a $(-2ab)$ közötti kapcsolat meglátása elvárható volna./

A vizsgálat eredménye:

X oszt.	11 /44% /	hibátlan	7/28% /	hibás	4/16% /	részben fogl.	3/12% /	nem fogl.
Y "	20/47% /	"	12/29% /	"	5/12% /	vele	5/12% /	vele
U "	19/41% /	"	15/33% /	"	7/15% /	"	5/11% /	"

Akik részben foglalkoztak a feladattal, eljutottak az $\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}$

de ezt végeredménynek tekintik. Kérdésekre így válaszoltak:

"Nincs közös tényező, tehát nem egyszerűsíthető tovább."

A mikor $\frac{1(a^2 + b^2)}{1(a^2 + b^2)}$ alakban írtuk fel, akkor már legtöbbjük meglátta, hogy az (a^2+b^2) közös tényező és egyszerűsítettek vele.

A 113 tanuló közül 13 üres feladatlapot adott be. Ezek hiányos előismeretekkel rendelkeztek /hiányoztak az előző órákon vagy teljesen leblokkoltak/.

A feladat megoldása során elkövetett hibák típusai:

$$a./ \quad \left\{ \frac{(a+b)^2 - 2ab}{a^2 + b^2} = -2ab \right.$$

/13 tanuló/

$$b./ \quad \left\{ \frac{(a+b)^2 - 2ab}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{a^2 + b^2} = -2ab \right.$$

$$c./ \quad \frac{(a+b)^2 - 2ab}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 + b^2 + 2ab - 2ab}{a^2 + b^2} = 2ab - 2ab = 0$$

/10 tanuló/

$$d./ \quad \frac{(a+b)^2 - 2ab}{a^2 + b^2} = \frac{(a+b)(a+b) - 2ab}{(a+b)(a-b)} = \frac{a+b-2ab}{a-b}$$

/8 tanuló/

$$e./ \quad \frac{(a+b)^2 - 2ab}{a^2 + b^2} = \frac{a+b-2ab}{a+b}$$

/3 tanuló/

Az eredményt jónak tekintettem, ha a tanuló az 1 végeredményt kapta, mivel

$$\frac{(a+b)^2 - 2ab}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 + 2ab + b^2 - 2ab}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1$$

Az egyéni beszélgetésekből azonban kiderült, hogy az 50 hibátlannak minősített megoldás közül 6 "véletlenül" jó, mivel az utolsó lépésnél így okoskodtak:

$$\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = \frac{1+1}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$$

vagyis először a^2 -tel egyszerűsítettek, majd b^2 -tel, amely most véletlenül ugyanazt az eredményt adta, mint (a^2+b^2) -tel való egyszerűsítés.

Az elkövetett hibák típusainak vizsgálata azt mutatta, hogy a hibák előidézésében szerepet játszik a hamis analógia, a formalizmus és a megszokás.

Az a./ típusu hiba a 8/a hibának felel meg. Ezek a tanulók nem vették figyelembe a feladat szövegében szereplő "átala-

kitás" felszólítást. Kettős hibát követnek el, mivel az $(a+b)^2$ kifejezést azonosítják az (a^2+b^2) kifejezéssel, másrészt a többtagu számlálónak csak az egyik tagját egyszerűsítik, azt is oly módon, hogy elvonás útján "eltüntetik" a számlálóból és a nevezőből az $(a+b)^2$ és az (a^2+b^2) tagokat. Az $(a+b)^2 = a^2+b^2$ hibás elgondolásra elsősorban hamis analógia vezet a tanulót. Egyik legkorábbi szabályt, t.i. hogy összeget tagonként szorzunk egy számmal igyekezzenek alkalmazni és a hatványozást is tagonként elvégezni. Ezeknél a tanulóknál az $(a+b)^2$ kifejezés nem jelenik meg $(a+b)(a+b)$ alakban, vagy ha megjelenik is, megszokásból a tagonkénti hatványozásra való "irányultságuk" miatt $(a+b)^2 = a^2+b^2$ alakban adják meg a megoldást.

A b./ hibánál lényegében azok az okok játszanak szerepet, mint az a./ hibánál, annyi különbséggel, hogy figyelembe veszik az "átalakítás" felszólítást, le is írják a hibás elgondolás lépéseit.

A c./ hibát elkövető tanulók már helyesen oldják meg az $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$ átalakítást, de az átalakítás után a már tárgyalt egyszerűsítési hibába esnek.

A d./ hibacsoport a hibás egyszerűsítés ténye mellett pozitív törekvést is mutat. A "tényezőkkel való egyszerűsítés" elvének gondolatát tartalmazza. Az átalakítás során tényezők előállítására törekszik, de ebben a törekvésben a formalizmus és a megszokás fedezhető fel. A tanuló megszokta, hogy a példák egész soránál segített az $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ átalakítás. Ezt a felbontást minden további nélkül átviszi az a^2+b^2 formára is.

Az e./ hibát elkövető 3 tanuló számára a hatványozás és az egyszerűsítés teljesen tisztázatlan fogalom. Nem látják az $(a+b)^2$ és (a^2+b^2) közötti különbséget. Ezt a súlyos hibát tetézik az egyszerűsítés tisztázatlan voltából származó hibával.

A fenti hibacsoportok megelőzési és javítási módjára nem folytattam kísérletet, mivel a 8. hibánál szereplő kísérlet ezen hibák megelőzésére is vonatkozik.

10. hiba

Ide sorolom azokat a hibákat, amelyek az elsőfoku egyismeretlenes egyenletek megoldásakor fordulnak elő. Az észlelt hibák a már tárgyalt hibák következményei, tehát eredetük szerkeázó. Ha tanításunk során nem fordítottunk kellő figyelmet az előzőekben tárgyalt hibákra, akkor ezek összhatása olyan súlyos következményekkel jár, amelyet röviden úgy fejezhetünk ki, hogy a tanulók nem tudnak egyenletet helyesen megoldani. A 10. hiba tehát azt jelenti, hogy az egyenlet megoldása során a tanuló hibát vagy hibákat követett el.

Az egyenlet gyökeit az egyenleten végzett ekvivalens átalakításokkal nyerjük, amelyhez szükséges fogalmakat előzőleg gondosan kialakítottuk. Mondhatjuk, hogy ezen "építőkövekből" rakjuk össze az egyenlet megoldását. Mivel az építőkövek tanítása alkalmával találkoztunk hibákkal, természetes, hogy az "építmény" méginkább hibákkal terhelt. Az egyes építőkövek, elemek /összevonás, többtaguak szorzása, zárójelleltávolítás, kiemelés, törtekkel kapcsolatos problémák, stb.../ tárgyalása során rámutattam az előforduló hibákra és ezek megelőzési illetve javítási módjaira, ezért csak néhány olyan hibát teszek vizsgálat tárgyává, amelyek az új fogalommal, az egyenlettel kerülnek felszínre. Ilyen hibák a következők:

- a./ törtek eltávolításával kapcsolatos hibák
- b./ reciprokképzéssel kapcsolatos hibák
- c./ a két oldal egyenlő változtatásának elvéből a tanulók által "leszűrt" formális és analógiás hibák.

Vizsgálat

Oldjuk meg az egyenleteket:

a./ $-3x = \frac{1}{2}$

b./ $\frac{x}{2} = \frac{3}{5}$

c./ $\frac{1}{x} = \frac{1}{3}$

d./ $\frac{1}{x} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

e./ $2 - \frac{2x - 6}{5 - x} = \frac{5x}{x - 5}$

A vizsgálatot úgy hajtottam végre, hogy bőven legyen idejük a tanulóknak, ugyanakkor minden egyes megoldási lépést le kellett írni /megmondani, hogy mit csinálunk/.

A feladatok értékelése után a következő eredményt tapasztaltam:

Mind az		5 jó	4 jó	3 jó	2 jó	1 jó	Egy sem jó
X osztály	10/40%/	5/20%/	2/8%/	3/12%/	3/12%/	2/8%/	
Y "	14/33%/	8/19%/	6/14%/	6/14%/	5/12%/	3/8%/	
U "	13/28%/	8/17%/	10/22%/	5/11%/	4/9%/	6/13%/	

Az öt feladat megoldása során elkövetett hibák száma növekvő sorrendben a következőképpen alakult:

c./ feladatnál:	8 tanuló	/ 7 %/
b./	" : 12 "	/11 %/
a./	" : 17 "	/15 %/
d./	" : 24 "	/22 %/
e./	" : 54 "	/48 %/

A hibáknak a fenti sorrendben való alakulása első látásra bizonyos meglepetést válthat ki. A tanulók ugyanis csak később foglalkoznak olyan egyenletek megoldásával, amelyek a nevezőjükben

tartalmaznak ismeretlent. Ugyanakkor az a./ és b./ jellegű feladatok begyakorlása során számos olyan információt raktároz-
nak el, amelyek segítik őket a további feladatok megoldásában,
így pl. a c./ jellegű feladat megoldásában is.

Az $\frac{1}{x} = \frac{1}{3}$ egyenlet megoldásánál a tanulók csak kevés há-
nyada okoskodik a törteltávolítás begyakorolt módszerével:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{3} \text{ szorzom az egyenletet } 3x\text{-szel}$$

$$3 = x$$

Ehelyett inkább a formális "keresztbeszorzás" :

$$\begin{array}{l} \frac{1}{x} = \frac{1}{3} \\ x = 3 \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array}$$

illetve a reciprokképzés dominál:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{x}{1} = \frac{3}{1}$$

$$x = 3$$

Az utóbbi két elgondolás nyilvánvalóan ugyanazt a jó megoldást
eredményezi, de a később tárgyalt feladattípusoknál hibákat
eredményezhet a formális alkalmazás. A d./ feladat megoldásában
hibázó tanulók hibáit nem mondhatjuk tipikusaknak, hiszen szá-
muk aránylag kevés. /A hibát vagy ott követték el, hogy $3x$ he-
lyett $(x+3)$ -mal szorozták az egyenletet, vagy csak az egyik ol-
dal reciprokát vették, mivel az x csak az egyik oldalon for-
dult elő a nevezőben./

A b./ feladatnál előforduló gondolkodásmód lényegében az
előző feladatnál látottakkal egyezik meg. Hogy a hibák száma 7%-
ról 11%-ra ugrott, az annak a következménye, hogy $5x = 6$ alak

még nem végeredmény /az előző feladatnál az $x = 3$ végeredmény volt/. A feladatok kitűzésénél éppen ennek a lépésnek a megoldásánál vártam tipikus hibát. Általában az $ax=b$ egyenlet megoldásának problémája ez. Több tanuló

$$\begin{aligned} 5x &= 6 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

megoldást ad. Általában tehát a hiba ilyen alakú:

$$\begin{aligned} ax &= b \\ x &= b - a \end{aligned}$$

A hiba oka egyrészt az együttható tisztázatlan fogalmának következménye /amelyről a dolgozatban már több helyen említést tettem/ másrészt az egyenletmegoldás technikájából származó formális és analógiás hiba. A két oldal egyenlő változtatásának elve /mérlegelv/ alapján sorozatban oldatjuk meg a feladatokat. Ha nem is mondjuk, a tanuló azt a formális szabályt raktározza el, hogy az egyenlet egyik oldaláról a másik oldalra átvitt tag előjele ellentétesre változik:

$$\begin{aligned} x + a &= b \\ x &= b - a \end{aligned}$$

Amikor az $x+a=b$ alak helyett az $ax=b$ alakkal van dolga, a hamis analógia sugallatára lesz az $ax=b$ egyenlet megoldása $x=b-a$.

Az a./ feladatban méginkább hajlamos a tanuló e hamis analógia felhasználására. A tört eltávolítása jelenti a hibába esés kisebbik lehetőségét, a nagyobbik inkább a

$$\begin{aligned} -6x &= 1 \\ x &= 1 + 6 \\ x &= 7 \end{aligned} \quad \text{rossz megoldáshoz vezet.}$$

E feladatnál előforduló 15%-os hiba mellett bizonytalanságot árult el több tanuló a $-6/-$ -os együtthatóval kapcsolatban. Ők a negatív előjelet a $-1/-$ -gyel való szorzással távolítják el, de "elfeledkeznek" a jobb oldal beszorzásáról.

Mások az $x = \frac{1}{-6}$ megoldást adják. Ezen tanulók a "baloldalon

szorzó, jobboldalon osztó" formális szabályra hivatkoznak, de a megkérdezettek többsége nem meri azonosítani az $x = \frac{1}{-6}$ -ot az $x = -\frac{1}{6}$ -dal.

A d./ egyenlet megoldásánál a tanulók 22%-a hibát követ el. Mivel ez a feladat szerkezetében bonyolultabb az előző feladatoknál, várható volt, hogy emelkedik a hibás megoldások száma. Ugyanakkor az előző, egyszerűbb feladatoknál elkövetett hibák mellett olyan hibák is felszínre kerülnek, amelyek méginkább megerősítik a hibák formális és analógiás voltát. A tapasztalt főbb hibák a következők voltak:

- 1./ $\frac{1}{x} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$
 $x + 2 = 3$
- 2./ $\frac{1}{x} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$
 $x + 2 = \frac{1}{3}$
- 3./ $\frac{1}{x} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$
 $2 + x = \frac{1}{3}$
- 4./ $\frac{1}{x} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \quad / \quad 3(x+2)$
 $6x + 3x = x + 2$
- 5./ $\frac{1}{x} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$
 $\frac{1}{x+2} = \frac{1}{3}$

Az 1. és 2. hiba a c./ feladatnál alkalmazott reciprokképzés közvetlen következménye. Amíg az a c./ feladatnál helyes eredményt adott /és éppen ezért alkalmazásának formális vagy tudatos volta nem dönthető el/, a d./ feladatnál való sablonos, hamis analógián alapuló alkalmazása hibához vezet. A 2. hibánál csak a bal oldalnak képezik tagonként a reciprokát. Ehhez az a gondolat, észrevétel vezeti a tanulót, hogy csak a baloldalon szerepel x a nevezőben.

Ez így is van, de a tagonkénti reciprokképzés mellett önálló életre kel az egyenlet baloldala, amelyet újabb hibának számíthatunk.

A 3. hiba formailag a 2. hiba eredményére vezet, sőt abban is megegyeznek, hogy a tanuló az egyenletnek csak a baloldalával foglalkozik. Ennél a hibánál a baloldalból nem a reciprokképzés útján jut a tanuló a $(2 + x)$ -hez, hanem a "keresztbeszorzás" alkalmazásával.

A 4. és 5. hiba eredete az algebrai törtek témaköréhez nyúlik vissza /törtek egyszerűsítése, törtek bővítése, legkisebb közös többszörös, műveletek törtekkel/, amelyről már beszéltünk. A 4. hibánál bár a $3(x + 2)$ -vel való szorzás megjelölése hibás, a beszorzás után azonban a jobboldalon a 3×2 -vel való szorzás eredménye szerepel. Ennek oka, hogy formailag a törteltávolítás így rögzítődött: "a számlálót a legkisebb közös többszörösnek azaz a részével kell szorozni, amelyet az illető nevező kihagyásával kapunk."

Az 5. hiba az algebrai törtekkel végzett műveletek tisztázatlan, kellő módon be nem gyakorolt voltából származik.

Az e./ egyenlet megoldásánál előforduló hibák közül három hibával foglalkozom részletesebben:

- 1./ a törtek eltávolításánál tapasztalható hiányosságok
- 2./ $5-x$ és $x-5$ közötti kapcsolat a közös nevező szempontjából
- 3./ a törtvonal előtti mínusz jel szerepe.

A 48%-os hibaátlag elsősorban e három dolog miatt következett be, /természetesen az egyenlet megoldása során további, az előző egyenleteknél tárgyalt hibákkal is találkozunk/.

Ha az egyenlet megoldását $(5-x)(x-5)$ -tel való beszorzással

kezdték, akkor az egyenlet az $x^2 + 11x - 80 = 0$ másodfoku egyenlethez vezetett, melynek gyökei: $x_1 = -16$, $x_2 = 5$. Az $x=5$ azonban nem gyöke az egyenletnek, mivel a nevezők ebben az esetben 0-val egyenlők. Ezt az utat 35 tanuló választotta, hibának nem számítottam, mivel az $x^2 + 11x - 80 = 0$ egyenletnél megakadtak. /T.i. másodfoku egyenlettel még nem foglalkoztak./ Ezt az utat választó 35 tanuló közül azonban 16 tanuló a törtek eltávolításánál a következő hibát követi el:

$$2 - \frac{2x - 6}{5 - x} = \frac{5x}{x - 5} \quad / \quad (5 - x)(x - 5)$$

$$2 - (2x - 6)(x - 5) = 5x(5 - x)$$

vagy

$$2 - \frac{2x - 6}{5 - x} = \frac{5x}{x - 5} \quad / \quad (5 - x)(x - 5)$$

$$2 - 2x - 6(x - 5) = 5x(5 - x)$$

Az egyenletben szereplő tört tagok tehát önállósulnak az egészekkel szemben, illetve a többtagunak többtaguval való szorzásánál a jelölésben a zárójelhasználat nem tudatos. /A más úton elinduló tanulók közül 12 tanuló hasonló hibát követ el annyi különbséggel, hogy a beszorzás után $2+2x-6=5x$ egyenlethez jut./ A zárójelhasználattal kapcsolatos hibákról már szóltam, az egészek és törtek problémája azonban tipikusan az egyenletmegoldás során vetődik fel. Okának megállapítása végett a hibázó tanulókkal egyéni beszélgetést folytattam, illetve újabb feladatokat kellett megoldaniuk és az egyes lépéseket megmagyarázniuk. Arra a kérdésre, hogy a 2 egész miért nem szorozta meg, legtöbbször azt válaszolták: "mert a kettes szám egész, nem tört." A törtek eltávolítása érdekében történik az egyenletnek a szorzása. E rövid szá-

bálynak ilyen formában való rögzítése arra sarkallja a tanulót, hogy csak a törtekkel foglalkozzon, tehát mintha a tört külön élne az egyenletben betöltött szerepétől és az egész számoktól. Ez arra mutat, hogy az algebrai törtekkel végzett műveletek tanításánál nem jártunk el kellő gondossággal.

A vizsgálódás arra is rámutatott, hogy a törtek eltávolítása ezeknél a tanulóknál /sőt azok egy részénél is, akik helyesen oldották meg a feladatot/ formális, verbális tudást takar. Ugyanis ezek a tanulók nem tudták helyesen indokolni, hogy a

$$2 - \frac{2x - 6}{5 - x} = \frac{5x}{x - 5}$$

egyenletből mért lesz a tört eltávolítása után

$$2(5 - x)(x - 5) - (2x - 6)(x - 5) = 5x(5 - x) .$$

Nemcsak írásmódjukból, de gondolati sorukból is kimaradt a következőkben kapcsos zárójellel jelölt rész:

$$2 - \frac{2x - 6}{5 - x} = \frac{5x}{x - 5}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{1} - \frac{2x - 6}{5 - x} = \frac{5x}{x - 5} \quad / \quad (5 - x)(x - 5) \\ \frac{2(5 - x)(x - 5) - (2x - 6)(x - 5)}{(5 - x)(x - 5)} = \frac{5x(5 - x)}{(5 - x)(x - 5)} \\ \frac{2(5 - x)(x - 5) - (2x - 6)(x - 5)}{(5 - x)(x - 5)} = \frac{5x(5 - x)}{(5 - x)(x - 5)} \\ 2(5 - x)(x - 5) - (2x - 6)(x - 5) = 5x(5 - x) \end{array} \right.$$

A feladat célszerű megoldása nem az $(5 - x)(x - 5)$ -tel való beszorzást kívánta, hanem az $(5 - x)$ és $(x - 5)$ mint nevezők közötti kapcsolat meglátását. Az algebrai törtek egyszerűsítése, bővítése, a közös nevezőre való hozás, a legkisebb közös többszörös tárgyakásánál a jelzett kapcsolat több helyen alkalmazást nyert. A vizsgálat azt mutatja, hogy az egyenletmegoldásnál az alkalma-

zás mégis problémákat, hibákat eredményez. A hibák oka oda vezet vissza, hogy vagy elsiettük az algebrai törtek témakörének tanítását, vagy az egyenletmegoldás technikájánál nem mutattunk vissza kellő módon az algebrai törteknél tanultakra.

Azok a tanulók, akkk helyes eredményt hoztak ki $/x=16/$, a következő uton jártak el:

$$2 - \frac{2x - 6}{5 - x} = \frac{5x}{x - 5}$$

$$2 + \frac{2x - 6}{x - 5} = \frac{5x}{x - 5} \quad / \quad (x - 5)$$

$$2(x - 5) + 2x - 6 = 5x$$

$$x = -16$$

Ezek a tanulók meglátták az $5-x=-(x-5)$ összefüggést. Ennek az összefüggésnek a meglátása és alkalmazása elvárható volt a többi tanuló többségénél is, hiszen az algebrai törtek témakörében sorozatban oldottak meg olyan műveleteket, egyszerűsítéseket, amely-nél ezt alkalmaztuk. Az a tény, hogy az egyenletmegoldásnál kevesen fedezték fel ezt a lehetőséget, arra mutat, hogy nincs meg a szoros kapcsolat a két anyagegység között, az algebrai törtekkal végzett műveletek ismerete formális, öncélú, holt tőke, nem teljesítőképes tudást jelent ezeknél a tanulóknál. Tipikus hibának mondható az is, hogy sok tanuló nem tesz különbséget az $5-x$ és $x-5$ között, beszorozza az egyenletet $(5-x)$ -szel és a

$$2(5 - x) - (2x - 6) = 5x$$

egyenlethez jut. Az elkövetett hiba még súlyosabb formában jelentkezik azoknál a tanulóknál, akik a törtvonal előtti mínusz előjel szerepében is hibáznak. Ez a kétszeri hiba vezet a

$$2(5 - x) - 2x - 6 = 5x$$

egyenlethez.

A törtvonal előtti mínusz jel problémát okoz azon tanulók egy

résznél is, akik ugyan meglátták az $5-x=-(x-5)$ összefüggést. Ezek a tanulók azonban úgy vélték, hogy a törtvonal előtti mínusz jel a következő módon segít az $5-x=-(x-5)$ összefüggés felhasználásában:

$$2 - \frac{2x-6}{5-x} = \frac{5x}{x-5}$$

$$2 + \frac{6-2x}{x-5} = \frac{5x}{x-5} \quad / \quad (x-5)$$

$$2(x-5) + 6 - 2x = 5x$$

A hiba nyilvánvaló: a törtvonal előtti mínusz jel egyidejűleg megváltoztatja a tört számlálójának és nevezőjének is az előjelét. Azok a hibák ismétlődnek itt meg, amelyekre a 6. hiba tárgyalásánál rámutattam, vagyis a

$$- \frac{2x-6}{5-x} = \frac{6-2x}{5-x}$$

$$- \frac{2x-6}{5-x} = \frac{2x-6}{x-5}$$

$$- \frac{2x-6}{5-x} = - \frac{2x-6}{-(x-5)} = \frac{2x-6}{x-5} \quad \text{stb. összefüggések tisztázatlan volta.}$$

Több tanuló az egyenletmegoldás során arra hivatkozik, hogy "a törtvonal zárójelet helyettesít", ezért kell a törtvonal előtti mínusz jel esetében a tört eltávolítása után zárójelet alkalmazni. Pl. :

$$5 - \frac{2-x}{x-6} = 3 \quad / \quad (x-6)$$

$$5(x-6) - (2-x) = 3(x-6)$$

Ez a magyarázat nem vezet ugyan hibára, de teljesen formális, verbális tudást eredményez. Ehelyett a tudatosságnak kell dominálni, amelyet a már tárgyalt uton biztosítani tudunk.

Végezetül rámutatok még két hibára, amelyek az algebrai kifejezések átalakítása és az egyenletmegoldás közötti hamis analó-

gia felhasználásából illetve megszokásból származnak.

Az algebrai kifejezések azonos átalakítása során a tanuló megszokta az egy sorba való folyamatos írásmódot, pl. :

$$\frac{2a - 2b}{a^2 - b^2} = \frac{2(a - b)}{(a+b)(a-b)} = \dots$$

Ezt az írásmódot több tanuló az egyenletmegoldásban is érvényben igyekszik tartani, pl.:

$$2 - \frac{2x - 6}{5 - x} = \frac{5x}{x - 5}$$

$$2 - \frac{2x - 6}{5 - x} = \frac{5x}{x - 5} = 2 + \frac{2x - 6}{x - 5} = \frac{5x}{x - 5} = \dots$$

Ezzel az írásmóddal teljes össze-visszaság adódik, eltűnik az egyenlet jobb és baloldalának szerepe, az egyenletet vélt azonosságának tekintik.

A másik hiba a törteltávolítás módszerének "alkalmazása" az algebrai kifejezések egyszerűbb alakra való írásában. Különösen előfordul ez a hiba akkor, ha a jelölés is támogatja a hamis analógiára való hivatkozást /ha az algebrai kifejezésben szereplő betűt x-szel jelöljük, mint az egyenletnél általában az ismeretlent/.

Példa

Írjuk egyszerűbb alakra a következő kifejezést:

$$1 - \frac{x}{1 - \frac{x}{x + 1}}$$

A feladat a már tárgyalt "emeletes törtek" problémáit is előhozza, de emellett az egyenlet és kifejezés fogalmának a keverését is. Több tanuló egyenletként kezeli és az egyszerűbb alakot a törteltávolításnak az egyenletnél alkalmazott módszerével "éri el", de a következő módon:

$$1 - \frac{x}{1 - \frac{2x}{x+1}} = 1 - \frac{x}{x+1-2x} = 1 - \frac{x}{1-x} = 1 - x - x = 1 - 2x$$

A 10. hiba illetve hibacsoport tárgyalásánál olyan hibákat soroltam fel, amelyeknek gyökereivel, javítási és megelőzési módjaival a dolgozat előző részeiben részletesen foglalkoztam. Nem soroltam fel több olyan hibát, amelyeknek előfordulását szintén gyakran tapasztalhatjuk, mivel ezekkel kapcsolatos elemzésekkel a szakirodalomban több szerző foglalkozik.

11. hiba

A második osztályban a szögfüggvények értelmezése és a velük való bánásmód begyakorlása után vizsgálatot folytattam e témakörben előforduló tipikus hibák felmérése érdekében. Az előző hibák /1-10. hibák/, amelyek az első osztályban előforduló hibák voltak, olyanok, hogy a javítási és megelőzési eljárásokat kísérleti osztályon próbáltuk ki. A dolgozat bevezető részében említettem, hogy felsőbb osztályokban a kísérleti osztály megszervezését mellőztük, így a hibák orvoslására tett megjegyzéseimet többéves tanításom során kipróbált eljárásokra alapozom.

Vizsgálat

Mekkora az α szög, ha : $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$

Három osztály 86 tanulója vett részt a vizsgálatban.

A vizsgálat eredménye:

hibátlan megoldás: 61 /71 %/ tanuló

hibás " : 25 /29 %/ "

A hibázó 25 tanuló közül 3 tanuló a táblázatból való visszakeresésnél követett el hibát, 22 tanuló hibája két hiba közt oszlik meg a következő módon:

a./ $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$ / 2

$\sin \alpha = 1$ / 19 tanuló /

$\alpha = 90^\circ$

b./ $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$ / 2

$2 \sin \alpha = 1$

$\sin \alpha = \frac{1}{2}$ / 3 tanuló /

$\alpha = 30^\circ$

Mindkét hiba eredete a hamis analógiára és a fogalom tisztázatlan voltára vezethető vissza.

A törtes egyenleteknél alkalmazott törteltávolítás módszerét alkalmazzák /analógia alapján/ a 2-vel való beszorzáskor. Ugyanakkor ezeknél a tanulóknál a $\sin \frac{\alpha}{2}$ és $\frac{\sin \alpha}{2}$ között nincs különbség /fogalom tisztázatlan volta miatt/. A "sin" jel önmaga is önálló része a kifejezésnek, formális módon megy át tudatukba a sinus fogalma. Mivel nemcsak a fogalom tisztázatlan voltából származik ez a hiba, hanem hamis analógián és megszokáson is, ezért teljesen kiküszöbölni nem tudjuk, előfordulása gyakoriságát azonban csökkenthetjük a sinus fogalmának tiszta kialakításával, szemléltetéssel és a kifejezés olvasásának taglalásával.

Hasznosnak mutatkozik, hogy a tanulók maguk elemezzék, miért nem tehetünk egyenlőségjelet a $\sin \frac{\alpha}{2}$ és a $\frac{\sin \alpha}{2}$ közé ? /Itt még csak a derékszögű háromszög hegyesszögét jelenti az α ./ Az elemzés elvezet oda, hogy a $\frac{\sin \alpha}{2}$ -nél az α szögnek vesszük először a sinusát /amely egy viszonzyszámot ad/, majd ennek a viszonzyszámnak a felét, a $\sin \frac{\alpha}{2}$ esetében pedig az α szögnek vesszük először a felét /amely egy szögértéket ad/ és az így kapott szögnek vesszük a sinusát. Tulajdonképpen burkolt formában annak a belátásáról van szó, hogy általában: $c f/x/ \neq f/cx/$. A tárgyalt hiba nemcsak a $\sin \alpha$ esetében fordul elő, hanem a többi szögfüggvényénél is. Hasonló, analógiás, megszokásból és a fogalom tisztázatlan voltából származó hibák ezek. /Itt jegyzem meg, hogy több tanuló a $\sin^2 \alpha$ esetében is bizonytalanságot árul el. A jelölés okozta nehézség abból származik, hogy nem fordítottunk kellő gondot a jelölés magyarázatára, neveze-

tesen arra, hogy $\sin \alpha \cdot \sin \alpha = (\sin \alpha)^2 = \sin^2 \alpha$. További, a formalizmusból származó hiba, hogy sok tanuló csak akkor írja fel helyesen a derékszögű háromszög szögeinek függvényét, ha a háromszöget a megszokott állásban veszi fel, illetve oldalait a megszokott a,b,c betűkkel jelöli./

12. hiba

A matematikai szimbólumok, jelölések nemcsak a szögfüggvényeknél járnak nehézséggel, hanem a logaritmusnál is találkozunk evvel a problémával. Az alábbiakban tárgyalt vizsgálat eredménye azt mutatja, hogy ez a fontos fogalom nemcsak mint új fogalom szokatlan, nehéz a tanulók számára, hanem tömör jelölésmódja miatt is nagy körültekintéssel kell lennünk a tárgyalásnál.

A szimbolika sok tanulónál formalizmushoz vezet, a forma lesz az elsődleges a tartalommal szemben, éppen a tartalom hiánya miatt. Ezt a formális ismeretet segíti, hogy a logaritmustábla mechanikus alkalmazásának tudására szállítjuk le olykor a tanulók tartalmi tudását.

Vizsgálat

Oldjuk meg a következő egyenleteket:

$$a./ \lg \lg x = \lg 10$$

$$b./ \lg^2 x = 4$$

Az a./ feladatot 84 tanuló közül 32 tanuló, a b./ feladatot pedig 24 tanuló hibásan oldotta meg. Az elkövetett hibák az a./ feladatnál így oszlottak meg:

$$\lg \lg x = \lg 10$$

$$\lg x = 1$$

$$x = 10$$

/ 12 tanuló /

$$\lg \lg x = \lg 10$$

$$\lg x = 10$$

$$x = 1$$

/ 14 tanuló /

$$\begin{aligned} \lg \lg x &= \lg 10 \\ \lg x + \lg x &= \lg 10 \\ 2 \lg x &= \lg 10 & / 6 \text{ tanuló} / \\ x^2 &= 10 \\ x &= \sqrt{10} \end{aligned}$$

Az első esetben észreveszik, hogy $\lg 10 = 1$, az lg jel így eltűnik a jobboldalon, de mivel egyenlet, így a baloldalon levő egyik lg jelnek is el kell tűnni /hamis analógia, a jelekkel való formális bánásmód, a fogalom tisztázatlan volta !/.

A második esetben a fogalom tisztázatlan volta játszik elsőrendű szerepet. A $\lg x = 10$ egyenletből $x=1$ megoldást ad 14 tanuló. Ezeknél a tanulóknál a logaritmus fogalmának újbóli tisztázásával tudunk segíteni.

A harmadik hibánál a $\lg \lg x$ jelölést szorzatnak vélik és a szorzat logaritmusának szabálya szerint lesz belőle $\lg x \cdot \lg x$. Nem látják az $\lg \lg x$ kifejezésben az $f/g/x//$ összetett függvényt. Célszerű a $\lg \lg x$ kifejezést $\lg(\lg x)$ alakban is felírni - tudatosodjon, hogy a zárójel elhagyása csak az egyszerűbb írásmód miatt történik.

A b./ feladatban 24 tanuló hibája a következő képet mutatja:

13 tanuló	11 tanuló
$\lg^2 x = 4$	$\lg^2 x = 4$
$2 \lg x = \lg 4$	$\lg^2 x = 2^2$
$2x = 4$	$x = 2$
$x = 2$	

Az első típusu hiba /amely két hibából tevődik össze/, a tanult szabályok alkalmazása során születik. Ugyanis tudja a hatvány logaritmusának szabályát arra az esetre, amikor a hatvány alapja egy szám / $\lg x^n = n \lg x$ /, de nem veszi észre, hogy a hatvány alap-

ja most egy függvény, a logaritmusfüggvény. "A hatványalap logaritmusát szorzom a kitevővel, de mivel a hatvány alapja $/x/$ már logaritmálva van, ezért csak a kettővel kell megszorozni" - mondják. Így lesz a $2 \lg \lg x$ helyett $2 \lg x$. Ugyanezek a tanulók követik el a további megoldás során azt a durva hibát, hogy az egyenletet ugymond "egyszerűsítik" $\lg$ -vel.

A második típusu hiba szintén a függvénytan előismeretek gyenge voltára, valamint a jelölés okozta nehézségre mutat. A pozitív valós számok esetében látták, hogy ha két azonos kitevőjű hatvány egyenlő és ismerjük az egyik alapot, akkor a másik alap ugyanaz a szám: $a^2 = 2^2$ $a = 2$. Ez a gondolat motivál akkor, amikor a $\lg^2 x = 2^2$ egyenletből $x=2$ lesz, hiszen $2^2 = 2^2$. Ha ezt az egyenletet $/\lg x/^2 = 2^2$ alakban irtam fel, akkor a hibázó tanulók egy része a $\lg x = 2$ helyes eredményt írta fel.

A logaritmus témakörében ezeken a hibákon kívül más hibák is előfordulnak /karakterisztika, mantissza, táblázathasználat, visszakeresés, interpoláció, stb. problémái/. Jelen vizsgálatban csak a logaritmus fogalmának tisztázatlan voltából, illetve a jelölésrendszer nehézségéből származó néhány hibára kívántam rámutatni. A $\lg^2 x = \lg x \lg x = (\lg x)^2$, a $\lg x^2 = \lg(x x) = \lg(x^2)$ és $\lg \lg x = \lg(\lg x)$ jelölések megegyezőségének illetve különbözőségének magyarázata a fenti hibák előfordulását nagymértékben csökkenti.

13. hiba

Gyakran tapasztalható hiba, hogy a tanulók a különböző táblázatok használata közben a táblázatból kiírt függvényértékben a tizedesvessző helyét rosszul jelölik ki. Különösképpen észrevehető ez a négyzetreemelés és négyzetgyökvonás esetében. Mivel a táblázathasználat szerepe az utóbbi években erősen előtérbe került, szükséges, hogy az előforduló hibák számát minimálisra szorítsuk. Ha megtettünk minden megelőzési intézkedést, akkor is előfordulnak hibák a figyelem szétszórtsága vagy a "mellénézések" miatt. Vizsgálatom nem ezekre a természetes hibákra vonatkozik, hanem olyanokra, amelyeket megelőzési eljárásokkal csökkenthetünk.

Vizsgálat

Végezzük el a következő négyzetreemeléseket és négyzetgyökvonásokat:

1./	$0,42^2$	4./	$\sqrt{0,00049}$
2./	$0,0028^2$	5./	$\sqrt{0,0038}$
3./	1200^2	6./	$\sqrt{280000}$

A vizsgálatban 86 tanuló vett részt, eredménye:

1. feladat	2. feladat	3. feladat	4. feladat	5. feladat	6. feladat
5	10	11	12	15	11

A fenti adatok a rossz megoldások számát jelölik. Az eredményből látható, hogy elsősorban a nagyobb illetve kisebb nagyságrendű számok esetében fordulnak elő hibák. A hibás megoldások azt jelentik, hogy vagy rossz helyen nézte ki a táblázatból a függvény-

értéket /pl. 38 helyett 3,8-nél/ vagy bár jó helyen nézte a függvényértéket, de a tizedes vessző helyét rosszul választotta meg. / Pl. 0,06164 helyett 0,6164-et vagy 0,006164-et ir./

Mindkét hiba eredete a számok normálalakjának felírásában, illetve a hatványozásban és a gyökvonásban való járatlanságra vezethető vissza. A legfeljettebb módszer a tizedes vessző helyének becsléssel történő megállapítása. Ezt kevés tanuló alkalmazza, mert a tévedés lehetősége jobban fennáll, mint a sablonos eljárásoknál. Feltétlenül megkövetelendő a kezdeti fokon, hogy a négyzetreemelésnél a tanuló

$$x = N 10^k \quad / \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots / \\ 1 \leq N < 10$$

alakban írja fel a számot, amelyből négyzetreemelés után az

$$Y = x^2 = N^2 10^{2k}$$

alakot kapja. A táblázatból N^2 értéke olvasható le, amelyből Y értéke a 10^{2k} -val való szorzás után adódik. Az ilyen jellegű begyakoroltatás után minden közbülső lépés leírása elmaradhat, mert ránézéssel a $2k$ értéke megállapítható.

A vizsgálat azt is mutatja, hogy a gyökvonásnál gyakrabban fordulnak elő hasonló hibák. Ennek oka nemcsak a gyökvonás inverz művelet jellege, hanem a 10 kitevőjének páros vagy páratlan volta is. Ugyanis a normál alakot felírva k páros vagy páratlan, így 10^k vagy teljes négyzetszám vagy nem. Éppen e két lehetőség vizsgálatából adódik több tanuló bizonytalansága, hibázása. /Nem tudja eldönteni, hogy pl. $\sqrt{384,6}$ értékét 3,84-nál vagy 38-nál nézze-e ?/ Ezt a dilemmát feloldhatjuk a következő szabálynak tapasztalati úton való megmutatásával:

"Írjuk fel a gyök alatti számot $x = M 10^k$ alakban, ahol $1 \leq M < 100$ és k páros. Ekkor $y = \sqrt[k]{x} = \sqrt[k]{M 10^k} = \sqrt[k]{M} 10^{\frac{k}{k}} = \sqrt[k]{M} 10^1$. M értékét a táblázatból nyerjük, amelyet 10^1 -vel kell szoroznunk."

/Lényegében ugyanazt csináltuk, mint a normálalakos megoldásnál, csak a szétválasztási műveletet egyetlen szabályba öntöttük.

Ezen okoskodás után megszűnik a táblázathasználatnál a már említett bizonytalanság./

Tapasztalatom, hogy a hibák száma a tárgyalt eljárás alkalmazásával lényegesen csökkent.

14. hiba

A gyökvonás azonosságainak alkalmazása során is olyan hibák ismétlődnek meg évről-évre, amelyeknek eredetéről az előző hibáknál szóltam. Szerepet játszik azonban ezekben a hibákban a gyökjel, illetve a gyökvonás szabályainak kellő mértékű begyakorlottságának hiánya is.

Vizsgálat

Gyökjel elé hozással alakítsuk át a következő kifejezéseket:

$$a./ \sqrt{\frac{7a}{9b^2}} \qquad b./ \sqrt{4a^2 + 8b^2} \qquad c./ \sqrt{8(a+b)^3}$$

A vizsgálat eredménye:

$$a./ 7/8\% / \text{hibás} \qquad b./ 12/14\% / \text{hibás} \qquad c./ 14/16\% / \text{hibás}$$

Az a./ feladatnál a hibázó 7 tanuló a következő megoldást adta:

$$\sqrt{\frac{7a}{9b^2}} = 3b \sqrt{7a}$$

A tört négyzetgyökének szabályát ismerik ezek a tanulók, hiszen a számlálóból és nevezőből vonnak gyököt, de az eredmény algebrai leírását eltévesztik. A hiba ugyanazokra az okokra vezethető vissza, amelyeket az algebrai törtek tárgyalásánál láttunk. /7.hiba/
Ha ugyanezt a feladatot úgy adjuk fel, hogy vonjunk gyököt a következő törtből, akkor csaknem mindenki jó megoldást ad:

$$\sqrt{\frac{7a}{9b^2}} = \frac{\sqrt{7a}}{3b}$$

A "gyökjel elé hozás" felszólítás ösztönzi a tanulót arra, hogy $\frac{\sqrt{7a}}{3b}$ -ből $3b \sqrt{7a}$ legyen. /Vagyis az $\frac{ab}{c} = \frac{1}{c} ab$ alakkal kapcsolatos hibáról van itt szó./

A b./ feladatban elkövetett hibák a következők:

$$\sqrt{4a^2 + 8b^2} = 2a + 4b$$

$$\sqrt{4a^2 + 8b^2} = 2a + b\sqrt{8} = 2a + 2b\sqrt{2}$$

Az első hiba teljes tájékozatlanságot árul el a négyzetgyökvonás fogalmáról. A négyzetgyökvonást a kitevők és az együtthatók 2-vel való osztásával végzik el. Hamis analógia is szerepet játszik ebben, mivel pl. $\sqrt{a^6} = a^3$, vagyis a kitevőt valóban 2-vel osztjuk. A 2-vel való osztást ennek alapján viszik át az együtthatók esetére is. A második hiba az $(a + b) = ac + bc$, illetve $\frac{a + b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ szabályokból származó analógiás hiba. A tagonkénti műveletvégzés szabályát viszik át a tagonkénti gyökvonás esetében. Egyszerű ellenpéldákkal megelőzhetjük ezeket a hibákat. Pl. :

$$\sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$$

$$\sqrt{4 + 12} \neq \sqrt{4} + \sqrt{12} = 2 + 2\sqrt{3} \sim 2 + 2 \cdot 1,7 = 2 + 3,4 = 5,4$$

Vagy a négyzetreemeléssel való kapcsolat felhasználásával:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \implies \begin{cases} a + b = \sqrt{a^2 + 2ab + b^2} \\ a + b \neq \sqrt{a^2} + \sqrt{2ab} + \sqrt{b^2} = a + \sqrt{2ab} + b \end{cases}$$

Egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha $\sqrt{2ab} = 0$, vagyis vagy a vagy b egyenlő 0-val.

A c./ feladatnál elkövetett hiba:

$$\sqrt{8(a + b)^3} = a + b\sqrt{8(a + b)} = a + 2b\sqrt{2(a + b)}$$

A zárójelhasználat hiányos ismerete miatt hibáznak ezek a tanulók, amelyre a dolgozatban több helyen rámutattam.

K ö v e t k e z t e t é s e k

A középiskolai matematikai tananyagnak csak kicsiny hányadát tettük vizsgálat tárgyává ebben a dolgozatban. A vizsgálatok eredménye azt mutatja, hogy az általános iskolában tapasztalt tipikus hibák általában nem szűnnek meg a középiskolában. Egyes hibák tovább élnek, mások százalékos előfordulása csökken, és újabb hibák előtérbe kerülésével is számolnunk kell. A helytelenül feltételezett analógián alapuló hibák mellett megnövekszik azoknak a hibáknak a száma, amelyeknek eredete a fogalmaknak tisztázatlan voltára, a formalizmusra, a matematikai műszavakra, kifejezésekre és jelölésrendszerekre vezethetők vissza. Ezen újabb hibák észlelése természetesen összefügg a középiskolai matematikai tananyag nehezebb voltával. Ugyanakkor felszínes elintézése volna a problémának csupán az erre való hivatkozás.

Feltétlenül figyelembe kell vennünk a következő tényezőket:

- 1./ A hibákat elkövető tanulók többsége a gyengébb tanulók közül került ki.
- 2./ A megelőzésre és javításra irányuló kísérletek pozitív eredményt mutattak.
- 3./ A hibák előfordulásában szubjektív tényezőkön kívül objektív tényezők is találhatók.
- 4./ A matematikai gondolkodás és készség együttes fejlesztésének az előforduló hibákhoz való viszonya.

A felsorolt tényezők külön-külön és együttesen is elsősorban a szubjektív tényező szerepének megvizsgálására kell, hogy ösztönözzön bennünket. Igényesnek kell lennünk magunkkal szemben, azután lehetünk igényesek tanítványainkkal szemben.

Az adott körülményekhez képest megteszünk-e mindent, hogy a hibák számát a minimumra csökkentjük ?

Ugyanakkor a jó vagy gyengébb tanári munka mellett az objektív tényezők megvizsgálása is jogos. A társadalom növekvő igényei az iskolával szemben szükségképpen a reformok, a modernizálódás folyamatát indítja meg. Ez a folyamat a tananyag, az oktatási módszerek, sőt a megszokott szervezeti formák modernizálását követeli.

Egyes hibák előfordulásának a minimumra szorítása elérhető a tanári munka javításával, az elméletre és gyakorlatra fordított idő helyes arányának megválasztásával, de mindezeknek a figyelembevétele is kevés több hibának jelentősebb csökkentésére. Az adott osztály- és időkeretek , továbbá a tantervben előírt anyag esetleges túlméretezettsége miatt a legnagyobb fáradozás is csak minimális eredménnyel jár. Sok esetben az említett objektív tényezők valamilyen formában való megkerülésével /osztály- és időkeretek felbontásával, pl. korrepetálás/ tudunk segíteni a bajokon. Nem mindig elegendő a tanítási óra /az idő rövidsége, a tanulók inhomogén tudásszintje, a tananyag méretei miatt/ a matematikai gondolkodás és készség megfelelő szintre való emeléséhez. Az említett megkötöttségekben is kereshető a megfelelő matematikai gondolkodás hiánya, amely végsősoron erősíti a dolgozatban tárgyalt hibák domináns okainak funkcionálását. A tanulók differenciált szintje, a tananyag korszerűsítése, az ifjunak a jövőbeli társadalmi hasznossága, teljesítőképes tudása differenciáltabb foglalkoztatottságot feltételeznek. Ennek vizsgálata azonban meghalagja e szerény módszertani munka kereteit.

Vizsgálataim és kísérleteim célja néhány tipikus hiba előfordulásakor fellépő okoknak a bemutatása, ezek következményeinek, megelőzésének illetve javításának keresése. A teljesség és tökéletesség igénye nélkül vállalkoztam erre a munkára. Az általam alkalmazott eljárások nem mondhatók tökéletesnek és egyedül eredményesnek. Mindannyiunk kötelessége azonban, hogy keressük a meglehetősen nagy százalékos arányban előforduló hibák orvoslásához vezető utakat. Ezen lehetséges utak egyikének megtalálásához kívántam dolgozatommal hozzájárulni.

F e l h a s z n á l t i r o d a l o m

1. Ágoston György: A nevelés elmélete. Pedagógia I. Tankönyvkiadó.
2. Beke Manó : Typikus hibák a matematikatanításban. Magyar Pedagógia 1900.
3. Bragyisz: A középiskolai matematikatanítás módszertana. Bp. 1954.
4. Cser Andor : Formalizmus a matematikatanításban. Köznevelés. 1952.
5. Cser Andor - Lénárd Ferenc: Mennyiségek a matematikában. PTI Módszertani Osztály Közleményei.
6. Faragó László : I. gimnáziumi tanulók matematikai absztrakcióképessége. Pedagógiai Szemle 1958.
7. Faragó László : A logikus gondolkodásra való nevelés terén elkövetett didaktikai hibák a középiskolai matematikatanításban. Tanulmányok a neveléstudományok köréből. 1958.
8. Faragó László : Aritmetikai feladatok általános /algebrai/ alakban való megoldása során elkövetett tanulóhibák. Tanulmányok a neveléstudományok köréből. 1959.
9. Faragó László : Lélektani szempontok érvényesítése a matematikatanítás metodikájában. Tanulmányok a neveléstudományok köréből. 1961.
10. Hajtman Béla : Bevezetés a matematikai statisztikába pszichológusok számára. Akadémiai Kiadó. Bp. 1968.
11. Itelszon : Matematikai és kibernetikai módszerek a pedagógiában. Tankönyvkiadó Bp. 1967.

12. Kelemen László : A gondolkodás nevelése az általános iskolában.
Tankönyvkiadó Bp. 1967.
13. Lénárd Ferenc : A problémamegoldó gondolkodás. Bp. 1963.
14. Matematika a gimnáziumok és szakközépiskolák I. osztálya számára. Tankönyvkiadó 1966.
15. Matematika a gimnáziumok és szakközépiskolák II. osztálya számára. Tankönyvkiadó 1967.
16. Menscsinszkaja : A matematikatanítás lélektana.
17. Mosonyi Kálmán : Tipikus gondolkodási hibák számolásból és mérésből az általános iskola felső tagozatában.
Doktori disszertáció. Szeged 1968.
18. Piaget : Válogatott tanulmányok. Gondolat 1970.
19. Pólya György : A problémamegoldás iskolája I-II. Tankönyvkiadó 1967.
20. Pólya György : A gondolkodás iskolája. Bp. 1969.
21. Rubinstein : Gondolkodáslélektani vizsgálatok. Bp. 1960.
22. Szelianszky Ferenc : A hibakutatás neveléslélektani problémái.
Szeged, 1938.
23. Szelianszky Ferenc : Matematikai tanulóteljesítmények neveléslélektani hibadiagnosztizálásáról és tanulásaiból részletek.
24. Sztoljár : A matematikatanítás módszerei. Tankönyvkiadó 1969.

T a r t a l o m j e g y z é k

Bevezetés	1. oldal
A hibakutatás rövid történeti áttekintése	7. "
Vizsgálatok és kísérletek leírása, értékelése	19. "
A vizsgált tipikus hibák tárgyalása	24. "
Következtetések	96. "
Felhasznált irodalom	99. "